

6 Discrete dynamische modellen

Voorkennis Recursieve formules

Bladzijde 55

- 1 a** TI Casio
 Voer in Voer in
 $n\text{Min} = 0$ $a_{n+1} = 1.75a_n - 30$
 $u(n) = 1.75u(n-1) - 30$ Start = 0
 $u(n\text{Min}) = 50$ End = 50
 $a_0 = 50$

De vijfde term van de rij is $u_4 = 133,79$.

- b** $u_8 \approx 920$ en $u_9 \approx 1579$
 Vanaf de tiende term is $u_n > 1000$.

- 2 a** TI Casio
 Voer in Voer in
 $n\text{Min} = 0$ $a_{n+1} = 0.8a_n + 0.5(n+1)^2$
 $u(n) = 0.8u(n-1) + 0.5n^2$ Start = 0
 $u(n\text{Min}) = 60$ End = 50
 $a_0 = 60$

$u_2 = 40,8$, $u_3 = 37,14$ en $u_4 = 37,712$

De vierde term is de kleinste term van de rij.

- b** $u_9 \approx 108,47$
 De tiende term is $u_9 \approx 108,47$.
c $u_{17} \approx 472$ en $u_{18} \approx 539$
 Vanaf de negentiende term is $u_n > 500$.
d $u_{30} \approx 1739,96$
 De 31^e term is, afgerond op gehele, gelijk aan 1740.

- 3 a** TI Casio
 Voer in Voer in
 $n\text{Min} = 0$ $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$
 $u(n) = 3u(n-1) + 4u(n-2)$ Start = 0
 $u(n\text{Min}) = \{2,1\}$ End = 50
 $a_0 = 1$
 $a_1 = 2$

De vijfde term is $u_4 = 154$.

De vijftiende term is $u_{14} = 161\,061\,274$.

- b** $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ $\frac{u_5}{u_4} = \frac{614}{154} \approx 3,99$
 $\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{2} = 5$ $\frac{u_6}{u_5} = \frac{2458}{614} \approx 4,00$
 $\frac{u_3}{u_2} = \frac{38}{10} = 3,8$ $\frac{u_7}{u_6} = \frac{9830}{2458} \approx 4,00$
 $\frac{u_4}{u_3} = \frac{154}{38} \approx 4,05$ $\frac{u_8}{u_7} = \frac{39\,322}{9830} \approx 4,00$

De groeifactor van deze groei is 4.

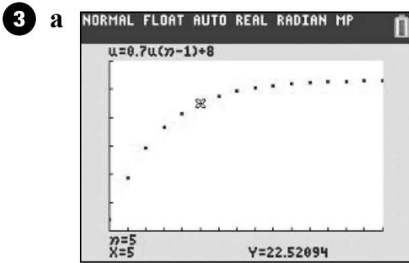
6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde

Bladzijde 56

- 1** Bij deze situatie horen de formules $K_n = 1,019 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 10\,000$ en $K_n - K_{n-1} = 0,019 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 10\,000$.

Bladzijde 57

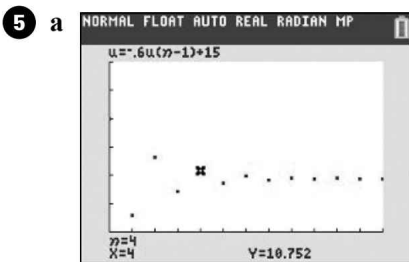
- 2** a, c, e en f zijn lineair en van de eerste orde.



u_n nadert tot $26\frac{2}{3}$.

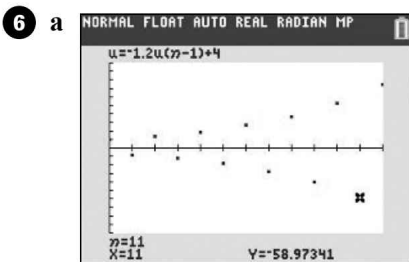
b Bij een andere startwaarde nadert u_n ook tot $26\frac{2}{3}$.

- 4 a** $b = 2$ geeft de grenswaarde 5.
 $b = 20$ geeft de grenswaarde 50.
 $b = 4$ geeft de grenswaarde 10.
- b** Bij $b = 2$ is de tijdgrafiek dalend.
 Bij $b = 20$ is de tijdgrafiek stijgend.
 Bij $b = 4$ is de tijdgrafiek horizontaal.



u_n nadert tot 9,4.

b De stippen van de tijdgrafiek liggen om en om boven en onder de grenswaarde.



u_n nadert niet tot een grenswaarde.

b De termen van u_n zijn om en om positief en negatief. De positieve termen worden steeds groter en de negatieve termen worden steeds kleiner.

Bladzijde 58

7 a

$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11,5$	$u_4 = 18,25$
$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11,5$	$u_4 = 18,25$	$u_5 = 28,375$

b Uit de derde kolom volgt (7; 11,5).

Uit de vierde kolom volgt (11,5; 18,25).

c Alle punten liggen op de lijn $y = 1,5x + 1$.

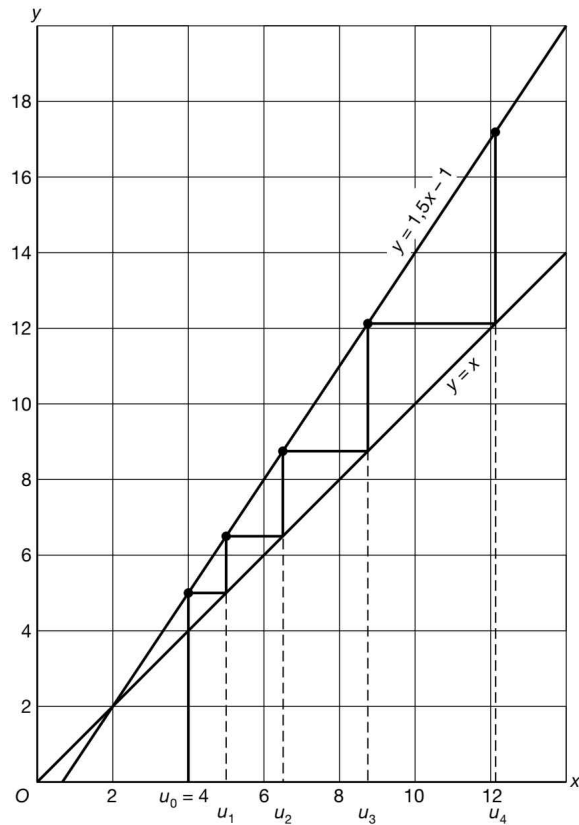
d Je moet u_n in $u_n = 1,5u_{n-1} + 1$ vervangen door y en u_{n-1} door x .

e Ja, want als je u_n door y en u_{n-1} door x vervangt krijg je steeds $y = 1,5x + 1$.

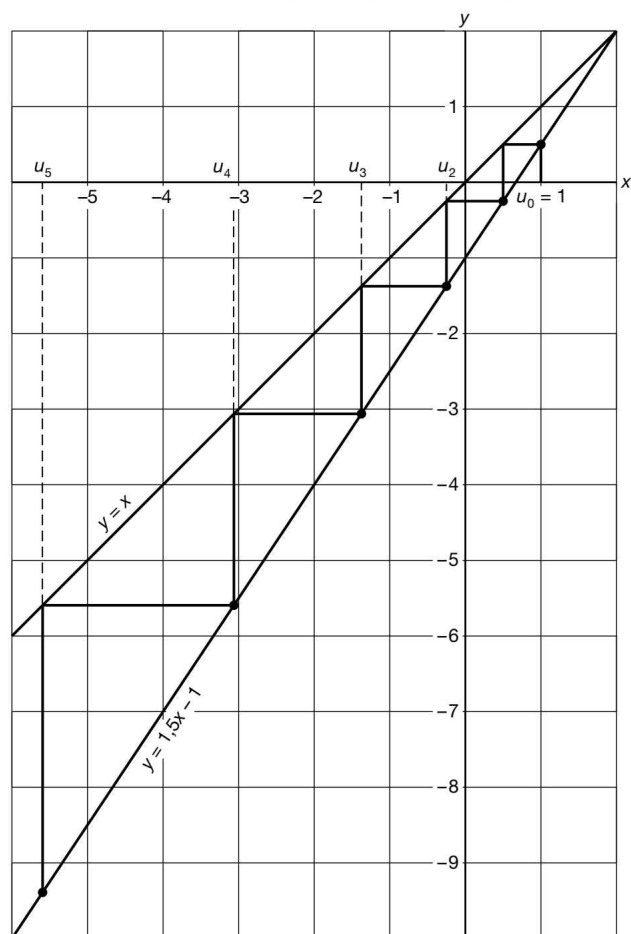
Bladzijde 60

8

a

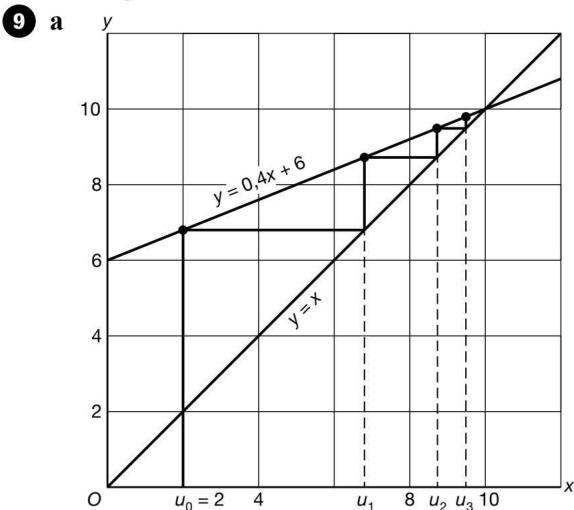


b



- c De webgrafiek bestaat uit het punt $(2, 2)$.
De rij u_n is de constante rij $u_n = 2$.

Bladzijde 61



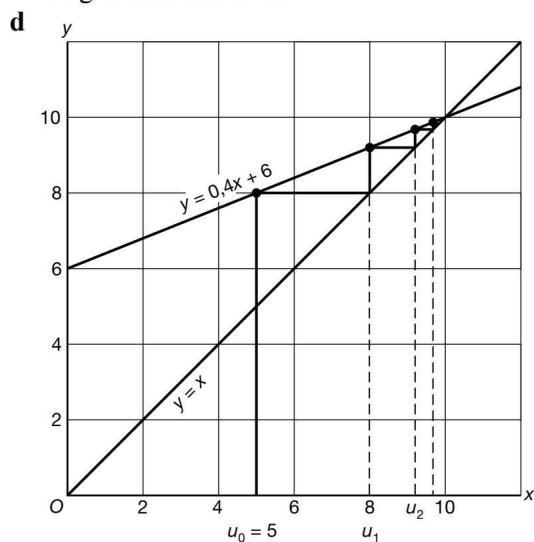
b De lijnstukken komen steeds dichterbij elkaar te liggen en naderen het snijpunt van $y = x$ en $y = 0.4x + 6$.

c $x = 0.4x + 6$

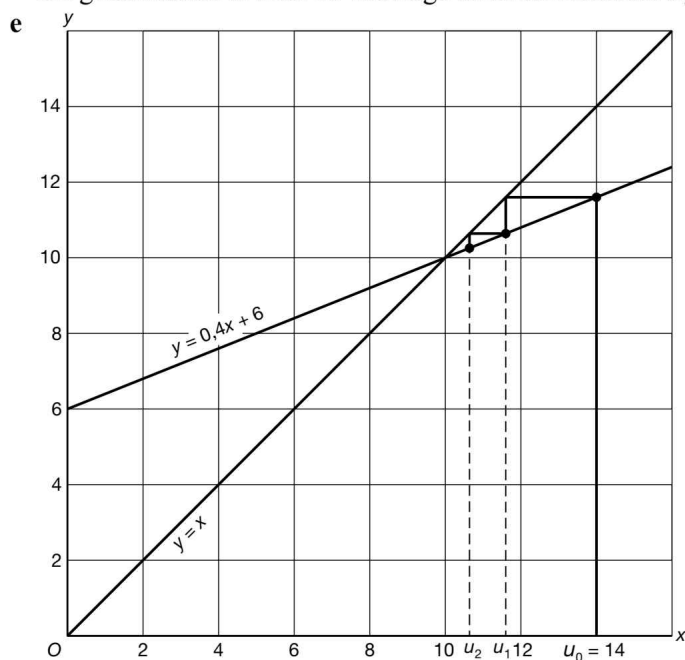
$$0.6x = 6$$

$$x = 10$$

De grenswaarde is 10.



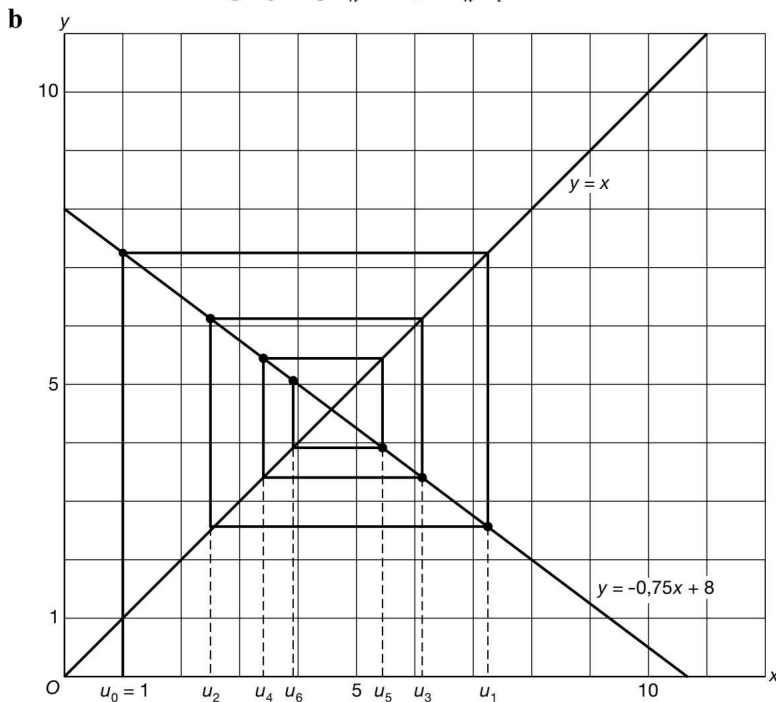
De grenswaarde is weer 10 vanwege dezelfde reden als bij b.



De grenswaarde is weer 10 vanwege dezelfde reden als bij b.

- f Voor $u_0 < 10$ gaan de lijnstukjes van de webgrafiek stijgend naar $(10, 10)$ en voor $u_0 > 10$ gaan de lijnstukjes van de webgrafiek dalend naar $(10, 10)$.
Voor $u_0 = 10$ krijg je de constante rij met termen $10, 10, 10, \dots$
Dus voor elke u_0 is de grenswaarde gelijk aan 10.

- 10 a De differentievergelijking $u_n = -0,75u_{n-1} + 8$.



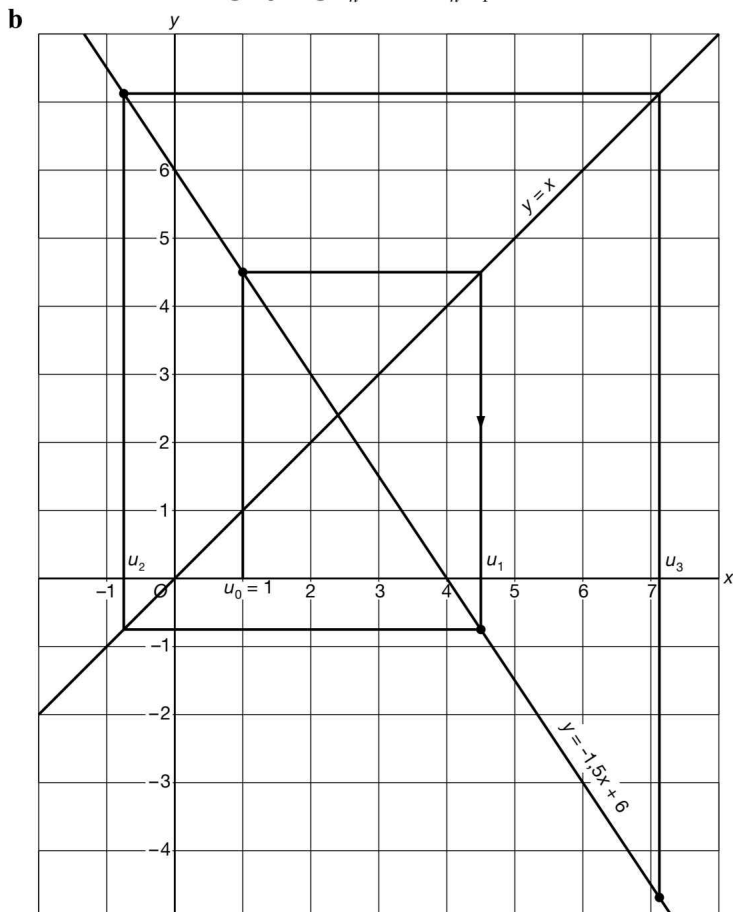
- c Los op $x = -0,75x + 8$

$$1,75x = 8$$

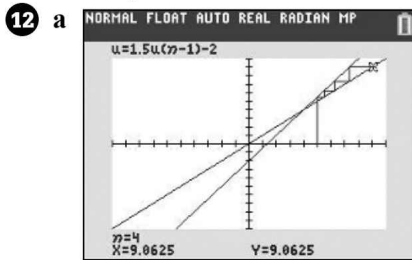
$$x = 4\frac{4}{7}$$

De grenswaarde is $4\frac{4}{7}$.

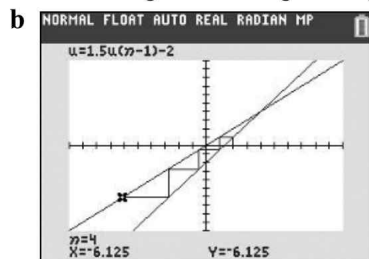
- 11 a De differentievergelijking $u_n = -1,5u_{n-1} + 6$.



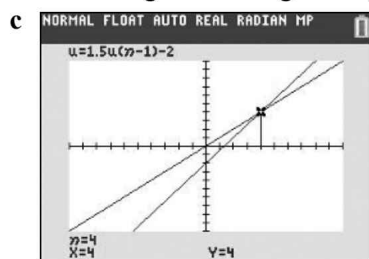
- c Nee, de punten komen steeds verder van het snijpunt van de lijnen $y = -1,5x + 6$ en $y = x$ af te liggen.
- d De webgrafiek bestaat uit het punt $(2,4; 2,4)$ want dit is het snijpunt van de lijnen $y = -1,5x + 6$ en $y = x$.

Bladzijde 63

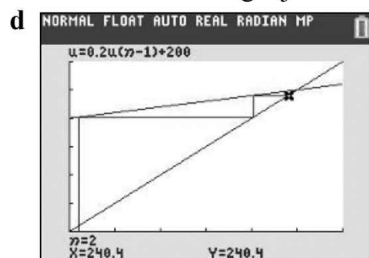
Er treedt geen convergentie op.



Er treedt geen convergentie op.

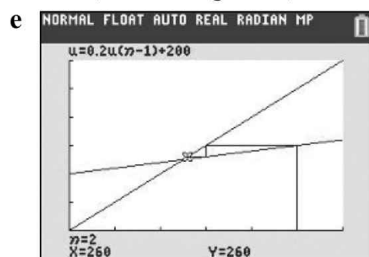


De startwaarde is gelijk aan de grenswaarde 4.



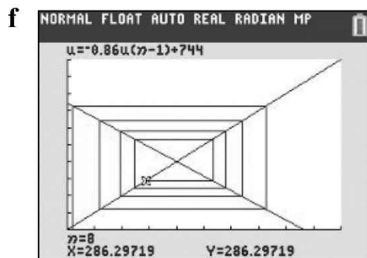
Er treedt convergentie op.

$\bar{u} = 0,2\bar{u} + 200$ geeft $0,8\bar{u} = 200$, dus $\bar{u} = 250$.



Er treedt convergentie op.

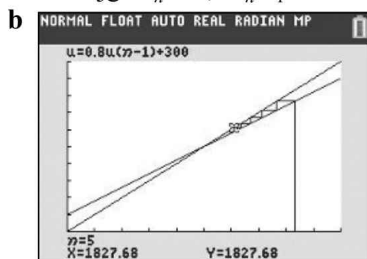
$\bar{u} = 0,2\bar{u} + 200$ geeft $0,8\bar{u} = 200$, dus $\bar{u} = 250$.



Er treedt convergentie op.

$\bar{u} = -0,86\bar{u} + 744$ geeft $1,86\bar{u} = 744$, dus $\bar{u} = 400$.

- 13 a De groeifactor per jaar is $1 - 0,2 = 0,8$.
Je krijgt $A_n = 0,8A_{n-1} + 300$ met $A_0 = 2500$.



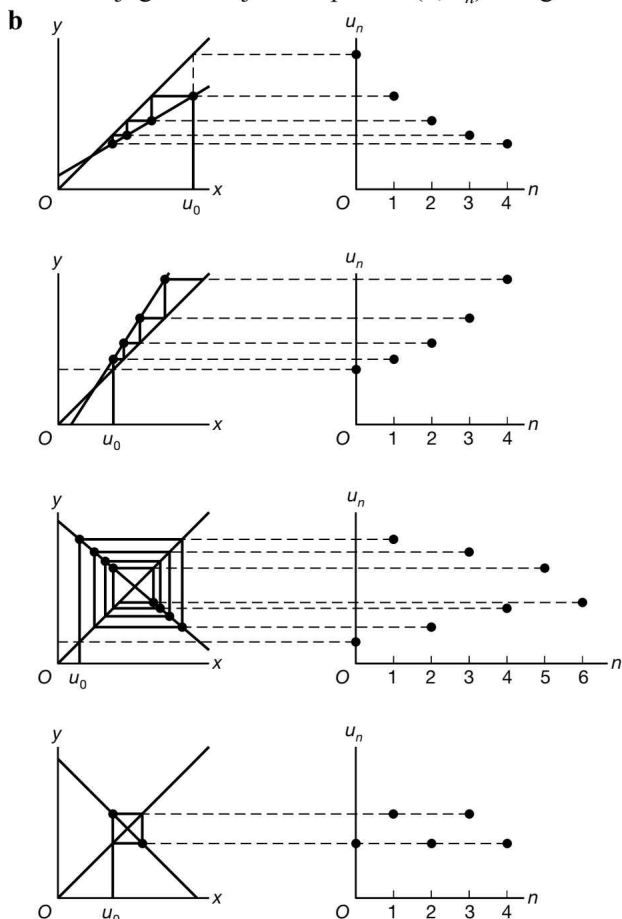
De rij A_n convergeert, zie de webgrafiek.

- c $\bar{A} = 0,8\bar{A} + 300$ geeft $0,2\bar{A} = 300$, dus $\bar{A} = 1500$.
Op den duur staan er 1500 dennenbomen.

- 14 a Voor een rekenkundige rij moet het verschil tussen de opeenvolgende termen constant zijn.
Dus $a = 1$. Voor b zijn er geen voorwaarden.
b Voor een meetkundige rij moet het quotiënt van twee opeenvolgende termen constant zijn.
Dus $b = 0$ en $a \neq 0$.

Bladzijde 64

- 15 a Je kunt in de webgrafiek bij elke n de waarde van u_n aflezen op de lijn $y = ax + b$.
In de tijdgrafiek zijn deze punten (n, u_n) ook getekend.



16 a $u_n = 1,025u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 750$.

b TI

Voer in

$$n\text{Min} = 0$$

$$u(n) = 1.025u(n-1) + 500$$

$$u(n\text{Min}) = 750$$

$$v(n) = 20750 \times 1,025^n - 20000$$

Casio

Voer in

$$a_{n+1} = 1.025a_n + 500$$

$$\text{Start} = 0$$

$$\text{End} = 50$$

$$a_0 = 750$$

$$b_{n+1} = 20750 \times 1,025^{n+1} - 20000$$

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS * FOR ΔTb1				
n	$u(n)$	$v(n)$		
0	750	750		
1	1268.8	1268.8		
2	1800.5	1800.5		
3	2345.5	2345.5		
4	2904.1	2904.1		
5	3476.7	3476.7		
6	4063.6	4063.6		
7	4665.2	4665.2		
8	5281.9	5281.9		
9	5913.9	5913.9		
10	6561.8	6561.8		
$n=0$				

Dus de directe formule $u_n = 20750 \cdot 1,025^n - 20000$ hoort ook bij deze situatie.

17 a $\bar{u} = 1,05\bar{u} + 500$ geeft $-0,05\bar{u} = 500$, dus $\bar{u} = -10000$.

Het dekpunt van de differentievergelijking $u_n = 1,05u_{n-1} + 500$ is -10000 .

b Bij de recursieve formule $u_n = 1,05u_{n-1}$ krijg je een term door de voorafgaande term met 1,05 te vermenigvuldigen.

Je hebt dus te maken met een exponentieel verband met groeifactor 1,05.

Hierbij hoort de formule $u_n = a \cdot 1,05^n$, waarbij a de beginwaarde is.

c $u_0 = a \cdot 1,05^0 - 10000 = a \cdot 1 - 10000 = a - 10000$

$u_0 = 750$ geeft $a - 10000 = 750$, dus $a = 10750$.

Bladzijde 66

18 a Kies je bij de formule $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$ met n een geheel getal voor n het (gehele) getal $n-1$, dan krijg je $u_{n-1} = A \cdot a^{n-1} + \bar{u}$.

b Substitutie van $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$ en $u_{n-1} = A \cdot a^{n-1} + \bar{u}$ in $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ geeft

$$A \cdot a^n + \bar{u} = a \cdot (A \cdot a^{n-1} + \bar{u}) + b$$

$$A \cdot a^n + \bar{u} = a \cdot A \cdot a^{n-1} + a \cdot \bar{u} + b$$

$$A \cdot a^n + \bar{u} = A \cdot a^n + a \cdot \bar{u} + b$$

c Uit $A \cdot a^n + \bar{u} = A \cdot a^n + a \cdot \bar{u} + b$ volgt $\bar{u} = a \cdot \bar{u} + b$.

Bij de recursieve formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met dekpunt $\bar{u}$ krijg je $\bar{u} = a \cdot \bar{u} + b$.

Omdat uit a en b ook volgt $\bar{u} = a \cdot \bar{u} + b$ is $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$ met $\bar{u}$ het dekpunt en A een constante.

19 a Voor het dekpunt $\bar{u}$ geldt $\bar{u} = 1,5\bar{u} - 5$

$$-0,5\bar{u} = -5$$

$$\bar{u} = 10$$

$$\text{Stel } u_n = A \cdot 1,5^n + 10.$$

$$u_0 = 30 \text{ geeft } A \cdot 1,5^0 + 10 = 30$$

$$A = 20$$

$$\text{Dus } u_n = 20 \cdot 1,5^n + 10.$$

b Voor het dekpunt $\bar{x}$ geldt $\bar{x} = 0,75\bar{x} + 20$

$$0,25\bar{x} = 20$$

$$\bar{x} = 80$$

$$\text{Stel } x_n = A \cdot 0,75^n + 80.$$

$$x_0 = 100 \text{ geeft } A \cdot 0,75^0 + 80 = 100$$

$$A = 20$$

$$\text{Dus } x_n = 20 \cdot 0,75^n + 80.$$

c Voor het dekpunt $\bar{K}$ geldt $\bar{K} = 1,05\bar{K} - 200$

$$-0,05\bar{K} = -200$$

$$\bar{K} = 4000$$

$$\text{Stel } K_n = A \cdot 1,05^n + 4000.$$

$$K_0 = 1000 \text{ geeft } A \cdot 1,05^0 + 4000 = 1000$$

$$A = -3000$$

$$\text{Dus } K_n = -3000 \cdot 1,05^n + 4000.$$

- 20 a** $K_n = 1,02K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 2500$
b Voor het dekpunt $\bar{K}$ geldt $\bar{K} = 1,02\bar{K} - 150$
 $-0,02\bar{K} = -150$
 $\bar{K} = 7500$
 $K_0 = 2500$ geeft $A \cdot 1,02^0 + 7500 = 2500$
 $A = -5000$
Dus $K_n = -5000 \cdot 1,02^n + 7500$.
c Voer in $y_1 = -5000 \cdot 1,02^x + 7500$.
De tabel geeft $x = 20$ en $y_1 \approx 70,26$
 $x = 21$ en $y_1 \approx -78,33$.
 $n = 20$ hoort bij 1 januari 2035 en $n = 21$ hoort bij 1 januari 2036.
Ze kan dus op 1 januari 2036 voor het eerst geen 150 euro opnemen.
Ze kan nog wel $150 - 78,33 = 71,67$ euro opnemen.
- 21 a** Elke vier uur wordt 25% afgebroken, er is dan dus nog 75% aanwezig.
 $H_n = 0,75 H_{n-1} + 50$ met $H_0 = 100$
b Voor het dekpunt $\bar{H}$ geldt $\bar{H} = 0,75\bar{H} + 50$
 $0,25\bar{H} = 50$
 $\bar{H} = 200$
Stel $H_n = A \cdot 0,75^n + 200$.
 $H_0 = 100$ geeft $A \cdot 0,75^0 + 200 = 100$
 $A = -100$
Dus $H_n = -100 \cdot 0,75^n + 200$.
c Na 32 uur, dus $n = 8$.
 $H_8 = -100 \cdot 0,75^8 + 200 \approx 190$ mg
d Ja, er is sprake van convergentie.
De grenswaarde is 200.

Bladzijde 67

- 22 a** Om 7:00 uur 10 000 mensen.
Om 7:30 uur $10\,000 + 0,4(40\,000 - 10\,000) = 22\,000$ mensen.
Om 8:00 uur $22\,000 + 0,4(40\,000 - 22\,000) = 29\,200$ mensen.
Dus 29 200 mensen.
b Zie de berekeningen bij vraag a.
Je krijgt $P_n = P_{n-1} + 0,4(40\,000 - P_{n-1})$
 $= P_{n-1} + 16\,000 - 0,4P_{n-1}$
 $= 0,6P_{n-1} + 16\,000$
Om 7:00 uur kijken 10 000 mensen.
Dus je krijgt de rij $P_n = 0,6P_{n-1} + 16\,000$ met $P_0 = 10\,000$.
c Voor het dekpunt $\bar{P}$ geldt $\bar{P} = 0,6\bar{P} + 16\,000$
 $0,4\bar{P} = 16\,000$
 $\bar{P} = 40\,000$
Stel $P_n = A \cdot 0,6^n + 40\,000$.
 $P_0 = 10\,000$ geeft $A \cdot 0,6^0 + 40\,000 = 10\,000$
 $A = -30\,000$
Dus $P_n = -30\,000 \cdot 0,6^n + 40\,000$.
d Voer in $y_1 = -30\,000 \cdot 0,6^x + 40\,000$.
De tabel geeft $x = 6$ en $y_1 \approx 38\,600$
 $x = 7$ en $y_1 \approx 39\,160$.
Dus voor $n = 7$ is P_n voor het eerst meer dan 39 000.
- 23 a** $L_0 = 150$
 $L_1 = 150 + 0,2(800 - 150) = 280$
 $L_2 = 280 + 0,2(800 - 280) = 384$
b $L_n = L_{n-1} + 0,2(800 - L_{n-1}) = L_{n-1} + 160 - 0,2L_{n-1} = 0,8L_{n-1} + 160$
Dus $L_n = 0,8L_{n-1} + 160$ met $L_0 = 150$.

- c Voor het dekpunt $\bar{L}$ geldt $\bar{L} = 0,8\bar{L} + 160$

$$0,2\bar{L} = 160$$

$$\bar{L} = 800$$

Stel $L_n = A \cdot 0,8^n + 800$.

$$L_0 = 150 \text{ geeft } A \cdot 0,8^0 + 800 = 150$$

$$A = -650$$

$$\text{Dus } L_n = -650 \cdot 0,8^n + 800.$$

- d 90% van 800 is 720.

$$\text{Voer in } y_1 = -650 \cdot 0,8^x + 800.$$

De tabel geeft $x = 9$ en $y_1 \approx 713$

$$x = 10 \text{ en } y_1 \approx 730.$$

Dus men moet in totaal 11 dagen ringen.

6.2 Logistische groei

Bladzijde 69

- 24 a Bij een toename van 10% per jaar hoort een groeifactor van 1,10 per jaar.

$$\text{Dus } P_t = 1,10P_{t-1}.$$

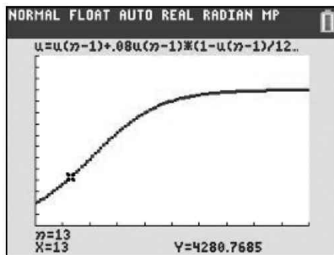
b $P_t = 1,10P_{t-1}.$

$$P_t = P_{t-1} + 0,1P_{t-1}$$

$$\text{Dus } a = 0,1.$$

Bladzijde 70

- 25 a De grenswaarde is 12 000.
b Voer de differentievergelijkingen in op het rijen-invoerscherm.



$$P_{13} \approx 4281$$

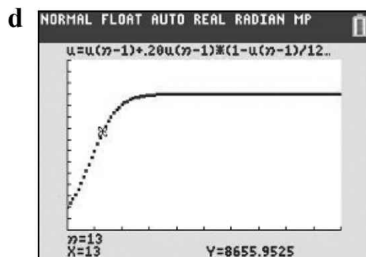
$$P_{20} \approx 5901$$

- c De tabel geeft

$$t = 49 \text{ en } P \approx 10938$$

$$t = 50 \text{ en } P \approx 11015.$$

Dus vanaf $t = 50$.



$$P_{13} \approx 8656$$

$$P_{20} \approx 11050$$

De tabel geeft $P_{19} \approx 10840$ en $P_{20} \approx 11050$.

Dus vanaf $t = 20$.

- e De tabel geeft $P_{99} \approx 10966$ en $P_{100} \approx 11004$.

Dus vanaf $t = 100$.

- f Bij een grotere groeivoet wordt de grenswaarde sneller benaderd.

Bladzijde 71

- 26 a** Voer de differentievergelijking in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $P_{43} \approx 1994,5$ en $P_{44} \approx 1996,1$.
Dus vanaf $t = 44$.
- b** $P_t = P_{t-1} + 0,3 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{50}\right)$ met $P_0 = 2$
- c** Bijvoorbeeld $P_t = P_{t-1} + 0,1 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{50}\right)$ met $P_0 = 2$.
- 27** De grenswaarde is 25, dus $P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{25}\right)$ met $P_0 = 2$.
Na enig proberen vind je dat $k = 0,25$ voldoet.
Dus $P_t = P_{t-1} + 0,25 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{25}\right)$ met $P_0 = 2$.
- 28 a** De grenswaarde is 1035 en $P_0 = 14$.
Dus $P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{1035}\right)$ met $P_0 = 14$.
Proberen met de GR geeft $k = 0,18$.
Dus $P_t = P_{t-1} + 0,18 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{1035}\right)$ met $P_0 = 14$.
- b** Voer de differentievergelijking van vraag a in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $n = 40$ en $u(n) \approx 975$.
De gevraagde afwijking is dus 0%.
- 29 a** $G = 2000$, $P_0 = 150$ en $k = 0,5$, dus $P_t = P_{t-1} + 0,5 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{2000}\right)$ met $P_0 = 150$.
- b** Voer de differentievergelijking van vraag a in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $P_9 \approx 1727$ en $P_{10} \approx 1845$.
Dus vanaf $t = 10$.
- c** De tabel geeft $P_{13} \approx 1978$ en $P_{14} \approx 1989$.
Dus vanaf $t = 14$.
- d** $P_t = P_{t-1} + 0,5 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{5000}\right)$ met $P_0 = 150$.
Voer de differentievergelijking van vraag c in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $P_{16} \approx 4965$ en $P_{17} \approx 4982$.
Dus vanaf $t = 17$.

Bladzijde 72

- 30** 80% van 20 000 is 16 000, dus $G = 16 000$.
 $N_t = N_{t-1} + 0,4 \cdot N_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{N_{t-1}}{16 000}\right)$ met $N_0 = 1500$.
Voer de differentievergelijking in op het rijen-invoerscherm.
De tabel geeft $N_{12} \approx 14 874$ en $N_{13} \approx 15 923$.
Dus $t = 13$ en hierbij hoort 14 maart.
- 31 a** $P_t = P_{t-1} + 0,4 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right) = P_{t-1} + 0,4 \cdot P_{t-1} - \frac{0,4}{20} \cdot P_{t-1}^2 = 1,4P_{t-1} - 0,02P_{t-1}^2$
Dus $a = 1,4$ en $b = 0,02$.
- b** Eerste orde: alleen termen met P_{t-1} en niet met bijvoorbeeld P_{t-2} .
Kwadratisch: er komt een term met P_{t-1}^2 voor.

Bladzijde 73

- 32** $P_t = y$ en $P_{t-1} = x$, dus $y = x + 0,4x \left(1 - \frac{x}{200}\right)$
$$y = x + 0,4x - \frac{0,4}{200}x^2$$
$$y = 1,4x - 0,002x^2$$
$$y = -0,002x^2 + 1,4x$$

- 33** In $P_t = P_{t-1} + 0,5 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right)$ is de grenswaarde 20.

Bladzijde 74

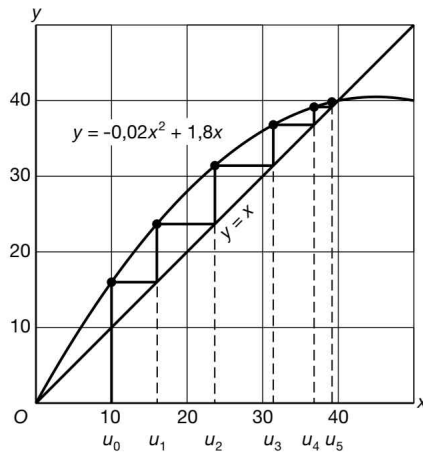
34 a $y = x + 0,8x \left(1 - \frac{x}{40}\right) = x + 0,8x - \frac{0,8}{40}x^2 = -0,02x^2 + 1,8x$

b Voer in $y_1 = -0,02x^2 + 1,8x$.

De optie maximum geeft $x = 45$ en $y = 40,5$.

Dus de top is $(45; 40,5)$.

x	0	10	20	30	40
y	0	16	28	26	40



35 a $P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{G}\right)$

$$P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} - k \cdot P_{t-1} \cdot \frac{P_{t-1}}{G}$$

$$P_t = (1 + k)P_{t-1} - \frac{k}{G} \cdot P_{t-1}^2$$

b Elk punt $P(x, y)$ van de puntenrij voldoet aan $P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{G}\right)$

en dus ook aan $P_t = (1 + k)P_{t-1} - \frac{k}{G} \cdot P_{t-1}^2$, dus telkens is $y = (1 + k)x - \frac{k}{G} \cdot x^2$.

De punten liggen dus op de parabool $y = (1 + k)x - \frac{k}{G} \cdot x^2$.

36 a Los op $-0,004x^2 + 1,5x = x$
 $-0,004x^2 + 0,5x = 0$
 $-0,004x(x - 125) = 0$
 $x = 0 \vee x = 125$

Dus $\bar{P} = 125$.

b Uit opgave 35 volgt dat de punten van de rij $P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{G}\right)$

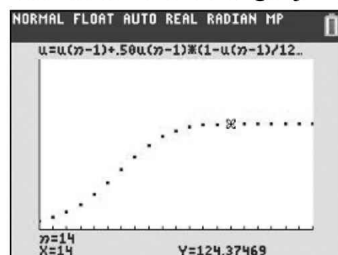
met beginwaarde $P_0 = 10$ op de parabool $y = (1 + k)x - \frac{k}{G} \cdot x^2$ liggen.

Uit $y = -0,004x^2 + 1,5x$ en bovenstaande volgt $1 + k = 1,5$, dus $k = 0,5$.

Verder is $G = \bar{P} = 125$.

Dus $P_t = P_{t-1} + 0,5 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{125}\right)$ met $P_0 = 10$.

c Voer de differentievergelijking van vraag b in op het rijen-invoerscherm.



$P_{13} \approx 123,8$ en $P_{14} \approx 124,4$, dus vanaf $t = 14$.

37 a $N_t = N_{t-1} + 0,2 \cdot N_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{N_{t-1}}{12000}\right)$ met $N_0 = 800$.

b Voer de differentievergelijking van vraag a in op het rijen-invoerscherm.

Bij 29 maart hoort $t = 28$.

Uit de tabel volgt $N_{28} \approx 11\,427$, dus 11 427 mensen.

c Uit de tabel volgt $N_{21} \approx 9757$ en $N_{22} \approx 10\,122$.

Bij $t = 22$ hoort 23 maart.

d $y = x + 0,2x \left(1 - \frac{x}{12000}\right) = x + 0,2x - \frac{0,2}{12000}x^2 \approx -0,000017x^2 + 1,2x$

De formule is $y = -0,000017x^2 + 1,2x$.

6.3 Stelsels differentievergelijkingen

Bladzijde 76

38 a De hazenpopulatie zal afnemen en later zal de lynxenpopulatie afnemen.

b Uitgaande van weinig lynxen en weinig hazen krijg je:

toename aantal hazen $\rightarrow$ toename aantal lynxen $\rightarrow$ afname aantal hazen $\rightarrow$ afname aantal lynxen, enzovoort.

c Bij beide populaties is de periode 8 jaar.

d Op $t = 1$ is $H = 10\,000$ en $L = 4600$.

- De hoogste punten in de hazengrafiek bepalen het meest rechtse punt in het prooi-roofdiagram.

- De laagste punten in de lynxengrafiek bepalen het laagste punt in het prooi-roofdiagram.

Bladzijde 78

39 a Voer het stelsel differentievergelijkingen in op het rijen-invoerscherm en kijk in de tabel.

Op $t = 1$ zijn er 1025 prooidieren en 152 roofdieren.

Op $t = 5$ zijn er 1104 prooidieren en 159 roofdieren.

b Na 25 maanden is het aantal roofdieren maximaal. Er zijn dan 196 roofdieren.

c De populatie prooidieren bereikt vier keer een maximum.

Bladzijde 79

40 a Voer het stelsel differentievergelijkingen in op het rijen-invoerscherm en kijk in de tabel.

Op $t = 5$ zijn er 666 prooidieren en 153 roofdieren.

Op $t = 15$ zijn er 317 prooidieren en 137 roofdieren.

b Uit de tijdgrafiek blijkt dat na 190 maanden de populatie prooidieren voor de tweede keer maximaal is. Het maximale aantal is 2501.

c Na het plotten van de tijdgrafiek blijkt (in vergelijking met de tijdgrafiek van b) dat de eerste bewering niet waar is (de maximale waarden nemen juist toe) en dat de tweede bewering ook niet waar is (het aantal prooidieren is voor de tweede keer maximaal na 230 maanden, in plaats van na 190 maanden).

d De bewering is niet waar. Uit de bijbehorende tijdgrafiek blijkt (in vergelijking met de tijdgrafiek van c) dat het maximale aantal roofdieren toeneemt.

41 a $\bar{P} = 1,25\bar{P} - 0,0015\bar{R} \cdot \bar{P}$
 $-0,25\bar{P} + 0,0015\bar{R} \cdot \bar{P} = 0$
 $\bar{P}(-0,25 + 0,0015\bar{R}) = 0$
 $0,0015\bar{R} = 0,25$
 $\bar{R} \approx 167$

b $\bar{R} = 0,97\bar{R} + 0,00004\bar{P} \cdot \bar{R}$
 $0,03\bar{R} - 0,00004\bar{P} \cdot \bar{R} = 0$
 $\bar{R}(0,03 - 0,00004\bar{P}) = 0$
 $0,00004\bar{P} = 0,03$
 $\bar{P} = 750$

c De populaties veranderen dan niet meer, dus steeds is $P_t = 750$ en $R_t = 167$.

$$\begin{aligned}
 42 \text{ a } \bar{P} &= 1,15\bar{P} - 0,006\bar{R} \cdot \bar{P} & \bar{R} &= 0,94\bar{R} + 0,00006\bar{P} \cdot \bar{R} \\
 -0,15\bar{P} + 0,006\bar{R} \cdot \bar{P} &= 0 & 0,06\bar{R} - 0,00006\bar{P} \cdot \bar{R} &= 0 \\
 \bar{P}(-0,15 + 0,006\bar{R}) &= 0 & \bar{R}(0,06 - 0,00006\bar{P}) &= 0 \\
 0,006\bar{R} &= 0,15 & 0,00006\bar{P} &= 0,06 \\
 \bar{R} &= 25 & \bar{P} &= 1000
 \end{aligned}$$

- b Een groeivoet van 0,25 bij de prooidieren geeft $P_t = 1,25P_{t-1} - 0,006R_{t-1}P_{t-1}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Bij evenwicht geldt } \bar{P} &= 1,25\bar{P} - 0,006\bar{R} \cdot \bar{P} \\
 -0,25\bar{P} + 0,006\bar{R} \cdot \bar{P} &= 0 \\
 \bar{P}(-0,25 + 0,006\bar{R}) &= 0 \\
 0,006\bar{R} &= 0,25 \\
 \bar{R} &= 41\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Dus $\bar{R} = 41\frac{2}{3}$ en $\bar{P}$ blijft 1000.

Dus als de vruchtbaarheid van de prooidieren toeneemt, neemt $\bar{R}$ toe en blijft $\bar{P}$ gelijk.

- c Stel dat de natuurlijke sterfte van de roofdieren zo toeneemt, dat de groeivoet -0,09 wordt.

$$\begin{aligned}
 \text{Dit geeft } R_t &= 0,91R_{t-1} + 0,00006P_{t-1}R_{t-1} \\
 \text{Bij evenwicht geldt } \bar{R} &= 0,91\bar{R} + 0,00006\bar{P} \cdot \bar{R} \\
 0,09\bar{R} - 0,00006\bar{P} \cdot \bar{R} &= 0 \\
 \bar{R}(0,09 - 0,00006\bar{P}) &= 0 \\
 0,00006\bar{P} &= 0,09 \\
 \bar{P} &= 1500
 \end{aligned}$$

Dus $\bar{P} = 1500$ en $\bar{R}$ blijft gelijk.

Dus als de natuurlijke sterfte van de roofdieren toeneemt, neemt $\bar{P}$ toe en blijft $\bar{R}$ gelijk.

Bladzijde 80

$$\begin{aligned}
 43 \text{ a } \text{Uit } P_1 &= 1,38P_0 - a \cdot R_0 \cdot P_0, P_0 = 550, R_0 = 200 \text{ en } P_1 = 539 \text{ volgt} \\
 1,38 \cdot 550 - a \cdot 550 \cdot 200 &= 539 \\
 759 - 110000a &= 539 \\
 110000a &= 220 \\
 a &= 0,002
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Uit } R_1 &= 0,90R_0 + b \cdot R_0 \cdot P_0, P_0 = 550, R_0 = 200 \text{ en } R_1 = 202 \text{ volgt} \\
 0,90 \cdot 200 + b \cdot 200 \cdot 550 &= 202 \\
 180 + 110000b &= 202 \\
 110000b &= 22 \\
 b &= 0,0002
 \end{aligned}$$

- b Voer het stelsel differentievergelijkingen in op het rijen-invoerscherm en kijk in de tabel.

Na 4 maanden is het aantal roofdieren voor het eerst maximaal.

Dan is $R_{\max} = 205$.

$$\begin{aligned}
 \text{c } \bar{P} &= 1,38\bar{P} - 0,002\bar{R} \cdot \bar{P} & \bar{R} &= 0,90\bar{R} + 0,0002\bar{P} \cdot \bar{R} \\
 -0,38\bar{P} + 0,002\bar{R} \cdot \bar{P} &= 0 & 0,10\bar{R} - 0,0002\bar{P} \cdot \bar{R} &= 0 \\
 \bar{P}(-0,38 + 0,002\bar{R}) &= 0 & \bar{R}(0,10 - 0,0002\bar{P}) &= 0 \\
 0,002\bar{R} &= 0,38 & 0,0002\bar{P} &= 0,10 \\
 \bar{R} &= 190 & \bar{P} &= 500
 \end{aligned}$$

- d Stel dat de vruchtbaarheid zo toeneemt, dat de groeivoet 0,40 wordt.

$$\begin{aligned}
 \text{Dit geeft } \bar{P} &= 1,40\bar{P} - 0,002\bar{R} \cdot \bar{P} \\
 -0,40\bar{P} + 0,002\bar{R} \cdot \bar{P} &= 0 \\
 \bar{P}(-0,40 + 0,002\bar{R}) &= 0 \\
 0,002\bar{R} &= 0,40 \\
 \bar{R} &= 200
 \end{aligned}$$

Dus $\bar{R} = 200$ en $\bar{P}$ blijft 500.

Dus als de vruchtbaarheid van de prooidieren toeneemt, neemt $\bar{R}$ toe en blijft $\bar{P}$ gelijk.

- 44 Bij evenwicht geldt $\bar{P} = 1,18\bar{P} + a \cdot \bar{R} \cdot \bar{P}$ met $\bar{P} = 5000$ en $\bar{R} = 800$.

Dit geeft $1,18 \cdot 5000 + a \cdot 800 \cdot 5000 = 5000$

$$5900 + 4000000a = 5000$$

$$4000000a = -900$$

$$a = -0,000225$$

Bij evenwicht geldt $\bar{R} = 0,92\bar{R} + b \cdot \bar{P} \cdot \bar{R}$ met $\bar{P} = 5000$ en $\bar{R} = 800$.

Dit geeft $0,92 \cdot 800 + b \cdot 5000 \cdot 800 = 800$

$$736 + 4000000b = 800$$

$$4000000b = 64$$

$$b = 0,000016$$

Dus $a = -0,000225$ en $b = 0,000016$.

- 45 a Als de prooidieren en roofdieren elkaar niet beïnvloeden neemt het aantal roofdieren af, dus $0 < c < 1$.
- b Als de prooidieren en roofdieren elkaar niet beïnvloeden neemt het aantal prooidieren toe, dus $a > 1$.
- Als de prooidieren en roofdieren elkaar wel beïnvloeden, zal P_t kleiner zijn dan aP_{t-1} dus $b > 0$ en zal R_t groter zijn dan cR_{t-1} dus $d > 0$.

- c Bij evenwicht geldt $P = a \cdot P - b \cdot R \cdot P$ (deel door P)

$$1 = a - b \cdot \bar{R}$$

$$b \cdot \bar{R} = a - 1$$

$$\bar{R} = \frac{a-1}{b}$$

en ook geldt dat $\bar{R} = c \cdot \bar{R} + d \cdot \bar{P} \cdot \bar{R}$ (deel door $\bar{R}$)

$$1 = c + d \cdot \bar{P}$$

$$d \cdot \bar{P} = 1 - c$$

$$\bar{P} = \frac{1-c}{d}$$

- d Het getal a zal veranderen. $\bar{P}$ is niet afhankelijk van a , maar $\bar{R}$ wel.
Verandering van de vruchtbaarheid van de prooidieren heeft dus geen invloed op $\bar{P}$ maar wel op $\bar{R}$.

Bladzijde 81

- 46 $\Delta G < 0$, want door de griep zijn er steeds minder mensen die nog gezond zijn, maar vatbaar voor de griep,

$\Delta I > 0$, want steeds meer inwoners worden immuun.

Het totale inwoneraantal blijft gelijk, dit geeft $G_t + Z_t + I_t = G_{t-1} + Z_{t-1} + I_{t-1}$

$$G_t - G_{t-1} + Z_t - Z_{t-1} + I_t - I_{t-1} = 0$$

$$\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$$

Dus $\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$.

Bladzijde 82

- 47 a Uit $\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$ volgt $\Delta Z = -\Delta G - \Delta I$.

Dus $\Delta Z = 0,00018G_{t-1}Z_{t-1} - 0,15Z_{t-1}$.

Omdat $\Delta Z = Z_t - Z_{t-1}$ krijg je $Z_t = Z_{t-1} + 0,00018G_{t-1}Z_{t-1} - 0,15Z_{t-1}$.

- b De kans dat een willekeurige bewoner met griep een willekeurige gezonde bewoner besmet is 0,00018.

- c $G_1 = G_0 - 0,00018G_0Z_0$, dus $G_1 = 1900 - 0,00018 \cdot 1900 \cdot 100 \approx 1866$.

$Z_1 = Z_0 + 0,00018G_0Z_0 - 0,15Z_0$, dus $Z_1 = 100 + 0,00018 \cdot 1900 \cdot 100 - 0,15 \cdot 100 \approx 119$.

$$I_1 = 2000 - G_1 - Z_1 = 2000 - 1866 - 119 = 15$$

$$G_2 = 1866 - 0,00018 \cdot 1866 \cdot 119 \approx 1826$$

$$Z_2 = 119 + 0,00018 \cdot 1866 \cdot 119 - 0,15 \cdot 119 \approx 141$$

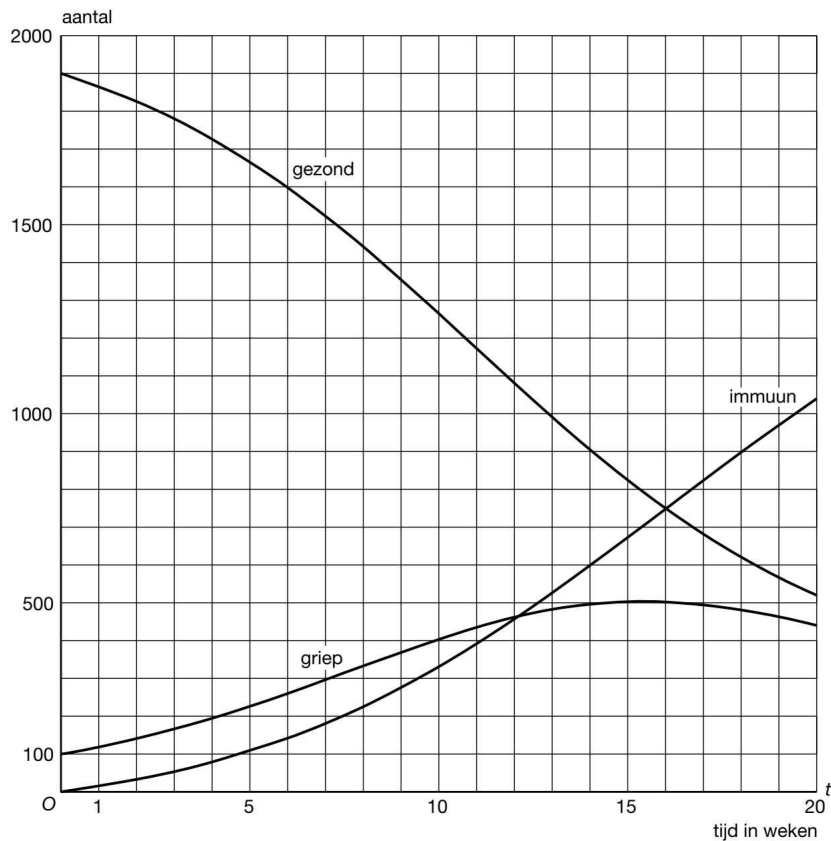
$$I_2 = 2000 - 1826 - 141 = 33$$

- d $G_{11} = G_{10} - 0,00018G_{10}Z_{10} = 1265 - 0,00018 \cdot 1265 \cdot 404 \approx 1173$

$$Z_{11} = Z_{10} + 0,00018G_{10}Z_{10} - 0,15Z_{10} = 404 + 0,00018 \cdot 1265 \cdot 404 - 0,15 \cdot 404 \approx 435$$

e

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
I_t	0	33	79	142	225	331	457	599	748	898	1040



48 a

$$\left. \begin{array}{l} G_1 = G_0 - a \cdot G_0 \cdot Z_0 \\ G_0 = 9600 \\ Z_0 = 400 \\ G_1 = 9408 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9408 = 9600 - a \cdot 9600 \cdot 400 \\ 9408 = 9600 - 3840000a \\ 3840000a = 192 \\ a = 0,00005 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = Z_0 + a \cdot G_0 \cdot Z_0 - b \cdot Z_0 \\ a = 0,00005 \\ G_0 = 9600 \\ Z_0 = 400 \\ Z_1 = 560 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 560 = 400 + 0,00005 \cdot 9600 \cdot 400 - b \cdot 400 \\ 560 = 400 + 192 - 400b \\ 400b = 32 \\ b = 0,08 \end{array}$$

b De tweede dag is van $t = 1$ tot $t = 2$.

$$G_1 = 9408 \text{ en } Z_1 = 560$$

Dus op de tweede dag hebben $0,00005 \cdot 9408 \cdot 560 \approx 263$ mensen griep gekregen.

49 a $Z_t = Z_{t-1} + 0,0001 G_{t-1} Z_{t-1} - 0,20 Z_{t-1}$

b $G_1 = G_0 - 0,0001 G_0 Z_0$

$$G_1 = G_0 - 0,0001 G_0 Z_0 = 9216 \text{ en } G_0 + Z_0 + I_0 = 10000$$

$$G_0 + Z_0 + 0 = 10000$$

$$Z_0 = 10000 - G_0$$

Invullen geeft $G_0 - 0,0001 G_0 (10000 - G_0) = 9216$

$$G_0 - G_0 + 0,0001 G_0^2 = 9216$$

$$0,0001 G_0^2 = 9216$$

$$G_0^2 = 92160000$$

$$G_0 = 9600$$

Dus $G_0 = 9600$ en $Z_0 = 10000 - 9600 = 400$.

$$\begin{aligned}
 \text{c } & \left. \begin{aligned} Z_1 &= 1,65 \cdot Z_0 \\ G_0 &= 10000 - Z_0 \\ Z_1 &= Z_0 + 0,0001G_0Z_0 - 0,20Z_0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Z_0 + 0,0001G_0Z_0 - 0,20Z_0 &= 1,65Z_0 \\ Z_0 + 0,0001(10000 - Z_0)Z_0 - 0,20Z_0 &= 1,65Z_0 \\ Z_0 + Z_0 - 0,0001Z_0^2 - 0,20Z_0 - 1,65Z_0 &= 0 \\ -0,0001Z_0^2 + 0,15Z_0 &= 0 \\ -0,0001Z_0(Z_0 - 1500) &= 0 \\ Z_0 = 0 \vee Z_0 = 1500 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Dus $Z_0 = 1500$ en $G_0 = 10000 - 1500 = 8500$.

- 50 a** Het getal 0,80 betekent dat 80% van de personen die op het platteland wonen, er een jaar later nog woont.
 Het getal 0,04 betekent dat 4% van de inwoners van de stad een jaar later op het platteland woont.
 Het getal 0,20 betekent dat 20% van de personen die op het platteland wonen een jaar later in de stad woont.
 Het getal 0,96 betekent dat 96% van de inwoners van de stad een jaar later nog in de stad woont.
- b** Uit $0,8 + 0,2 = 1$ volgt dat alle inwoners van het platteland op tijdstip $t - 1$ op tijdstip t weer op het platteland of in de stad wonen.
 Uit $0,04 + 0,96 = 1$ volgt dat alle inwoners van de stad op tijdstip $t - 1$ op tijdstip t weer in de stad of op het platteland wonen.
 Er komen dus geen inwoners bij en er gaan geen inwoners weg.

Bladzijde 84

- 51 a** Dit volgt uit de som van de kansen 0,2 en 0,8 en de som van de kansen 0,7 en 0,3.
 Dit levert steeds 1 op.
- b** Bij het eerste stelsel niet, want $0,4 + 0,8 \neq 1$ en ook $0,6 + 0,2 \neq 1$.
 Bij het tweede stelsel wel, want $0,1 + 0,9 = 1$ en ook $0,3 + 0,7 = 1$.
- c** Dan kun je niet gebruiken dat $x_t + y_t = x_{t-1} + y_{t-1} = \text{constant}$.
- d** Er treedt convergentie op. De grenswaarde is bij zowel a_t als bij b_t ongeveer 24,286.
- 52 a** Gesloten systeem, dus voor elke t is $A_{t-1} + B_{t-1} = 600$ ofwel
- $$\left. \begin{aligned} B_{t-1} &= 600 - A_{t-1} \\ A_t &= 0,9A_{t-1} + 0,3B_{t-1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_t &= 0,9A_{t-1} + 0,3(600 - A_{t-1}) \\ A_t &= 0,9A_{t-1} + 180 - 0,3A_{t-1} \\ A_t &= 0,6A_{t-1} + 180 \end{aligned}$$
- $\bar{A} = 0,6\bar{A} + 180$ geeft $0,4\bar{A} = 180$, dus $\bar{A} = 450$.
 Stel $A_t = A \cdot 0,6^t + 450$.
 $A_0 = 350$ geeft $A + 450 = 350$, dus $A = -100$.
 Dus $A_t = -100 \cdot 0,6^t + 450$.
 $B_t = 600 - A_t$
 $A_t = -100 \cdot 0,6^t + 450 \left\{ \begin{aligned} B_t &= 600 - (-100 \cdot 0,6^t + 450) \\ B_t &= 100 \cdot 0,6^t + 150 \end{aligned} \right.$
- b** $\lim_{t \rightarrow \infty} (-100 \cdot 0,6^t + 450) = -100 \cdot 0 + 450 = 450$, dus A_t convergeert naar $\bar{A} = 450$ en B_t convergeert naar $\bar{B} = 600 - \bar{A} = 150$.
- 53 a** Gesloten systeem, dus voor elke t is $x_{t-1} + y_{t-1} = 20$ ofwel
- $$\left. \begin{aligned} y_{t-1} &= 20 - x_{t-1} \\ x_t &= 0,25x_{t-1} + 0,5y_{t-1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_t &= 0,25x_{t-1} + 0,5(20 - x_{t-1}) \\ x_t &= 0,25x_{t-1} + 10 - 0,5x_{t-1} \\ x_t &= -0,25x_{t-1} + 10 \end{aligned}$$
- $\bar{x} = -0,25\bar{x} + 10$ geeft $1,25\bar{x} = 10$, dus $\bar{x} = 8$.
 Stel $x_t = A \cdot (-0,25)^t + 8$.
 $x_0 = 4$ geeft $A + 8 = 4$, dus $A = -4$.
 Dus $x_t = -4 \cdot (-0,25)^t + 8$.
 $x_t = -4 \cdot (-0,25)^t + 8 \left\{ \begin{aligned} y_t &= 20 - (-4 \cdot (-0,25)^t + 8) \\ y_t &= 4 \cdot (-0,25)^t + 12 \end{aligned} \right.$
- b** Voer de rij $u_n = -0,25u_{n-1} + 10$ met $u_0 = 4$ in en kijk in de tabel.
 Dit geeft $u_4 \approx 7,9844$ en $u_5 \approx 8,0039$.
 Dus vanaf $t = 5$ verschilt x_t minder dan 0,01 van $\bar{x}$.

- 54 a**
$$\begin{cases} N(t) = 0,6N(t-1) + 0,2R(t-1) \\ R(t) = 0,4N(t-1) + 0,8R(t-1) \end{cases} \text{ met } N(0) = 0,8 \text{ en } R(0) = 1,2$$

 Gesloten systeem, dus voor elke t is $N(t-1) + R(t-1) = 2$ ofwel

$$\begin{cases} R(t-1) = 2 - N(t-1) \\ N(t) = 0,6N(t-1) + 0,2R(t-1) \end{cases} \begin{cases} N(t) = 0,6N(t-1) + 0,2(2 - N(t-1)) \\ N(t) = 0,6N(t-1) + 0,4 - 0,2N(t-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(t) = 0,4N(t-1) + 0,4 \\ R(t) = 0,4N(t-1) + 0,4 \end{cases}$$

 $\bar{N} = 0,4\bar{N} + 0,4$ geeft $0,6\bar{N} = 0,4$, dus $\bar{N} \approx 0,67$.
 Stel $N(t) = A \cdot 0,4^t + 0,67$.
 $N(0) = 0,8$ geeft $A + 0,67 \approx 0,8$, dus $A \approx 0,13$.
 Dus $N(t) = 0,13 \cdot 0,4^t + 0,67$.

$$\begin{cases} N(t) = 0,13 \cdot 0,4^t + 0,67 \\ R(t) = 2 - N(t-1) \end{cases} \begin{cases} R(t) = 2 - (0,13 \cdot 0,4^t + 0,67) \\ R(t) = -0,13 \cdot 0,4^t + 1,33 \end{cases}$$

b $\lim_{t \rightarrow \infty} (-0,13 \cdot 0,4^t + 0,67) = -0,13 \cdot 0 + 0,67 = 0,67$, dus $N(t)$ convergeert naar $\bar{N} = 0,67$.
 Op den duur kijken 0,67 miljoen personen naar het nieuws op N.

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde

Bladzijde 86

- 55 a** Voer de rij in op het rijen-invoerscherm en kijk in de tabel.
 $u_2 = 13, u_3 = 41$ en $u_4 = 121$.
b $\frac{u_4}{u_3} = \frac{121}{41} \approx 2,95$
 $\frac{u_5}{u_4} = \frac{365}{121} \approx 3,02$
 $\frac{u_6}{u_5} = \frac{1093}{365} \approx 2,99$
 $\frac{u_7}{u_6} = \frac{3281}{1093} \approx 3,00$
 De uitkomsten lijken naar 3 te naderen.
- 56 a** Als $u_n = g^n$, dan is $u_{n-1} = g^{n-1}$ en $u_{n-2} = g^{n-2}$.
 Substitutie in $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ geeft $g^n = 2g^{n-1} + 3g^{n-2}$.
 $g^n = 2g^{n-1} + 3g^{n-2}$
 $g^2 = 2g + 3$
 $g^2 - 2g - 3 = 0$
b $g^2 - 2g - 3 = 0$
 $(g+1)(g-3) = 0$
 $g = -1 \vee g = 3$
c $n = 0$ geeft $u_0 = A \cdot (-1)^0 + B \cdot 3^0 = A + B$ $\left. \begin{matrix} A + B = 1 \\ u_0 = 1 \end{matrix} \right\}$
d $n = 1$ geeft $u_1 = A \cdot (-1)^1 + B \cdot 3^1 = -A + 3B$ $\left. \begin{matrix} -A + 3B = 5 \\ u_1 = 5 \end{matrix} \right\}$
e
$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 3B = 5 \end{cases} + \frac{4B = 6}{4B = 6} + \frac{B = 1\frac{1}{2}}{A + B = 1} \left. \begin{matrix} A + 1\frac{1}{2} = 1 \\ A = -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\}$$

f $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n = 2\left(-\frac{1}{2} \cdot (-1)^{n-1} + 1\frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}\right) + 3\left(-\frac{1}{2} \cdot (-1)^{n-2} + 1\frac{1}{2} \cdot 3^{n-2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n = -(-1)^n \cdot (-1)^{-1} + 3 \cdot 3^{n-1} - 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{-2} + 4\frac{1}{2} \cdot 3^n \cdot 3^{-2}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n = (-1)^n + 3^n - 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n$$

 Klopt voor elke waarde van n .

Bladzijde 87

- 57 a** $u_n = 2u_{n-1} + 8u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 2$
 Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = 2u_{n-1} + 8u_{n-2}$ geeft
 $g^n = 2g^{n-1} + 8g^{n-2}$
 $g^2 = 2g + 8$
 $g^2 - 2g - 8 = 0$
 $(g+2)(g-4) = 0$
 $g = -2 \vee g = 4$
 Stel $u_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 4^n$.
 $u_0 = 1$ geeft $A \cdot (-2)^0 + B \cdot 4^0 = 1$, dus $A + B = 1$
 $u_1 = 2$ geeft $A \cdot (-2)^1 + B \cdot 4^1 = 2$, dus $-2A + 4B = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} A + B = 1 & 2 \\ -2A + 4B = 2 & 1 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B = 2 \\ -2A + 4B = 2 \\ \hline 6B = 4 \end{array} \right. +$$

$$\left. \begin{array}{l} B = \frac{2}{3} \\ A + B = 1 \end{array} \right\} A + \frac{2}{3} = 1$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Dus $u_n = \frac{1}{3} \cdot (-2)^n + \frac{2}{3} \cdot 4^n$.

- b** $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ met $x_0 = 2$ en $x_1 = 6$
 Substitutie van $x_n = g^n$ in $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ geeft
 $g^n = 3g^{n-1} + 4g^{n-2}$
 $g^2 = 3g + 4$
 $g^2 - 3g - 4 = 0$
 $(g + 1)(g - 4) = 0$
 $g = -1 \vee g = 4$
 Stel $x_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 4^n$.
 $x_0 = 2$ geeft $A \cdot (-1)^0 + B \cdot 4^0 = 2$, dus $A + B = 2$
 $x_1 = 6$ geeft $A \cdot (-1)^1 + B \cdot 4^1 = 2$, dus $-A + 4B = 2$
- $$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 2 \\ -A + 4B = 2 \end{array} \right. + \frac{5B = 8}{B = 1\frac{3}{5}} \left\{ \begin{array}{l} A + 1\frac{3}{5} = 2 \\ A + B = 2 \end{array} \right. \quad A = \frac{2}{5}$$

Dus $x_n = \frac{2}{5} \cdot (-1)^n + 1\frac{3}{5} \cdot 4^n$.

- c $v_n = 5v_{n-1} - 6v_{n-2}$ met $v_0 = 1$ en $v_1 = 3$
 Substitutie van $v_n = g^n$ in $v_n = 5v_{n-1} - 6v_{n-2}$ geeft
 $g^n = 5g^{n-1} - 6g^{n-2}$
 $g^2 = 5g - 6$
 $g^2 - 5g + 6 = 0$
 $(g-2)(g-3) = 0$
 $g = 2 \vee g = 3$
 Stel $v_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$.
 $v_0 = 1$ geeft $A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 = 1$, dus $A + B = 1$
 $v_1 = 3$ geeft $A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 3$, dus $2A + 3B = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 2A + 3B = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \Bigg| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B = 2 \\ 2A + 3B = 3 \end{array} \right. \underline{-B = -1}$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 1 \\ A + B = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A + 1 = 1 \\ A = 0 \end{array}$$

Dus $v_n = 3^n$.

- 58 a** $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$
 $A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n = a \cdot (A \cdot g_1^{n-1} + B \cdot g_2^{n-1}) + b \cdot (A \cdot g_1^{n-2} + B \cdot g_2^{n-2})$
 $A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n - a \cdot A \cdot g_1^{n-1} - a \cdot B \cdot g_2^{n-1} - b \cdot A \cdot g_1^{n-2} - b \cdot B \cdot g_2^{n-2} = 0$
 $A \cdot g_1^{n-2} \cdot (g_1^2 - ag_1 - b) + B \cdot g_2^{n-2} \cdot (g_2^2 - ag_2 - b) = 0$
b $g_1^2 - ag_1 - b = 0$ en $g_2^2 - ag_2 - b = 0$ geeft $A \cdot \underset{0}{(g_1)^{n-2}} \cdot \underset{0}{0} + B \cdot \underset{0}{(g_2)^{n-2}} \cdot \underset{0}{0} = 0$

Klopt.

Bladzijde 88

- 59 a** $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_0 = 0$ en $u_1 = 1$ geeft de rij
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... en dit is, afgezien van de eerste term, de rij van Fibonacci.
- b** Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ geeft
 $g^n = g^{n-1} + g^{n-2}$
 $g^2 = g + 1$
 $g^2 - g - 1 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$
 $g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee g = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$
 Stel $u_n = A \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$.
- c** $u_0 = 0$ geeft $A \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 + B \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$, dus $A + B = 0$
 $u_1 = 1$ geeft $A \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + B \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$, dus $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot A + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot B = 1$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot A + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot B = 1 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} B = -A \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot A + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot B = 1 \end{cases}$$

 en hieruit volgt $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot A + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot -A = 1$

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A\sqrt{5} - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A\sqrt{5} = 1$$

$$A\sqrt{5} = 1$$

$$\left. \begin{matrix} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -A \end{matrix} \right\} B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

 Dus $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{2^n}$$

$$u_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$$

- 60** $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$
 Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ geeft
 $g^n = 4g^{n-1} - 4g^{n-2}$
 $g^2 = 4g - 4$
 $g^2 - 4g + 4 = 0$
 $(g - 2)^2 = 0$
 $g = 2$
 Stel $u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 2^n$.
 $u_0 = 1$ geeft $A \cdot 2^0 + B \cdot 2^0 = 1$, dus $A + B = 1$
 $u_1 = 3$ geeft $A \cdot 2^1 + B \cdot 2^1 = 2$, dus $2A + 2B = 3$
 Het stelsel $\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + 2B = 3 \end{cases}$ heeft geen oplossingen.

Dus je kunt niet de directe formule opstellen volgens de methode in theorie A op bladzijde 87.

Bladzijde 90

- 61 a** $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$ substitueren in $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ geeft
 $(A + Bn) \cdot g^n = a \cdot (A + B(n-1)) \cdot g^{n-1} + b \cdot (A + B(n-2)) \cdot g^{n-2}$
 $Ag^n + Bng^n = aAg^{n-1} + aBng^{n-1} - aBg^{n-1} + bAg^{n-2} + bBng^{n-2} - 2bBg^{n-2}$
 $Ag^n + Bng^n - aAg^{n-1} - aBng^{n-1} + aBg^{n-1} - bAg^{n-2} - bBng^{n-2} + 2bBg^{n-2} = 0$
 $Ag^2 + Bng^2 - aAg - aBng + aBg - bA - bBn + 2bB = 0$
 $A(g^2 - ag - b) + B(ng^2 - ang - bn + ag + 2b) = 0$
 $A(g^2 - ag - b) + B(n(g^2 - ag - b) + ag + 2b) = 0$

- b Van $g^2 - ag - b$ is $D = 0$, dus $(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -b = 0$

$$a^2 + 4b = 0$$

$$4b = -a^2$$

$$b = -\frac{1}{4}a^2$$

Verder is $g = \frac{a}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}a$.

Substitutie van $g^2 - ag - b = 0$, $g = \frac{1}{2}a$ en $b = -\frac{1}{4}a^2$ in

$A(g^2 - ag - b) + B(n(g^2 - ag - b) + ag + 2b) = 0$ geeft

$$A \cdot 0 + B(n \cdot 0 + a \cdot \frac{1}{2}a + 2 \cdot -\frac{1}{4}a^2) = 0$$

$$0 + B(0 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2) = 0$$

$$0 + B \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Klopt.

- 62 a Substitutie van $x_n = g^n$ in $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ geeft

$$g^2 - 2g + 1 = 0$$

$$(g - 1)^2 = 0$$

$$g = 1$$

$$x_n = (A + Bn) \cdot 1^n = A + Bn$$

$$x_0 = 3 \text{ geeft } A = 3$$

$$x_1 = 5 \text{ geeft } A + B = 5, \text{ dus } B = 2$$

$$\text{Dus } x_n = 3 + 2n.$$

- b Substitutie van $y_n = g^n$ in $y_n = -6y_{n-1} - 9y_{n-2}$ geeft

$$g^2 + 6g + 9 = 0$$

$$(g + 3)^2 = 0$$

$$g = -3$$

$$y_n = (A + Bn) \cdot (-3)^n$$

$$y_0 = 1 \text{ geeft } A = 1$$

$$y_1 = 2 \text{ geeft } (A + B) \cdot -3 = 2 \text{ ofwel } A + B = -\frac{2}{3} \left. \vphantom{\begin{matrix} A = 1 \\ B = -\frac{2}{3} \end{matrix}} \right\} A = 1 \text{ en } B = -1\frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } y_n = (1 - 1\frac{2}{3}n) \cdot (-3)^n.$$

- 63 a Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$ geeft

$$g^2 - 7g + 10 = 0$$

$$(g - 2)(g - 5) = 0$$

$$g = 2 \vee g = 5$$

$$u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n$$

$$u_0 = 1 \text{ geeft } A + B = 1$$

$$u_1 = 3 \text{ geeft } 2A + 5B = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 2A + 5B = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{matrix} A + B = 1 \\ 2A + 5B = 3 \end{matrix}} \right\} \text{geeft } \left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B = 2 \\ 2A + 5B = 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -3B = -1 \\ B = \frac{1}{3} \\ A + B = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{matrix} 2A + 2B = 2 \\ 2A + 5B = 3 \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} A + \frac{1}{3} = 1 \\ A = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } u_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot 5^n.$$

- b Substitutie van $v_n = g^n$ in $v_n = 3v_{n-1} - 2\frac{1}{4}v_{n-2}$ geeft

$$g^2 - 3g + 2\frac{1}{4} = 0$$

$$(g - 1\frac{1}{2})^2 = 0$$

$$g = 1\frac{1}{2}$$

$$v_n = (A + Bn) \cdot (1\frac{1}{2})^n$$

$$v_0 = 2 \text{ geeft } A = 2$$

$$v_1 = 4 \text{ geeft } (A + B) \cdot 1\frac{1}{2} = 4 \text{ ofwel } A + B = 2\frac{2}{3} \left. \vphantom{\begin{matrix} A = 2 \\ A + B = 2\frac{2}{3} \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} 2 + B = 2\frac{2}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } v_n = (2 + \frac{2}{3}n) \cdot (1\frac{1}{2})^n.$$

- 64 a $x_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1}$ geldt voor iedere n , dus mag n vervangen worden door $n + 1$.

Dit geeft $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$.

b $x_{n+1} = 2x_n + 3(4x_{n-1} + 5y_{n-1})$

$x_{n+1} = 2x_n + 12x_{n-1} + 15y_{n-1}$

c $x_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1}$ is te noteren als $3y_{n-1} = x_n - 2x_{n-1}$

Substitutie in $x_{n+1} = 2x_n + 12x_{n-1} + 15y_{n-1}$ geeft

$x_{n+1} = 2x_n + 12x_{n-1} + 5(x_n - 2x_{n-1})$

$x_{n+1} = 2x_n + 12x_{n-1} + 5x_n - 10x_{n-1}$

$x_{n+1} = 7x_n + 2x_{n-1}$

d $x_{n+1} = 7x_n + 2x_{n-1}$ geldt voor elke n , dus mag n vervangen worden door $n - 1$.

Dit geeft $x_n = 7x_{n-1} + 2x_{n-2}$.

De differentievergelijking geeft het verband tussen u_n en de twee voorafgaande termen. Daarom is het een differentievergelijking van de tweede orde.

Substitutie van $x_n = g^n$ in $x_n = 7x_{n-1} + 2x_{n-2}$ geeft $g^2 - 7g - 2 = 0$. Dit is de karakteristieke vergelijking van de differentievergelijking.

Bladzijde 91

65 $2y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$
 $2y_{n-1} = -20 \cdot 2^n + 30 \cdot 3^n - (-20 \cdot 2^{n-1} + 30 \cdot 3^{n-1})$
 $2y_{n-1} = -20 \cdot 2^n + 30 \cdot 3^n + 20 \cdot 2^{n-1} - 30 \cdot 3^{n-1}$
 $2y_n = -20 \cdot 2^{n+1} + 30 \cdot 3^{n+1} + 20 \cdot 2^n - 30 \cdot 3^n$
 $2y_n = -20 \cdot 2^n \cdot 2 + 30 \cdot 3^n \cdot 3 + 20 \cdot 2^n - 30 \cdot 3^n$
 $2y_n = -40 \cdot 2^n + 90 \cdot 3^n + 20 \cdot 2^n - 30 \cdot 3^n$
 $2y_n = -20 \cdot 2^n + 60 \cdot 3^n$
 $y_n = -10 \cdot 2^n + 30 \cdot 3^n$

Bladzijde 92

66 $x_n = 3x_{n-1} - 2y_{n-1}$ geeft $x_{n+1} = 3x_n - 2y_n$
 $y_n = 2x_{n-1} - 2y_{n-1}$
 $x_{n+1} = 3x_n - 4x_{n-1} + 2 \cdot 2y_{n-1}$
 $x_n = 3x_{n-1} - 2y_{n-1}$ geeft $2y_{n-1} = -x_n + 3x_{n-1}$
 $x_{n+1} = 3x_n - 4x_{n-1} + 2 \cdot (-x_n + 3x_{n-1})$
 $x_{n+1} = 3x_n - 4x_{n-1} - 2x_n + 6x_{n-1}$
 $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$
 $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$

De karakteristieke vergelijking is $g^2 - g - 2 = 0$
 $(g + 1)(g - 2) = 0$
 $g = -1 \vee g = 2$

Dus $x_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$.

$x_0 = 5$ en $y_0 = 4$ geeft $x_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 7$

$x_0 = 5$ geeft $A \cdot (-1)^0 + B \cdot 2^0 = 5$, dus $A + B = 5$

$x_1 = 7$ geeft $A \cdot (-1)^1 + B \cdot 2^1 = 5$, dus $-A + 2B = 5$

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -A + 2B = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} + \\ 3B = 12 \\ B = 4 \\ A + B = 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ A + 4 = 5 \\ A = 1 \end{matrix}$$

Dus $x_n = (-1)^n + 4 \cdot 2^n$.

Substitutie van $x_n = (-1)^n + 4 \cdot 2^n$ in $2y_{n-1} = -x_n + 3x_{n-1}$ geeft

$2y_{n-1} = -((-1)^n + 4 \cdot 2^n) + 3((-1)^{n-1} + 4 \cdot 2^{n-1})$

$2y_n = -((-1)^{n+1} + 4 \cdot 2^{n+1}) + 3((-1)^n + 4 \cdot 2^n)$

$2y_n = -(-1)^{n+1} - 4 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot (-1)^n + 12 \cdot 2^n$

$2y_n = -(-1)^n \cdot -1 - 4 \cdot 2^n \cdot 2 + 3 \cdot (-1)^n + 12 \cdot 2^n$

$2y_n = (-1)^n - 8 \cdot 2^n + 3 \cdot (-1)^n + 12 \cdot 2^n$

$2y_n = 4 \cdot (-1)^n + 4 \cdot 2^n$

$y_n = 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 2^n$

Dus $x_n = (-1)^n + 4 \cdot 2^n$ en $y_n = 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 2^n$.

67 $\left. \begin{array}{l} P_n = 2P_{n-1} - 4Q_{n-1} \text{ geeft } P_{n+1} = 2P_n - 4Q_n \\ Q_n = P_{n-1} + 6Q_{n-1} \end{array} \right\} P_{n+1} = 2P_n - 4(P_{n-1} + 6Q_{n-1})$

$\left. \begin{array}{l} P_{n+1} = 2P_n - 4P_{n-1} - 6 \cdot 4Q_{n-1} \\ P_n = 2P_{n-1} - 4Q_{n-1} \text{ geeft } 4Q_{n-1} = -P_n + 2P_{n-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_{n+1} = 2P_n - 4P_{n-1} - 6(-P_n + 2P_{n-1}) \\ P_{n+1} = 2P_n - 4P_{n-1} + 6P_n - 12P_{n-1} \\ P_{n+1} = 8P_n - 16P_{n-1} \\ P_n = 8P_{n-1} - 16P_{n-2} \end{array}$

De karakteristieke vergelijking is $g^2 - 8g + 16 = 0$

$$(g - 4)^2 = 0$$

$g = 4$

Dus $P_n = (A + Bn) \cdot 4^n$.

$P_0 = 100$ en $Q_0 = 10$ geeft $P_1 = 2 \cdot 100 - 4 \cdot 10 = 160$

$$P_0 = 100 \text{ geeft } (A + B \cdot 0) \cdot 4^0 = 100, \text{ dus } A = 100$$

$P_1 = 160$ geeft $(A + B \cdot 1) \cdot 4^1 = 160$, dus $A + B = 40$

Uit $A = 100$ en $A + B = 40$ volgt $B = -60$.

$$P_n = (100 - 60n) \cdot 4^n$$

Substitutie van $P_n = (100 - 60n) \cdot 4^n$ in $4Q_{n-1} = -P_n + 2P_{n-1}$ geeft

$$4Q_{n-1} = -(100 - 60n) \cdot 4^n + 2(100 - 60(n-1)) \cdot 4^{n-1}$$

$$4Q_{n-1} = -100 \cdot 4^n + 60n \cdot 4^n + 200 \cdot 4^{n-1} - 120n \cdot 4^{n-1} + 120 \cdot 4^{n-1}$$

$$4Q_{n-1} = -100 \cdot 4^n + 60n \cdot 4^n + 50 \cdot 4^n - 30n \cdot 4^n + 30 \cdot 4^n$$

$$4Q_{n-1} = (-20 + 30n) \cdot 4^n$$

$$Q_{n-1} = (-5 + 7\frac{1}{2}n) \cdot 4^n$$

$$Q_n = (-5 + 7\frac{1}{2}(n+1)) \cdot 4^{n+1}$$

$$Q_n = (-5 + 7\frac{1}{2}n + 7\frac{1}{2}) \cdot 4 \cdot 4^n$$

$$Q_n = (10 + 30n) \cdot 4^n$$

Dus $P_n = (100 - 60n) \cdot 4^n$ en $Q_n = (10 + 30n) \cdot 4^n$.

68 $\left. \begin{array}{l} K_t = K_{t-1} + 2L_{t-1} \text{ geeft } K_{t+1} = K_t + 2L_t \\ L_t = K_{t-1} + 3L_{t-1} \end{array} \right\} K_{t+1} = K_t + 2(K_{t-1} + 3L_{t-1})$

$$\left. \begin{aligned} K_{t+1} &= K_t + 2K_{t-1} + 3 \cdot 2L_{t-1} \\ K_t &= K_{t-1} + 2L_{t-1} \text{ geft } 2L_{t-1} = K_t - K_{t-1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} K_{t+1} &= K_t + 2K_{t-1} + 3(K_t - K_{t-1}) \\ K_{t+1} &= K_t + 2K_{t-1} + 3K_t - 3K_{t-1} \\ K_{t+1} &= 4K_t - K_{t-1} \\ K_t &= 4K_{t-1} - K_{t-2} \end{aligned}$$

De karakteristieke vergelijking is $g^2 - 4g + 1 = 0$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12$$

$$g = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \vee g = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$g = 2 + \sqrt{3} \vee g = 2 - \sqrt{3}$$

$$K_t = A \cdot (2 + \sqrt{3})^t + B \cdot (2 - \sqrt{3})^t$$

$$K_0 = 40 \text{ en } L_0 = 5 \text{ geeft } K_1 = 40 + 2 \cdot 5 = 50$$

$$K_0 = 40 \text{ geeft } A \cdot (2 + \sqrt{3})^0 + B \cdot (2 - \sqrt{3})^0 = 40, \text{ dus } A + B = 40$$

$$K_1 = 50 \text{ geeft } A \cdot (2 + \sqrt{3})^1 + B \cdot (2 - \sqrt{3})^1 = 50, \text{ dus } (2 + \sqrt{3})A + (2 - \sqrt{3})B = 50$$

$$\begin{cases} A + B = 40 \\ (2 + \sqrt{3})A + (2 - \sqrt{3})B = 50 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} (2 + \sqrt{3})A + (2 + \sqrt{3})B = 80 + 40\sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})A + (2 - \sqrt{3})B = 50 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \cdot B &= 30 + 40\sqrt{3} \\ B &= \frac{30}{2\sqrt{3}} + 20 \\ B &= 20 + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 40 \\ B = 20 + 5\sqrt{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A + 20 + 5\sqrt{3} = 40 \\ A = 20 - 5\sqrt{3} \end{array}$$

Dus $K_t = (20 - 5\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^t + (20 + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^t$.

$$K_{t+1} = K_t + 2L_t \text{ geeft } 2L_t = K_{t+1} - K_t$$

$$2L_t = (20 - 5\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{t+1} + (20 + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{t+1} - (20 - 5\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^t - (20 + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^t$$

$$2L_t = (20 - 5\sqrt{3})(2 + \sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3})^t + (20 + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{3})^t$$

$$2L_t = (20 - 5\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^t + (20 + 5\sqrt{3})(1 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^t$$

$$2L_t = (20 + 20\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 15)(2 + \sqrt{3})^t + (20 - 20\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 15)(2 - \sqrt{3})^t$$

$$2L_t = (5 + 15\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^t + (5 - 15\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^t$$

$$L_t = (2\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^t + (2\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^t$$

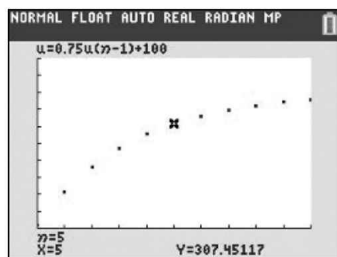
$$\text{Dus } K_t = (20 - 5\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^t + (20 + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^t$$

$$\text{en } L_t = (2\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^t + (2\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^t.$$

Diagnostische toets

Bladzijde 94

- 1 a Voer de rij in op het rijen-invoerscherm.

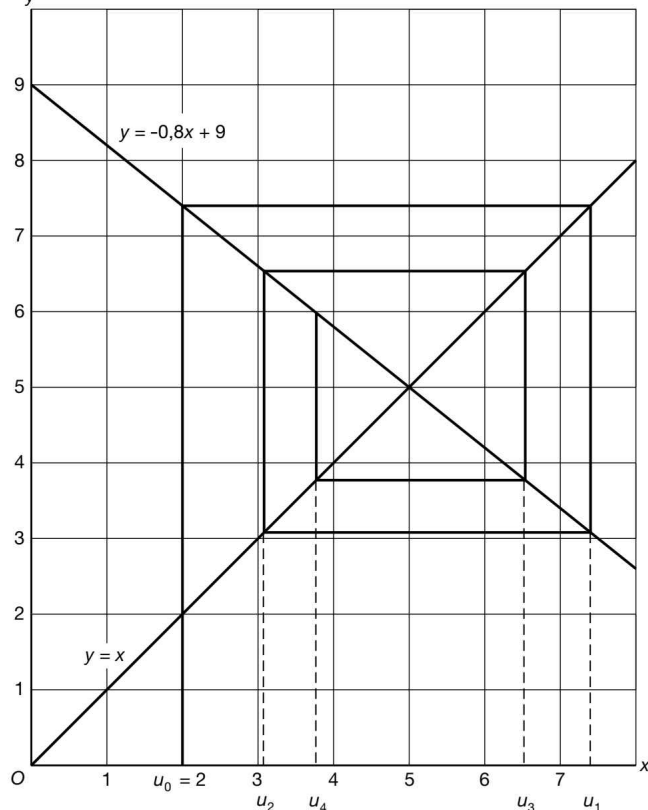


u_n nadert tot een grenswaarde.

$\bar{u} = 0,75\bar{u} + 100$ geeft $0,25\bar{u} = 100$, dus $\bar{u} = 400$.

De grenswaarde is 400.

- 2 a y



- b De punten komen steeds dichter bij het snijpunt van de lijnen $y = -0,8x + 9$ en $y = x$ te liggen.

Los op $x = -0,8x + 9$

$$1,8x = 9$$

$$x = 5$$

De grenswaarde is 5.

- 3 a** Voor het dekpunt $\bar{u}$ geldt $\bar{u} = 1,25\bar{u} - 10$

$$-0,25\bar{u} = -10$$

$$\bar{u} = 40$$

Stel $u_n = A \cdot 1,25^n + 40$.

$u_0 = 20$ geeft $A + 40 = 20$, dus $A = -20$.

Dus $u_n = -20 \cdot 1,25^n + 40$.

- b** Voor het dekpunt $\bar{P}$ geldt $\bar{P} = 0,95\bar{P} + 1000$

$$0,05\bar{P} = 1000$$

$$\bar{P} = 20000$$

Stel $P_n = A \cdot 0,95^n + 20000$.

$P_0 = 25000$ geeft $A + 20000 = 25000$, dus $A = 5000$.

Dus $P_n = 5000 \cdot 0,95^n + 20000$.

- 4 a** Afvoer 20% per uur, dus dan nog 80% over.

$Z_t = 0,8Z_{t-1} + 16$ met $Z_0 = 100$

- b** Voor het dekpunt $\bar{Z}$ geldt $\bar{Z} = 0,8\bar{Z} + 16$

$$0,2\bar{Z} = 16$$

$$\bar{Z} = 80$$

Stel $Z_t = A \cdot 0,8^t + 80$.

$Z_0 = 100$ geeft $A + 80 = 100$, dus $A = 20$.

Dus $Z_t = 20 \cdot 0,8^t + 80$.

- c** $Z_5 = 20 \cdot 0,8^5 + 80 \approx 86,6$ kg

- d** De grenswaarde is 80.

Dus los op $20 \cdot 0,8^t + 80 = 80,5$.

Voer in $y_1 = 20 \cdot 0,8^x + 80$ en $y_2 = 80,5$.

De tabel geeft $x = 16$ en $y_1 \approx 80,56$

$x = 17$ en $y_1 \approx 80,45$.

Dus na 17 uur.

- 5 a** $P_t = P_{t-1} + 0,2 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{5000}\right)$ met $P_0 = 100$

- b** Voer de differentievergelijking van vraag a in op het rijen-invoerscherm en kijk in de tabel.

$P_{31} \approx 4481$ en $P_{32} \approx 4574$, dus vanaf $t = 32$.

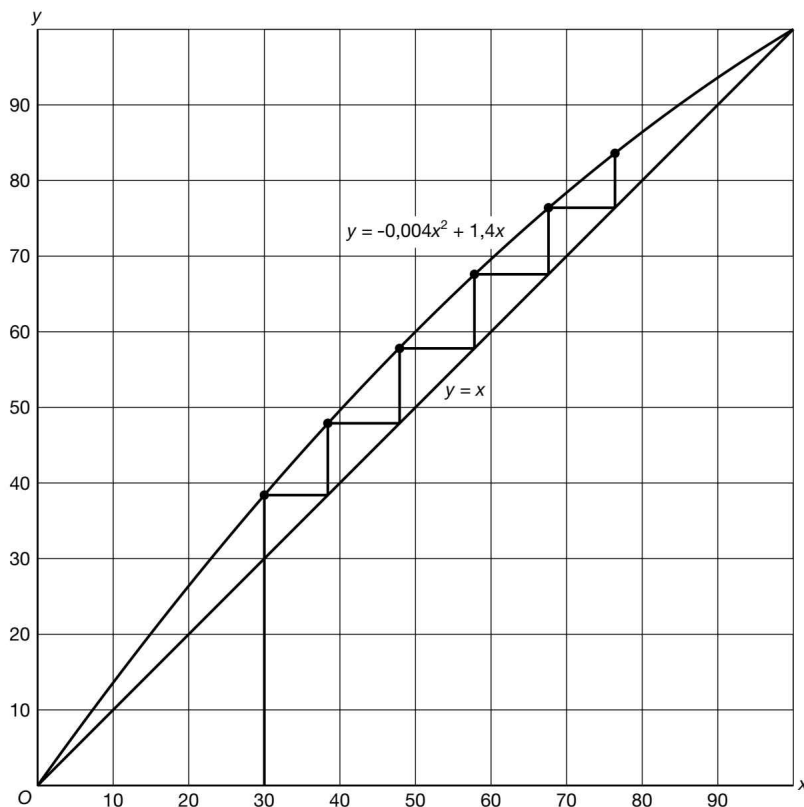
- c** $P_{49} \approx 4989$ en $P_{50} \approx 4991$, dus vanaf $t = 50$.

- d** Proberen geeft $k = 0,25$.

Bij $k = 0,25$ is $P_{39} \approx 4989$ en $P_{40} \approx 4992$.

6 Parabool $y = x + 0,4x \left(1 - \frac{x}{100}\right) = x + 0,4x - \frac{0,4}{100}x^2 = -0,004x^2 + 1,4x$.

x	0	25	50	75	100	125
y	0	32,5	60	82,5	100	112,5



Bladzijde 95

- 7 a Voer het stelsel differentievergelijkingen in op het rijen-invoerscherm en kijk in de tabel.

Op $t = 1$ zijn er 1455 prooidieren en op $t = 5$ zijn er 1305 prooidieren.

- b Na 43 maanden is het aantal prooidieren voor het eerst maximaal.

Er zijn dan 2203 prooidieren.

$$\begin{aligned} c \quad \bar{P} &= 1,15\bar{P} - 0,001\bar{R} \cdot \bar{P} & \bar{R} &= 0,92\bar{R} + 0,00005\bar{P} \cdot \bar{R} \\ -0,15\bar{P} + 0,001\bar{R} \cdot \bar{P} &= 0 & 0,08\bar{R} - 0,00005\bar{P} \cdot \bar{R} &= 0 \\ \bar{P}(-0,15 + 0,001\bar{R}) &= 0 & \bar{R}(0,08 - 0,00005\bar{P}) &= 0 \\ 0,001\bar{R} &= 0,15 & 0,00005\bar{P} &= 0,08 \\ \bar{R} &= 150 & \bar{P} &= 1600 \end{aligned}$$

- 8 a Voer het stelsel differentievergelijkingen in op het rijen-invoerscherm en kijk in de tabel.

Op $t = 1$ zijn er 14428 inwoners die nog gezond zijn, 548 die de griep hebben en 25 die immuun zijn.

Op $t = 2$ zijn er 14349 inwoners die nog gezond zijn, 599 die de griep hebben en 52 die immuun zijn.

- b De derde dag is van $t = 2$ tot $t = 3$.

$$G_2 = 14349 \text{ en } Z_2 = 599$$

Dus op de derde dag hebben $0,00001 \cdot 14349 \cdot 599 \approx 86$ mensen griep gekregen.

- 9 Gesloten systeem, dus voor elke t is $x_{t-1} + y_{t-1} = 60$ ofwel

$$\left. \begin{aligned} y_{t-1} &= 60 - x_{t-1} \\ x_t &= 0,15x_{t-1} + 0,65y_{t-1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_t &= 0,15x_{t-1} + 0,65(60 - x_{t-1}) \\ x_t &= 0,15x_{t-1} + 39 - 0,65x_{t-1} \\ x_t &= -0,5x_{t-1} + 39 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = -0,5\bar{x} + 39 \text{ geeft } 1,5\bar{x} = 39, \text{ dus } \bar{x} = 26.$$

$$\text{Stel } x_t = A \cdot (-0,5)^t + 26.$$

$$x_0 = 20 \text{ geeft } A + 26 = 20, \text{ dus } A = -6.$$

$$\text{Dus } x_t = -6 \cdot (-0,5)^t + 26.$$

$$\left. \begin{aligned} y_t &= 60 - x_t \\ x_t &= -6 \cdot (-0,5)^t + 26 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y_t &= 60 - (-6 \cdot (-0,5)^t + 26) \\ y_t &= 6 \cdot (-0,5)^t + 34 \end{aligned}$$

- 10 a** Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$ geeft $g^2 - 4g + 3 = 0$
 $(g-1)(g-3) = 0$
 $g = 1 \vee g = 3$

$$u_n = A \cdot 1^n + B \cdot 3^n = A + B \cdot 3^n$$

$$u_0 = 3 \text{ geeft } A + B = 3$$

$$u_1 = -1 \text{ geeft } A + 3B = -1$$

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A + 3B = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \\ -2B = 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} B = -2 \\ A + B = 3 \end{cases} \quad A = 5$$

$$\text{Dus } u_n = 5 - 2 \cdot 3^n.$$

- b** Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = 9u_{n-2}$ geeft $g^2 - 9 = 0$
 $g^2 = 9$
 $g = 3 \vee g = -3$

$$u_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-3)^n$$

$$u_0 = 5 \text{ geeft } A + B = 5$$

$$u_1 = -3 \text{ geeft } 3A - 3B = -3 \text{ ofwel } A - B = -1$$

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ A - B = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} + \\ 2A = 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ A + B = 5 \end{cases} \quad B = 3$$

$$\text{Dus } u_n = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-3)^n.$$

- c** Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$ geeft $g^2 - 6g + 9 = 0$
 $(g-3)^2 = 0$
 $g = 3$

$$u_n = (A + Bn) \cdot 3^n$$

$$u_0 = 5 \text{ geeft } A = 5$$

$$u_1 = 18 \text{ geeft } (A + B) \cdot 3 = 18 \text{ ofwel } A + B = 6 \quad \left. \vphantom{u_1 = 18} \right\} B = 1$$

$$\text{Dus } u_n = (5 + n) \cdot 3^n.$$

- 11** $x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$ geeft $x_{n+1} = 2x_n + y_n$
 $y_n = 9x_{n-1} + 2y_{n-1}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 9x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \text{ geeft } y_{n-1} = x_n - 2x_{n-1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_{n+1} = 2x_n + 9x_{n-1} + 2(x_n - 2x_{n-1}) \\ x_{n+1} = 2x_n + 9x_{n-1} + 2x_n - 4x_{n-1} \\ x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} \end{array}$$

De karakteristieke vergelijking is $g^2 - 4g - 5 = 0$
 $(g+1)(g-5) = 0$
 $g = -1 \vee g = 5$

$$\text{Dus } x_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 5^n.$$

$$x_0 = 6 \text{ en } y_0 = 6 \text{ geeft } x_1 = 2 \cdot 6 + 6 = 18$$

$$x_0 = 6 \text{ geeft } A \cdot (-1)^0 + B \cdot 5^0 = 6, \text{ dus } A + B = 6$$

$$x_1 = 18 \text{ geeft } A \cdot (-1)^1 + B \cdot 5^1 = 6, \text{ dus } -A + 5B = 18$$

$$\begin{cases} A + B = 6 \\ -A + 5B = 18 \end{cases} \quad \begin{array}{l} + \\ 6B = 24 \end{array}$$

$$\begin{cases} B = 4 \\ A + B = 6 \end{cases} \quad A = 2$$

$$\text{Dus } x_n = 2 \cdot (-1)^n + 4 \cdot 5^n.$$

$$\text{Substitutie van } x_n = 2 \cdot (-1)^n + 4 \cdot 5^n \text{ in } y_{n-1} = x_n - 2x_{n-1} \text{ geeft}$$

$$y_{n-1} = 2 \cdot (-1)^n + 4 \cdot 5^n - 2(2 \cdot (-1)^{n-1} + 4 \cdot 5^{n-1})$$

$$y_{n-1} = 2 \cdot (-1)^n + 4 \cdot 5^n - 4 \cdot (-1)^{n-1} - 8 \cdot 5^{n-1}$$

$$y_n = 2 \cdot (-1)^{n+1} + 4 \cdot 5^{n+1} - 4 \cdot (-1)^n - 8 \cdot 5^n$$

$$y_n = 2 \cdot (-1)^n \cdot -1 + 4 \cdot 5^n \cdot 5 - 4 \cdot (-1)^n - 8 \cdot 5^n$$

$$y_n = -2 \cdot (-1)^n + 20 \cdot 5^n - 4 \cdot (-1)^n - 8 \cdot 5^n$$

$$y_n = -6 \cdot (-1)^n + 12 \cdot 5^n$$