

1 Combinatoriek

Voorkennis Verzamelingen

Bladzijde 10

- 1 $V \cap W = \{2, 4\}$
 $V \cup W = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
 $V \setminus W = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$
- 2 $V \cap W = \langle 3, 5 \rangle$
 $V \cup W = \mathbb{R}$
 $V \setminus W = \langle \leftarrow, 3 \rangle$
- 3 $A \cap B = \{2, 3\}$
 $A \cup B = [1, \rightarrow)$
 $B \times C = \{(1, 11), (1, 12), (2, 11), (2, 12), (3, 11), (3, 12)\}$
 $C \times C = \{(11, 11), (11, 12), (12, 11), (12, 12)\}$

Bladzijde 11

- 4 a $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$ is waar, want 0 en 1 zijn ook elementen van $\mathbb{N}$.
- b $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N}$ is niet waar, want $\{1, 2, 3\}$ is een verzameling en geen element.
 Wel waar is $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$.
- c $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4\} = \{3, 2, 1\}$ is waar, want de verzameling natuurlijke getallen groter dan 0 en kleiner dan 4 is precies $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, de volgorde doet er niet toe.
- d $\langle -1, 1 \rangle \subset \mathbb{N}$ is niet waar, want niet elk element van $\langle -1, 1 \rangle$ is ook element van $\mathbb{N}$.
 Zo is bijvoorbeeld $-\frac{1}{2} \in \langle -1, 1 \rangle$ maar $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
- e $\emptyset \subset \mathbb{N}$ is waar, want de lege verzameling is deelverzameling van elke verzameling.
- f $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ is waar, want elk element van $\mathbb{N}$ is ook element van $\mathbb{R}$.
- g $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ is waar, want elk element van $\mathbb{N}$ is ook element van $\mathbb{N}$.
- h $[-3, 3] \subset \langle -3, 3 \rangle$ is niet waar, want niet elk element van $[-3, 3]$ is ook element van $\langle -3, 3 \rangle$, namelijk $-3 \in [-3, 3]$ maar $-3 \notin \langle -3, 3 \rangle$ en ook $3 \in [-3, 3]$ maar $3 \notin \langle -3, 3 \rangle$.
- i $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{3}x \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$ is waar, want $\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$ en $0 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ en $1 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ en $2 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \cdot 9 = 3$ en $3 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ en $4 \in \mathbb{N}$, enzovoort.
 Algemeen geldt dat $\frac{1}{3}$ keer een drievoud groter dan of gelijk aan 0 een geheel getal groter dan of gelijk aan 0 is en dus is de bewering waar.
- j $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{N}\}$ is waar.
- k $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 8\} \subset \langle 0, 3 \rangle$ is niet waar, want niet alle getallen die element zijn van $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 8\}$ zijn ook element van $\langle 0, 3 \rangle$. Zo is $-1 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 8\}$ maar $-1 \notin \langle 0, 3 \rangle$.
- l $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 20\} \subset \langle \leftarrow, -4 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$ is waar, want $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 20\} = \langle \leftarrow, -\sqrt{20} \rangle \cup \langle \sqrt{20}, \rightarrow \rangle$ en $-\sqrt{20} < -4$ en $\sqrt{20} > 4$, dus alle elementen van $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 20\}$ zijn ook element van $\langle \leftarrow, -4 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.
- m $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ heeft 10 elementen is niet waar, want $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ heeft $6 \times 4 = 24$ elementen.
- n $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ is niet waar, want bijvoorbeeld $(6, 4) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ maar $(6, 4) \notin \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en andersom $(4, 6) \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ maar $(4, 6) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4\}$.
 $(6, 4)$ en $(4, 6)$ zijn verschillende elementen.

1.1 De somregel en de productregel

Bladzijde 12

1 a SOM VAN DE OGEN

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

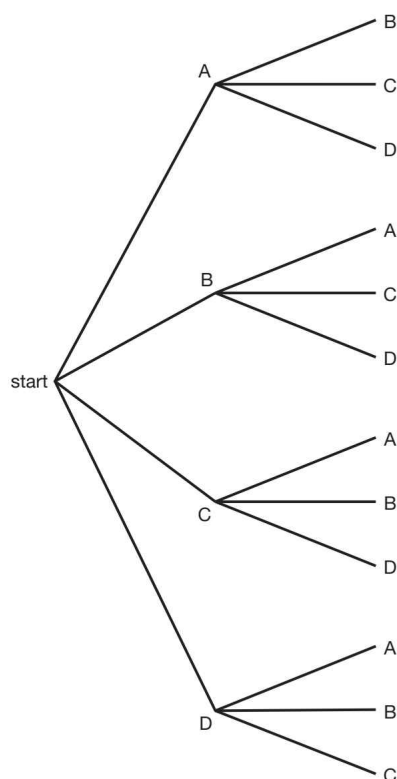
blauwe dobbelsteen

rode dobbelsteen

b Zie de grijze vakjes. Er zijn 10 mogelijkheden.

c 66, 65, 64, 63, 56, 55, 54, 46, 45, 36

2 a

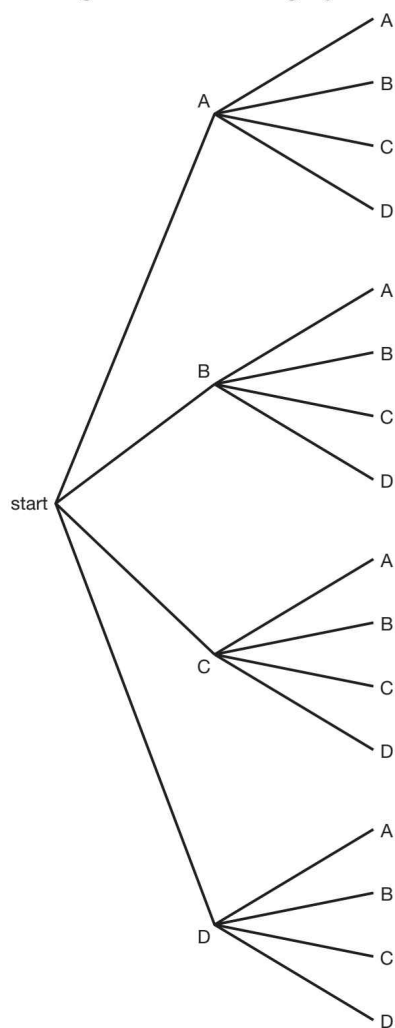


b Er volgen 12 tweetallen uit het boomdiagram.

Bij de eerste keuze heb je 4 mogelijkheden, bij de twee keuze heb je 3 mogelijkheden. Dus zonder het boomdiagram te tekenen bereken je dat er $4 \times 3 = 12$ mogelijke tweetallen zijn.

- 3 a** Er volgen $4 \times 4 = 16$ mogelijkheden uit het wegendiagram.

b



- c** Het is niet mogelijk om een wegendiagram te tekenen bij de situatie van opgave 2.

Bladzijde 14

- 4 a** aantal wedstrijden $= 10 \cdot 9 = 90$

b $N = n(n - 1)$

- 5 a** Bij een halve competitie speelt elk team één keer tegen elk ander team.

b Een rooster.

c

	4v1	4v2	4h1	4h2	4h3
4v1	—	—	—	—	—
4v2		—	—	—	—
4h1			—	—	—
4h2				—	—
4h3					—

In een halve competitie met vijf teams zijn in totaal 10 wedstrijden.

- d** In een hele competitie met n teams zijn er $n(n - 1)$ wedstrijden.

In een halve competitie zijn er dus $\frac{1}{2}n(n - 1)$ wedstrijden.

e $\frac{1}{2}n(n-1) = 45$

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = 45$$

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 45 = 0$$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n+9)(n-10) = 0$$

$$n = -9 \vee n = 10$$

$n = -9$ kan niet.

Er zitten 10 teams in deze competitie.

- 6 a** In elke groep van 5 teams worden $5 \cdot 4 = 20$ wedstrijden gespeeld.
 In de voorronde worden dus $8 \cdot 20 = 160$ wedstrijden gespeeld.
 In de eerste ronde van het afvalstelsel worden $4 \cdot 2 = 8$ wedstrijden gespeeld.
 De overgebleven 4 teams spelen in de volgende ronde $2 \cdot 2 = 4$ wedstrijden.
 De laatste 2 teams spelen nog 2 wedstrijden.
 In totaal dus $8 + 4 + 2 = 14$ wedstrijden in het afvalstelsel.
 In totaal zijn er dus $160 + 14 = 174$ wedstrijden.
- b** De kampioen heeft in de voorronde $4 \cdot 2 = 8$ wedstrijden gespeeld en in het afvalstelsel $3 \cdot 2 = 6$ wedstrijden. In totaal dus $8 + 6 = 14$ wedstrijden.
- 7 a** De mogelijke koppels zijn
- | | | |
|----|----|----|
| AD | BD | CD |
| AE | BE | CE |
| AF | BF | CF |
- Dus de docent kan op 9 manieren deze koppels samenstellen.
- b** De verliefde stelletjes zijn AD, BE en CF.
 Dus op $9 - 3 = 6$ van deze manieren wordt geen enkele van de verliefde stelletjes aan elkaar gekoppeld.

Bladzijde 15

- 8 a** A winnaar in vier sets: AABA, ABAA, BAAA
 B winnaar in vier sets: BBAB, BABB, ABBB
- b** A winnaar in drie sets: AAA
 B winnaar in drie sets: BBB
 A winnaar in vijf sets: AABBA, ABABA, ABBA, BAABA, BABAA, BBAAA
 B winnaar in vijf sets: BBAAB, BABAB, BAABB, ABBAB, ABABB, AABBB
 Er zijn dus in totaal $2 + 6 + 12 = 20$ manieren waarop de partij kan verlopen.
- 9 a** Bij de elementen (1, 7), (2, 6), (3, 5) en (4, 4) is de som van de twee getallen steeds 8.
 Dus $G = \{(a, b) \in U \mid a + b = 8\}$ heeft 4 elementen.
- b** De elementen van G zijn (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3).
 Dus $G = \{(a, b) \in U \mid a + b < 8\}$ heeft 18 elementen.
- c** De elementen van G zijn (1, 8), (2, 4) en (4, 2).
 Dus $G = \{(a, b) \in U \mid ab = 8\}$ heeft 3 elementen.
- 10 a**
- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| (6, 6, 4) | (6, 4, 6) | (4, 6, 6) |
| (5, 5, 6) | (5, 6, 5) | (6, 5, 5) |
- b**
- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (6, 6, 6) | (6, 6, 5) | (6, 5, 6) | (5, 6, 6) |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
- Zie verder a.
 Dus $G = \{(a, b, c) \in U \mid a + b + c > 15\}$ heeft 10 elementen.
- c**
- | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (6, 6, 3) | (6, 3, 6) | (3, 6, 6) | | | |
| (6, 5, 4) | (6, 4, 5) | (5, 6, 4) | (5, 4, 6) | (4, 6, 5) | (4, 5, 6) |
| (5, 5, 5) | | | | | |
- Dus $G = \{(a, b, c) \in U \mid a + b + c = 15\}$ heeft 10 elementen.

- 11 a 1 1 3 1 3 1 3 1 1 1 2 2 2 1 2 2 2 1

Dus de gebeurtenis 'in totaal 5 ogen gooien' heeft 6 uitkomsten.

- b 6 ogen 1 1 4 1 4 1 4 1 1
 1 2 3 1 3 2 2 3 1 2 1 3 3 1 2 3 2 1
 2 2 2

5 ogen 6 mogelijkheden, zie onderdeel a

4 ogen 2 1 1 1 2 1 1 1 2

3 ogen 1 1 1

Dus de gebeurtenis 'hoogstens 6 ogen gooien' heeft $10 + 6 + 3 + 1 = 20$ uitkomsten.

- 12 a $7 \times €10$

$5 \times €10$ en $1 \times €20$

$3 \times €10$ en $2 \times €20$

$2 \times €10$ en $1 \times €50$

$1 \times €10$ en $3 \times €20$

$1 \times €20$ en $1 \times €50$

- b $11 \times €10$

$9 \times €10$ en $1 \times €20$

$7 \times €10$ en $2 \times €20$

$6 \times €10$ en $1 \times €50$

$5 \times €10$ en $3 \times €20$

$4 \times €10$ en $1 \times €20$ en $1 \times €50$

$3 \times €10$ en $4 \times €20$

$2 \times €10$ en $2 \times €20$ en $1 \times €50$

$1 \times €10$ en $5 \times €20$

$1 \times €10$ en $2 \times €50$

$3 \times €20$ en $1 \times €50$

Er zijn dus 11 mogelijkheden.

- 13 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ driehoeken

Bladzijde 16

- 14 a aantal = $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

- b aantal = $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

- 15 a som is 2 1 + 1

som is 3 1 + 2 2 + 1

som is 4 1 + 3 3 + 1 2 + 2

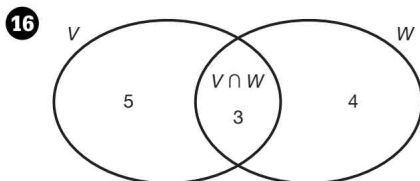
som is 5 1 + 4 4 + 1 2 + 3 3 + 2

V heeft 10 elementen.

product is 4 1 $\times$ 4 4 $\times$ 1 2 $\times$ 2

W heeft 3 elementen.

- b $\#(V \cup W) = 10$, $\#(V) = 10$, $\#(W) = 3$, dus $\#(V \cup W) \neq \#(V) + \#(W)$ want $10 \neq 10 + 3$.



Uit het Venn-diagram volgt $\#(V \cup W) = 5 + 3 + 4 = 12$.

Bladzijde 18

- 17 a $N(3 \text{ Opels}) = 8 \cdot 6 \cdot 2 = 96$

- b $N(\text{Volkswagen-benzine en BMW-diesel en BMW-hybride}) = 12 \cdot 16 \cdot 2 = 384$

- c $N(2 \text{ Opels en } 1 \text{ Renault}) = N(\text{O-b O-d R-h of O-b O-h R-d of O-d O-h R-b})$
 $= N(\text{O-b O-d R-h}) + N(\text{O-b O-h R-d}) + N(\text{O-d O-h R-b})$
 $= 8 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \cdot 7 + 6 \cdot 2 \cdot 5 = 220$

- d $N(3 \text{ van hetzelfde merk}) = N(\text{O O O of V V V of R R R of M M M of B B B})$
 $= N(\text{O O O}) + N(\text{V V V}) + N(\text{R R R}) + N(\text{M M M}) + N(\text{B B B})$
 $= 8 \cdot 6 \cdot 2 + 12 \cdot 15 \cdot 3 + 5 \cdot 7 \cdot 1 + 0 + 5 \cdot 16 \cdot 2 = 831$

- 18** a $N(3 \text{ A's}) = N(\text{A A A}) = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$
 b $N(3 \text{ dezelfde letters}) = N(\text{A A A of B B B of C C C})$
 $= N(\text{A A A}) + N(\text{B B B}) + N(\text{C C C})$
 $= 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 0 = 52$
 c $N(2 \text{ A's en 1 C}) = N(\text{A A C of A C A of C A A})$
 $= N(\text{A A C}) + N(\text{A C A}) + N(\text{C A A})$
 $= 0 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 5 = 40$
 d $N(\text{geen B}) = N(\text{Ø Ø Ø}) = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$
 e $N(3 \text{ dezelfde kleuren}) = N(\text{r r r of ge ge ge of gr gr gr of b b b})$
 $= N(\text{r r r}) + N(\text{ge ge ge}) + N(\text{gr gr gr}) + N(\text{b b b})$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 20$
 f $N(2 \text{ groen en 1 rood}) = N(\text{g g r of g r g of r g g})$
 $= N(\text{g g r}) + N(\text{g r g}) + N(\text{r g g})$
 $= 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Bladzijde 19

- 19** a $N(\text{Engels en Duits en Frans}) = 11 \cdot 8 \cdot 5 = 440$
 b $N(\text{Engels en daarna Duits of Frans}) = 11 \cdot (8 + 5) = 11 \cdot 13 = 143$
- 20** Er zijn 3 maten, 4 kastkleuren en 6 mogelijkheden voor de deur, dus $N(\text{kasten}) = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$.
- 21** a $N(\text{minstens een 7 voor wiskunde B en minstens een 7 voor wiskunde D}) = 3 + 1 + 4 + 4 = 12$
 b $N(\text{minstens een 7 voor wiskunde B of minstens een 7 voor wiskunde D}) =$
 $2 + 0 + 1 + 5 + 3 + 1 + 0 + 1 + 4 + 4 = 21$
- 22** Stel het aantal cijfers van het eerste blok x .
 Dan is het aantal cijfers van het tweede blok $x - 2$.
 Er geldt $5^x \cdot 4^{x-2} = 1,6 \cdot 10^9$.
 Voer in $y_1 = 5^x \cdot 4^{x-2}$ en maak een tabel.
 $x = 8$ geeft $y_1 = 1,6 \cdot 10^9$
 Dus het eerste blok bestaat uit acht cijfers.

1.2 Variaties en herhalingsvariaties**Bladzijde 21**

- 23** $N(\text{twee verschillende letters}) = 5 \cdot 4 = 20$
 $N(\text{letters mogen gelijk zijn}) = 5 \cdot 5 = 25$

Bladzijde 22

- 24** a $N(\text{totaal zonder herhaling}) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$
 b $N(\text{code begint met a, b of c met herhaling}) = 3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 12288$
 c $N(\text{eerste twee letters kiezen uit a, b of c zonder herhaling}) = 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$
 d $N(\text{a maximaal één keer gebruiken met herhaling}) = N(\text{code met a}) + N(\text{code zonder a}) =$
 $5 \cdot (1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) + 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 28812$
- 25** a $N(\text{totaal}) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
 b $N(\text{getal} < 6000) = N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is 3, 4 of 5}) = N(\leq 5 ***) = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
 c $N(6000 < \text{getal} < 6500) = N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is 6 en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is 3 of 4}) = N(6 \leq 4 ***) = 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$
 d $N(\text{getal} > 6500) = N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is 6 en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is 5, 6, 7 of 8 OF } 1^{\text{e}} \text{ cijfer is 7 of 8}) =$
 $N(6 \geq 5 **) + N(\geq 7 ***) = 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 576$

Bladzijde 23

- 26** a $N(\text{totaal}) = 4^5 = 1024$
 b $N(\text{beginnen met ♥}) = 1 \cdot 4^4 = 256$
 c $N(\text{geen gelijke naast elkaar}) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$
 d $N(\text{vier keer ♣}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 15$

- 27** a $N(\text{totaal}) = 26 \cdot 26 \cdot 26 = 17\,576$
 b $N(\text{geen gelijke letters naast elkaar}) = 26 \cdot 25 \cdot 25 = 16\,250$
 c $N(\text{beginnen met L}) = 1 \cdot 26 \cdot 26 = 676$
- 28** a $N(\text{mogelijkheden}) = 4^{10} = 1\,048\,576$
 b $N(\text{mogelijkheden}) = 4^5 = 1024$
- 29** a • $N(\text{totaal zonder herhaling}) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
 • $N(\text{totaal met herhaling}) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
 b • $N(\text{geen gelijke letters}) = 6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1956$
 • $N(\text{letters mogen gelijk zijn}) = 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 = 55\,986$
- 30** a Hoeveel vierlettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?
 b Hoeveel drielettercodes zijn er met drie verschillende letters?
 c Hoeveel lettercodes zijn er van twee letters met twee verschillende letters of van drie letters waarbij herhalingen zijn toegestaan?
 d Hoeveel drielettercodes zijn er als geen gelijke letters naast elkaar mogen staan?

Bladzijde 24

- 31** a eerst een 2, 3 of 4
 $N(\text{getal} < 50\,000 \text{ met herhaling}) = 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 972$
 b $N(\text{eerst drie verschillend dan twee dezelfde}) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 360$
 c Eerst een 5 en dan een 6 of 7 (en bij de laatste twee geen 5)
 OF eerst een 6 of 7 en bij de volgende twee geen 5
 OF eerst een 6 of 7 en bij de volgende twee wel een 5.
 $N(\text{getal} > 56\,000 \text{ zonder herhaling}) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 =$
 $16 + 144 + 16 + 16 = 192$
- $\uparrow$

5

$\uparrow$

5
- d** Bij eerste drie een 5 en bij laatste twee geen 5
 OF bij eerste drie geen 5 en bij laatste twee een 5
 OF bij eerste drie geen 5 en bij laatste twee geen 5.
 Als bij de eerste drie een 5 zit dan kan deze op drie plaatsen staan, dus $5\cancel{5}\cancel{5}$ OF $\cancel{5}5\cancel{5}$ OF $\cancel{5}\cancel{5}5$.
 En als bij de laatste twee een 5 zit dan kan deze op twee plaatsen staan.
 $N(\text{geen gelijke cijfers}) = 3 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1) + 2 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 480$
- 32** a $N(2400 < \text{getal} < 3800 \text{ zonder herhaling}) =$
 $N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 4, 5, 7 \text{ of } 8 \text{ OF } 1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 3 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2, 4, 5 \text{ of } 7) =$
 $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 + 48 = 96$
 b $N(5500 < \text{getal} < 7500 \text{ met herhaling}) =$
 $N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 5 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 5, 7 \text{ of } 8 \text{ OF } 1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 7 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2, 3 \text{ of } 4) =$
 $1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = 108 + 108 = 216$
 c $N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 3 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2, 3, 4 \text{ of } 5) = 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$
 We hebben nu dus nog $215 - 144 = 71$ getallen nodig.
 $N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 8) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$
 We hebben nu dus nog $71 - 36 = 35$ getallen nodig.
 $N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 7) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$
 We hebben nu één getal teveel.
 Dus $x = 2722$.
- 33** a Er zijn $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ uitkomsten.
 b Er zijn $7 \cdot 6 \cdot 5$ uitkomsten.
 $7 \cdot 6 \cdot 5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
 Dus er zijn $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ uitkomsten.

Bladzijde 26

- 34** a $N(\text{variaties van 4 uit 15}) = 15P_4 = 32\,760$
 b $N(\text{herhalingsvariaties van 4 uit 15}) = 15^4 = 50\,625$
 c Voer in $y_1 = xP_4$ en $y_2 = \frac{3}{4}x^4$ en maak een tabel.
 Lees af $22P_4 = 175\,560$ en $\frac{3}{4} \cdot 22^4 = 175\,692$
 $23P_4 = 212\,520$ en $\frac{3}{4} \cdot 23^4 = 209\,880,75$.
 Dus vanaf $n = 23$.
- 35** a Dat kan op $12P_5 = 95\,040$ manieren.
 b Elke persoon heeft 6 mogelijkheden om uit te stappen, dus ze kunnen op $6^{12} = 2\,176\,782\,336$ manieren op de zes verdiepingen uitstappen.
 c De foto's kunnen op $14P_{10} = 3\,632\,428\,800$ manieren geplaatst worden.
- 36** a $N(\text{codes met 2, 5, 8 en 9}) = 4! = 24$
 b $N(\text{codes die beginnen met 5}) = 1 \cdot 3! = 6$

Bladzijde 37

- 37** a $N(\text{compositietekeningen}) = 17 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 22 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 18 \cdot 14 = 6\,870\,679\,200$
- 38** a $N(\text{aanvoerder en reserve-aanvoerder}) = 12P_2 = 132$
 b $N(\text{rijen}) = 12! = 479\,001\,600$
 c $N(\text{geen twee heren naast elkaar}) = N(\text{hdhdhdhdhdhd OF dhhdhdhdhdhd}) = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1\,036\,800$
- 39** a Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters?
 b Hoeveel drielettercodes zijn er met drie verschillende letters?
 c Hoeveel vierlettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?
 d Hoeveel vierlettercodes zijn er, waarbij de eerste letter een a of een b is en de andere letters moeten worden gekozen uit c, d, e en f waarbij herhalingen zijn toegestaan?

1.3 Combinaties en herhalingscombinaties**Bladzijde 29**

- 40** a $4P_2 = 12$
 b De klas kan $\frac{4P_2}{2} = 6$ afvaardigingen leveren.

Bladzijde 30

- 41** a combinaties
 b permutaties
 c combinaties
 d combinaties
 e permutaties
- 42** a $N(\text{drietallen}) = \binom{12}{3} = 220$
 b $N(\text{vijftallen}) = \binom{10}{5} = 252$
 c $N(\text{drietallen}) = 12 \cdot 10 \cdot 7 = 840$
 d $N(\text{top vijf}) = 29P_5 = 14\,250\,600$

Bladzijde 31

- 43** a $N(\text{vijf teams voor 1^e serie}) = \binom{15}{5} = 3003$
 b Het verschil is $\binom{15}{5} - \binom{13}{5} = 3003 - 1287 = 1716$.

- 44** a $N(4 \text{ spelers}) = \binom{18}{4} = 3060$
 b $N(\text{zestallen}) = \binom{45}{6} = 8\,145\,060$
 c $N(15 \text{ goed}) = \binom{20}{15} = 15\,504$
 d $N(\text{halve competitie van 18 clubs}) = \binom{18}{2} = 153$
 e $N(\text{hele competitie van 16 clubs}) = 16P2 = 240$
- 45** a $N(\text{deelverzamelingen}) = \binom{20}{12} = 125\,970$
 b $N(\text{deelverzamelingen}) = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 32$
- 46** a $N(\text{selecties van 8 spelers}) = \binom{28}{8} = 3\,108\,105$
 b $N(\text{rijtjes van acht spelers}) = 8! = 40\,320$
 c $N(\text{basisvijftallen}) = \binom{8}{5} = 56$
 d $N(\text{teams van zes spelers uit 20 leerlingen}) = \binom{20}{6} = 38\,760$
- 47** a Een negenhoek heeft 9 zijden.
 $N(\text{verbindingslijnstukken}) = \binom{9}{2} = 36$
 $N(\text{diagonalen}) = 36 - 9 = 27$
 b $N(\text{driehoeken met alle hoekpunten op buitenrand}) = \binom{9}{3} = 84$
 c $N = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - n = \frac{1}{2}n^2 - 1\frac{1}{2}n$

Bladzijde 32

- 48** a Hoeveel volgordes zijn mogelijk met 7 verschillende dingen?
 b Op hoeveel manieren kun je 3 van de 7 vakjes zwart maken?
 c Op hoeveel manieren kun je één jongen en één meisje kiezen uit een groep van 7 jongens en 3 meisjes?
 d Hoeveel drielettercodes zijn er te maken met de letters a, b, c, d, e, f en g waarbij herhalingen zijn toegestaan?
 e Op hoeveel manieren kun je 7 driekeuzevragen beantwoorden?
 f Op hoeveel manieren kun je een voorzitter, secretaris en penningmeester kiezen uit 7 mensen?
- 49** a $\binom{17}{0} = 1$, $\binom{17}{1} = 17$, $\binom{17}{16} = 17$ en $\binom{17}{17} = 1$
 b Je kunt op één manier 0 personen kiezen uit een groep van 17.
 Je kunt op 17 manieren 1 persoon kiezen uit een groep van 17.
 Je kunt op 17 manieren 16 personen kiezen uit een groep van 17.
 Je kunt op één manier 17 personen kiezen uit een groep van 17.
 c $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$ en $\binom{n}{n} = 1$
- 50** a $x(x-1) - (x-2)(x-3) = 74$
 $x^2 - x - (x^2 - 3x - 2x + 6) = 74$
 $x^2 - x - x^2 + 3x + 2x - 6 = 74$
 $4x = 80$
 $x = 20$

$$\mathbf{b} \quad \binom{x}{6} - \binom{x-2}{6} \approx 60\,000$$

Voer in $y_1 = x \text{ nCr } 6 - (x-2) \text{ nCr } 6$ en maak een tabel.

$x = 24$ geeft $y_1 = 59\,983$

Dus $x = 24$.

$$\mathbf{c} \quad \binom{36}{x} - \binom{36}{x-3} \approx 92\,000\,000$$

Voer in $y_1 = 36 \text{ nCr } x - 36 \text{ nCr } (x-3)$ en maak een tabel.

$x = 9$ geeft $y_1 = 92\,195\,488$

Dus $x = 9$.

$$\mathbf{d} \quad \binom{n}{2} - n - \left(\binom{n-5}{2} - (n-5) \right) = 175$$

Voer in $y_1 = x \text{ nCr } 2 - x - ((x-5) \text{ nCr } 2 - (x-5))$ en maak een tabel.

$x = 39$ geeft $y_1 = 175$

Dus $n = 39$.

51 a Combinaties, de volgorde waarin de groene vierkantjes gekozen worden is niet van belang.

$$\mathbf{b} \quad N(\text{totaal}) = \binom{6}{2} = 15$$

52 a O O N O O N N N O
O N O N O N O N O

b In een route van A naar B staan 9 letters. De letter N staat daar 4 keer bij.

c Er zijn $\binom{9}{4} = 126$ routes van A naar B .

Bladzijde 34

53 a $N(\text{totaal}) = 2^{10} = 1024$

$$\mathbf{b} \quad N(\text{acht keer kop}) = \binom{10}{8} = 45$$

$$\mathbf{c} \quad N(\text{vijf keer kop}) = \binom{10}{5} = 252$$

$$\mathbf{d} \quad N(\text{beginnen met KK}) = 1 \cdot 1 \cdot 2^8 = 256$$

$$\mathbf{e} \quad N(\text{beginnen en eindigen met K en vijf K's in totaal}) = 1 \cdot 1 \cdot \binom{8}{3} = 56$$

54 a $N(\text{totaal}) = 2^{20} = 1\,048\,576$

$$\mathbf{b} \quad N(15 \text{ goed}) = \binom{20}{15} = 15\,504$$

c Minstens 80% van 20 is minstens 16.

$$N(\text{minstens 16 goed}) = \binom{20}{16} + \binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 6196$$

$$\text{Dat is } \frac{6196}{1\,048\,576} \times 100\% \approx 0,6\%.$$

55 a $N(\text{totaal}) = 2^{19} = 524\,288$

$$\mathbf{b} \quad N(\text{vijf lampjes}) = \binom{19}{5} = 11\,628$$

$$\mathbf{c} \quad N(\text{minder dan drie}) = \binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} = 191$$

d Het eerste, het middelste en het laatste lampje branden, er zijn dus 16 vrij te kiezen.

$$N(16 \text{ lampjes}) = 2^{16} = 65\,536$$

Bladzijde 35

56 a $N(A \rightarrow P \rightarrow B) = \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{5} = 2520$

b $N(A \rightarrow Q \rightarrow B) = \binom{11}{6} \cdot \binom{4}{2} = 2772$

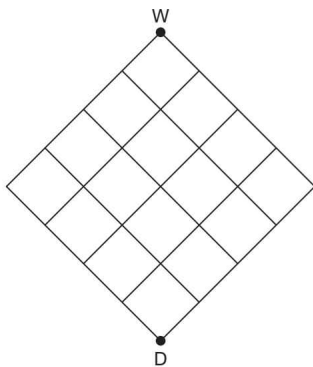
c $N(A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B) = \binom{6}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} = 1200$

d $N(A \rightarrow B) = N(A \rightarrow P \rightarrow B) = \binom{7}{3} \cdot \binom{8}{5} = 1960$

57 a $N(A \rightarrow B) = \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{8}{3} = 11\,200$

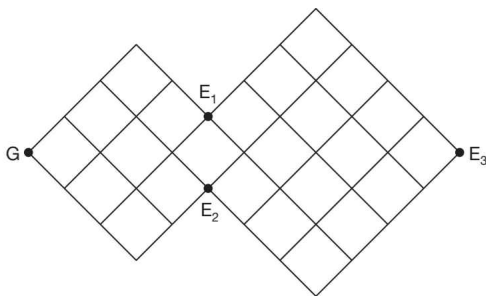
b $N(A \rightarrow B) = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{2}{1} = 2016$

58 a Je loopt in het volgende rooster.



$$N(W \rightarrow D) = \binom{8}{4} = 70$$

b Je loopt in het volgende rooster.



Om van G naar E₃ te komen moet je via E₁ of via E₂.

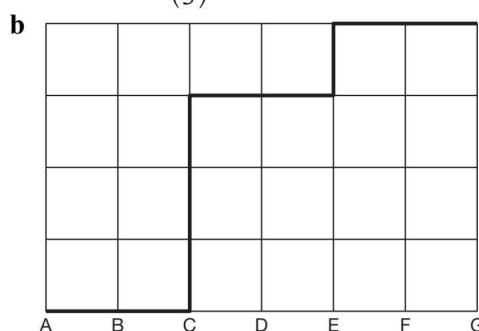
Dus G E₁ E₃ of G E₂ E₃.

$$N(G \rightarrow E_1 \rightarrow E_3) + N(G \rightarrow E_2 \rightarrow E_3) = \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} + \binom{5}{3} \cdot \binom{7}{4} = 700$$

Bladzijde 36

59 a Het aantal kortste routes van het hoekpunt linksonder naar het hoekpunt rechtsboven is $\binom{9}{3}$.

Er zijn dus $\binom{9}{3}$ mogelijkheden om deze klus te verdelen.



c Bij deze situatie hoort een 9×5 -rooster, dus $N(\text{mogelijkheden}) = \binom{14}{5} = 2002$.

d Bij deze situatie hoort een 4×10 -rooster, dus $N(\text{mogelijkheden}) = \binom{14}{10} = 1001$.

Bladzijde 37

60 a $N = \binom{13 - 1 + 8}{8} = \binom{20}{8} = 125\,970$

b $N = \binom{8 - 1 + 13}{13} = \binom{20}{13} = 77\,520$

c $N(\text{herhalingscombinaties van 5 uit 10}) = \binom{10 - 1 + 5}{5} = \binom{14}{5} = 2002$

$$N(\text{combinaties van 5 uit 10}) = \binom{10}{5} = 252$$

Het gevraagde percentage is $\frac{252}{2002} \times 100\% \approx 12,6\%$.

61 a Herhalingscombinatie van 20 uit 6, dus $N = \binom{6 - 1 + 20}{20} = \binom{25}{20} = 53\,130$.

b Geef eerst ieder twee muntstukken van 1 euro, dat kan op één manier. Verdeel daarna $20 - 6 \cdot 2 = 8$ muntstukken van 1 euro over zes personen, dit is een herhalingscombinatie van 8 uit 6.

$$N = 1 \cdot \binom{6 - 1 + 8}{8} = \binom{13}{8} = 1287$$

Bladzijde 38

62 a Er zijn geen herhalingen toegestaan, dus is dit een combinatie van 6 uit 16.

$$N = \binom{16}{6} = 8008$$

b Herhalingscombinatie van 6 uit 16, dus $N = \binom{16 - 1 + 6}{6} = \binom{21}{6} = 54\,264$.

63 a Combinatie van 3 uit 8, dus $N = \binom{8}{3} = 56$.

b Herhalingscombinatie van 3 uit 8, dus $N = \binom{8 - 1 + 3}{3} = \binom{10}{3} = 120$.

c Herhalingscombinatie van 4 uit 8, dus $N = \binom{8 - 1 + 4}{4} = \binom{11}{4} = 330$.

1.4 Variaties en combinaties toepassen

Bladzijde 40

Kies k elementen uit een verzameling van n elementen			
		volgorde van belang?	
		ja	nee
herhalingen toegestaan?	ja	variaties $N = nPk = \frac{n!}{(n-k)!}$	combinaties $N = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
	nee	herhalingsvariates $N = n^k$	herhalingscombinaties $N = \binom{n-1+k}{k}$

- 65** a $N(\text{vijf Engelse boeken}) = \binom{60}{5} = 5\,461\,512$
 b $N(\text{vier Duitse boeken}) = \binom{40}{4} = 91\,390$
 c $N(\text{vijf Engelse en vier Duitse boeken}) = \binom{60}{5} \cdot \binom{40}{4} = 5\,461\,512 \cdot 91\,390 \approx 5 \cdot 10^{11}$

Bladzijde 41

- 66** a $N(\text{drie jongens}) = \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3} = 1680$
 b $N(\text{alleen jongens}) = \binom{6}{6} = 1$
 c $N(\text{hoogstens één meisje}) = N(0 \text{ meisjes}) + N(1 \text{ meisje}) = \binom{6}{6} + \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} = 55$
 d $N(\text{meer dan vier jongens}) = N(5 \text{ jongens}) + N(6 \text{ jongens}) = \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} + \binom{6}{6} = 55$
- 67** a $N(\text{totaal}) = 10! = 3\,628\,800$
 b $N(\text{wiskundeboeken naast elkaar}) = 5! \cdot 6! = 86\,400$
 c $N(\text{wiskunde- en scheikundeboeken naast elkaar}) = 2! \cdot 6! \cdot 4! = 34\,560$

Bladzijde 42

- 68** a Kies eerst een klassiek stuk en dan een hedendaags stuk.
 $N(\text{klassiek beginnen en hedendaags eindigen}) = 3 \cdot 2 \cdot (9 - 2)! = 6 \cdot 7! = 30\,240$
 b $N(\text{romantische stukken achter elkaar}) = 6! \cdot 4! = 17\,280$
 c $N(\text{romantische stukken om en om}) = N(\text{f r f r f r f r f}) = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 4! = 2880$
 d $N(\text{elk genre achter elkaar}) = 3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2! = 1728$
- 69** a $N = \binom{6}{2}^4 = 50\,625$
 b $N = \binom{4}{1}^2 \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot \binom{4}{3}^2 = 9216$
 c $N = \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2}^2 \cdot \binom{6}{5}^2 = 48\,600$
 d $N = \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}^5 \cdot \left(\binom{4}{0} + \binom{4}{1} \right) = 233\,280$
 e $N = \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{0} \cdot \left(\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \right)^3 = 1\,000\,188$

Bladzijde 43

- 70** Emmy volgt de redenering in de aanpak van het voorbeeld en vervolgt die met:
 Er is één letter B, dus deel door 1!.
 Er is één letter E, dus deel door 1!.
- 71** a $N(\text{letters van HOOIKOORTS}) = \frac{10!}{4!} = 151\,200$
 b $N(\text{letters van VORSTVERLET}) = \frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 2\,494\,800$
 c $N(\text{letters van TELEVISIETOESTEL}) = \frac{16!}{3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 3\,632\,428\,800$
 d $N(\text{letters van MISSISSIPPI}) = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$

- 72 a** $N(\text{minstens vijf A's}) = N(5 \text{ A's}) + N(6 \text{ A's}) + N(7 \text{ A's}) = \frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{7!}{6! \cdot 1!} + 1 = 29$
- b** $N(\text{meer A's dan B's}) = N(4 \text{ A's}) + N(5 \text{ A's}) + N(6 \text{ A's}) = \frac{6!}{4! \cdot 2!} + \frac{6!}{5! \cdot 1!} + 1 = 22$
- c** $N(\text{totaal}) = 2^9 = 512$

- 73 a** $N = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$
- b** $N = \frac{8!}{2! \cdot 4!} = 840$

- 74 a** $3 \ 1 \ 1 \ 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \text{ keer}$
- $2 \ 2 \ 1 \ 1 \quad \binom{4}{2} = 6 \text{ keer}$
- $N(6 \text{ ogen}) = 4 + 6 = 10$
- b** 4 ogen $1 \ 1 \ 1 \ 1 \quad 1 \text{ keer}$
- 5 ogen $2 \ 1 \ 1 \ 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \text{ keer}$
- 6 ogen $\text{zie a} \quad 10 \text{ keer}$
- 7 ogen $4 \ 1 \ 1 \ 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \text{ keer}$
- $3 \ 2 \ 1 \ 1 \quad \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} = 12 \text{ keer}$
- $2 \ 2 \ 2 \ 1 \quad \binom{4}{3} = 4 \text{ keer}$
- $N(\text{hoogstens 7 ogen}) = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$

Bladzijde 44

- 75 a** Dat kan op $\binom{9}{3} = 84$ manieren.

- b** Dat kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren.

- c** Ga uit van negen lege hokjes.

Drie A's zetten in negen lege hokjes kan op $\binom{9}{3}$ manieren.

Vervolgens in twee van de overgebleven zes hokjes een N zetten kan op $\binom{6}{2}$ manieren.

Vervolgens in twee van de overgebleven vier hokjes een L zetten kan op $\binom{4}{2}$ manieren.

Vervolgens in één van de overgebleven twee hokjes een B zetten kan op $\binom{2}{1}$ manieren.

Ten slotte in het overgebleven hokje een E zetten kan op 1 manier.

Dus $N(\text{rangschikkingen}) = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 1$ ofwel $N(\text{rangschikkingen}) = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1}$.

- d** $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{9!}{3! \cdot \cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{2! \cdot \cancel{4!}} \cdot \frac{\cancel{4!}}{2! \cdot \cancel{2!}} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$

- e** Uit $a + b + c = n$ volgt $c = n - a - b$.

$$\binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a! \cdot \cancel{(n-a)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-a)!}}{b! \cdot (n-a-b)!} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

- 76 a** Bij de vijfde beurt de tweede zes, dus bij de eerste vier beurten één zes.

$$6 \cancel{6} \cancel{6} \cancel{6} \quad \binom{4}{1} = 4 \text{ keer}$$

$$N(\text{bij de vijfde beurt de tweede zes}) = 4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 500$$

- b** Bij de achtste beurt de derde zes, dus bij de eerste zeven beurten twee zessen.

$$6 \ 6 \ \cancel{6} \cancel{6} \cancel{6} \cancel{6} \quad \binom{7}{2} = 21 \text{ keer}$$

$$N(\text{bij de achtste beurt de derde zes}) = 21 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 65\,625$$

77 a $N(\text{alleen mannen}) = \binom{36}{8} = 30\,260\,340$

b $N(\text{vier mannen}) = \binom{36}{4} \cdot \binom{33}{4} = 241\,039\,260$

c $N(\text{twee uit de jongste en één uit de oudste groep}) = \binom{20}{2} \cdot \binom{36}{5} \cdot \binom{13}{1} = 931\,170\,240$

d $N(\text{meer dan zes uit de middelste groep}) = N(7 \text{ uit de middelste groep}) + N(8 \text{ uit de middelste groep}) =$
 $\binom{36}{7} \cdot \binom{33}{1} + \binom{36}{8} = 305\,733\,780$

e $N(\text{twee vrouwen uit de middelste groep}) = \binom{16}{2} \cdot \binom{53}{6} = 2\,754\,897\,600$

78 a $N(A \rightarrow B) = \binom{16}{6} = 8008$

$$N(A \rightarrow P \rightarrow B) = \binom{7}{2} \cdot \binom{9}{4} = 2646$$

$$N(\text{van } A \text{ naar } B \text{ niet via } P) = 8008 - 2646 = 5362$$

b $N(A \rightarrow Q \rightarrow B) = \binom{10}{3} \cdot \binom{6}{3} = 2400$

$$N(A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B) = \binom{7}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{6}{3} = 1260$$

$$N(\text{van } A \text{ naar } B \text{ niet via } P \text{ maar wel via } Q) = 2400 - 1260 = 1140$$

Bladzijde 45

79 a $N(\text{steekproeven}) = \binom{60}{4} = 487\,635$

b $N(\text{geen defecte}) = \binom{54}{4} = 316\,251$

c $N(\text{twee of meer defecte}) = N(2 \text{ defecte}) + N(3 \text{ defecte}) + N(4 \text{ defecte}) =$
 $\binom{6}{2} \cdot \binom{54}{2} + \binom{6}{3} \cdot \binom{54}{1} + \binom{6}{4} = 22\,560$

80 a $N(\text{totaal}) = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 4200$

b $N(\text{totaal}) = \frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1260$

- c Beschouw de drie A's als één letter.

Er zijn dan 10 letters, namelijk

S $3 \times$

AAA $1 \times$

I $1 \times$

P $2 \times$

N $1 \times$

E $1 \times$

L $1 \times$.

$$N(\text{rangschikkingen met de drie A's naast elkaar}) = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302\,400$$

81 a Herhalingscombinatie van 10 uit 3, dus $N = \binom{3-1+10}{10} = \binom{12}{10} = 66$.

- b Herhalingsvariatie van 10 uit 3, dus $N = 3^{10} = 59\,049$.

- c Doe eerst in elke vaas vier witte knikkers, dat kan op één manier.

Verdeel daarna $20 - 3 \cdot 4 = 8$ witte knikkers over de drie vazen, dit is een herhalingscombinatie van 8 uit 3.

$$N = 1 \cdot \binom{3-1+8}{8} = \binom{10}{8} = 45$$

- d 10 rode knikkers verdelen over de drie vazen kan op 66 manieren (zie onderdeel a).

10 witte knikkers verdelen over de drie vazen kan ook op 66 manieren.

$$N = 66 \cdot 66 = 4356$$

- 82 a** De volgorde is van belang en herhalingen zijn toegestaan, dus herhalingsvariatie van 3 uit 10.

$$N(\text{herhalingsvariëaties}) = 10^3 = 1000$$

- b De volgorde is van belang en herhalingen zijn niet toegestaan, dus variatie van 3 uit 5.

$$N(\text{variëaties}) = 5P3 = 60$$

- c De mogelijkheden zijn a b c

0 1 2

0 1 3

0 1 4

0 2 3

0 2 4

0 3 4

1 2 3

1 2 4

1 3 4

2 3 4

Dus $N = 10$.

- d De mogelijkheden zijn

10 + 0 + 0 3× 6 + 3 + 1 6×

9 + 1 + 0 6× 6 + 2 + 2 3×

8 + 2 + 0 6× 5 + 5 + 0 3×

8 + 1 + 1 3× 5 + 4 + 1 6×

7 + 3 + 0 6× 5 + 3 + 2 6×

7 + 2 + 1 6× 4 + 4 + 2 3×

6 + 4 + 0 6× 4 + 3 + 3 3×

Dus $N = 66$.

Bladzijde 46

- 83 a** In 14 frames winnen, dus eindstand 9 – 5, dus van de eerste 13 frames wint hij er 8 en hij wint het laatste frame.

$$N(\text{Bingham wint in 14 frames}) = \binom{13}{8} \cdot 1 = 1287$$

- b De finale duurt 17 frames, dus eindstand 9 – 8 of 8 – 9, dus van de eerste 16 frames wint één van beide spelers er 8 en vervolgens het laatste frame.

$$N(\text{finale duurt 17 frames}) = 2 \cdot \binom{16}{8} \cdot 1 = 25\,740$$

- c Winnen in hoogstens 13 frames, dus eindstand 9 – 4 of 9 – 3 of 9 – 2 of 9 – 1 of 9 – 0.

$$N(\text{Maguire wint in hoogstens 13 frames}) = \binom{12}{8} \cdot 1 + \binom{11}{8} \cdot 1 + \binom{10}{8} \cdot 1 + \binom{9}{8} \cdot 1 + \binom{9}{9} = 715$$

Diagnostische toets**Bladzijde 48**

1 a SOM

6		8	9	10	11	12
5			8	9	10	11
4				8	9	10
3					8	9
2						8
1						
	1	2	3	4	5	6

aantal = 5

b aantal = 10

c PRODUCT

6	6	12				
5	5	10				
4	4	8	12			
3	3	6	9	12		
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

aantal = 17

2 a De mogelijkheden zijn

3 ogen 1 1 1
 4 ogen 1 1 2 1 2 1 2 1 1
 1 1 3 1 3 1 3 1 1
 5 ogen 1 2 2 2 1 2 2 2 1
 aantal = 10

b De mogelijkheden zijn

21 ogen 8 8 5 8 5 8 5 8 8
 8 7 6 8 6 7 7 8 6 7 6 8 6 8 7 6 7 8
 22 ogen 8 8 6 8 6 8 6 8 8
 8 7 7 7 8 7 7 7 8
 23 ogen 8 8 7 8 7 8 7 8 8
 24 ogen 8 8 8
 aantal = 10 + 6 + 3 + 1 = 20

3 a $N(\text{eerste is jongen met NT en tweede is meisje}) = 12 \cdot 54 = 648$ **b** $N(\text{twee jongens met hetzelfde profiel}) = 12 \cdot 11 + 16 \cdot 15 + 22 \cdot 21 + 3 \cdot 2 = 840$

c $N(\text{minstens één leerling met natuurprofiel}) = N(\text{één of twee leerlingen met natuurprofiel}) =$
 $N(\text{één leerling met natuurprofiel}) + N(\text{twee leerlingen met natuurprofiel}) =$
 $2 \cdot (19 + 36) \cdot (37 + 15) + (19 + 36) \cdot (19 + 36 - 1) = 2 \cdot 55 \cdot 52 + 55 \cdot 54 = 8690$

d $N(\text{eerste is meisje met EM en tweede is jongen of leerling met EM}) = 15 \cdot (53 + 14) = 15 \cdot 67 = 1005$
 Je kunt ook de algemene somregel gebruiken. Je krijgt dan $15 \cdot (53 + 36 - 22) = 15 \cdot 67 = 1005$.

4 a $N(\text{totaal}) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ **b** $N(\text{getal} < 50000) = N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2, 3 \text{ of } 4) = N(\leq 4 * * * *) = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$ **c** $N(\text{totaal}) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16807$

d $N(\text{getal} > 54000) = N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 5 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 4, 5, 6, 7 \text{ of } 8 \text{ OF } 1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 6, 7 \text{ of } 8) =$
 $N(5 \geq 4 * * *) + N(6 \geq 6 * * *) = 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 8918$

5 a Dit is een variatie van 5 uit 8. $N(\text{variates}) = 8P5 = 6720$ **b** Dit is een herhalingsvariatie van 5 uit 8. $N(\text{herhalingsvariates}) = 8^5 = 32768$ **c** $N(\text{herhalingen toegestaan en eerste en laatste letter verschillend}) = 8^4 \cdot 7 = 28672$

Bladzijde 49

6 a $N(\text{drie actiefilms}) = \binom{11}{3} = 165$

b $N(\text{één actie, één romantische en één thriller}) = 11 \cdot 9 \cdot 5 = 495$

c $N(\text{geen romantische film}) = \binom{16}{7} = 11\,440$

7 a $N(A \rightarrow D) = \binom{11}{4} = 330$

b $N(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D) = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} = 72$

8 a Combinatie van 5 uit 28, dus $N = \binom{28}{5} = 98\,280$.

b Herhalingscombinatie van 5 uit 28, dus $N = \binom{28-1+5}{5} = \binom{32}{5} = 201\,376$.

9 a $N(\text{top 3}) = 25P3 = 13\,800$

b $N(\text{romantische films achter elkaar bekijken}) = 17! \cdot 9! \approx 1,29 \cdot 10^{20}$

c $N(\text{van elk genre de films achter elkaar bekijken}) = 3! \cdot 11! \cdot 9! \cdot 5! \approx 1,04 \cdot 10^{16}$

10 a 4 4 4 4 2 $\binom{5}{4} = 5$ keer

4 4 4 3 3 $\binom{5}{3} = 10$ keer

$N(18 \text{ ogen}) = 5 + 10 = 15$

b 17 ogen 4 4 4 4 1 $\binom{5}{4} = 5$ keer

4 4 4 3 2 $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 20$ keer

4 4 3 3 3 $\binom{5}{2} = 10$ keer

18 ogen zie a 15 keer

19 ogen 4 4 4 4 3 $\binom{5}{4} = 5$ keer

20 ogen 4 4 4 4 4 1 keer

$N(\text{minstens 17 ogen}) = 35 + 15 + 5 + 1 = 56$

11 a $N(\text{totaal}) = \frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = 369\,600$

b $N(\text{A's naast elkaar}) = \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 16\,800$

c De A's en de B's om en om zonder C's en D's ertussen kan op twee manieren: A B A B A B en B A B A B A.

Zo'n groep samen met 3 C's en 3 D's rangschikken kan op $\frac{7!}{3! \cdot 3!}$ manieren.

Dus $N(\text{A's en B's om en om zonder C's en D's ertussen}) = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 3!} = 280$.