

# 4 Matrices

## Voorkennis Stelsels vergelijkingen

### Bladzijde 142

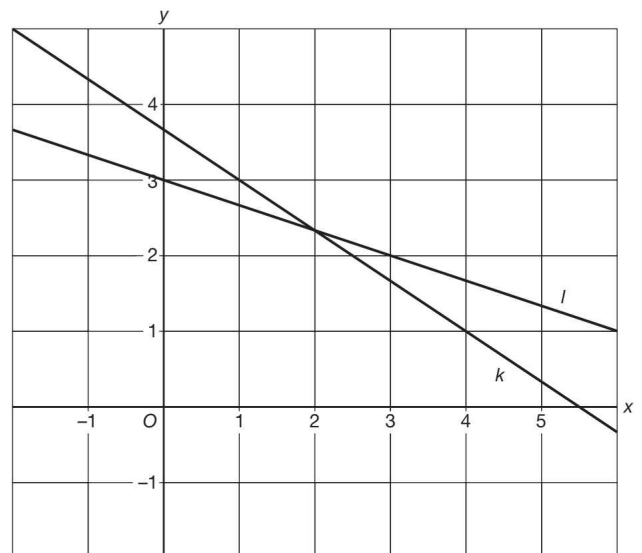
- 1 a** Uit  $x + 2y = 6$  volgt  $x = 6 - 2y$ .  
 $2x - 3y = 5$  en  $x = 6 - 2y$  geeft  $2(6 - 2y) - 3y = 5$   
 $12 - 4y - 3y = 5$   
 $-7y = -7$   
 $y = 1$   
 $y = 1$  en  $x = 6 - 2y$  geeft  $x = 6 - 2 \cdot 1 = 4$ .  
 De oplossing is  $(x, y) = (4, 1)$ .
- b** Uit  $3x + y = 14$  volgt  $y = 14 - 3x$ .  
 $5x - 2y = 27$  en  $y = 14 - 3x$  geeft  $5x - 2(14 - 3x) = 27$   
 $5x - 28 + 6x = 27$   
 $11x = 55$   
 $x = 5$   
 $x = 5$  en  $y = 14 - 3x$  geeft  $y = 14 - 3 \cdot 5 = -1$ .  
 De oplossing is  $(x, y) = (5, -1)$ .
- c** Uit  $2x - y = 13$  volgt  $y = 2x - 13$ .  
 $3x - y = 23$  en  $y = 2x - 13$  geeft  $3x - (2x - 13) = 23$   
 $3x - 2x + 13 = 23$   
 $x = 10$   
 $x = 10$  en  $y = 2x - 13$  geeft  $y = 2 \cdot 10 - 13 = 7$ .  
 De oplossing is  $(x, y) = (10, 7)$ .
- 2 a** Uit  $5a - b = 1$  volgt  $b = 5a - 1$ .  
 $4a + 3b = 16$  en  $b = 5a - 1$  geeft  $4a + 3(5a - 1) = 16$   
 $4a + 15a - 3 = 16$   
 $19a = 19$   
 $a = 1$   
 $a = 1$  en  $b = 5a - 1$  geeft  $b = 5 \cdot 1 - 1 = 4$ .  
 De oplossing is  $(a, b) = (1, 4)$ .
- b** Uit  $p + 3q = 48$  volgt  $p = 48 - 3q$ .  
 $2p - 5q = 30$  en  $p = 48 - 3q$  geeft  $2(48 - 3q) - 5q = 30$   
 $96 - 6q - 5q = 30$   
 $-11q = -66$   
 $q = 6$   
 $q = 6$  en  $p = 48 - 3q$  geeft  $p = 48 - 3 \cdot 6 = 30$ .  
 De oplossing is  $(p, q) = (30, 6)$ .
- c** Uit  $4x_1 + x_2 = 29$  volgt  $x_2 = 29 - 4x_1$ .  
 $-3x_1 + 4x_2 = 2$  en  $x_2 = 29 - 4x_1$  geeft  $-3x_1 + 4(29 - 4x_1) = 2$   
 $-3x_1 + 116 - 16x_1 = 2$   
 $-19x_1 = -114$   
 $x_1 = 6$   
 $x_1 = 6$  en  $x_2 = 29 - 4x_1$  geeft  $x_2 = 29 - 4 \cdot 6 = 5$ .  
 De oplossing is  $(x_1, x_2) = (6, 5)$ .

3 a lijn  $k$

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 1 | 4 |
| $y$ | 3 | 1 |

lijn  $l$

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 3 |
| $y$ | 3 | 2 |



b Uit  $x + 3y = 9$  volgt  $x = 9 - 3y$ .

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 11 \text{ en } x = 9 - 3y \text{ geeft } 2(9 - 3y) + 3y = 11 \\ 18 - 6y + 3y &= 11 \\ -3y &= -7 \\ y &= 2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$y = 2\frac{1}{3} \text{ en } x = 9 - 3y \text{ geeft } x = 9 - 3 \cdot 2\frac{1}{3} = 2.$$

De coördinaten van het snijpunt zijn  $(2, 2\frac{1}{3})$ .

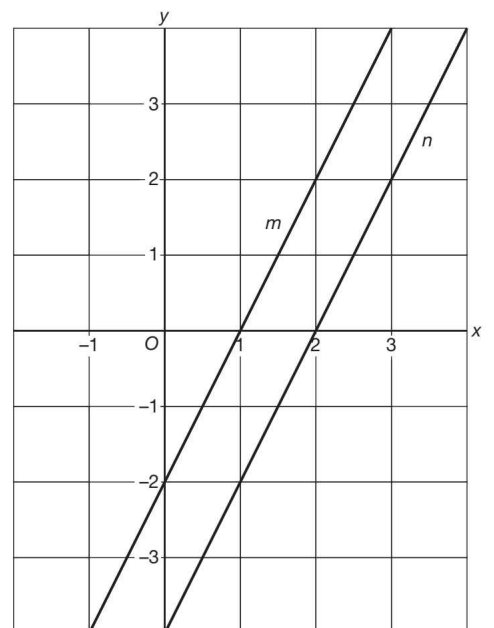
#### Bladzijde 143

4 a lijn  $m$

|     |    |   |
|-----|----|---|
| $x$ | 0  | 1 |
| $y$ | -2 | 0 |

lijn  $n$

|     |    |   |
|-----|----|---|
| $x$ | 0  | 2 |
| $y$ | -4 | 0 |



b De lijnen  $m$  en  $n$  zijn evenwijdig en snijden elkaar dus niet.

$$\text{Dus het stelsel } \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \text{ heeft geen oplossing.}$$

5 De stelsels I en III hebben geen oplossing.

6 a Uit  $6z = 15$  volgt  $z = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$ .

$$\text{Substitutie van } z = 2\frac{1}{2} \text{ in } 3y + 2z = 11 \text{ geeft } 3y + 5 = 11 \text{ ofwel } 3y = 6, \text{ dus } y = 2.$$

$$\text{Substitutie van } y = 2 \text{ en } z = 2\frac{1}{2} \text{ in } 3x + y - z = 7 \text{ geeft } 3x + 2 - 2\frac{1}{2} = 7 \text{ ofwel } 3x = 7\frac{1}{2}, \text{ dus } x = 2\frac{1}{2}.$$

$$\text{De oplossing is } (x, y, z) = (2\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}).$$

b Uit  $21c = 7$  volgt  $c = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ .

Substitutie van  $c = \frac{1}{3}$  in  $5b + 12c = -21$  geeft  $5b + 4 = -21$  ofwel  $5b = -25$ , dus  $b = -5$ .

Substitutie van  $b = -5$  en  $c = \frac{1}{3}$  in  $a - 3b + 9c = 16$  geeft  $a + 15 + 3 = 16$ , dus  $a = -2$ .

De oplossing is  $(a, b, c) = (-2, -5, \frac{1}{3})$ .

- 7 a Substitutie van  $x_4 = 6$  in  $x_3 + x_4 = 7$  geeft  $x_3 + 6 = 7$ , dus  $x_3 = 1$ .  
 Substitutie van  $x_3 = 1$  en  $x_4 = 6$  in  $x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -5$  geeft  $x_2 + 4 - 12 = -5$ , dus  $x_2 = 3$ .  
 Substitutie van  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 1$  en  $x_4 = 6$  in  $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 14$  geeft  $x_1 + 6 - 3 + 6 = 14$ , dus  $x_1 = 5$ .  
 De oplossing is  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 3, 1, 6)$ .

b Uit  $12x_5 = 4$  volgt  $x_5 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .

Substitutie van  $x_5 = \frac{1}{3}$  in  $6x_4 - 15x_5 = 1$  geeft  $6x_4 - 5 = 1$  ofwel  $6x_4 = 6$ , dus  $x_4 = 1$ .

Substitutie van  $x_4 = 1$  en  $x_5 = \frac{1}{3}$  in  $2x_3 + x_4 + 9x_5 = 0$  geeft  $2x_3 + 1 + 3 = 0$  ofwel  $2x_3 = -4$ , dus  $x_3 = -2$ .

Substitutie van  $x_3 = -2$ ,  $x_4 = 1$  en  $x_5 = \frac{1}{3}$  in  $2x_2 + x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -1$  geeft  $2x_2 - 2 - 2 + 2 = -1$  ofwel  $2x_2 = 1$ , dus  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

Substitutie van  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = -2$ ,  $x_4 = 1$  en  $x_5 = \frac{1}{3}$  in  $x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 6$  geeft  $x_1 - 2 + 4 + 1 + 1 = 6$ , dus  $x_1 = 2$ .

De oplossing is  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, \frac{1}{2}, -2, 1, \frac{1}{3})$ .

## 4.1 Rekenen met matrices

### Bladzijde 144

|           | Alkmaar | Amsterdam | Hoorn | Zaandam |
|-----------|---------|-----------|-------|---------|
| Alkmaar   | 0       | 42        | 26    | 30      |
| Amsterdam | 42      | 0         | 47    | 12      |
| Hoorn     | 26      | 47        | 0     | 35      |
| Zaandam   | 30      | 12        | 35    | 0       |

### Bladzijde 146

2 a  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$       c  $C \cdot B = (3)$       e  $A \cdot B + D \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

b  $A \cdot C$  kan niet      d  $D \cdot B = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$       f  $2A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

3 a  $T = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

b  $P \cdot T = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 106 \\ 67 \\ 44 \end{pmatrix} = V$

Betekenis: het zijn de aantallen fietsen die per dag gemaakt worden met 3, 5 of 10 versnellingen.

c  $W \cdot V = (217)$

Betekenis: het totale aantal fietsen dat per dag gemaakt wordt.

**Bladzijde 147**

- 4 a** Zaak A (bedragen in honderden euro's)
- |           |                                                          |
|-----------|----------------------------------------------------------|
| computers | $8 \cdot 8 + 6 \cdot 12 + 4 \cdot 16 + 3 \cdot 20 = 260$ |
| winst     | $8 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 51$     |
| software  | $8 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 38$     |

Zaak B (bedragen in honderden euro's)

|           |                                                          |
|-----------|----------------------------------------------------------|
| computers | $6 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 0 \cdot 16 + 5 \cdot 20 = 184$ |
| winst     | $6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 37$     |
| software  | $6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 29$     |

**b**  $K = \begin{matrix} & \text{prijs} & \text{winst} & \text{software} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 260 & 51 & 38 \\ 184 & 37 & 29 \end{pmatrix}$

**Bladzijde 149**

**5 a**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = Q \\ \hline P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = P \cdot Q \end{array}$$

**b**  $P \cdot R$  kan niet

**c**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P \\ \hline R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = R \cdot P \end{array}$$

**d**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = R \\ \hline S = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} = S \cdot R \end{array}$$

**e**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = R \\ \hline R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = R \cdot R \end{array}$$

**f**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P \\ \hline Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 11 & 16 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} = Q \cdot P \end{array}$$

**6 a**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 & 14 & 20 \\ 10 & 5 & 8 \\ 20 & 22 & 28 \end{pmatrix} = A \cdot B \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A \\ \hline B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 22 & 25 & 28 \\ 14 & 15 & 16 \\ 10 & 13 & 16 \end{pmatrix} = B \cdot A \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = C \\ \hline B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 41 & 25 & 14 \\ 27 & 15 & 12 \\ 9 & 13 & -2 \end{pmatrix} = B \cdot C \end{array}$$

**b**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = C \\ \hline A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 20 \\ 10 & 5 & 8 \\ 20 & 22 & 28 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 122 & 94 & 32 \\ 45 & 41 & 8 \\ 186 & 118 & 64 \end{pmatrix} = (A \cdot B) \cdot C \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 41 & 25 & 14 \\ 27 & 15 & 12 \\ 9 & 13 & -2 \end{pmatrix} = B \cdot C \\ \hline A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 122 & 94 & 32 \\ 45 & 41 & 8 \\ 186 & 118 & 64 \end{pmatrix} = A \cdot (B \cdot C) \end{array}$$

Dus  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ .**7 a**

$$K = \begin{matrix} & \text{kosten} \\ \begin{matrix} P \\ Q \\ R \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**b**

$$N = \begin{matrix} & A & B & C \\ (1000 & 600 & 800) \end{matrix}$$

**c**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} = K \\ \hline M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 327 \\ 411 \\ 269 \end{pmatrix} = M \cdot K \end{array}$$

De getallen van de matrix  $M \cdot K$  geven de productiekosten van de producten A, B en C per eenheid.**d**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = M \\ \hline N = (100 & 600 & 800) & (4600 & 7600 & 10800 & 13000) = N \cdot M \end{array}$$

De getallen in de matrix  $N \cdot M$  geven de benodigde hoeveelheid grondstoffen en arbeidstijd die nodig is voor de bestelling.**e**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} = K \\ \hline N \cdot M = (4600 & 7600 & 10800 & 13000) & (788800) = N \cdot M \cdot K \end{array}$$

De productiekosten van de totale bestelling zijn 788 800 euro.

**Bladzijde 150****8**

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\
 \hline
 A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A \cdot I \\
 \hline
 & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A \\
 \hline
 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = I \cdot A
 \end{array}$$

Dus  $A \cdot I = I \cdot A$ .**9**

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a+4c & b+4d \\ 2a+9c & 2b+9d \end{pmatrix} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} a+4c & b+4d \\ 2a+9c & 2b+9d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{geeft de volgende twee stelsels.}
 \end{array}$$

$$\begin{cases} a+4c=1 \\ 2a+9c=0 \end{cases}$$

Uit  $a+4c=1$  volgt  $a=1-4c$ .

$$\begin{aligned}
 2a+9c=0 \text{ en } a=1-4c \text{ geeft } 2(1-4c)+9c &= 0 \\
 2-8c+9c &= 0 \\
 c &= -2
 \end{aligned}$$

$$c = -2 \text{ en } a = 1 - 4c \text{ geeft } a = 1 - 4 \cdot (-2) = 9.$$

Dus  $a = 9$ ,  $b = -4$ ,  $c = -2$  en  $d = 1$ .

$$\begin{cases} b+4d=0 \\ 2b+9d=1 \end{cases}$$

Uit  $b+4d=0$  volgt  $b=-4d$ .

$$\begin{aligned}
 2b+9d=1 \text{ en } b=-4d \text{ geeft } 2 \cdot (-4d)+9d &= 1 \\
 -8d+9d &= 1 \\
 d &= 1
 \end{aligned}$$

$$d = 1 \text{ en } b = -4d \text{ geeft } b = -4 \cdot 1 = -4.$$

**10**

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 3 & y & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 14+x & 17-2x \\ 16+2y & 5y-5 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Er moet gelden  $14+x=20$ , dus  $x=6$ . $x=6$  geeft  $17-2x=17-2 \cdot 6=5$ , dus  $a=5$ .Ook moet gelden  $5y-5=-2$  ofwel  $5y=3$ , dus  $y=\frac{3}{5}$ .

$$y = \frac{3}{5} \text{ geeft } 16+2y = 16+2 \cdot \frac{3}{5} = 17\frac{1}{5}, \text{ dus } b = 17\frac{1}{5}.$$

Dus  $x=6$ ,  $y=\frac{3}{5}$ ,  $a=5$  en  $b=17\frac{1}{5}$ .

**11**

$$\left( \begin{array}{cc|ccc} & & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline 1 & 2 & a+2d & b+2e & c+2f \\ 3 & 4 & 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \\ 5 & 6 & 5a+6d & 5b+6e & 5c+6f \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} a+2d & b+2e & c+2f & 1 & 0 & 0 \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f & 0 & 1 & 0 \\ 5a+6d & 5b+6e & 5c+6f & g & h & i \end{array} \right) \text{ geeft drie stelsels.}$$

$$\begin{cases} a+2d=1 \\ 3a+4d=0 \end{cases}$$

Uit  $a+2d=1$  volgt  $a=1-2d$ .

$3a+4d=0$  en  $a=1-2d$  geeft  $3(1-2d)+4d=0$

$$3-6d+4d=0$$

$$-2d=-3$$

$$d=1\frac{1}{2}$$

$d=1\frac{1}{2}$  en  $a=1-2d$  geeft  $a=1-2\cdot 1\frac{1}{2}=1-3=-2$ .

$a=-2$  en  $d=1\frac{1}{2}$  geeft  $5a+6d=5\cdot -2+6\cdot 1\frac{1}{2}=-10+9=-1$ .

Dus  $g=-1$ .

$$\begin{cases} b+2e=0 \\ 3b+4e=1 \end{cases}$$

Uit  $b+2e=0$  volgt  $b=-2e$ .

$3b+4e=1$  en  $b=-2e$  geeft  $3\cdot -2e+4e=1$

$$-6e+4e=1$$

$$-2e=1$$

$$e=-\frac{1}{2}$$

$e=-\frac{1}{2}$  en  $b=-2e$  geeft  $b=-2\cdot -\frac{1}{2}=1$ .

$b=1$  en  $e=-\frac{1}{2}$  geeft  $5b+6e=5\cdot 1+6\cdot -\frac{1}{2}=5-3=2$ .

Dus  $h=2$ .

$$\begin{cases} c+2f=0 \\ 3c+4f=0 \end{cases}$$

Uit  $c+2f=0$  volgt  $c=-2f$ .

$3c+4f=0$  en  $c=-2f$  geeft  $3\cdot -2f+4f=0$

$$-6f+4f=0$$

$$-2f=0$$

$$f=0$$

$f=0$  en  $c=-2f$  geeft  $c=-2\cdot 0=0$ .

$c=0$  en  $f=0$  geeft  $5c+6f=5\cdot 0+6\cdot 0=0+0=0$ .

Dus  $i=0$ .

**12 a**

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**b**

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d } D = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Bladzijde 151**

$$\text{13 a } P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{14 a } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Bladzijde 152**

**15** De GR geeft

$$\text{a } P \cdot Q = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 54 \\ 16 & 14 & 33 \end{pmatrix}$$

$$\text{b } R \cdot P = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 17 \\ 15 & 1 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\text{c } 3P + P \cdot Q^4 = \begin{pmatrix} 44007 & 37608 & 105318 \\ 27918 & 23802 & 66828 \end{pmatrix}$$

**d**  $P^3$  kan niet want de matrix is niet vierkant.

**e**  $Q^4 - R^5$  kan niet, want een  $3 \times 3$ -matrix min een  $2 \times 2$ -matrix kan niet.

$$\text{f } R^3 \cdot P + 5P = \begin{pmatrix} 459 & 43 & 667 \\ 691 & 55 & 1009 \end{pmatrix}$$



**16 a** De GR geeft  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  en  $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**b** De GR geeft  $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$  en  $B^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ .

**c**  $C^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ ,  $C^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$ ,  $C^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$  en  $C^{10} = \begin{pmatrix} a^{10} & 0 & 0 \\ 0 & a^{10} & 0 \\ 0 & 0 & a^{10} \end{pmatrix}$

**d**  $A \cdot K = A$  en  $A^n = A$ , dus  $A^n \cdot K = K$ .

**e**  $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot K = K$ , dus  $B^n \cdot K = 2^n \cdot K$ .

**f**  $C^n \cdot K = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \cdot K = a^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot K$  en omdat  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot K = K$  is dus  $C^n = a^n \cdot K$ .

**g** Uit vraag f volgt  $C^5 \cdot K = a^5 \cdot K$ , dus los op

$$a^5 \cdot K = 6K$$

$$a^5 = 6$$

$$a = \sqrt[5]{6}$$

**17 a**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} = A$$


---


$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cd & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2$$


---


$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cd & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cd & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^4$$


---


$$A^4 = \begin{pmatrix} abcd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & abcd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abcd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abcd \end{pmatrix} = A^4$$

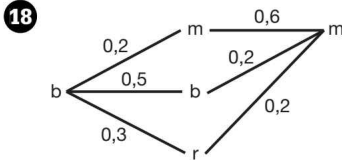
**b** Als  $A^4 \cdot K = K$ , dan is  $abcd = 1$ .

Als  $A^4 \cdot K = 2K$ , dan is  $abcd = 2$ .

Als  $A^8 \cdot K = 10K$ , dan is  $(abcd)^2 = 10$  en dus  $abcd = \sqrt{10}$ .

## 4.2 Matrices en kansen

### Bladzijde 154



De kans is  $0,2 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,28$ .

### Bladzijde 156

- 19 a De som van de getallen in een kolom is de som van de kansen op alle mogelijke volgende weertypen. De kansen in een rij hebben niets met elkaar te maken.  
b De GR geeft

$$W^2 = \begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} m & b & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ b \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,44 & 0,28 & 0,28 \\ 0,36 & 0,40 & 0,36 \\ 0,20 & 0,32 & 0,36 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- c Element  $w_{31}$  van  $W^2$  geeft de kans dat als het op een dag in mei mooi weer is, het twee dagen later zal regenen.  
d Dit is element  $w_{13}$  van  $W^2$  en de kans is dus 0,28.  
e De GR geeft

$$W^3 = \begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} m & b & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ b \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,376 & 0,312 & 0,312 \\ 0,372 & 0,380 & 0,372 \\ 0,252 & 0,308 & 0,316 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Het element  $w_{23}$  van  $W^3$  geeft de kans dat als het op een dag regent, het drie dagen later bewolkt is.

- f Van 3 mei naar 6 mei is drie dagen later. De gevraagde kans wordt gegeven door  $w_{33}$  van  $W^3$  en is 0,316.  
g Voor Egypte zullen de getallen in de eerste rij vrijwel gelijk aan 1 zijn en de andere getallen vrijwel nul.

- 20 a De GR geeft

$$\begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} K & M & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ \text{naar } M \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,17 & 0,52 & 0,25 \\ 0,70 & 0,27 & 0,75 \\ 0,13 & 0,21 & 0 \end{pmatrix} = T \end{matrix}$$

In het boek had gevraagd moeten worden naar de interpretatie van het element  $t_{22}$  van de matrix  $T$ .  
 $t_{22}$  van  $T$  is de kans dat na een medeklinker weer een medeklinker komt.

- b De GR geeft

$$\begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} K & M & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ \text{naar } M \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,325 & 0,388 & 0,317 \\ 0,534 & 0,451 & 0,547 \\ 0,140 & 0,161 & 0,136 \end{pmatrix} \approx T^3 \end{matrix}$$

$t_{22}$  van  $T^3$  is de kans dat drie plaatsen na een medeklinker weer een medeklinker komt.

- c Bereken  $t_{22}$  van  $T^4$ .  
Deze kans is 0,514.  
d Bereken  $t_{31}$  van  $T^5$ .  
Deze kans is 0,148.

### Bladzijde 157

- 21 a De GR geeft

$$\begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ \text{naar } B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,815 & 0,0925 & 0,0925 \\ 0,0712 & 0,7265 & 0,376 \\ 0,1138 & 0,181 & 0,8699 \end{pmatrix} = V^2 \end{matrix}$$

Zie het element  $v_{11}$  van de matrix  $V^2$ .  
Dus 81,5%.

$$\text{b } K = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix}$$

In  $V \cdot K$  staan de aantallen campers in Adelaide, Brisbane en Cairns een maand later.

c In  $V^2 \cdot K$  staan de aantallen campers in Adelaide, Brisbane en Cairns twee maanden later.

### Bladzijde 158

$$\text{22 a Boom blijft in I: kans} = \frac{200}{250} = 0,8.$$

Boom van I naar II: kans =  $1 - 0,8 = 0,2$ .

Na 1 jaar komen er 50 bomen bij in II. Er zitten dan 120 in II. Dus er zijn  $100 + 50 - 120 = 30$  naar III gegaan.

Dus boom van II naar III: kans =  $\frac{30}{100} = 0,3$ .

Een boom blijft in II: kans =  $1 - 0,3 = 0,7$ .

Een boom in III blijft in III, dus boom blijft in III: kans = 1.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix} = V$$

$$\text{b De aantallen op 1 januari 2017 volgen uit } V^2 \cdot K \text{ met } K = \begin{pmatrix} 250 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De GR geeft } V^2 \cdot K = \begin{pmatrix} 160 \\ 124 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

Dus op 1 januari 2017 zitten er 160 bomen in klasse I, 124 in klasse II en 116 in klasse III.

c De aantallen op 1 januari 2021 volgen uit  $V^6 \cdot K$ .

$$\text{De GR geeft } V^6 \cdot K \approx \begin{pmatrix} 66 \\ 84 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

Dus op 1 januari 2021 zitten er 66 bomen in klasse I, 84 in klasse II en 250 in klasse III.

### Bladzijde 159

$$\text{23 a Klant blijft in I: kans} = \frac{310}{400} = 0,775.$$

Klant van I naar II: kans =  $1 - 0,775 = 0,225$ .

Na 1 jaar komen er 90 klanten bij in II. Er zitten dan 246 in II. Dus er zijn  $240 + 90 - 246 = 84$  naar III gegaan.

Dus klant van II naar III: kans =  $\frac{84}{240} = 0,35$ .

En klant blijft in II: kans =  $1 - 0,35 = 0,65$ .

Na 1 jaar komen er 84 klanten bij in III. Er zitten dan 140 in III. Dus er zijn er  $100 + 84 - 140 = 44$  naar IV gegaan.

Dus klant van III naar IV: kans =  $\frac{44}{100} = 0,44$ .

En klant blijft in III: kans =  $1 - 0,44 = 0,56$ .

Een klant in IV blijft in IV, dus klant blijft in IV: kans = 1.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 0,775 & 0 & 0 & 0 \\ 0,225 & 0,65 & 0 & 0 \\ 0 & 0,35 & 0,56 & 0 \\ 0 & 0 & 0,44 & 1 \end{pmatrix} = V$$

- b De aantallen op 1 januari 2018 volgen uit  $V^3 \cdot K$  met  $K = \begin{pmatrix} 400 \\ 240 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix}$ .

$$\text{De GR geeft } V^3 \cdot K \approx \begin{pmatrix} 186 \\ 203 \\ 173 \\ 188 \end{pmatrix}.$$

Dus op 1 januari 2018 zitten er 186 klanten in categorie I, 203 in categorie II, 173 in categorie III en 188 in categorie IV.

- c De GR geeft  $V^5 \cdot K \approx \begin{pmatrix} 112 \\ 145 \\ 155 \\ 338 \end{pmatrix}$  en  $V^6 \cdot K \approx \begin{pmatrix} 86 \\ 120 \\ 138 \\ 406 \end{pmatrix}$ .

Op 1 januari 2020 zitten er  $155 + 338 = 493$  klanten in categorie III en IV samen, op 1 januari 2021 zijn dat er  $138 + 406 = 544$ .

Dus in 2021 zitten er voor het eerst meer dan 500 klanten in categorie III en IV samen.

24 a

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 0,85 & 0,08 & 0,12 \end{pmatrix} \\ \text{naar B} & \begin{pmatrix} 0,09 & 0,82 & 0,11 \end{pmatrix} \\ \text{C} & \begin{pmatrix} 0,06 & 0,10 & 0,77 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} = S$$

- b De aantallen vier weken later volgen uit  $S^4 \cdot K$  met  $K = \begin{pmatrix} 2500 \\ 2400 \\ 2200 \end{pmatrix}$ .

$$\text{De GR geeft } S^4 \cdot K \approx \begin{pmatrix} 2709 \\ 2484 \\ 1907 \end{pmatrix}.$$

Dus vier weken later kopen 2709 klanten bij A, 2484 bij B en 1907 bij C.

- c De aantallen 20 weken later volgen uit  $S^{20} \cdot K$ .

$$\text{De GR geeft } S^{20} \cdot K \approx \begin{pmatrix} 2785 \\ 2501 \\ 1814 \end{pmatrix}.$$

Dus 20 weken later kopen 2785 klanten bij A, 2501 bij B en 1814 bij C.

De aantallen 30 weken later volgen uit  $S^{30} \cdot K$ .

$$\text{De GR geeft } S^{30} \cdot K \approx \begin{pmatrix} 2785 \\ 2501 \\ 1814 \end{pmatrix}.$$

Dus 30 weken later kopen 2785 klanten bij A, 2501 bij B en 1814 bij C.

De aantallen na 20 weken en 30 weken zijn gelijk.

d

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 0,394 & 0,390 & 0,392 \end{pmatrix} \\ \text{naar B} & \begin{pmatrix} 0,351 & 0,354 & 0,352 \end{pmatrix} \\ \text{C} & \begin{pmatrix} 0,255 & 0,256 & 0,256 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \quad S^{20} \approx \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \text{A} & \begin{pmatrix} 0,392 & 0,392 & 0,392 \end{pmatrix} \\ \text{naar B} & \begin{pmatrix} 0,352 & 0,352 & 0,352 \end{pmatrix} \\ \text{C} & \begin{pmatrix} 0,255 & 0,256 & 0,255 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \quad S^{30} \approx$$

De matrices zijn vrijwel gelijk en de getallen in een rij zijn vrijwel gelijk.

**Bladzijde 160**

- 25 a De percentages volgen uit  $M^3 \cdot K$  met  $K = \begin{pmatrix} 29 \\ 44 \\ 27 \end{pmatrix}$ .

$$\text{De GR geeft } M^3 \cdot K \approx \begin{pmatrix} 22,5 \\ 45,5 \\ 32,0 \end{pmatrix}.$$

Dus in 2060 heeft naar verwachting 22,5% van de beroepsbevolking een lagere opleiding.

- b De GR geeft  $M^{15} \cdot K \approx \begin{pmatrix} 19,2 \\ 47,4 \\ 33,4 \end{pmatrix}$  en  $M^{20} \cdot K \approx \begin{pmatrix} 19,2 \\ 47,4 \\ 33,4 \end{pmatrix}$ .

Dus de percentages na 300 jaar en na 400 jaar zijn gelijk, dus er treedt stabilisatie op. Uiteindelijk zal 33,4% van de beroepsbevolking een hogere opleiding hebben.

**Bladzijde 161**

- 26 a Bereken het element  $g_{11}$  van  $G^5$ .  
Dit element is 0,087.  
Dus 8,7%.

- b Bereken  $G^7 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 44 \\ 46 \end{pmatrix}$ .

$$\text{De GR geeft } \begin{pmatrix} 8,7 \\ 45,6 \\ 45,7 \end{pmatrix}.$$

Dus 45,7%.

- c De GR geeft  $G^5 \approx \begin{pmatrix} 0,087 & 0,087 & 0,087 \\ 0,456 & 0,456 & 0,456 \\ 0,457 & 0,457 & 0,457 \end{pmatrix}$  en  $G^6 \approx \begin{pmatrix} 0,087 & 0,087 & 0,087 \\ 0,456 & 0,456 & 0,456 \\ 0,457 & 0,457 & 0,457 \end{pmatrix}$ .

Er treedt dus al vrij snel stabilisatie op.

- d
- |      |   |      |      |      |       |
|------|---|------|------|------|-------|
|      |   | van  |      |      |       |
|      |   | I    | S    | N    |       |
|      | I | 0,05 | 0,05 | 0,05 | $= G$ |
| naar | S | 0,52 | 0,48 | 0,42 |       |
|      | N | 0,43 | 0,47 | 0,53 |       |

In deze matrix is de tweede rij ongemoed gelaten.

- e Dit lukt niet met de matrix van vraag d. Door ook de getallen van de tweede rij te verlagen en de getallen van de derde rij nog verder te verhogen is het wel mogelijk.

**Bladzijde 162**

- 27 a • Klasse IV is tot 4 jaar en er is geen klasse V.  
• Er is een pijl van IV naar I en hierbij staat 1000.  
• Er is alleen een pijl van IV naar I en niet van I, II of III naar I.
- b Op 1 juni 2016 in III:  $0,6 \cdot 500 = 300$ .  
Op 1 juni 2017 in IV:  $0,8 \cdot 300 = 240$ .  
Aantal nakomelingen:  $240 \cdot 1000 = 240\,000$ .

**Bladzijde 164**

- 28 a
- |      |     |     |     |     |     |       |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
|      |     | van |     |     |     |       |
|      |     | I   | II  | III | IV  |       |
|      | I   | 0   | 0   | 2   | 0,3 | $= L$ |
| naar | II  | 0,7 | 0   | 0   | 0   |       |
|      | III | 0   | 0,9 | 0   | 0   |       |
|      | IV  | 0   | 0   | 0,8 | 0   |       |

b Bereken  $L \cdot P$ ,  $L^2 \cdot P$  en  $L^3 \cdot P$  met  $P = \begin{pmatrix} 1000 \\ 630 \\ 510 \\ 370 \end{pmatrix}$ .

De GR geeft de volgende samenstellingen.

|     | 1 jaar | 2 jaar | 3 jaar |
|-----|--------|--------|--------|
| I   | 1131   | 1256   | 1396   |
| II  | 700    | 792    | 879    |
| III | 567    | 630    | 713    |
| IV  | 408    | 454    | 504    |

- 29 a Stel de twee- en driejarigen krijgen gemiddeld  $x$  jongen per dier.

$$\text{Dan moet gelden } 3800x + 3500x + 2500 \cdot 0,4 = 6840$$

$$7300x + 1000 = 6840$$

$$7300x = 5840$$

$$x = 0,8$$

$$\text{De overlevingskansen zijn } \frac{4500}{6000} = 0,75, \frac{3400}{4000} = 0,85, \frac{2964}{3800} = 0,78, \frac{2590}{3500} = 0,74, \frac{1550}{2500} = 0,62 \text{ en}$$

$$\frac{600 - 0,1 \cdot 500}{1000} = \frac{550}{1000} = 0,55.$$

$$\text{naar } \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \geq 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \geq 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,8 & 0,8 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,78 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,74 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,62 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,55 & 0,10 \end{pmatrix} \end{matrix} = L$$

b Bij 2021 hoort  $L^6 \cdot P$  met  $P = \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \\ 3800 \\ 3500 \\ 2500 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$ .

$$\text{De GR geeft } L^6 \cdot P \approx \begin{pmatrix} 6534 \\ 5047 \\ 4246 \\ 3013 \\ 2255 \\ 1560 \\ 828 \end{pmatrix}.$$

Dus de te verwachten leeftijdsopbouw op 1 januari 2021 is 6534 met leeftijd 0, 5047 met leeftijd 1, 4246 met leeftijd 2, 3013 met leeftijd 3, 2255 met leeftijd 4, 1560 met leeftijd 5 en 828 met leeftijd  $\geq 6$ .

**Bladzijde 165**

**30 a** van

$$\begin{array}{c} \text{e} \quad \text{l} \quad \text{i} \\ \text{naar l} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = L$$

**b**

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = L \right.$$


---


$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} = L^2 \right.$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = L \right.$$


---


$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = L \right.$$

- c** Zie de matrix  $L^3$  van vraag b.  
 Populatie gelijk betekent  $abc = 1$ .  
**d** Populatie met 20% toegenomen betekent  $abc = 1,2$ .  
**e** Populatie sterft uit betekent  $abc < 1$ .

**31 a**  $P(\text{pasgeboren dier wordt één jaar}) = 0,80 \cdot 0,60 = 0,48$

**b**  $L^3 \cdot P$  met  $P = \begin{pmatrix} 500 \\ 160 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$  geeft de samenstelling op 1 juli 2017.

De GR geeft  $L^3 \cdot P = \begin{pmatrix} 240 \\ 120 \\ 240 \\ 60 \end{pmatrix}$ .

Dus op 1 juli 2017 bevatten de leeftijdsklassen achtereenvolgens 240, 120, 240 en 60 dieren.

**c**  $L^{-1} \cdot P$  geeft de samenstelling op 1 juli 2015.

De GR geeft  $L^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 200 \\ 50 \end{pmatrix}$ .

Dus op 1 juli 2015 bevatten de leeftijdsklassen achtereenvolgens 200, 100, 200 en 50 dieren.

**d** De GR geeft

$$\begin{array}{c} \text{I} \quad \text{II} \quad \text{III} \quad \text{IV} \\ \text{naar} \end{array} \begin{pmatrix} 1,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix} = L^4.$$

Dat betekent dat de populatie elke twee jaar met 20% toeneemt.

e Per twee jaar is de groeifactor 1,2, dus op 1 januari 2024 zijn er  $770 \cdot 1,2^4 \approx 1597$  dieren.

f In de matrix  $L$  van de vraag is  $0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,25 \cdot 10 = 1,2$ .

De vruchtbaarheid wordt aangetast zo, dat de populatieomvang over een periode van twee jaar niet verandert. De groeifactor per twee jaar is dan dus 1.

Stel de vruchtbaarheid  $d$ .

Dan moet gelden  $0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,25 \cdot d = 1$

$$0,12d = 1$$

$$d \approx 8,33$$

Dus de nieuwe matrix  $L$  wordt

$$\text{naar } \begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8,33 \\ 0,80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = L.$$

### 4.3 Stelsels en matrices

#### Bladzijde 167

**32 a**  $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$ , dus uit  $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$  volgt  $\begin{pmatrix} x - 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$  en dit komt overeen

met het stelsel  $\begin{cases} x - 4y = 8 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ .

**b** Twee keer de eerste vergelijking geeft  $2x - 8y = 16$  en deze aftrekken van de tweede vergelijking geeft

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 8y = 16 \end{cases} \quad \text{ofwel het stelsel } \begin{cases} x - 4y = 8 \\ 11y = -11 \end{cases}$$

Uit  $11y = -11$  volgt  $y = -1$ .

$y = -1$  en  $x - 4y = 8$  geeft  $x - 4 \cdot (-1) = 8$  ofwel  $x + 4 = 8$ , dus  $x = 4$ .

De oplossing is  $(x, y) = (4, -1)$ .

#### Bladzijde 170

**33 a** Bij het stelsel hoort de matrix  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & 2 \\ 4 & 18 & 9 & 7 \end{array} \right)$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & 2 \\ 4 & 18 & 9 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & -3 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$R_3$  geeft  $x_3 = 3$ .

$x_3 = 3$  en  $R_2$  geeft  $x_2 - 6 = -8$ , dus  $x_2 = -2$ .

$x_2 = -2$ ,  $x_3 = 3$  en  $R_1$  geeft  $x_1 - 8 + 9 = 5$ , dus  $x_1 = 4$ .

De oplossing is  $(x_1, x_2, x_3) = (4, -2, 3)$ .



b Bij het stelsel hoort de matrix  $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \\ 3 & 7 & -1 & 6 & 28 \\ 2 & 5 & 0 & 5 & 21 \\ 3 & 6 & -4 & 13 & 63 \end{array}\right)$ .

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \\ 3 & 7 & -1 & 6 & 28 \\ 2 & 5 & 0 & 5 & 21 \\ 3 & 6 & -4 & 13 & 63 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 - 3R_1 \rightarrow R_4}]{R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -17 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 18 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3}]{-R_4 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$R_4$  geeft  $x_4 = 4$ .

$x_4 = 4$  en  $R_3$  geeft  $x_3 - 16 = -18$ , dus  $x_3 = -2$ .

$x_3 = -2$ ,  $x_4 = 4$  en  $R_2$  geeft  $x_2 - 4 - 12 = -17$ , dus  $x_2 = -1$ .

$x_2 = -1$ ,  $x_3 = -2$ ,  $x_4 = 4$  en  $R_1$  geeft  $x_1 - 2 + 2 + 12 = 15$ , dus  $x_1 = 3$ .

De oplossing is  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, -1, -2, 4)$ .

34 a Door  $(-1, 9)$  geeft  $a - b + c = 9$ .

Door  $(2, 6)$  geeft  $4a + 2b + c = 6$ .

Door  $(3, 13)$  geeft  $9a + 3b + c = 13$ .

Dus het stelsel  $\begin{cases} a - b + c = 9 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$  moet worden opgelost.

Hierbij hoort de matrix  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 1 & 13 \end{array}\right)$ .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 1 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 - 9R_1 \rightarrow R_3}]{R_2 - 4R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 6 & -3 & -30 \\ 0 & 12 & -8 & -68 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 6 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3}]{\frac{1}{6}R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$R_3$  geeft  $c = 4$ .

$c = 4$  en  $R_2$  geeft  $b - 2 = -5$ , dus  $b = -3$ .

$b = -3$ ,  $c = 4$  en  $R_1$  geeft  $a + 3 + 4 = 9$ , dus  $a = 2$ .

Dus  $(a, b, c) = (2, -3, 4)$ .

35 a  $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3}]{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -9 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + 9R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -32 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{32}R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1\frac{3}{8} \end{array}\right)$$

$R_3$  geeft  $x_3 = -1\frac{3}{8}$ .

$x_3 = -1\frac{3}{8}$  en  $R_2$  geeft  $x_2 + 4\frac{1}{8} = 5$ , dus  $x_2 = \frac{7}{8}$ .

$x_2 = \frac{7}{8}$ ,  $x_3 = -1\frac{3}{8}$  en  $R_1$  geeft  $x_1 + 1\frac{3}{4} - 2\frac{3}{4} = 1$ , dus  $x_1 = 2$ .

Dus  $p = 2$ ,  $q = \frac{7}{8}$  en  $r = -1\frac{3}{8}$ .

**Bladzijde 172**

**36**  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -7 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$  met als oplossing  $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 2, 4)$ .

- 37** De matrices  $A$ ,  $B$  en  $C$  staat in rij-echelonvorm.  
De matrices  $B$  en  $C$  staat in gereduceerde rij-echelonvorm.

**38 a** 
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_3]{R_3 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + 6R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{8}R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - R_3 \rightarrow R_2]{R_1 - R_3 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1 \rightarrow R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

**b** 
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 27 \\ 3 & 8 & 5 & -3 & 21 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 31 \\ 1 & 4 & 6 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 - R_1 \rightarrow R_4]{\begin{matrix} R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 27 \\ 0 & 2 & 8 & -12 & -60 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & -23 \\ 0 & 2 & 7 & -5 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2]{\begin{matrix} R_3 + R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 - R_2 \rightarrow R_4 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 27 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & -30 \\ 0 & 0 & 13 & -14 & -83 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_4]{-R_4 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 27 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -36 \\ 0 & 0 & 13 & -14 & -83 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - 13R_3 \rightarrow R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 27 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 77 & 385 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{77}R_4 \rightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 27 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\begin{matrix} R_2 + 6R_4 \rightarrow R_2 \\ R_1 - 3R_4 \rightarrow R_1 \end{matrix}]{R_3 + 7R_4 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 + R_3 \rightarrow R_1]{R_2 - 4R_3 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

**Bladzijde 173**

**39 a** Omvormen van  $A$  geeft  $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3]{-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right).$

Dus de matrices  $A$  en  $B$  zijn rij-equivalent.

**b** Omvormen van  $C$  geeft

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -8 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3]{-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Dus de matrices  $C$  en  $D$  zijn niet rij-equivalent.

- 40 Bij het stelsel hoort de matrix  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & p \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & 4 & 15 \end{array}\right)$ .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & p \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & 4 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 5 & 0 & 10 - 2p \\ 0 & 1 & -2 & 15 - 3p \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2 \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 1 & 0 & -0,4p + 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3p + 15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 1 & 0 & -0,4p + 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2,6p + 13 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 1 & 0 & -0,4p + 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1,3p - 6,5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1,6p + 13 \\ 0 & 1 & 0 & -0,4p + 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1,3p - 6,5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2p + 15 \\ 0 & 1 & 0 & -0,4p + 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1,3p - 6,5 \end{array}\right)$$

- 41 a Het systeem is in evenwicht voor de gewichten  $G_1, G_2, G_3, G_4$  en  $G_5$ .  
Door de massa's van de gewichten  $k$  keer zo groot te nemen, blijft het systeem in evenwicht.  
Dus er zijn oneindig veel waarden voor  $G_1, G_2, G_3, G_4$  en  $G_5$ .  
b Bij het systeem horen de volgende vergelijkingen.

$$\begin{aligned} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 &= 800 \\ 6(G_1 + G_2) &= 10(G_3 + G_4 + G_5) \text{ ofwel } 3G_1 + 3G_2 - 5G_3 - 5G_4 - 5G_5 = 0 \\ 2G_1 &= 8G_2 \text{ ofwel } G_1 - 4G_2 = 0 \\ 2G_3 &= 8(G_4 + G_5) \text{ ofwel } G_3 - 4G_4 - 4G_5 = 0 \\ 3G_4 &= 2G_5 \text{ ofwel } 3G_4 - 2G_5 = 0 \end{aligned}$$

Dit geeft het stelsel 
$$\begin{cases} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 = 800 \\ 3G_1 + 3G_2 - 5G_3 - 5G_4 - 5G_5 = 0 \\ G_1 - 4G_2 = 0 \\ G_3 - 4G_4 - 4G_5 = 0 \\ 3G_4 - 2G_5 = 0 \end{cases}$$

Bij dit stelsel hoort de matrix  $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 3 & 3 & -5 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$ .

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 3 & 3 & -5 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -8 & -2400 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & -1 & -800 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_5]{\begin{matrix} -R_3 \rightarrow R_2 \\ -\frac{1}{8}R_2 \rightarrow R_3 \\ R_5 \rightarrow R_4 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_5 - R_3 \rightarrow R_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -300 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{5}R_5 \rightarrow R_5}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_5 - R_4 \rightarrow R_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 180 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}R_5 \rightarrow R_5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_4 + 2R_5 \rightarrow R_4 \\ R_3 - R_5 \rightarrow R_3 \\ R_2 - R_5 \rightarrow R_2 \\ R_1 - R_5 \rightarrow R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 764 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 764 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 264 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_4 \rightarrow R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 764 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 764 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 264 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 - R_4 \rightarrow R_3 \\ R_2 - R_4 \rightarrow R_2 \\ R_1 - R_4 \rightarrow R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 740 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 740 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \\ R_1 - R_3 \rightarrow R_1 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 \end{pmatrix}$$

Dus  $G_1 = 400$  gram,  $G_2 = 100$  gram,  $G_3 = 240$  gram,  $G_4 = 24$  gram en  $G_5 = 36$  gram.

#### Bladzijde 174

- 42 a Het stelsel heeft één oplossing. De oplossing is  $(x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 2)$ .  
 b Het stelsel heeft geen oplossing, want uit de derde rij volgt  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$  en dat kan niet.  
 c Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen, want uit de derde rij volgt  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$  en hieraan voldoen oneindig veel waarden van  $x_1, x_2$  en  $x_3$ .

#### Bladzijde 176

43 a Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 14 \\ 4 & -3 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 14 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Het stelsel is samenhangend en bepaald. De oplossing is  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 6, 1)$ .

b Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 3 & -11 & -2 \\ 1 & -5 & 8 & -14 & -21 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Het stelsel is samenhangend en onbepaald. Er zijn oneindig veel oplossingen.

c Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 3 & -11 & -2 \\ 1 & -5 & 8 & -14 & 20 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Het stelsel is niet-samenhangend. Er is geen oplossing.

44 Bij het stelsel  $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$  hoort de matrix  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$x = 2$  en  $y = -1$  invullen bij  $2x + y = p$  geeft  $4 - 1 = p$  ofwel  $p = 3$ .

Dus voor  $p = 3$  is het stelsel samenhangend en bepaald.

### Bladzijde 177

45 Bij het stelsel  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + y + 3z = 5 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$  hoort de matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ .

Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ .

$x = -9$ ,  $y = 17$  en  $z = -7$  invullen bij  $3x + y - 2z = q$  geeft  $-27 + 17 + 14 = q$  ofwel  $q = 4$ .

Dus voor  $q \neq 4$  zijn de vergelijkingen van het stelsel strijdig.

- 46 a Optellen van de eerste en de tweede vergelijking van het stelsel geeft de vergelijking

$$3x + 2y + 5z = a + 5.$$

De derde vergelijking van het stelsel is  $3x + by + 5z = 6$ .

Dus het stelsel heeft precies één oplossing voor  $b \neq 2$ .

- b Het stelsel heeft geen oplossing voor  $b = 2 \wedge a \neq 1$ .

- c Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen voor  $b = 2 \wedge a = 1$ .

47  $n = 1$  geeft  $a + b + c + d = 1$

$n = 2$  geeft  $8a + 4b + 2c + d = 5$

$n = 3$  geeft  $27a + 9b + 3c + d = 14$

$n = 4$  geeft  $64a + 16b + 4c + d = 30$

Dit geeft het stelsel  $\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{cases}$  en hierbij hoort de matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 14 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 30 \end{pmatrix}$ .

Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 14 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 30 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dus  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{6}$  en  $d = 0$ .

**48** Bij de figuur horen de volgende vergelijkingen.

$$T_A = \frac{1}{4}(10 + T_D + T_B + 6) \text{ ofwel } 4T_A = 10 + T_D + T_B + 6 \text{ ofwel } 4T_A - T_B - T_D = 16$$

$$T_B = \frac{1}{4}(T_A + T_C + 10 + 8) \text{ ofwel } 4T_B = T_A + T_C + 10 + 8 \text{ ofwel } T_A - 4T_B + T_C = -18$$

$$T_C = \frac{1}{4}(T_D + 5 + 12 + T_B) \text{ ofwel } 4T_C = T_D + 5 + 12 + T_B \text{ ofwel } T_B - 4T_C + T_D = -17$$

$$T_D = \frac{1}{4}(12 + 8 + T_C + T_A) \text{ ofwel } 4T_D = 12 + 8 + T_C + T_A \text{ ofwel } T_A + T_C - 4T_D = -20$$

Dit geeft het stelsel  $\begin{cases} 4T_A - T_B - T_D = 16 \\ T_A - 4T_B + T_C = -18 \\ T_B - 4T_C + T_D = -17 \\ T_A + T_C - 4T_D = -20 \end{cases}$  en hierbij hoort de matrix  $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 16 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & -20 \end{pmatrix}$ .

Voer in  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 16 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & -20 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft afgerond op één decimaal  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8,8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9,3 \end{pmatrix}$ .

Dus de temperaturen in A, B, C en D zijn respectievelijk 8,5 °C, 8,8 °C, 8,8 °C en 9,3 °C.

## 4.4 Inverse matrices en determinanten

### Bladzijde 179

**49**  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 23 & 22 \\ 2 & 9 & 51 & 50 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 23 & 22 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 4R_2 \rightarrow R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array} \right)$

De oplossing van het stelsel  $\begin{cases} x + 4y = 23 \\ 2x + 9y = 51 \end{cases}$  is  $(x, y) = (3, 5)$ .

De oplossing van het stelsel  $\begin{cases} x + 4y = 22 \\ 2x + 9y = 50 \end{cases}$  is  $(x, y) = (-2, 6)$ .

**50 a**  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 4R_2 \rightarrow R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$

**b** Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

De GR geeft  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dit is de eenheidsmatrix.

**Bladzijde 181**

**51 a** Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

De GR geeft  $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , dus de oplossing is  $(x, y, z) = (2, 3, 1)$ .

**b** De GR geeft  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,4 & -0,2 & 0,6 \\ 3,2 & 2,6 & -2,8 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4p + 3,2 \\ 3,2p - 6,6 \\ p - 2 \end{pmatrix}$$

De oplossing is  $(x, y, z) = (-0,4p + 3,2; 3,2p - 6,6; p - 2)$ .

**52 a** Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

De GR geeft  $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ , dus de oplossing is  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3, 2, -1, 5)$ .

**b** De GR geeft  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1,5 & -3 & 2,5 & -0,5 \\ 2,5 & 6 & -5,5 & 2,5 \\ -1,5 & -4 & 3,5 & -1,5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5p - 3q + 3 \\ 2,5p + 6q - 8 \\ -1,5p - 4q + 5 \\ p + q + 1 \end{pmatrix}$$

De oplossing is  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1,5p - 3q + 3; 2,5p + 6q - 8; -1,5p - 4q + 5; p + q + 1)$

**Bladzijde 182**

**53** Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 2. Dit geeft  $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$  en hieraan is te zien dat het stelsel geen oplossing heeft.

Het stelsel is te noteren als  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  ofwel  $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Als het stelsel één oplossing zou hebben, dan zou er een matrix  $A^{-1}$  bestaan waarmee deze oplossing berekend zou kunnen worden met  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Maar het stelsel heeft geen oplossing, dus zo'n matrix  $A^{-1}$  bestaat niet.

Dus de matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  heeft geen inverse.

$$\begin{aligned}
 54 \quad & \left( \begin{array}{cc|cc} p & q & 1 & 0 \\ r & s & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - \frac{r}{p} R_1 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} p & q & 1 & 0 \\ 0 & s - \frac{qr}{p} & -\frac{r}{p} & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} p & q & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ps - qr}{p} & -\frac{r}{p} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{p}{ps - qr} R_2 \rightarrow R_2} \\
 & \left( \begin{array}{cc|cc} p & q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-r}{ps - qr} & \frac{p}{ps - qr} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - q R_2 \rightarrow R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} p & 0 & 1 + \frac{qr}{ps - qr} & \frac{-pq}{ps - qr} \\ 0 & 1 & \frac{-r}{ps - qr} & \frac{p}{ps - qr} \end{array} \right) = \\
 & \left( \begin{array}{cc|cc} p & 0 & \frac{ps}{ps - qr} & \frac{-pq}{ps - qr} \\ 0 & 1 & \frac{-r}{ps - qr} & \frac{p}{ps - qr} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{p} R_1 \rightarrow R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{s}{ps - qr} & \frac{-q}{ps - qr} \\ 0 & 1 & \frac{-r}{ps - qr} & \frac{p}{ps - qr} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

- 55 a De overlevingskans voor dieren uit klasse I is  $\frac{75}{100} = 0,75$ . Dus  $l_{21} = 0,75$ .

De overlevingskans voor dieren uit klasse II is  $\frac{56}{80} = 0,7$ . Dus  $l_{31} = 0,7$ .

- b De overlevingskans voor de dieren uit klasse III is 0,6, dus van de 60 dieren overleven er  $0,60 \cdot 60 = 36$ .

De overlevingskans voor de dieren uit klasse IV is  $\frac{50 - (50 + 36 - 46)}{50} = 0,2$ . Dus  $l_{44} = 0,2$

De  $80 + 60 = 140$  dieren uit de klassen II en III krijgen samen 119 jongen. Dat is  $\frac{119}{140} = 0,85$  jong per individu. Dus  $l_{12} = l_{13} = 0,85$ .

- c De populatievoorspellingsmatrix is
- |      |     | van  |      |      |     |
|------|-----|------|------|------|-----|
|      |     | I    | II   | III  | IV  |
| naar | I   | 0    | 0,85 | 0,85 | 0   |
|      | II  | 0,75 | 0    | 0    | 0   |
|      | III | 0    | 0,7  | 0    | 0   |
|      | IV  | 0    | 0    | 0,6  | 0,2 |
- $$= L.$$

Voer in  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,85 & 0,85 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$ .

De GR geeft  $A^{-1} \cdot B \approx \begin{pmatrix} 107 \\ 86 \\ 32 \\ 154 \end{pmatrix}$ .

Dus in november 2010 zaten er 107 dieren in klasse I, 86 dieren in klasse II, 32 dieren in klasse III en 154 dieren in klasse IV.

De GR geeft  $(A^{-1})^2 \cdot B \approx \begin{pmatrix} 114 \\ 46 \\ 80 \\ 531 \end{pmatrix}$ .

Dus in november 2008 zaten er 114 dieren in klasse I, 46 dieren in klasse II, 80 dieren in klasse III en 531 dieren in klasse IV.

d De GR geeft  $A^6 \cdot B \approx \begin{pmatrix} 133 \\ 95 \\ 65 \\ 47 \end{pmatrix}$ .

Dus  $133 + 95 + 65 + 47 = 340$  dieren in november 2024.

In november 2012 waren dat er  $100 + 80 + 60 + 50 = 290$ .

Dus de te verwachten toename van de populatie is  $\frac{340 - 290}{290} \times 100\% \approx 14,7\%$ .



56 Voer in  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$  en  $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft bij  $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , bij  $B \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  en bij  $C \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dus stelsel I heeft één oplossing, stelsel II heeft oneindig veel oplossingen en stelsel III heeft geen oplossing.

### Bladzijde 185

57  $|A| = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$   
 $= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$   
 $= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$   
 $= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

58 a  $|A| = 3 \cdot -3 - 4 \cdot -4 = -9 + 16 = 7$

b  $|A| = 1 \cdot (2 \cdot -3 - 1 \cdot -2) - 3 \cdot (3 \cdot -3 - 1 \cdot 4) + 5 \cdot (3 \cdot -2 - 2 \cdot 4) = 1 \cdot -4 - 3 \cdot -13 + 5 \cdot -14 = -4 + 39 - 70 = -35$

c  $|A| = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 0 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 0 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 1 \cdot 1 - 0 + 0 = 1$

d  $|A| = 0 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 3) - 2 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 1 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 0) = 0 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 0 - 4 + 3 = -1$

59 a  $a = 1$  geeft  $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A| = 1 \cdot (4b - 1) - b \cdot (8 - 3) + 1 \cdot (2 - 3b) = 4b - 1 - 5b + 2 - 3b = -4b + 1$$

$$|A| = 0 \text{ geeft } -4b + 1 = 0 \text{ ofwel } b = \frac{1}{4}.$$

Dus voor  $b = \frac{1}{4}$  is  $|A| = 0$ .

b  $b = 1$  geeft  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A| = a \cdot (4 - a) - 1 \cdot (8 - 3a) + 1 \cdot (2 - 3) = 4a - a^2 - 8 + 3a - 1 = -a^2 + 7a - 9$$

$$|A| = 0 \text{ geeft } -a^2 + 7a - 9 = 0$$

$$a^2 - 7a + 9 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 49 - 36 = 13$$

$$a = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \quad \vee \quad a = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

Dus voor  $a = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$  en voor  $a = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$  is  $|A| = 0$ .

60  $|A| = 1 \cdot (4 - 3p^2) - p \cdot (3 - 6p) + 5 \cdot (3p - 8) = 4 - 3p^2 - 3p + 6p^2 + 15p - 40 = 3p^2 + 12p - 36$

$$|A| = 0 \text{ geeft } 3p^2 + 12p - 36 = 0$$

$$p^2 + 4p - 12 = 0$$

$$(p - 2)(p + 6) = 0$$

$$p = 2 \quad \vee \quad p = -6$$

Dus voor  $p = 2$  en voor  $p = -6$  is  $|A| = 0$ .

61 a De coëfficiëntenmatrix is  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$|A| = 3 \cdot (-3 \cdot -1 - 2 \cdot 1) + 2 \cdot (2 \cdot -1 - 2 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot -4 + 1 \cdot 5 = 3 - 8 + 5 = 0$$

b  $|A| = 0$ , dus volgens de theorie heeft het stelsel  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$  ofwel het stelsel

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \\ x + y - z = p \end{cases} \text{ geen oplossing of oneindig veel oplossingen.}$$

c Voer in  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 1 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Het stelsel is niet-samenhangend. Er is geen oplossing.

d Voer in  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,2 & 1,2 \\ 0 & 1 & -0,8 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Het stelsel is samenhangend en onbepaald. Er zijn oneindig veel oplossingen.

62  $|A| = ps - qr$  en  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s}{ps - qr} & \frac{-q}{ps - qr} \\ \frac{-r}{ps - qr} & \frac{p}{ps - qr} \end{pmatrix}$  (zie vraag 54) geeft

$$|A| \cdot A^{-1} = (ps - qr) \cdot \begin{pmatrix} \frac{s}{ps - qr} & \frac{-q}{ps - qr} \\ \frac{-r}{ps - qr} & \frac{p}{ps - qr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}, \text{ dus } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}.$$

### Bladzijde 186

63 a Bij het stelsel hoort de coëfficiëntenmatrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & p \\ -8p & 3 & 2 \\ 5 & 6 & p \end{pmatrix}$ .

$$|A| = 1 \cdot (3p - 12) - 4 \cdot (-8p^2 - 10) + p \cdot (-48p - 15) = 3p - 12 + 32p^2 + 40 - 48p^2 - 15p = -16p^2 - 12p + 28$$

$$|A| = 0 \text{ geeft } -16p^2 - 12p + 28 = 0$$

$$4p^2 + 3p - 7 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot -7 = 9 + 112 = 121$$

$$p = \frac{-3 - \sqrt{121}}{8} \vee p = \frac{-3 + \sqrt{121}}{8}$$

$$p = \frac{-3 - 11}{8} = -1\frac{3}{4} \vee p = \frac{-3 + 11}{8} = 1$$

$$p = -1\frac{3}{4} \text{ geeft } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1\frac{3}{4} \\ 14 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -1\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{Voer in } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1\frac{3}{4} & 3 \\ 14 & 3 & 2 & -50 \\ 5 & 6 & -1\frac{3}{4} & 19 \end{pmatrix}.$$

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$p = 1 \text{ geeft } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -8 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Voer in } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ -8 & 3 & 2 & -50 \\ 5 & 6 & 1 & 19 \end{pmatrix}.$$

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,14 & 0 \\ 0 & 1 & 0,29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dus voor  $p = -1\frac{3}{4}$  en voor  $p = 1$  heeft het stelsel geen oplossing.

b  $p = 2$  geeft de bij het stelsel horende matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ -16 & 3 & 2 & -50 \\ 5 & 6 & 2 & 19 \end{pmatrix}$ .

Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ -16 & 3 & 2 & -50 \\ 5 & 6 & 2 & 19 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ .

Dus voor  $p = 2$  is de oplossing van het stelsel  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -4)$ .

c  $x_1 = 11, x_2 = -14$  en  $x_3 = -48$  invullen in  $x_1 + 4x_2 + px_3 = 3$  geeft  $11 - 56 - 48p = 3$

$$-48p = 48$$

$$p = -1$$

$x_1 = 11, x_2 = -14$  en  $x_3 = -48$  invullen in  $-8px_1 + 3x_2 + 2x_3 = -50$  geeft  $-88p - 42 - 96 = -50$

$$-88p = -88$$

$$p = 1$$

$x_1 = 11, x_2 = -14$  en  $x_3 = -48$  invullen in  $5x_1 + 6x_2 + px_3 = 19$  geeft  $55 - 84 - 48p = 19$

$$-48p = 48$$

$$p = -1$$

Dus voor  $p = -1$  is de oplossing van het stelsel  $(x_1, x_2, x_3) = (11, -14, -48)$ .

64 Het stelsel  $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  heeft één oplossing onder voorwaarde dat  $A^{-1}$  bestaat.

Dus als  $A^{-1}$  niet bestaat dan heeft dit stelsel geen oplossingen of oneindig veel oplossingen.

Tevens geldt dat het stelsel  $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  geen oplossingen of oneindig veel oplossingen heeft als  $|A| = 0$ .

Dus als  $A^{-1}$  niet bestaat dan is  $|A| = 0$ .

$$\begin{aligned} 65 \text{ a } O(\triangle OAB) &= x_A \cdot y_B - \frac{1}{2} \cdot x_A \cdot y_A - \frac{1}{2} \cdot (x_A - x_B) \cdot (y_B - y_A) - \frac{1}{2} \cdot y_B \cdot x_B \\ &= x_A y_B - \frac{1}{2} x_A y_A - \frac{1}{2} (x_A y_B - x_A y_A - x_B y_B + x_B y_A) - \frac{1}{2} x_B y_B \\ &= x_A y_B - \frac{1}{2} x_A y_A - \frac{1}{2} x_A y_B + \frac{1}{2} x_A y_A + \frac{1}{2} x_B y_B - \frac{1}{2} x_B y_A - \frac{1}{2} x_B y_B \\ &= \frac{1}{2} x_A y_B - \frac{1}{2} x_B y_A \end{aligned}$$

$$\text{b } |M| = x_A y_B - x_B y_A, \text{ dus } \frac{1}{2} |M| = \frac{1}{2} (x_A y_B - x_B y_A) = \frac{1}{2} x_A y_B - \frac{1}{2} x_B y_A = O(\triangle OAB)$$

$$\text{c } B'(8-3, 4-2) = B'(5, 2) \text{ en } C'(6-3, 7-2) = C'(3, 5).$$

$$O(\triangle OB'C') = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |5 \cdot 5 - 3 \cdot 2| = \frac{1}{2} |25 - 6| = \frac{1}{2} \cdot 19 = 9\frac{1}{2}$$

$$O(\triangle ABC) = O(\triangle OB'C') = 9\frac{1}{2}$$

$$66 \text{ a } O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 4 & p \\ 1 & p \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4p - p| = \frac{1}{2} |3p|$$

$$O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} p & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |pq - p|$$

$$O(\triangle OAC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & q \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4q - 1|$$

$$p > 0 \text{ geeft } O(\triangle OAB) = \frac{1}{2}p \text{ en } O(\triangle OBC) = \frac{1}{2}p|q - 1|.$$

$$p < 0 \text{ geeft } O(\triangle OAB) = -\frac{1}{2}p \text{ en } O(\triangle OBC) = -\frac{1}{2}p|q - 1|.$$

$$O(\triangle OAB) = O(\triangle OBC) \text{ geeft } |3p| = |pq - q|$$

$$3p = pq - p \vee 3p = -pq + p$$

$$3 = q - 1 \vee 3 = -q + 1$$

$$q = 4 \vee q = -2$$

$$q = 4 \text{ geeft } O(\triangle OAC) = \frac{1}{2} |4 \cdot 4 - 1| = 7\frac{1}{2}$$

$$\text{Uit } O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} |3p| \text{ en } O(\triangle OAB) = O(\triangle OAC) = 7\frac{1}{2} \text{ volgt } \frac{1}{2}p = 7\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}p = -7\frac{1}{2},$$

$$\text{dus } p = 5 \vee p = -5.$$

$$q = -2 \text{ geeft } O(\triangle OAC) = \frac{1}{2} |4 \cdot -2 - 1| = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{Uit } O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} |3p| \text{ en } O(\triangle OAB) = O(\triangle OAC) = 4\frac{1}{2} \text{ volgt } \frac{1}{2}p = 4\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}p = -4\frac{1}{2},$$

$$\text{dus } p = 3 \vee p = -3.$$

$$\text{Dus } O(\triangle OAB) = O(\triangle OAC) = O(\triangle OBC) \text{ geeft } (p = 5 \wedge q = 4) \vee (p = -5 \wedge q = 4) \vee (p = 3 \wedge q = -2) \vee (p = -3 \wedge q = -2).$$

$$\begin{aligned} \text{b } O(OABC) &= O(\triangle OAB) + O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 3p & 2p \\ 2p & 2p+1 \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 2p+1 & 4 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} |3p \cdot (2p+1) - 2p \cdot 2p| + \frac{1}{2} |2p \cdot 4 - 0 \cdot (2p+1)| \\ &= \frac{1}{2} |6p^2 + 3p - 4p^2| + \frac{1}{2} |8p| \\ &= \frac{1}{2} |2p^2 + 3p| + \frac{1}{2} |8p| \\ &= \frac{1}{2} (2p^2 + 3p) + \frac{1}{2} (8p) \\ &= p^2 + 1\frac{1}{2}p + 4p \\ &= p^2 + 5\frac{1}{2}p \end{aligned}$$

$$O(OABC) = 10p \text{ geeft } p^2 + 5\frac{1}{2}p = 10p$$

$$p^2 - 4\frac{1}{2}p = 0$$

$$p(p - 4\frac{1}{2}) = 0$$

$$p = 0 \vee p = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus voor } p = 4\frac{1}{2} \text{ is de oppervlakte van vierhoek } OABC \text{ gelijk aan } 10p.$$

- c Driehoek  $OB'C'$  ontstaat door driehoek  $ABC$  zo te verschuiven, dat punt  $A$  in de oorsprong terechtkomt.  
 $B'(10 - 6, 6 - 12) = B'(4, -6)$  en  $C'(p - 6, 4 - 12) = C'(p - 6, -8)$ .

$$O(\triangle OB'C') = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 4 & p-6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4 \cdot -8 - (p-6) \cdot -6| = \frac{1}{2} |-32 + 6p - 36| = \frac{1}{2} |6p - 68| = |3p - 34|$$

$$O(\triangle OAB) = O(\triangle OB'C') = 10 \text{ geeft } 3p - 34 = 10 \vee 3p - 34 = -10$$

$$3p = 44 \vee 3p = 24$$

$$p = 14\frac{2}{3} \vee p = 8$$

$$\text{Dus voor } p = 8 \text{ en voor } p = 14\frac{2}{3} \text{ is de oppervlakte van driehoek } ABC \text{ gelijk aan } 10.$$

## Diagnostische toets

### Bladzijde 188

1

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & x & -2 \\ 4 & -5 & y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3x-2 & 2x-9 \\ 4y+23 & 3y-14 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{Uit } \begin{pmatrix} -3x-2 & 2x-9 \\ 4y+23 & 3y-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & -5 \end{pmatrix} \text{ volgt}$$

$-3x - 2 = 4$  ofwel  $-3x = 6$ , dus  $x = -2$   
 $x = -2$  geeft  $2x - 9 = 2 \cdot -2 - 9 = -13$ , dus  $a = -13$   
 $3y - 14 = -5$  ofwel  $3y = 9$ , dus  $y = 3$   
 $y = 3$  geeft  $4y + 23 = 4 \cdot 3 + 23 = 35$ , dus  $b = 35$ .  
 Dus  $x = -2$ ,  $y = 3$ ,  $a = -13$  en  $b = 35$ .

2 De GR geeft

a  $B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 16 \\ 29 & -1 & 27 \end{pmatrix}$

b  $A \cdot B$  kan niet

c  $A^4 = \begin{pmatrix} 3241 & 4800 & 8184 \\ 892 & 1325 & 2256 \\ 3082 & 4578 & 7805 \end{pmatrix}$

d  $C^3 \cdot B - 4B = \begin{pmatrix} -624 & -503 & 476 \\ 656 & 535 & -488 \end{pmatrix}$

e  $5B + B \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 667 & 1001 & 1706 \\ 1660 & 2347 & 3960 \end{pmatrix}$

f  $A^2 - C^2$  kan niet

3 a

van  
 N  $\begin{pmatrix} 0,34 & 0,28 & 0,08 \\ 0,61 & 0,66 & 0,47 \\ 0,05 & 0,06 & 0,45 \end{pmatrix} = V$   
 naar E  
 W

b De GR geeft  $V^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,278 & 0,278 & 0,278 \\ 0,628 & 0,628 & 0,628 \\ 0,094 & 0,094 & 0,094 \end{pmatrix}$  en  $V^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,278 & 0,278 & 0,278 \\ 0,628 & 0,628 & 0,628 \\ 0,094 & 0,094 & 0,094 \end{pmatrix}$ .

De kansen na 10 jaar en na 20 jaar zijn gelijk, dus er treedt stabilisatie op.

c Uiteindelijk zal 27,8% van de gezinnen in Nederland op vakantie gaan.

### Bladzijde 189

4 a Deze kans is  $0,005 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,0021$ .

b Voer de matrix  $L$  in op de GR.

De GR geeft  
 van  
 I II III IV  
 naar  $L = \begin{pmatrix} 2,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,1 \end{pmatrix}$

Uit de matrix  $L^4$  blijkt dat de populatie na  $4 \cdot 2 = 8$  jaar 2,1 keer zo groot is geworden, dus de populatie neemt in acht jaar met 110% toe.

c Voer de matrix  $P = \begin{pmatrix} 75000 \\ 400 \\ 300 \\ 140 \end{pmatrix}$  in op de GR.

De GR geeft  $L \cdot P = \begin{pmatrix} 140000 \\ 375 \\ 240 \\ 210 \end{pmatrix}$  en  $L^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 80000 \\ 500 \\ 200 \\ 75 \end{pmatrix}$ .

Dus op 1 januari 2018 zitten er 140 000 baarzen in klasse I, 375 in klasse II, 240 in klasse III en 210 in klasse IV. En op 1 januari 2014 zaten er 80 000 baarzen in klasse I, 500 in klasse II, 200 in klasse III en 75 in klasse IV.

d Stel het aantal eitjes dat een baars gemiddeld legt  $d$ .

Als de populatie baarzen in acht jaar niet verandert geldt

$$0,005 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot d = 1$$

$$0,0021d = 1$$

$$d = \frac{1}{0,0021} \approx 476$$

Dus als de populatie in acht jaar niet verandert, legt een baars gemiddeld 476 eitjes.

- 5 Bij het stelsel hoort de matrix  $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & p \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right)$ .

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & p \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) &\xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & p \\ 3 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & p-10 \\ 0 & -4 & 6 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_3]{-\frac{1}{4}R_3 \rightarrow R_2} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & -3 & 4 & p-10 \end{array}\right) &\xrightarrow{R_3 + 3R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & p+5 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_3 \rightarrow R_3} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2p-10 \end{array}\right) &\xrightarrow[R_2 + \frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_2]{R_1 + R_3 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2p-5 \\ 0 & 1 & 0 & -3p-10 \\ 0 & 0 & 1 & -2p-10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & p+5 \\ 0 & 1 & 0 & -3p-10 \\ 0 & 0 & 1 & -2p-10 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Dus  $(x_1, x_2, x_3) = (p+5, -3p-10, -2p-10)$ .

- 6 Bij het stelsel  $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 7 \end{cases}$  hoort de matrix  $\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right)$ .

Voer in  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ .

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

$x = 2, y = -1$  en  $z = -3$  invullen bij  $4x + 3y + 2z = q$  geeft  $8 - 3 - 6 = q$  ofwel  $q = -1$ .  
Dus voor  $q \neq -1$  is het stelsel niet-samenhangend.

- 7 a Voer in  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

De GR geeft  $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , dus de oplossing is  $(x, y, z) = (2, 3, 1)$ .

b De GR geeft  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,4 & -0,2 & 0,6 \\ 3,2 & 2,6 & -2,8 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4p + 3,2 \\ 3,2p - 6,6 \\ p - 2 \end{pmatrix}$$

De oplossing is  $(x, y, z) = (-0,4p + 3,2; 3,2p - 6,6; p - 2)$ .

- 8  $|A| = 2p \cdot (2p + 6) - 2 \cdot (3 + 3p) + 1 \cdot (6 - 2p^2) = 4p^2 + 12p - 6 - 6p + 6 - 2p^2 = 2p^2 + 6p$

$$\begin{aligned} |A| = 0 &\text{ geeft } 2p^2 + 6p = 0 \\ &2p(p + 3) = 0 \\ &2p = 0 \vee p + 3 = 0 \\ &p = 0 \vee p = -3 \end{aligned}$$

Dus voor  $p = 0$  en voor  $p = -3$  geldt  $|A| = 0$ .