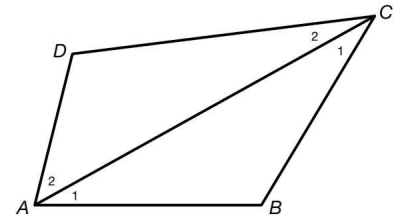


7 Bewijzen

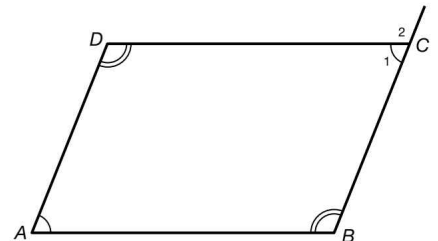
Voorkennis Definities, vermoedens en stellingen

Bladzijde 99

- 1 $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B = \angle C_3 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle A + \angle B + \angle C_2 = 180^\circ$
- 2 Teken diagonaal AC .
 $\left. \begin{array}{l} \angle A_1 + \angle B + \angle C_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle A_2 + \angle D + \angle C_2 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle A_1 + \angle B + \angle C_1 + \angle A_2 + \angle D + \angle C_2 = 360^\circ \\ \angle A_1 + \angle A_2 = \angle A \\ \angle C_1 + \angle C_2 = \angle C \end{array} \right\} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$
- 3 $\left. \begin{array}{l} \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \\ \angle A + \angle B_1 + \angle C = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \angle B_2 = \angle A + \angle C$
- 4 $\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC, \text{ dus } \angle A = \angle B_2 \text{ (F-hoeken)} \\ AB \parallel CD, \text{ dus } \angle C = \angle B_2 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \angle A = \angle C$
 Op dezelfde manier kun je bewijzen dat $\angle B = \angle D$.
 Dus de overstaande hoeken in een parallellogram zijn even groot.



- 5 a $\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B_1 + \angle C + \angle D = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle A = \angle C \text{ en } \angle B_1 = \angle D \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} 2\angle A + 2\angle B_1 = 360^\circ$
 $\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B_1 = 180^\circ \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle A = \angle B_2$
 Uit $\angle A = \angle B_2$ volgt dat $AD \parallel BC$ (F-hoeken).
- b Zie de figuur hiernaast.
 $\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_1 + \angle D = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle A = \angle C_1 \text{ en } \angle B = \angle D \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \angle B + \angle C_1 = 180^\circ$
 $\left. \begin{array}{l} \angle B + \angle C_1 = 180^\circ \\ \angle C_1 + \angle C_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle B = \angle C_2$
 Uit $\angle B = \angle C_2$ volgt dat $AB \parallel CD$ (F-hoeken).



Bladzijde 100

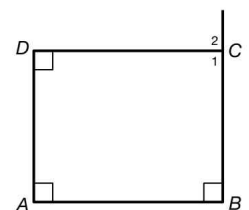
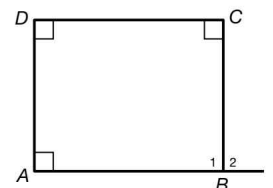
- 6 a Zie de figuur hiernaast.
 $\left. \begin{array}{l} \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \\ \angle B_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \angle B_2 = 90^\circ$
 Uit $\angle A = \angle B_2$ volgt dat $AD \parallel BC$ (F-hoeken).

Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle C_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \\ \angle C_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \angle C_2 = 90^\circ$$

Uit $\angle B = \angle C_2$ volgt dat $AB \parallel CD$ (F-hoeken).

Uit $AD \parallel BC$ en $AB \parallel CD$ volgt dat $ABCD$ een parallellogram is.



b Zie de figuur hiernaast.

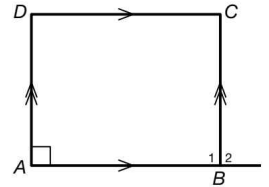
$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC, \text{ dus } \angle A = \angle B_2 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle A = 90^\circ \end{array} \right\} \angle B_2 = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_2 = 90^\circ \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle B_1 = 90^\circ$$

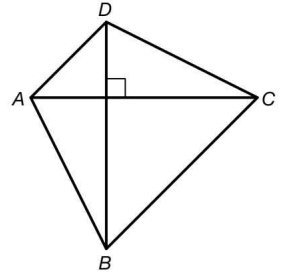
$$\left. \begin{array}{l} \angle B_2 = 90^\circ \\ AB \parallel CD, \text{ dus } \angle B_2 = \angle C \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \angle C = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B_1 + \angle C + \angle D = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle A = \angle B_1 = \angle C = 90^\circ \end{array} \right\} \angle D = 90^\circ$$

$\angle A = \angle B_1 = \angle C = \angle D = 90^\circ$, dus $ABCD$ is een rechthoek.



7 a Zie de figuur. De diagonalen staan loodrecht op elkaar, toch is het geen ruit.



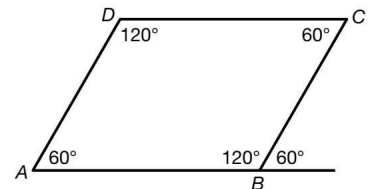
b Neem bijvoorbeeld parallellogram $ABCD$ met $\angle A = 60^\circ$.

Uit de eigenschappen van een parallellogram volgt dan $\angle C = 60^\circ$ en $\angle B = \angle D = 120^\circ$.

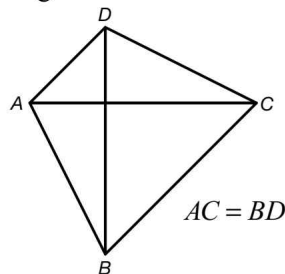
De buitenhoek van $\angle B$ is 60° .

$$\frac{\angle A + \angle C + \angle D}{3} = \frac{60^\circ + 60^\circ + 120^\circ}{3} = 80^\circ$$

Dus de buitenhoek van $\angle B$ is niet gelijk aan het derde deel van de niet-aanliggende binnenhoeken.



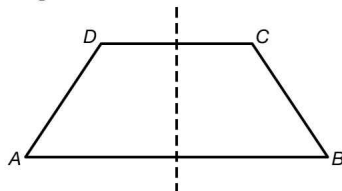
8 a De stelling is niet omkeerbaar.
Tegenvoorbeeld:



b De stelling is omkeerbaar.

Als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen, dan is de vierhoek een parallellogram.

c De stelling is niet omkeerbaar.
Tegenvoorbeeld:

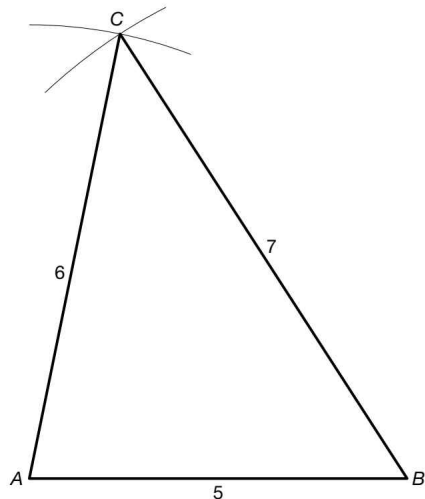


7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken

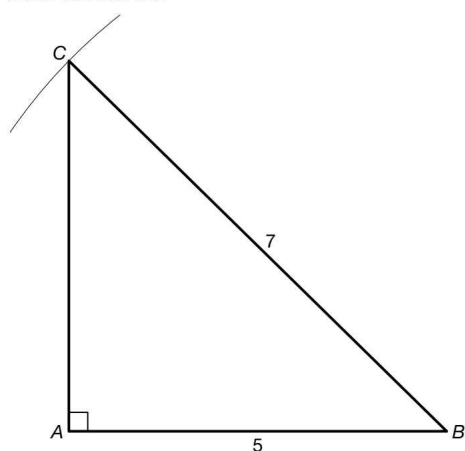
Bladzijde 101

- 1 a $\angle ABC = \angle DBE$ omdat dit dezelfde hoek is.
b $\angle BAC = \angle BDE$ omdat dit F-hoeken zijn.
c $\triangle ABC$ en $\triangle DBE$ zijn gelijkvormig omdat ze twee paar gelijke hoeken hebben.

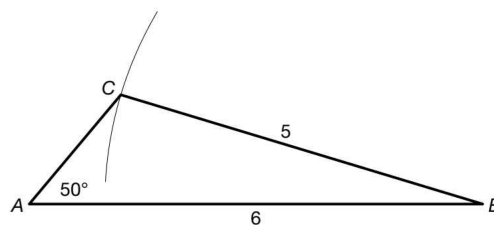
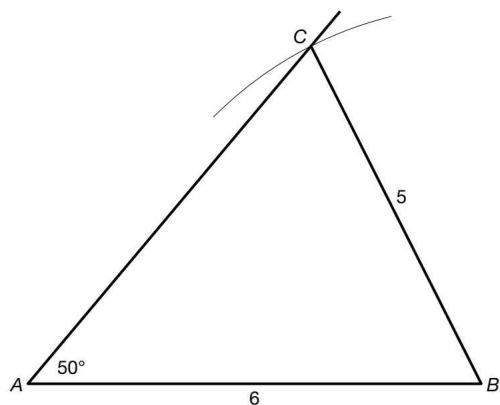
2 a Eén driehoek.



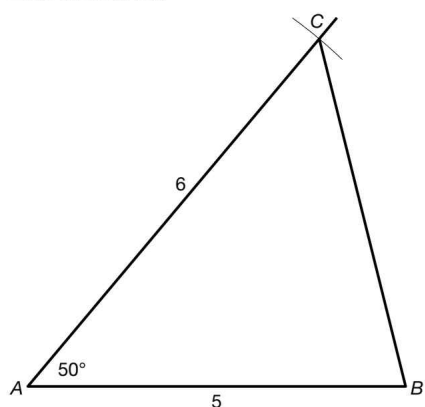
b Eén driehoek.



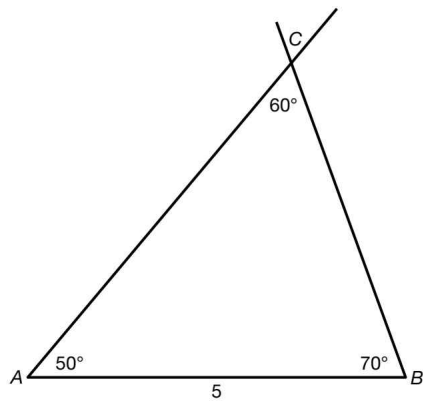
c Twee verschillende driehoeken.



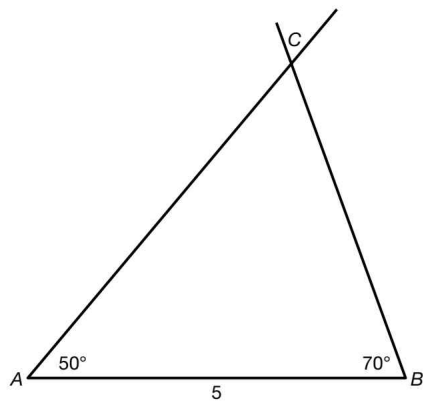
d Eén driehoek.



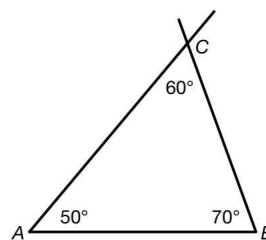
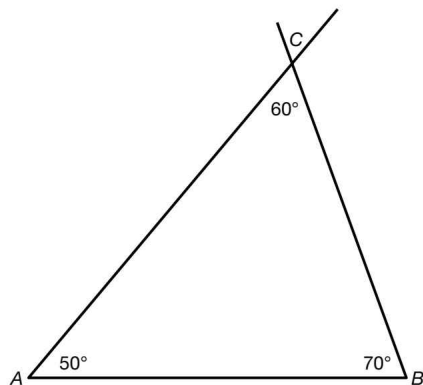
e Eén driehoek.



f Eén driehoek.

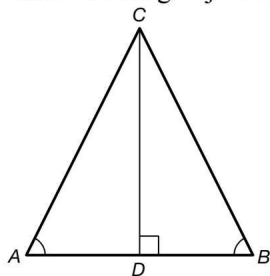


g Meer verschillende driehoeken.



Bladzijde 104

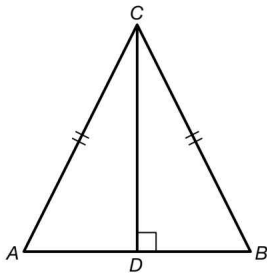
3 Teken de hoogtelijn CD .



$$\left. \begin{array}{l} CD = CD \\ \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle CAD = \angle CBD \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ADC \cong \triangle BDC \text{ (ZHH)}$$

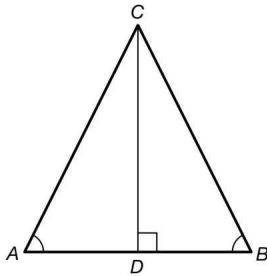
Dus $AC = BC$.

- 4 a** Teken de hoogtelijn CD .



$CD = CD$
 $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$
 $AC = BC$ (gelijkzijdige driehoek)
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} CD = CD \\ \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ \\ AC = BC \end{matrix}} \right\} \triangle ADC \cong \triangle BDC \text{ (ZZH)}$
 Dus $\angle CAD = \angle CBD$.
 Analoog kun je bewijzen dat $\angle ABC = \angle BCA$.
 Dus $\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA$.

- b** Teken de hoogtelijn CD .



$CD = CD$
 $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$
 $\angle CAD = \angle CBD$ (gegeven)
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} CD = CD \\ \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle CAD = \angle CBD \end{matrix}} \right\} \triangle ADC \cong \triangle BDC \text{ (ZHH)}$
 Dus $AC = BC$.
 Analoog kun je bewijzen dat $AB = BC$.
 Dus $AB = BC = AC$.
 Omdat $AB = BC = AC$ is de driehoek gelijkzijdig.

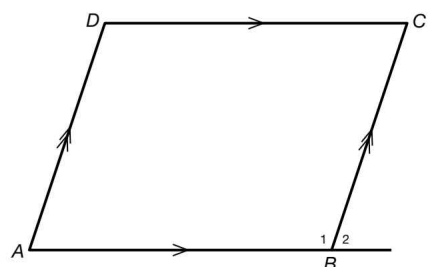
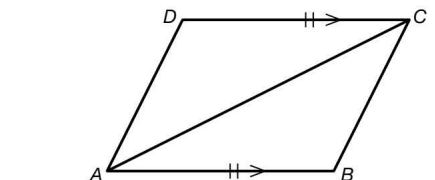
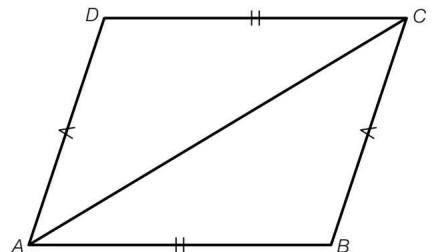
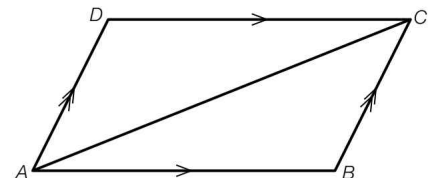
- 5 a** Teken de diagonaal AC .

$\angle BAC = \angle DCA$ (Z-hoeken)
 $\angle BCA = \angle DAC$ (Z-hoeken)
 $AC = AC$
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \angle BAC = \angle DCA \\ \angle BCA = \angle DAC \\ AC = AC \end{matrix}} \right\} \triangle ABC \cong \triangle CDA \text{ (HZH)}$
 Uit $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ volgt dat $AB = CD$ en $AD = BC$.

- b** $AB = CD$ (gegeven)
 $BC = AD$ (gegeven)
 $AC = AC$
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} AB = CD \\ BC = AD \\ AC = AC \end{matrix}} \right\} \triangle ABC \cong \triangle CDA \text{ (ZZZ)}$
 Uit $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ volgt dat $\angle BAC = \angle DCA$,
 dus $AB \parallel CD$ (Z-hoeken) en
 dat $\angle BCA = \angle DAC$, dus $AD \parallel BC$ (Z-hoeken).
 Dus $ABCD$ is een parallellogram omdat $ABCD$ twee paar evenwijdige zijden heeft.

- c** Teken de diagonaal AC .
 $AB = CD$ (gegeven)
 $\angle BAC = \angle DCA$ (Z-hoeken)
 $AC = AC$
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} AB = CD \\ \angle BAC = \angle DCA \\ AC = AC \end{matrix}} \right\} \triangle ABC \cong \triangle CDA \text{ (ZHZ)}$
 Uit $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ volgt dat $\angle ACB = \angle CAD$,
 dus $AD \parallel BC$ (Z-hoeken).
 Dus $ABCD$ is een parallellogram omdat $ABCD$ twee paar evenwijdige zijden heeft.

- d** Verleng zijde AB aan de kant van B .
 $AD \parallel BC$, dus $\angle A = \angle B_2$ (F-hoeken)
 $AB \parallel CD$, dus $\angle C = \angle B_2$ (Z-hoeken)
 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \angle A = \angle B_2 \\ \angle C = \angle B_2 \end{matrix}} \right\} \angle A = \angle C$
 Analoog kun je bewijzen dat $\angle B = \angle D$.



$$\text{e } \left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B_1 + \angle C + \angle D = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle A = \angle C \text{ (gegeven)} \\ \angle B_1 = \angle D \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} 2\angle A + 2\angle B_1 = 360^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B_1 = 180^\circ \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle A = \angle B_2$$

Dus $AD \parallel BC$ (F-hoeken).

Analoog kun je bewijzen dat $AB \parallel CD$.

Dus $ABCD$ is een parallellogram omdat $ABCD$ twee paren evenwijdige zijden heeft.

$$\text{f } \left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (vraag a)} \\ AB \parallel CD, \text{ dus } \angle BAC = \angle DCA \text{ (Z-hoeken)} \\ AB \parallel CD, \text{ dus } \angle ABD = \angle CDB \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \cong \triangle CDS \text{ (HZH)}$$

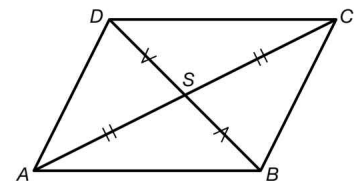
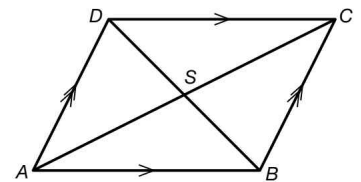
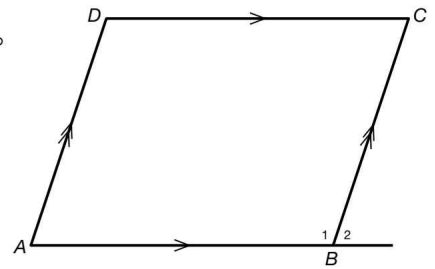
Uit $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ volgt dat $AS = CS$ en $BS = DS$.

$$\text{g } \left. \begin{array}{l} AS = CS \text{ (gegeven)} \\ DS = BS \text{ (gegeven)} \\ \angle ASD = \angle BSC \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ASD \cong \triangle CSB \text{ (ZHZ)}$$

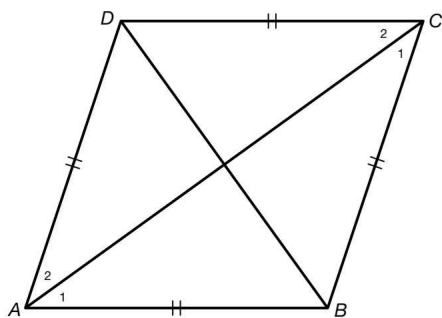
Uit $\triangle ASD \cong \triangle CSB$ volgt dat $\angle DAS = \angle BCS$, dus $AD \parallel BC$ (Z-hoeken).

Analoog kun je bewijzen dat $AB \parallel CD$.

Dus $ABCD$ is een parallellogram omdat $ABCD$ twee paar evenwijdige zijden heeft.



6 a Teken de diagonalen AC en BD .

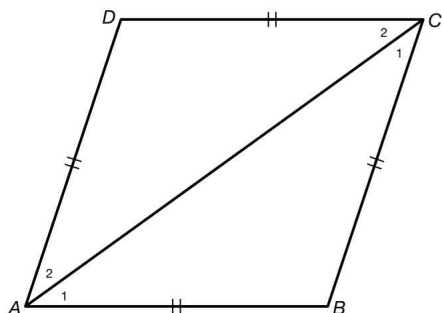


$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (ruit)} \\ BC = AD \text{ (ruit)} \\ AC = AC \end{array} \right\} \triangle ABC \cong \triangle CDA \text{ (ZZZ)}$$

Uit $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ volgt $\angle A_1 = \angle C_2$ dus $AB \parallel CD$ (Z-hoeken), en $\angle C_1 = \angle A_2$ dus $AD \parallel BC$ (Z-hoeken).

Dus een ruit is tevens parallellogram.

b Teken de diagonaal AC .



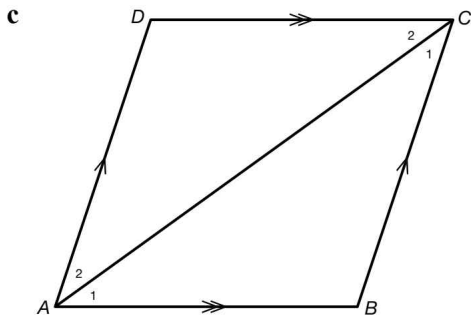
$AB = BC$ (ruit) dus $\angle A_1 = \angle C_1$ (gelijkbenige driehoek).

$AD = CD$ (ruit) dus $\angle A_2 = \angle C_2$ (gelijkbenige driehoek)

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle A_2 = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle A_1 = \angle C_1 \\ \angle A_2 = \angle C_2 \end{array} \right\} \angle A_1 = \angle A_2 = \angle C_1 = \angle C_2$$

Dus AC deelt $\angle A$ en $\angle C$ middendoor.

Analoog kun je bewijzen dat $\angle B$ en $\angle D$ door BD middendoor worden gedeeld.

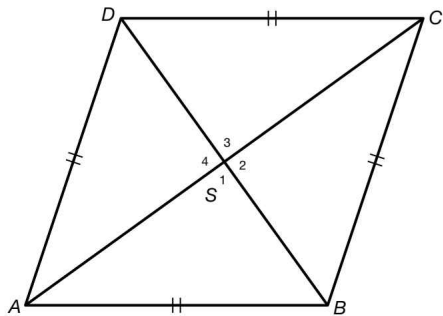


$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle A_2 = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle A_1 = \angle A_2 \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \angle A_1 = \angle A_2 = \angle C_1 = \angle C_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ACD \text{ en } \triangle ABC \text{ zijn gelijkbenig (gelijkbenige driehoek).} \\ AD = CD \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ AB = BC \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ AC = AC \end{array} \right\} \triangle ABC \cong \triangle ADC \text{ (ZZZ)}$$

Dus $AB = BC = CD = AD$, dus $ABCD$ is een ruit.

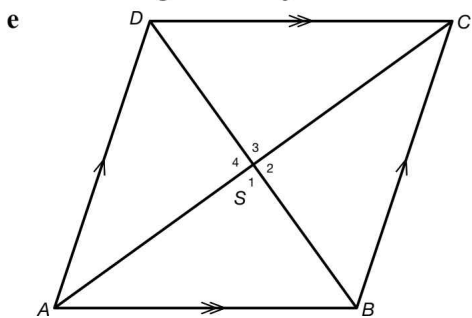
- d** Uit vraag a volgt dat een ruit ook een parallellogram is.
Teken de diagonalen AC en BD . Het snijpunt is S .



$$\left. \begin{array}{l} BS = DS \text{ (parallellogram)} \\ AS = AS \\ AB = AD \text{ (ruit)} \end{array} \right\} \triangle ABS \cong \triangle ADS \text{ (ZZZ)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle S_1 = \angle S_4 \\ \angle S_1 + \angle S_4 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle S_1 = \angle S_4 = 90^\circ$$

Dus de diagonalen snijden elkaar loodrecht.

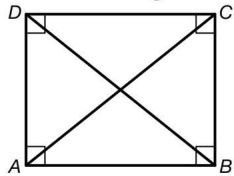


$$\left. \begin{array}{l} BS = DS \text{ (parallellogram)} \\ \angle S_1 = \angle S_4 = 90^\circ \\ AS = AS \end{array} \right\} \triangle ABS \cong \triangle ADS \text{ (ZHZ)}$$

Uit $\triangle ABS \cong \triangle ADS$ volgt $AB = AD$.

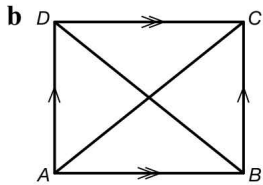
$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ AB = CD \text{ (parallellogram)} \\ AD = BC \text{ (parallellogram)} \end{array} \right\} AB = BC = CD = AD, \text{ dus } ABCD \text{ is een ruit.}$$

- 7 a Teken de diagonalen AC en BD .



$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B = 90^\circ \text{ (gegeven)} \\ AB = AB \\ AD = BC \text{ (rechthoek)} \end{array} \right\} \triangle ABC \cong \triangle BAD \text{ (ZHZ)}$$

Uit $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ volgt dat $AC = BD$.



$$\left. \begin{array}{l} AB = AB \\ AD = BC \text{ (parallelogram)} \\ AC = BD \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \cong \triangle BAD \text{ (ZZZ)}$$

Dus $\angle A = \angle B$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (parallelogram)} \\ AD = BC \text{ (parallelogram)} \\ BD = BD \end{array} \right\} \triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (ZZZ)}$$

Dus $\angle A = \angle C$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (parallelogram)} \\ AD = AD \\ BD = AC \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABD \cong \triangle DCA \text{ (ZZZ)}$$

Dus $\angle A = \angle D$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B = \angle C = \angle D \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array} \right\} \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

Dus $ABCD$ is een rechthoek.

Bladzijde 105

8

$$\left. \begin{array}{l} AD = AD \\ \angle EAD = \angle FAD \text{ (gegeven)} \\ \angle AED = \angle AFD = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ADE \cong \triangle ADF \text{ (ZHH)}$$

Uit $\triangle ADE \cong \triangle ADF$ volgt $DE = DF$.

9

$$\left. \begin{array}{l} AB = BC = AC \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \\ AD = BE = CF \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} AB - AD = BC - BE = AC - CF \\ BD = CE = AF \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} AF = CE \\ AD = CF \\ \angle A = \angle C = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array} \right\} \triangle ADF \cong \triangle CFE \text{ (ZHZ)}$$

Dus $DF = FE$.

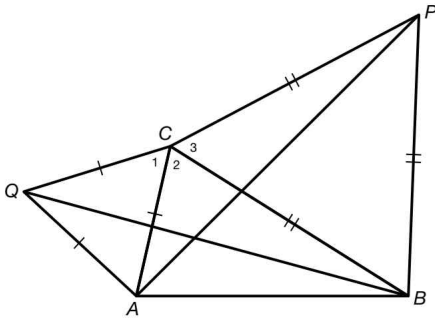
$$\left. \begin{array}{l} AF = BD \\ AD = BE \\ \angle A = \angle B = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array} \right\} \triangle ADF \cong \triangle BED \text{ (ZHZ)}$$

Dus $DF = ED$.

$$\left. \begin{array}{l} DF = FE \\ DF = ED \end{array} \right\} DF = FE = ED$$

Dus $\triangle DEF$ is gelijkzijdig.

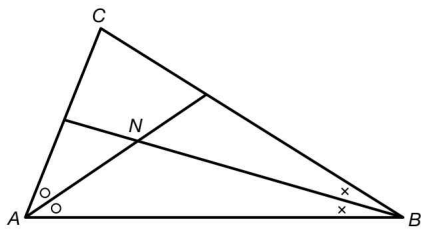
10



$$\left. \begin{array}{l} \angle C_1 = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \\ \angle C_3 = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \angle C_{23} = \angle C_{12} (= \angle C_2 + 60^\circ) \\ AC = QC \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \\ PC = BC \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array} \right\} \Delta APC \cong \Delta QBC \text{ (ZHZ)}$$

Dus $AP = BQ$.

11



$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \angle ANB = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}, \text{ dus } \angle A + \angle B + 2\angle ANB = 360^\circ \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\angle ANB - \angle C = 180^\circ \\ 2\angle ANB = \angle C + 180^\circ \\ \angle ANB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C \end{array}$$

12 Teken de lijn k door D evenwijdig met AB .

k snijdt BC in F .

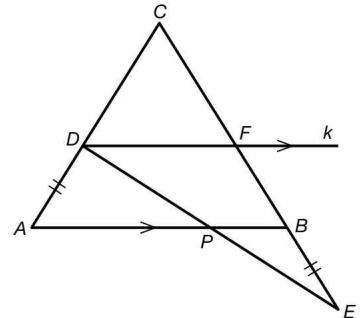
$$\left. \begin{array}{l} \angle CAB = \angle CBA \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle CDF = \angle CAB \text{ (F-hoeken)} \\ \angle CFD = \angle CBA \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \angle CDF = \angle CFD$$

Omdat $AC = BC$ en $CD = CF$ (gelijkbenige driehoek) geldt $AD = BF$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle E = \angle E \\ \angle EBP = \angle EFD \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \Delta EBP \cong \Delta EFD \text{ (hh)}$$

Uit $BE = AD = BF$ volgt $EF = 2BE$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dus } \frac{EP}{ED} = \frac{EB}{EF} = \frac{1}{2} \text{ ofwel } DE = 2EP \\ DE = EP + DP \end{array} \right\} DP = EP$$



Alternatieve uitwerking

Teken de lijn l door E evenwijdig met AC .

l snijdt het verlengde van AB in F .

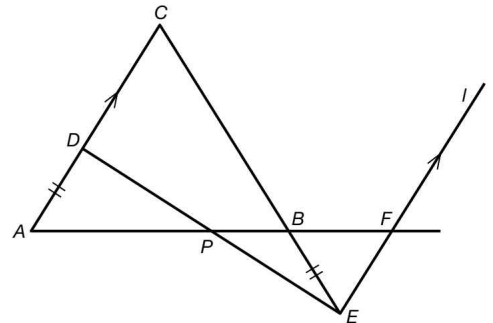
$$\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle ABC \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle BAC = \angle BFE \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ABC = \angle FBE \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \angle BFE = \angle FBE$$

Uit $\angle BFE = \angle FBE$ volgt $EB = EF$ (gelijkbenige driehoek).

$$\left. \begin{array}{l} EB = EF \\ BE = AD \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} AD = EF$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle APD = \angle FPE \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle DAP = \angle EFP \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \Delta APD \cong \Delta FPE \text{ (ZHH)}$$

Uit $\Delta APD \cong \Delta FPE$ volgt $DP = EP$.

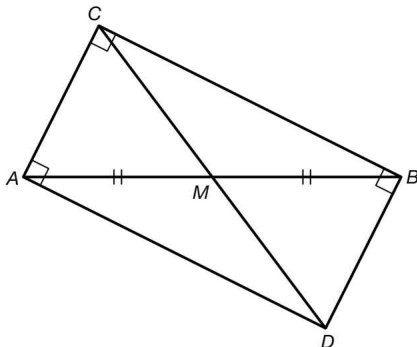


7.2 Bewijzen in cirkels

Bladzijde 107

- 13 $\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ AM = CM, \text{ dus } \angle A = \angle C_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ BM = CM, \text{ dus } \angle B = \angle C_2 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180^\circ \\ \text{dus } 2 \cdot \angle C_{12} = 180^\circ \\ \text{dus } \angle C_{12} = 90^\circ \end{array}$

- 14 a $\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle MBN \\ \angle ACB = \angle MNB = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle MBN \text{ (hh)}$
 Uit $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ en M is het midden van AB volgt dat N het midden is van BC , dus $BN = CN$.
 $\left. \begin{array}{l} BN = CN \\ MN = MN \\ \angle MNB = \angle MNC = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle BMN \cong \triangle CMN \text{ (ZHZ)}$
 Uit $\triangle BMN \cong \triangle CMN$ volgt dat $BM = CM$, dus C ligt op de cirkel met middellijn AB .
 b Teken rechthoek $ADBC$ en de diagonalen AB en CD .



M is het snijpunt van de diagonalen, want $AM = BM$ ($ADBC$ is een rechthoek, dus ook een parallellogram).

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (rechthoek)} \\ CM = DM \text{ (parallellogram)} \\ AM = BM \end{array} \right\} AM = BM = CM$$

Dus C ligt op de cirkel met middellijn AB .

Bladzijde 108

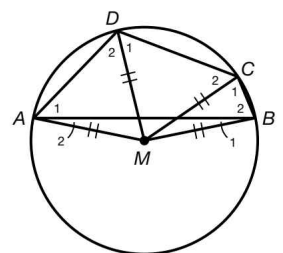
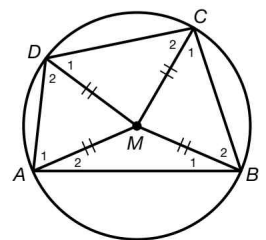
- 15 $\angle A = 90^\circ$, dus A ligt op de cirkel met middellijn BC (Thales).
 M is het midden van BC , dus M is het middelpunt van de cirkel door A , B en C .
 $\left. \begin{array}{l} AM = BM = CM \\ BM + CM = BC \end{array} \right\} AM = \frac{1}{2}BC$

- 16 a Teken de lijnstukken MA , MB , MC en MD .
 In $\triangle ABM$ is $\angle A_2 = \angle B_1$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle BCM$ is $\angle C_1 = \angle B_2$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle CDM$ is $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle ADM$ is $\angle A_1 = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)
 Hieruit volgt $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2$
 dus $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle C = \angle B + \angle D \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array} \right\} \angle A + \angle C = 180^\circ \text{ en } \angle B + \angle D = 180^\circ$$

- b Teken de lijnstukken MA , MB , MC en MD .
 In $\triangle ADM$ is $\angle A_{12} = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle CDM$ is $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle BCM$ is $\angle C_1 = \angle B_{12}$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle ABM$ is $\angle A_2 = \angle B_1$ (gelijkbenige driehoek)
 Hieruit volgt $\angle A_{12} + \angle C_2 + \angle C_1 - \angle A_2 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B_{12} - \angle B_1$
 dus $\angle A_1 + \angle C_{12} = \angle B_2 + \angle D_{12}$.

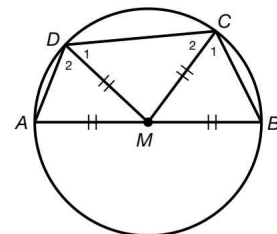
$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 + \angle C_{12} = \angle B_2 + \angle D_{12} \\ \angle A_1 + \angle B_2 + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array} \right\} \angle A_1 + \angle C_{12} = 180^\circ \text{ en } \angle B_2 + \angle D_{12} = 180^\circ$$



c Teken de lijnstukken MD en MC .

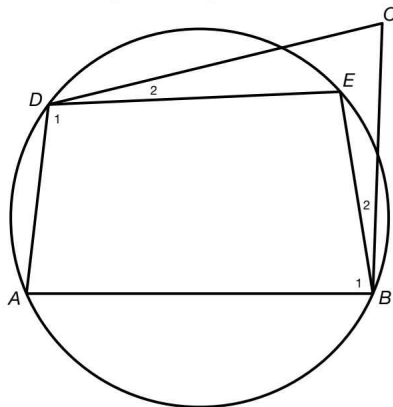
In $\triangle ADM$ is $\angle A = \angle D_2$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle CDM$ is $\angle C_2 = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek)
 In $\triangle BCM$ is $\angle C_1 = \angle B$ (gelijkbenige driehoek)
 Hieruit volgt $\angle A + \angle C_2 + \angle C_1 = \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B$
 dus $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ (hoekensom vierhoek) $\left. \vphantom{\begin{matrix} \angle A + \angle C = \angle B + \angle D \\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \end{matrix}} \right\} \angle A + \angle C = 180^\circ \text{ en } \angle B + \angle D = 180^\circ$



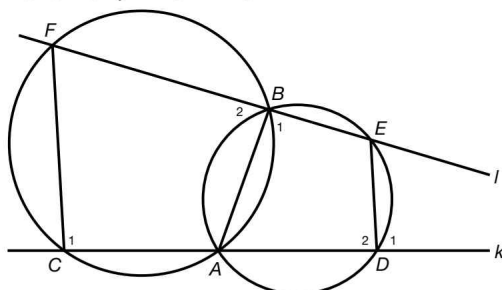
Bladzijde 110

17 Kies een punt E op de cirkel binnen vierhoek $ABCD$ en teken BE en DE .



$\angle B_1 + \angle D_1 = 180^\circ$ (koordenvierhoek) dus $\angle B_{12} + \angle D_{12} > 180^\circ$
 $\angle B_{12} + \angle D_{12} > 180^\circ$
 $\angle A + \angle B_{12} + \angle C + \angle D_{12} = 360^\circ$ (hoekensom vierhoek) $\left. \vphantom{\begin{matrix} \angle B_{12} + \angle D_{12} > 180^\circ \\ \angle A + \angle B_{12} + \angle C + \angle D_{12} = 360^\circ \end{matrix}} \right\} \angle A + \angle C < 180^\circ$

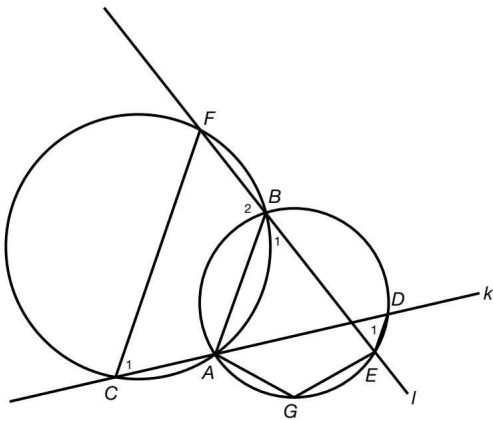
18 Teken CF , AB en DE .



$\angle C_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ (koordenvierhoek) $\left. \vphantom{\begin{matrix} \angle C_1 + \angle B_2 = 180^\circ \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \end{matrix}} \right\} \angle C_1 = \angle B_1$
 $\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek)
 $\angle B_1 + \angle D_2 = 180^\circ$ (koordenvierhoek) $\left. \vphantom{\begin{matrix} \angle B_1 + \angle D_2 = 180^\circ \\ \angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ \end{matrix}} \right\} \angle D_1 = \angle B_1$
 $\angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek)

Dus $CF \parallel DE$ (F-hoeken).

- 19** Vermoeden: ook in deze situatie is $CF \parallel DE$.
Teken G op de kleinste boog AE . Teken CF , AB , DE , AG en EG .



$$\left. \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle C_1 = \angle B_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_1 + \angle AGE = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle D_1 + \angle AGE = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \end{array} \right\} \angle B_1 = \angle D_1$$

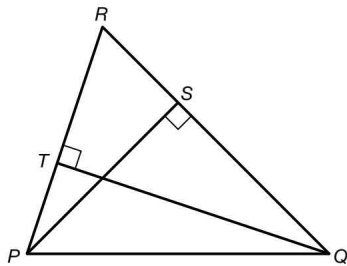
$$\left. \begin{array}{l} \angle C_1 = \angle B_1 \\ \angle B_1 = \angle D_1 \end{array} \right\} \angle C_1 = \angle D_1$$

Dus $CF \parallel DE$ (Z-hoeken).

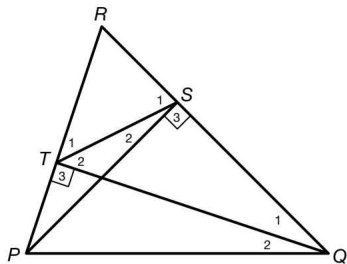
- 20 a** $\angle BED + \angle CED = 180^\circ$ (gestrekte hoek) $\left\} \angle BED + \angle A = 180^\circ \right.$
 $\angle CED = \angle A$ (gegeven)

Dus $ABED$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

b



Teken lijnstuk ST .



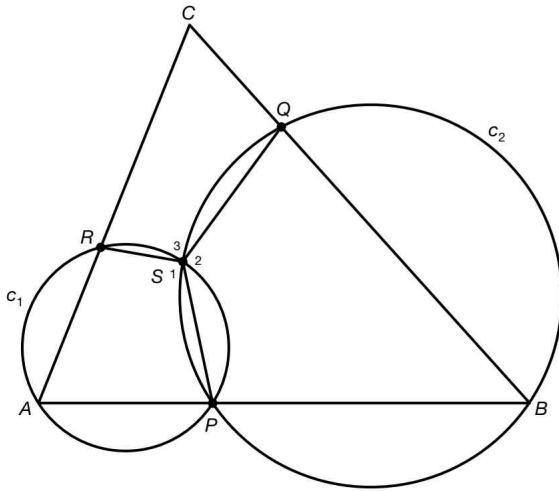
$$\left. \begin{array}{l} \angle S_3 = 90^\circ \text{ dus } S \text{ ligt op de cirkel met middellijn } PQ \text{ (Thales)} \\ \angle T_3 = 90^\circ \text{ dus } T \text{ ligt op de cirkel met middellijn } PQ \text{ (Thales)} \end{array} \right\}$$

Dus S en T liggen beide op de cirkel met middellijn PQ .

Dus $PQST$ is een koordenvierhoek.

$$\left. \begin{array}{l} \angle Q_{12} + \angle T_{23} = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle T_1 + \angle T_{23} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle Q_{12} = \angle T_1 \text{ ofwel } \angle PQR = \angle STR$$

- 21 Het punt S is het snijpunt van de cirkels c_1 en c_2 .
Teken PS , QS en RS .



$$\left. \begin{array}{l} \angle S_1 + \angle A = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle S_2 + \angle B = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle S_1 + \angle S_2 + \angle A + \angle B = 360^\circ \\ \angle S_1 + \angle S_2 + \angle S_3 = 360^\circ \end{array} \left\} \angle A + \angle B = \angle S_3$$

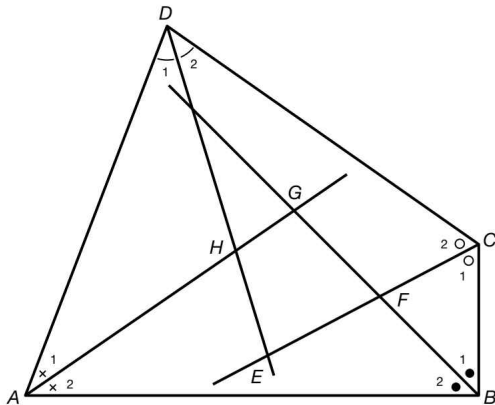
$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B = \angle S_3 \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \angle S_3 + \angle C = 180^\circ$$

Hieruit volgt dat $CQSR$ een koordenvierhoek is (koordenvierhoek),
dus S ligt op de cirkel door C , Q en R .

Hieruit volgt dat c_1 , c_2 en c_3 door één punt gaan.

Bladzijde 111

22



$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 + \angle D_1 + \angle AHD = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle AHD = \angle EHG \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \angle EHG = 180^\circ - \angle A_1 - \angle D_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_1 + \angle C_1 + \angle BFC = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle BFC = \angle EFG \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \angle EFG = 180^\circ - \angle B_1 - \angle C_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle EHG + \angle EFG = 180^\circ - \angle A_1 - \angle D_1 + 180^\circ - \angle B_1 - \angle C_1 = 360^\circ - \angle A_1 - \angle B_1 - \angle C_1 - \angle D_1 \\ \angle A_{12} + \angle B_{12} + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \angle C_1 = \angle C_2, \angle D_1 = \angle D_2 \text{ (bissectrice)} \end{array} \right\} \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = 180^\circ$$

Dus $\angle EHG + \angle EFG = 180^\circ$ en hieruit volgt dat $EFGH$ een koordenvierhoek is (koordenvierhoek).

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle BCD + \angle DCQ = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle BAD = \angle DCQ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAD = \angle DCQ \\ \angle DCQ = \angle PCR \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \angle BAD = \angle PCR$$

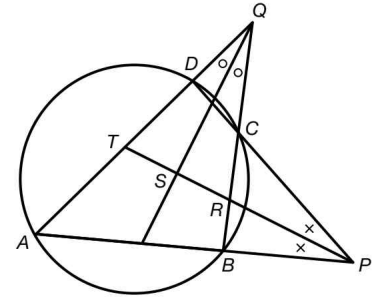
$$\left. \begin{array}{l} \angle BAD = \angle PAT = \angle PCR \\ \angle APT = \angle CPR \text{ (bissectrice)} \end{array} \right\} \triangle APT \sim \triangle CPR \text{ (hh)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Uit } \triangle APT \sim \triangle CPR \text{ volgt } \angle ATP = \angle CRP. \\ \angle ATP + \angle STQ = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \\ \angle CRP + \angle SRQ = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle STQ = \angle SRQ$$

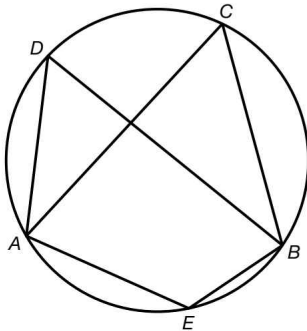
$$\left. \begin{array}{l} \angle STQ = \angle SRQ \\ \angle SQT = \angle SQR \text{ (bissectrice)} \\ QS = QS \end{array} \right\} \triangle TSQ \cong \triangle RSQ \text{ (ZHH)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Uit } \triangle TSQ \cong \triangle RSQ \text{ volgt } \angle TSQ = \angle RSQ. \\ \angle TSQ + \angle RSQ = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle TSQ = 90^\circ$$

Dus de bissectrices snijden elkaar loodrecht.



24 a



b $\angle ACB + \angle AEB = 180^\circ$, want $AEBC$ is een koordenvierhoek.
 $\angle ADB + \angle AEB = 180^\circ$, want $AEBD$ is een koordenvierhoek.

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB + \angle AEB = 180^\circ \\ \angle ADB + \angle AEB = 180^\circ \end{array} \right\} \angle ACB = \angle ADB$$

Bladzijde 112

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB + \angle AEB = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle ACB = \angle ADB \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \angle ADB + \angle AEB = 180^\circ$$

Dus $AEBD$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

Hieruit volgt dat C en D op dezelfde cirkelboog AB liggen.

b In vierhoek $ABCD$ liggen C en D aan dezelfde kant van AB .

Als $\angle ADB = \angle ACB$, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB (constante hoek), dus A, B, C en D liggen op één cirkel, dus $ABCD$ is een koordenvierhoek.

Bladzijde 113

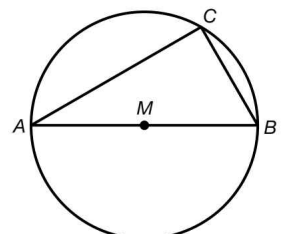
$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle C_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle A_1 + \angle C_1 + \angle AMB = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot \angle C_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_2 = \angle C_2 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle B_2 + \angle C_2 + \angle BMC = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \angle BMC = 180^\circ - 2 \cdot \angle C_2$$

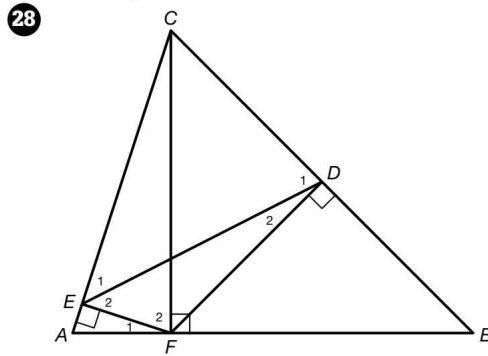
$$\begin{aligned} \angle AMB &= 360^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \angle C_1) - (180^\circ - 2 \cdot \angle C_2) \\ &= 360^\circ - 180^\circ + 2 \cdot \angle C_1 - 180^\circ + 2 \cdot \angle C_2 \\ &= 2 \cdot (\angle C_1 + \angle C_2) \\ &= 2 \cdot \angle ACB \end{aligned}$$

Dus $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB = 90^\circ \text{ (Thales)} \\ \angle AMB = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB$$



- 27 a** $AM = CM$ (straal cirkel)
 $BM = DM$ (straal cirkel)
 $AB = CD$ (gegeven) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} AM = CM \\ BM = DM \\ AB = CD \end{array}} \right\} \triangle AMB \cong \triangle CMD \text{ (ZZZ)}$
 Hieruit volgt $\angle AMB = \angle CMD$, dus boog $AB =$ boog CD .
- b** boog $AB =$ boog CD , dus $\angle AMB = \angle CMD$
 $AM = CM$ (straal cirkel)
 $BM = DM$ (straal cirkel) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle AMB = \angle CMD \\ AM = CM \\ BM = DM \end{array}} \right\} \triangle AMB \cong \triangle CMD \text{ (ZHZ)}$
 Hieruit volgt $AB = CD$.

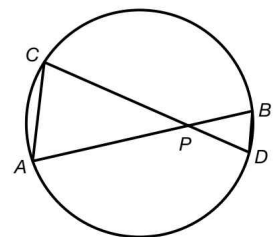
Bladzijde 114

$\angle CEF + \angle CDF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ dus $CEFD$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).
 $\angle ECF = \angle EDF$ (constante hoek)
 In $\triangle AFC$ is $\angle ECF = 90^\circ - \angle A$ (hoekensom driehoek) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle ECF = 90^\circ - \angle A \\ \angle ECF = \angle EDF \end{array}} \right\} \angle CDE = \angle A$
 $\angle EDF = 90^\circ - \angle CDE$ (rechte hoek)

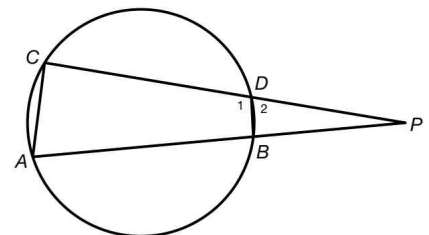
- 29** $\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB$ (gegeven), dus $\angle APB$ is een omtrekshoek die dezelfde koorde AB insluit als de middelpuntshoek $\angle ACB$ (omtrekshoek). Hieruit volgt dat de punten A, B en P op dezelfde cirkel met middelpunt C liggen.
 Dus $BC = CP$ (straal cirkel).

- 30** $\angle ECD = \angle ABE$ (constante hoek) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle ECD = \angle ABE \\ \angle ABE = \angle EBC \end{array}} \right\} \angle ECD = \angle EBC$
 $\angle ABE = \angle EBC$ (bissectrice)
 $\angle ECD = \angle EBC$ $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle ECD = \angle EBC \\ \angle DEC = \angle BEC \end{array}} \right\} \triangle EDC \sim \triangle ECB \text{ (hh)}$
 $\angle DEC = \angle BEC$
 Uit $\triangle EDC \sim \triangle ECB$ volgt $\frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BE}$ ofwel $CE^2 = BE \cdot DE$.

- 31 a** Teken de lijnstukken AC en BD .
 $\angle A = \angle D$ (constante hoek) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle A = \angle D \\ \angle B = \angle C \end{array}} \right\} \triangle ACP \sim \triangle DBP \text{ (hh)}$
 $\angle B = \angle C$ (constante hoek)
 Uit $\triangle ACP \sim \triangle DBP$ volgt $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ dus $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

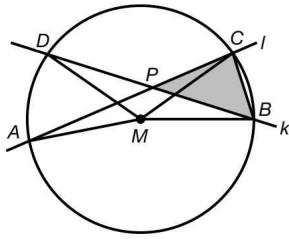


- b** Teken de lijnstukken AC en BD .
 $\angle A + \angle D_1 = 180^\circ$ (koordenvierhoek) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle A + \angle D_1 = 180^\circ \\ \angle D_2 + \angle D_1 = 180^\circ \end{array}} \right\} \angle A = \angle D_2$
 $\angle D_2 + \angle D_1 = 180^\circ$ (gestrekte hoek) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle A = \angle D_2 \\ \angle P = \angle P \end{array}} \right\} \triangle APC \sim \triangle DPB \text{ (hh)}$
 $\angle P = \angle P$
 Uit $\triangle APC \sim \triangle DPB$ volgt $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ dus $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



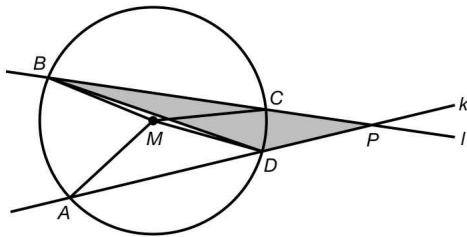
Bladzijde 115

- 32 a** Teken BC , AM , BM , CM en DM .



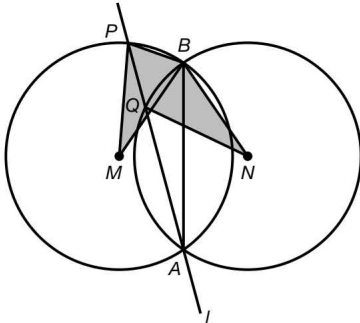
$$\left. \begin{aligned} \angle ACB &= \frac{1}{2} \angle AMB \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle CBD &= \frac{1}{2} \angle CMD \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle APB &= \angle ACB + \angle CBD \text{ (buitenhoek driehoek)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \angle APB &= \frac{1}{2} \angle AMB + \frac{1}{2} \angle CMD \\ \angle APB &= \frac{1}{2} (\angle AMB + \angle CMD) \end{aligned}$$

- b** Teken BD , AM , BM , CM en DM .



$$\left. \begin{aligned} \angle ADB &= \frac{1}{2} \angle AMB \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle CBD &= \frac{1}{2} \angle CMD \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle ADB &= \angle APB + \angle PBD \text{ (buitenhoek driehoek)} \\ \text{ofwel } \angle APB &= \angle ADB - \angle CBD \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \angle APB &= \frac{1}{2} \angle AMB - \frac{1}{2} \angle CMD \\ \angle APB &= \frac{1}{2} (\angle AMB - \angle CMD) \end{aligned}$$

- 33** Noem het middelpunt van de linker cirkel M en van de rechter cirkel N .
Teken MB , MP , NB , NQ en AB .



$$\left. \begin{aligned} \angle BAP &= \frac{1}{2} \angle BMP \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle BAQ &= \frac{1}{2} \angle BNQ \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle BAP &= \angle BAQ \end{aligned} \right\} \angle BMP = \angle BNQ$$

$$\left. \begin{aligned} \angle BMP &= \angle BNQ \\ MB &= NB \text{ (cirkel)} \\ MP &= NQ \text{ (cirkel)} \end{aligned} \right\} \triangle BMP \cong \triangle BNQ \text{ (ZHZ)}$$

Uit $\triangle BMP \cong \triangle BNQ$ volgt $BP = BQ$, dus driehoek BPQ is gelijkbenig.

- 34** $\angle CEH + \angle CDH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ dus vierhoek $CDHE$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek)
 $\left. \begin{aligned} \angle EDH &= \angle ECH \text{ (constante hoek)} \\ \angle EGC &= \angle DGH \text{ (overstaande hoeken)} \end{aligned} \right\} \triangle CGE \sim \triangle DGH \text{ (hh)}$
 Uit $\triangle CGE \sim \triangle DGH$ volgt $\frac{CG}{DG} = \frac{GE}{GH}$ dus $CG \cdot GH = DG \cdot GE$.

7.3 Volledige inductie

Bladzijde 117

- 35** a $n = 1$ geeft $A = 7^1 + 3^2 = 7 + 9 = 16$ is deelbaar door 4
 $n = 2$ geeft $A = 7^2 + 3^3 = 49 + 27 = 76$ is deelbaar door 4
 $n = 3$ geeft $A = 7^3 + 3^4 = 343 + 81 = 424$ is deelbaar door 4
 $n = 4$ geeft $A = 7^4 + 3^5 = 2401 + 243 = 2644$ is deelbaar door 4
 $n = 5$ geeft $A = 7^5 + 3^6 = 16807 + 729 = 17536$ is deelbaar door 4
- b
$$\left. \begin{aligned} 7^{201} &= 7^{200+1} = 7^{200} \cdot 7^1 = 7 \cdot 7^{200} \\ 3^{202} &= 3^{201+1} = 3^{201} \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^{201} \end{aligned} \right\} 7^{201} + 3^{202} = 7 \cdot 7^{200} + 3 \cdot 3^{201}$$
- c $7 \cdot 7^{200} + 3 \cdot 3^{201} = 7 \cdot 7^{200} + 7 \cdot 3^{201} - 4 \cdot 3^{201} = 7 \cdot (7^{200} + 3^{201}) - 4 \cdot 3^{201}$
- d Gegeven is dat $7^{200} + 3^{201}$ deelbaar is door 4.
 Dan is $\underbrace{7 \cdot (7^{200} + 3^{201})}_{\text{deelbaar door 4}} - \underbrace{4 \cdot 3^{201}}_{\text{deelbaar door 4}}$ het verschil van twee getallen die beide deelbaar zijn door 4.
 Stel $7^{200} + 3^{201} = 4a$ en $3^{201} = b$. Dan is $7 \cdot (7^{200} + 3^{201}) - 4 \cdot (3^{201}) = 7 \cdot 4a - 4b = 4(7a - b)$,
 dus deelbaar door 4.
 Dus $7^{201} + 3^{202} = 7 \cdot (7^{200} + 3^{201}) - 4 \cdot 3^{201}$ is ook deelbaar door 4.
- e Uit vraag d volgt dat $7^{201} + 3^{202}$ deelbaar is door 4.
 $7^{202} + 3^{203} = 7 \cdot 7^{201} + 3 \cdot 3^{202} = 7 \cdot 7^{201} + 7 \cdot 3^{202} - 4 \cdot 3^{202} = 7 \cdot (7^{201} + 3^{202}) - 4 \cdot 3^{202}$
 Dus $7^{202} + 3^{203}$ is te schrijven als het verschil van twee getallen die beide deelbaar zijn door 4.
 Dus $7^{202} + 3^{203}$ is deelbaar door 4.

Bladzijde 118

- 36** 1 $n = 4$ geeft $4! > 2^4$ ofwel $24 > 16$ en dit klopt.
 2 Neem aan dat $p! > 2^p$ en bewijs dat $(p+1)! > 2^{p+1}$ voor $p \geq 4$.
 $(p+1)! > 2^{p+1}$
 $(p+1) \cdot p! > 2 \cdot 2^p$
 $p! > \frac{2}{p+1} \cdot 2^p$
 Dit klopt omdat $p! > 2^p$ en $\frac{2}{p+1} < 1$ voor $p \geq 4$.
 3 Hiermee is bewezen dat $n! > 2^n$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 4$.
- 37** 1 $n = 1$ geeft $9^1 - 1 = 8$ en dat is deelbaar door 8.
 2 Neem aan dat $9^p - 1$ deelbaar is door 8 en bewijs dat $9^{p+1} - 1$ deelbaar is door 8.
 $9^{p+1} - 1 = 9^p \cdot 9^1 - 1 = 9 \cdot 9^p - 1 = 8 \cdot 9^p + 9^p - 1$
 Nu is $8 \cdot 9^p$ deelbaar door 8 omdat deze term een factor 8 bevat en $9^p - 1$ is deelbaar door 8 vanwege de inductiehypothese, dus $8 \cdot 9^p + 9^p - 1$ is deelbaar door 8.
 3 Hiermee is bewezen dat $9^n - 1$ deelbaar is door 8 voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$.
- 38** 1 $n = 0$ geeft $2^2 + 3^1 = 7$ en dat is deelbaar door 7.
 2 Neem aan dat $2^{p+2} + 3^{2p+1}$ deelbaar is door 7 en bewijs dat $2^{p+1+2} + 3^{2(p+1)+1}$ ofwel $2^{p+3} + 3^{2p+3}$ deelbaar is door 7.
 $2^{p+3} + 3^{2p+3} = 2^1 \cdot 2^{p+2} + 3^2 \cdot 3^{2p+1} = 2 \cdot 2^{p+2} + 9 \cdot 3^{2p+1} = 2 \cdot 2^{p+2} + 2 \cdot 3^{2p+1} + 7 \cdot 3^{2p+1} = 2 \cdot (2^{p+2} + 3^{2p+1}) + 7 \cdot 3^{2p+1}$
 Nu is $7 \cdot 3^{2p+1}$ deelbaar door 7 omdat deze term een factor 7 bevat en $2^{p+2} + 3^{2p+1}$ is deelbaar door 7 vanwege de inductiehypothese, dus $2 \cdot (2^{p+2} + 3^{2p+1})$ is deelbaar door 7.
 Dus $2^{p+3} + 3^{2p+3} = 2 \cdot (2^{p+2} + 3^{2p+1}) + 7 \cdot 3^{2p+1}$ is deelbaar door 7.
 3 Hiermee is bewezen dat $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ deelbaar is door 7 voor elk natuurlijke getal.
- 39** 1 $n = 0$ geeft $0^5 - 0 = 0$ en dat is deelbaar door 10.
 2 Neem aan dat $p^5 - p$ deelbaar is door 10 en bewijs dat $(p+1)^5 - (p+1)$ deelbaar is door 10.
 $(p+1)^5 - (p+1) =$
 $p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1 - p - 1 =$
 $p^5 - p + 5p^4 + 5p + 10p^3 + 10p^2 =$
 $(p^5 - p) + 5p(p^3 + 1) + 10(p^3 + p^2)$
 $p^5 - p$ is deelbaar door 10 vanwege de inductiehypothese.
 $5p(p^3 + 1)$ is deelbaar door 10 voor alle even waarden van p omdat $5p$ deelbaar is door 10.
 $5p(p^3 + 1)$ is deelbaar door 10 voor alle oneven waarden van p omdat $p^3 + 1$ dan even is.
 $10(p^3 + p^2)$ is deelbaar door 10.
 Dus $(p+1)^5 - (p+1)$ is deelbaar door 10.
 3 Hiermee is bewezen dat $n^5 - n$ deelbaar is door 10 voor elk natuurlijke getal.

Bladzijde 119

- 40 1 $n = 1$ geeft $f(x) = x^1$ geeft $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1}$, ofwel $f(x) = x$ geeft $f'(x) = 1$ en dit klopt.
 2 Neem aan dat de regel geldt voor $n = p$, dus dat $f(x) = x^p$ geeft $f'(x) = p \cdot x^{p-1}$ en bewijs dat de regel dan ook geldt voor $n = p + 1$, dus dat $f(x) = x^{p+1}$ geeft $f'(x) = (p + 1) \cdot x^p$.
 $f(x) = x^{p+1} = x \cdot x^p$ geeft $f'(x) = 1 \cdot x^p + x \cdot p x^{p-1} = x^p + p \cdot x \cdot x^{p-1} = x^p + p \cdot x^p = (p + 1)x^p$
 3 Hiermee is bewezen dat $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ klopt voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$.

41 a $\sum_{k=1}^5 k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$ $\left\{ \sum_{k=1}^5 k^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 \right.$
 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 15^2 = 225$

b $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^5 k$, dus $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = \left(\sum_{k=1}^5 k \right)^2$

c Volgens de somformule van een rekenkundige rij geldt $\text{som} = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal} \cdot (\text{eerste} + \text{laatste})$,
 dus $\sum_{k=1}^5 k = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (1 + 5)$.

d $\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (1 + n) \right)^2 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$

e $\sum_{k=1}^6 k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441$ $\left\{ \sum_{k=1}^6 k^3 = \frac{1}{4} \cdot 6^2 \cdot (6 + 1)^2 \right.$
 $\frac{1}{4} \cdot 6^2 \cdot (6 + 1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 36 \cdot 49 = 441$

Bladzijde 120

42 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 (5k - 4) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (5 - 3)$ ofwel $1 = 1$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=1}^p (5k - 4) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (5p - 3)$ en bewijs dat $\sum_{k=1}^{p+1} (5k - 4) = \frac{1}{2} \cdot (p + 1) \cdot (5(p + 1) - 3)$.

Het linkerlid geeft $\sum_{k=1}^{p+1} (5k - 4) = \sum_{k=1}^p (5k - 4) + 5(p + 1) - 4 = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (5p - 3) + 5p + 5 - 4 = 2\frac{1}{2}p^2 + 3\frac{1}{2}p + 1$.

Het rechterlid geeft $\frac{1}{2} \cdot (p + 1) \cdot (5(p + 1) - 3) = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \right) (5p + 2) = 2\frac{1}{2}p^2 + 3\frac{1}{2}p + 1$.

Dus $\sum_{k=1}^{p+1} (5k - 4) = \frac{1}{2} \cdot (p + 1) \cdot (5(p + 1) - 3)$.

3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=1}^n (5k - 4) = \frac{1}{2} n (5n - 3)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

43 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 k(k + 1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 2)$ ofwel $2 = 2$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=1}^p k(k + 1) = \frac{1}{3} p(p + 1)(p + 2)$ en bewijs dat $\sum_{k=1}^{p+1} k(k + 1) = \frac{1}{3} (p + 1)(p + 2)(p + 3)$.

$\sum_{k=1}^{p+1} k(k + 1) = \sum_{k=1}^p k(k + 1) + (p + 1)(p + 2) = \frac{1}{3} p(p + 1)(p + 2) + (p + 1)(p + 2) =$

$\left(\frac{1}{3}p + 1 \right) (p + 1)(p + 2) = \frac{1}{3} (p + 3)(p + 1)(p + 2) = \frac{1}{3} (p + 1)(p + 2)(p + 3)$.

3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=1}^n k(k + 1) = \frac{1}{3} n(n + 1)(n + 2)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

44 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 2^k = 2^{1+1} - 2$ ofwel $2 = 2$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=1}^p 2^k = 2^{p+1} - 2$ en bewijs dat $\sum_{k=1}^{p+1} 2^k = 2^{p+2} - 2$.

$$\sum_{k=1}^{p+1} 2^k = \sum_{k=1}^p 2^k + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 2 + 2^{p+1} = 2 \cdot 2^{p+1} - 2 = 2^{p+2} - 2$$

3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

45 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1}$ ofwel $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$ en bewijs dat $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p+1}{p+2}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \\ &= \frac{p(p+2) + 1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2 + 2p + 1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}. \end{aligned}$$

3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

46 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)$ ofwel $1 = 1$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=0}^p k^2 = \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1)$ en bewijs dat

$$\sum_{k=0}^{p+1} k^2 = \frac{1}{6}(p+1)(p+1+1)(2(p+1)+1) = \frac{1}{6}(p+1)(p+2)(2p+3).$$

$$\sum_{k=0}^{p+1} k^2 = \sum_{k=0}^p k^2 + (p+1)^2 = \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1) + (p+1)^2 =$$

$$\frac{1}{6}(p+1) \cdot p(2p+1) + \frac{1}{6}(p+1) \cdot 6(p+1) = \frac{1}{6}(p+1) \cdot (p(2p+1) + 6(p+1)) =$$

$$\frac{1}{6}(p+1)(2p^2 + p + 6p + 6) = \frac{1}{6}(p+1)(2p^2 + 7p + 6) = \frac{1}{6}(p+1)(p+2)(2p+3)$$

3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

47 Stel $u_n = u_0 \cdot r^n$.

1 $n = 0$ geeft $\sum_{k=0}^0 u_k = \frac{u_0(1-r^1)}{1-r}$ ofwel $u_0 = u_0$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=0}^p u_k = \frac{u_0(1-r^{p+1})}{1-r}$ en bewijs dat $\sum_{k=0}^{p+1} u_k = \frac{u_0(1-r^{p+2})}{1-r}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p+1} u_k &= \sum_{k=0}^p u_k + u_{p+1} = \frac{u_0(1-r^{p+1})}{1-r} + u_0 \cdot r^{p+1} = \frac{u_0(1-r^{p+1})}{1-r} + \frac{u_0 r^{p+1}(1-r)}{1-r} = \\ &= \frac{u_0(1-r^{p+1}) + u_0 r^{p+1}(1-r)}{1-r} = \frac{u_0 - u_0 r^{p+1} + u_0 r^{p+1} - u_0 r^{p+2}}{1-r} = \frac{u_0 - u_0 r^{p+2}}{1-r} = \frac{u_0(1-r^{p+2})}{1-r} \end{aligned}$$

3 Hiermee is bewezen dat voor een meetkundige rij geldt $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1-r^{n+1})}{1-r}$.

Bladzijde 121

- 48** Voor de termen van de rij van Fibonacci geldt $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

1 $n = 0$ geeft $\sum_{k=0}^0 f_k^2 = f_0 \cdot f_1$ ofwel $1 = 1$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=0}^p f_k^2 = f_p \cdot f_{p+1}$ en bewijs dat $\sum_{k=0}^{p+1} f_k^2 = f_{p+1} \cdot f_{p+2}$.

$$\sum_{k=0}^{p+1} f_k^2 = \sum_{k=0}^p f_k^2 + f_{p+1}^2 = f_p \cdot f_{p+1} + f_{p+1}^2 = f_{p+1}(f_p + f_{p+1}) = f_{p+1} \cdot f_{p+2}$$

3 Hiermee is bewezen dat voor de termen van de rij van Fibonacci geldt $\sum_{k=0}^n f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.

- 49 a** In de derde figuur kun je zien dat $L_3 = 7$.

De vierde lijn heeft drie snijpunten met de eerste drie lijnen. Bij het eerste snijpunt komen er 2 vlakdelen bij en bij elk volgend snijpunt komt er 1 vlakdeel bij. Dus $L_4 = 7 + 4 = 11$.

De vijfde lijn heeft vier snijpunten met de eerste vier lijnen. Bij het eerste snijpunt komen er 2 vlakdelen bij en bij elk volgend snijpunt komt er 1 vlakdeel bij. Dus $L_5 = 11 + 5 = 16$.

b Bij p getekende lijnen heeft de volgende lijn precies p snijpunten met de al getekende lijnen. Bij het eerste snijpunt komen er 2 vlakdelen bij en bij elk volgend snijpunt komt er 1 vlakdeel bij. Dus komen er $p + 1$ vlakdelen bij.

c $L_1 = 2$ geeft $a + b + c = 2$.

$L_2 = 4$ geeft $4a + 2b + c = 4$.

$L_3 = 7$ geeft $9a + 3b + c = 7$.

We hebben nu drie vergelijkingen met drie onbekenden. Trek de eerste vergelijking af van de tweede en de derde vergelijking. Je krijgt het stelsel:

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ 8a + 2b = 5 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right| \quad \text{geeft} \quad \begin{cases} 6a + 2b = 4 \\ 8a + 2b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2a \\ \hline -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ 3a + b = 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ 3a + b = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} + b = 2 \\ b = \frac{1}{2} \end{array}$$

$a = \frac{1}{2}$ en $b = \frac{1}{2}$ geeft $c = 1$.

Dus $L_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.

d 1 $n = 1$ geeft $L_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 1$ ofwel $2 = 2$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $L_p = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p + 1$ en bewijs dat $L_{p+1} = \frac{1}{2}(p+1)^2 + \frac{1}{2}(p+1) + 1$.

Uit vraag b volgt dat $L_{p+1} = L_p + p + 1$.

Het linkerlid geeft $L_{p+1} = L_p + p + 1 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p + 1 + p + 1 = \frac{1}{2}p^2 + 1\frac{1}{2}p + 2$.

Het rechterlid geeft $\frac{1}{2}(p+1)^2 + \frac{1}{2}(p+1) + 1 = \frac{1}{2}(p^2 + 2p + 1) + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}p^2 + p + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}p^2 + 1\frac{1}{2}p + 2$.

3 Hiermee is bewezen dat $L_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

- 50** 1 $n = 0$ geeft $\sum_{k=0}^0 u_k = \frac{1}{2} \cdot (0+1) \cdot (u_0 + u_0)$ ofwel $u_0 = u_0$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=0}^p u_k = \frac{1}{2}(p+1)(u_0 + u_p)$ en bewijs dat $\sum_{k=0}^{p+1} u_k = \frac{1}{2}(p+2)(u_0 + u_{p+1})$.

Het linkerlid geeft $\sum_{k=0}^{p+1} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_p + u_{p+1} = \frac{1}{2}(p+1)(u_0 + u_p) + u_{p+1}$.

Gebruik $u_{p+1} = u_p + v$, met v het verschil van de rij.

Het rechterlid geeft dan $\frac{1}{2}(p+2)(u_0 + u_{p+1}) = \frac{1}{2}(p+1)(u_0 + u_p + v) + \frac{1}{2}(u_0 + u_p + v) =$

$$\frac{1}{2}(p+1)(u_0 + u_p) + \frac{1}{2}(p+1) \cdot v + \frac{1}{2}(u_0 + u_p + v) =$$

$$\frac{1}{2}(p+1)(u_0 + u_p) + \frac{1}{2}((p+1) \cdot v + u_0 + u_p + v) =$$

$$\frac{1}{2}(p+1)(u_0 + u_p) + \frac{1}{2}(\underbrace{u_0 + (p+1) \cdot v}_{= u_{p+1}} + \underbrace{u_p + v}_{= u_{p+1}}) =$$

$$\frac{1}{2}(p+1)(u_0 + u_p) + \frac{1}{2}(2 \cdot u_{p+1}) =$$

$$\frac{1}{2}(p+1)(u_0 + u_p) + u_{p+1}$$

3 Hiermee is bewezen dat voor een rekenkundige rij geldt $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$.

7.4 Andere bewijsmethoden

Bladzijde 123

- 51 a L gaat langzamer dan Z, dus heeft L volgens Aristoteles een remmende werking op Z.
 b N is zwaarder dan Z, dus valt N volgens Aristoteles sneller dan Z.
 c De antwoorden van a en b zijn met elkaar in tegenspraak. Het uitgangspunt moet dus onjuist zijn: de zware bal valt niet sneller dan de lichte bal.

Bladzijde 124

- 52 1 Stelling: er bestaat geen kleinste getal $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt $x > 0$.
 2 Negatie: er is wel een kleinste getal x waarvoor geldt $x > 0$.
 3 Stel $y = \frac{1}{2}x$. Omdat $x > 0$ geldt $0 < y < x$, en dit is in tegenspraak met de negatie.
 4 Uit de tegenspraak volgt dat er geen kleinste getal $x \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor geldt $x > 0$. Hiermee is het bewijs geleverd.
- 53 1 Stelling: er bestaan oneindig veel natuurlijke getallen.
 2 Negatie: het aantal natuurlijke getallen is eindig.
 3 Omdat het aantal natuurlijke getallen eindig is, moet er een grootste natuurlijk getal x zijn. Stel $y = x + 1$. Omdat $x \in \mathbb{N}$ geldt ook $y \in \mathbb{N}$. Omdat bovendien geldt $y > x$ is dit in tegenspraak met de negatie.
 4 Uit de tegenspraak volgt dat er oneindig veel natuurlijke getallen zijn. Hiermee is het bewijs geleverd.

Bladzijde 125

- 54 a De rest is steeds 1.
 b Uitproberen van priemgetallen groter dan 17 geeft $\frac{510511}{19} = 26869$. Dus 510511 is geen priemgetal.
 c Voor het getal N zijn er twee mogelijkheden. N is een priemgetal of N is geen priemgetal.
 Als N een priemgetal is, dan hebben we een priemgetal gevonden dat groter is dan P .
 Als N geen priemgetal is, dan is N deelbaar door een of meer priemgetallen. Maar dat kunnen niet de priemgetallen 2, 3, 5, ..., P zijn, want die geven bij deling altijd 1 als rest. Dus is N deelbaar door een priemgetal groter dan P .
 Uit de tegenspraak volgt dat er geen grootste priemgetal P bestaat.
 Het aantal priemgetallen is dus oneindig. Hiermee is het bewijs geleverd.

Bladzijde 126

- 55 1 Stelling: de karretjes houden elkaar in evenwicht als hun gewichten zich verhouden als de lengten van de hellingen waarop ze staan.
 2 Negatie: de karretjes houden elkaar niet in evenwicht als hun gewichten zich verhouden als de lengten van de hellingen waarop ze staan.
 3 Als de karretjes elkaar niet in evenwicht houden dan zou ook het kralensnoer niet stil kunnen blijven liggen op de driehoek, maar gaan bewegen. Deze beweging zou bovendien oneindig lang voortduren. Dit kan niet, en is dus in tegenspraak met de negatie.
 4 Uit de tegenspraak volgt dat de karretjes elkaar in evenwicht houden als hun gewichten zich verhouden als de lengten van de hellingen waarop ze staan. Hiermee is het bewijs geleverd.

Bladzijde 127

- 56 1 Stelling: minstens één werknemer heeft 7 of meer mails ontvangen.
 2 Negatie: geen enkele werknemer heeft 7 of meer mails ontvangen.
 3 Omdat 73 werknemers ieder maximaal 6 mails ontvangen is het totale aantal mails hoogstens $73 \cdot 6 = 438$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat er 439 mails zijn binnengekomen.
 4 Uit de tegenspraak volgt dat minstens één werknemer 7 of meer mails heeft ontvangen. Hiermee is het bewijs geleverd.
- 57 a In het ongunstigste geval vinden de kinderen eerst alle rode en alle blauwe eieren. Vervolgens moeten ze nog twee (gele) eieren vinden om er zeker van te zijn dat ze minstens twee gele eieren hebben. Dus $10 + 30 + 2 = 42$ eieren.
 b In het ongunstigste geval vinden de kinderen eerst alle gele en alle blauwe eieren. Vervolgens moeten ze nog twee (rode) eieren vinden om er zeker van te zijn dat ze minstens twee rode en drie blauwe eieren hebben. Dus $20 + 30 + 2 = 52$ eieren.
 c Als er geen drie eieren met dezelfde kleur bij zijn, dan hebben de kinderen maximaal zes eieren gevonden: van iedere kleur twee. Bij het zevende ei ben je er zeker van dat minstens drie eieren dezelfde kleur hebben. Dus zeven eieren.

Bladzijde 128

- 58 a** Het mogelijke aantal haren zijn de laden en de inwoners van Rotterdam zijn de knikkers. Er zijn dus 250 001 laden en 618 000 knikkers.
 Leg in elk van de laden 2 knikkers.
 Er blijven dan 117 998 knikkers over die ook verdeeld moeten worden.
 Er is dus altijd een lade met minstens 3 knikkers.
 Er zijn dus minstens drie inwoners in Rotterdam met precies hetzelfde aantal haren op het hoofd.
- b** Nee. Bij vraag a is alleen bewezen dat er minstens drie inwoners van Rotterdam zijn met precies hetzelfde aantal haren. Daar hoeft Elise niet bij te zijn.
- 59** Verdeel de driehoek in vier gelijkzijdige driehoeken met zijden van 1 cm door de middens van de zijden met elkaar te verbinden
 Deze 4 driehoeken zijn de laden en de 5 punten zijn de knikkers.
 Leg in elk van de laden 1 knikker.
 Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.
 Er is dus altijd een lade met minstens 2 knikkers.
 Er zijn dus minstens twee punten die minder dan 1 cm van elkaar af liggen.
- 60 a** Stel de getallen zijn $3p_1 + q$ en $3p_2 + q$. Het verschil is $3p_1 + q - (3p_2 + q) = 3p_1 - 3p_2 = 3(p_1 - p_2)$.
 Dit verschil bevat een factor 3 en is dus deelbaar door 3.
- b** Schrijf elk getal in de vorm $3p + q$ met $q \in \{0, 1, 2\}$. De 3 waarden van q zijn de laden en de 4 getallen a, b, c en d de knikkers.
 Leg in elk van de laden 1 knikker.
 Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.
 Er is dus altijd een lade met minstens twee knikkers.
 Er is dus minstens één paar getallen bij waarvan het verschil een drievoud is.
- 61** Er zijn vier mogelijke tweetallen met verschil 4. Dit zijn $\{1, 5\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 7\}$ en $\{4, 8\}$.
 Deze 4 tweetallen zijn de laden en de 5 gekozen getallen de knikkers.
 Leg in elk van de laden 1 knikker.
 Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.
 Er is dus altijd een lade met minstens twee knikkers.
 Er is dus minstens een tweetal getallen bij waarvan het verschil 4 is.
- 62** Er zijn $\binom{22}{2} = 231$ mogelijke tweetallen leerlingen.
 Deze 231 tweetallen zijn de laden en de $22 \cdot 11 = 242$ verstuurde kaarten zijn de knikkers.
 Leg in elk van de laden 1 knikker.
 Er blijven dan 11 knikkers over die ook verdeeld moeten worden.
 Er zijn dus altijd laden met minstens 2 knikkers.
 Er zijn dus minstens twee leerlingen die elkaar een kaart sturen.
- 63** Iedere oud-leerling heeft $0, 1, \dots, n - 1$ kennissen onder de aanwezigen.
 De mogelijkheden '0 kennissen' en ' $n - 1$ kennissen' sluiten elkaar echter uit, want dan zou er 1 persoon zijn die iedereen kent en ook 1 persoon die niemand kent, en dat kan niet. Er zijn dus $n - 1$ mogelijkheden voor het aantal kennissen.
 Dit aantal mogelijke kennissen zijn de laden, de n aanwezige personen zijn de knikkers.
 Leg in elk van de laden 1 knikker.
 Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.
 Er is dus altijd een lade met minstens twee knikkers.
 Er zijn dus minstens twee oud-leerlingen die hetzelfde aantal kennissen hebben onder de aanwezigen.

Bladzijde 129

- 64** Bepaal voor iedere gast hoeveel posities de tafel gedraaid moet worden zodat de gast op de goede plek zit.
 Dit aantal posities is voor elke gast minimaal 1 en maximaal 7. Zo krijg je 7 laden, de 8 personen zijn de knikkers.
 Leg in elk van de laden 1 knikker.
 Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.
 Er is dus altijd een lade met minstens 2 knikkers.
 Het is dus mogelijk de tafel zo te draaien dat minstens twee van de acht gasten op de goede plek zitten.

- 65 a** $a + b = 2n + 1 + 2p + 1 = 2n + 2p + 2 = 2(n + p + 1)$
 Dus $a + b$ kan geschreven worden in de vorm $2q$ met $q \in \mathbb{N}$, dus $a + b$ is even.
- b** Stel de getallen zijn a en b met $a < b$. Dan geldt $b = a + 1$.
 $a + b = a + a + 1 = 2a + 1$
 De som is van de vorm $2n + 1$ met $n \in \mathbb{N}$, dus de som is oneven.

Bladzijde 131

- 66 a** Stel de getallen zijn $a = 2p + 1$ en $b = 2q + 1$, met $p, q \in \mathbb{N}$.
 Dan is $a \cdot b = (2p + 1)(2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = 2 \cdot (2pq + p + q) + 1$.
 Dus $a \cdot b$ kan geschreven worden in de vorm $2n + 1$ met $n \in \mathbb{N}$, dus $a \cdot b$ is oneven.
- b** Stel de getallen zijn $a = 2p$ en $b = 2q + 1$, met $p, q \in \mathbb{N}$.
 Dan is $\frac{a^2 + b^2 + 1}{2} = \frac{(2p)^2 + (2q + 1)^2 + 1}{2} = \frac{4p^2 + 4q^2 + 4q + 1 + 1}{2} = \frac{4p^2 + 4q^2 + 4q + 2}{2} =$
 $2p^2 + 2q^2 + 2q + 1 = 2(p^2 + q^2 + q) + 1$.
 Dus $\frac{a^2 + b^2 + 1}{2}$ kan geschreven worden in de vorm $2n + 1$ met $n \in \mathbb{N}$, dus $\frac{a^2 + b^2 + 1}{2}$ is oneven.
- 67 a** Negatie: als $p^2 - 1$ geen drievoud is, dan is p geen drievoud.
- b** De mogelijkheden voor p zijn $p = 3q + 1$ en $p = 3q + 2$.
- c** $p^2 - 1 = (3q + 1)^2 - 1 = 9q^2 + 6q + 1 - 1 = 9q^2 + 6q = 3(3q^2 + 2q)$
 $p^2 - 1 = (3q + 2)^2 - 1 = 9q^2 + 12q + 4 - 1 = 9q^2 + 12q + 3 = 3(3q^2 + 4q + 1)$
 Dus $p^2 - 1$ kan geschreven worden in de vorm $3n$ met $n \in \mathbb{N}$, dus $p^2 - 1$ is een drievoud.
 Je vindt dus een tegenspraak. Dus als $p^2 - 1$ geen drievoud is, dan is p wel een drievoud.
- 68 a** Negatie: er bestaan natuurlijke getallen x en y waarvoor geldt $x^2 - y^2 = 10$.
- b** $x^2 - y^2 = 10$
 $(x + y)(x - y) = 10$
 $x + y = \frac{10}{x - y}$
- c** Het getal 10 heeft de delers 1, 2, 5 en 10. De som $x + y$ kan geen 1 of 2 zijn omdat $x + y$ dan kleiner is dan $x - y$. Dus $x + y = 5$ of $x + y = 10$.
- d** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$ en $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 1 \end{cases}$ zijn de stelsels.
- e** Optellen van de vergelijkingen en delen door 2 geeft $x = 3\frac{1}{2}$ en $x = 5\frac{1}{2}$.
 Hieruit volgen voor y de waarden $y = 1\frac{1}{2}$ en $y = 4\frac{1}{2}$.
 Deze oplossingen zijn in tegenspraak met het gegeven dat x en y natuurlijke getallen zijn.
 Dus bestaan er geen natuurlijke getallen x en y waarvoor geldt $x^2 - y^2 = 10$.

Bladzijde 132

- 69 a** Negatie: $x = \frac{a}{b}$, waarbij a en b geen gemeenschappelijke delers hebben, is oplossing van de vergelijking
 $x^3 + x + 1 = 0$.
- b** $x = \frac{a}{b}$ substitueren in $x^3 + x + 1 = 0$ geeft $\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{a}{b} + 1 = 0$
 $a^3 + ab^2 + b^3 = 0$
- c** Als a en b beide even zijn, dan hebben ze beide de deler 2. Maar we hebben aangenomen dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben. Dus a en b kunnen niet beide even zijn.
- d** De gevallen a en b beide oneven, a even en b oneven of a oneven en b even.
- e** Als a en b beide oneven zijn, dan is $a^3 + ab^2 + b^3$ de som van drie oneven getallen en dus oneven.
 Als a even en b oneven is, dan zijn a^3 en ab^2 beide even en is b^3 oneven. Dus is $a^3 + ab^2 + b^3$ oneven.
 Als a oneven is en b even, dan is a^3 oneven en zijn ab^2 en b^3 even. Dus is $a^3 + ab^2 + b^3$ oneven.
 Je vindt dus een tegenspraak, want $a^3 + ab^2 + b^3$ is oneven en kan niet gelijk zijn aan 0.
 Uit deze tegenspraak volgt dat de vergelijking $x^3 + x + 1 = 0$ geen oplossing van de vorm $x = \frac{a}{b}$ heeft.
 Hiermee is bewezen dat de vergelijking $x^3 + x + 1 = 0$ geen rationale oplossingen heeft.
- 70 a** Stel het natuurlijk getal n heeft k priemfactoren, dus $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$.
 Nu geldt $n^2 = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k)^2 = p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \cdot p_k$.
 Dus n^2 heeft $2k$ priemfactoren.
 Het aantal priemfactoren van een kwadraat is dus even.

b Negatie: $\sqrt{5}$ is een rationaal getal.

Stel $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{N}$ en waarbij a en b geen gemeenschappelijke delers hebben.

Nu geldt $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$ ofwel $a^2 = 5b^2$.

Het linkerlid van $a^2 = 5b^2$ heeft een even aantal priemfactoren en het rechterlid een oneven aantal.

Je vindt dus een tegenspraak.

Dus $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ kan niet gelijk zijn aan 5, en hieruit volgt dat $\sqrt{5}$ een irrationaal getal is.

71 a Negatie: er bestaan natuurlijke getallen x en y waarvoor geldt $x^2 - 4y = 2$.

b $x^2 - 4y = 2$

$$x^2 = 4y + 2$$

$$x^2 = 2(2y + 1)$$

x^2 is van de vorm $2n$ met $n \in \mathbb{N}$, dus x^2 is even.

c x^2 is even, dus x is even.

Stel $x = 2n$, met $n \in \mathbb{N}$. Dit geeft

$$(2n)^2 = 2(2y + 1)$$

$$2(2n^2) = 2(2y + 1)$$

$$2n^2 = 2y + 1$$

Het linkerlid van deze uitdrukking is even, en het rechterlid is oneven. Je vindt dus een tegenspraak.

Er bestaan dus geen natuurlijke getallen waarvoor geldt $x^2 - 4y = 2$.

72 1 Stelling: $\sqrt{10}$ is een irrationaal getal.

2 Negatie: $\sqrt{10}$ is een rationaal getal.

3 Stel $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{N}$ en waarbij a en b geen gemeenschappelijke delers hebben. Dus a en b kunnen niet beide even zijn.

Nu geldt $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{10})^2$.

$$\frac{a^2}{b^2} = 10$$

$$a^2 = 10b^2$$

Het rechterlid is even, dus a^2 is even en dus is a ook even.

Neem $a = 2n$, met $n \in \mathbb{N}$. Je krijgt $(2n)^2 = 10b^2$

$$4n^2 = 10b^2$$

$$2n^2 = 5b^2$$

Hieruit volgt dat b^2 en dus ook b even moet zijn.

Als a en b echter beide even zijn, kan de breuk $\frac{a}{b}$ vereenvoudigd worden.

Dit is in tegenspraak met de aanname dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben.

4 Hiermee is bewezen dat $\sqrt{10}$ een irrationaal getal is.

73 1 Stelling: de vergelijking $2^x = 3$ heeft geen rationale oplossingen.

2 Negatie: de vergelijking $2^x = 3$ heeft rationale oplossingen.

3 Stel $x = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{N}$.

Nu geldt $2^{\frac{a}{b}} = 3$.

$$\left(2^{\frac{a}{b}}\right)^b = 3^b$$

$$2^a = 3^b$$

Het linkerlid bevat alleen factoren 2, en is dus een even getal.

Het rechterlid bevat alleen factoren 3, en is dus een oneven getal.

Je vindt dus een tegenspraak.

4 Hiermee is bewezen dat de vergelijking $2^x = 3$ geen rationale oplossingen heeft.

Diagnostische toets

Bladzijde 134

$$\textcircled{1} \left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \\ \frac{AE}{AB} = \frac{1\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (zhz)}$$

Uit $\triangle ABC \sim \triangle AED$ volgt $\angle AED = \angle ABC$, dus $DE \parallel BC$ (F-hoeken).

$$\left. \begin{array}{l} \angle DEF = \angle BCF \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle EDF = \angle CBF \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle DEF \sim \triangle BCF \text{ (hh)}$$

$$\text{Uit } \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ en } \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \text{ volgt } \frac{ED}{BC} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Uit } \triangle DEF \sim \triangle BCF \text{ en } \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \text{ volgt } \frac{DF}{BF} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BF}{DF + BF} = \frac{3}{4}$$

$$4 \cdot BF = 3 \cdot BD$$

$$BF = \frac{3}{4}BD$$

$$\textcircled{2} \left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \triangle ADF \sim \triangle ABC \text{ (zhz)}$$

Uit $\triangle ADF \sim \triangle ABC$ volgt $\angle AFD = \angle C$, dus $DF \parallel BC$ (F-hoeken).

$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \\ \frac{BD}{BA} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \triangle BDE \sim \triangle BAC \text{ (zhz)}$$

Uit $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ volgt $\angle BED = \angle C$, dus $DE \parallel AC$ (F-hoeken).

$$\left. \begin{array}{l} \angle BED = \angle D_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle BED = \angle C \end{array} \right\} \angle D_2 = \angle C$$

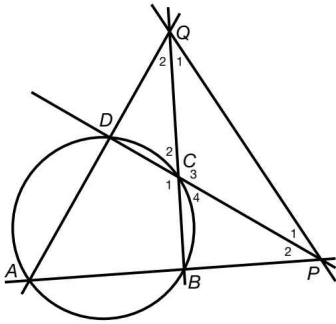
$$\textcircled{3} \left. \begin{array}{l} \angle ACG = 90^\circ + \angle ACB \\ \angle DCB = 90^\circ + \angle ACB \end{array} \right\} \angle ACG = \angle DCB$$

$$\left. \begin{array}{l} AC = CD \text{ (vierkant)} \\ BC = CG \text{ (vierkant)} \\ \angle ACG = \angle DCB \end{array} \right\} \triangle ACG \cong \triangle DCB \text{ (ZHZ), dus } AG = BD.$$

$$\textcircled{4} \left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ \angle CAD = \angle ABC \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DAC \text{ (hh)}$$

$$\text{Uit } \triangle ABC \sim \triangle DAC \text{ volgt } \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}, \text{ dus } AC^2 = BC \cdot CD.$$

5 Zie de figuur.



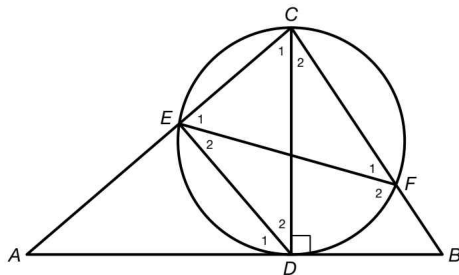
$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle C_1 = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle C_1 = \angle C_3 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \angle A + \angle C_3 = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle C_3 + \angle P_1 + \angle Q_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \angle A = \angle P_1 + \angle Q_1$$

Dus $\angle CPQ + \angle CQP = \angle A$.

Bladzijde 135

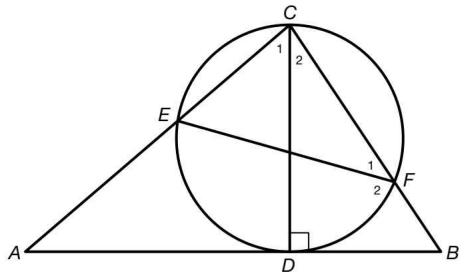
6 a Teken DE.



$$\left. \begin{array}{l} \angle F_1 = \angle D_2 \text{ (constante hoek)} \\ \angle E_{12} = 90^\circ \text{ (Thales)} \\ \angle D_2 + \angle C_1 + \angle E_{12} = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle F_1 + \angle C_1 + 90^\circ = 180^\circ \\ \angle F_1 + \angle C_1 = 90^\circ \end{array}$$

Dus $\angle ECD + \angle EFC = 90^\circ$.

b Zie de figuur.

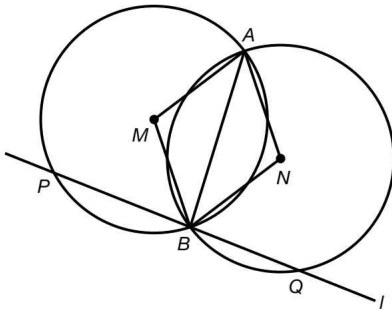


$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle C_1 + 90^\circ = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek), dus } \angle A + \angle C_1 = 90^\circ \\ \angle F_1 + \angle C_1 = 90^\circ \text{ (vraag a)} \end{array} \right\} \angle A = \angle F_1$$

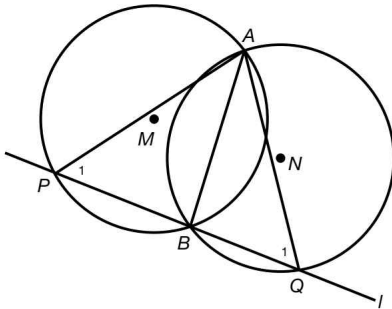
$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle F_1 \\ \angle F_1 + \angle F_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle A + \angle F_2 = 180^\circ$$

Dus ABFE is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

- 7** Noem de middelpunten van de cirkels M en N .



$$\left. \begin{array}{l} MA = NA \text{ (gegeven)} \\ MB = NB \text{ (gegeven)} \\ AB = AB \end{array} \right\} \triangle MAB \cong \triangle NAB \text{ (ZZZ)}, \text{ dus } \angle AMB = \angle ANB$$



$$\left. \begin{array}{l} \angle AMB = \angle ANB \\ \angle P_1 = \frac{1}{2} \angle AMB \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle Q_1 = \frac{1}{2} \angle ANB \text{ (omtrekshoek)} \end{array} \right\} \angle P_1 = \angle Q_1$$

Dus driehoek PAQ is gelijkbenig en hieruit volgt $AP = AQ$.

- 8** a 1 $n = 1$ geeft $3^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{1-1} = 3^3 + 2^0 = 27 + 1 = 28$ en dat is deelbaar door 7.
 2 Neem aan dat $3^{2p+1} + 2^{p-1}$ deelbaar is door 7 en bewijs dat $3^{2(p+1)+1} + 2^{p+1-1}$ deelbaar is door 7.
 $3^{2(p+1)+1} + 2^{p+1-1} = 3^{2p+2+1} + 2^{p+1-1} = 3^2 \cdot 3^{2p+1} + 2^1 \cdot 2^{p-1} = 9 \cdot 3^{2p+1} + 2 \cdot 2^{p-1} = 7 \cdot 3^{2p+1} + 2(3^{2p+1} + 2^{p-1})$
 $7 \cdot 3^{2p+1}$ is deelbaar door 7 omdat deze term een factor 7 bevat.
 $2(3^{2p+1} + 2^{p-1})$ is deelbaar door 7 vanwege de inductiehypothese.
 Dus $7 \cdot 3^{2p+1} + 2(3^{2p+1} + 2^{p-1})$ is deelbaar door 7.
 3 Hiermee is bewezen dat $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ deelbaar is door 7 voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

- b 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 (4k-1) = 2 \cdot 1^2 + 1$ ofwel $3 = 3$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=1}^p (4k-1) = 2p^2 + p$ en bewijs dat $\sum_{k=1}^{p+1} (4k-1) = 2(p+1)^2 + (p+1)$.

$$\sum_{k=1}^{p+1} (4k-1) = \sum_{k=1}^p (4k-1) + 4(p+1) - 1 = 2p^2 + p + 4(p+1) - 1 = 2p^2 + p + 4p + 4 - 1 = 2p^2 + 4p + 2 + p + 1 = 2(p^2 + 2p + 1) + p + 1 = 2(p+1)^2 + (p+1)$$

- 3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=1}^n (4k-1) = 2n^2 + n$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

- c 1 $n = 0$ geeft $\sum_{k=0}^0 3 \cdot 2^k = 6 \cdot 2^0 - 3$ ofwel $3 = 3$ en dit klopt.

- 2 Neem aan dat $\sum_{k=0}^p 3 \cdot 2^k = 6 \cdot 2^p - 3$ en bewijs dat $\sum_{k=0}^{p+1} 3 \cdot 2^k = 6 \cdot 2^{p+1} - 3$.

$$\sum_{k=0}^{p+1} 3 \cdot 2^k = \sum_{k=0}^p 3 \cdot 2^k + 3 \cdot 2^{p+1} = 6 \cdot 2^p - 3 + 3 \cdot 2^{p+1} = 3 \cdot 2 \cdot 2^p - 3 + 3 \cdot 2^{p+1} = 3 \cdot 2^{p+1} - 3 + 3 \cdot 2^{p+1} = 6 \cdot 2^{p+1} - 3$$

- 3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=0}^n 3 \cdot 2^k = 6 \cdot 2^n - 3$ voor elk natuurlijk getal n .

- 9 a** Er zijn tien mogelijke tweetallen met verschil 10. Dit zijn $\{1, 11\}, \{2, 12\}, \{3, 13\}, \dots, \{10, 20\}$.
Deze 10 tweetallen zijn de laden en de 11 gekozen getallen de knikkers.
Leg in elk van de laden 1 knikker.
Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.
Er is dus altijd een lade met minstens 2 knikkers.
Er is dus minstens een tweetal getallen bij waarvan het verschil 11 is.
- b** Er zijn vier mogelijke tweetallen met som 12. Dit zijn $\{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}$.
Dit zijn de vier laden. De getallen 1 en 6 hebben geen complement dat als som 12 geeft, en zijn dus knikkers zonder bijpassende lade.
In het ongunstigste geval kies je bij de zeven getallen de knikkers 1 en 6 die je niet in een lade kwijt kunt.
Er blijven dan 5 knikkers over die wel een corresponderende lade hebben.
Leg in elk van de laden 1 van deze 5 knikkers.
Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.
Er is dus altijd een lade met minstens twee knikkers.
Er zijn dus minstens twee getallen bij waarvan de som 12 is.
- 10** 1 Stelling: er bestaan geen positieve gehele getallen waarvoor geldt $4x^2 - y^2 = 5$.
2 Negatie: er bestaan positieve gehele getallen waarvoor geldt $4x^2 - y^2 = 5$.
3 $4x^2 - y^2 = 5$
 $(2x - y)(2x + y) = 5$
 $2x + y = \frac{5}{2x - y}$
Omdat $2x + y > 2x - y$ moet gelden $2x + y = 5$ en $2x - y = 1$.
Dit geeft het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.
Optellen van de vergelijkingen en delen door 4 geeft $x = 1\frac{1}{2}$.
Dit is in tegenspraak met het gegeven dat x en y positieve gehele getallen zijn.
4 Dus er bestaan geen positieve gehele getallen x en y waarvoor geldt $4x^2 - y^2 = 5$.
- 11** 1 Stelling: de som van een rationaal getal $\frac{a}{b}$ en een irrationaal getal p is irrationaal.
2 Negatie: de som van een rationaal getal $\frac{a}{b}$ en een irrationaal getal p is rationaal.
3 $\frac{a}{b} + p$ is rationaal, dus stel $\frac{a}{b} + p = \frac{c}{d}$, met $c, d \in \mathbb{Z}$.
 $\frac{a}{b} + p = \frac{c}{d}$
 $p = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$
 $p = \frac{bc - ad}{bd}$
Omdat in de teller en in de noemer gehele getallen staan is p een rationaal getal.
Dit is in tegenspraak met de aanname dat p irrationaal is.
4 Hiermee is bewezen dat $\frac{a}{b} + p$ een irrationaal getal is.