

11 Lineaire algebra

Voorkennis Matrices

Bladzijde 81

1 a A is een 3×3 -matrix en B is een 2×3 -matrix, dus $A \cdot B$ kan niet.

b De GR geeft $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

c B is een 2×3 -matrix en C is een 2×2 -matrix, dus $B \cdot C$ kan niet.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B \\ \hline C = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 2b & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & 5a & 10a \\ 2b & 4b & 11b \end{pmatrix} = C \cdot B \end{array}$$

e De GR geeft $A^3 = \begin{pmatrix} 14 & 24 & 15 \\ 5 & 1 & 11 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & 2a \\ 2b & b \end{pmatrix} = C \\ \hline C = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 2b & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^2 + 4ab & 2a^2 + 2ab \\ 2ab + 2b^2 & 4ab + b^2 \end{pmatrix} = C^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = A \\ \hline A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = A^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = A \\ \hline A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} = A^3 \end{array}$$

b $A^{10} = \begin{pmatrix} a^{10} & 0 \\ 0 & b^{10} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} = A \cdot B \end{array}$$

Als $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan geldt $ac = 1$ ofwel $c = \frac{1}{a}$ en $bd = 1$ ofwel $d = \frac{1}{b}$.

d $C^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$

e $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

3

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4a+c & 4b+d \\ 3a+c & 3b+d \end{pmatrix} = A \cdot B \end{array}$$

Als $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan geldt

$$4a + c = 1 \wedge 3a + c = 0$$

$$4a + c = 1 \wedge c = -3a$$

$$4a - 3a = 1 \wedge c = -3a$$

$$a = 1 \wedge c = -3$$

$$4b + d = 0 \wedge 3b + d = 1$$

$$d = -4b \wedge 3b + d = 1$$

$$d = -4b \wedge 3b - 4b = 1$$

$$d = -4b \wedge -b = 1$$

$$d = 4 \wedge b = -1$$

Bladzijde 83**4**

a De GR geeft $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -7$.

Het stelsel heeft één oplossing.

b De GR geeft $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dus de oplossing is $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

c De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Dus de oplossing is $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

5

a $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot (b \cdot c - 0 \cdot 0) - 0 \cdot (0 \cdot c - 0 \cdot 0) + 0 \cdot (0 \cdot 0 - b \cdot 0) = abc$

b De GR geeft $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24$ en $abcd = 24$.

De GR geeft $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 8000$ en $abcd = 8000$.

De GR geeft $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = -18$ en $abcd = -18$.

Er lijkt te gelden $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$.

11

11.1 Matrixrekening met GeoGebra

Bladzijde 84

- 1 a $M^2 = \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}$ en $\det(M) = 0$
- b $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 27 & 18 \end{pmatrix}$
- c $N = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$ geeft $\text{rref}[N] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$, dus de oplossing is $(a, b) = (-1, 2)$.
- d $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus de oplossing is $(a, b) = (-1, 2)$.

- 2 a *
- b De hoek tussen OA en OB is steeds 45° .
Er geldt steeds $\frac{OB}{OA} = \sqrt{2}$.
- c $A(4, 0)$
- d $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
Dus $M^{-1} \cdot B = A$.

Bladzijde 85

- 3 a rotatie om O over 90°
- b spiegeling in de lijn $y = -x$
- c rotatie om O over -45° en vermenigvuldiging ten opzichte van O met $2\sqrt{2}$
- 4 a *
- b *
- c B beweegt over de lijn $y = 2x$.
- d B beweegt over de lijn $y = -\frac{1}{3}x$.
- e $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ en $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$
Beide determinanten zijn gelijk aan 0.
- f $\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -1 & d \end{vmatrix} = 0$ geeft $4d + 10 = 0$
 $4d = -10$
 $d = -2\frac{1}{2}$
- g Er moet gelden $\frac{c}{2} = \frac{d}{6} = -1\frac{1}{2}$, dus $c = 3$ en $d = 9$.

Bladzijde 86

- 5 a *
- b *
- c *
- d *
- e rotatie om O over α
- f $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

6 a $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

De uitkomsten zijn de kolommen van $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b $M = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} -9 \\ 24 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

7 a *

b *

c $a = 1,5$ en $a = -1$

d Bij $a = 1,5$ hoort $\lambda = 4$ en bij $a = -1$ hoort $\lambda = -1$.

Bladzijde 87

8 a *

b $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c $\lambda = 4$

9 a eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bijbehorende eigenwaarde 3

eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en bijbehorende eigenwaarde -3

b eigenvector $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ en bijbehorende eigenwaarde -4

eigenvector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bijbehorende eigenwaarde 5

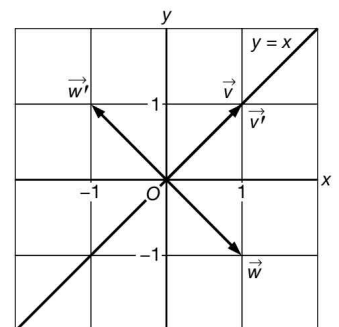
c eigenvector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en bijbehorende eigenwaarde 4

eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en bijbehorende eigenwaarde -3

- 10** Bij M hoort een rotatie om O over 90° . Na een rotatie om O over 90° is het niet mogelijk dat het beeld van een vector dezelfde of tegengestelde richting heeft als de originele vector. Dus M heeft geen eigenvectoren.

11 eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bijbehorende eigenwaarde 1

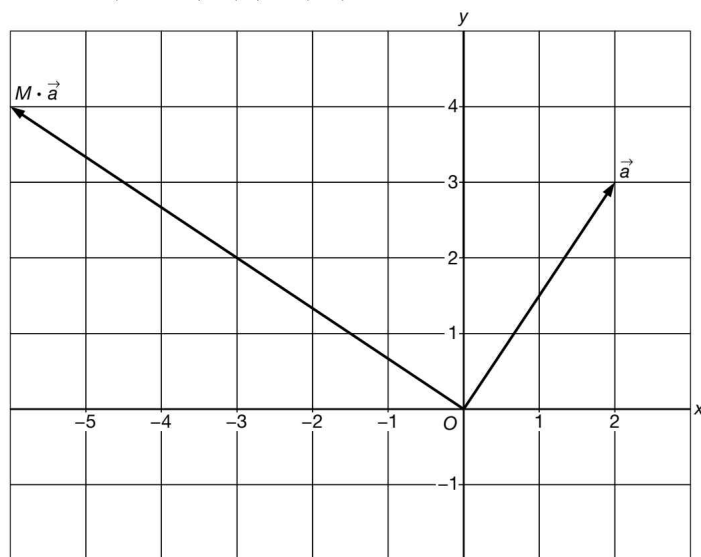
eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en bijbehorende eigenwaarde -1



11.2 Lineaire afbeeldingen

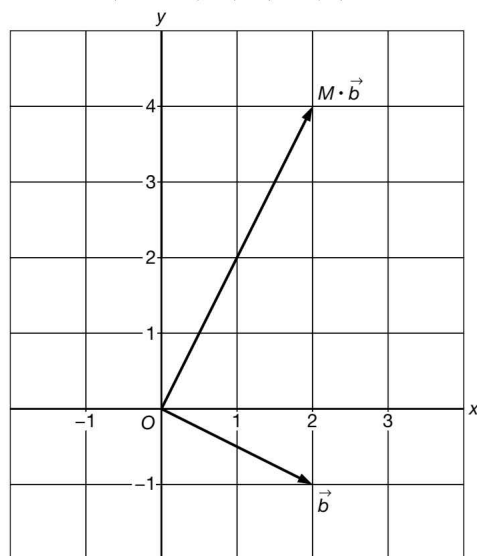
Bladzijde 88

12 a $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$



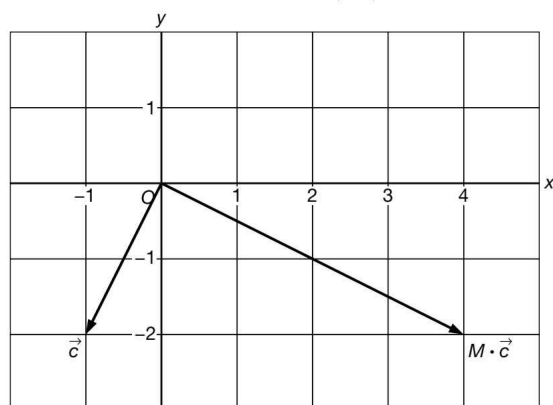
De hoek tussen $\vec{a}$ en $M \cdot \vec{a}$ is 90° en $|M \cdot \vec{a}| = 2 \cdot |\vec{a}|$.

b $M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



De hoek tussen $\vec{b}$ en $M \cdot \vec{b}$ is 90° en $|M \cdot \vec{b}| = 2 \cdot |\vec{b}|$.

c Bijvoorbeeld de vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ geeft $M \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Bladzijde 90

- 13** Hij krijgt zo een stelsel dat oneindig veel oplossingen heeft. Dat komt omdat beide punten op k liggen, en dus beide beelden bij spiegeling in k ook.

Bladzijde 91

14 a $M \cdot \vec{0} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

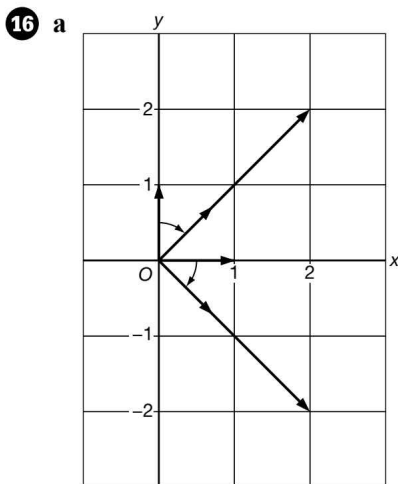
b $M \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v_1 + w_1) + b(v_2 + w_2) \\ c(v_1 + w_1) + d(v_2 + w_2) \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} av_1 + aw_1 + bv_2 + bw_2 \\ cv_1 + cw_1 + dv_2 + dw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 + aw_1 + bw_2 \\ cv_1 + dv_2 + cw_1 + dw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aw_1 + bw_2 \\ cw_1 + dw_2 \end{pmatrix} = M \cdot \vec{v} + M \cdot \vec{w}$

c $M \cdot (\lambda \vec{v}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda v_1 + b\lambda v_2 \\ c\lambda v_1 + d\lambda v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(av_1 + bv_2) \\ \lambda(cv_1 + dv_2) \end{pmatrix} =$
 $\lambda \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} = \lambda \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \lambda(M \cdot \vec{v})$

15 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ geeft $p \cdot 1 + q \cdot 0 = a$ ofwel $p = a$, en $r \cdot 1 + s \cdot 0 = c$ ofwel $r = c$.

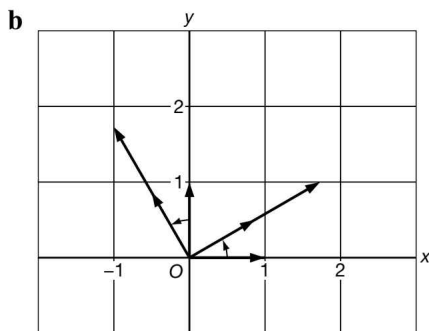
$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ geeft $p \cdot 0 + q \cdot 1 = b$ ofwel $q = b$, en $r \cdot 0 + s \cdot 1 = d$ ofwel $s = d$.

$M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ met $p = a$, $r = c$, $q = b$ en $s = d$ geeft $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

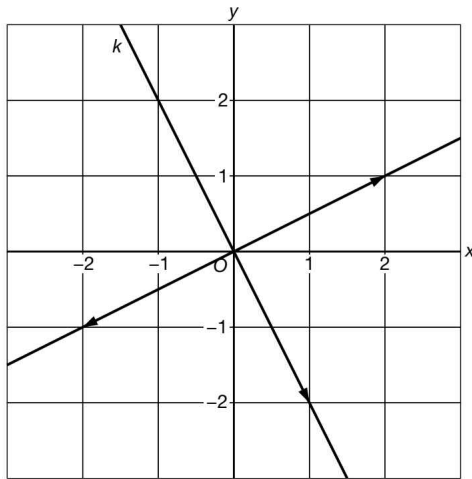
Dit geeft $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \end{pmatrix}$, dus $A'(-4, -16)$.



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Dit geeft $M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\sqrt{3} \\ 4 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $B'(1 + 4\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3})$.

17



Het beeld van $(1, -2)$ is $(1, -2)$.

Het beeld van $(2, 1)$ is $(-2, -1)$.

$$\text{Stel } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ geeft } a - 2b = 1 \text{ en } c - 2d = -2.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ geeft } 2a + b = -2 \text{ en } 2c + d = -1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - 2b = 1 \\ 2a + b = -2 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \Bigg| \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 2a - 4b = 2 \\ 2a + b = -2 \\ -5b = 4 \\ b = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5} \\ a - 2b = 1 \end{array} \right. - \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} a - 2 \cdot -\frac{4}{5} = 1, \text{ dus } a = -\frac{3}{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c - 2d = -2 \\ 2c + d = -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \Bigg| \text{geeft} \left\{ \begin{array}{l} 2c - 4d = -4 \\ 2c + d = -1 \\ \hline -5d = -3 \\ d = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \\ c - 2d = -2 \end{array} \right. \left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} c - 2d = -2 \\ 2c + d = -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \Bigg|} \right\} c - 2 \cdot \frac{3}{5} = -2, \text{ dus } c = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

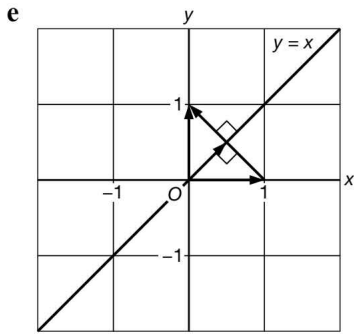
Dit geeft $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{2}{5} \\ 1\frac{4}{5} \end{pmatrix}$, dus $A'(-2\frac{2}{5}, 1\frac{4}{5})$.

18 a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

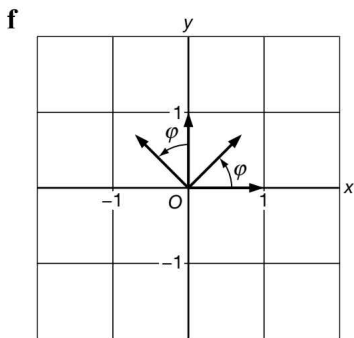
c $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, dus

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

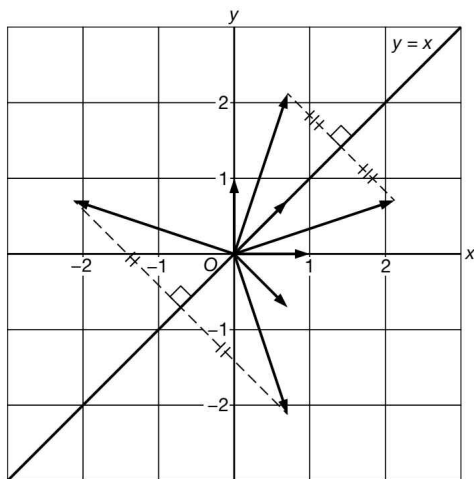


$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, dus

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

19 a Bij spiegeling in de lijn $y = 2$ wordt O afgebeeld op het punt $(0, 4)$ en niet op zichzelf. Bij spiegeling in de lijn $y = 2$ is dus geen matrix M te verzinnen waarvoor geldt $M \cdot \vec{0} = \vec{0}$. En dus is spiegeling in de lijn $y = 2$ geen lineaire afbeelding.

b Bij translatie over $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wordt O afgebeeld op het punt $(1, 2)$ en niet op zichzelf. Bij translatie over $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is dus geen matrix M te verzinnen waarvoor geldt $M \cdot \vec{0} = \vec{0}$. En dus is translatie over $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ geen lineaire afbeelding.



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Bladzijde 92

21 Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ geeft } 2a + 3b = 2 \text{ en } 2c + 3d = -1.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } 2b = 1 \text{ en } 2d = 1, \text{ dus } b = \frac{1}{2} \text{ en } d = \frac{1}{2}.$$

$$2a + 3b = 2 \text{ en } b = \frac{1}{2} \text{ geeft } 2a + 1\frac{1}{2} = 2 \text{ ofwel } 2a = \frac{1}{2}, \text{ dus } a = \frac{1}{4}.$$

$$2c + 3d = -1 \text{ en } d = \frac{1}{2} \text{ geeft } 2c + 1\frac{1}{2} = -1 \text{ ofwel } 2c = -2\frac{1}{2}, \text{ dus } c = -1\frac{1}{4}.$$

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

22 a $\vec{v}' = M \cdot \vec{v}$

$$M^{-1} \cdot \vec{v}' = M^{-1} \cdot M \cdot \vec{v}$$

$$M^{-1} \cdot \vec{v}' = I \cdot \vec{v}$$

$$M^{-1} \cdot \vec{v}' = \vec{v}$$

$$\text{Dus } \vec{v} = M^{-1} \cdot \vec{v}'.$$

b Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ geeft } 2a + 3b = 2 \text{ en } 2c + 3d = -1.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ geeft } -2a + 4b = 0 \text{ en } -2c + 4d = 4.$$

$$-2a + 4b = 0 \text{ ofwel } 2a = 4b$$

$$\text{Substitutie in } 2a + 3b = 2 \text{ geeft } 4b + 3b = 2$$

$$7b = 2$$

$$b = \frac{2}{7}$$

$$b = \frac{2}{7} \text{ geeft } 2a = \frac{8}{7}, \text{ dus } a = \frac{4}{7}.$$

$$-2c + 4d = 4 \text{ ofwel } 2c = 4d - 4$$

$$\text{Substitutie in } 2c + 3d = -1 \text{ geeft } 4d - 4 + 3d = -1$$

$$7d = 3$$

$$d = \frac{3}{7}$$

$$d = \frac{3}{7} \text{ geeft } 2c = \frac{12}{7} - 4 = -2\frac{2}{7}, \text{ dus } c = -1\frac{1}{7}.$$

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ -1\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ -1\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{4} \\ 15 \end{pmatrix}, \text{ dus } C(1\frac{1}{4}, 15).$$

23 a Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ geeft } -2a + b = 6 \text{ en } -2c + d = 6.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } 6a + 6b = -2 \text{ en } 6c + 6d = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a + b = 6 \\ 6a + 6b = -2 \end{array} \right| \begin{array}{l} 6 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} -12a + 6b = 36 \\ 6a + 6b = -2 \end{array} \right. - \\ \quad \quad \quad \frac{-18a}{-18a} = \frac{38}{-18} \quad \left. \begin{array}{l} a = \frac{38}{-18} = -2\frac{1}{9} \\ -2a + b = 6 \end{array} \right\} -2 \cdot -2\frac{1}{9} + b = 6, \text{ dus } b = 1\frac{7}{9}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2c + d = 6 \\ 6c + 6d = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 6 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} -12c + 6d = 36 \\ 6c + 6d = 1 \end{array} \right. - \\ \quad \quad \quad \frac{-18c}{-18c} = \frac{35}{-18} \quad \left. \begin{array}{l} c = \frac{35}{-18} = -1\frac{17}{18} \\ -2c + d = 6 \end{array} \right\} -2 \cdot -1\frac{17}{18} + d = 6, \text{ dus } d = 2\frac{1}{9}$$

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{9} & 1\frac{7}{9} \\ -1\frac{17}{18} & 2\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\text{De GR geeft } M^{-1} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{9} & 1\frac{7}{9} \\ -1\frac{17}{18} & 2\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

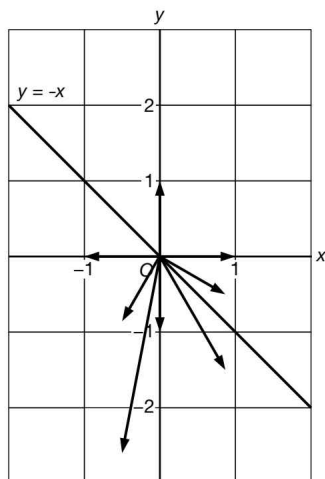
$$\text{Dus } M = M^{-1}.$$

b $M^2 = M \cdot M = M \cdot M^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c $M^{1000} = (M^2)^{500} = (I)^{500} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^{1001} = M \cdot M^{1000} = M \cdot I = M = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{9} & 1\frac{7}{9} \\ -1\frac{17}{18} & 2\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

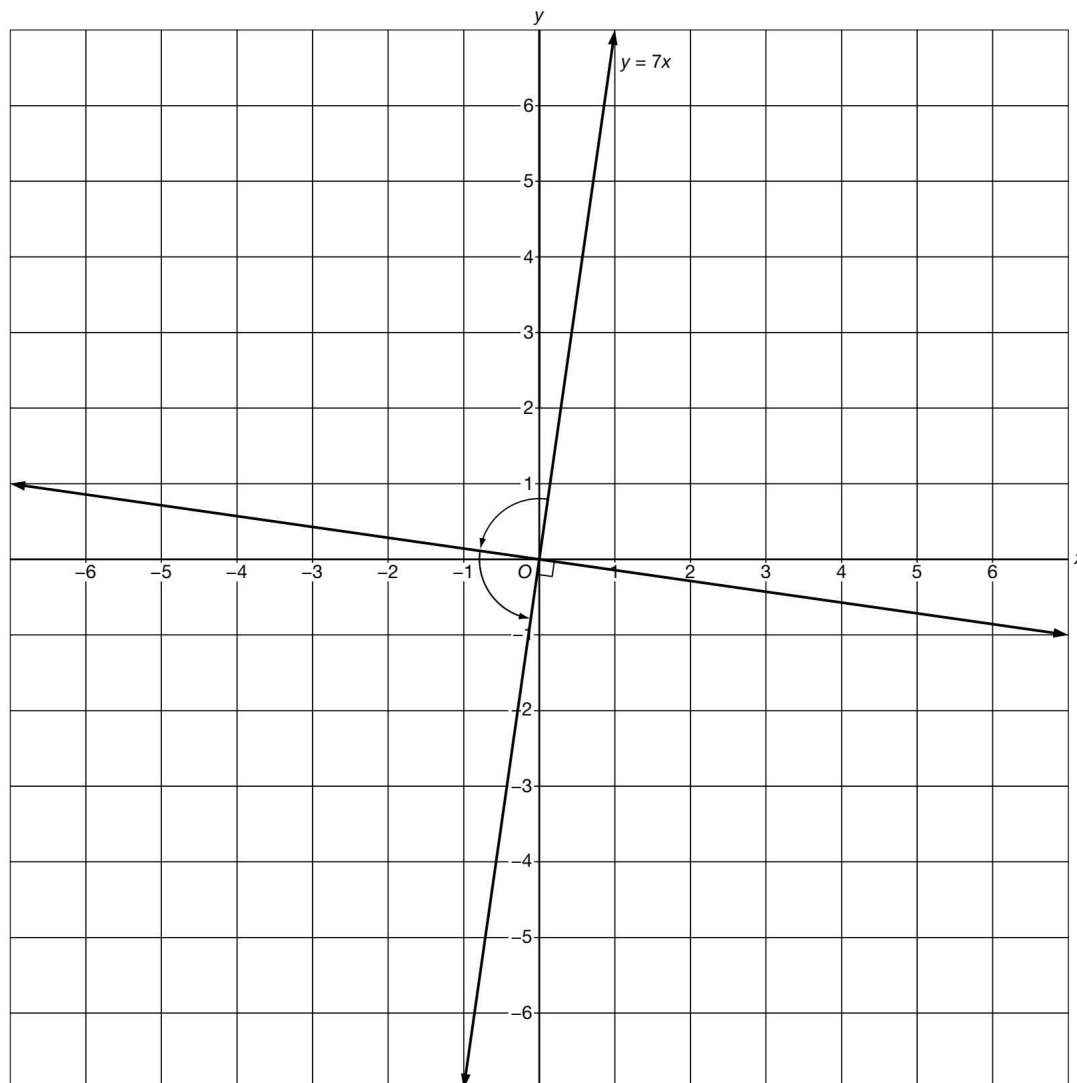
24 a



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ wordt afgebeeld op } \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ en } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ wordt afgebeeld op } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ dus } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dit geeft } M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -7\frac{1}{2} - 9\sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ dus } A'(-3 + 2\frac{1}{2}\sqrt{3}, -7\frac{1}{2} - 9\sqrt{3}).$$

b



Het beeld van $(1, 7)$ is $(-7, 1)$.

Het beeld van $(7, -1)$ is $(-1, -7)$.

Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } a + 7b = -7 \text{ en } c + 7d = 1.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ geeft } 7a - b = -1 \text{ en } 7c - d = -7.$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} a + 7b = -7 & 7 \\ 7a - b = -1 & 1 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 7a + 49b = -49 \\ 7a - b = -1 \end{array} \right. -$$

$$\left. \begin{array}{l} 50b = -48 \\ b = \frac{-48}{50} = -\frac{24}{25} \\ a + 7b = -7 \end{array} \right\} a + 7 \cdot -\frac{24}{25} = -7, \text{ dus } a = -\frac{7}{25}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} c + 7d = 1 & 7 \\ 7c - d = -7 & 1 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 7c + 49d = 7 \\ 7c - d = -7 \end{array} \right. -$$

$$\left. \begin{array}{l} 50d = 14 \\ d = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} \\ c + 7d = 1 \end{array} \right\} c + 7 \cdot \frac{7}{25} = 1, \text{ dus } c = -\frac{24}{25}$$

Dus $M = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$.

Dit geeft $M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{25} \\ -\frac{19}{25} \end{pmatrix}$, dus $B'(\frac{28}{25}, -\frac{19}{25})$.

- 25 a** Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan geldt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en dit geeft } a = \lambda \text{ en } c = 3\lambda$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en dit geeft } b = \lambda \text{ en } d = 3\lambda.$$

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 3\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} \text{ en } \det(M) = \lambda \cdot 3\lambda - \lambda \cdot 3\lambda = 3\lambda^2 - 3\lambda^2 = 0.$$

- b** Stel $k: y = ax$.

$$x = \lambda \text{ geeft } y = a\lambda \text{ en } x = \mu \text{ geeft } y = a\mu \text{ en dit geeft de matrix } M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ a\lambda & a\mu \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ a\lambda & a\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda c + \mu d \\ \lambda ac + \mu ad \end{pmatrix} \dots (1)$$

$$x = \lambda c + \mu d \text{ invullen bij } y = ax \text{ geeft } y = a(\lambda c + \mu d) = \lambda ac + \mu ad \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dat M alle punten van $\mathbb{R}^2$ op k afbeeldt, en hiermee is de stelling bewezen.

- c** Er geldt $\frac{2}{p} = \frac{4}{p+5}$
 $4p = 2(p+5)$
 $4p = 2p + 10$
 $2p = 10$
 $p = 5$

Voor $p = 5$ liggen beide kolomvectoren op de lijn $y = 2\frac{1}{2}x$.

Dus $l: y = 2\frac{1}{2}x$.

26 a $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$, dus $A'(2, 0, 9)$.

b $M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_B - z_B \\ x_B + 2y_B \\ -y_B + 2z_B \end{pmatrix}$, dus $B'(3x_B - z_B, x_B + 2y_B, -y_B + 2z_B)$.

Bladzijde 93

27 a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

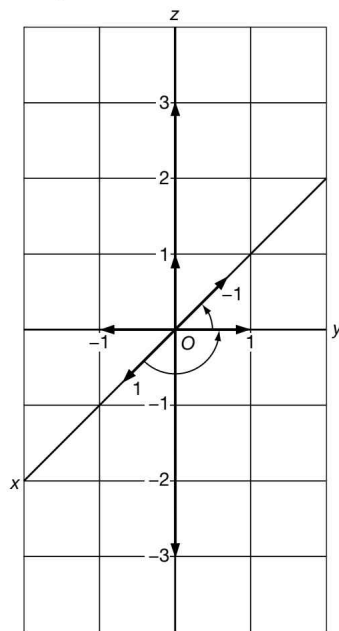
b $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Dus M is gelijk aan zijn inverse.

c $M^2 = M \cdot M = M \cdot M^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bladzijde 94

28 a



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Dus $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

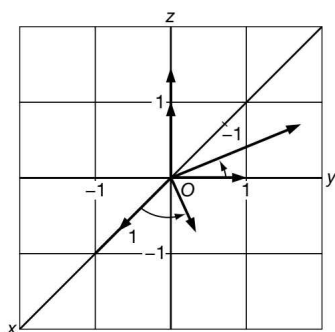
b $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$

Het beeld is $A'(3, -2, -12)$.

c $M^{-1} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Het origineel is $(-3, 2, -1\frac{1}{3})$.

29



De punten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$ liggen in V .

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

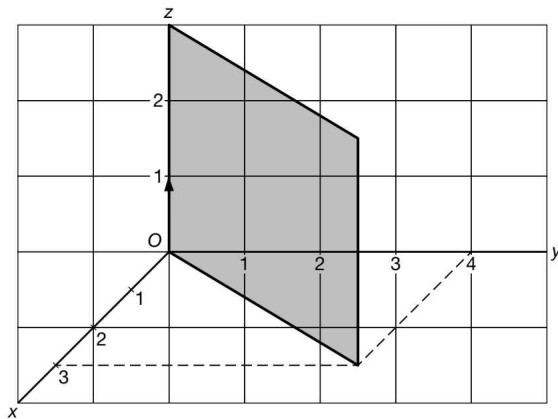
Twee richtingsvectoren van W zijn $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$n_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W: \sqrt{2} \cdot y + z = d \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } (1, 1, 0) \end{array} \right\} d = \sqrt{2}$$

$$\text{Dus } W: \sqrt{2} \cdot y + z = \sqrt{2}.$$

30



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ wordt afgebeeld op } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zie de figuur hiernaast.

De lijn k heeft vergelijking $4x - 3y = 0$.

$$\vec{r}_l = \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = c \\ \text{door } (1, 0) \end{array} \right\} c = 3$$

$$\text{Dus } l: 3x + 4y = 3.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 12x - 9y = 0 \\ 12x + 16y = 12 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} -25y = -12 \\ y = \frac{-12}{-25} = \frac{12}{25} \end{array} \right\} 4x - 3 \cdot \frac{12}{25} = 0, \text{ dus } x = \frac{9}{25}$$

$$\text{Dus } A\left(\frac{9}{25}, \frac{12}{25}\right).$$

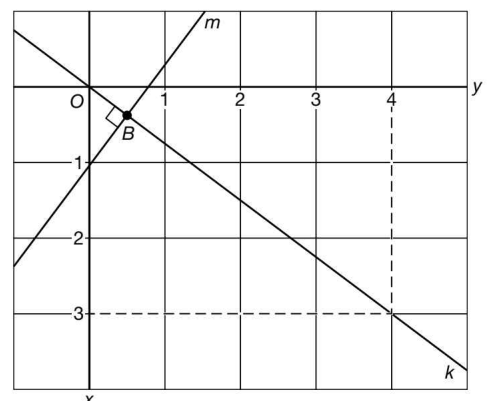
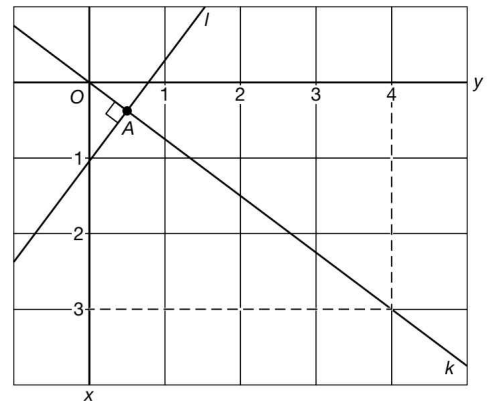
$$\text{Hieruit volgt dat } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ wordt afgebeeld op } \begin{pmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{12}{25} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zie de figuur hiernaast.

$$\vec{r}_m = \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_m = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = c \\ \text{door } (0, 1) \end{array} \right\} c = 4$$

$$\text{Dus } m: 3x + 4y = 4.$$



11

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 12x - 9y = 0 \\ 12x + 16y = 16 \\ -25y = -16 \\ y = \frac{-16}{-25} = \frac{16}{25} \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 12x - 9y = 0 \\ 12x + 16y = 16 \\ -25y = -16 \\ y = \frac{-16}{-25} = \frac{16}{25} \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}} \right\} 4x - 3 \cdot \frac{16}{25} = 0, \text{ dus } x = \frac{12}{25}$$

Dus $B\left(\frac{12}{25}, \frac{16}{25}\right)$.

Hieruit volgt dat $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ \frac{16}{25} \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{31 a } M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ dus } A'(1, 10).$$

b $P(x_P, y_P, z_P)$ is een punt van $\mathbb{R}^3$.

$$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_P + y_P - z_P \\ 2x_P + 4y_P + 2z_P \end{pmatrix}, \text{ dus het beeld van } P \text{ is } P'(3x_P + y_P - z_P, 2x_P + 4y_P + 2z_P)$$

en dit is een punt in $\mathbb{R}^2$.

Dus M beeldt alle punten van $\mathbb{R}^3$ af op $\mathbb{R}^2$.

$$\textbf{32 } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 0b + 0c \\ 5d + 0e + 0f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ 5d \end{pmatrix}, \text{ dus uit } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ volgt } 5a = -2 \text{ en } 5d = -1$$

ofwel $a = -\frac{2}{5}$ en $d = -\frac{1}{5}$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b \\ 3e \end{pmatrix}, \text{ dus uit } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ volgt } 3b = 3 \text{ en } 3e = 0 \text{ ofwel } b = 1 \text{ en } e = 0.$$

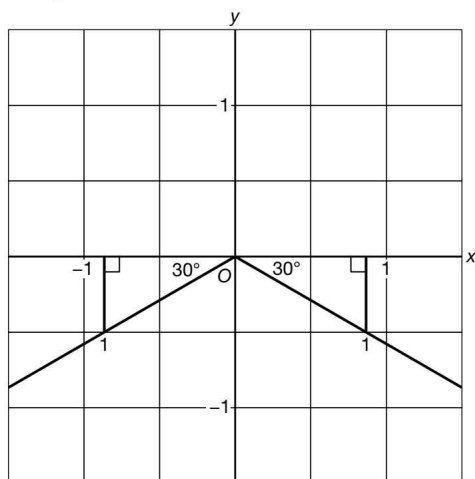
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c \\ 4f \end{pmatrix}, \text{ dus uit } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ volgt } 4c = 0 \text{ en } 4f = 4 \text{ ofwel } c = 0 \text{ en } f = 1.$$

Bladzijde 95

$$\textbf{33 } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } T \text{ is in figuur 11.3 op de juiste plaats getekend.}$$

Bladzijde 97

34 a

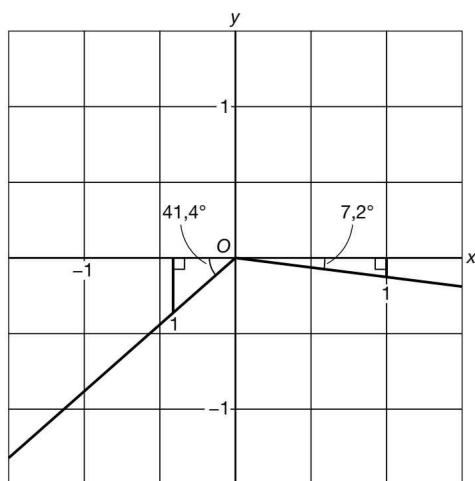


$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -\cos(30^\circ) \\ -\sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \cos(30^\circ) \\ -\sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, en

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

b

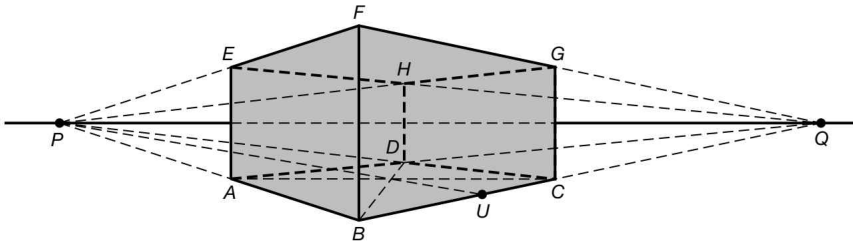


$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(41,4^\circ) \\ -\frac{1}{2}\sin(41,4^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,38 \\ -0,33 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \cos(7,2^\circ) \\ -\sin(7,2^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,99 \\ -0,13 \end{pmatrix}$, en

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dus } N = \begin{pmatrix} -0,38 & 0,99 & 0 \\ -0,33 & -0,13 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 35** In de figuur hieronder is in de onderste figuur op bladzijde 96 van het leerboek het midden U van de ribbe BC getekend.



Kies je het assenstelsel zo dat C de oorsprong is en B het punt $(2, 0, 0)$, dan is U het punt $(1, 0, 0)$. Er geldt niet $M \cdot \vec{b} = 2(M \cdot \vec{u})$. Dus bij het afbeelden van $\mathbb{R}^3$ op $\mathbb{R}^2$ bij centrale projectie geldt de regel $M \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(M \cdot \vec{v})$ niet. Er is dus geen sprake van een lineaire afbeelding, en dus kun je geen matrix opstellen die bij deze afbeelding hoort.

- 36** Kubus in figuur 11.4a

$$\text{Stel } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ geeft } 3a = 1 \text{ en } 3d = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } a = \frac{1}{3} \text{ en } d = -\frac{1}{2}.$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft } b = 1 \text{ en } e = 0.$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } c = 0 \text{ en } f = 1.$$

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kubus in figuur 11.4b

$$\text{Stel } N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

$$N \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } 3a = -2 \text{ en } 3d = 1, \text{ dus } a = -\frac{2}{3} \text{ en } d = \frac{1}{3}.$$

$$N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft } b = 1 \text{ en } e = 0.$$

$$N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } c = 0 \text{ en } f = 1.$$

$$\text{Dus } N = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

Bladzijde 99

- 37 a** Het punt $(3, 2)$ geeft $M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus het beeld is $(6, 4)$.

Het punt $(6, 4)$ geeft $M \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$, dus het beeld is $(12, 8)$.

De beelden liggen ook op k , waarbij geldt $(x_{\text{beeld}}, y_{\text{beeld}}) = (2x_{\text{origineel}}, 2y_{\text{origineel}})$.

- b** Het punt $(1, 1)$ geeft $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus het beeld is $(-1, -1)$.

Het punt $(2, 2)$ geeft $M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus het beeld is $(-2, -2)$.

De beelden liggen ook op l , waarbij geldt $(x_{\text{beeld}}, y_{\text{beeld}}) = (-x_{\text{origineel}}, -y_{\text{origineel}})$.

Bladzijde 101

- 38** Van de lijn $5x + 10y = 0$ is $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ een normaalvector.

Richtingsvectoren van de lijn $5x + 10y = 0$ staan loodrecht op de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Omdat $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$ staat $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ loodrecht op $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dus $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van de lijn $5x + 10y = 0$, dus de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ligt op de lijn $5x + 10y = 0$.

Dus $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ is een eigenvector.

Bladzijde 102

- 39** Stel M is een $m \times n$ -matrix en $\vec{v}$ is een $n \times 1$ -matrix, dan is $M \cdot \vec{v}$ een $m \times 1$ -matrix ... (1)
 Maar ook geldt $M \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$ waarbij $\lambda \vec{v}$ dezelfde afmeting heeft als $\vec{v}$, en dus een $n \times 1$ -matrix is. En dus is $M \cdot \vec{v}$ ook een $n \times 1$ -matrix ... (2)
 Uit (1) en (2) volgt $m = n$, dus dat M een $m \times m$ -matrix is.
 Dus M is een vierkante matrix.

40
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by - \lambda x \\ cx + dy - \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a - \lambda)x + by \\ cx + (d - \lambda)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

41 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -9 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geeft $3x = -x$, $-5x + 8y - 9z = -y$ en $-6x + 6y - 7z = -z$.

Uit $3x = -x$ volgt $x = 0$.

$x = 0$ en $-5x + 8y - 9z = -y$ geeft $9y - 9z = 0$ ofwel $y - z = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda = -1$ is $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -9 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geeft het stelsel $\begin{cases} 3x = 3x \\ -5x + 8y - 9z = 3y \\ -6x + 6y - 7z = 3z \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} 0x = 0 \\ -5x + 5y - 9z = 0 \\ -6x + 6y - 10z = 0 \end{cases}$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -9 & 0 \\ -6 & 6 & -10 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $z = 0$ en $x - y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda = 3$ is $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

42 $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$12 - 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = 5$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 2$ volgen uit $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $3x + 2y = 2x$ ofwel $x + 2y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 2$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 5$ volgen uit $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $3x + 2y = 5x$ ofwel $-2x + 2y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 5$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

43 Voer de matrix M in op de GR, en voer vervolgens in $y_1 = \det([A] - x \cdot \text{identity}(3))$ (TI) of $y_1 = \text{Det}(\text{Mat } A - x \cdot \text{Identity}(3))$ (Casio).

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 1$, $x = 5$ en $x = 13$.

Dus de eigenwaarden zijn $\lambda = 1$, $\lambda = 5$ en $\lambda = 13$.

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geeft $5x = x$, $5x + 4y + 3z = y$ en $10x + 9y + 10z = z$.

Uit $5x = x$ volgt $x = 0$.

$x = 0$ en $5x + 4y + 3z = y$ geeft $3y + 3z = 0$ ofwel $y + z = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 1$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geeft het stelsel $\begin{cases} 5x = 5x \\ 5x + 4y + 3z = 5y \\ 10x + 9y + 10z = 5z \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} 0x = 0x \\ 5x - y + 3z = 0 \\ 10x + 9y + 5z = 0 \end{cases}$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \\ 10 & 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{32}{55} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $x + \frac{32}{55}z = 0$ ofwel $x = -\frac{32}{55}z$ en $y - \frac{1}{11}z = 0$ ofwel $y = \frac{1}{11}z$.

$z = 55$ geeft bij $\lambda_2 = 5$ de eigenvector $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -32 \\ 5 \\ 55 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 13 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geeft $5x = 13x$, $5x + 4y + 3z = 13y$ en $10x + 9y + 10z = 13z$.

Uit $5x = 13x$ volgt $x = 0$.

$x = 0$ en $5x + 4y + 3z = 13y$ geeft $-9y + 3z = 0$ ofwel $3y - z = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_3 = 13$ is $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

44 Het beeld van $A(2, 3)$ is $A'(4, 6)$ geeft eigenwaarde $\lambda_1 = 2$. Een bijbehorende eigenvector is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Het beeld van $B(-2, 4)$ is $B'(-1, 2)$ geeft eigenwaarde $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Een bijbehorende eigenvector is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bladzijde 103

45 a $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 30 \\ 18 & 85 \end{pmatrix}$

$$3M = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 30 \\ 18 & 15 \end{pmatrix}$$

$$70I = 70 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 70 \end{pmatrix}$$

Dus $M^2 - 3M - 70I =$

$$\begin{pmatrix} 64 & 30 \\ 18 & 85 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 30 \\ 18 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 - (-6) - 70 & 30 - 30 - 0 \\ 18 - 18 - 0 & 85 - 15 - 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b $M^2 - 3M - 70I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ geeft $70I = M^2 - 3M$ ofwel $I = \frac{1}{70}M^2 - \frac{3}{70}M$

Vermenigvuldigen met M^{-1} geeft vervolgens $I \cdot M^{-1} = \frac{1}{70}M^2 \cdot M^{-1} - \frac{3}{70}M \cdot M^{-1}$

$$I \cdot M^{-1} = \frac{1}{70}M \cdot M \cdot M^{-1} - \frac{3}{70}M \cdot M^{-1}$$

$$I \cdot M^{-1} = \frac{1}{70}M \cdot I - \frac{3}{70}I$$

$$M^{-1} = \frac{1}{70}M - \frac{3}{70}I$$

$$\text{Dus } M^{-1} = \frac{1}{70} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \frac{3}{70} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{70} & \frac{10}{70} \\ \frac{6}{70} & \frac{5}{70} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{70} & 0 \\ 0 & \frac{3}{70} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{35} & \frac{1}{35} \end{pmatrix}.$$

c Uit $M^2 - 3M - 70I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ volgt $M^2 = 3M + 70I$.

$$\text{Dus } M^2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 70 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 30 \\ 18 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 & 0 \\ 0 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 30 \\ 18 & 85 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Uit } M^2 - 3M - 70I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ volgt } M^3 - 3M^2 - 70M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en dus } M^3 = 3M^2 + 70M.$$

$$\text{Dus } M^3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 64 & 30 \\ 18 & 85 \end{pmatrix} + 70 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 192 & 90 \\ 54 & 255 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -140 & 700 \\ 420 & 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 790 \\ 474 & 605 \end{pmatrix}.$$

46 a $\begin{pmatrix} 8 & p \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ geeft $8x + py = 2x$ ofwel $6x + py = 0$, en $3x - 7y = 2y$ ofwel $3x = 9y$ ofwel $x = 3y$.

Substitutie van $x = 3y$ in $6x + py = 0$ geeft $18y + py = 0$, dus $p = -18$.

Dit geeft $A = \begin{pmatrix} 8 & -18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -18 \\ 3 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(8 - \lambda)(-7 - \lambda) - (-18 \cdot 3) = 0$$

$$-56 - 8\lambda + 7\lambda + \lambda^2 + 54 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = -1 \vee \lambda = 2$$

De andere eigenwaarde van A is -1 .

b $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ q & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ geeft $6 = 3\lambda$ en $3q + 5 = \lambda$.

$$6 = 3\lambda \text{ geeft } \lambda = 2$$

$$\lambda = 2 \text{ geeft } 3q + 5 = 2 \text{ ofwel } 3q = -3, \text{ dus } q = -1.$$

$$q = -1 \text{ geeft } B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det(B - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(5 - \lambda) - 6 \cdot (-1) = 0$$

$$-5\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

De eigenwaarden van B zijn 2 en 3.

- 47 a** Na vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van O liggen de originelen en de beelden op dezelfde lijn, waarbij de lengte van het beeld drie keer de lengte van het origineel is. Voor eigenvectoren $\vec{v}$ van de bijbehorende matrix M geldt dus $M \cdot \vec{v} = 3 \cdot \vec{v}$.

Dus de bijbehorende matrix heeft één eigenwaarde.

- b** Er is geen vector waarvan het beeld bij rotatie om O over 120° op dezelfde lijn ligt.

Dus de bijbehorende matrix heeft nul eigenwaarden.

- c** Rotatie om O over 180° is hetzelfde als spiegelen in O . Voor eigenvectoren $\vec{v}$ van de bijbehorende matrix M geldt dus $M \cdot \vec{v} = -\vec{v}$.

Dus de bijbehorende matrix heeft één eigenwaarde.

- d** Een lijn door O heeft vergelijking $y = ax$.

De vector $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ ligt op de lijn $y = ax$ en wordt bij spiegeling in deze lijn op zichzelf afgebeeld.

Hierbij hoort eigenwaarde 1.

De vector $\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$ wordt bij spiegeling in de lijn $y = ax$ afgebeeld op de vector $\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hierbij hoort eigenwaarde -1 .

Dus de bijbehorende matrix heeft twee eigenwaarden.

- e** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dus $\lambda = 3$ en $\lambda = 2$ zijn eigenwaarden.

Dus de bijbehorende matrix heeft twee eigenwaarden.

Bladzijde 104**48 a *****b ***

$$c \quad M^3 = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$$

Bladzijde 106

$$49 \quad a \quad n = 0 \text{ geeft } M^0 = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^0 - 3 \cdot 3^0 & -12 \cdot 2^0 + 12 \cdot 3^0 \\ 2^0 - 3^0 & -3 \cdot 2^0 + 4 \cdot 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 & -12 + 12 \\ 1 - 1 & -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ klopt}$$

$$n = 1 \text{ geeft } M^1 = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^1 - 3 \cdot 3^1 & -12 \cdot 2^1 + 12 \cdot 3^1 \\ 2^1 - 3^1 & -3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 9 & -24 + 36 \\ 2 - 3 & -6 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = M \text{ klopt}$$

b Door de inverse van M te berekenen.De matrix die je krijgt door $n = -1$ in te vullen moet hetzelfde zijn als de inverse van M .

$$50 \quad \det(M - \lambda \cdot I) = 0 \text{ geeft}$$

$$\begin{vmatrix} 12 - \lambda & -15 \\ 10 & -13 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(12 - \lambda)(-13 - \lambda) - (-15 \cdot 10) = 0$$

$$-156 - 12\lambda + 13\lambda + \lambda^2 + 150 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = -3$$

$$\text{De eigenvectoren bij } \lambda = 2 \text{ volgen uit } \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 10 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Hieruit volgt } 12x - 15y = 2x \text{ ofwel } 10x - 15y = 0.$$

$$\text{Dus een eigenvector bij } \lambda_1 = 2 \text{ is } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De eigenvectoren bij } \lambda = -3 \text{ volgen uit } \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 10 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Hieruit volgt } 12x - 15y = -3x \text{ ofwel } 15x - 15y = 0.$$

$$\text{Dus een eigenvector bij } \lambda_2 = -3 \text{ is } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2 \cdot (-3)^n & 3 \cdot (-3)^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 \cdot (-3)^n & -3 \cdot 2^n + 3 \cdot (-3)^n \\ 2 \cdot 2^n - 2 \cdot (-3)^n & -2 \cdot 2^n + 3 \cdot (-3)^n \end{pmatrix}$$

$$51 \quad a \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ geeft } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 45 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$$

$$b \quad M^n = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n & -5 \cdot 2^n \\ -5^n & 3 \cdot 5^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 \cdot 2^n - 5 \cdot 5^n & -15 \cdot 2^n + 15 \cdot 5^n \\ 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n & -5 \cdot 2^n + 6 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

- 52 De eigenwaarden van M zijn $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ en $\lambda_3 = 5$.

Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Voer bovenstaande matrices in op de GR en bereken $P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$$\text{Je krijgt } M = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 86 & -66 \\ 0 & -62 & 48 \\ 0 & -80 & 62 \end{pmatrix}.$$

- 53 a $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$
 b $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$, dus $\det(M) = \det(P \cdot D \cdot P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(D) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(P^{-1}) \cdot \det(D) = \det(P \cdot P^{-1}) \cdot \det(D) = \det(I) \cdot \det(D) = 1 \cdot \det(D) = \det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
 Hierbij is gebruikt dat de determinant van een diagonaalmatrix gelijk is aan het product van de getallen op de hoofddiagonaal.

Bladzijde 107

- 54 a $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = -2$
 $\det(M) = 24$ geeft $3 \cdot -2 \cdot \lambda_3 = 24$ ofwel $-6\lambda_3 = 24$, dus $\lambda_3 = -4$.
 Dus de eigenwaarden van M zijn $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ en $\lambda_3 = -4$.

- b Een bij $\lambda_1 = 3$ horende eigenvector is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, en een bij $\lambda_2 = -2$ horende eigenvector is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

maar bij $\lambda_3 = -4$ horende eigenvectoren zijn onbekend. Dus met de gegevens kun je niet van alle punten van $\mathbb{R}^3$ het beeld berekenen.

Uit de regels die voor lineaire afbeeldingen gelden (zie bladzijde 88 van het leerboek) volgt dat $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

$$\text{geeft } M \cdot \vec{c} = M \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = M \cdot (2\vec{a}) + M \cdot (3\vec{b}) = 2(M \cdot \vec{a}) + 3(M \cdot \vec{b}) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 12 \\ -78 \end{pmatrix}.$$

Dus het beeld is $C'(48, 12, -78)$.

- c $V: ax + by + cz = d$ gaat door $O(0, 0, 0)$, $A(5, 8, -4)$ en $B(-3, 6, 9)$.

$$n_V = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ -33 \\ 54 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 32 \\ -11 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} 32x - 11y + 18z = d \\ \text{door } O(0, 0, 0) \end{matrix} \right\} d = 0$$

Dus $V: 32x - 11y + 18z = 0$.

- 55 a $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 2\frac{1}{2} - \lambda & -3 \\ 1\frac{1}{2} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2\frac{1}{2} - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 0$$

$$-5 - 2\frac{1}{2}\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4\frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

$$(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \vee \lambda = 1$$

De eigenvectoren bij $\lambda = -\frac{1}{2}$ volgen uit $\begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} & -3 \\ 1\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $2\frac{1}{2}x - 3y = -\frac{1}{2}x$ ofwel $3x - 3y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 1$ volgen uit $\begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} & -3 \\ 1\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $2\frac{1}{2}x - 3y = x$ ofwel $1\frac{1}{2}x - 3y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 1$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ geeft $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dus $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{b } M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{2})^n & 2 \cdot (-\frac{1}{2})^n \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-\frac{1}{2})^n & 2 \cdot (-\frac{1}{2})^n - 2 \\ 1 - (-\frac{1}{2})^n & 2 \cdot (-\frac{1}{2})^n - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c } \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 2 - (-\frac{1}{2})^n & 2 \cdot (-\frac{1}{2})^n - 2 \\ 1 - (-\frac{1}{2})^n & 2 \cdot (-\frac{1}{2})^n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 2 \cdot 0 - 2 \\ 1 - 0 & 2 \cdot 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{56 a } \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (P \cdot D^n \cdot P^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P \cdot \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \right) = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b } M + M^2 + M^3 + \dots + M^n = P \cdot D \cdot P^{-1} + P \cdot D^2 \cdot P^{-1} + P \cdot D^3 \cdot P^{-1} + \dots + P \cdot D^n \cdot P^{-1} = P \cdot (D + D^2 + D^3 + \dots + D^n) \cdot P^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D + D^2 + D^3 + \dots + D^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^2 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^3 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^3 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \dots + (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + \dots + (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ geeft } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } \lim_{n \rightarrow \infty} (M + M^2 + M^3 + \dots + M^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P \cdot (D + D^2 + D^3 + \dots + D^n) \cdot P^{-1}) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

57 De karakteristieke vergelijking van een 2×2 -matrix is van de vorm $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Een diagonaliseerbare 2×2 -matrix heeft twee eigenwaarden.

Stel de diagonaliseerbare 2×2 -matrix M heeft de eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Dan geldt

$$aM^2 + bM + cI =$$

$$a(P \cdot D \cdot P^{-1})^2 + b(P \cdot D \cdot P^{-1}) + c(P \cdot I \cdot P^{-1}) =$$

$$a \cdot P \cdot D^2 \cdot P^{-1} + b \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} + c \cdot P \cdot I \cdot P^{-1} =$$

$$P \cdot (aD^2 + bD + cI) \cdot P^{-1} = P \cdot \left(a \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^2 + b \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot P^{-1} =$$

$$P \cdot \left(a \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot P^{-1} =$$

$$P \cdot \left(\begin{pmatrix} a\lambda_1^2 & 0 \\ 0 & a\lambda_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\lambda_1 & 0 \\ 0 & b\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \cdot P^{-1} =$$

$$P \cdot \begin{pmatrix} a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c & 0 \\ 0 & a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c \end{pmatrix} \cdot P^{-1} =$$

$$P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hiermee is het bewijs geleverd dat elke diagonaliseerbare 2×2 -matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking.

- 58 De eigenwaarden zijn a , b en c , dus $(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = 0$.

Herleiden van deze vergelijking geeft

$$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = 0$$

$$(\lambda - a)(\lambda^2 - (b + c)\lambda + bc) = 0$$

$$\lambda^3 - (b + c)\lambda^2 + bc\lambda - a\lambda^2 + (ab + ac)\lambda - abc = 0$$

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (ab + ac + bc)\lambda - abc = 0$$

Volgens de stelling van Cayley-Hamilton geldt dus

$$M^3 - (a + b + c)M^2 + (ab + ac + bc)M - abc = 0 \text{ en hieruit volgt}$$

$$M^2 - (a + b + c)M + (ab + ac + bc)I - abcM^{-1} = 0, \text{ dus}$$

$$M^{-1} = \frac{M^2 - (a + b + c)M + (ab + ac + bc)I}{abc} = \frac{1}{abc}M^2 - \frac{a + b + c}{abc}M + \frac{ab + ac + bc}{abc}I.$$

11.4 Machtreksen en differentievergelijkingen

Bladzijde 109

59 a $I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots + \frac{D^9}{9!} = I + \frac{D}{1} + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{6} + \dots + \frac{D^9}{362880} = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \dots + \frac{1}{362880}D^9 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{362880} \begin{pmatrix} 2^9 & 0 \\ 0 & 3^9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{362880} \cdot 2^9 & 0 \\ 0 & 1 + 3 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^3 + \dots + \frac{1}{362880} \cdot 3^9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7,389 & 0 \\ 0 & 20,1 \end{pmatrix}$$

b $e^2 \approx 7,389$ en $e^3 \approx 20,1$

Ik denk dat de bewering klopt.

Bladzijde 112

60 a $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 \cdot 0 = 0$$

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

$$\lambda = 3 \vee \lambda = 2$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 3$ volgen uit $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $3x + y = 3x$ ofwel $y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 3$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 2$ volgen uit $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $3x + y = 2x$ ofwel $x + y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 2$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dus $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^3 & e^3 \\ 0 & -e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 - e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

b $\sin(M) = P \cdot \sin(D) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(3) & 0 \\ 0 & \sin(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(3) & \sin(3) \\ 0 & -\sin(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(3) & \sin(3) - \sin(2) \\ 0 & \sin(2) \end{pmatrix}$$

61 a $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ geeft $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(2) & 0 \\ 0 & \ln(3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln(2) & -3\ln(3) \\ \ln(2) & 4\ln(3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{11}\ln(2) + \frac{3}{11}\ln(3) & \frac{6}{11}\ln(2) - \frac{6}{11}\ln(3) \\ \frac{4}{11}\ln(2) - \frac{4}{11}\ln(3) & \frac{3}{11}\ln(2) + \frac{8}{11}\ln(3) \end{pmatrix}$$

b $e^M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\ln(2)} & 0 \\ 0 & e^{\ln(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{3}{11} & -\frac{6}{11} \\ -\frac{4}{11} & 2\frac{8}{11} \end{pmatrix}$

c $2M = 2(P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot 2D \cdot P^{-1} = P \cdot 2 \begin{pmatrix} \ln(2) & 0 \\ 0 & \ln(3) \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 2\ln(2) & 0 \\ 0 & 2\ln(3) \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$

Dus de eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 2\ln(2)$ en $\lambda_2 = 2\ln(3)$. Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

d $e^M \cdot e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot e^D \cdot P^{-1} = P \cdot e^D \cdot I \cdot e^D \cdot P^{-1} = P \cdot e^{2D} \cdot P^{-1} =$

$$P \cdot \begin{pmatrix} e^{\ln(2)} & 0 \\ 0 & e^{\ln(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\ln(2)} & 0 \\ 0 & e^{\ln(3)} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{2\ln(2)} & 0 \\ 0 & e^{2\ln(3)} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 2\ln(2) & 0 \\ 0 & 2\ln(3) \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$\text{Uit vraag c volgt } e^{2M} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{2\ln(2)} & 0 \\ 0 & e^{2\ln(3)} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 2\ln(2) & 0 \\ 0 & 2\ln(3) \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Dus er geldt $e^M \cdot e^M = e^{2M}$.

62 a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ geeft $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\pi \\ -\pi & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & 1\frac{1}{2}\pi \\ 0 & \frac{1}{2}\pi \end{pmatrix}$$

b $\sin(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\frac{1}{2}\pi) & 0 \\ 0 & \sin(-\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c $\cos(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\pi) & 0 \\ 0 & \cos(-\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d $\sin^2(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\cos^2(M) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } \sin^2(M) + \cos^2(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

e $2M = 2(P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot 2D \cdot P^{-1} = P \cdot 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -2\pi \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$, dus

$$\sin(2M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\pi) & 0 \\ 0 & \sin(-2\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Uit de vragen b en c volgt } 2\sin(M)\cos(M) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus $\sin(2M) = 2\sin(M)\cos(M)$.

63 a $x_3 = x_2 + 2x_1 - 3x_0 = 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 1 + 2 - 0 = 3$
 $x_4 = x_3 + 2x_2 - 3x_1 = 3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 3 + 2 - 3 = 2$

b $\begin{pmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 + 2x_3 - 3x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$ en dit komt overeen met de gegeven differentievergelijking.

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus } x_5 = 5.$$

c $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Bladzijde 114

64 De differentievergelijking is te noteren als $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ x_{n-4} \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} x_{20} \\ x_{19} \\ x_{18} \\ x_{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{17} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 755 \\ 58 \\ -242 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } x_{20} = 755.$$

65 De differentievergelijking is te noteren als $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}.$

$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda) \cdot (-\lambda) - (-3) \cdot 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 1 \vee \lambda = 3$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 1$ volgen uit $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Hieruit volgt $4x - 3y = x$ ofwel $3x - 3y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 1$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

De eigenvectoren bij $\lambda = 3$ volgen uit $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

Hieruit volgt $4x - 3y = 3x$ ofwel $x - 3y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 3$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Dus $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ 1 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + 3^n \\ -1 + 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dus $x_n = \frac{1}{2}(-1 + 3^n)$.

Bladzijde 115

66 a $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 1500 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23\,075\,900 \\ 37\,928\,200 \\ -3\,702\,100 \end{pmatrix}$

67 a Uit de gegevens volgt het stelsel differentievergelijkingen
$$\begin{cases} V_n = V_{n-1} - 0,2V_{n-1} = 0,8V_{n-1} \\ Z_n = Z_{n-1} + 0,2V_{n-1} - 0,3Z_{n-1} = 0,7Z_{n-1} + 0,2V_{n-1} \\ I_n = I_{n-1} + 0,3Z_{n-1} = 0,3Z_{n-1} + I_{n-1} \end{cases}$$

Hieruit volgt $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$.

b $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 0,8 - \lambda & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,7 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(0,8 - \lambda)(0,7 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

$$\lambda = 0,8 \vee \lambda = 0,7 \vee \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,8 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ geeft het stelsel } \begin{cases} 0,8x = 0,8x \\ 0,2x + 0,7y = 0,8y \\ 0,3y + z = 0,8z \end{cases} \text{ ofwel } \begin{cases} 0x = 0 \\ 0,2x - 0,1y = 0 \\ 0,3y + 0,2z = 0 \end{cases}$$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt $x + \frac{1}{3}z = 0$ ofwel $x = -\frac{1}{3}z$ en $y + \frac{2}{3}z = 0$ ofwel $y = -\frac{2}{3}z$.

$z = 3$ geeft bij $\lambda_1 = 0,8$ de eigenvector $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,7 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ geeft } 0,8x = 0,7x, 0,2x + 0,7y = 0,7y \text{ en } 0,3y + z = 0,7z.$$

Uit $0,8x = 0,7x$ volgt $x = 0$.

$0,3y + z = 0,7z$ geeft $0,3y + 0,3z = 0$

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 0,7$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ geeft } 0,8x = x, 0,2x + 0,7y = y \text{ en } 0,3y + z = z.$$

Uit $0,3y + z = z$ ofwel $0,3y = 0$ volgt $y = 0$.

$y = 0$ en $0,2x + 0,7y = y$ geeft $x = 0$

$$z = 1 \text{ geeft bij } \lambda_3 = 1 \text{ de eigenvector } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c } D = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_n \\ Z_n \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9500 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0,7^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9500 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -0,8^{n-1} & 0 & 0 \\ -2 \cdot 0,8^{n-1} & 0,7^{n-1} & 0 \\ 3 \cdot 0,8^{n-1} & -0,7^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9500 \\ -18500 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9500 \cdot 0,8^{n-1} \\ 19000 \cdot 0,8^{n-1} - 18500 \cdot 0,7^{n-1} \\ -28500 \cdot 0,8^{n-1} + 18500 \cdot 0,7^{n-1} + 10000 \end{pmatrix}$$

Dus $Z_n = 19000 \cdot 0,8^{n-1} - 18500 \cdot 0,7^{n-1}$.

Voer in $y_1 = 19000 \cdot 0,8^{x-1} - 18500 \cdot 0,7^{x-1}$.

De optie maximum geeft het maximale aantal zieken 3397.

- 68 Als de som van de getallen van elke kolom van $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gelijk is aan 1, dan is M te schrijven als

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}.$$

$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ met $\lambda = 1$ geeft

$$\begin{vmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-1) \cdot -b - b(1-a) = 0$$

$$-ab + b - b + ab = 0$$

$$0 = 0 \text{ klopt}$$

Hiermee is het bewijs geleverd.

Bladzijde 116

69 a $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 \\ 0,11 \\ 0,59 \\ 0,12 \end{pmatrix}$

De gevraagde kans is 0,18.

$$\text{c} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,213 \\ 0,135 \\ 0,290 \\ 0,362 \end{pmatrix}$$

De gevraagde kans is 0,362.

$$\text{d} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \begin{pmatrix} 0,198 & 0,198 & 0,198 & 0,198 \\ 0,122 & 0,122 & 0,122 & 0,122 \\ 0,345 & 0,345 & 0,345 & 0,345 \\ 0,335 & 0,335 & 0,335 & 0,335 \end{pmatrix}$$

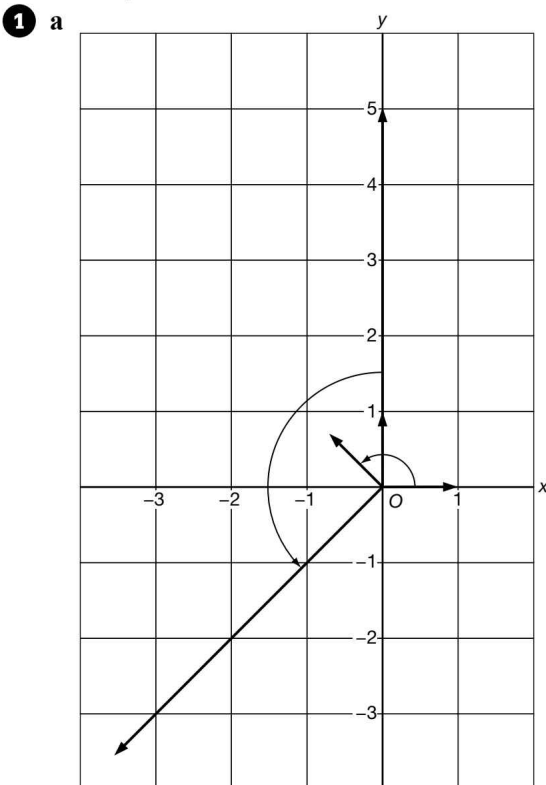
$$\text{e} \quad \text{Uit vraag d volgt dat } M \cdot \begin{pmatrix} 0,198 \\ 0,122 \\ 0,345 \\ 0,335 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,198 \\ 0,122 \\ 0,345 \\ 0,335 \end{pmatrix}.$$

Dus heeft M een eigenwaarde die gelijk is aan 1 met eigenvector $\begin{pmatrix} 0,198 \\ 0,122 \\ 0,345 \\ 0,335 \end{pmatrix}$.

f Naar verwachting $0,198 \cdot 200 \approx 40$ dagen in A .

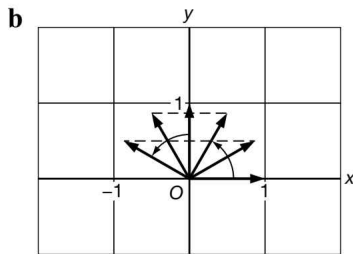
Diagnostische toets

Bladzijde 118



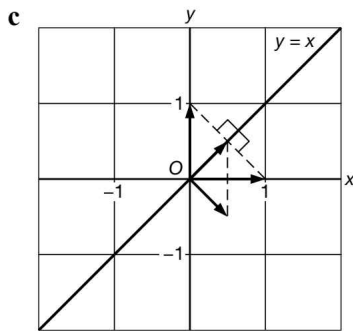
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -\frac{2}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{2}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Dit geeft $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{2}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -4\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$, dus $A'(-10\frac{1}{2}\sqrt{2}, -4\frac{1}{2}\sqrt{2})$.



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Dit geeft $M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 4\sqrt{3} \\ 4 + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $B'(-3 + 4\sqrt{3}, 4 + 3\sqrt{3})$.



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Dit geeft $M \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus $C'(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

2 a Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

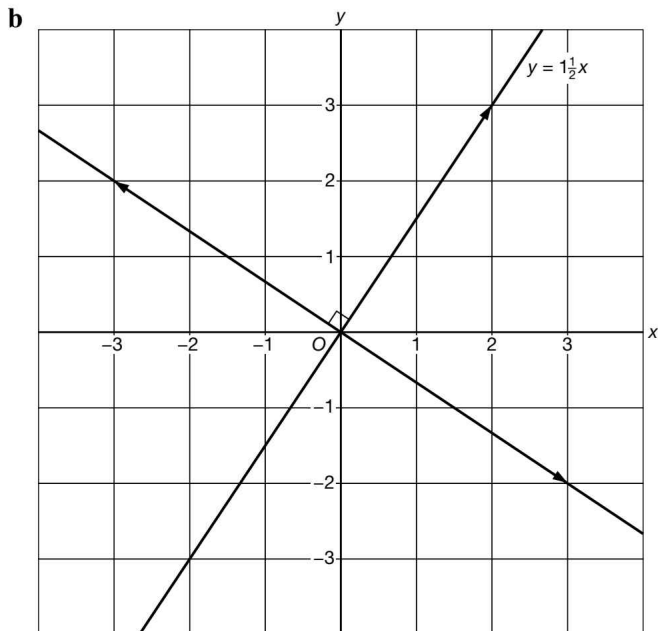
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ geeft $2a + b = 4$ en $2c + d = 2$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ geeft $a + 3b = -3$ en $c + 3d = 11$.

$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a + 3b = -3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right|$ geeft $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 2a + 6b = -6 \\ -5b = 10 \\ b = -2 \end{cases}$ $a + 3 \cdot -2 = -3$, dus $a = 3$

$\begin{cases} 2c + d = 2 \\ c + 3d = 11 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right|$ geeft $\begin{cases} 2c + d = 2 \\ 2c + 6d = 22 \\ -5d = -20 \\ d = 4 \end{cases}$ $c + 3 \cdot 4 = 11$, dus $c = -1$

Dus $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.



Het beeld van $(2, 3)$ is $(2, 3)$.

Het beeld van $(3, -2)$ is $(-3, 2)$.

Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ geeft } 2a + 3b = 2 \text{ en } 2c + 3d = 3.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ geeft } 3a - 2b = -3 \text{ en } 3c - 2d = 2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 3b = 2 \\ 3a - 2b = -3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 6a + 9b = 6 \\ 6a - 4b = -6 \end{array} \right. -$$

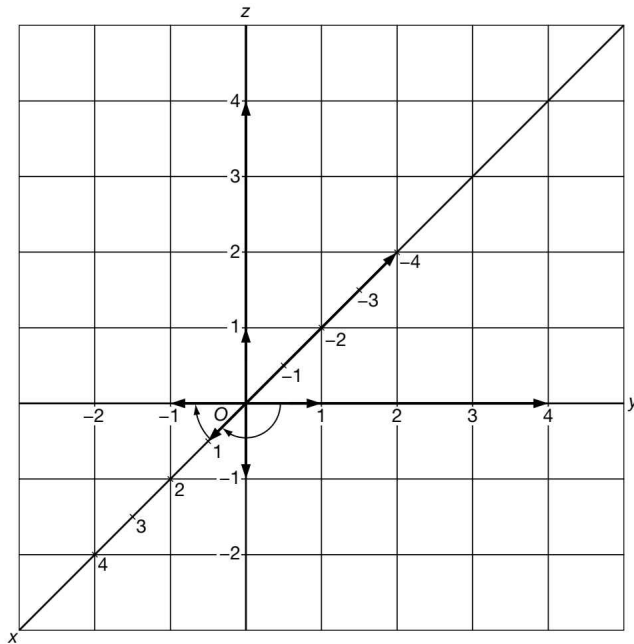
$$\left. \begin{array}{l} 13b = 12 \\ b = \frac{12}{13} \end{array} \right\} 2a + 3 \cdot \frac{12}{13} = 2, \text{ dus } a = -\frac{5}{13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c + 3d = 3 \\ 3c - 2d = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 6c + 9d = 9 \\ 6c - 4d = 4 \end{array} \right. -$$

$$\left. \begin{array}{l} 13d = 5 \\ d = \frac{5}{13} \end{array} \right\} 2c + 3 \cdot \frac{5}{13} = 3, \text{ dus } c = \frac{12}{13}$$

Dus $M = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$.

Dit geeft $M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{13} \\ 2\frac{5}{13} \end{pmatrix}$, dus $B'(-2\frac{1}{13}, 2\frac{5}{13})$.

3 a

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dus $M = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

Het beeld is $A'(-8, 4, 12)$.

c $M^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Het origineel is $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

4 Stel $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

$M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ geeft $2a + b = 2$ en $2d + e = 1$.

$M \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ geeft $-2a + 3b = -6$ en $-2d + 3e = 2$.

$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ geeft $a + b + 2c = 3$ en $d + e + 2f = 4$.

Dit geeft de stelsels $\begin{cases} 2a + b = 2 \\ -2a + 3b = -6 \\ a + b + 2c = 3 \end{cases}$ en $\begin{cases} 2d + e = 1 \\ -2d + 3e = 2 \\ d + e + 2f = 4 \end{cases}$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Dus $a = 1\frac{1}{2}$, $b = -1$ en $c = 1\frac{1}{4}$.

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1\frac{9}{16} \end{pmatrix}$.

Dus $d = \frac{1}{8}$, $e = \frac{3}{4}$ en $f = 1\frac{9}{16}$.

Dus $M = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} & -1 & 1\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 1\frac{9}{16} \end{pmatrix}$.

5 $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5 - \lambda)(6 - \lambda) - 1 \cdot 2 = 0$$

$$30 - 5\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 7) = 0$$

$$\lambda = 4 \vee \lambda = 7$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 4$ volgen uit $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $5x + y = 4x$ ofwel $x + y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 4$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 7$ volgen uit $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $5x + y = 7x$ ofwel $-2x + y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 7$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6 $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ geeft $2 + b = \lambda$ en $a + 3 = \lambda$, dus $2 + b = a + 3$.

$\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ geeft $4 + b = 2\lambda$ en $2a + 3 = \lambda$ ofwel $4a + 6 = 2\lambda$, dus $4 + b = 4a + 6$.

$2 + b = a + 3$ geeft $b = a + 1$

Substitutie van $b = a + 1$ in $4 + b = 4a + 6$ geeft $4 + a + 1 = 4a + 6$ ofwel $-3a = 1$, dus $a = -\frac{1}{3}$.

$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

Bladzijde 119

7 Voer de matrix M in op de GR, en voer vervolgens in $y_1 = \det([A] - x \cdot \text{identity}(3))$ (TI) of $y_1 = \text{Det}(\text{Mat } A - x \cdot \text{Identity}(3))$ (Casio).

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = -1$, $x = 2$ en $x = 3$.

Dus de eigenwaarden zijn $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ en $\lambda = 3$.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geeft het stelsel $\begin{cases} 2y = -x \\ -3x + 5y = -y \\ 5x - 2y - z = -z \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$z = 1$ geeft bij $\lambda_1 = -1$ de eigenvector $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geeft het stelsel $\begin{cases} 2y = 2x \\ -3x + 5y = 2y \\ 5x - 2y - z = 2z \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \\ 5x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $x - z = 0$ ofwel $x = z$, en $y - z = 0$ ofwel $y = z$.

$z = 1$ geeft bij $\lambda_2 = 2$ de eigenvector $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ geeft het stelsel } \begin{cases} 2y = 3x \\ -3x + 5y = 3y \\ 5x - 2y - z = 3z \end{cases} \text{ ofwel } \begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \\ 5x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $x - 2z = 0$ ofwel $x = 2z$, en $y - 3z = 0$ ofwel $y = 3z$.

$z = 1$ geeft bij $\lambda_3 = 3$ de eigenvector $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8 a $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$M = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 75 & 7 \end{pmatrix}$$

b $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n & -3 \cdot (-2)^n \\ 3 \cdot 3^n & 5 \cdot (-2)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 10 \cdot 3^n + 9 \cdot (-2)^n & 6 \cdot 3^n - 6 \cdot (-2)^n \\ 15 \cdot 3^n - 15 \cdot (-2)^n & 9 \cdot 3^n + 10 \cdot (-2)^n \end{pmatrix}$$

9 a $D = \begin{pmatrix} \ln(4) & 0 \\ 0 & \ln(9) \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\ln(4)} & 0 \\ 0 & e^{\ln(9)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 75 \\ -10 & 34 \end{pmatrix}$$

b $\det(e^M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} -21 - \lambda & 75 \\ -10 & 34 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (-21 - \lambda)(34 - \lambda) - 75 \cdot -10 &= 0 \\ -714 + 21\lambda - 34\lambda + \lambda^2 + 750 &= 0 \\ \lambda^2 - 13\lambda + 36 &= 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda - 9) &= 0 \\ \lambda &= 4 \vee \lambda = 9 \end{aligned}$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 4$ volgen uit $\begin{pmatrix} -21 & 75 \\ -10 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $-21x + 75y = 4x$ ofwel $-25x + 75y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 4$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 9$ volgen uit $\begin{pmatrix} -21 & 75 \\ -10 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $-21x + 75y = 9x$ ofwel $-30x + 75y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 9$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Het valt op dat je de eigenwaarden van e^M met de eigenwaarden van M kunt berekenen via $e^{\ln(4)} = 4$ en $e^{\ln(9)} = 9$.

c Er geldt $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$, en dus ook $e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$.

De eigenwaarden van e^M zijn hetzelfde als die van e^D dus $\lambda_1 = 4$ en $\lambda_2 = 9$.

Verder volgt uit $e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$ dat bijbehorende eigenvectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ zijn.

10 De differentievergelijking is te noteren als
$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ x_{n-4} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_{15} \\ x_{14} \\ x_{13} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -10 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ dus } x_{15} = 17.$$

11 Het stelsel is te noteren als
$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}.$$

$$n = 20 \text{ geeft } \begin{pmatrix} A_{20} \\ B_{20} \\ C_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 350 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 304 \\ 326 \\ 370 \end{pmatrix}.$$

Dus $A_{20} \approx 304$, $B_{20} \approx 326$ en $C_{20} \approx 370$.