

15 Continue dynamische modellen

Voorkennis Discrete dynamische modellen en de tweede wet van Newton

Bladzijde 107

- 1 a $\bar{u} = 0,92\bar{u} + 16$ geeft $0,08\bar{u} = 16$, dus $\bar{u} = 200$.
 Stel $u_n = A \cdot a^n + 200$.
 $u_0 = 250$ geeft $A + 200 = 250$, dus $A = 50$.
 Dus $u_n = 50 \cdot 0,92^n + 200$.
- b Substitutie van $x_n = g^n$ geeft de karakteristieke vergelijking
 $g^2 - 4g - 12 = 0$
 $(g + 2)(g - 6) = 0$
 $g = -2 \vee g = 6$
 De directe formule is van de vorm $x_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 6^n$.
 $x_0 = 5$ geeft $A \cdot (-2)^0 + B \cdot 6^0 = 5$, dus $A + B = 5$.
 $x_1 = 3$ geeft $A \cdot (-2)^1 + B \cdot 6^1 = 3$, dus $-2A + 6B = 3$.
- $$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 5 \\ -2A + 6B = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{l} 2A + 2B = 10 \\ -2A + 6B = 3 \end{array} +$$
- $$\begin{array}{r} 8B = 13 \\ B = 1\frac{5}{8} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ A + B = 5 \end{array} \right\} A = 3\frac{3}{8}$$

De directe formule is $x_n = 3\frac{3}{8} \cdot (-2)^n + 1\frac{5}{8} \cdot 6^n$.

- c Substitutie van $v_n = g^n$ geeft de karakteristieke vergelijking
 $g^2 - 2\frac{1}{2}g + 1\frac{9}{16} = 0$
 $(g - 1\frac{1}{4})^2 = 0$
 $g = 1\frac{1}{4}$
 De directe formule is van de vorm $v_n = (A + Bn) \cdot (1\frac{1}{4})^n$.
 $v_0 = 8$ geeft $(A + 0) \cdot (1\frac{1}{4})^0 = 8$, dus $A = 8$.
 $v_1 = 12$ geeft $(8 + B) \cdot (1\frac{1}{4})^1 = 12$
 $10 + 1\frac{1}{4}B = 12$
 $1\frac{1}{4}B = 2$
 $B = 1\frac{3}{5}$

De directe formule is $v_n = (8 + 1\frac{3}{5}n) \cdot (1\frac{1}{4})^n$.

- d Substitutie van $x_n = g^n$ geeft de karakteristieke vergelijking
 $g^2 - 4g + 8 = 0$
 $(g - 2)^2 - 4 + 8 = 0$
 $(g - 2)^2 = -4$
 $(g - 2)^2 = 4i^2$
 $g - 2 = 2i \vee g - 2 = -2i$
 $g = 2 + 2i \vee g = 2 - 2i$
 De directe formule is van de vorm $x_n = (A \cos(\frac{1}{4}\pi n) + B \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (2\sqrt{2})^n$.
 $x_0 = 1$ geeft $(A \cos(0) + B \sin(0)) \cdot (2\sqrt{2})^0 = 1$, dus $A = 1$.
 $x_1 = 2$ geeft $(\cos(\frac{1}{4}\pi) + B \sin(\frac{1}{4}\pi)) \cdot (2\sqrt{2})^1 = 2$
 $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}B\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} = 2$
 $2 + 2B = 2$
 $B = 0$
 De directe formule is $x_n = \cos(\frac{1}{4}\pi n) \cdot (2\sqrt{2})^n$.

Bladzijde 108

- 2 a $108 \text{ km/uur} = 30 \text{ m/s}$
 $F_R = F_Z - F_W = 392 - \frac{1}{6} \cdot 30^2 = 242 \text{ N}$
 $F_R = m \cdot a = 40a$
 $40a = 242$ geeft $a = \frac{242}{40} = 6,05 \text{ m/s}^2$

$$\begin{aligned} \text{b } F_R = 0 \text{ geeft } 392 - \frac{1}{6}v^2 &= 0 \\ \frac{1}{6}v^2 &= 392 \\ v^2 &= 2352 \\ v &= \sqrt{2352} = 28\sqrt{3} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Het voorwerp komt met een snelheid van $3,6 \cdot 28\sqrt{3} \approx 175$ km/uur op de grond.

$$\begin{aligned} \text{3 a } 36 \text{ km/uur} &= 10 \text{ m/s} \\ F_R &= 80 - F_L - F_W = 80 - \frac{1}{5}v^2 - 5v = 80 - \frac{1}{5} \cdot 10^2 - 5 \cdot 10 = 10 \text{ N} \\ F_R &= m \cdot a = 220a \\ 220a &= 10 \text{ geeft } a = \frac{10}{220} = \frac{1}{22} \text{ m/s}^2 \\ \text{b } F_R = 0 \text{ geeft } 80 - \frac{1}{5}v^2 - 5v &= 0 \\ v^2 + 25v - 400 &= 0 \\ D &= 2225, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{2225} = 5\sqrt{89} \\ v &= \frac{-25 + 5\sqrt{89}}{2} = 11,08... \text{ m/s} \end{aligned}$$

De maximale snelheid van de scooter is $3,6 \cdot 11,08... \approx 40$ km/uur.

15.1 Dynamische modellen

Bladzijde 109

$$\begin{aligned} \text{1 a Op } [10, 20] \text{ is } \frac{\Delta T}{\Delta t} &= \frac{34 - 50}{20 - 10} = -1,6^\circ\text{C/minuut.} \\ \text{Op } [20, 30] \text{ is } \frac{\Delta T}{\Delta t} &= \frac{26 - 34}{30 - 20} = -0,8^\circ\text{C/minuut.} \\ \text{b De gemiddelde snelheid op het interval } [0, 10] &\text{ is } -4^\circ\text{C/minuut, dus } \left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=5} = -4^\circ\text{C/minuut.} \\ \text{Het gemiddelde van de temperaturen op de tijdstippen } t=0 &\text{ en } t=10 \text{ is } \frac{90 + 50}{2} = 70^\circ\text{C, dus } T = 70^\circ\text{C.} \\ \text{Dus } \frac{dT}{dt} = c(T - 20) \text{ op } [0, 10] \text{ wordt } c(70 - 20) &= -4. \text{ Dit geeft } 50c = -4, \text{ dus } c = \frac{-4}{50} = -0,08. \\ \text{c Op } [10, 20] \text{ is } \frac{dT}{dt} = -1,6^\circ\text{C/minuut en } T = \frac{50 + 34}{2} &= 42^\circ\text{C.} \\ \text{Dit geeft } c(42 - 20) = -1,6, \text{ dus } c = \frac{-1,6}{22} \approx -0,073. \\ \text{Op } [20, 30] \text{ is } \frac{dT}{dt} = -0,8^\circ\text{C/minuut en } T = \frac{34 + 26}{2} &= 30^\circ\text{C.} \\ \text{Dit geeft } c(30 - 20) = -0,8, \text{ dus } c = \frac{-0,8}{10} = -0,08. \\ \text{d } c \approx \frac{-0,08 + -0,073 + -0,08}{3} \approx -0,078 \\ c \approx -0,078 \text{ geeft } \frac{dT}{dt} \approx -0,078(T - 20) \text{ ofwel } \frac{dT}{dt} &\approx -0,078T + 1,55. \\ \text{Dus de formule } \frac{dT}{dt} = -0,078T + 1,55 \text{ beschrijft goed het afkoelingsproces van het kopje thee.} \end{aligned}$$

Bladzijde 111

$$\begin{aligned} \text{2 a Als je een andere tijdseenheid neemt dan ziet het model er anders uit omdat } c &\text{ afhangt van de gekozen tijdseenheid.} \\ \text{b } c \approx 60 \cdot \frac{-0,6}{182} \approx -0,198 \\ \text{3 a } \frac{dT}{dt} &= c(T - 12) \\ \text{Op } t = 5 \text{ is } T \approx \frac{100 + 194}{2} &= 97^\circ\text{C en } \frac{dT}{dt} \approx \frac{94 - 100}{10} = -0,6^\circ\text{C/s.} \\ \text{Dit geeft } c \cdot (97 - 12) \approx -0,6, \text{ dus } c \approx \frac{-0,6}{85} &\approx -0,0071. \\ \text{Dus } \frac{dT}{dt} = -0,0071(T - 12) \text{ met } T \text{ in } ^\circ\text{C en } t \text{ in seconden.} \end{aligned}$$

b $c \approx 60 \cdot \frac{-0,6}{85} \approx -0,424$

Dus $\frac{dT}{dt} = -0,424(T - 12)$ met T in °C en t in minuten.

4 a $\frac{dT}{dt} = c(T - 21)$

Op $t = 2\frac{1}{2}$ is $T \approx \frac{7 + 9,8}{2} = 8,4$ °C en $\frac{dT}{dt} \approx \frac{9,8 - 7}{5} = 0,56$ °C/min.

Dit geeft $c \cdot (8,4 - 21) \approx 0,56$, dus $c \approx \frac{0,56}{-12,6} \approx -0,044$.

Dus $\frac{dT}{dt} = -0,0044(T - 21)$ met T in °C en t in minuten.

b Op $t = 7\frac{1}{2}$ is $T \approx \frac{9,8 + 12,1}{2} = 10,95$ °C en $\frac{dT}{dt} \approx \frac{12,1 - 9,8}{5} = 0,46$ °C/min.

Dit geeft $c \cdot (10,95 - 21) \approx 0,46$, dus $c \approx \frac{0,46}{-10,05} \approx -0,046$.

Op $t = 25$ is $T \approx \frac{15,3 + 17,4}{2} = 16,35$ °C en $\frac{dT}{dt} \approx \frac{17,4 - 15,3}{10} = 0,21$ °C/min.

Dit geeft $c \cdot (16,35 - 21) \approx 0,21$, dus $c \approx \frac{0,21}{-4,65} \approx -0,045$.

Op $t = 45$ is $T \approx \frac{17,4 + 20,1}{2} = 18,75$ °C en $\frac{dT}{dt} \approx \frac{20,1 - 17,4}{30} = 0,09$ °C/min.

Dit geeft $c \cdot (18,75 - 21) \approx 0,09$, dus $c \approx \frac{0,09}{-2,25} = -0,040$.

5 De groeisnelheid is evenredig met het aantal bacteriën, dus $\frac{dN}{dt} = c \cdot N$.

Op $t = \frac{1}{120}$ is $N \approx 10^9 + \frac{4 \cdot 10^6}{2} = 1,002 \cdot 10^9$ en $\frac{dN}{dt} = \frac{4 \cdot 10^6}{\frac{1}{60}} = 2,4 \cdot 10^8$.

Dit geeft $c \cdot 1,002 \cdot 10^9 \approx 2,4 \cdot 10^8$, dus $c \approx \frac{2,4 \cdot 10^8}{1,002 \cdot 10^9} \approx 0,24$.

Dus $\frac{dN}{dt} = 0,24N$ met N het aantal bacteriën en t in uren.

Bladzijde 112

6 a Op $t = 0$ is $Z = 5000$ gram.

Per seconde komt er $0,5 \cdot 1 = 0,5$ gram bij en stroomt er $0,5 \cdot \frac{Z}{1000} = 0,0005Z$ gram weg.

Dus $\frac{dZ}{dt} = 0,5 - 0,0005Z$ met Z in gram en t in seconden.

7 a De verandering van de snelheid is evenredig met de snelheid, dus $\frac{dv}{dt} = c \cdot v$.

Op $t = 13$ is $v \approx \frac{30 + 24}{2} = 27$ m/s en $\frac{dv}{dt} \approx \frac{24 - 30}{6} = -1$ m/s².

Dit geeft $c \cdot 27 \approx -1$, dus $c \approx \frac{-1}{27} \approx -0,037$.

Dus $\frac{dv}{dt} = -0,037v$ met v in m/s en t in seconden.

b $c \approx 60 \cdot \frac{-1}{27} \approx -2,22$

Dus $\frac{dv}{dt} = -2,22v$ met v in m/s en t in minuten.

$$\begin{aligned} \text{8 a } H = 300 \text{ en } \frac{dH}{dt} = 0 \text{ geeft } 300a \left(1 - \frac{300}{b}\right) &= 0 \\ 300a &= 0 \vee 1 - \frac{300}{b} = 0 \\ a &= 0 \vee \frac{300}{b} = 1 \\ a &= 0 \vee b = 300 \end{aligned}$$

$a = 0$ voldoet niet, omdat in dat geval altijd geldt $\frac{dH}{dt} = 0$ en de zonnebloemen dan niet groeien.

Dus $a \neq 0$ en $b = 300$.

$a < 0$ voldoet ook niet, omdat dan voor elke H geldt $\frac{dH}{dt} < 0$ en de zonnebloemen dan niet groeien maar korter worden.

Dus voor $a > 0$ en $b = 300$ geldt dat de maximale hoogte van de zonnebloemen 300 cm is.

$$\begin{aligned} \text{b } 10a \left(1 - \frac{10}{b}\right) &= 0,5 \text{ geeft } a \left(10 - \frac{100}{b}\right) = 0,5 \text{ ofwel } a = \frac{0,5}{10 - \frac{100}{b}} \\ 50a \left(1 - \frac{50}{b}\right) &= 3 \text{ geeft } a \left(50 - \frac{2500}{b}\right) = 3 \text{ ofwel } a = \frac{3}{50 - \frac{2500}{b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Gelijkstellen geeft } \frac{0,5}{10 - \frac{100}{b}} &= \frac{3}{50 - \frac{2500}{b}} \\ 0,5 \left(50 - \frac{2500}{b}\right) &= 3 \left(10 - \frac{100}{b}\right) \\ 25 - \frac{1250}{b} &= 30 - \frac{300}{b} \\ -5 &= \frac{950}{b} \\ b &= \frac{950}{-5} = -190 \end{aligned}$$

$$b = -190 \text{ geeft } a = \frac{0,5}{10 - \frac{100}{-190}} = 0,0475$$

Dus $a = 0,0475$ en $b = -190$.

$$\text{9 a Op topsnelheid } 36 \text{ km/uur} = 10 \text{ m/s is } F_W = F_V = 50 \text{ N.}$$

$$\text{Dit geeft } c \cdot 10^2 = 50, \text{ dus } c = \frac{50}{10^2} = 0,5.$$

$$\text{b De snelheid is } 24 \text{ km/uur} = 6\frac{2}{3} \text{ m/s, dus } F_W = 0,5 \cdot \left(6\frac{2}{3}\right)^2 \approx 22,2 \text{ N.}$$

$$\text{Dit geeft } F_R = F_V - F_W = 50 - 22,2 = 27,8 \text{ N.}$$

Bladzijde 114

$$\text{10 De grenswaarde wordt bereikt als } F_R = 0, \text{ dus als } F_{\text{motor}} = F_W.$$

$$\text{Dit geeft } 10v^2 = 120$$

$$v^2 = 12$$

$$v = \sqrt{12} \approx 3,5$$

$$\text{11 a Resulterende kracht is } F_R = F_Z - F_W = 882 - \frac{1}{4}v^2.$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{882 - \frac{1}{4}v^2}{90} = 9\frac{4}{5} - \frac{1}{360}v^2 \text{ met } v \text{ in m/s en } t \text{ in seconden.}$$

$$\text{b } \frac{dv}{dt} = 0 \text{ geeft } 9\frac{4}{5} - \frac{1}{360}v^2 = 0$$

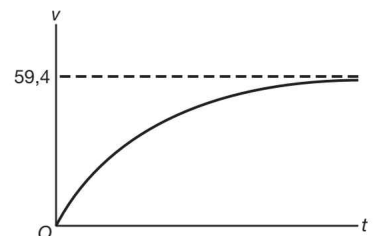
$$\frac{1}{360}v^2 = 9\frac{4}{5}$$

$$v^2 = 3528$$

$$v = \sqrt{3528} \approx 59,4$$

De asymptoot is de lijn $v = \sqrt{3528}$.

$\frac{dv}{dt} > 0$ voor $v < \sqrt{3528}$, dus de grafiek van v met $v(0) = 0$ is stijgend.



- 12 a** Resulterende kracht is $F_R = F_{\text{motor}} - F_L - F_W = 50 - \frac{1}{4}v^2 - 4v$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{50 - \frac{1}{4}v^2 - 4v}{125} = \frac{2}{5} - \frac{1}{500}v^2 - \frac{4}{125}v \text{ met } v \text{ in m/s en } t \text{ in seconden.}$$

b $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $\frac{2}{5} - \frac{1}{500}v^2 - \frac{4}{125}v$

$$v^2 + 16v - 200 = 0$$

$$D = 1056, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{1056} = 4\sqrt{66}$$

$$v = \frac{-16 + 4\sqrt{66}}{2} = 8,24... \text{ m/s}$$

Dat is $3,6 \cdot 8,24... \approx 29,7$ km/uur.

Dus deze snorfiets kan harder dan de wettelijke toegestane snelheid van 25 km/uur.

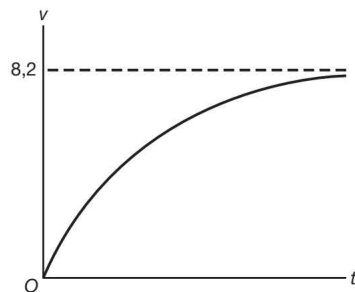
c $v = 5$ m/s geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{2}{5} - \frac{1}{500} \cdot 5^2 - \frac{4}{125} \cdot 5 = 0,19 \text{ m/s}^2$

Dus de versnelling van de snorfiets is $0,19 \text{ m/s}^2$ op het moment dat de snelheid 5 m/s is.

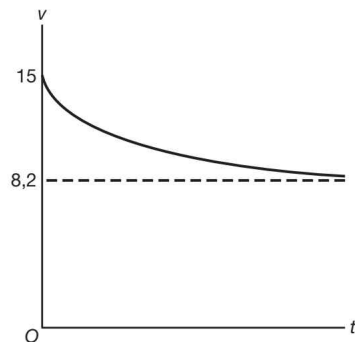
d $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $v = \frac{-16 + 4\sqrt{66}}{2} = -8 + 2\sqrt{66} \approx 8,2 \text{ m/s}$

De asymptoot is de lijn $v = -8 + 2\sqrt{66}$.

$\frac{dv}{dt} > 0$ voor $v < -8 + 2\sqrt{66}$, dus de grafiek van v met $v(0) = 0$ is stijgend.



e $\frac{dv}{dt} < 0$ voor $v > -8 + 2\sqrt{66}$, dus de grafiek van v met $v(0) = 15$ is dalend.



- 13 a** Resulterende kracht is $F_R = F_{\text{motor}} - F_W = 600\,000 - 2670v^2$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{600\,000 - 2670v^2}{3\,500\,000} = \frac{6}{35} - \frac{267}{350\,000}v^2 \text{ met } v \text{ in m/s en } t \text{ in seconden.}$$

b $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $\frac{6}{35} - \frac{267}{350\,000}v^2 = 0$

$$\frac{267}{350\,000}v^2 = \frac{6}{35}$$

$$v^2 = \frac{20\,000}{89}$$

$$v = \sqrt{\frac{20\,000}{89}} \approx 15,0$$

Dus de formule van de asymptoot is $v = 15,0$.

Bladzijde 115

- 14 a** Resulterende kracht is $F_R = -F_{\text{motor}} - F_W = -600\,000 - 2670v^2$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{-600\,000 - 2670v^2}{3\,500\,000} = -\frac{6}{35} - \frac{267}{350\,000}v^2 \text{ met } v \text{ in m/s en } t \text{ in seconden.}$$

- b** Resulterende kracht is $F_R = -F_{\text{motor}} + F_W = -600\,000 + 2 \cdot 2670v^2 = -600\,000 + 5340v^2$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{-600\,000 + 5340v^2}{3\,500\,000} = -\frac{6}{35} + \frac{267}{175\,000}v^2 \text{ met } v \text{ in m/s en } t \text{ in seconden.}$$

- c** Bij vooruit varen is de formule van de asymptoot $v = 15,0$ (zie opgave 13b).

Bij afremmen neemt de snelheid af tot 0, daarna vaart het schip met een toenemende snelheid achteruit, waarbij de snelheid op een bepaald moment een grenswaarde bereikt.

Bij achteruit varen geldt $v < 0$ en $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $-\frac{6}{35} + \frac{267}{175\,000}v^2 = 0$

$$\frac{267}{175\,000}v^2 = \frac{6}{35}$$

$$v^2 = \frac{10\,000}{89}$$

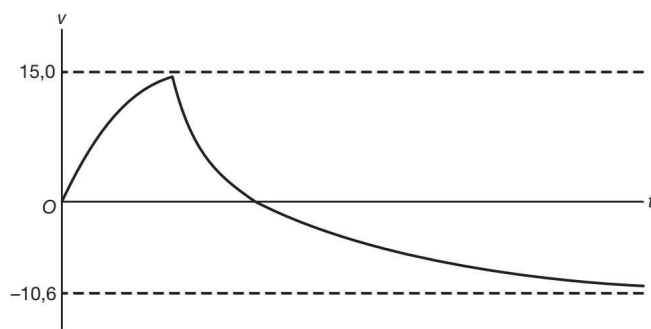
$$v = -\sqrt{\frac{10\,000}{89}} \approx -10,6$$

De formule van de asymptoot is $v = -10,6$.

Bij vooruit varen geldt $\frac{dv}{dt} > 0$ voor $0 < v < 15,0$, dus de grafiek van v met $v(0) = 0$ is stijgend.

Bij afremmen geldt $\frac{dv}{dt} < 0$ voor $v \geq 0$, dus de grafiek van v is dalend tot het fregat stil ligt en dus geldt $v = 0$.

Bij achteruit varen geldt $\frac{dv}{dt} < 0$ voor $-10,6 < v < 0$, dus de grafiek van v is dalend vanaf het moment dat het fregat achteruit begint te varen.

**15.2 Differentiaalvergelijkingen****Bladzijde 117**

- 15 a** In $(0, 2)$ is $\frac{dy}{dt} = -2 + 0 - 3 = -5$.

$$\text{In } (4, 1) \text{ is } \frac{dy}{dt} = -1 + 4 - 3 = 0.$$

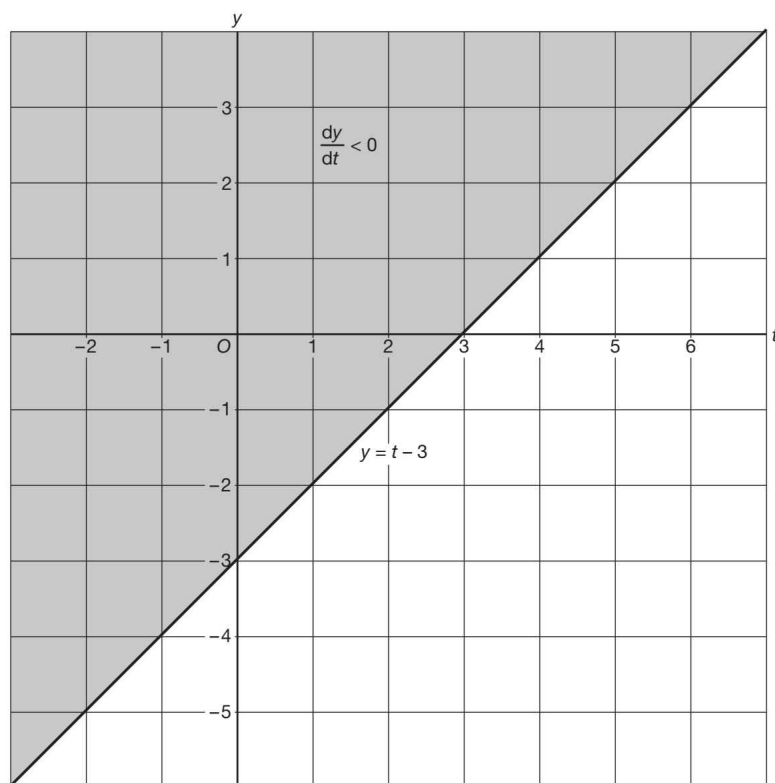
$$\text{In } (-2, 2) \text{ is } \frac{dy}{dt} = -2 - 2 - 3 = -7.$$

$$\text{In } (4, -1) \text{ is } \frac{dy}{dt} = 1 + 4 - 3 = 2.$$

- b,c** $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft $-y + t - 3 = 0$ ofwel $y = t - 3$.

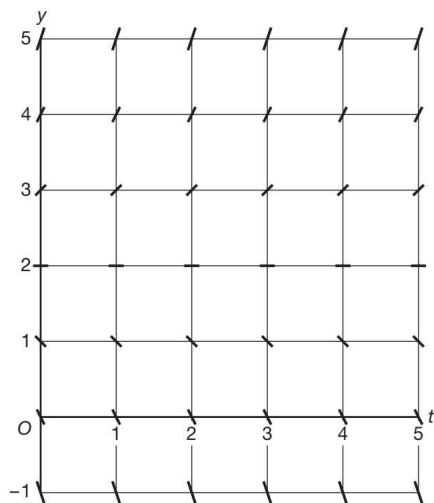
Lijn door $(0, -3)$ en $(3, 0)$.

Voor het punt $(0, 0)$ geldt $\frac{dy}{dt} = -3 < 0$, dus voor alle punten in het halfvlak waarin $(0, 0)$ ligt geldt $\frac{dy}{dt} < 0$.

**Bladzijde 119**

16 a

y	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{dy}{dt}$	-3	-2	-1	0	1	2	3



b Stel $l: y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt} \right]_{(2,3)} = 3 - 2 = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = t + b \\ \text{door } (2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $l: y = t + 1$.

c $\frac{dy}{dt} = 3$ geeft $y - 2 = 3$, dus $y = 5$.

$$y = 5 \text{ geeft } 3t - 7 = 5$$

$$3t = 12$$

$$t = 4$$

Dus $A(4, 5)$.

- 17 In het lijnelementenveld zie je:

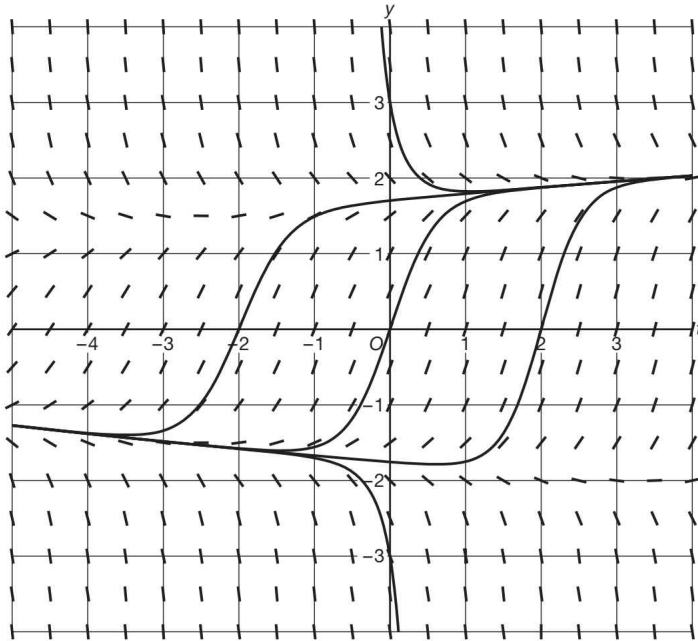
$$\frac{dy}{dt} > 0 \text{ voor } y > 4, \text{ dus II en IV vallen af}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \text{ voor } y = 0, \text{ dus I valt af.}$$

Dus het lijnelementenveld hoort bij III.

Bladzijde 120

- 18 a



b $\frac{dy}{dt} = 3$ geeft $\frac{3}{10}t - y^2 + 3 = 3$

$$\frac{3}{10}t - y^2 = 0$$

Substitutie van $y = 3t$ in $\frac{3}{10}t - y^2 = 0$ geeft $\frac{3}{10}t - (3t)^2 = 0$

$$\frac{3}{10}t - 9t^2 = 0.$$

$$t\left(\frac{3}{10} - 9t\right) = 0$$

$$t = 0 \vee 9t = \frac{3}{10}$$

$$t = 0 \vee t = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

$$t = \frac{1}{30} \text{ geeft } y = 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$$

Dus $A\left(\frac{1}{30}, \frac{1}{10}\right)$.

c $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft $\frac{3}{10}t - y^2 + 3 = 0$

$$t = 10 \text{ geeft } \frac{3}{10} \cdot 10 - y^2 + 3 = 0$$

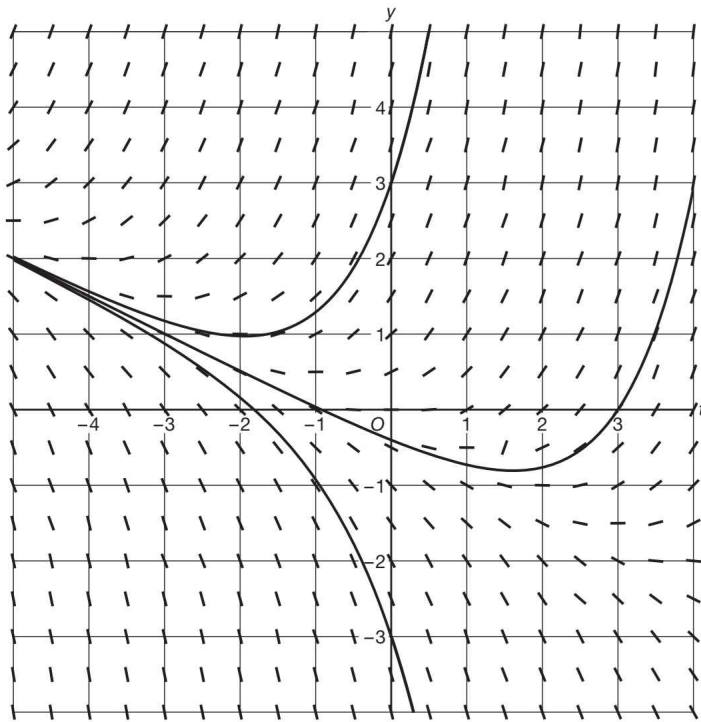
$$3 - y^2 + 3 = 0$$

$$y^2 = 6$$

$$y = \sqrt{6} \vee y = -\sqrt{6}$$

d $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft $\frac{3}{10}t - y^2 + 3 = 0$
 $y^2 = \frac{3}{10}t + 3$

Dus de kromme met vergelijking $y^2 = \frac{3}{10}t + 3$ gaat door de toppen van de oplossingskrommen.

19 a

b $y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$

c $\frac{dy}{dt} = 2$ geeft $\frac{1}{2}t + y = 2$

Voor het raakpunt A geldt $y = 2t + 7$ en $\frac{1}{2}t + y = 2$.

Dit geeft $\frac{1}{2}t + 2t + 7 = 2$

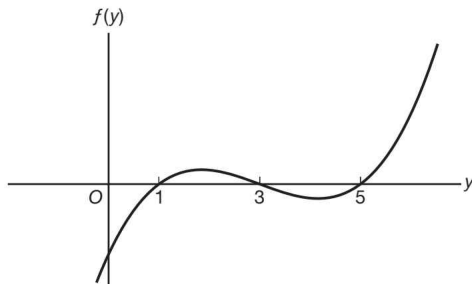
$$2\frac{1}{2}t = -5$$

$$t = -2$$

$t = -2$ geeft $y = -4 + 7 = 3$

Dus $A(-2, 3)$.

20 a Voer in $y_1 = (y-1)(y-3)(y-5)$ en plot de grafiek.



b De grafiek van $f(y) = (y-1)(y-3)(y-5)$ ligt boven de y -as voor $1 < y < 3$, dat wil zeggen dat voor elke waarde van y met $1 < y < 3$ de bijbehorende functiewaarde groter is dan nul.

Omdat $f(y) = \frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5)$, dus $\frac{dy}{dt} = f(y)$, is $\frac{dy}{dt} > 0$ voor alle punten (t, y) met $1 < y < 3$.

c Aflezen uit de schets van vraag a geeft $\frac{dy}{dt} < 0$ voor $y < 1$ en voor $3 < y < 5$.

d Voor $y = 3$ geldt $\frac{dy}{dt} = 0$ en $f(y) = 0$, dus $y = 3$ voldoet aan $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5)$.

Dus de lijn $y = 3$ is een oplossingskromme.

Bladzijde 123

21 Algemeen geldt: als de grafiek van de afgeleide $\frac{dy}{dt}$ stijgend is, dan is de grafiek van y toenemend stijgend.

Gegeven is dat $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5)$ stijgend is voor $y > 5$.

Dus in elk punt (t, y) met $y > 5$ is $\frac{dy}{dt}$ stijgend en dus de bijbehorende oplossingskromme y toenemend stijgend.

22 a $f_4(y) = 0$ geeft $y^2 - 4y + 3$
 $(y - 1)(y - 3) = 0$
 $y = 1 \vee y = 3$

De lijn $y = 1$ is horizontale asymptoot van de oplossingskrommen met $1 < y(0) < 3 \vee y(0) < 1$.

b De oplossingskrommen zijn stijgend als $f_p(y) > 0$ voor elke waarde van y .

Hieruit volgt dat voor de discriminant van $\frac{dy}{dt} = y^2 - py + 3$ geldt $D < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} D = p^2 - 12 \\ D < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 12 < 0 \\ p^2 < 12 \\ -\sqrt{12} < p < \sqrt{12} \\ -2\sqrt{3} < p < 2\sqrt{3} \end{array}$$

Dus voor $-2\sqrt{3} < p < 2\sqrt{3}$ zijn alle oplossingskrommen stijgend.

c $f_p(y) = 0$ voor $y = 4$ geeft $16 - 4p + 3 = 0$

$$-4p = -19$$

$$p = 4\frac{3}{4}$$

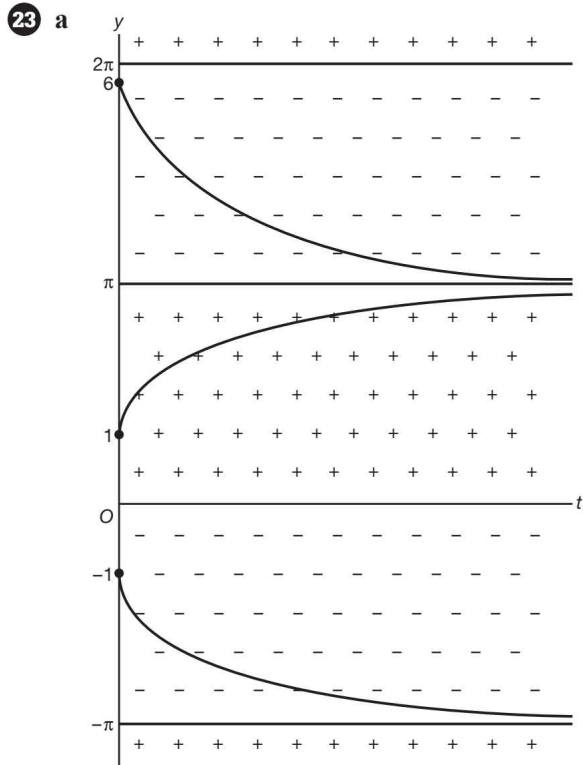
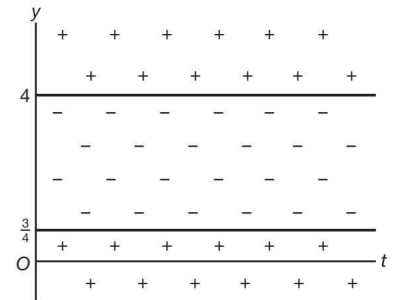
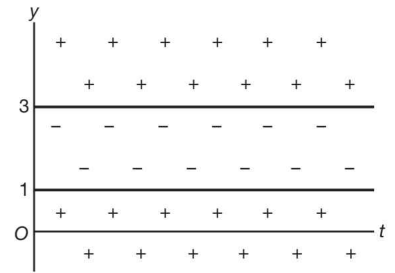
$$f_4(y) = 0 \text{ geeft } y^2 - 4\frac{3}{4}y + 3 = 0$$

$$(y - \frac{3}{4})(y - 4) = 0$$

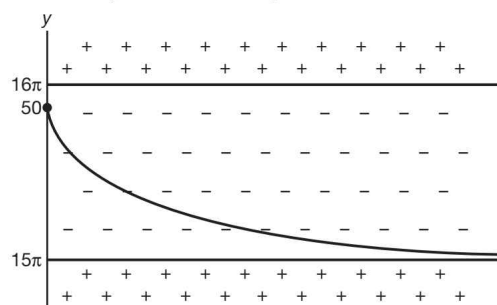
$$y = \frac{3}{4} \vee y = 4$$

Voor de oplossingskrommen die gaan door de punten (t, y)

met $\frac{3}{4} < y < 4 \vee y < \frac{3}{4}$ is de lijn $y = 4$ horizontale asymptoot als $p = 4\frac{3}{4}$.



b $16\pi \approx 50,3$ en $15\pi \approx 47,1$



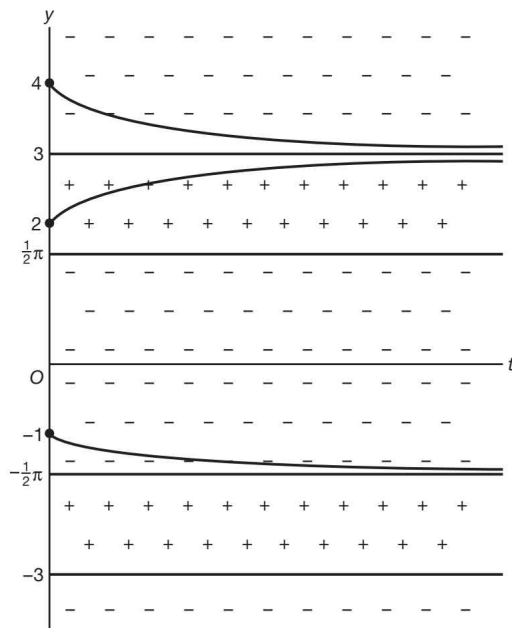
De asymptoot is de lijn $y = 15\pi$.

c Stel $l: y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt} \right]_{(4, \frac{1}{6}\pi)} = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}t + b \\ \text{door } (4, \frac{1}{6}\pi) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 4 + b = \frac{1}{6}\pi \\ b = \frac{1}{6}\pi - 2 \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}\pi - 2$.

24 a



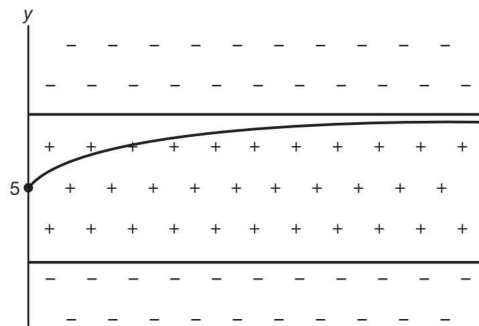
b De lijn $y = -\frac{1}{2}\pi$ is asymptoot van de oplossingskrommen met $-3 < y(0) < -\frac{1}{2}\pi \vee -\frac{1}{2}\pi < y(0) < \frac{1}{2}\pi$.

c Stel $k: y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt} \right]_{(6, 0)} = -9 \cos(0) = -9$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -9t + b \\ \text{door } (6, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -9 \cdot 6 + b = 0 \\ b = 54 \end{array}$$

Dus $k: y = -9t + 54$.

25 a Het tekenoverzicht van de differentiaalvergelijking moet eruit zien zoals hieronder.



Dus moet $f_p(5) > 0$ zijn.

$$f_p(5) > 0 \text{ geeft } -25 + 5p - 3 > 0$$

$$5p > 28$$

$$p > 5\frac{3}{5}$$

b $rc_k = \left[\frac{dy}{dt} \right]_{(-1\frac{1}{2}, 1)} = 2$ geeft $-1 + p - 3 = 2$, dus $p = 6$.

c De oplossingskrommen zijn dalend als $f_p(y) < 0$ voor elke waarde van y . Hieruit volgt dat voor de discriminant van $\frac{dy}{dt} = -y^2 + py - 3$ geldt $D < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} D = p^2 - 12 \\ D < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 - 12 < 0 \\ p^2 < 12 \end{array}$$

$$-\sqrt{12} < p < \sqrt{12}$$

$$-2\sqrt{3} < p < 2\sqrt{3}$$

Dus voor $-2\sqrt{3} < p < 2\sqrt{3}$ zijn alle oplossingskrommen dalend.

15.3 Oplossingen van differentiaalvergelijkingen

Bladzijde 125

26 a $a - 2 = 5 \wedge 2b - 1 = 3$

$$a = 7 \wedge 2b = 4$$

$$a = 7 \wedge b = 2$$

b $a = 2 \wedge a + b = 3$

$$a = 2 \wedge 2 + b = 3$$

$$a = 2 \wedge b = 1$$

c $a = 2 \wedge a^2 + b = 3$

$$a = 2 \wedge 4 + b = 3$$

$$a = 2 \wedge b = -1$$

d $a^2 = 4 \wedge a - 2b = 6$

$$(a = 2 \vee a = -2) \wedge a - 2b = 6$$

$$a = 2 \text{ geeft } 2 - 2b = 6 \text{ ofwel } -2b = 4, \text{ dus } b = -2.$$

$$a = -2 \text{ geeft } -2 - 2b = 6 \text{ ofwel } -2b = 8, \text{ dus } b = -4.$$

$$\text{Dus } (a = 2 \wedge b = -2) \vee (a = -2 \wedge b = -4).$$

e $a^2 - a - 5 = 1 \wedge a + b = 6$

$$a^2 - a - 6 = 0 \wedge a + b = 6$$

$$(a + 2)(a - 3) = 0 \wedge a + b = 6$$

$$(a = -2 \vee a = 3) \wedge a + b = 6$$

$$a = -2 \text{ geeft } -2 + b = 6, \text{ dus } b = 8.$$

$$a = 3 \text{ geeft } 3 + b = 6, \text{ dus } b = 3.$$

$$\text{Dus } (a = -2 \wedge b = 8) \vee (a = 3 \wedge b = 3).$$

27 a Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = 2y + t - 3$ geeft

$$a = 2(at + b) + t - 3$$

$$a = 2at + 2b + t - 3$$

$$a = (2a + 1)t + 2b - 3$$

b $2a + 1 = 0 \wedge a = 2b - 3$

$$2a = -1 \wedge a = 2b - 3$$

$$a = -\frac{1}{2} \wedge -\frac{1}{2} = 2b - 3$$

$$a = -\frac{1}{2} \wedge -2b = -2\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2} \wedge b = 1\frac{1}{4}$$

c $y(t) = e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}$ geeft $\frac{dy}{dt} = 2e^{2t} - \frac{1}{2}$

$$\text{Substitutie van } y(t) = e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4} \text{ en } \frac{dy}{dt} = 2e^{2t} - \frac{1}{2} \text{ in } \frac{dy}{dt} = 2y + t - 3 \text{ geeft}$$

$$2e^{2t} - \frac{1}{2} = 2(e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}) + t - 3$$

$$2e^{2t} - \frac{1}{2} = 2e^{2t} - t + 2\frac{1}{2} + t - 3$$

$$2e^{2t} - \frac{1}{2} = 2e^{2t} - \frac{1}{2}$$

De substitutie levert een kloppende vergelijking op voor elke waarde van t .

Bladzijde 127

28 $y_1(t) = \frac{36}{t^2} = 36t^{-2}$ geeft $\frac{dy_1}{dt} = -72t^{-3} = -\frac{72}{t^3}$

$$y_2(t) = 3e^t + t^2 + 1 \text{ geeft } \frac{dy_2}{dt} = 3e^t + 2t$$

$$y_3(t) = -e^t - 1 \text{ geeft } \frac{dy_3}{dt} = -e^t$$

y_1 lijkt een oplossing van D_3 te zijn.

$$\text{Substitutie van } y_1 \text{ in } D_3 \text{ geeft } -\frac{72}{t^3} = \frac{-2 \cdot \frac{36}{t^2}}{t}$$

$$-\frac{72}{t^3} = \frac{-72}{t^3}$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t ($t \neq 0$), dus y_1 is een oplossing van D_3 .

y_2 lijkt een oplossing van D_1 te zijn.

Substitutie van y_2 in D_1 geeft $3e^t + 2t = 3e^t + t^2 + 1 - t^2 + 2t - 1$

$$3e^t + 2t = 3e^t + 2t$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus y_2 is een oplossing van D_1 .

y_3 lijkt een oplossing van D_2 te zijn.

Substitutie van y_3 in D_2 geeft $-e^t = -e^t - 1 + 1$

$$-e^t = -e^t$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus y_3 is een oplossing van D_2 .

- 29** Stel $y = at + b$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = t^2 - ty + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}$ geeft

$$a = t^2 - t(at + b) + \frac{1}{4}(at + b)^2 - \frac{1}{4}$$

$$a = t^2 - at^2 - bt + \frac{1}{4}(a^2t^2 + 2abt + b^2) - \frac{1}{4}$$

$$a = t^2 - at^2 - bt + \frac{1}{4}a^2t^2 + \frac{1}{2}abt + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}$$

$$a = (\frac{1}{4}a^2 - a + 1)t^2 + (\frac{1}{2}ab - b)t + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$\frac{1}{4}a^2 - a + 1 = 0 \wedge \frac{1}{2}ab - b = 0 \wedge \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4} = a$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \wedge ab - 2b = 0 \wedge b^2 = 4a + 1$$

$$(a - 2)^2 = 0 \wedge ab - 2b = 0 \wedge b^2 = 4a + 1$$

$$a = 2 \wedge 2b - 2b = 0 \wedge b^2 = 9$$

$$(a = 2 \wedge b = 3) \vee (a = 2 \wedge b = -3)$$

Hiermee is aangetoond dat de differentiaalvergelijking twee lineaire formules als oplossing heeft.

Deze formules zijn $y = 2t + 3$ en $y = 2t - 3$.

- 30 a** Stel $y = b$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Substitutie van $y = b$ en $\frac{dy}{dt} = 0$ in $\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{4}y^2$ geeft

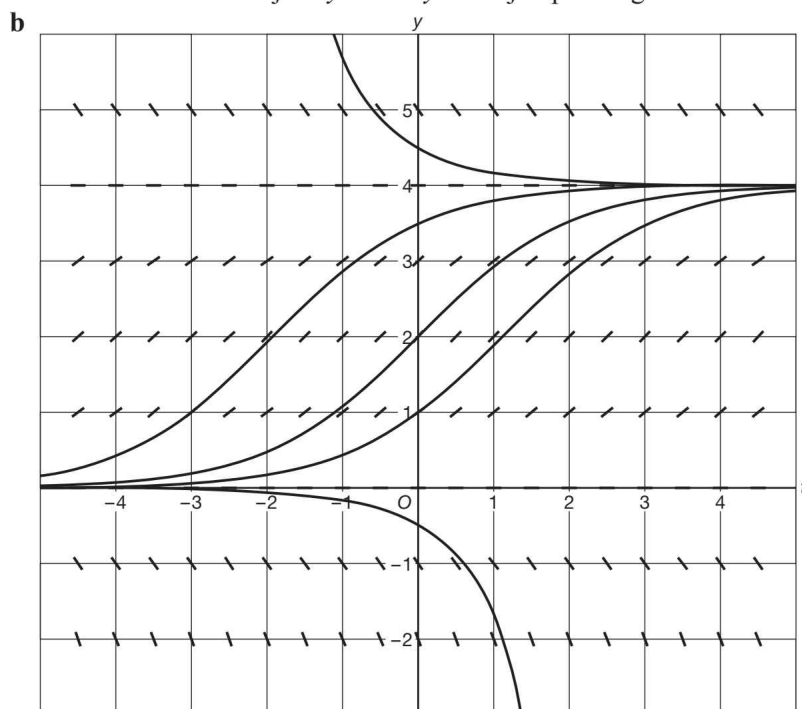
$$0 = b - \frac{1}{4}b^2$$

$$b(1 - \frac{1}{4}b) = 0$$

$$b = 0 \vee \frac{1}{4}b = 1$$

$$b = 0 \vee b = 4$$

Dus de horizontale lijnen $y = 0$ en $y = 4$ zijn oplossingskrommen van de differentiaalvergelijking.



$$c \quad y(t) = \frac{4}{1+e^{-t}} \text{ geeft } \frac{dy}{dt} = \frac{(1+e^{-t}) \cdot 0 - 4 \cdot -e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

$$\text{Substitutie van } y = \frac{4}{1+e^{-t}} \text{ en } \frac{dy}{dt} = \frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \text{ in } \frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{4}y^2 \text{ geeft}$$

$$\frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4}{1+e^{-t}} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{1+e^{-t}} \right)^2$$

$$\frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4}{1+e^{-t}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{(1+e^{-t})^2}$$

$$\frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4(1+e^{-t})}{(1+e^{-t})^2} - \frac{4}{(1+e^{-t})^2}$$

$$\frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4+4e^{-t}-4}{(1+e^{-t})^2}$$

$$\frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{4e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus $y(t) = \frac{4}{1+e^{-t}}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Bladzijde 128

- 31 a Stel $y = at + b$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

$$\text{Substitutie van } y = at + b \text{ en } \frac{dy}{dt} = a \text{ in } \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t + y + 1 \text{ geeft}$$

$$a = \frac{1}{2}t + at + b + 1$$

$$a = \left(\frac{1}{2} + a\right)t + b + 1$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$\frac{1}{2} + a = 0 \wedge a = b + 1$$

$$a = -\frac{1}{2} \wedge -\frac{1}{2} = b + 1$$

$$a = -\frac{1}{2} \wedge b = -1\frac{1}{2}$$

Hiermee is aangetoond dat de differentiaalvergelijking een lineaire formule als oplossing heeft.

Deze formule is $y = -\frac{1}{2}t - 1\frac{1}{2}$.

- b $y = c \cdot e^t - \frac{1}{2}t - 1\frac{1}{2}$ geeft $\frac{dy}{dt} = c \cdot e^t - \frac{1}{2}$

$$\text{Substitutie van } y = c \cdot e^t - \frac{1}{2}t - 1\frac{1}{2} \text{ en } \frac{dy}{dt} = c \cdot e^t - \frac{1}{2} \text{ in } \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t + y + 1 \text{ geeft}$$

$$c \cdot e^t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t + c \cdot e^t - \frac{1}{2}t - 1\frac{1}{2} + 1$$

$$c \cdot e^t - \frac{1}{2} = c \cdot e^t - \frac{1}{2}$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus $y(t) = c \cdot e^t - \frac{1}{2}t - 1\frac{1}{2}$ is oplossing van de differentiaalvergelijking.

- c De t -as raken, dus $y = 0 \wedge \frac{dy}{dt} = 0$

$$y = 0 \wedge \frac{1}{2}t + y + 1 = 0$$

$$y = 0 \wedge \frac{1}{2}t + 1 = 0$$

$$y = 0 \wedge t = -2$$

$$t = -2 \text{ en } y = 0 \text{ invullen in } y = c \cdot e^t - \frac{1}{2}t - 1\frac{1}{2} \text{ geeft } c \cdot e^{-2} - \frac{1}{2} \cdot -2 - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$c \cdot e^{-2} + 1 - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$c \cdot e^{-2} = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{2}e^2$$

Dus de grafiek raakt de t -as voor $c = \frac{1}{2}e^2$.

- 32 a Het punt $M(2, -1)$ lijkt het middelpunt van de cirkels te zijn.

- b Differentiëren naar t geeft $2(t-2) + 2(y+1) \cdot y' = 0$

$$2(y+1) \cdot y' = -2(t-2)$$

$$y' = \frac{-2(t-2)}{2(y+1)} = \frac{2-t}{y+1}$$

Dus de cirkel $(t-2)^2 + (y+1)^2 = 18$ voldoet aan de differentiaalvergelijking en dus is de cirkel een oplossingskromme.

- c De cirkel met middelpunt $(2, -1)$ en straal r heeft de vergelijking $(t - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$.

Door $(0, 6)$ geeft $(0 - 2)^2 + (6 + 1)^2 = r^2$

$$4 + 49 = r^2$$

$$r^2 = 53$$

Dus de vergelijking van de cirkel is $(t - 2)^2 + (y + 1)^2 = 53$.

Differentiëren naar t geeft $2(t - 2) + 2(y + 1) \cdot y' = 0$

$$2(y + 1) \cdot y' = -2(t - 2)$$

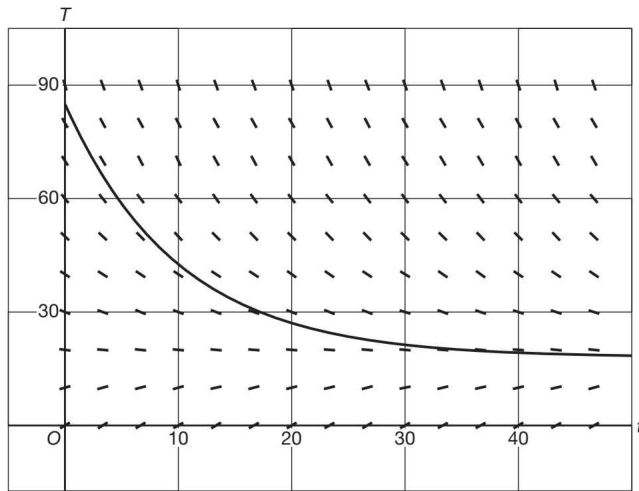
$$y' = \frac{-2(t - 2)}{2(y + 1)} = \frac{2 - t}{y + 1}$$

Dus de cirkel $(t - 2)^2 + (y + 1)^2 = 53$ voldoet aan de differentiaalvergelijking en dus is de cirkel een oplossingskromme.

Bladzijde 129

- 33 a Als T een dalende functie is, dan is a groter dan de omgevingstemperatuur, dus $a > 18$

b



- c Substitutie van $T = 18 + 67e^{-\frac{1}{10}t}$ en $\frac{dT}{dt} = -6,7e^{-\frac{1}{10}t}$ in $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{10}(T - 18)$ geeft

$$-6,7e^{-\frac{1}{10}t} = -\frac{1}{10}(18 + 67e^{-\frac{1}{10}t} - 18)$$

$$-6,7e^{-\frac{1}{10}t} = -\frac{1}{10} \cdot 67e^{-\frac{1}{10}t}$$

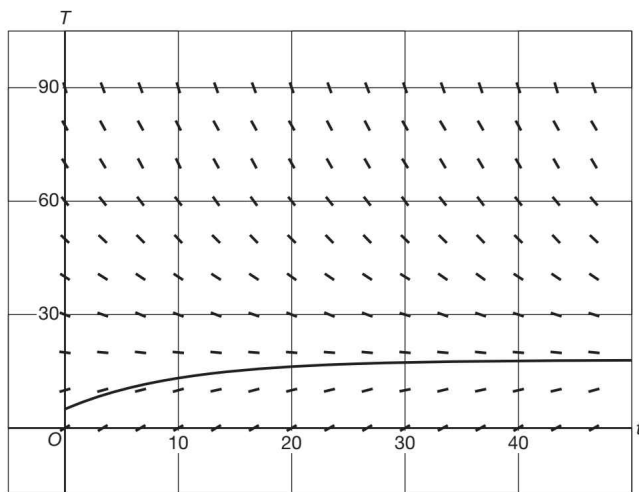
$$-6,7e^{-\frac{1}{10}t} = -6,7e^{-\frac{1}{10}t}$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus $T = 18 + 67e^{-\frac{1}{10}t}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

$T(0) = 18 + 67e^{-\frac{1}{10} \cdot 0} = 18 + 67 = 85$, dus de beginwaarde klopt ook.

Dus de formule $T = 18 + 67e^{-\frac{1}{10}t}$ hoort bij het dynamische model van vraag b.

d



- e De grenswaarde is 18 dus $p = 18$.

Dit geeft $T = 18 + q \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$.

Uit $T(0) = 5$ volgt $18 + q \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot 0} = 5$

$$18 + q = 5$$

$$q = -13$$

Dus $p = 18$ en $q = -13$.

- 34 a,b** Substitutie van $y_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5$ en $\frac{dy_1}{dt} = 3t$ in

D_1 geeft $3t = 3t$ en dat klopt voor elke waarde van t

D_2 geeft $3t = 3 \cdot (\frac{1}{2}t^2 + 5)$ ofwel $3t = \frac{3}{2}t^2 + 15$ en dat klopt niet voor elke waarde van t .

Substitutie van $y_2(t) = 5e^{3t}$ en $\frac{dy_2}{dt} = 15e^{3t}$ in

D_1 geeft $15e^{3t} = 3t$ en dat klopt niet voor elke waarde van t

D_2 geeft $15e^{3t} = 3 \cdot 5e^{3t}$ ofwel $15e^{3t} = 15e^{3t}$ en dat klopt voor elke waarde van t .

Substitutie van $y_3(t) = 3t^2$ en $\frac{dy_3}{dt} = 6t$ in

D_1 geeft $6t = 3t$ en dat klopt niet voor elke waarde van t

D_2 geeft $6t = 3 \cdot 3t^2$ ofwel $6t = 9t^2$ en dat klopt niet voor elke waarde van t .

Substitutie van $y_4(t) = e^{3t} + 2$ en $\frac{dy_4}{dt} = 3e^{3t}$ in

D_1 geeft $3e^{3t} = 3t$ en dat klopt niet voor elke waarde van t

D_2 geeft $3e^{3t} = 3 \cdot (e^{3t} + 2)$ ofwel $3e^{3t} = 3e^{3t} + 6$ en dat klopt niet voor elke waarde van t .

Substitutie van $y_5(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6$ en $\frac{dy_5}{dt} = 3t$ in

D_1 geeft $3t = 3t$ en dat klopt voor elke waarde van t

D_2 geeft $3t = 3 \cdot (\frac{1}{2}t^2 - 6)$ ofwel $3t = \frac{3}{2}t^2 - 18$ en dat klopt niet voor elke waarde van t .

Substitutie van $y_6(t) = -3e^{3t}$ en $\frac{dy_6}{dt} = -9e^{3t}$ in

D_1 geeft $-9e^{3t} = 3t$ en dat klopt niet voor elke waarde van t

D_2 geeft $-9e^{3t} = 3 \cdot -3e^{3t}$ ofwel $-9e^{3t} = -9e^{3t}$ en dat klopt voor elke waarde van t .

De functies y_1 en y_5 zijn oplossing van D_1 .

De functies y_2 en y_6 zijn oplossing van D_2 .

Bladzijde 131

- 35 a** Substitutie van $y = G(t) + c$ en $\frac{dy}{dt} = g(t)$ in $\frac{dy}{dt} = g(t)$ geeft $g(t) = g(t)$.

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus $y(t) = G(t) + c$ is oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = g(t)$.

- b** Substitutie van $y = ce^{at}$ en $\frac{dy}{dt} = ace^{at}$ in $\frac{dy}{dt} = ay$ geeft $ace^{at} = ace^{at}$.

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus $y = ce^{at}$ is oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = ay$.

- 36 a** $\frac{dy}{dt} = \cos(t) + t^2 + 5$ geeft $y(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}t^3 + 5t + c$

- b** $\frac{dy}{dt} = 0,2y$ geeft $y(t) = ce^{0,2t}$

- c** $\frac{dy}{dt} = \frac{5}{y^2}$ geeft $\int y^2 dy = \int 5 dt$
 $\frac{1}{3}y^3 = 5t + c$

- d** $\frac{dy}{dt} = \frac{1-t}{y-3}$ geeft $\int (y-3) dy = \int (1-t) dt$
 $\frac{1}{2}y^2 - 3y = t - \frac{1}{2}t^2 + c$

- 37 a** $\frac{dy}{dt} = \frac{6t}{y+1}$ geeft $\int (y+1) dy = \int 6t dt$
 $\frac{1}{2}y^2 + y = 3t^2 + c$

- b** $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t \cdot y^2}$ geeft $\int y^2 dy = \int \frac{1}{t} dt$
 $\frac{1}{3}y^3 = \ln|t| + c$

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{dy}{dt} &= t^2 + t^2 y = t^2(1+y) \text{ geeft } \int \frac{1}{1+y} dy = \int t^2 dt \\ \ln|1+y| &= \frac{1}{3}t^3 + c_1 \\ 1+y &= e^{\frac{1}{3}t^3 + c_1} \\ 1+y &= e^{c_1} \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} \\ y &= c e^{\frac{1}{3}t^3} - 1 \quad (c > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } \frac{dy}{dt} &= (1+y) \cdot e^t \text{ geeft } \int \frac{1}{1+y} dy = \int e^t dt \\ \ln|1+y| &= e^t + c_1 \\ 1+y &= e^{e^t + c_1} \\ 1+y &= e^{c_1} \cdot e^{e^t} \\ y &= c e^{e^t} - 1 \quad (c > 0) \end{aligned}$$

$$\text{38 a } I(0) = 5 \cdot e^0 = 5$$

$$\text{Substitutie van } I(t) = 5 \cdot e^{-t} \text{ en } \frac{dI}{dt} = -5 \cdot e^{-t} \text{ in } \frac{dI}{dt} = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot I \text{ geeft}$$

$$-5 \cdot e^{-t} = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot 5 \cdot e^{-t}$$

$$-5 \cdot e^{-t} = \frac{-5 \cdot e^{-t}}{R \cdot C}$$

$$R \cdot C = 1$$

$$\text{b } R \cdot C = 10 \text{ geeft } \frac{dI}{dt} = \frac{-1}{10} \cdot I, \text{ dus } I(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{10}t}.$$

$$I(2) = 3 \text{ geeft } c \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot 2} = 3, \text{ dus } c = 3 e^{\frac{1}{5}} = 3 \sqrt[5]{e}.$$

$$\text{Dit geeft } I(t) = 3 \sqrt[5]{e} \cdot e^{-\frac{1}{10}t}.$$

$$\text{Dus } I(0) = 3 \sqrt[5]{e} \cdot e^0 = 3 \sqrt[5]{e}.$$

15.4 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Bladzijde 133

$$\text{39 a } \text{Stel } y = at^2 + bt + c \text{ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.}$$

$$\text{Substitutie van } y = at^2 + bt + c \text{ en } \frac{dy}{dt} = 2at + b \text{ in } \frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t \text{ geeft}$$

$$2at + b = 2(at^2 + bt + c) - 4t^2 + 4t$$

$$2at + b = 2at^2 + 2bt + 2c - 4t^2 + 4t$$

$$2at + b = (2a - 4)t^2 + (2b + 4)t + 2c$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$2a - 4 = 0 \wedge 2a = 2b + 4 \wedge b = 2c$$

$$a = 2 \wedge 4 = 2b + 4 \wedge b = 2c$$

$$a = 2 \wedge 0 = 2b \wedge b = 2c$$

$$a = 2 \wedge b = 0 \wedge 0 = 2c$$

$$a = 2 \wedge b = 0 \wedge c = 0$$

Hiermee is aangetoond dat de differentiaalvergelijking een parabool als oplossing heeft.

De formule van de parabool is $y(t) = 2t^2$.

$$\text{b } \frac{dy}{dt} = 2y \text{ geeft } y(t) = c e^{2t}$$

$$\text{c } \text{De som van de oplossingen is } y(t) = 2t^2 + c e^{2t}.$$

$$\text{Substitutie van } y(t) = 2t^2 + c e^{2t} \text{ en } \frac{dy}{dt} = 4t + 2c e^{2t} \text{ in } \frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t \text{ geeft}$$

$$4t + 2c e^{2t} = 2(2t^2 + c e^{2t}) - 4t^2 + 4t$$

$$4t + 2c e^{2t} = 4t^2 + 2c e^{2t} - 4t^2 + 4t$$

$$4t + 2c e^{2t} = 2c e^{2t} + 4t$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus de som van de oplossingen van de vragen a en b is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Bladzijde 135

- 40 a** Substitutie van $y = a(t) + p(t)$ en $\frac{dy}{dt} = a'(t) + p'(t) = f(t) \cdot a(t) + f(t) \cdot p(t) + g(t)$ in $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$ geeft

$$f(t) \cdot a(t) + f(t) \cdot p(t) + g(t) = f(t) \cdot (a(t) + p(t)) + g(t)$$

$$f(t) \cdot a(t) + f(t) \cdot p(t) + g(t) = f(t) \cdot a(t) + f(t) \cdot p(t) + g(t)$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus $y = a(t) + p(t)$ is oplossing van de differentiaalvergelijking.

- b** $a(t) = c \cdot e^{F(t)}$ geeft $a'(t) = c \cdot e^{F(t)} \cdot F'(t) = c \cdot e^{F(t)} \cdot f(t)$

Substitutie van $y = a(t) = c \cdot e^{F(t)}$ en $\frac{dy}{dt} = a'(t) = c \cdot e^{F(t)} \cdot f(t)$ in $\frac{dy}{dt} = f(t)y$ geeft

$$c \cdot e^{F(t)} \cdot f(t) = f(t) \cdot c \cdot e^{F(t)}$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus $a(t) = c \cdot e^{F(t)}$ voldoet aan de homogene vergelijking $\frac{dy}{dt} = f(t)y$.

- c** $y = a(t) + p(t) = c \cdot e^{F(t)} + p(t)$

$$c \cdot e^{F(t)} + p(t) = y$$

$$c \cdot e^{F(t)} = y - p(t)$$

$$c = \frac{y - p(t)}{e^{F(t)}}$$

Voor elk punt (t, y) bestaat er dus precies één waarde van c . Hieruit volgt dat er door elk punt (t, y) precies één oplossingskromme van de vorm $y = c \cdot e^{F(t)} + p(t)$ gaat.

- 41 a** Stel $y = at + b$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y + 2t - 4$ geeft

$$a = -\frac{1}{2}(at + b) + 2t - 4$$

$$a = -\frac{1}{2}at - \frac{1}{2}b + 2t - 4$$

$$a = (2 - \frac{1}{2}a)t - \frac{1}{2}b - 4$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$2 - \frac{1}{2}a = 0 \wedge a = -\frac{1}{2}b - 4$$

$$a = 4 \wedge b = -16$$

Dus $y = 4t - 16$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y \text{ geeft } y(t) = c e^{-\frac{1}{2}t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{-\frac{1}{2}t} + 4t - 16$.

- b** $y = 3$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -2y \text{ geeft } y(t) = c e^{-2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{-2t} + 3$.

- c** Stel $y = at + b$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t + 6$ geeft

$$a = 2(at + b) - 4t + 6$$

$$a = 2at + 2b - 4t + 6$$

$$a = (2a - 4)t + 2b + 6$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$2a - 4 = 0 \wedge a = 2b + 6$$

$$a = 2 \wedge b = -2$$

Dus $y = 2t - 2$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 2y \text{ geeft } y(t) = c e^{2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{2t} + 2t - 2$.

- d** $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{10}(T - 21) = -\frac{1}{10}T + 2\frac{1}{10}$

$T = 21$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{10}T \text{ geeft } y(t) = c e^{-\frac{1}{10}t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{-\frac{1}{10}t} + 21$.

Bladzijde 136

- 42 a**
- Stel
- $y = A \sin(t) + B \cos(t)$
- is een oplossing.

Substitutie van $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ en $\frac{dy}{dt} = A \cos(t) - B \sin(t)$ in $\frac{dy}{dt} = 2y + \cos(t)$ geeft

$$A \cos(t) - B \sin(t) = 2(A \sin(t) + B \cos(t)) + \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = 2A \sin(t) + 2B \cos(t) + \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = (2B + 1) \cos(t) + 2A \sin(t)$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$A = 2B + 1 \wedge -B = 2A$$

$$A = 2B + 1 \wedge B = -2A$$

$$A = -4A + 1 \wedge B = -2A$$

$$5A = 1 \wedge B = -2A$$

$$A = \frac{1}{5} \wedge B = -\frac{2}{5}$$

Dus $y = \frac{1}{5} \sin(t) - \frac{2}{5} \cos(t)$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 2y \text{ geeft } y(t) = c e^{2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{2t} + \frac{1}{5} \sin(t) - \frac{2}{5} \cos(t)$.

- b**
- Stel
- $y = A \sin(t) + B \cos(t)$
- is een oplossing.

Substitutie van $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ en $\frac{dy}{dt} = A \cos(t) - B \sin(t)$ in $\frac{dy}{dt} = -3y - \sin(t)$ geeft

$$A \cos(t) - B \sin(t) = -3(A \sin(t) + B \cos(t)) - \sin(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = -3A \sin(t) - 3B \cos(t) - \sin(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = -3B \cos(t) - (3A + 1) \sin(t)$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$A = -3B \wedge B = 3A + 1$$

$$A = -3B \wedge B = -9B + 1$$

$$A = -3B \wedge 10B = 1$$

$$A = -\frac{3}{10} \wedge B = \frac{1}{10}$$

Dus $y = -\frac{3}{10} \sin(t) + \frac{1}{10} \cos(t)$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -3y \text{ geeft } y(t) = c e^{-3t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{-3t} - \frac{3}{10} \sin(t) + \frac{1}{10} \cos(t)$.

- c**
- Stel
- $y = A \sin(t) + B \cos(t)$
- is een oplossing.

Substitutie van $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ en $\frac{dy}{dt} = A \cos(t) - B \sin(t)$ in $\frac{dy}{dt} = 4y - \cos(t)$ geeft

$$A \cos(t) - B \sin(t) = 4(A \sin(t) + B \cos(t)) - \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = 4A \sin(t) + 4B \cos(t) - \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = (4B - 1) \cos(t) + 4A \sin(t)$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$A = 4B - 1 \wedge B = -4A$$

$$A = -16A - 1 \wedge B = -4A$$

$$17A = -1 \wedge B = -4A$$

$$A = -\frac{1}{17} \wedge B = \frac{4}{17}$$

Dus $y = -\frac{1}{17} \sin(t) + \frac{4}{17} \cos(t)$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 4y \text{ geeft } y(t) = c e^{4t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{4t} - \frac{1}{17} \sin(t) + \frac{4}{17} \cos(t)$.

- d** Stel $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ en $\frac{dy}{dt} = A \cos(t) - B \sin(t)$ in $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y + 2 \sin(t) - 3 \cos(t)$ geeft

$$A \cos(t) - B \sin(t) = \frac{1}{2}(A \sin(t) + B \cos(t)) + 2 \sin(t) - 3 \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = \frac{1}{2}A \sin(t) + \frac{1}{2}B \cos(t) + 2 \sin(t) - 3 \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = \left(\frac{1}{2}B - 3\right)\cos(t) + \left(\frac{1}{2}A + 2\right)\sin(t)$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$A = \frac{1}{2}B - 3 \wedge -B = \frac{1}{2}A + 2$$

$$A = \frac{1}{2}B - 3 \wedge -B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}B - 3\right) + 2$$

$$A = \frac{1}{2}B - 3 \wedge -B = \frac{1}{4}B - 1\frac{1}{2} + 2$$

$$A = \frac{1}{2}B - 3 \wedge -1\frac{1}{4}B = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}B - 3 \wedge B = -\frac{2}{5}$$

$$A = -3\frac{1}{5} \wedge B = -\frac{2}{5}$$

Dus $y = -3\frac{1}{5} \sin(t) - \frac{2}{5} \cos(t)$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y \text{ geeft } y(t) = c e^{\frac{1}{2}t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{\frac{1}{2}t} - 3\frac{1}{5} \sin(t) - \frac{2}{5} \cos(t)$.

- 43 a** Stel $y = A \cdot e^t$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \cdot e^t$ en $\frac{dy}{dt} = A \cdot e^t$ in $\frac{dy}{dt} = 2y - 3e^t$ geeft

$$A \cdot e^t = 2A \cdot e^t - 3e^t$$

$$3e^t = 3A \cdot e^t$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus $3A = 3$ ofwel $A = 1$.

Dus $y = e^t$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 2y \text{ geeft } y(t) = c e^{2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{2t} + e^t$.

- b** Stel $y = A \cdot e^t$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \cdot e^t$ en $\frac{dy}{dt} = A \cdot e^t$ in $\frac{dy}{dt} = 10y - 5e^t$ geeft

$$A \cdot e^t = 10A \cdot e^t - 5e^t$$

$$5e^t = 9A \cdot e^t$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus $9A = 5$ ofwel $A = \frac{5}{9}$.

Dus $y = \frac{5}{9} e^t$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 10y \text{ geeft } y(t) = c e^{10t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{10t} + \frac{5}{9} e^t$.

- c** Stel $y = A \cdot e^t$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \cdot e^t$ en $\frac{dy}{dt} = A \cdot e^t$ in $\frac{dy}{dt} = -2y + e^t$ geeft

$$A \cdot e^t = -2A \cdot e^t + e^t$$

$$3A \cdot e^t = e^t$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus $3A = 1$ ofwel $A = \frac{1}{3}$.

Dus $y = \frac{1}{3} e^t$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -2y \text{ geeft } y(t) = c e^{-2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t$.

- d** Stel $y = A \cdot e^t$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \cdot e^t$ en $\frac{dy}{dt} = A \cdot e^t$ in $\frac{dy}{dt} = 1\frac{1}{2}y + 2e^t$ geeft

$$A \cdot e^t = 1\frac{1}{2}A \cdot e^t + 2e^t$$

$$-\frac{1}{2}A \cdot e^t = 2e^t$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus $-\frac{1}{2}A = 2$ ofwel $A = -4$.

Dus $y = -4e^t$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 1\frac{1}{2}y \text{ geeft } y(t) = c e^{1\frac{1}{2}t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{1\frac{1}{2}t} - 4e^t$.

- 44 a** Stel $y = at + b$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = 2y + 4t - 2$ geeft

$$a = 2(at + b) + 4t - 2$$

$$a = 2at + 2b + 4t - 2$$

$$a = (2a + 4)t + 2b - 2$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$2a + 4 = 0 \wedge a = 2b - 2$$

$$a = -2 \wedge b = 0$$

Dus $y = -2t$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 2y \text{ geeft } y(t) = ce^{2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^{2t} - 2t$.

- b** Stel $y = A \cdot e^{2t}$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \cdot e^{2t}$ en $\frac{dy}{dt} = 2A \cdot e^{2t}$ in $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y + 4e^{2t}$ geeft

$$2A \cdot e^{2t} = \frac{1}{2}A \cdot e^{2t} + 4e^{2t}$$

$$1\frac{1}{2}A \cdot e^{2t} = 4e^{2t}$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus $1\frac{1}{2}A = 4$ ofwel $A = 2\frac{2}{3}$.

Dus $y = 2\frac{2}{3}e^{2t}$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y \text{ geeft } y(t) = ce^{\frac{1}{2}t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^{\frac{1}{2}t} + 2\frac{2}{3}e^{2t}$.

- c** Stel $y = A \sin(2t) + B \cos(2t)$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \sin(2t) + B \cos(2t)$ en $\frac{dy}{dt} = 2A \cos(2t) - 2B \sin(2t)$ in $\frac{dy}{dt} = -3y + \sin(2t)$ geeft

$$2A \cos(2t) - 2B \sin(2t) = -3(A \sin(2t) + B \cos(2t)) + \sin(2t)$$

$$2A \cos(2t) - 2B \sin(2t) = -3A \sin(2t) - 3B \cos(2t) + \sin(2t)$$

$$2A \cos(2t) - 2B \sin(2t) = -3B \cos(2t) - (3A - 1) \sin(2t)$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$2A = -3B \wedge 2B = 3A - 1$$

$$A = -1\frac{1}{2}B \wedge 2B = -4\frac{1}{2}B - 1$$

$$A = -1\frac{1}{2}B \wedge 6\frac{1}{2}B = -1$$

$$A = -1\frac{1}{2}B \wedge B = -\frac{2}{13}$$

$$A = \frac{3}{13} \wedge B = -\frac{2}{13}$$

Dus $y = \frac{3}{13} \sin(2t) - \frac{2}{13} \cos(2t)$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -3y \text{ geeft } y(t) = ce^{-3t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^{-3t} + \frac{3}{13} \sin(2t) - \frac{2}{13} \cos(2t)$.

- d** Stel $y = at^2 + bt + c$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at^2 + bt + c$ en $\frac{dy}{dt} = 2at + b$ in $\frac{dy}{dt} = -2y + 2t^2 - 4t$ geeft

$$2at + b = -2(at^2 + bt + c) + 2t^2 - 4t$$

$$2at + b = -2at^2 - 2bt - 2c + 2t^2 - 4t$$

$$2at + b = (2 - 2a)t^2 + (-2b - 4)t - 2c$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$2 - 2a = 0 \wedge 2a = -2b - 4 \wedge b = -2c$$

$$a = 1 \wedge 2 = -2b - 4 \wedge b = -2c$$

$$a = 1 \wedge b = -3 \wedge -3 = -2c$$

$$a = 1 \wedge b = -3 \wedge c = 1\frac{1}{2}$$

Dus $y = t^2 - 3t + 1\frac{1}{2}$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -2y \text{ geeft } y(t) = ce^{-2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^{-2t} + t^2 - 3t + 1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{e } \frac{dy}{dt} = ty + t = (y+1)t \text{ geeft } \int \frac{1}{y+1} dy &= \int t dt \\ \ln(y+1) &= \frac{1}{2}t^2 + c_1 \\ y+1 &= e^{\frac{1}{2}t^2 + c_1} \\ y+1 &= e^{c_1} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} \\ y &= c e^{\frac{1}{2}t^2} - 1 \quad (c > 0) \end{aligned}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{\frac{1}{2}t^2} - 1$ met $c > 0$.

f Stel $y = at + b$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = ty - t^2 + t + 1$ geeft

$$a = t(at + b) - t^2 + t + 1$$

$$a = at^2 + bt - t^2 + t + 1$$

$$a = (a-1)t^2 + (b+1)t + 1$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$a - 1 = 0 \wedge b + 1 = 0 \wedge a = 1$$

$$a = 1 \wedge b = -1$$

Dus $y = t - 1$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = ty \text{ geeft } \int \frac{1}{y} dy = \int t dt$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2}t^2 + c_1$$

$$y = e^{\frac{1}{2}t^2 + c_1}$$

$$y = e^{c_1} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$y = c e^{\frac{1}{2}t^2} \quad (c > 0)$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{\frac{1}{2}t^2} + t - 1$ met $c > 0$.

45 a $y = -3$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -y \text{ geeft } y(t) = c e^{-t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{-t} - 3$.

$$y(0) = 1 \text{ geeft } c e^0 - 3 = 1$$

$$c - 3 = 1$$

$$c = 4$$

Dus de oplossing is $y(t) = 4 e^{-t} - 3$.

b Door de oorsprong, dus $y(0) = 0$ geeft $c e^0 - 3 = 0$

$$c - 3 = 0$$

$$c = 3$$

Dus $y(t) = 3 e^{-t} - 3$.

$$y(1) = 3 e^{-1} - 3 = \frac{3}{e} - 3 = -3 + \frac{3}{e}$$

Dus het punt $\left(1, -3 + \frac{3}{e}\right)$ ligt op de oplossingskromme door de oorsprong.

c $y(3) = 1$ geeft $c e^{-3} - 3 = 1$

$$c e^{-3} = 4$$

$$c = 4 e^3$$

Dus $y(t) = 4 e^3 \cdot e^{-t} - 3$ ofwel $y(t) = 4 e^{3-t} - 3$.

$$y(a) = 8 \text{ geeft } 4 e^{3-a} - 3 = 8$$

$$4 e^{3-a} = 11$$

$$e^{3-a} = 2\frac{3}{4}$$

$$3 - a = \ln\left(2\frac{3}{4}\right)$$

$$a = 3 - \ln\left(2\frac{3}{4}\right)$$

46 a $\frac{dT}{dt} = -0,035(T - 18) = -0,035T + 0,63$

$T = 18$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dT}{dt} = -0,035T \text{ geeft } T(t) = c e^{-0,035t}$$

De algemene oplossing is $T(t) = c e^{-0,035t} + 18$.

$$T(0) = 5 \text{ geeft } c e^{-0,035 \cdot 0} + 18 = 5$$

$$c + 18 = 5$$

$$c = -13$$

Dus $T = 18 - 13 e^{-0,035t}$.

b $t = 5$ geeft $T = 18 - 13e^{-0,035 \cdot 5} \approx 7$

Na 5 minuten is de temperatuur van het blikje 7°C .

c $T = 15$ geeft $18 - 13e^{-0,035t} = 15$

$$13e^{-0,035t} = 3$$

$$e^{-0,035t} = \frac{3}{13}$$

$$-0,035t = \ln\left(\frac{3}{13}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{3}{13}\right)}{-0,035} \approx 41,9$$

Dus na ongeveer 42 minuten heeft het blikje een temperatuur van 15°C .

Bladzijde 137

47 $\frac{dT}{dt} = -0,03(T - 150) = -0,03T + 4,5$

$T = 150$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dT}{dt} = -0,03T \text{ geeft } T(t) = c_1 e^{-0,03t}$$

De algemene oplossing is $T(t) = c_1 e^{-0,03t} + 150$.

$$T(0) = 20 \text{ geeft } c_1 e^{-0,035 \cdot 0} + 150 = 20$$

$$c_1 + 150 = 20$$

$$c_1 = -130$$

$$\text{Dus } T(t) = 150 - 130e^{-0,03t}$$

$$T(t) = 100 \text{ geeft } 150 - 130e^{-0,03t} = 100$$

$$130e^{-0,03t} = 50$$

$$e^{-0,03t} = \frac{5}{13}$$

$$-0,03t = \ln\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{5}{13}\right)}{-0,03} = 31,85\dots$$

Dus na ongeveer 32 minuten is de temperatuur van 100°C bereikt.

$$\frac{dT}{dt} = -0,001(T - 150) = -0,001T + 0,15$$

$T = 150$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dT}{dt} = -0,001T \text{ geeft } T(t) = c_2 e^{-0,001t}$$

De algemene oplossing is $T(t) = c_2 e^{-0,001t} + 150$.

$$T(32) = 100 \text{ geeft } c_2 e^{-0,001 \cdot 31,85\dots} + 150 = 100$$

$$c_2 e^{-0,03185\dots} = -50$$

$$c_2 = -50 e^{0,03185\dots}$$

$$\text{Dus } T(t) = 150 - 50 e^{0,03185\dots} \cdot e^{-0,001t} = 150 - 50 e^{0,03185\dots - 0,001t}$$

$$T(t) = 120 \text{ geeft } 150 - 50 e^{0,03185\dots - 0,001t} = 120$$

$$50 e^{0,03185\dots - 0,001t} = 30$$

$$e^{0,03185\dots - 0,001t} = \frac{3}{5}$$

$$0,03185\dots - 0,001t = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$-0,001t = \ln\left(\frac{3}{5}\right) - 0,03185\dots$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right) - 0,03185\dots}{-0,001} \approx 543$$

Dus daarna duurt het nog ongeveer $543 - 32 = 511$ minuten tot de temperatuur van 120°C is bereikt.

48 $y = 3u$ geeft $\frac{dy}{du} = 3$ en $\frac{dy}{dt} = y^2 - 5y = (3u)^2 - 5 \cdot 3u = 9u^2 - 15u$.

Samen met de regel $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$ geeft dit $9u^2 - 15u = 3 \cdot \frac{du}{dt}$ ofwel $\frac{du}{dt} = 3u^2 - 5u$.

49 a $\frac{dN}{dt} = 0,7N$ geeft $N(t) = c e^{0,7t}$

$$N(0) = 1000 \text{ geeft } c e^{0,7 \cdot 0} = 1000, \text{ dus } c = 1000.$$

$$\text{Dus } N(t) = 1000 e^{0,7t}.$$

b Voor $N = 10000$ is $\frac{dN}{dt} = 0,7 \cdot 10000 \cdot \frac{400000 - 10000}{400000} = 6825$ besmettingen per week.

Voor $N = 200000$ is $\frac{dN}{dt} = 0,7 \cdot 200000 \cdot \frac{400000 - 200000}{400000} = 70000$ besmettingen per week.

Voor $N = 390000$ is $\frac{dN}{dt} = 0,7 \cdot 390000 \cdot \frac{400000 - 390000}{400000} = 6825$ besmettingen per week.

$$c \quad \frac{dN}{dt} = 0,7N \cdot \frac{400\,000 - N}{400\,000} = \frac{0,7}{400\,000} \cdot N \cdot (400\,000 - N) = 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (400\,000 - N)$$

Dus $c = 1,75 \cdot 10^{-6}$.

Bladzijde 140

50 a Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u^2} + 4 \cdot \frac{1}{u}$

$$\frac{du}{dt} = -1 - 4u$$

$u(t) = -\frac{1}{4}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -1 - 4u$.

$\frac{du}{dt} = -4u$ geeft $u(t) = c_1 e^{-4t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -1 - 4u$ is $u(t) = c_1 e^{-4t} - \frac{1}{4}$.

$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 e^{-4t} - \frac{1}{4}} = \frac{4}{4c_1 e^{-4t} - 1}$

De algemene oplossing is $y(t) = \frac{4}{c e^{-4t} - 1}$.

b $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y(1-y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2$

Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$$

$u(t) = 1$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$.

$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}u$ geeft $u(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$ is $u(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 1$.

$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 1}$

De algemene oplossing is $y(t) = \frac{1}{1 + c e^{-\frac{1}{2}t}}$.

c $\frac{dy}{dt} = 0,1y \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 0,1y - 0,001y^2$

Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 0,1 \cdot \frac{1}{u} - 0,001 \cdot \frac{1}{u^2}$

$$\frac{du}{dt} = 0,001 - 0,1u$$

$u(t) = 0,01$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = 0,001 - 0,1u$.

$\frac{du}{dt} = -0,1u$ geeft $u(t) = c_1 e^{-0,1t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 0,001 - 0,1u$ is $u(t) = c_1 e^{-0,1t} + 0,01$.

$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 e^{-0,1t} + 0,01} = \frac{100}{1 + 100c_1 e^{-0,1t}}$

De algemene oplossing is $y(t) = \frac{100}{1 + c e^{-0,1t}}$.

d $\frac{dA}{dt} = 0,001A \left(1 - \frac{A}{20}\right) = 0,001A - 0,00005A^2$

Substitutie van $A = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 0,001 \cdot \frac{1}{u} - 0,00005 \cdot \frac{1}{u^2}$

$$\frac{du}{dt} = 0,00005 - 0,001u$$

$u(t) = 0,05$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = 0,00005 - 0,001u$.

$\frac{du}{dt} = -0,001u$ geeft $u(t) = c_1 e^{-0,001t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 0,00005 - 0,001u$ is $u(t) = c_1 e^{-0,001t} + 0,05$.

$$A = \frac{1}{u} \text{ geeft } A(t) = \frac{1}{c_1 e^{-0,001t} + 0,05} = \frac{20}{1 + 20c_1 e^{-0,001t}}$$

De algemene oplossing is $A(t) = \frac{20}{1 + c e^{-0,001t}}$.

51 a Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{u^2} - 10 \cdot \frac{1}{u}$

$$\frac{du}{dt} = -2 + 10u$$

$u(t) = \frac{1}{5}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -2 + 10u$.

$$\frac{du}{dt} = 10u \text{ geeft } u(t) = c_1 e^{10t}$$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -2 + 10u$ is $u(t) = c_1 e^{10t} + \frac{1}{5}$.

$$y = \frac{1}{u} \text{ geeft } y(t) = \frac{1}{c_1 e^{10t} + \frac{1}{5}} = \frac{5}{5c_1 e^{10t} + 1}$$

De algemene oplossing is $y(t) = \frac{5}{1 + c e^{10t}}$.

b Stel $y = A \sin(t) + B \cos(t) + C e^t$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \sin(t) + B \cos(t) + C e^t$ en $\frac{dy}{dt} = A \cos(t) - B \sin(t) + C e^t$ in

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y + 4e^t + 2 \sin(t) \text{ geeft}$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) + C e^t = \frac{1}{2}(A \sin(t) + B \cos(t) + C e^t) + 4e^t - 2 \sin(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) + C e^t = \frac{1}{2}A \sin(t) + \frac{1}{2}B \cos(t) + \frac{1}{2}C e^t + 4e^t - 2 \sin(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) + C e^t = \frac{1}{2}B \cos(t) - (2 - \frac{1}{2}A) \sin(t) + (\frac{1}{2}C + 4) e^t$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$A = \frac{1}{2}B \wedge B = 2 - \frac{1}{2}A \wedge C = \frac{1}{2}C + 4$$

$$A = \frac{1}{2}B \wedge B = 2 - \frac{1}{4}B \wedge \frac{1}{2}C = 4$$

$$A = \frac{1}{2}B \wedge \frac{1}{4}B = 2 \wedge C = 8$$

$$A = \frac{1}{2}B \wedge B = 1\frac{3}{2} \wedge C = 8$$

$$A = \frac{4}{5} \wedge B = 1\frac{3}{5} \wedge C = 8$$

Dus $y = \frac{4}{5} \sin(t) + 1\frac{3}{5} \cos(t) + 8e^t$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y \text{ geeft } y(t) = c e^{\frac{1}{2}t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{\frac{1}{2}t} + \frac{4}{5} \sin(t) + 1\frac{3}{5} \cos(t) + 8e^t$.

c $\frac{dy}{dt} = 3ty + 6t = 3t(y + 2)$ geeft $\int \frac{1}{y+2} dy = \int 3t dt$

$$\ln(y+2) = \frac{1}{2}t^2 + c_1$$

$$y+2 = e^{\frac{1}{2}t^2 + c_1}$$

$$y = e^{c_1} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} - 2$$

$$y = c e^{\frac{1}{2}t^2} - 2 \quad (c > 0)$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{\frac{1}{2}t^2} - 2$ met $c > 0$.

d Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = -2 \cdot \frac{1}{u} + 12 \cdot \frac{1}{u^2}$

$$\frac{du}{dt} = 2u - 12$$

$u(t) = 6$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = 2u - 12$.

$$\frac{du}{dt} = 2u \text{ geeft } u(t) = c_1 e^{2t}$$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 2u - 12$ is $u(t) = c_1 e^{2t} + 6$.

$$y = \frac{1}{u} \text{ geeft } y(t) = \frac{1}{c_1 e^{2t} + 6}$$

De algemene oplossing is $y(t) = \frac{1}{6 + c e^{2t}}$.

52 a Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u} - 2 \cdot \frac{1}{u^2}$

$$\frac{du}{dt} = 2 - u$$

$u(t) = 2$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = 2 - u$.

$$\frac{du}{dt} = -u \text{ geeft } u(t) = c_1 e^{-t}$$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 2 - u$ is $u(t) = c_1 e^{-t} + 2$.

$$y = \frac{1}{u} \text{ geeft } y(t) = \frac{1}{c_1 e^{-t} + 2}$$

De algemene oplossing is $y(t) = \frac{1}{2 + c e^{-t}}$.

$$y(0) = \frac{1}{5} \text{ geeft } \frac{1}{2 + c e^0} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2 + c} = \frac{1}{5}$$

$$c = 3$$

$$\text{Dus } y = \frac{1}{2 + 3 e^{-t}}$$

b $y(0) = 2$ geeft $\frac{1}{2 + c e^0} = 2$

$$\frac{1}{2 + c} = 2$$

$$2 + c = \frac{1}{2}$$

$$c = -1\frac{1}{2}$$

Dit geeft de oplossingskromme $y = \frac{1}{2 - 1\frac{1}{2} e^{-t}}$.

$$t = 1 \text{ geeft } y = \frac{1}{2 - 1\frac{1}{2} e^{-1}} \cdot \frac{2e}{2e} = \frac{2e}{4e - 3}$$

Dus het punt $\left(1, \frac{2e}{4e - 3}\right)$ ligt op de oplossingskromme door het punt $(0, 2)$.

Bladzijde 141

53 a Op $t = 0$ is $N = 2000$ en $\frac{dN}{dt} = 350$, dus $c \cdot 2000 \cdot (10000 - 2000) = 350$

$$c \cdot 1,6 \cdot 10^7 = 350$$

$$c = \frac{350}{1,6 \cdot 10^7} = 2,1875 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Dus } \frac{dN}{dt} = 2,1875 \cdot 10^{-5} \cdot N \cdot (10000 - N) = 0,21875N - 2,1875 \cdot 10^{-5} \cdot N^2.$$

$$\text{Substitutie van } N = \frac{1}{u} \text{ geeft } -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 0,21875 \cdot \frac{1}{u} - 2,1875 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{du}{dt} = 2,1875 \cdot 10^{-5} - 0,21875u$$

$$u(t) = 0,0001 \text{ is een particuliere oplossing van } \frac{du}{dt} = 2,1875 \cdot 10^{-5} - 0,21875u.$$

$$\frac{du}{dt} = -0,21875u \text{ geeft } u(t) = c_1 e^{-0,21875t}$$

$$\text{De algemene oplossing van } \frac{du}{dt} = 2,1875 \cdot 10^{-5} - 0,21875u \text{ is } u(t) = c_1 e^{-0,21875t} + 0,0001.$$

$$N = \frac{1}{u} \text{ geeft } N(t) = \frac{1}{c_1 e^{-0,21875t} + 0,0001} = \frac{10000}{10000c_1 e^{-0,21875t} + 1}$$

$$\text{De algemene oplossing is } N(t) = \frac{10000}{1 + c e^{-0,21875t}}.$$

$$N(0) = 2000 \text{ geeft } \frac{10000}{1 + c e^{-0,21875 \cdot 0}} = 2000$$

$$\frac{10000}{1 + c} = 2000$$

$$1 + c = 5$$

$$c = 4$$

$$\text{Dus } N = \frac{10000}{1 + 4e^{-0,21875t}}.$$

$$\text{Op } t = 20 \text{ is de populatiegrootte } \frac{10000}{1 + 4e^{-0,21875 \cdot 20}} \approx 9521.$$

b Los op $N = 5000$.

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{10000}{1 + 4e^{-0,21875x}} \text{ en } y_2 = 5000.$$

Intersect geeft $x \approx 6,3$.

Dus vanaf een t van ongeveer 6,3 zijn er meer dan 5000 zeeotters.

54 a Substitutie van $L = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 6 \cdot \frac{1}{u} - 0,2 \cdot \frac{1}{u^2}$

$$\frac{du}{dt} = 0,2 - 6u$$

$$u(t) = \frac{1}{30} \text{ is een particuliere oplossing van } \frac{du}{dt} = 0,2 - 6u.$$

$$\frac{du}{dt} = -6u \text{ geeft } u(t) = c_1 e^{-6t}$$

$$\text{De algemene oplossing van } \frac{du}{dt} = 0,2 - 6u \text{ is } u(t) = c_1 e^{-6t} + \frac{1}{30}.$$

$$L = \frac{1}{u} \text{ geeft } L(t) = \frac{1}{c_1 e^{-6t} + \frac{1}{30}} = \frac{30}{30c_1 e^{-6t} + 1}$$

$$\text{De algemene oplossing is } L(t) = \frac{30}{1 + c e^{-6t}}.$$

$$L(0) = 2 \text{ geeft } \frac{30}{1 + c e^{-6 \cdot 0}} = 2$$

$$\frac{30}{1 + c} = 2$$

$$1 + c = 15$$

$$c = 14$$

$$\text{Dus } L = \frac{30}{1 + 14e^{-6t}}.$$

$$t = \frac{1}{7} \text{ geeft } L = \frac{30}{1 + 14e^{-6 \cdot \frac{1}{7}}} \approx 4,32$$

Het plantje is de eerste dag ongeveer $4,32 - 2 \approx 2,3$ cm gegroeid.

b De grenswaarde is 30 cm, dus los op $L = 29$.

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{30}{1 + 14e^{-6x}} \text{ en } y_2 = 29.$$

Intersect geeft $x \approx 1,00$.

Dus na ongeveer 7 dagen is de lengte van het plantje voor het eerst 1 cm minder dan de grenswaarde.

55 a $\frac{dN}{dt} = 6 \cdot 10^{-5} \cdot N \cdot (5000 - N) = 0,3N - 0,00006N^2$

Substitutie van $N = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 0,3 \cdot \frac{1}{u} - 0,00006 \cdot \frac{1}{u^2}$
 $\frac{du}{dt} = 0,00006 - 0,3u$

$u(t) = 0,0002$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = 0,00006 - 0,3u$.

$\frac{du}{dt} = -0,3u$ geeft $u(t) = c_1 e^{-0,3t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 0,00006 - 0,3u$ is $u(t) = c_1 e^{-0,3t} + 0,0002$.

$N = \frac{1}{u}$ geeft $N(t) = \frac{1}{c_1 e^{-0,3t} + 0,0002} = \frac{5000}{5000c_1 e^{-0,3t} + 1}$

De algemene oplossing is $N(t) = \frac{5000}{1 + c e^{-0,3t}}$.

$N(0) = 4500$ geeft $\frac{5000}{1 + c e^{-0,3 \cdot 0}} = 4500$

$$\frac{5000}{1 + c} = 4500$$

$$1 + c = \frac{5000}{4500} = 1\frac{1}{9}$$

$$c = \frac{1}{9}$$

Dus $N = \frac{5000}{1 + \frac{1}{9} e^{-0,3t}}$.

Op $t = 10$ zijn er $\frac{5000}{1 + \frac{1}{9} e^{-0,3 \cdot 10}} \approx 4972$ vuursalamanders.

b De grenswaarde was 5000 en wordt dus 2500.

$\frac{dN}{dt} = 4 \cdot 10^{-5} \cdot N \cdot (2500 - N) = 0,1N - 0,00004N^2$

Substitutie van $N = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 0,1 \cdot \frac{1}{u} - 0,00004 \cdot \frac{1}{u^2}$
 $\frac{du}{dt} = 0,00004 - 0,1u$

$u(t) = 0,0004$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = 0,00004 - 0,1u$.

$\frac{du}{dt} = -0,1u$ geeft $u(t) = c_1 e^{-0,1t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 0,00004 - 0,1u$ is $u(t) = c_1 e^{-0,1t} + 0,0004$.

$N = \frac{1}{u}$ geeft $N(t) = \frac{1}{c_1 e^{-0,1t} + 0,0004} = \frac{2500}{2500c_1 e^{-0,1t} + 1}$

De algemene oplossing is $N(t) = \frac{2500}{1 + c e^{-0,1t}}$.

$N(10) = 4972$ geeft $\frac{2500}{1 + c e^{-0,1 \cdot 10}} = 4972$

$$\frac{2500}{1 + c e^{-1}} = 4972$$

$$\frac{2500e}{e + c} = 4972$$

$$e + c = \frac{2500e}{4972}$$

$$c = \frac{2500e}{4972} - e \approx -1,3515$$

Dus $N = \frac{2500}{1 - 1,3515 e^{-0,1t}}$.

Los op $N = 4500$.

Voer in $y_1 = \frac{2500}{1 - 1,3515 e^{-0,1x}}$ en $y_2 = 4500$.

Intersect geeft $x \approx 11,12$.

Dus ongeveer $11,12 - 10 = 1,12$ jaar na $t = 10$ zijn er weer 4500 vuursalamanders.

15.5 Differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

Bladzijde 143

- 56 a** De hoogste afgeleide van y die in de differentiaalvergelijking voorkomt is de tweede afgeleide. Daarom is de differentiaalvergelijking van de tweede orde.

b $y(t) = e^{\lambda t}$ geeft $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$
 $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ geeft $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$
 Substitutie van $y(t) = e^{\lambda t}$, $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ en $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ in $y'' + 5y' + 4y = 0$ geeft
 $\lambda^2 e^{\lambda t} + 5\lambda e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0$
 $(\lambda^2 + 5\lambda + 4)e^{\lambda t} = 0$
 $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \vee e^{\lambda t} = 0$ (geen opl.)
 $(\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0$
 $\lambda = -1 \vee \lambda = -4$

c $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}$ geeft $y'(t) = -Ae^{-t} - 4Be^{-4t}$
 $y'(t) = -Ae^{-t} - 4Be^{-4t}$ geeft $y''(t) = Ae^{-t} + 16Be^{-4t}$
 Substitutie van $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}$, $y'(t) = -Ae^{-t} - 4Be^{-4t}$ en $y''(t) = Ae^{-t} + 16Be^{-4t}$ in $y'' + 5y' + 4y = 0$ geeft
 $Ae^{-t} + 16Be^{-4t} + 5(-Ae^{-t} - 4Be^{-4t}) + 4(Ae^{-t} + Be^{-4t}) = 0$
 $Ae^{-t} + 16Be^{-4t} - 5Ae^{-t} - 20Be^{-4t} + 4Ae^{-t} + 4Be^{-4t} = 0$
 $0 = 0$
 Dus $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}$ voldoet voor elke waarde van A en B aan de differentiaalvergelijking.

- 57 a** $y(t) = e^{\lambda t}$ geeft $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$
 $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ geeft $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$
 Substitutie van $y(t) = e^{\lambda t}$, $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ en $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ in $y'' + 4y' + 5y = 0$ geeft
 $\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 5e^{\lambda t} = 0$
 $(\lambda^2 + 4\lambda + 5)e^{\lambda t} = 0$
 $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \vee e^{\lambda t} = 0$ (geen opl.)
 $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$
 Van $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ is $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$, dus deze vergelijking heeft geen reële oplossingen.
- b** $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$
 $(\lambda + 2)^2 - 4 + 5 = 0$
 $(\lambda + 2)^2 = -1$
 $(\lambda + 2)^2 = i^2$
 $\lambda + 2 = i \vee \lambda + 2 = -i$
 $\lambda = -2 + i \vee \lambda = -2 - i$

Bladzijde 145

- 58** $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heeft twee reële oplossingen λ_1 en λ_2 , dus $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$ en $\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q = 0$.
 $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ geeft $y'(t) = \lambda_1 A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B \cdot e^{\lambda_2 t}$
 $y'(t) = \lambda_1 A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B \cdot e^{\lambda_2 t}$ geeft $y''(t) = \lambda_1^2 A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B \cdot e^{\lambda_2 t}$
 Substitutie van $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$, $y'(t) = \lambda_1 A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B \cdot e^{\lambda_2 t}$ en $y''(t) = \lambda_1^2 A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B \cdot e^{\lambda_2 t}$ in $y'' + py' + qy = 0$ geeft
 $\lambda_1^2 A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B \cdot e^{\lambda_2 t} + p(\lambda_1 A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B \cdot e^{\lambda_2 t}) + q(A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}) = 0$
 $\lambda_1^2 A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B \cdot e^{\lambda_2 t} + p\lambda_1 A \cdot e^{\lambda_1 t} + p\lambda_2 B \cdot e^{\lambda_2 t} + qA \cdot e^{\lambda_1 t} + qB \cdot e^{\lambda_2 t} = 0$
 $A(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)e^{\lambda_1 t} + B(\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q)e^{\lambda_2 t} = 0$
 $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$ en $\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q = 0$ geeft $A \cdot 0 \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot 0 \cdot e^{\lambda_2 t} = 0$ ofwel $0 = 0$.
 Dus alle functies van de vorm $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ zijn oplossing van de differentiaalvergelijking.

- 59** $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heeft een reële oplossing λ , dus $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
 en $(\lambda + \frac{1}{2}p)^2 = 0$, dus $\lambda = -\frac{1}{2}p$.
 $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda t}$ geeft $y'(t) = B \cdot e^{\lambda t} + (A + Bt) \cdot \lambda e^{\lambda t}$
 $y'(t) = B \cdot e^{\lambda t} + (A + Bt) \cdot \lambda e^{\lambda t}$ geeft $y''(t) = B \cdot \lambda e^{\lambda t} + B \cdot \lambda e^{\lambda t} + (A + Bt) \cdot \lambda^2 e^{\lambda t}$
 Substitutie van $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda t}$, $y'(t) = B \cdot e^{\lambda t} + (A + Bt) \cdot \lambda e^{\lambda t}$ en $y''(t) = B \cdot \lambda e^{\lambda t} + B \cdot \lambda e^{\lambda t} + (A + Bt) \cdot \lambda^2 e^{\lambda t}$ in $y'' + py' + qy = 0$ geeft
 $B \cdot \lambda e^{\lambda t} + B \cdot \lambda e^{\lambda t} + (A + Bt) \cdot \lambda^2 e^{\lambda t} + p(B \cdot e^{\lambda t} + (A + Bt) \cdot \lambda e^{\lambda t}) + q(A + Bt) \cdot e^{\lambda t} = 0$
 $(\lambda^2 + p\lambda + q)(A + Bt)e^{\lambda t} + (2\lambda + p)Be^{\lambda t} = 0$
 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ en $\lambda = -\frac{1}{2}p$ geeft $0 \cdot (A + Bt)e^{\lambda t} + 0 \cdot Be^{\lambda t} = 0$ ofwel $0 = 0$.
 Dus alle functies van de vorm $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda t}$ zijn oplossing van de differentiaalvergelijking.

- 60 a** De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$
 $(\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0$
 $\lambda = -2 \vee \lambda = -4$

Dus $y(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t}$ is de algemene oplossing.

$$y(0) = 1 \text{ geeft } A + B = 1$$

$$y(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t} \text{ geeft } y'(t) = -2Ae^{-2t} - 4Be^{-4t}$$

$$y'(0) = -1 \text{ geeft } -2A - 4B = -1$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - 4B = -1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 2A + 2B = 2 \\ -2A - 4B = -1 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} -2B = 1 \\ B = -\frac{1}{2} \end{matrix} \left. \begin{matrix} B = -\frac{1}{2} \\ A + B = 1 \end{matrix} \right\} A = 1\frac{1}{2}$$

De gevraagde oplossing is $y(t) = 1\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$.

- b** De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$
 $(\lambda + 3)^2 - 9 + 10 = 0$
 $(\lambda + 3)^2 = -1$
 $(\lambda + 3)^2 = i^2$
 $\lambda + 3 = i \vee \lambda + 3 = -i$
 $\lambda = -3 + i \vee \lambda + 3 = -3 - i$

Dus $y(t) = (A \cos(t) + B \sin(t)) \cdot e^{-3t}$ is de algemene oplossing.

$$y(0) = 1 \text{ geeft } A = 1$$

$$y(t) = (A \cos(t) + B \sin(t)) \cdot e^{-3t} \text{ geeft}$$

$$y'(t) = (-A \sin(t) + B \cos(t)) \cdot e^{-3t} + (A \cos(t) + B \sin(t)) \cdot -3e^{-3t} = ((B - 3A) \cos(t) - (A + 3B) \sin(t)) \cdot e^{-3t}$$

$$y'(0) = -1 \text{ geeft } B - 3A = -1$$

$$A = 1 \text{ en } B - 3A = -1 \text{ geeft } B = 2.$$

De gevraagde oplossing is $y(t) = (\cos(t) + 2 \sin(t)) \cdot e^{-3t}$.

- c** De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$
 $(\lambda - 4)^2 = 0$
 $\lambda = 4$

Dus $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{4t}$ is de algemene oplossing.

$$y(0) = 1 \text{ geeft } A = 1$$

$$y(t) = (A + Bt) \cdot e^{4t} \text{ geeft } y'(t) = B \cdot e^{4t} + (A + Bt) \cdot 4e^{4t}$$

$$y'(0) = -1 \text{ geeft } B + 4A = -1$$

$$A = 1 \text{ en } B + 4A = -1 \text{ geeft } B = -5.$$

De gevraagde oplossing is $y(t) = (1 - 5t) \cdot e^{4t}$.

- d** De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}i^2$$

$$\lambda = \frac{1}{2}i \vee \lambda = -\frac{1}{2}i$$

Dus $y(t) = (A \cos(\frac{1}{2}t) + B \sin(\frac{1}{2}t)) \cdot e^{0t} = A \cos(\frac{1}{2}t) + B \sin(\frac{1}{2}t)$ is de algemene oplossing.

$$y(0) = 1 \text{ geeft } A = 1$$

$$y(t) = A \cos(\frac{1}{2}t) + B \sin(\frac{1}{2}t) \text{ geeft } y'(t) = -\frac{1}{2}A \sin(\frac{1}{2}t) + \frac{1}{2}B \cos(\frac{1}{2}t)$$

$$y'(0) = -1 \text{ geeft } \frac{1}{2}B = -1, \text{ dus } B = -2.$$

De gevraagde oplossing is $y(t) = \cos(\frac{1}{2}t) - 2 \sin(\frac{1}{2}t)$.

- 61 a** $x = -\frac{dy}{dt} + y$ geeft $\frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}$

Substitutie van $x = -\frac{dy}{dt} + y$ en $\frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}$ in $\frac{dx}{dt} = 2x - 6y$ geeft

$$-\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2 \cdot \left(-\frac{dy}{dt} + y \right) - 6y$$

$$-\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -2\frac{dy}{dt} + 2y - 6y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0$$

b Uit $\frac{dy}{dt} = -x + y$, $x(0) = 1$ en $y(0) = -1$ volgt $\left[\frac{dy}{dt} \right]_{t=0} = -x(0) + y(0) = -1 + -1 = -2$.

c De karakteristieke vergelijking van $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0$ is

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda = -1 \vee \lambda = 4$$

Dus $y(t) = Ae^{-t} + Be^{4t}$ is de algemene oplossing.

$$y(0) = -1 \text{ geeft } A + B = -1$$

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{4t} \text{ geeft } y'(t) = -Ae^{-t} + 4Be^{4t}$$

$$y'(0) = -2 \text{ geeft } -A + 4B = -2$$

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ -A + 4B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5B = -3 \\ B = -\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Dus } y(t) = -\frac{2}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{4t} \text{ en } y'(t) = \frac{2}{5}e^{-t} - 2\frac{2}{5}e^{4t}.$$

$$x = -\frac{dy}{dt} + y \text{ geeft } x(t) = -\left(\frac{2}{5}e^{-t} - 2\frac{2}{5}e^{4t}\right) + -\frac{2}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{4t} = -\frac{2}{5}e^{-t} + 2\frac{2}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{4t} = -\frac{4}{5}e^{-t} + 1\frac{4}{5}e^{4t}$$

$$\text{Dus } x(t) = -\frac{4}{5}e^{-t} + 1\frac{4}{5}e^{4t} \text{ en } y(t) = -\frac{2}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{4t}.$$

- 62 a Als Jeroen het blokje loslaat dan gaat het naar boven, dus F is naar boven gericht en dus positief. Omdat $u < 0$ is $c > 0$.

b Uit $F = m \cdot a$ en $a = \frac{dv}{dt}$ volgt $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$.

Uit $F = -c \cdot u$ en $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ volgt $\frac{dv}{dt} = \frac{-c \cdot u}{m}$ ofwel $\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m} \cdot u$.

c $m = 1$ en $c = 1$ geeft $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{1} \cdot u = -u$.

v is de snelheid waarmee u verandert, dus $\frac{dv}{dt} = u$.

Het blokje wordt naar beneden getrokken tot $u = -1$ en wordt op $t = 0$ losgelaten.

Op het moment van loslaten, dus op $t = 0$, geldt $u(0) = -1$ en $v(0) = 0$.

Dus de beweging van het blokje wordt beschreven door het model

$$\frac{dv}{dt} = -u \wedge \frac{du}{dt} = v \text{ met } u(0) = -1 \text{ en } v(0) = 0.$$

d $\frac{du}{dt} = v$, dus $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$.

$$\frac{dv}{dt} = -u, \text{ dus } \frac{d^2u}{dt^2} = -u \text{ ofwel } \frac{d^2u}{dt^2} + u = 0.$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda^2 = i^2$$

$$\lambda = i \vee \lambda = -i$$

Dus $y(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ is de algemene oplossing.

$$u(0) = -1 \text{ geeft } A = -1$$

$$u(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \text{ geeft } u'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$$

$$u'(0) = v(0) = 0 \text{ geeft } B = 0$$

De gevraagde formule is $u(t) = -\cos(t)$.

Bladzijde 147

63 a $F = -40 \frac{du}{dt} - 72u$ en $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{2}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -20 \frac{du}{dt} - 36u$ ofwel $\frac{d^2u}{dt^2} + 20 \frac{du}{dt} + 36u = 0$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 20\lambda + 36 = 0$
 $(\lambda + 2)(\lambda + 18) = 0$
 $\lambda = -2 \vee \lambda = -18$

De oplossingen zijn van de vorm $u(t) = Ae^{-2t} + Be^{-18t}$.

$u(0) = 1$ geeft $A + B = 1$

$v(t) = \frac{du}{dt} = -2Ae^{-2t} - 18Be^{-18t}$

$v(0) = 2$ geeft $-2A - 18B = 2$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - 18B = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 2A + 2B = 2 \\ -2A - 18B = 2 \end{cases} + \frac{-16B = 4}{-16B = 4} + \begin{cases} B = -\frac{1}{4} \\ A + B = 1 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 2A + 2B = 2 \\ -2A - 18B = 2 \end{cases}} \right\} A = 1\frac{1}{4}$$

Dus $u(t) = 1\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-18t}$.

b $c = 72$, $k = 40$ en $m = 8$ geeft $D = \frac{40^2 - 4 \cdot 72 \cdot 8}{8^2} = -11$

$D < 0$, dus onderdamping ofwel gedempte trilling.

c Er moet gelden $D \geq 0$.

$c = 72$ en $k = 40$ geeft $D = \frac{40^2 - 4 \cdot 72 \cdot m}{m^2} = \frac{1600 - 288m}{m^2}$

$D \geq 0$ geeft $\frac{1600 - 288m}{m^2} \geq 0$

$1600 - 288m \geq 0$

$-288m \geq -1600$

$m \leq 5\frac{5}{9}$

Dus de maximale waarde van m waarvoor geen gedempte trillingen ontstaan als het voorwerp uit de evenwichtsstand wordt gebracht is $5\frac{5}{9}$ kg.

64 a $F = -1000 \frac{du}{dt} - 500u$ en $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{1000}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}u$ ofwel $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + \frac{1}{2}u = 0$.

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = 0$

$(\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0$

$(\lambda + \frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$

$(\lambda + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}i^2$

$\lambda + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}i \vee \lambda + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}i$

$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \vee \lambda = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

De oplossingen zijn van de vorm $u(t) = (A \cos(\frac{1}{2}t) + B \sin(\frac{1}{2}t)) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.

$u(0) = 1$ geeft $A = 1$

$v(t) = \frac{du}{dt} = (-\frac{1}{2}A \sin(\frac{1}{2}t) + \frac{1}{2}B \cos(\frac{1}{2}t)) \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + (A \cos(\frac{1}{2}t) + B \sin(\frac{1}{2}t)) \cdot (-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}t}$

$v(0) = 0$ geeft $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = 0$

$A = 1 \wedge \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = 0$ geeft $B = 1$

Dus $u(t) = (\cos(\frac{1}{2}t) + \sin(\frac{1}{2}t)) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.

b Er moet gelden $D \geq 0$.

$m = 1000$ en $c = 500$ geeft $D = \frac{k^2 - 4 \cdot 500 \cdot 1000}{1000^2} = \frac{k^2 - 2000000}{1000000}$

$D \geq 0$ geeft $\frac{k^2 - 2000000}{1000000} \geq 0$

$k^2 - 2000000 \geq 0$

$k^2 \geq 2000000$

$k \geq 1000\sqrt{2}$

Dus k moet minimaal $1000\sqrt{2}$ zijn opdat geen gedempte trillingen ontstaan als het voorwerp uit de evenwichtsstand wordt losgelaten.

Bladzijde 148

65 a $F = 0 \cdot \frac{du}{dt} - c \cdot u$ en $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{m}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{c}{m} \cdot u$ ofwel $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot u = 0$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0$

$$\lambda^2 = -\frac{c}{m}$$

$$\lambda^2 = \frac{c}{m} \cdot i^2$$

$$\lambda = i\sqrt{\frac{c}{m}} \vee \lambda = -i\sqrt{\frac{c}{m}}$$

De oplossingen zijn van de vorm $u(t) = A \cos\left(t\sqrt{\frac{c}{m}}\right) + B \sin\left(t\sqrt{\frac{c}{m}}\right)$.

De periode van u is $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$.

Dus $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$.

b $F = -k \cdot \frac{du}{dt} - c \cdot u$ en $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{m}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{c}{m} \cdot u$ ofwel $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{c}{m} \cdot u = 0$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{c}{m} = 0$.

$$D \geq 0 \text{ geeft } \left(\frac{k}{m}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{c}{m} \geq 0$$

$$\frac{k^2}{m^2} - \frac{4c}{m} \geq 0$$

$$\frac{k^2 - 4cm}{m^2} \geq 0$$

$$k^2 \geq 4cm$$

$$k \geq 2\sqrt{cm}$$

66 a $D = 0$ geeft $\frac{k^2 - 4cm}{m^2} = 0$

$$k^2 - 4cm = 0$$

$$k = 2\sqrt{cm} = 2\sqrt{25000 \cdot 30} \approx 1732 \text{ kg/s}$$

b $F = -1730 \frac{du}{dt} - 25000u$ en $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{50}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -34,6 \frac{du}{dt} - 500u$ ofwel $\frac{d^2u}{dt^2} + 34,6 \frac{du}{dt} + 500u = 0$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 34,6\lambda + 500 = 0$

$$(\lambda + 17,3)^2 - 299,29 + 500 = 0$$

$$(\lambda + 17,3)^2 = -200,71$$

$$(\lambda + 17,3)^2 = 200,71i^2$$

$$\lambda + 17,3 = i\sqrt{200,71} \vee \lambda + 17,3 = -i\sqrt{200,71}$$

$$\lambda = -17,3 + i\sqrt{200,71} \vee \lambda = -17,3 - i\sqrt{200,71}$$

De oplossingen zijn van de vorm $u(t) = (A \cos(t\sqrt{200,71}) + B \sin(t\sqrt{200,71})) \cdot e^{-17,3t}$.

De eigenfrequentie van het veersysteem is $\frac{\sqrt{200,71}}{2\pi} \approx 2,3 \text{ Hz}$.

c 70 omwentelingen per minuut is $\frac{70}{60} \approx 1,17$ omwentelingen per seconde.

Het veersysteem krijgt dus ongeveer 2,34 keer per seconde een duw naar beneden waardoor resonantie kan ontstaan.

67 a Er moet gelden $D = 0$.

$$m = 1000 \text{ en } c = 200000 \text{ geeft } D = \frac{k^2 - 4 \cdot 200000 \cdot 1000}{1000^2} = \frac{k^2 - 800000000}{1000000}$$

$$D = 0 \text{ geeft } \frac{k^2 - 800000000}{1000000} = 0$$

$$k^2 - 800000000 = 0$$

$$k^2 = 800000000$$

$$k = \sqrt{800000000}$$

$$\text{Dus } k = 20000\sqrt{2}.$$

b $F = -20\,000\sqrt{2} \cdot \frac{du}{dt} - 200\,000u$ en $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{1000}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -20\sqrt{2} \cdot \frac{du}{dt} - 200u$ ofwel

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 20\sqrt{2} \cdot \frac{du}{dt} + 200u = 0$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 20\sqrt{2} \cdot \lambda + 200 = 0$.

$$D = 0, \text{ dus } \lambda = -\frac{20\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2}.$$

De oplossingen zijn van de vorm $u(t) = (A + Bt) \cdot e^{-10t\sqrt{2}}$.

$u(0) = 1,5$ geeft $A = 1,5$

$$v(t) = \frac{du}{dt} = B e^{-10t\sqrt{2}} + (A + Bt) \cdot (-10\sqrt{2}) e^{-10t\sqrt{2}}$$

$v(0) = 0$ geeft $B - 10A\sqrt{2} = 0$

$$A = 1,5 \wedge B - 10A\sqrt{2} = 0 \text{ geeft } B = 15\sqrt{2}$$

$$\text{Dus } u(t) = (1,5 + 15t\sqrt{2}) \cdot e^{-10t\sqrt{2}}.$$

c Los op $u(t) = 0,01$.

Voer in $y_1 = (1,5 + 15x\sqrt{2}) \cdot e^{-10x\sqrt{2}}$ en $y_2 = 0,01$.

Intersect geeft $x \approx 0,502$.

Dus na ongeveer een halve seconde is de uitwijking minder dan 1 cm.

Diagnostische toets

Bladzijde 150

1 a $\frac{dT}{dt} = c(T - 18)$

$$\text{Op } t = 1 \text{ is } T \approx \frac{70 + 60}{2} = 65^\circ\text{C en } \frac{dT}{dt} \approx \frac{60 - 70}{2} = -5^\circ\text{C/min.}$$

$$\text{Dit geeft } c \cdot (65 - 18) \approx -5, \text{ dus } c \approx \frac{-5}{47} \approx -0,106.$$

$$\text{Dus } \frac{dT}{dt} = -0,106(T - 18) \text{ met } T \text{ in } ^\circ\text{C en } t \text{ in minuten.}$$

b $c \approx \frac{1}{60} \cdot \frac{-5}{47} \approx -0,00177$

$$\text{Dus } \frac{dT}{dt} = -0,00177(T - 18) \text{ met } T \text{ in } ^\circ\text{C en } t \text{ in seconden.}$$

2 a F_Z is de luchtweerstand in newton en F_W is de wrijvingskracht in newton.

Resulterende kracht $F_R = F_E - F_L - F_W = 755 - 0,4v^2 - 10v$.

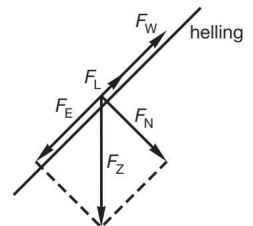
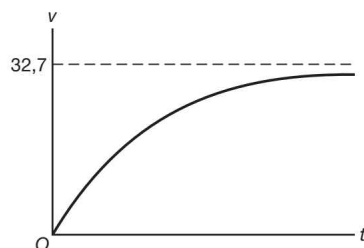
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{755 - 0,4v^2 - 10v}{110} = 6\frac{19}{22} - \frac{1}{275}v^2 - \frac{1}{11}v \text{ met } v \text{ in m/s en } t \text{ in seconden.}$$

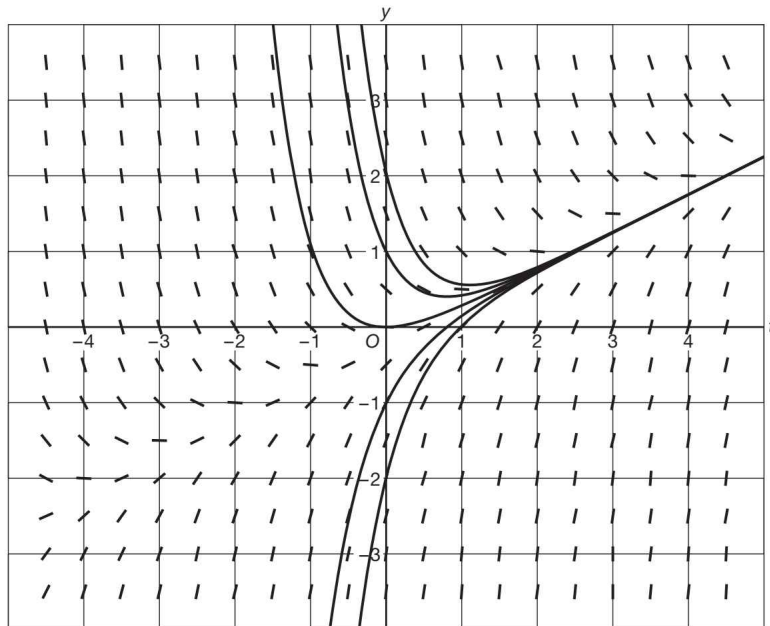
b $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $6\frac{19}{22} - \frac{1}{275}v^2 - \frac{1}{11}v = 0$

$$\text{Voer in } y_1 = 6\frac{19}{22} - \frac{1}{275}x^2 - \frac{1}{11}x.$$

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 32,7$.

De grenswaarde van zijn snelheid is ongeveer 32,7 m/s.



3 a

b Stel $k: y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt} \right]_{A(-1, -2)} = -1 + 4 = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3t + b \\ \text{door } A(-1, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 + b = -2 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $k: y = 3t + 1$.

c $\frac{dy}{dt} = -1$ geeft $t - 2y = -1$ ofwel $t = 2y - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Substitutie van } t = 2y - 1 \text{ in } y = -t + 5 \text{ geeft } y &= -(2y - 1) + 5 \\ y &= -2y + 1 + 5 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

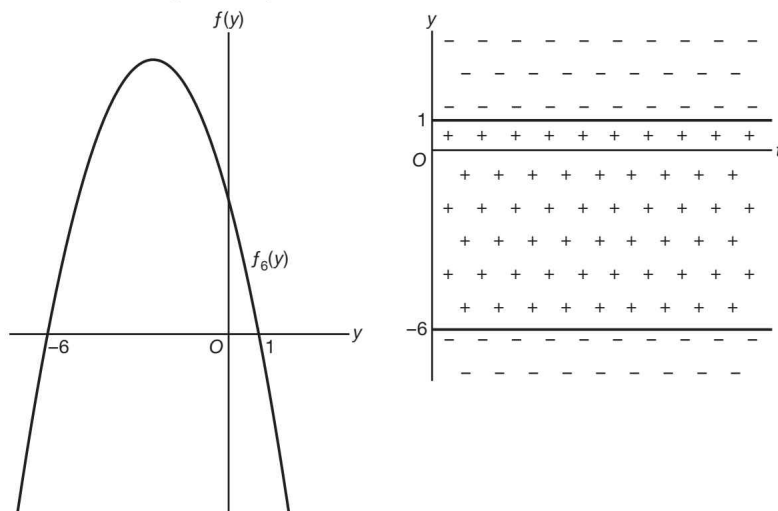
$$y = 2 \text{ geeft } t = 4 - 1 = 3$$

Dus $B(3, 2)$.

d $\frac{dy}{dt} = 0$ geeft $t - 2y = 0$ ofwel $y = \frac{1}{2}t$.

De kromme met vergelijking $y = \frac{1}{2}t$ gaat door de toppen van de oplossingskrommen.

4 a $f_0(y) = 0$ geeft $-y^2 - 5y + 6 = 0$
 $y^2 + 5y - 6 = 0$
 $(y - 1)(y + 6) = 0$
 $y = 1 \vee y = -6$



De lijn $y = 1$ is horizontale asymptoot van de oplossingskrommen met $-6 < y(0) < 1 \vee y(0) > 1$.

- b De oplossingskrommen zijn dalend als $f_p(y) < 0$ voor elke waarde van y . Hieruit volgt dat voor de

discriminant van $\frac{dy}{dt} = -y^2 - 5y + p$ geldt $D < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} D = 25 + 4p \\ D < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 25 + 4p < 0 \\ 4p < -25 \\ p < -6\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus voor $p < -6\frac{1}{4}$ zijn alle oplossingskrommen dalend.

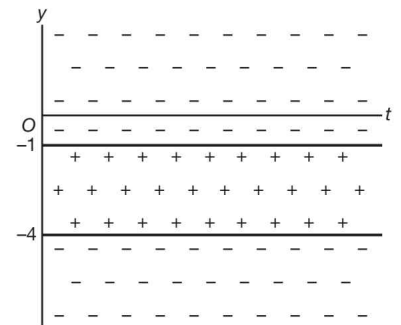
- c $f_p(y) = 0$ voor $y = -1$ geeft $-1 + 5 + p = 0$, dus $p = -4$.

$$\begin{aligned} f_{-4}(y) = 0 &\text{ geeft } -y^2 - 5y - 4 = 0 \\ y^2 + 5y + 4 &= 0 \\ y^2 + 5y + 4 &= 0 \\ (y + 1)(y + 4) &= 0 \\ y = -1 \vee y = -4 \end{aligned}$$

Dus voor de oplossingskrommen die gaan door de punten (t, y) met $-4 < y < -1 \vee y > -1$ is de lijn $y = -1$ horizontale asymptoot als $p = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} \left[\frac{dy}{dt} \right]_{A(-1, -1)} = -1 + 5 + p \\ \frac{dy}{dt} = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + 5 + p = 3 \\ p = -1 \end{array}$$

Voor $p = -1$ raakt een oplossingskromme de lijn $l: y = 3t + 2$ in het punt $A(-1, -1)$.



Bladzijde 151

- 5 a Stel $y = at + b$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = -2t + y - 1$ geeft

$$a = -2t + at + b - 1$$

$$a = (a - 2)t + b - 1$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$a - 2 = 0 \wedge a = b - 1$$

$$a = 2 \wedge 2 = b - 1$$

$$a = 2 \wedge b = 3$$

Hiermee is aangetoond dat de differentiaalvergelijking een lineaire formule als oplossing heeft.

Deze formule is $y = 2t + 3$.

- b Cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$, dus $(t + 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2$.

Door $P(2, 4)$ geeft $r^2 = (2 + 1)^2 + (4 - 3)^2 = 10$.

$(t + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ differentiëren naar t geeft $2(t + 1) + 2(y - 3) \cdot y' = 0$

$$2(y - 3) \cdot y' = -2(t + 1)$$

$$y' = \frac{-2(t + 1)}{2(y - 3)} = \frac{-t - 1}{y - 3} = \frac{1 + t}{3 - y}$$

Dus de cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$ door het punt $P(2, 4)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking en dus is de cirkel een oplossingskromme.

6 a $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$ geeft $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{t} dt$

$$\ln(y) = \ln(t) + c_1$$

$$\ln(y) = \ln(t) + \ln(e^{c_1})$$

$$\ln(y) = \ln(e^{c_1} t)$$

$$y = e^{c_1} t$$

$$y = ct \quad (c > 0)$$

b $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$ geeft $\int y dy = \int t dt$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} t^2 + c$$

c $\frac{dy}{dt} = y - ty = y(1 - t)$ geeft $\int \frac{1}{y} dy = \int (1 - t) dt$

$$\ln(y) = t - \frac{1}{2} t^2 + c_1$$

$$y = e^{t - \frac{1}{2} t^2 + c_1}$$

$$y = e^{c_1} \cdot e^{t - \frac{1}{2} t^2}$$

$$y = c e^{t - \frac{1}{2} t^2} \quad (c > 0)$$

$$\text{d } \frac{dy}{dt} = \frac{t+3}{2-2y} \text{ geeft } \int (2-2y) dy = \int (t+3) dt$$

$$2y - y^2 = \frac{1}{2}t^2 + 3t + c$$

- 7 a** Stel $y = at + b$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = y + t + 1$ geeft

$$a = at + b + t + 1$$

$$a = (a+1)t + b + 1$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$a + 1 = 0 \wedge a = b + 1$$

$$a = -1 \wedge b = -2$$

Dus $y = -t - 2$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = y \text{ geeft } y(t) = ce^t$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^t - t - 2$.

- b** Stel $y = A \cdot e^t$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \cdot e^t$ en $\frac{dy}{dt} = A \cdot e^t$ in $\frac{dy}{dt} = -3y - 2e^t$ geeft

$$A \cdot e^t = -3A \cdot e^t - 2e^t$$

$$4Ae^t = -2e^t$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus $4A = -2$ ofwel $A = -\frac{1}{2}$.

Dus $y = -\frac{1}{2}e^t$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -3y \text{ geeft } y(t) = ce^{-3t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^{-3t} - \frac{1}{2}e^t$.

- c** Stel $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ en $\frac{dy}{dt} = A \cos(t) - B \sin(t)$ in $\frac{dy}{dt} = y + \sin(t) + 4 \cos(t)$ geeft

$$A \cos(t) - B \sin(t) = A \sin(t) + B \cos(t) + \sin(t) + 4 \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = (B+4) \cos(t) - (A-1) \sin(t)$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$A = B + 4 \wedge B = -A - 1$$

$$A = -A - 1 + 4 \wedge B = -A - 1$$

$$2A = 3 \wedge B = -A - 1$$

$$A = 1\frac{1}{2} \wedge B = -A - 1$$

$$A = 1\frac{1}{2} \wedge B = -2\frac{1}{2}$$

Dus $y = 1\frac{1}{2} \sin(t) - 2\frac{1}{2} \cos(t)$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = y \text{ geeft } y(t) = ce^t$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^t + 1\frac{1}{2} \sin(t) - 2\frac{1}{2} \cos(t)$.

- d** Stel $y = at + b$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = t^2 - ty - t + 1$ geeft

$$a = t^2 - t(at + b) - t + 1$$

$$a = t^2 - at^2 - bt - t + 1$$

$$a = (1-a)t^2 - (b+1)t + 1$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$1-a = 0 \wedge b+1 = 0 \wedge a = 1$$

$$a = 1 \wedge b = -1$$

Dus $y = t - 1$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -ty \text{ geeft } \int \frac{1}{y} dy = \int -t dt$$

$$\ln(y) = -\frac{1}{2}t^2 + c_1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}t^2 + c_1}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot e^{c_1}$$

$$y = ce^{-\frac{1}{2}t^2} (c > 0)$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^{-\frac{1}{2}t^2} + t - 1$ met $c > 0$.

8 a $\frac{dN}{dt} = N \left(1 - \frac{N}{665} \right) = N - \frac{1}{665} N^2$

Substitutie van $N = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u} - \frac{1}{665} \cdot \frac{1}{u^2}$
 $\frac{du}{dt} = \frac{1}{665} - u$

$u(t) = \frac{1}{665}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = \frac{1}{665} - u$.

$\frac{du}{dt} = -u$ geeft $u(t) = c_1 e^{-t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = \frac{1}{665} - u$ is $u(t) = c_1 e^{-t} + \frac{1}{665}$.

$N = \frac{1}{u}$ geeft $N(t) = \frac{1}{c_1 e^{-t} + \frac{1}{665}} = \frac{665}{665 c_1 e^{-t} + 1}$

De algemene oplossing is $N(t) = \frac{665}{1 + c e^{-t}}$.

$N(0) = 10$ geeft $\frac{665}{1 + c e^0} = 10$

$$\frac{665}{1 + c} = 10$$

$$1 + c = 66,5$$

$$c = 65,5$$

Dus $N = \frac{665}{1 + 65,5 e^{-t}}$.

De grenswaarde is 665, dus los op $N = 660$.

Voer in $y_1 = \frac{665}{1 + 65,5 e^{-x}}$ en $y_2 = 660$.

Intersect geeft $x \approx 9,08$.

Dus na ongeveer 9,08 uur ≈ 545 minuten verschilt N voor het eerst minder dan vijf van de grenswaarde.

9 a De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$

$$(\lambda + 5)^2 = 0$$

$$\lambda = -5$$

Dus $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{-5t}$ is de algemene oplossing.

$y(0) = -2$ geeft $A = -2$

$y(t) = (A + Bt) \cdot e^{-5t}$ geeft $y'(t) = B \cdot e^{-5t} + (A + Bt) \cdot -5 e^{-5t}$

$y'(0) = 3$ geeft $B - 5A = 3$

$A = -2$ en $B - 5A = 3$ geeft $B = -7$

De gevraagde oplossing is $y(t) = (-2 - 7t) \cdot e^{-5t}$.

b De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 - 4 + 8 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = -4$$

$$(\lambda - 2)^2 = 4i^2$$

$$\lambda - 2 = 2i \vee \lambda - 2 = -2i$$

$$\lambda = 2 + 2i \vee \lambda = 2 - 2i$$

Dus $y(t) = (A \cos(2t) + B \sin(2t)) \cdot e^{2t}$ is de algemene oplossing.

$y(0) = -2$ geeft $A = -2$

$y(t) = (A \cos(2t) + B \sin(2t)) \cdot e^{2t}$ geeft

$y'(t) = (-2A \sin(2t) + 2B \cos(2t)) \cdot e^{2t} + (A \cos(2t) + B \sin(2t)) \cdot 2 e^{2t} =$

$((2A + 2B) \cos(2t) + (-2A + 2B) \sin(2t)) \cdot e^{2t}$

$y'(0) = 3$ geeft $2A + 2B = 3$

$A = -2$ en $2A + 2B = 3$ geeft $B = 3\frac{1}{2}$

De gevraagde oplossing is $y(t) = (-2 \cos(2t) + 3\frac{1}{2} \sin(2t)) \cdot e^{2t}$.

- c De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$
 $(\lambda - 1)(\lambda + 6) = 0$
 $\lambda = 1 \vee \lambda = -6$

Dus $y(t) = Ae^t + Be^{-6t}$ is de algemene oplossing.

$$y(0) = -2 \text{ geeft } A + B = -2$$

$$y(t) = Ae^t + Be^{-6t} \text{ geeft } y'(t) = Ae^t - 6Be^{-6t}$$

$$y'(0) = 3 \text{ geeft } A - 6B = 3$$

$$\begin{cases} A + B = -2 \\ A - 6B = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \hline 7B = -5 \\ B = -\frac{5}{7} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} B = -\frac{5}{7} \\ A + B = -2 \end{array} \right\} A = -1\frac{2}{7}$$

De gevraagde oplossing is $y(t) = -1\frac{2}{7}e^t - \frac{5}{7}e^{-6t}$.

- 10 a Er moet gelden $D = 0$.

$$m = 800 \text{ en } c = 125\,000 \text{ geeft } D = \frac{k^2 - 4 \cdot 125\,000 \cdot 800}{800^2} = \frac{k^2 - 400\,000\,000}{640\,000}$$

$$D = 0 \text{ geeft } \frac{k^2 - 400\,000\,000}{640\,000} = 0$$

$$k^2 - 400\,000\,000$$

$$k^2 = 400\,000\,000$$

$$k = \sqrt{400\,000\,000}$$

Dus $k = 20\,000$.

- b $F = -20\,000 \frac{du}{dt} - 125\,000u$ en $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{800}$ geeft $\frac{d^2u}{dt^2} = -25 \frac{du}{dt} - 156\frac{1}{4}u$ ofwel $\frac{d^2u}{dt^2} + 25 \frac{du}{dt} + 156\frac{1}{4}u = 0$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 25\lambda + 156\frac{1}{4} = 0$.

$$D = 0, \text{ dus } \lambda = -\frac{25}{2} = -12\frac{1}{2}.$$

De oplossingen zijn van de vorm $u(t) = (A + Bt) \cdot e^{-12\frac{1}{2}t}$.

$$u(0) = 1 \text{ geeft } A = 1$$

$$v(t) = \frac{du}{dt} = B e^{-12\frac{1}{2}t} + (A + Bt) \cdot -12\frac{1}{2} e^{-12\frac{1}{2}t}$$

$$v(0) = 0 \text{ geeft } B - 12\frac{1}{2}A = 0$$

$$A = 1 \wedge B - 12\frac{1}{2}A = 0 \text{ geeft } B = 12\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } u(t) = (1 + 12\frac{1}{2}t) \cdot e^{-12\frac{1}{2}t}.$$

- c Los op $u(t) = 0,001$.

$$\text{Voer in } y_1 = (1 + 12\frac{1}{2}x) \cdot e^{-12\frac{1}{2}x} \text{ en } y_2 = 0,001.$$

Intersect geeft $x \approx 0,739$.

Dus na ongeveer 0,7 seconde is de uitwijking minder dan 1 mm.