

Gemengde opgaven

1 Combinatoriek

Bladzijde 200

- 1** a eerst een 2, 3 of 4
 $N(\text{getal} < 50\,000 \text{ met herhaling}) = 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 972$
 b $N(\text{eerst drie verschillend dan twee dezelfde}) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 360$
 c Eerst een 5 en dan een 6 of 7 (en bij de laatste twee geen 5)
 OF eerst een 6 of 7 en bij de volgende twee geen 5
 OF eerst een 6 of 7 en bij de volgende twee wel een 5.
 $N(\text{getal} > 56\,000 \text{ zonder herhaling}) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 +$
 $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 16 + 144 + 16 + 16 = 192$
- $\uparrow$

5

$\uparrow$

5
- d Bij eerste drie een 5 en bij laatste twee geen 5
 OF bij eerste drie geen 5 en bij laatste twee een 5
 OF bij eerste drie geen 5 en bij laatste twee geen 5.
 Als bij de eerste drie een 5 zit dan kan deze op drie plaatsen staan: $5 \bar{5} \bar{5}$ OF $\bar{5} 5 \bar{5}$ OF $\bar{5} \bar{5} 5$.
 En als bij de laatste twee een 5 zit dan kan deze op twee plaatsen staan.
 $N(\text{geen gelijke cijfers}) = 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2) + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 480$

- 2** a $N(\text{totaal}) = 10! = 3\,628\,800$
 b $N(\text{raakvlakhindernissen direct achter elkaar}) = 7! \cdot 4! = 120\,960$
 c $N(\text{parkoers begint met slalom en de rest staat per soort bij elkaar}) = 1 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2! = 1728$
 d $N(\text{bij start en finish een hoogtehinderis}) = 3 \cdot 2 \cdot 8! = 241\,920$

- 3** a $N(5 \text{ zwart}) = \binom{12}{5} = 792$
 b $N(\text{totaal}) = 2^{12} = 4096$
 c $N(1^{\text{e}} \text{ kolom } 1 \text{ zwart, } 2^{\text{e}} \text{ kolom } 2 \text{ zwart, } 3^{\text{e}} \text{ kolom } 3 \text{ zwart}) = \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} = 96$
 d $N(1^{\text{e}} \text{ kolom } 2 \text{ zwart, rest vrij}) = \binom{4}{2} \cdot 2^8 = 1536$

- 4** a $N(\text{niet dezelfde letters naast elkaar}) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 768$
 b $N(\text{elke letter komt drie keer voor}) = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 1680$
 c $N(\text{meer dan zeven A's}) = N(\text{acht of negen A's}) = N(\text{acht A's}) + N(\text{negentien A's}) = \binom{9}{8} \cdot 2 + \binom{9}{9} = 19$
 d $N(\text{geen C en meer A's dan B's}) = N(\text{geen C en vijf, zes, zeven, acht of negen A's}) =$
 $N(5A, 4B) + N(6A, 3B) + N(7A, 2B) + N(8A, 1B) + N(9A, 0B) = \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 256$
 e Voor de laatste letter heb je maar één mogelijkheid. Deze moet namelijk dezelfde zijn als de eerste.
 De overige acht mogen alles zijn.
 $N(\text{begint en eindigt met zelfde letter}) = 3^8 \cdot 1 = 6561$

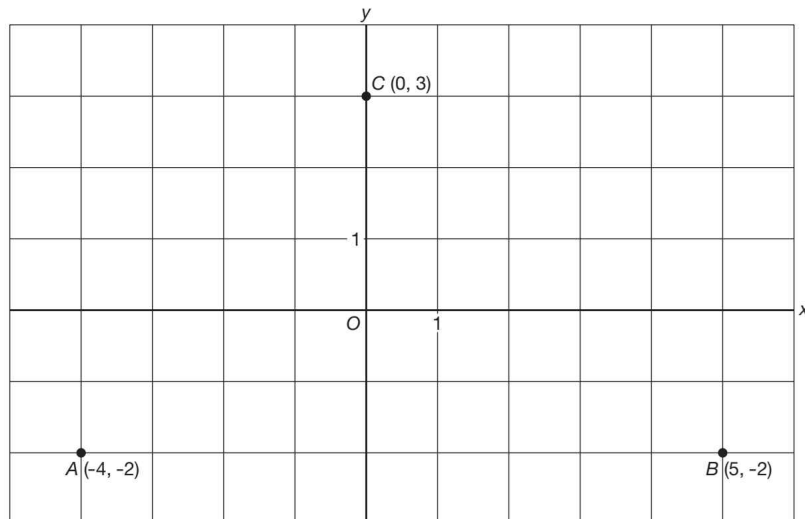
Bladzijde 201

- 5** a $N(\text{evenveel jongens als meisjes}) = N(\text{vier jongens en vier meisjes}) = \binom{53}{4} \cdot \binom{54}{4} \approx 9,26 \cdot 10^{10}$
 b $N(\text{meer jongens dan meisjes}) = N(5, 6, 7 \text{ of } 8 \text{ jongens}) =$
 $N(5 \text{ jongens}) + N(6 \text{ jongens}) + N(7 \text{ jongens}) + N(8 \text{ jongens}) =$
 $\binom{53}{5} \cdot \binom{54}{3} + \binom{53}{6} \cdot \binom{54}{2} + \binom{53}{7} \cdot \binom{54}{1} + \binom{53}{8} \approx 1,13 \cdot 10^{11}$

$$c \quad N(\text{twee of drie NG}) = N(\text{twee NG}) + N(\text{drie NG}) = \binom{36}{2} \cdot \binom{71}{6} + \binom{36}{3} \cdot \binom{71}{5} \approx 1,83 \cdot 10^{11}$$

$$d \quad N(\text{hoogstens twee meisjes NT of NG}) = \\ N(\text{nul meisjes NT of NG}) + N(\text{één meisje NT of NG}) + N(\text{twee meisjes NT of NG}) = \\ \binom{80}{8} + \binom{27}{1} \cdot \binom{80}{7} + \binom{27}{2} \cdot \binom{80}{6} \approx 2,20 \cdot 10^{11}$$

$$e \quad N(\text{één CM en hoogstens twee NT}) = N(\text{één CM en nul, één of twee NT}) = \\ \binom{15}{1} \cdot \left(\binom{73}{7} + \binom{19}{1} \cdot \binom{73}{6} + \binom{19}{2} \cdot \binom{73}{5} \right) \approx 1,11 \cdot 10^{11}$$

6

$$a \quad N(OBCAO) = N(O \rightarrow B) \cdot N(B \rightarrow C) \cdot N(C \rightarrow A) \cdot N(A \rightarrow O) = \\ \binom{7}{2} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{6}{2} = 10001880$$

$$b \quad N(OABCO) = N(O \rightarrow A) \cdot N(A \rightarrow B) \cdot N(B \rightarrow C) \cdot N(C \rightarrow O) = \\ \binom{6}{2} \cdot 1 \cdot \binom{10}{5} \cdot 1 = 3780$$

$$c \quad N(OACBO) = N(OBCAO) = 10001880 \\ N(OCBAO) = N(OABCO) = 3780 \\ N(OBACO) = N(OCABO) = \binom{7}{2} \cdot 1 \cdot \binom{9}{5} \cdot 1 = 2646$$

Meer volgordes zijn er niet, dus het kleinste aantal routes bij *OBACO* of bij *OCABO*.

$$7 \quad a \quad N(\text{van elke soort 2}) = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 2520$$

$$b \quad N(5 \text{ adenine, } 3 \text{ cytosine, } 2 \text{ guanine, } 4 \text{ thymine}) = \binom{14}{5} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 2522520$$

$$8 \quad a \quad N(\text{drie keer 1, drie keer 2, twee keer 3}) = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$$

$$b \quad \text{Vier cijfers uit de zes cijfers kiezen kan op } \binom{6}{4} \text{ manieren.}$$

$$N(\text{vier cijfers elk twee keer}) = \binom{6}{4} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 37800$$

c Er komt dan één van de cijfers drie keer voor (hiervoor zijn 6 mogelijkheden)

OF twee van de cijfers komen elk twee keer voor (en hiervoor zijn $\binom{6}{2}$ mogelijkheden).

$$N(\text{elk van de cijfers 1 t/m 6 komt minstens één keer voor}) = 6 \cdot \frac{8!}{3!} + \binom{6}{2} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 191520$$

- 9 a $N(\text{manieren}) = 16P12 \approx 8,7 \cdot 10^{11}$
 b $N(\text{manieren}) = 12! = 479\,001\,600$
 c Kies per rij een lege plaats en kies vervolgens de volgorde van de twaalf apps.
 $N(\text{manieren}) = 4^4 \cdot 12! \approx 1,2 \cdot 10^{11}$
 d De vier socialmedia- en chatapps kunnen op $4! = 24$ manieren worden gerangschikt. Er zijn 4 rijen en 4 kolommen waar deze kunnen komen, dus 8 mogelijkheden in totaal. Voor de overige apps zijn er nog $12P8 = 19\,958\,400$ mogelijkheden.
 $N(\text{mogelijkheden}) = 24 \cdot 8 \cdot 19\,958\,400 = 3\,832\,012\,800$

Bladzijde 202

- 10 $N(\text{pincodes}) = 3^5 = 243$
- 11 a Dat Bert aan tafel 7 komt te spelen staat vast.
 Uit de overige $40 - 1 = 39$ leden worden er nog drie voor tafel 7 gekozen.
 Dus het aantal mogelijke viertallen voor tafel 7 is $\binom{39}{3} = 9139$.
- b $N(\text{manieren}) = 3! = 6$
 c Er zitten nog $32 - 8 = 24$ kaarten in het spel waaronder $16 - 5 = 11$ plaatjes.
 $N(\text{achtballen voor speler 2}) = \binom{24-11}{8} = \binom{13}{8} = 1287$
- d Dit is een herhalingscombinatie van 5 uit 4.
 $N(\text{herhalingscombinaties}) = \binom{4-1+5}{5} = \binom{8}{5} = 56$
- e De schaaltes zijn gelijk, dus dit is geen herhalingscombinatie van 5 uit 4.
 We moeten systematisch het aantal mogelijkheden noteren die er zijn om vijf bitterballen te verdelen in vier groepen.
- | | | |
|---------|---------|---------|
| 5 0 0 0 | 3 2 0 0 | 2 2 1 0 |
| 4 1 0 0 | 3 1 1 0 | 2 1 1 1 |
- $N(\text{vijf bitterballen verdelen over vier gelijke schaaltes}) = 6$
- f Vijf gelijke borrelhapjes verdelen over vier personen kan op 56 manieren, zie vraag d.
 Dus $N(4 \text{ keer vijf gelijke borrelhapjes verdelen over vier personen}) = 56^4 = 9\,834\,496$.
- g Vijf gelijke borrelhapjes verdelen over vier personen kan op 56 manieren, zie vraag d.
 Vijf vlammetjes verdelen over drie personen kan op $\binom{3-1+5}{5} = \binom{7}{5} = 21$ manieren.
 Dus $N(\text{borrelhapjes verdelen over vier personen als één persoon geen vlammetjes wil}) = 21 \cdot 56^3 = 3\,687\,936$.
- h Iedereen één bitterbal geven kan op 1 manier.
 Iedereen één loempiaatje geven kan op 1 manier.
 Daarna zijn er nog één bitterbal, één loempiaatje, vijf vlammetjes en vijf kaassoufflés te verdelen.
 Het gevraagde aantal mogelijkheden is $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 562 = 50\,176$.
- i Beschouw de borrelhapjes die blijven staan als vijfde persoon.
 Vijf gelijke borrelhapjes verdelen over vijf personen kan op $\binom{5-1+5}{5} = \binom{9}{5} = 126$ manieren.
 Dus $N(4 \text{ keer vijf borrelhapjes gelijk verdelen over vier personen als er ook borrelhapjes mogen blijven staan}) = 126^4 = 252\,047\,376$.

2 Discrete wiskunde

12 $N = 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 \cdot \binom{7}{2} \cdot 2^4 = 13\,440$

Bladzijde 203

13 a $(2x - 3y)^5 = \binom{5}{0} \cdot (2x)^5 + \binom{5}{1} \cdot (2x)^4 \cdot (-3y) + \binom{5}{2} \cdot (2x)^3 \cdot (-3y)^2 + \binom{5}{3} \cdot (2x)^2 \cdot (-3y)^3 + \binom{5}{4} \cdot 2x \cdot (-3y)^4 + \binom{5}{5} \cdot (-3y)^5 = 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5$

b De term met x^4y^6 in $(2x + 5y)^{10}$ is $\binom{10}{6} \cdot (2x)^4 \cdot (5y)^6 = 52\,500\,000x^4y^6$.

De coëfficiënt is dus 52 500 000.

14 a De herleiding van $(p^2 + q^3 - 2)^{12}$ heeft $\binom{3-1+12}{12} = \binom{14}{12} = 91$ termen.

b De term met $p^{16}q^6$ in de herleiding van $(p^2 + q^3 - 2)^{12}$ is $\binom{12}{8,2,2} \cdot (p^2)^8 \cdot (q^3)^2 \cdot 2^2 =$

$$\frac{12!}{8! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot p^{16} \cdot q^6 \cdot 4 = 11\,880p^{16}q^4, \text{ dus de coëfficiënt is } 11\,880.$$

c De herleiding van $(a^2b + bc^2 + c^2d^2 + d)^9$ heeft $\binom{4-1+9}{9} = \binom{12}{9} = 220$ termen.

d De term met $a^4b^4c^8d^7$ in de herleiding van $(a^2b + bc^2 + c^2d^2 + d)^9$ is $\binom{9}{2,2,2,3} \cdot (a^2b)^2 \cdot (bc^2)^2 \cdot (c^2d^2)^2 \cdot d^3 = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!} \cdot a^4b^2 \cdot b^2c^4 \cdot c^4d^4 \cdot d^3 = 7560a^4b^4c^8d^7,$

dus de coëfficiënt is 7560.

15 a u_n is een rr met $u_0 = 300$ en $v = 6$, dus
directe formule $u_n = 300 + 6n$
recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 300$
 v_n is een mr met $u_0 = 0,1$ en $r = 2$, dus
directe formule $v_n = 0,1 \cdot 2^n$
recursieve formule $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$ met $v_0 = 0,1$

b Voer in $y_1 = 300 + 6x$ en $y_2 = 0,1 \cdot 2^x$.

De tabel geeft

$$x = 11 \text{ en } y_1 = 366 \text{ en } y_2 = 204,8$$

$$x = 12 \text{ en } y_1 = 372 \text{ en } y_2 = 409,6.$$

Dus vanaf $n = 12$ is $v_n > u_n$.

$$\text{c } \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(300 + 300 + 6n) = \frac{1}{2}(n+1)(600 + 6n)$$

$$\sum_{k=0}^n v_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{0,1(1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = -0,1(1 - 2^{n+1})$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{1}{2}(x+1)(6x + 600) \text{ en } y_2 = -0,1(1 - 2^{x+1}).$$

De tabel geeft

$$x = 14 \text{ en } y_1 = 5130 \text{ en } y_2 = 3276,7$$

$$x = 15 \text{ en } y_1 = 5520 \text{ en } y_2 = 6553,5.$$

$$\text{Dus vanaf } n = 15 \text{ is } \sum_{k=0}^n v_k > \sum_{k=0}^n u_k.$$

16 a u_n is een rr met $u_0 = 1000$ en $v = -23$, dus $u_n = 1000 - 23n$.

$$u_n > 0 \text{ geeft } 1000 - 23n > 0$$

$$-23n > -1000$$

$$n < 43,5$$

$$u_{43} = 1000 - 23 \cdot 43 = 11$$

$$\sum_{k=0}^{43} u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot (1000 + 11) = 22\,242$$

b v_n is een mr met $u_0 = 1000$ en $r = 0,96$, dus $v_n = 1000 \cdot 0,96^n$.

Je krijgt $v_{16} \approx 520,4$ en $v_{17} \approx 499,59$.

$$\sum_{k=0}^{16} v_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{1000(1 - 0,96^{17})}{1 - 0,96} \approx 12\,510,33$$

- 17 a** u_n is een mr met $u_0 = 500$ en $r = 0,9$, dus $u_n = 500 \cdot 0,9^n$ met $n = 0$ in de eerste minuut.

De som van de eerste 15 termen is $\sum_{k=0}^{14} u_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{500(1 - 0,9^{15})}{1 - 0,9} \approx 3971$ meter.

- b** Voer in 500 en 0,9Ans.

Je krijg $u_{15} \approx 103$ en $u_{16} \approx 93$.

Dus in de 17^e minuut.

- c** Voer in $y_1 = \frac{500(1 - 0,9^{x+1})}{1 - 0,9}$ en kijk in de tabel.

$x = 25$ geeft $y_1 \approx 4677$ en $x = 26$ geeft $y_1 \approx 4709$.

Dus na 27 minuten is de weerballon voor het eerst hoger dan 4700 meter.

- 18 a** Na één maand is de schuld $1,004 \cdot 100\,000 - 1000 = €99\,400$.

Na twee maanden is de schuld $1,004 \cdot 99\,400 - 2000 = €97\,797,60$.

- b** Na drie maanden is de schuld $1,004 \cdot 97\,797,60 - 3000 \approx €95\,188,79$.

- c** $u_n = 1,004 \cdot u_{n-1} - 1000n$ met $u_0 = 100\,000$.

- d** Voer de formule in op het rijen-invoerscherm.

Je krijgt $u_{13} \approx 12\,854,50$ en $u_{14} \approx -1094$, dus na 14 maanden is de schuld afbetaald.

Bladzijde 204

- 19 a** $u_n = 1,025 \cdot u_{n-1} + 1000$ met $u_0 = 10\,000$

- b** Voer in 10 000 en 1,025Ans + 1000.

Je krijgt $u_3 \approx 13\,844,53$.

Dus op 1 januari 2018 is het saldo €13 844,53.

- c** $u_{13} \approx 28\,925,55$ en $u_{14} \approx 30\,648,69$

Dus op 1 januari 2029 is het saldo voor het eerst meer dan 30 000 euro.

- d** $v_0 = 31\,415 - 5000 = 26\,415$

$v_n = 1,025 \cdot v_{n-1} - 5000$ met $v_0 = 26\,415$

- e** $v_5 = 3604,51$ en $v_6 = -1305,38$

v_5 hoort bij 1 januari 2036, dus André kan zes keer 5000 euro opnemen.

- f** Hij heeft $10\,000 + 15 \cdot 1000 = 25\,000$ euro gestort.

Hij kan $7 \cdot 5000 - 1305,38 = 33\,694,62$ euro opnemen.

Dus $33\,694,62 - 25\,000 = 8694,62$ euro meer opnemen dan storten.

- 20 a** u_n is de rij $10 + 0^2, 10 + 1^2, 10 + 2^2, 10 + 3^2, \dots$, dus $u_n = 10 + n^2$.

Van de rij v_n is zowel de rij getallen in de tellers als de rij getallen in de noemers een rr.

Je krijgt $v_n = \frac{n+2}{n+3}$.

w_n is de rij $10 + 1, 10 + \frac{1}{2}, 10 + \frac{1}{3}, \dots$, dus $w_n = 10 + \frac{1}{n+1}$.

- b** De rij u_n .

TI

Voer in

nMin = 0

$u(n) = 10 + n^2$

$v(n) = v(n-1) + u$

$v(nMin) = 10$

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^9 u_k = 385$.

De som van de eerste tien termen is 385.

De rij v_n .

TI

Voer in

nMin = 0

$u_n = \frac{n+2}{n+3}$

$v(n) = v(n-1) + u$

$v(nMin) = \frac{2}{3}$

Casio

Voer in $a_n = 10 + n^2$ en Start: 0.

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^9 u_k = 385$.

Casio

Voer in $a_n = \frac{n+2}{n+3}$ en Start: 0.

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^9 u_k \approx 8,40$.

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^9 u_k \approx 8,40$.

De som van de eerste tien termen is ongeveer 8,40.

De rij w_n .

TI

Voer in

nMin = 0

$$u_n = 10 + \frac{1}{n+1}$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(\text{nMin}) = 11$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^9 u_k \approx 102,93$.

De som van de eerste tien termen is ongeveer 102,93.

Casio

Voer in $a_n = 10 + \frac{1}{n+1}$ en Start: 0.

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^9 u_k \approx 102,93$.

c De rij v_n heeft grenswaarde 1.

De rij w_n heeft grenswaarde 10.

Er geldt $v_{17} = 0,95$ en $v_{18} \approx 0,95238$, dus bij de rij v_n verschillen de termen minder dan 0,05 van de grenswaarde vanaf $n = 18$.

Er geldt $w_{19} = 10,05$ en $w_{20} \approx 10,048$, dus bij de rij w_n verschillen de termen minder dan 0,05 van de grenswaarde vanaf $n = 20$.

21 a rr met $u_0 = 30$ en $v = 0,2$, dus $u_n = 30 + 0,2n$.

$$u_{24} = 30 + 0,2 \cdot 24 = 34,8$$

$$\sum_{k=0}^{24} u_k = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (30 + 34,8) = 810$$

810 seconden is 13 minuten en 30 seconden.

Zijn eindtijd is 13 minuten en 30 seconden.

b mr met $v_0 = 30$ en $r = 1,005$, dus $v_n = 30 \cdot 1,005^n$.

Los op $v_n > 33$.

Voer in $y_1 = 30 \cdot 1,005^x$.

De tabel aflezen geeft $v_{19} \approx 32,98$ en $v_{20} \approx 33,15$.

Dus in ronde 21 is hij voor het eerst langzamer dan 33 seconden.

c rr met $w_0 = 30$ en $v = a$, dus $w_n = 30 + an$.

$$w_{24} = 30 + 24a$$

$$\sum_{k=0}^{24} w_k = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (30 + 30 + 24a) = 750 + 300a$$

13 minuten en 18 seconden is $13 \cdot 60 + 18 = 798$ seconden.

$750 + 300a = 798$ geeft $300a = 48$, dus $a = 0,16$.

d mr met $x_0 = 30$ en $r = ?$, dus $x_n = 30 \cdot r^n$.

$$\sum_{k=0}^{24} x_k = \frac{30(1 - r^{25})}{1 - r}$$

14 minuten en 7,3 seconden is $14 \cdot 60 + 7,3 = 847,3$ seconden.

$$\text{Los op } \frac{30(1 - r^{25})}{1 - r} = 847,3.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{30(1 - x^{25})}{(1 - x)} \text{ en } y_2 = 847,3.$$

Intersect geeft $x \approx 1,01$.

Dus $r \approx 1,01$ en $x_n = 30 \cdot 1,01^n$.

$$x_{24} = 30 \cdot 1,01^{24} \approx 38,09$$

Dus hij deed 38,09 seconden over het laatste rondje.

e Jan doet er $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (35 + 40) = 937,5$ seconden over.

De rondetijden van Stijn vormen een meetkundige rij met $r_{24} = \frac{40}{35}$, dus $r = \sqrt[24]{\frac{40}{35}}$.

$$\text{Stijn doet er } \frac{35(1 - (\sqrt[24]{\frac{40}{35}})^{25})}{1 - \sqrt[24]{\frac{40}{35}}} \approx 936,17 \text{ seconden over.}$$

Dus Stijn wint de wedstrijd met $937,5 - 936,17 = 1,33$ seconden verschil.

Bladzijde 205

22 a $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}$

Substitutie van $\varphi = \frac{a}{b}$ in $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ ofwel in $\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}$ geeft $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

b $\varphi^2 = \varphi + 1$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 1 + 4 = 5$$

$$\varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,618 \vee \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

vold. niet

vold.

Dus $\varphi \approx 1,618$.

c $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ met $f_0 = 1$ en $f_1 = 1$

d f_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

$$\frac{f_6}{f_5} = \frac{13}{8} = 1,625, \frac{f_8}{f_7} = \frac{34}{21} \approx 1,619, \frac{f_{10}}{f_9} = \frac{89}{55} \approx 1,618, \frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{233}{144} \approx 1,618, \frac{f_{14}}{f_{13}} = \frac{610}{377} \approx 1,618$$

Voor grote waarden van n zijn de uitkomsten bij benadering 1,618, het gulden getal.

e Kruiselings vermenigvuldigen bij $\frac{h}{l} = \frac{l+b}{h}$ geeft $h^2 = l^2 + bl$.

f $h^2 = l^2 + bl$

$$\frac{h^2}{l^2} = \frac{l^2}{l^2} + \frac{bl}{l^2}$$

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 = 1 + \frac{b}{l}$$

$$\left(\frac{l}{b}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\left(\frac{l}{b}\right)}$$

$$\psi^2 = 1 + \frac{1}{\psi}$$

$$\psi^3 = \psi + 1$$

g Voer in $y_1 = x^3$ en $y_2 = x + 1$.

Intersect geeft $x \approx 1,325$.

Dus $\psi \approx 1,325$.

h p_n : 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, ...

$$\frac{p_{16}}{p_{15}} = \frac{86}{65} \approx 1,323, \frac{p_{18}}{p_{17}} = \frac{151}{114} \approx 1,325, \frac{p_{20}}{p_{19}} = \frac{265}{200} = 1,325, \frac{p_{22}}{p_{21}} = \frac{465}{351} \approx 1,325, \frac{p_{24}}{p_{23}} = \frac{816}{616} \approx 1,325$$

Voor grote waarden van n zijn de uitkomsten bij benadering 1,325, het plastische getal.

3 Kansrekening**Bladzijde 206**

23 a SOM

6						
5						
4	5					
3	4	5				
2	3	4	5			
1	2	3	4	5		
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{som} < 6) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b VERSCHIL

6			2			
5		2				
4	2				2	
3	2			2		
2			2			
1		2				
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{verschil} = 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

c PRODUCT

6	6	12	18	24	30	36
5	5	10	15	20	25	30
4	4	8	12	16	20	24
3	3	6	9	12	15	18
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

$$P(\text{product is deelbaar door 4}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

- 24 a** Het aantal mogelijke uitkomsten is $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$.

som 5 1 1 3 3 keer
 1 2 2 3 keer

Het aantal gunstige uitkomsten is $3 + 3 = 6$.

$$P(\text{som} = 5) = \frac{6}{192} = \frac{1}{32}$$

- b** 1 1 1 of 2 2 2 of 3 3 3 of 4 4 4

Het aantal gunstige uitkomsten is 4.

$$P(\text{met elke dobbelsteen hetzelfde}) = \frac{4}{192} = \frac{1}{48}$$

- c** $P(\text{som} \leq 15) = 1 - P(\text{som} > 15)$

som 18 4 6 8

som 17 4 6 7

4 5 8

3 6 8

som 16 4 6 6

4 5 7

4 4 8

3 6 7

3 5 8

2 6 8

Het aantal ongunstige uitkomsten is 10.

$$P(\text{som} \leq 15) = 1 - P(\text{som} > 15) = 1 - \frac{10}{192} = \frac{91}{96}$$

- d** $P(\text{product is deelbaar door 5}) = P(* 5 5) + P(* 5 \bar{5}) + P(\bar{*} \bar{5} 5) = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{8} + 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{13}{48}$

- 25 a** $P(\text{meer dan 80 km file}) = \frac{71 + 43}{260} \approx 0,438$

- b** $P(\text{op maandag meer dan 80 km file}) = \frac{16 + 12}{52} \approx 0,538$

- c** $P(\text{bij meer dan 80 km file is het maandag}) = \frac{16 + 12}{71 + 43} \approx 0,246$

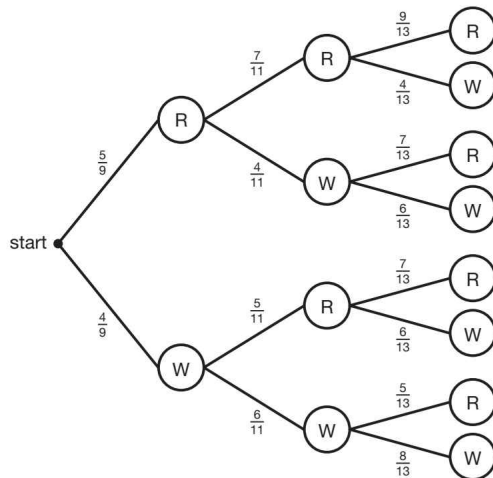
- d** $P(\text{minder dan 40 km file en maandag}) = \frac{7}{260} \approx 0,027$

26 a $P(\text{duif haalt eenjarige leeftijd niet}) = \frac{85 - 69}{85} \approx 0,188$

b $P(\text{duif die drie jaar wordt, haalt vijfjarige leeftijd niet}) = \frac{35 - 6}{35} \approx 0,829$

c $P(\text{duif wordt wel drie maar geen vier jaar}) = \frac{35 - 14}{85} \approx 0,247$

27



a $P(\text{alleen rode}) = P(r r r) = \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} \approx 0,245$

b $P(\text{meer rode dan witte}) = P(r r r) + P(r r w) + P(r w r) + P(w r r) = \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{13} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{13} \approx 0,571$

Bladzijde 207

28 36% van 1600 is 576
 $2 \cdot 115 = 230$

	lezen	computeren	tv-kijken	
wel sport	321	115	140	576
geen sport	321	230	473	1024
	642	345	613	1600

a $P(\text{geen sport en computeren}) = \frac{230}{1600} \approx 0,144$

b $P(\text{tv-kijken}) = \frac{613}{1600} \approx 0,383$

c $P(\text{tv-kijker doet aan sport}) = \frac{140}{613} \approx 0,228$

d $P(\text{sporter is tv-kijker}) = \frac{140}{576} \approx 0,243$

e Vaas met 30 knikkers waarvan 12 rood (de sporters).

$$P(5 \text{ sporters}) = \frac{\binom{12}{5} \cdot \binom{18}{5}}{\binom{30}{10}} \approx 0,226$$

f Vaas met 30 knikkers waarvan 8 rood (de computeraars).

$$P(3 \text{ of } 4 \text{ computeraars}) = P(3 \text{ computeraars}) + P(4 \text{ computeraars}) = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{22}{7}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{22}{6}}{\binom{30}{10}} \approx 0,492$$

- g Vaas met 30 knikkers waarvan 13 rood (lezers), 8 groen (computeraars) en 9 wit (tv-kijkers).

$$P(4 \text{ lezers, 2 computeraars en 4 tv-kijkers}) = \frac{\binom{13}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{9}{4}}{\binom{30}{10}} \approx 0,084$$

- 29 a** $P(\text{niemand overgewicht}) = (1 - 0,43)^2 \cdot (1 - 0,09)^2 = 0,572 \cdot 0,912 \approx 0,269$
b $P(\text{precies een van de ouders heeft overgewicht}) = P(\text{vader of moeder heeft overgewicht}) =$
 $P(\text{vader heeft overgewicht en moeder niet}) + P(\text{moeder heeft overgewicht en vader niet}) =$
 $0,43 \cdot (1 - 0,43) + 0,43 \cdot (1 - 0,43) = 2 \cdot 0,43 \cdot 0,57 \approx 0,490$
c $P(\text{beide kinderen hebben overgewicht}) = P(\text{beide ouders en beide kinderen overgewicht}) +$
 $P(\text{één van beide ouders overgewicht en beide kinderen overgewicht}) +$
 $P(\text{geen van beide ouders overgewicht en beide kinderen overgewicht}) =$
 $0,43^2 \cdot 0,35^2 + 2 \cdot 0,43 \cdot (1 - 0,43) \cdot 0,18^2 + (1 - 0,43)^2 \cdot 0,09^2 \approx 0,041$
d o = ouder met overgewicht
k = kind met overgewicht
 $P(\text{beide ouders met overgewicht}) = 0,43^2 = 0,1849$
 $P(\text{beide ouders geen overgewicht}) = (1 - 0,43)^2 = 0,3249$
 $P(\text{beide ouders en kind met overgewicht}) = 0,43^2 \cdot 0,35 = 0,064715$
 $P(\text{één van beide ouders en kind met overgewicht}) = 2 \cdot 0,43 \cdot (1 - 0,43) \cdot 0,18 = 0,088236$
 $P(\text{geen van beide ouders overgewicht en kind met overgewicht}) = (1 - 0,43)^2 \cdot 0,09 = 0,029241$
Dit geeft de volgende tabel. De waarden in de grijze cellen zijn hierboven berekend; de overige waarden vind je door de kruistabel verder in te vullen.

	o o	$2 \cdot o \bar{o}$	$\bar{o} \bar{o}$	
k	0,064715	0,088236	0,029241	0,182192
$\bar{k}$	0,120185	0,401964	0,295659	0,817808
	0,1849	0,4902	0,3249	1

Degene die de vragen beantwoordt kan een kind zonder overgewicht of een ouder zonder overgewicht zijn. De gevraagde kans is dus

$$2 \cdot P(o \ o \ k | \bar{k}) + 2 \cdot P(o \ k \ k | \bar{o}) = 2 \cdot P(o \ o \ k | \bar{k}) + 2 \cdot P(o \ \bar{o} \ k | k) =$$

$$2 \cdot \frac{P(o \ o \ k \cap \bar{k})}{P(\bar{k})} + 2 \cdot \frac{P(o \ \bar{o} \ k \cap k)}{P(\bar{o})} = 2 \cdot \frac{0,064715 \cdot 0,65}{0,817808} + \frac{0,088236 \cdot 0,18}{1 - 0,43} \approx 0,131$$

- e** A: tenminste één van de ouders heeft overgewicht
B: precies drie personen hebben overgewicht
Gevraagd $P(B | A)$.
 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - 0,43)^2 = 0,6751$
 $P(A \cap B) = 2 \cdot P(o \ \bar{o} \cap k \ k) + 2 \cdot P(o \ o \cap k \ \bar{k}) = 2 \cdot P(o \ \bar{o} \ k \cap k) + 2 \cdot P(o \ o \ k \cap \bar{k}) =$
 $0,088236 \cdot 0,18 + 2 \cdot 0,064715 \cdot (1 - 0,35) = 0,100...$
 $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,100...}{0,6751} \approx 0,148$

Bladzijde 208

- 30 a** $P(3 \text{ appels en 1 kers}) = P(aaak) + P(aaka) + P(akaa) + P(kaaa) =$
 $0 + 0 + \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} \approx 0,003$
b $P(4 \text{ gelijke}) = P(aaaa) + P(pppp) + P(bbbb) + P(ki \ ki \ ki \ ki) =$
 $\frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{1}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{15} \approx 0,008$
c $P(1 \text{ banaan}) = P(\bar{b} \ \bar{b} \ \bar{b} \ \bar{b}) + P(\bar{b} \ \bar{b} \ \bar{b} \ b) + P(\bar{b} \ \bar{b} \ b \ \bar{b}) + P(\bar{b} \ b \ \bar{b} \ \bar{b}) =$
 $\frac{1}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{14}{15} + \frac{14}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{1}{15} \approx 0,442$
d $P(\text{geen kiwi}) = P(\bar{k} \ \bar{k} \ \bar{k} \ \bar{k}) = \frac{12}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{9}{15} \approx 0,305$

- 31 a** 60% van 40 is 24
 20% van 40 is 8
 10% van 40 is 4
 40% van 30 is 12
 30% van 30 is 9
 20% van 30 is 6
 10% van 30 is 3

	A	B	C	
amusement	24	12	9	45
serie/film	8	9	9	26
actualiteit	4	6	6	16
cultuur	4	3	6	13
	40	30	30	100

Percentage van zendtijd van C met series en films is $\frac{9}{30} \times 100\% = 30\%$.

b $P(\text{amusement van B}) = \frac{12}{100} = 0,12$

c $P(\text{actualiteit, die van B is}) = \frac{6}{16} = 0,375$

d $P(\text{omroep B}) = 0,30$
 $P(\text{omroep B} \mid \text{amusement}) = \frac{12}{45} \approx 0,267$ } niet gelijk
 Dus 'omroep B te zien krijgen' en 'amusement zien' zijn afhankelijke gebeurtenissen.

- 32 a** Je hebt te maken met een herhalingscombinatie van 2 uit 7.

$$N(\text{verschillende dominostenen}) = \binom{7-1+2}{2} = \binom{8}{2} = 28$$

- b** Er zijn 7 dubbelstenen en 21 andere stenen.

$$P(\text{geen enkele speler pakt een dubbelsteen}) = \frac{\binom{21}{20}}{\binom{28}{20}} \approx 7 \cdot 10^{-6}$$

- c** Er zijn 7 stenen met 6 ogen en 21 stenen zonder 6 ogen.

$$P(\text{minstens twee stenen met 6 ogen}) = 1 - P(\text{nul stenen of één steen met 6 ogen}) =$$

$$1 - P(\text{nul stenen met 6 ogen}) - P(\text{één steen met 6 ogen}) = 1 - \frac{\binom{21}{5}}{\binom{28}{5}} - \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{21}{4}}{\binom{28}{5}} \approx 0,367$$

- d** Speler 1 pakt één blanke steen uit zes blanke stenen (de combinatie 4-blank mag niet) en vier stenen uit de stenen die niet blank zijn en die niet 4 ogen hebben. Dat zijn er in totaal $28 - 7 - 7 + 1 = 15$.

$$P(\text{geen 4 ogen en precies één blanke}) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{15}{4}}{\binom{28}{5}} \approx 0,083$$

- e** Speler 1 heeft geen blanke steen gepakt.

Er zijn dan dus nog $28 - 5 = 23$ stenen over waaronder 7 blanke stenen.

$$P(\text{speler 2 pakt minstens één blanke} \mid \text{speler 1 pakt geen blanke}) =$$

$$1 - P(\text{speler 2 pakt geen blanke} \mid \text{speler 1 pakt geen blanke}) = 1 - \frac{\binom{23-7}{5}}{\binom{23}{5}} = 1 - \frac{\binom{16}{5}}{\binom{23}{5}} \approx 0,870$$

- f** Speler 1 heeft geen blanke steen gepakt.

Er zijn dan dus nog $28 - 5 = 23$ stenen over waaronder 7 blanke stenen.

Nu moeten de spelers 2 en 3 samen één blanke steen pakken.

$$P(\text{spelers 2 en 3 pakken samen één blanke steen} \mid \text{speler 1 pakt geen blanke steen}) =$$

$$\frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{16}{9}}{\binom{23}{10}} \approx 0,070$$

4 Matrices

Bladzijde 209

33 a
$$\begin{matrix} & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ G_1 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ G_2 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ G_3 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} = A$$

b
$$\begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 \\ M_1 & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ M_2 & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ M_3 & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ M_4 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} = S$$

c De GR geeft $C = A \cdot S = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 \\ G_1 & \begin{pmatrix} 20 & 19 & 22 \end{pmatrix} \\ G_2 & \begin{pmatrix} 13 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ G_3 & \begin{pmatrix} 17 & 24 & 20 \end{pmatrix} \end{matrix}.$

c_{12} geeft aan dat er voor één eenheid P_2 19 eenheden G_1 nodig zijn.

c_{31} geeft aan dat voor één eenheid P_1 17 eenheden G_3 nodig zijn.

d Voor $S \cdot B$ moet B uit drie rijen bestaan.

$$\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = B$$

Voor $K \cdot S$ moet K uit vier kolommen bestaan.

$$\begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ (9 & 10 & 12 & 10) \end{matrix} = K$$

e $S \cdot B = \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 145 \\ 120 \\ 95 \end{pmatrix}$ en $K \cdot S = \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ (99 & 108 & 102) \end{matrix}$

De elementen van $S \cdot B$ geven aan hoeveel eenheden van de verschillende mengsels er nodig zijn voor de bestelling.

De elementen van $K \cdot S$ geven de kosten per eenheid van de producten P_1 , P_2 en P_3 .

f $K \cdot S \cdot B = (4650)$

Hiermee zijn de kosten van de bestelling berekend.

34 a Per schildpad komen 100 eieren uit.

Dat zijn 300 eieren per vrouwtje.

Dus een vrouwtje legt in haar leven $\frac{300}{0,75} = 400$ eieren.

Ze zit dan in de leeftijdsklasse IV, dat is van 75 tot 100 jaar.
van

b De GR geeft naar
$$\begin{pmatrix} 1,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{pmatrix} = L^4$$

Per 100 jaar een toename van 25%.

c In L^4 komt nu $0,5 \cdot 1,25 = 0,625$ op de hoofddiagonaal.

Los op $0,625^t = 0,5$.

Voer in $y_1 = 0,625^x$ en $y_2 = 0,5$.

Intersect geeft $x \approx 1,47$.

De tijdseenheid van L^4 is 100 jaar, dus na $1,47 \cdot 100 = 147$ jaar is nog de helft over.

Bladzijde 210

35 a van

	A	B	C	
A	0,60	0,15	0,15	$\left. \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \right\} \text{ naar } B = V$
B	0,30	0,75	0,05	
C	0,10	0,10	0,80	

b Voer in $A = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,15 & 0,15 \\ 0,30 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,80 \end{pmatrix}$.

De GR geeft $A^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,2175 & 0,2175 \\ 0,41 & 0,6125 & 0,1225 \\ 0,17 & 0,17 & 0,66 \end{pmatrix}$.

De gevraagde kans is 0,42.

c De GR geeft $A^3 \approx \begin{pmatrix} 0,339 & 0,248 & 0,248 \\ 0,442 & 0,533 & 0,190 \\ 0,219 & 0,219 & 0,562 \end{pmatrix}$.

De gevraagde kans is afgerond op drie decimalen 0,248.

d Voer in $B = \begin{pmatrix} 42 \\ 36 \\ 22 \end{pmatrix}$.

De GR geeft $A^{-1} \cdot B \approx \begin{pmatrix} 60 \\ 22,9 \\ 17,1 \end{pmatrix}$.

Dus in 2008 ging 60% van de stemmen naar A.

e Gebruik de elementen op de hoofddiagonaal van de matrix V^2 van vraag b.
Het gevraagde percentage is $0,42 \cdot 42\% + 0,6125 \cdot 36\% + 0,66 \cdot 22\% \approx 54,2\%$.

f De GR geeft $A^{20} \cdot B \approx \begin{pmatrix} 27,3 \\ 39,4 \\ 33,3 \end{pmatrix}$ en $A^{30} \cdot B \approx \begin{pmatrix} 27,3 \\ 39,4 \\ 33,3 \end{pmatrix}$.

Dus er treedt op den duur stabilisatie op waarbij geen van de partijen de absolute meerderheid krijgt.

36 a Omdat niet alle 4-jarigen binnen één jaar sterven is $l_{55} \neq 0$.
Uit het gegeven dat 80% binnen één jaar sterft volgt $l_{55} = 0,2$.

kans $0 \rightarrow 1$ is $\frac{25 + 35}{48 + 52} = \frac{60}{100} = 0,6$

kans $1 \rightarrow 2$ is $\frac{30 + 34}{38 + 42} = \frac{64}{80} = 0,8$

kans $2 \rightarrow 3$ is $\frac{17 + 18}{35 + 35} = \frac{35}{70} = 0,5$

Van de $9 + 11 = 20$ uit de klasse ≥ 4 op $t = 0$ leeft op $t = 1$ nog $0,2 \cdot 20 = 4$.

Dit geeft kans $3 \rightarrow \geq 4$ is $\frac{10 + 10 - 4}{17 + 23} = \frac{16}{40} = 0,4$.

Samen met de gegeven vruchtbaarheidscijfers geeft dit

van

	0	1	2	3	≥ 4	
0	0	0	1,5	3	0	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \geq 4 \end{matrix} \right\} \text{ naar } \begin{matrix} 0 \\ 0,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = L$
1	0,6	0	0	0	0	
2	0	0,8	0	0	0	
3	0	0	0,5	0	0	
≥ 4	0	0	0	0,4	0,2	

b De leeftijdsopbouw op $t = 1$ is te geven in de matrix $K = \begin{pmatrix} 0 & 255 \\ 1 & 60 \\ 2 & 64 \\ 3 & 35 \\ \geq 4 & 20 \end{pmatrix}$.

Voer de matrices L en K in op de GR en bereken $L \cdot K$ en $L^2 \cdot K$.

Je krijgt de te verwachten leeftijdsopbouw op $t = 2$ en $t = 3$ hieronder.

	$t = 2$	$t = 3$
0	201	168
1	135	121
2	48	108
3	32	24
≥ 4	18	16

- 37 $n = 1$ geeft $a + b + c + d + e = 1$
 $n = 2$ geeft $16a + 8b + 4c + 2d + e = 9$
 $n = 3$ geeft $81a + 27b + 9c + 3d + e = 36$
 $n = 4$ geeft $256a + 64b + 16c + 4d + e = 100$
 $n = 5$ geeft $625a + 125b + 25c + 5d + e = 225$

Dit geeft het stelsel $\begin{cases} a + b + c + d + e = 1 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 9 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = 36 \\ 256a + 64b + 16c + 4d + e = 100 \\ 625a + 125b + 25c + 5d + e = 225 \end{cases}$ en hierbij hoort de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 9 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & 36 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 100 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 225 \end{pmatrix}.$$

Voer in $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 9 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & 36 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 100 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 225 \end{pmatrix}$.

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dus $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = 0$ en $e = 0$.

38 a Bij het stelsel hoort de coëfficiëntenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Voer in $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

De GR geeft $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2,5 & 0 & -1,5 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

De inverse matrix A^{-1} van de coëfficiëntenmatrix A van het stelsel bestaat, dus het stelsel heeft voor elke waarde van p een oplossing. Dus het stelsel is samenhangend en bepaald voor elke waarde van p .

b $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -p+3 \\ p-12 \\ 3p-17 \end{pmatrix}$

Dus $x_1 = 2$, $x_2 = -p + 3$, $x_3 = p - 12$ en $x_4 = 3p - 17$.

Bladzijde 211

39 a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ met $f_0 = f_1 = 1$

b $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$

En omdat $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ kan de rij van Fibonnaci genoteerd worden als $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$.

c Voer in $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De GR geeft $A^{28} \cdot B = \begin{pmatrix} 832\,040 \\ 514\,229 \end{pmatrix}$.

De 30^e term in de rij van Fibonnaci is 832 040.

d $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$ met $p_0 = p_1 = p_2 = 1$

e $a = 0$, $b = 1$ en $c = 1$ geeft bij matrixvermenigvuldiging $0 \cdot p_n + 1 \cdot p_{n-1} + 1 \cdot p_{n-2}$ ofwel $p_{n-1} + p_{n-2}$ en dat is gelijk aan p_n .

$d = 1$, $e = 0$, $f = 0$, $g = 0$, $h = 1$ en $i = 0$.

f Voer in $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De GR geeft $A^{47} \cdot B = \begin{pmatrix} 696\,081 \\ 525\,456 \\ 396\,655 \end{pmatrix}$.

De 50^e term in de rij van Padovan is 696 081.

40 a $O(OABC) = O(\triangle OAB) + O(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} p & 2p \\ p-1 & p \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 2p & 3p \\ p & p+1 \end{pmatrix} \right|$
 $= \frac{1}{2} |p \cdot p - 2p \cdot (p-1)| + \frac{1}{2} |2p \cdot (p+1) - 3p \cdot p|$
 $= \frac{1}{2} |p^2 - 2p^2 + 2p| + \frac{1}{2} |2p^2 + 2p - 3p^2|$
 $= \frac{1}{2} |-p^2 + 2p| + \frac{1}{2} |-p^2 + 2p|$
 $= |-p^2 + 2p|$

Voor $0 < p < 2$ is $-p^2 + 2p > 0$, dus $O(OABC) = -p^2 + 2p$.

De bijbehorende grafiek is een bergparabool met $p_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot -1} = 1$.

Dus de maximale oppervlakte van vierhoek $OABC$ is $-1^2 + 2 \cdot 1 = 1$.

- b Driehoek $OQ'R'$ ontstaat door driehoek PQR zo te verschuiven, dat punt P in de oorsprong terecht komt.
 $Q'(3p+4-4, p+6-2) = Q'(3p, p+4)$ en $R'(4-p-4, p+4-2) = R'(-p, p+2)$.

$$O(\triangle OQ'R') = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 3p & -p \\ p+4 & p+2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |3p \cdot (p+2) - p \cdot (p+4)| = \frac{1}{2} |3p^2 + 6p + p^2 + 4p| =$$

$$\frac{1}{2} |4p^2 + 10p| = |2p^2 + 5p|$$

$$O(\triangle PQR) = O(\triangle OQ'R') = 7 \text{ geeft}$$

$$2p^2 + 5p = 7 \vee 2p^2 + 5p = -7$$

$$2p^2 + 5p - 7 = 0 \vee 2p^2 + 5p + 7 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81 \vee D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -31$$

$$p = \frac{-5-9}{4} = -3\frac{1}{2} \vee p = \frac{-5+9}{4} = 1 \vee \text{geen oplossingen}$$

Dus voor $p = 1$ en voor $p = -3\frac{1}{2}$ is de oppervlakte van driehoek PQR gelijk aan 7.

- 41 a Bij knooppunt A is i_1 de ingaande stroom en zijn i_2 en i_3 de uitgaande stromen.
 Dus volgens de wet van Kirchhoff geldt dan $i_1 = i_2 + i_3$.
- b Het spanningsverschil tussen de uiteinden van R_1 is volgens de wet van Ohm $4i_1$.
 Het spanningsverschil tussen de uiteinden van R_2 is volgens de wet van Ohm $6i_2$.
 De som van deze spanningsverschillen is gelijk aan het spanningsverschil bij S .
 Dus $4i_1 + 6i_2 = 38$.

- c Volgens de wet van Kirchhoff geldt:

$$i_1 = i_2 + i_3 \text{ ofwel } i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_3 = i_4 + i_7 \text{ ofwel } i_3 - i_4 - i_7 = 0$$

$$i_4 = i_5 + i_6 \text{ ofwel } i_4 - i_5 - i_6 = 0$$

Volgens de wet van Ohm geldt:

$$4i_1 + 6i_2 = 38$$

$$4i_1 + 3i_5 = 38$$

$$4i_1 + 2i_6 = 38$$

$$4i_1 + 3i_7 = 38$$

Dit geeft het stelsel $\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_3 - i_4 - i_7 = 0 \\ i_4 - i_5 - i_6 = 0 \\ 4i_1 + 6i_2 = 38 \\ 4i_1 + 3i_5 = 38 \\ 4i_1 + 2i_6 = 38 \\ 4i_1 + 3i_7 = 38 \end{cases}$ met de bijbehorende matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 38 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 38 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 38 \end{pmatrix}$.

Voer de matrix in op de GR.

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Dus $i_1 = 8$, $i_2 = 1$, $i_3 = 7$, $i_4 = 5$, $i_5 = 2$, $i_6 = 3$ en $i_7 = 2$, waarbij i steeds in ampère is.

Gemengde opgaven

5 Discrete kansverdelingen

Bladzijde 190

- 1 a $P(10 \text{ vwo}) = P(10 \text{ vwo en 3 hbo of anders}) = \binom{13}{10} \cdot 0,68^{10} \cdot 0,32^3 \approx 0,198$
- b $P(\text{minstens 3 hbo}) = 1 - P(0, 1 \text{ of 2 hbo}) = 1 - P(0 \text{ hbo}) - P(1 \text{ hbo}) - P(2 \text{ hbo}) =$
 $1 - 0,81^{13} - \binom{13}{1} \cdot 0,19 \cdot 0,81^{12} - \binom{13}{2} \cdot 0,19^2 \cdot 0,81^{11} \approx 0,461$
- c $P(9 \text{ vwo en 4 hbo}) = \binom{13}{9} \cdot 0,68^9 \cdot 0,19^4 \approx 0,029$
- d $P(7 \text{ vwo en 4 hbo}) = P(7 \text{ vwo, 4 hbo en 2 anders}) = \binom{13}{7} \cdot \binom{6}{4} \cdot 0,68^7 \cdot 0,19^4 \cdot 0,13^2 \approx 0,038$
- e $P(\text{minstens 6 vwo en minstens 6 hbo}) =$
 $P(6 \text{ vwo, 6 hbo en 1 anders}) + P(7 \text{ vwo en 6 hbo}) + P(6 \text{ vwo en 7 hbo}) =$
 $\binom{13}{6} \cdot \binom{7}{6} \cdot 0,68^6 \cdot 0,19^6 \cdot 0,13 + \binom{13}{7} \cdot 0,68^7 \cdot 0,19^6 + \binom{13}{6} \cdot 0,68^6 \cdot 0,19^7 \approx 0,014$
- 2 a $P(\text{twee of drie juist}) = P(\text{twee juist}) + P(\text{drie juist}) =$
 $\binom{18}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{16} + \binom{18}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^{15} \approx 0,266$
- b Van de 13 vragen die hij moet gokken, heeft hij dan minder dan 3, dus 0 of 1 of 2 goed.
 $P(0, 1 \text{ of 2 goed}) = P(0 \text{ goed}) + P(1 \text{ goed}) + P(2 \text{ goed}) =$
 $0,75^{13} + \binom{13}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^{12} + \binom{13}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{11} \approx 0,333$
- c $P(\text{hoogstens 12 goed beantwoord}) = P(0, 1 \text{ of 2 goed geraden}) =$
 $P(0 \text{ goed}) + P(1 \text{ goed}) + P(2 \text{ goed}) = 0,75^8 + \binom{8}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^7 + \binom{8}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^6 \approx 0,679$
- 3 a $P(\text{drie rode en drie blauwe}) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^3 \approx 0,023$
- b De kans op geen enkele rode knikker per greep is $\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{210}{1320} = \frac{7}{44}$.
 $P(\text{twee keer geen enkele rode}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{7}{44}\right)^2 \cdot \left(\frac{37}{44}\right)^4 \approx 0,190$
- c $P(\text{evenveel witte als blauwe over}) =$
 $P(\text{drie rode en één witte pakken}) + P(\text{één rode, twee witte en één blauwe pakken}) =$
 $\frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{12}{4}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{12}{4}} \approx 0,263$
- d $P(\text{minstens twee rode en minstens twee witte}) =$
 $P(4r, 2w) + P(3r, 2w, 1b) + P(2r, 2w, 2b) + P(2r, 3w, 1b) + P(2r, 4w) + P(3r, 3w) =$
 $\frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{12}{6}} + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{12}{6}} + \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{12}{6}} + \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{12}{6}} + \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{12}{6}} + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{12}{6}} \approx 0,606$

Bladzijde 191

- 4 a $P(\text{bij de vijfde keer de tweede rode}) = P(\text{bij de eerste vier één rode}) \cdot P(\text{de vijfde is rood}) =$
 $\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{4}} \cdot \frac{3}{6} \approx 0,190$

b $P(\text{bij de zesde keer pakken stoppen}) = P(\text{bij de zesde keer de derde rode}) =$

$$P(\text{bij de eerste vijf 2 rode}) \cdot P(\text{de zesde is rood}) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} \cdot \frac{2}{5} \approx 0,190$$

c $P(\text{minstens zeven knikkers pakken}) = P(\text{bij de eerste zes keer 0, 1 of 2 rode}) =$

$P(\text{bij de eerste zes 0 rood}) + P(\text{bij de eerste zes 1 rood}) + P(\text{bij de eerste zes 2 rood}) =$

$$\frac{\binom{6}{6}}{\binom{10}{6}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{5}}{\binom{10}{6}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{4}}{\binom{10}{6}} \approx 0,548$$

d $P(\text{hoogstens vijf keer pakken}) = P(\text{drie keer pakken}) + P(\text{vier keer pakken}) + P(\text{vijf keer pakken}) =$
 $P(\text{de eerste drie rood}) + P(\text{bij de eerste drie twee rood}) \cdot P(\text{de vierde is rood}) +$
 $P(\text{bij de eerste vier twee rood}) \cdot P(\text{de vijfde is rood}) =$

$$P(r r r) + 3 \cdot P(r r \bar{r}) \cdot P(r) + \binom{4}{2} \cdot P(r r \bar{r} \bar{r}) \cdot P(r) = 0,4^3 + 3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6 + \binom{4}{2} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 \approx 0,317$$

e $P(\text{minstens tien keer pakken}) = P(\text{bij de eerste negen hoogstens twee rood}) =$

$P(\text{bij de eerste negen 0 rood}) + P(\text{bij de eerste negen 1 rood}) + P(\text{bij de eerste negen 2 rood}) =$

$$0,6^9 + \binom{9}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^8 + \binom{9}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^7 \approx 0,232$$

5 a X = het aantal keer op zwart.

X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$.

$$P(X = 6) = \text{binompdf}(20, \frac{9}{19}, 6) \approx 0,055$$

b X = het aantal keer op groen.

X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{2}{38} = \frac{1}{19}$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \text{binomcdf}(20, \frac{1}{19}, 1) \approx 0,284$$

c $P(10 \text{ keer op rood en } 8 \text{ keer op zwart}) = \binom{20}{10} \cdot \binom{10}{8} \cdot (\frac{18}{38})^{10} \cdot (\frac{18}{38})^8 \cdot (\frac{2}{38})^2 \approx 0,033$

d Dan is het balletje twee keer op rood gekomen.

X = het aantal keer op rood.

X is binomiaal verdeeld met $n = 4$ en $p = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$.

$$P(X = 2) = \text{binompdf}(4, \frac{9}{19}, 2) \approx 0,373$$

e Dan is het balletje 6, 7, 8, 9 of 10 keer op rood gekomen.

X = het aantal keer op rood.

X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{9}{19}$.

$$P(\text{na 10 keer spelen winst}) = P(\text{minstens 6 keer op rood}) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) =$$

$$1 - \text{binomcdf}(10, \frac{9}{19}, 5) \approx 0,314$$

f Minder dan vier keer spelen, dus het balletje komt bij de eerste, tweede of derde keer spelen op rood.

$$P(\text{minder dan vier keer spelen}) = P(r) + P(\bar{r} r) + P(\bar{r} \bar{r} r) = \frac{18}{38} + \frac{20}{38} \cdot \frac{18}{38} + \frac{20}{38} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{18}{38} \approx 0,854$$

g Sam kan hooguit acht keer spelen.

Hij maakt winst als het balletje op rood komt.

Hij maakt dus verlies als het balletje acht keer achter elkaar niet op rood komt.

$$P(\text{winst}) = 1 - P(\text{verlies}) = 1 - P(\bar{r} \bar{r} \bar{r} \bar{r} \bar{r} \bar{r} \bar{r} \bar{r}) = 1 - (\frac{20}{38})^8 \approx 0,994$$

h balletje op rood

	inzet	uitbetaling	winst
bij spel 1	10	$2 \cdot 10 = 20$	$20 - 10 = 10$
bij spel 2	$10 + 20 = 30$	$2 \cdot 20 = 40$	$40 - 30 = 10$
bij spel 3	$10 + 20 + 40 = 70$	$2 \cdot 40 = 80$	$80 - 70 = 10$

Zijn winst is dus steeds 10 euro.

- i Zijn winst is ook 10 euro als het balletje op rood komt bij de vierde, vijfde, zesde, zevende of achtste keer spelen.

Maakt hij geen winst, dan verliest hij $10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640 + 1280 = 2550$ euro.

De kans hierop is $\left(\frac{20}{38}\right)^8$.

W = winst

w	10	-2550
$P(W=w)$	$1 - \left(\frac{20}{38}\right)^8$	$\left(\frac{20}{38}\right)^8$

$$E(W) = 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{20}{38}\right)^8\right) - 2550 \cdot \left(\frac{20}{38}\right)^8 \approx -5,07$$

Dus zijn winstverwachting is -€5,07.

Werk je met de afgeronde kansen 0,994 en 0,006, dan kom je uit op -€5,36.

Bladzijde 192

6 a $P(X=100) = P(3\ 3\ 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{120} \approx 0,008$

b $P(X=20) = P(4\ 4\ 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{120}$

$$P(X=5) = P(5\ 5\ 5) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{120}$$

$$P(X=0) = 1 - (P(X=100) + P(X=20) + P(X=5)) = 1 - \left(\frac{1}{120} + \frac{4}{120} + \frac{12}{120}\right) = \frac{103}{120}$$

x	0	5	20	100
$P(X=x)$	$\frac{103}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$

c $P(Y=10) = P(3\ 3\ 4) + P(3\ 4\ 3) + P(4\ 4\ 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,042$

d $P(2 \text{ keer een } 3) = P(3\ 3\ \bar{3}) + P(3\ \bar{3}\ 3) + P(\bar{3}\ 3\ 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 0,1$

$$P(\text{elke keer } 2 \text{ keer het cijfer } 3) = 0,1^4 = 0,0001$$

e $P(\text{acht of negen keer spelen}) = P(\bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ H) + P(\bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ \bar{H}\ H\ \bar{H}) = \left(\frac{119}{120}\right)^7 \cdot \frac{1}{120} + \left(\frac{119}{120}\right)^8 \cdot \frac{1}{120} \approx 0,016$

- f Jantine speelt het spel n keer.

De kans per keer op geen hoofdprijs is $\frac{119}{120}$.

$$P(\text{minstens één keer de hoofdprijs}) = 1 - P(n \text{ keer niet de hoofdprijs}) = 1 - \left(\frac{119}{120}\right)^n.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 1 - \left(\frac{119}{120}\right)^x.$$

$$x = 42 \text{ geeft } y_1 \approx 0,296 < 0,3$$

$$x = 43 \text{ geeft } y_1 \approx 0,302 > 0,3$$

Dus ze moet minstens 43 keer spelen.

7 a $P(X=1) = P(4) = \frac{1}{4}$

$$P(X=2) = P(\bar{4}\ 4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(X=3) = P(\bar{4}\ \bar{4}\ 4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(X=4) = P(\bar{4}\ \bar{4}\ \bar{4}\ 4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256}$$

b beginwaarde = $\frac{1}{4}$

$$\text{factor} = \frac{3}{4}$$

c som meetkundige rij = $\frac{\text{beginwaarde} \cdot (1 - \text{factor}^{\text{aantal termen}})}{1 - \text{factor}}$

$$\text{Dus } P(X \leq k) = \frac{\frac{1}{4} \cdot (1 - (\frac{3}{4})^k)}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (1 - (\frac{3}{4})^k)}{\frac{1}{4}} = 1 - (\frac{3}{4})^k.$$

d $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - (1 - (\frac{3}{4})^5) = 1 - 1 + (\frac{3}{4})^5 = (\frac{3}{4})^5 \approx 0,237$

- e De kansen $P(Y=k)$ met $k=1, 2, 3, \dots$ vormen een meetkundige rij met beginwaarde p en factor $1-p$.

$$P(Y \leq k) = \frac{p \cdot (1 - (1-p)^k)}{1 - (1-p)} = \frac{p(1 - (1-p)^k)}{1 - 1 + p} = \frac{p(1 - (1-p)^k)}{p} = 1 - (1-p)^k$$

$$P(Y > k) = 1 - P(Y \leq k) = 1 - (1 - (1-p)^k) = 1 - 1 + (1-p)^k = (1-p)^k$$

- f X = het aantal keer gooien.

X is geometrisch verdeeld met $p = \frac{1}{6}$.

$$P(X \leq 7) = 1 - (1 - \frac{1}{6})^7 = 1 - (\frac{5}{6})^7 \approx 0,721$$

- g X = het aantal keer gooien.
 X is geometrisch verdeeld met $p = \frac{1}{36}$.
 $P(X \leq k) > 0,75$
 $1 - (1 - p)^k > 0,75$
 $1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^k > 0,75$
 $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k > 0,75$

Voer in $y_1 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^x$.

$x = 49$ geeft $y_1 \approx 0,749 < 0,75$

$x = 50$ geeft $y_1 \approx 0,756 > 0,75$

Dus de kleinste waarde van k waarvoor geldt dat de kans op hoogstens k worpen groter is dan 75%, is 50.

Bladzijde 193

- 8 a • De kosten zijn $4 \cdot 2 + 8 = € 16$.
 $P(\text{negatief}) = 0,95^4 = 0,81450625$
• $P(\text{positief}) = 1 - P(\text{negatief}) = 1 - 0,95^4 = 0,18549375$
De totale kosten zijn $€ 16 + 4 \cdot € 8 = € 48$.
• K zijn de kosten bij een gecombineerde test van vier monsters.

k	16	48
$P(K = k)$	0,81450625	0,18549375

$$E(K) = 16 \cdot 0,81450625 + 48 \cdot 0,18549375 = 21,9358 \approx 21,94 \text{ euro}$$

Per monster is dat $\frac{21,9358}{4} \approx € 5,48$.

- b Bij negatief uitvallen zijn de kosten $5 \cdot 2 + 8 = € 18$
en is $P(\text{negatief}) = 0,95^5$.
Bij positieve test zijn de totale kosten $€ 18 + 5 \cdot € 8 = € 58$.
De kans is $P(\text{positief}) = 1 - 0,95^5$.
 $E(K) = 18 \cdot 0,95^5 + 58 \cdot (1 - 0,95^5) \approx 27,05$ euro

Per monster is dat $\frac{27,05}{5} \approx € 5,41$.

- c Bij negatief uitvallen zijn de kosten $n \cdot 2 + 8 = 2n + 8$ euro.
De bijbehorende kans is $0,95^n$.
Bij positieve test zijn de kosten $2n + 8 + n \cdot 8 = 10n + 8$ euro.
De bijbehorende kans is $1 - 0,95^n$.
 $E(K) = (2n + 8) \cdot 0,95^n + (10n + 8)(1 - 0,95^n) =$
 $2n \cdot 0,95^n + 8 \cdot 0,95^n + 10n - 10n \cdot 0,95^n + 8 - 8 \cdot 0,95^n = 10n - 8n \cdot 0,95^n + 8$
Dus $E = \frac{E(K)}{n} = \frac{10n - 8n \cdot 0,95^n + 8}{n} = 10 - 8 \cdot 0,95^n + \frac{8}{n}$.

- d Voer in $y_1 = 10 - 8 \cdot 0,95^x + \frac{8}{x}$.
De tabel geeft
 $x = 4$ en $y_1 \approx 5,48$
 $x = 5$ en $y_1 \approx 5,41$
 $x = 6$ en $y_1 \approx 5,45$.
Dus E is minimaal voor $n = 5$.

Bladzijde 194

- 9 a Het gemiddelde aantal fouten per bladzijde is

$$\frac{4066 \cdot 0 + 3659 \cdot 1 + 1647 \cdot 2 + 494 \cdot 3 + 111 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 7}{10000} = 0,8997.$$

- b
- | x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| $P(X = x)$ | 0,4066 | 0,3659 | 0,1647 | 0,0494 | 0,0111 | 0,0020 | 0,0003 | 0 |

$$\text{c } P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P(X=k+1) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k \cdot \lambda}{k! \cdot (k+1)}$$

$$\text{Dus } \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k \cdot \lambda}{k! \cdot (k+1)}}{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}} = \frac{\lambda}{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} \text{ ofwel } \lambda = (k+1) \cdot \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}.$$

$$\text{d } k=0 \text{ geeft } \lambda = 1 \cdot \frac{P(X=1)}{P(X=0)} = 1 \cdot \frac{0,3659}{0,4066} \approx 0,90$$

$$k=1 \text{ geeft } \lambda = 2 \cdot \frac{P(X=2)}{P(X=1)} = 2 \cdot \frac{0,1647}{0,3659} \approx 0,90$$

$$k=2 \text{ geeft } \lambda = 3 \cdot \frac{P(X=3)}{P(X=2)} = 3 \cdot \frac{0,0494}{0,1647} \approx 0,90$$

$$k=3 \text{ geeft } \lambda = 4 \cdot \frac{P(X=4)}{P(X=3)} = 4 \cdot \frac{0,0111}{0,0494} \approx 0,90$$

$$k=4 \text{ geeft } \lambda = 5 \cdot \frac{P(X=5)}{P(X=4)} = 5 \cdot \frac{0,0020}{0,0111} \approx 0,90$$

$$k=5 \text{ geeft } \lambda = 6 \cdot \frac{P(X=6)}{P(X=5)} = 6 \cdot \frac{0,0003}{0,0020} = 0,90$$

$$\text{e Als } X \text{ een poissonverdeling heeft, dan geldt voor het gemiddelde } \lambda \text{ dat } \lambda = (k+1) \cdot \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}.$$

Het invullen van $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ in deze formule geeft bij benadering steeds dezelfde uitkomst, namelijk $\lambda \approx 0,90$.

Dus X is poissonverdeeld met $\lambda \approx 0,90$.

f X = het aantal drukfouten per 100 bladzijden.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 100 \cdot 0,90 = 90$.

$$P(50 < X < 100) = P(X \leq 99) - P(X \leq 50) = \text{poissoncdf}(90, 99) - \text{poissoncdf}(90, 50) \approx 0,842$$

g X = het aantal drukfouten per 1000 bladzijden.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 1000 \cdot 0,90 = 900$.

$$P(X \geq 850) = 1 - P(X \leq 849) = 1 - \text{poissoncdf}(900, 849) \approx 0,955$$

h X = het aantal drukfouten per 100 bladzijden.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 100 \cdot 0,90 = 90$.

$$P(X \geq 85) = 1 - P(X \leq 84) = 1 - \text{poissoncdf}(90, 84) = 0,714...$$

De gevraagde kans is $0,714^{10} \dots \approx 0,035$.

i X = het aantal drukfouten per 100 bladzijden.

X is poissonverdeeld met gemiddelde λ .

Er moet gelden $(P(X \geq 85))^{10} < 0,01$

$$(1 - P(X \leq 84))^{10} < 0,01$$

$$(1 - \text{poissoncdf}(\lambda, 84))^{10} < 0,01$$

Voer in $y_1 = (1 - \text{poissoncdf}(\lambda, 84))^{10}$ en $y_2 = 0,01$.

Intersect geeft $x \approx 87,78$.

$$\frac{87,78}{100} = 0,8778$$

Dus bij een gemiddeld aantal drukfouten per bladzijde van 0,87 of minder wordt het streven gerealiseerd.

6 Discrete dynamische modellen

- 10 a $W_n = 0,9W_{n-1} + 500$ met $W_0 = 10\,000$
 b Voor het dekpunt $\bar{W}$ geldt $\bar{W} = 0,9\bar{W} + 500$
 $0,1\bar{W} = 500$
 $\bar{W} = 5000$

Stel $W_n = A \cdot 0,9^n + 5000$.

$W_0 = 10\,000$ geeft $A + 5000 = 10\,000$, dus $A = 5000$.

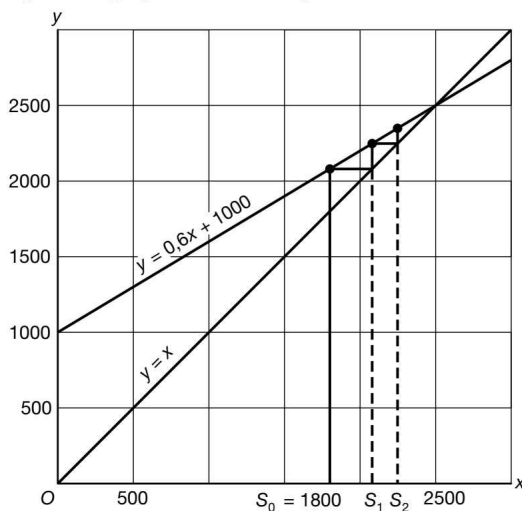
Dus $W_n = 5000 \cdot 0,9^n + 5000$.

- c Voer in $y_1 = 5000 \cdot 0,9^x + 5000$.
 De tabel geeft $x = 8$ en $y_1 \approx 7152$
 $x = 9$ en $y_1 \approx 6937$
 Dus na 9 dagen.

Bladzijde 195

- 11 a $S_n = 0,6S_{n-1} + 1000$ met $S_0 = 1800$

b



De rij S_n convergeert.

- c Voor het dekpunt $\bar{S}$ geldt $\bar{S} = 0,6\bar{S} + 1000$
 $0,4\bar{S} = 1000$
 $\bar{S} = 2500$
 Stel $S_n = A \cdot 0,6^n + 2500$.
 $S_0 = 1800$ geeft $A + 2500 = 1800$, dus $A = -700$.
 Dus $S_n = -700 \cdot 0,6^n + 2500$.

- 12 a 9:00 uur 80 000
 10:00 uur $80\,000 + 0,05(1\,000\,000 - 80\,000) = 126\,000$
 11:00 uur $126\,000 + 0,05(1\,000\,000 - 126\,000) = 169\,700$
 12:00 uur $169\,700 + 0,05(1\,000\,000 - 169\,700) = 211\,215$

Dus om 12:00 uur hebben 211 215 personen de boodschap gehoord.

- b $R_n = R_{n-1} + 0,05(1\,000\,000 - R_{n-1}) = R_{n-1} + 50\,000 - 0,05R_{n-1} = 0,95R_{n-1} + 50\,000$ met $R_0 = 80\,000$

- c Voor het dekpunt $\bar{R}$ geldt $\bar{R} = 0,95\bar{R} + 50\,000$
 $0,05\bar{R} = 50\,000$
 $\bar{R} = 1\,000\,000$

Stel $R_n = A \cdot 0,95^n + 1\,000\,000$.

$R_0 = 80\,000$ geeft $A + 1\,000\,000 = 80\,000$, dus $A = -920\,000$

Dus $R_n = -920\,000 \cdot 0,95^n + 1\,000\,000$.

- d Voer in $y_1 = -920\,000 \cdot 0,95^x + 1\,000\,000$ en kijk in de tabel.
 Bij 2 februari om 12:00 uur hoort $n = 15$.
 $R_{15} \approx 753\,772$, dus bijna 754 duizend.

- e $R_{29} \approx 792\,139$, $R_{30} \approx 802\,532$, $R_{31} \approx 812\,406$

$\swarrow$ $\swarrow$
 $+10\,393$ $+9874$

Bij $n = 31$ horen 32 uitzendingen.

Er zijn dan ruim 812 000 personen uit de doelgroep bereikt.

- 13 a** $G_1 = G_0 - aG_0Z_0$, dus $5982 = 6000 - a \cdot 6000 \cdot 100$
 $600\,000a = 18$
 $a = 0,00003$
 $Z_1 = Z_0 + aG_0Z_0 - bZ_0$, dus $112 = 100 + 0,00003 \cdot 6000 \cdot 100 - b \cdot 100$
 $100b = 6$
 $b = 0,06$
- b** De derde dag loopt van $t = 2$ tot $t = 3$.
 $G_2 = G_1 - 0,00003G_1Z_1 = 5982 - 0,00003 \cdot 5982 \cdot 112 \approx 5962$
 $Z_2 = Z_1 + 0,00003G_1Z_1 - 0,06Z_1 = 112 + 0,00003 \cdot 5982 \cdot 112 - 0,06 \cdot 112 \approx 125$
 Op de derde dag hebben $0,00003 \cdot 5962 \cdot 125 \approx 22$ mensen griep gekregen.
 Er zijn $0,06 \cdot 125 \approx 8$ mensen beter geworden.
- c** Op de 15^e dag hebben $0,00003 \cdot 5456 \cdot 455 \approx 74$ mensen griep gekregen.
 Er zijn $0,06 \cdot 455 \approx 27$ mensen beter geworden.

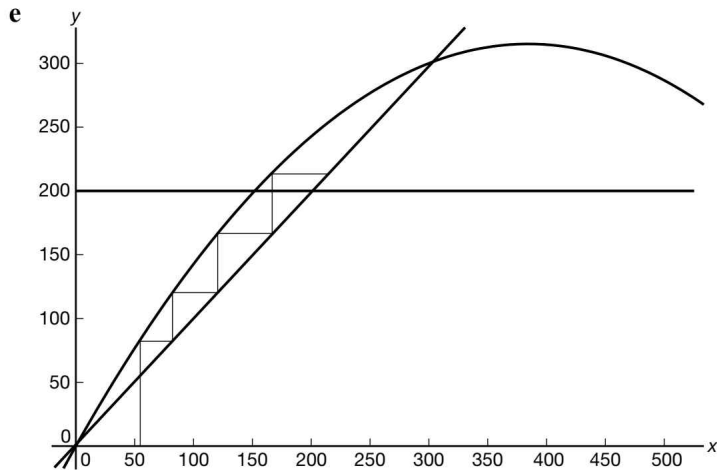
Bladzijde 196

- 14 a** Afbraak 27% per dag, dus de factor is 0,73.
 Je krijgt $H_n = 0,73H_{n-1} + 12$ met $H_0 = 20$.
- b** Voor het dekpunt $\bar{H}$ geldt $\bar{H} = 0,73\bar{H} + 12$
 $0,27\bar{H} = 12$
 $\bar{H} \approx 44,44$
- Stel $H_n = A \cdot 0,73^n + 44,44$.
 $H_0 = 20$ geeft $A + 44,44 = 20$, dus $A = -24,44$.
 Dus $H_n = -24,44 \cdot 0,73^n + 44,44$.
- c** Afbraak 27% per dag, dus de factor is $0,73^{\frac{1}{24}} \approx 0,987$ per uur.
 Per uur 0,5 kg erbij, dus $H_t = 0,987H_{t-1} + 0,5$ met $H_0 = 20$.
 Voor het dekpunt $\bar{H}$ geldt $\bar{H} \approx 0,987\bar{H} + 0,5$
 $0,013\bar{H} \approx 0,5$
 $\bar{H} \approx 38,38$
- Stel $H_n = A \cdot 0,987^n + 38,38$.
 $H_0 = 20$ geeft $A + 38,38 = 20$, dus $A = -18,38$.
 Dus $H_n = -18,38 \cdot 0,987^n + 38,38$.
- d** Bij de differentievergelijking van vraag c hoort $\bar{H} \approx 38,38$.
 De evenwichtswaarde is dus lager dan bij de eerste situatie, dat wil zeggen dat er minder verontreiniging overblijft.
 De twee methode heeft dus de voorkeur.
- 15 a** $\begin{cases} N_t = 0,76N_{t-1} + 0,18B_{t-1} \\ B_t = 0,24N_{t-1} + 0,82B_{t-1} \end{cases}$ met $N_0 = 20\,000$ en $B_0 = 10\,000$
- b** Gesloten systeem, dus voor elke t is $N_{t-1} + B_{t-1} = 30\,000$ ofwel
 $\begin{cases} B_{t-1} = 30\,000 - N_{t-1} \\ N_t = 0,76N_{t-1} + 0,18B_{t-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_t = 0,76N_{t-1} + 0,18(30\,000 - N_{t-1}) \\ N_t = 0,76N_{t-1} + 5400 - 0,18N_{t-1} \end{cases}$
 $N_t = 0,58N_{t-1} + 5400$ met $N_0 = 20\,000$
- Voor het dekpunt $\bar{N}$ geldt $\bar{N} = 0,58\bar{N} + 5400$
 $0,42\bar{N} = 5400$
 $\bar{N} \approx 12\,857$
- Stel $N_t = A \cdot 0,58^t + 12\,857$.
 $N_0 = 20\,000$ geeft $A + 12\,857 = 20\,000$, dus $A = 7143$.
 Dus $N_t = 7143 \cdot 0,58^t + 12\,857$.
 $\begin{cases} B_t = 30\,000 - N_t \\ N_t = 7143 \cdot 0,58^t + 12\,857 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_t = 30\,000 - (7143 \cdot 0,58^t + 12\,857) \\ B_t = -7143 \cdot 0,58^t + 17\,143 \end{cases}$
- c** $\lim_{t \rightarrow \infty} (7143 \cdot 0,58^t + 12\,857) = 7143 \cdot 0 + 12\,857 = 12\,857$, dus N_t convergeert naar $\bar{N} = 12\,857$ en B_t convergeert naar $\bar{B} = 30\,000 - \bar{N} = 17\,143$.
- d** $\begin{cases} N_t = 0,74N_{t-1} + 0,15B_{t-1} + 0,20G_{t-1} \\ B_t = 0,22N_{t-1} + 0,80B_{t-1} + 0,10G_{t-1} \\ G_t = 0,04N_{t-1} + 0,05B_{t-1} + 0,70G_{t-1} \end{cases}$ met $N_0 = 20\,000$, $B_0 = 10\,000$ en $G_0 = 5000$

- e $N_1 = 0,74N_0 + 0,15B_0 + 0,20G_0 = 0,74 \cdot 20000 + 0,15 \cdot 10000 + 0,20 \cdot 5000 = 17300$
 $B_1 = 0,22N_0 + 0,80B_0 + 0,10G_0 = 0,22 \cdot 20000 + 0,80 \cdot 10000 + 0,10 \cdot 5000 = 12900$
 $G_1 = 35000 - N_1 - B_1 = 35000 - 17300 - 12900 = 4800$
 $N_2 = 0,74N_1 + 0,15B_1 + 0,20G_1 = 0,74 \cdot 17300 + 0,15 \cdot 12900 + 0,20 \cdot 4800 = 15697$
 $B_2 = 0,22N_1 + 0,80B_1 + 0,10G_1 = 0,22 \cdot 17300 + 0,80 \cdot 12900 + 0,10 \cdot 4800 = 14606$
 $G_2 = 35000 - N_2 - B_2 = 35000 - 15697 - 14606 = 4697$
 $G_3 = 0,04N_2 + 0,05B_2 + 0,70G_2 = 0,04 \cdot 15697 + 0,05 \cdot 14606 + 0,70 \cdot 4697 \approx 4646$
 4606 inwoners van Middelburg gaan op $t = 3$ niet op vakantie.

Bladzijde 197

- 16 a $t = 0$ geeft $L = \frac{300}{1 + 299 \cdot 0,55^0} = 1$
 $t = 1$ geeft $L = \frac{300}{1 + 299 \cdot 0,55^1} = 1,813...$
 Dus de groeifactor is ongeveer 1,81 per week voor de eerste week.
- b $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{300}{1 + 299 \cdot 0,5^t} = \frac{300}{1 + 299 \cdot 0} = 300$
 Dus de grenswaarde is 300 en halverwege de grenswaarde is $L = 150$.
 Voer in $y_1 = \frac{300}{1 + 299 \cdot 0,5^x}$ en $y_2 = 150$.
 Intersect geeft $x = 9,535...$
 Dus de exponentiële fase duurt ongeveer tot $t = 9,54$.
- c $x = 9$ geeft $y_1 = 126,209...$
 Voer in $u_n = u_{n-1} + 0,64u_{n-1} \left(1 - \frac{u_{n-1}}{300}\right)$ met $u_0 = 2$.
 De tabel geeft $u_9 = 125,058...$
 Het verschil tussen beide uitkomsten is $126,209... - 125,058... \approx 1,15$.
- d $H_t = H_{t-1} + 0,64H_{t-1} \left(1 - \frac{H_{t-1}}{300}\right) = H_{t-1} + 0,64H_{t-1} - \frac{0,64}{300}H_{t-1}^2 = -\frac{4}{1875}H_{t-1}^2 + 1,64H_{t-1}$
 Dus $a = -\frac{4}{1875} \approx -0,00213$ en $b = 1,64$.



Zie de webgrafiek.

4 weken na $t = 7$ is de lengte voor het eerst boven 2 meter.

Bladzijde 198

- 17 a Ga uit van $S_t = S_{t-1} + k \cdot S_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{S_{t-1}}{100000}\right)$ met $S_0 = 5000$.
 Proberen met de GR geeft $k = 0,12$.
 Dit geeft $S_t = S_{t-1} + 0,12 \cdot S_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{S_{t-1}}{100000}\right)$ met $S_0 = 5000$.
- b Invoeren van dit model op de GR geeft de tabelwaarden $S_{43} \approx 89809$ en $S_{44} \approx 90908$.
 Bij $t = 44$ hoort week 45, dus voor het eerst in week 45.
- c $S_t = S_{t-1} + 0,12 \cdot S_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{S_{t-1}}{100000}\right)$ geeft de parabool
 $y = x + 0,12x \left(1 - \frac{x}{100000}\right) = x + 0,12x - \frac{0,12x^2}{100000} = -0,0000012x^2 + 1,12x$.

- d $S_t = S_{t-1} + 0,114 \cdot S_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{S_{t-1}}{150000}\right)$ met $S_0 = 5000$
- e Het nieuwe model geeft $S_0 = 5000$, $S_{17} \approx 27028$ en $S_{26} \approx 56086$.
 Op $t = 0$ is het verschil $5000 - 5000 = 0$.
 Op $t = 17$ is het verschil $27028 - 27100 = -72$.
 Op $t = 26$ is het verschil $56086 - 51900 = 4186$.
 Op $t = 26$ is de afwijking het grootst.

Het scheelt $\frac{4186}{51900} \cdot 100\% \approx 8,1\%$.

- f Volgens het nieuwe model is $S_{36} \approx 97727$ en $S_{37} \approx 101609$.
 Dus in week 38.

18 a
$$\left. \begin{array}{l} P_1 = 1,20P_0 + aR_0P_0 \\ P_0 = 5500, P_1 = 5775 \text{ en } R_0 = 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1,20 \cdot 5500 - a \cdot 300 \cdot 5500 = 5775 \\ 6600 - 1650000a = 5775 \\ 1650000a = 825 \\ a = 0,0005 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} R_1 = 0,90R_0 + bP_0R_0 \\ P_0 = 5500, R_0 = 300 \text{ en } R_1 = 303 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,90 \cdot 300 + b \cdot 5500 \cdot 300 = 303 \\ 270 + 1650000b = 303 \\ 1650000b = 33 \\ b = 0,00002 \end{array}$$

Dus $a = 0,0005$ en $b = 0,00002$.

- b $a = 0,0005$ geeft $P_t = 1,20P_{t-1} - 0,0005R_{t-1} \cdot P_{t-1}$.

Bij evenwicht geldt $\bar{P} = 1,20\bar{P} - 0,0005\bar{R} \cdot \bar{P}$
 $-0,20\bar{P} + 0,0005\bar{R} \cdot \bar{P} = 0$
 $\bar{P}(-0,20 + 0,0005\bar{R}) = 0$
 $0,0005\bar{R} = 0,20$
 $\bar{R} = 400$

$b = 0,00002$ geeft $R_t = 0,90R_{t-1} + 0,00002P_{t-1} \cdot R_{t-1}$.

Bij evenwicht geldt $\bar{R} = 0,90\bar{R} + 0,00002\bar{P} \cdot \bar{R}$
 $0,10\bar{R} - 0,00002\bar{P} \cdot \bar{R} = 0$
 $\bar{R}(0,10 - 0,00002\bar{P}) = 0$
 $0,00002\bar{P} = 0,10$
 $\bar{P} = 5000$

Dus $\bar{P} = 5000$ en $\bar{R} = 400$.

- c Voer het stelsel differentievergelijkingen in op het rijen-invoerscherm en kijk in de tabel.

Het aantal prooidieren is maximaal op $t = 56$.

$$P_{\max} = P_{56} \approx 9279$$

$$R_{56} \approx 423$$

- 19 a Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = -4u_{n-1} + 5u_{n-2}$ geeft

$$g^2 + 4g - 5 = 0$$

$$(g-1)(g+5) = 0$$

$$g = 1 \vee g = -5$$

$$u_n = A \cdot 1^n + B \cdot (-5)^n, \text{ dus } u_n = A + B \cdot (-5)^n.$$

$$u_0 = 1 \text{ geeft } A + B \cdot (-5)^0 = 1, \text{ dus } A + B = 1$$

$$u_1 = 5 \text{ geeft } A + B \cdot (-5)^1 = 5, \text{ dus } A - 5B = 5$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - 5B = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 6B = -4 \\ B = -\frac{2}{3} \end{array} \rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - \frac{2}{3} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{2}{3} \\ A = 1\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } u_n = 1\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-5)^n.$$

b Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$ geeft

$$g^2 - 6g + 9 = 0$$

$$(g - 3)^2 = 0$$

$$g = 3$$

$$u_n = (A + Bn) \cdot 3^n$$

$$u_0 = 6 \text{ geeft } (A + B \cdot 0) \cdot 3^0 = 6, \text{ dus } A = 6$$

$$u_1 = 8 \text{ geeft } (A + B \cdot 1) \cdot 3^1 = 8, \text{ dus } A + B = 2\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 6 \\ A + B = 2\frac{2}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 + B = 2\frac{2}{3} \\ B = -3\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } u_n = (6 - 3\frac{1}{3}n) \cdot 3^n.$$

$$\textcircled{20} \left. \begin{array}{l} A_t = A_{t-1} + 6B_{t-1} \text{ geeft } A_{t+1} = A_t + 6B_t \\ B_t = 2A_{t-1} - 3B_{t-1} \end{array} \right\} A_{t+1} = A_t + 6(2A_{t-1} - 3B_{t-1})$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{t+1} = A_t + 12A_{t-1} - 3 \cdot 6B_{t-1} \\ A_t = A_{t-1} + 6B_{t-1} \text{ geeft } 6B_{t-1} = A_t - A_{t-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{t+1} = A_t + 12A_{t-1} - 3 \cdot (A_t - A_{t-1}) \\ A_{t+1} = A_t + 12A_{t-1} - 3A_t + 3A_{t-1} \\ A_{t+1} = -2A_t + 15A_{t-1} \\ A_t = -2A_{t-1} + 15A_{t-2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{De karakteristieke vergelijking is } g^2 + 2g - 15 &= 0 \\ (g - 3)(g + 5) &= 0 \\ g &= 3 \vee g = -5 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } A_t = A \cdot 3^t + B \cdot (-5)^t.$$

$$A_0 = 10 \text{ en } B_0 = 5 \text{ geeft } A_1 = 10 + 6 \cdot 5 = 40$$

$$A_0 = 10 \text{ geeft } A \cdot 3^0 + B \cdot (-5)^0 = 10, \text{ dus } A + B = 10$$

$$A_1 = 40 \text{ geeft } A \cdot 3^1 + B \cdot (-5)^1 = 40, \text{ dus } 3A - 5B = 40$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 10 \\ 3A - 5B = 40 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3A + 3B = 30 \\ 3A - 5B = 40 \end{array} \right. \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 8B = -10 \\ B = -1\frac{1}{4} \\ A + B = 10 \end{array} \right\} A = 11\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } A_t = 11\frac{1}{4} \cdot 3^t - 1\frac{1}{4} \cdot (-5)^t.$$

$$6B_{t-1} = A_t - A_{t-1} \text{ ofwel } 6B_t = A_{t+1} - A_t$$

$$6B_t = 11\frac{1}{4} \cdot 3^{t+1} - 1\frac{1}{4} \cdot (-5)^{t+1} - (11\frac{1}{4} \cdot 3^t - 1\frac{1}{4} \cdot (-5)^t)$$

$$6B_t = 11\frac{1}{4} \cdot 3^t \cdot 3 - 1\frac{1}{4} \cdot (-5)^t \cdot (-5) - 11\frac{1}{4} \cdot 3^t + 1\frac{1}{4} \cdot (-5)^t$$

$$6B_t = 33\frac{3}{4} \cdot 3^t + 6\frac{1}{4} \cdot (-5)^t - 11\frac{1}{4} \cdot 3^t + 1\frac{1}{4} \cdot (-5)^t$$

$$6B_t = 22\frac{1}{2} \cdot 3^t + 7\frac{1}{2} \cdot (-5)^t$$

$$\text{Dus } B_t = 3\frac{3}{4} \cdot 3^t + 1\frac{1}{4} \cdot (-5)^t.$$

7 Bewijzen

Bladzijde 199

$$\textcircled{21} \left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \text{ (parallelogram), dus } \angle ADE = \angle DEB \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle EDB = \angle ADE \text{ (bissectrice)} \end{array} \right\} \angle DEB = \angle EDB$$

$\triangle DEB$ is gelijkbenig, dus $BD = BE$ (gelijkbenige driehoek).

$$\textcircled{22} \text{ a } \left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ADC \sim \triangle BEC \text{ (hh)}$$

$$\text{Uit } \triangle ADC \sim \triangle BEC \text{ volgt } \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC}, \text{ dus } AC \cdot EC = BC \cdot DC.$$

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} \angle AEF = \angle BDF = 90^\circ \\ \angle AFE = \angle BFD \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \triangle AEF \sim \triangle BDF \text{ (hh)}$$

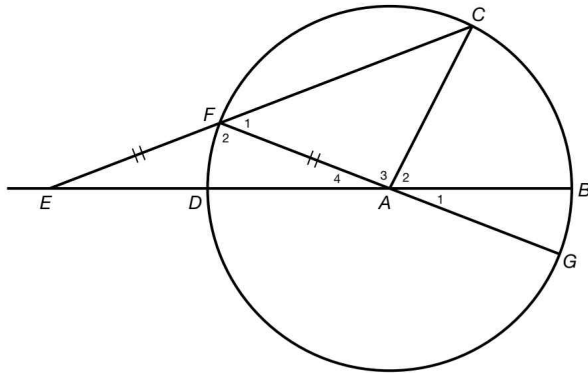
$$\text{Uit } \triangle AEF \sim \triangle BDF \text{ volgt } \frac{AF}{BF} = \frac{EF}{DF}, \text{ dus } AF \cdot DF = BF \cdot EF.$$

- 23 $\left. \begin{array}{l} \angle ACD = \angle BAP \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ACD = \angle PQD \text{ (constante hoek)} \\ \angle BQP + \angle PQD = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle BQP + \angle BAP = 180^\circ$
Dus $ABQP$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

- 24 $\left. \begin{array}{l} MD = MA \text{ (straal cirkel), dus } \angle MDA = \angle MAD \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ NC = NA \text{ (straal cirkel), dus } \angle NAC = \angle NCA \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle MAD = \angle NAC \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \angle MDA = \angle NCA$
Uit $\angle MDA = \angle NCA$ volgt $\angle MDN = \angle MCN$, dus $MNCD$ is koordenvierhoek (constante hoek).

Bladzijde 200

25 a



Stel $\angle E = x$.

$$\left. \begin{array}{l} EF = AF, \text{ dus } \angle E = \angle A_4 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle E = x \\ \angle A_1 = \angle A_4 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \angle A_4 = x \left\} \angle A_1 = x$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle E + \angle A_4 + \angle F_2 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle F_1 + \angle F_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle F_1 = \angle E + \angle A_4 \\ \angle F_1 = 2x \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle F_1 = 2x \\ AF = AC \text{ (straal cirkel), dus } \angle F_1 = \angle C \text{ (gelijkbenige driehoek)} \end{array} \right\} \angle C = 2x$$

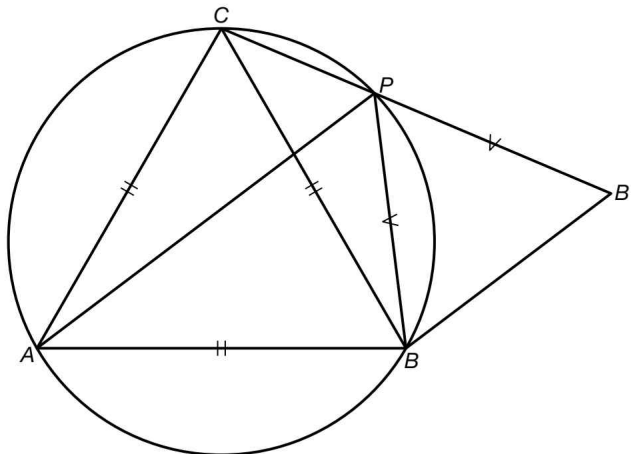
$$\left. \begin{array}{l} \angle F_1 + \angle C + \angle A_3 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle A_{12} = \angle F_1 + \angle C \\ \angle A_{12} = 2x + 2x \\ \angle CAG = 4x \end{array}$$

Dus $\angle CAG = 4\angle E$.

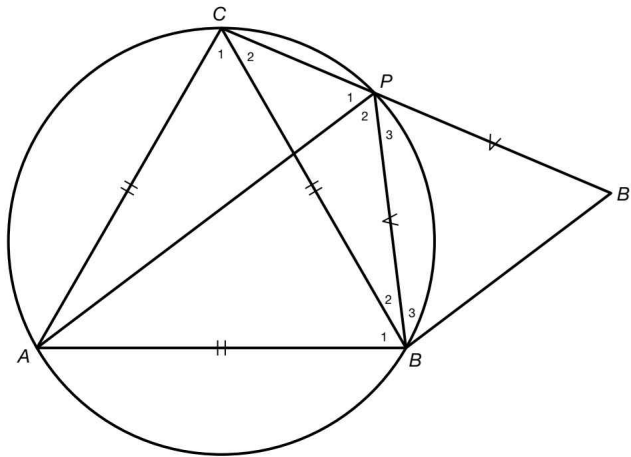
b $\left. \begin{array}{l} \angle A_{12} = 4x \\ \angle A_1 = x \end{array} \right\} \angle A_2 = 3x$

Dus $\angle BAC = 3\angle E$ ofwel $\angle E = \frac{1}{3}\angle BAC$.

26 a



b



$$\left. \begin{array}{l} \angle P_1 = \angle B_1 = 60^\circ \text{ (constante hoek)} \\ \angle P_2 = \angle C_1 = 60^\circ \text{ (constante hoek)} \\ \angle P_{123} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle P_3 = 60^\circ$$

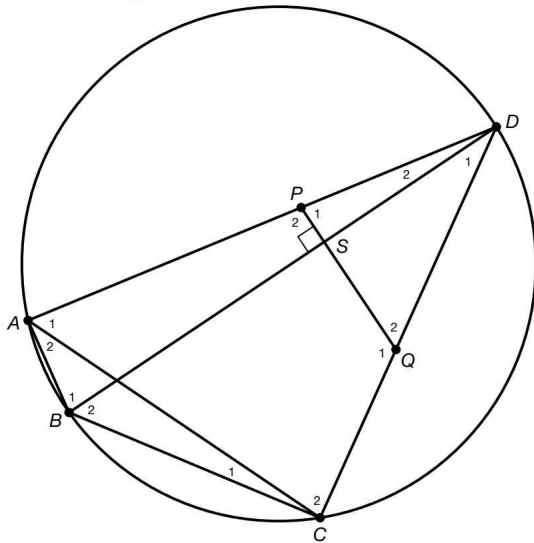
$$\left. \begin{array}{l} PB' = PB \\ \angle P_3 = 60^\circ \end{array} \right\} \triangle BB'P \text{ is gelijkzijdig}$$

c Zie de figuur bij vraag b.

$$\left. \begin{array}{l} \angle B_{12} = 60^\circ + \angle B_2 \\ \angle B_{23} = 60^\circ + \angle B_2 \\ AB = BC \\ BP = BB' \end{array} \right\} \angle B_{12} = \angle B_{23} \left\} \triangle ABP \cong \triangle CBB' \text{ (ZHZ)}, \text{ dus } AP = CB'$$

$$\left. \begin{array}{l} AP = CB' = CP + B'P \\ BP = B'P \end{array} \right\} AP = BP + CP$$

27 S is het snijpunt van PQ en BD .



$$\left. \begin{array}{l} BD \text{ is middelijn, dus } \angle A_{12} = 90^\circ \text{ (Thales)} \\ \angle S = 90^\circ \\ \angle A_{12} + \angle B_1 + \angle S + \angle P_2 = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \\ \angle B_1 = \angle C_2 \text{ (constante hoek)} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \angle B_1 + \angle P_2 = 180^\circ \\ \angle C_2 + \angle P_2 = 180^\circ \end{array} \right\}$$

Dus $PACQ$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

28 1 $n = 1$ geeft $a_1 = \frac{a_0}{a_0 + 1}$ en $a_1 = \frac{a_0}{1 \cdot a_0 + 1}$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $a_p = \frac{a_0}{p \cdot a_0 + 1}$ en bewijs dat $a_{p+1} = \frac{a_0}{(p+1) \cdot a_0 + 1}$.

$$a_{p+1} = \frac{a_p}{a_p + 1} = \frac{\frac{a_0}{p \cdot a_0 + 1}}{\frac{a_0}{p \cdot a_0 + 1} + 1} = \frac{a_0}{a_0 + 1 \cdot (p \cdot a_0 + 1)} = \frac{a_0}{a_0 + p \cdot a_0 + 1} = \frac{a_0}{(p+1) \cdot a_0 + 1}$$

3 Hiermee is bewezen dat $a_n = \frac{a_0}{n \cdot a_0 + 1}$.

Bladzijde 201

- 29 a** 1 $n = 0$ geeft $5 \cdot 3^1 - 2^0 = 15 - 1 = 14$ en dat is deelbaar door 7.
- 2 Neem aan dat $5 \cdot 3^{4p+1} - 2^{2p}$ deelbaar is door 7 en bewijs dat $5 \cdot 3^{4(p+1)+1} - 2^{2(p+1)}$ deelbaar is door 7.
 $5 \cdot 3^{4(p+1)+1} - 2^{2(p+1)} = 5 \cdot 3^{4p+5} - 2^{2p+2} = 5 \cdot 3^4 \cdot 3^{4p+1} - 2^2 \cdot 2^{2p} =$
 $405 \cdot 3^{4p+1} - 4 \cdot 2^{2p} = 4(5 \cdot 3^{4p+1} - 2^{2p}) + 385 \cdot 3^{4p+1}$
 $4(5 \cdot 3^{4p+1} - 2^{2p})$ is deelbaar door 7 vanwege de inductiehypothese.
 $385 \cdot 3^{4p+1}$ is deelbaar door 7 omdat $55 \cdot 7 = 385$.
Dus $4(5 \cdot 3^{4p+1} - 2^{2p}) + 385 \cdot 3^{4p+1}$ is deelbaar door 7.
- 3 Hiermee is bewezen dat $5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$ deelbaar is door 7 voor elk natuurlijk getal n .
- b** 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$ ofwel $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ en dit klopt.
- 2 Neem aan dat $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{p(p+3)}{4(p+1)(p+2)}$ en bewijs dat
 $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(p+1)(p+4)}{4(p+2)(p+3)}$.
Het linkerlid geeft $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} =$
 $\frac{p(p+3)}{4(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{p(p+3)^2}{4(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{4}{4(p+1)(p+2)(p+3)} =$
 $\frac{p(p+3)^2 + 4}{4(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{p(p^2 + 6p + 9) + 4}{4(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{p^3 + 6p^2 + 9p + 4}{4(p+1)(p+2)(p+3)}$.
Het rechterlid geeft $\frac{(p+1)(p+4)}{4(p+2)(p+3)} = \frac{(p+1)(p+4)(p+1)}{4(p+2)(p+3)(p+1)} = \frac{(p+1)^2(p+4)}{4(p+1)(p+2)(p+3)} =$
 $\frac{(p^2 + 2p + 1)(p+4)}{4(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{p^3 + 4p^2 + 4 + 2p^2 + 8p + p + 4}{4(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{p^3 + 6p^2 + 9p + 4}{4(p+1)(p+2)(p+3)}$.
- 3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.
- c** 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=2}^3 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2 \cdot 2}$ ofwel $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ ofwel $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ en dit klopt.
- 2 Neem aan dat $\sum_{k=2}^{2p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{2(p+1)}$ en bewijs dat $\sum_{k=2}^{2p+3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p+1}{2(p+2)}$.
 $\sum_{k=2}^{2p+3} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{2p+1} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(2p+2)(2p+3)} + \frac{1}{(2p+3)(2p+4)} =$
 $\frac{p}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p+1)(2p+3)} + \frac{1}{2(p+2)(2p+3)} = \frac{p(2p+3)(p+2) + p + 2 + p + 1}{2(p+1)(p+2)(2p+3)} =$
 $\frac{p(2p+3)(p+2) + 2p + 3}{2(p+1)(p+2)(2p+3)} = \frac{p(p+2) + 1}{2(p+1)(p+2)} = \frac{p^2 + 2p + 1}{2(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{2(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{2(p+2)}$
- 3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{2(n+1)}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.
- d** 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 \frac{k-1}{k!} = \frac{1!-1}{1!}$ ofwel $0 = 0$ en dit klopt.
- 2 Neem aan dat $\sum_{k=1}^p \frac{k-1}{k!} = \frac{p!-1}{p!}$ en bewijs dat $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k-1}{k!} = \frac{(p+1)!-1}{(p+1)!}$.
 $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^p \frac{k-1}{k!} + \frac{p+1-1}{(p+1)!} = \frac{p!-1}{p!} + \frac{p+1-1}{(p+1)!} = \frac{p!-1}{p!} + \frac{p}{(p+1)!} =$
 $\frac{(p!-1)(p+1)}{(p+1)!} + \frac{p}{(p+1)!} = \frac{p! \cdot p + p! - p - 1 + p}{(p+1)!} = \frac{p! \cdot p + p! - 1}{(p+1)!} =$
 $\frac{p! \cdot (p+1) - 1}{(p+1)!} = \frac{(p+1)! - 1}{(p+1)!}$
- 3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

30 a $\frac{m+n}{m-n} = \frac{m}{n}$

$$mn + n^2 = m^2 - mn$$

$$2mn = m^2 - n^2$$

b $\frac{m+n}{m-n} = \frac{m}{n}$ geeft $m+n = \frac{m(m-n)}{n}$

Herleiden van $2mn = m^2 - n^2$ geeft

$$2mn = m^2 - n^2$$

$$2 = \frac{m^2 - n^2}{mn}$$

$$2 = \frac{(m-n)(m+n)}{mn}$$

Invullen van $m+n = \frac{m(m-n)}{n}$ geeft

$$2 = \frac{m-n}{mn} \cdot \frac{m(m-n)}{n}$$

$$2 = \frac{(m-n)^2}{n^2}$$

$$2 = \left(\frac{m-n}{n}\right)^2$$

Uit $2 = \left(\frac{m-n}{n}\right)^2$ volgt $\frac{m-n}{n} = \sqrt{2}$.

Je vindt dus een tegenspraak, want $\frac{m-n}{n}$ is rationaal en $\sqrt{2}$ is irrationaal.

Dus voor elk tweetal positieve getallen m en n met $m > n$ geldt $\frac{m+n}{m-n} \neq \frac{m}{n}$.

31 Schrijf de getallen 10, 11, ..., 99 in de vorm $11p + q$, met $q \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$.

Het getal q is dus de rest na deling door 11.

De getallen q zijn de 11 laden en de 12 gekozen getallen zijn de knikkers.

Leg in elk van de laden 1 knikker.

Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.

Er is dus altijd een lade met minstens 2 knikkers.

Er zijn dus minstens twee getallen die na deling door 11 dezelfde rest hebben.

Het verschil van deze getallen is deelbaar door 11.

32 a Schrijf alle getallen in de vorm $3p + q$, met $q \in \{0, 1, 2\}$.

Het getal q is dus de rest na deling door 3.

De getallen q zijn de 3 laden en de 4 getallen a , b , c en d zijn de knikkers.

Leg in elk van de laden 1 knikker.

Er blijft dan 1 knikker over die ook in een lade moet worden gestopt.

Er is dus altijd een lade met minstens twee knikkers.

Er zijn dus minstens twee getallen die na deling door 3 dezelfde rest hebben.

Het verschil van deze twee getallen is deelbaar door 3.

Het product $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ bevat dus minstens één factor die deelbaar is door 3.

Dus is het product deelbaar door 3.

b Uit vraag a weten we al dat het product deelbaar is door 3.

Blijft over te bewijzen dat het product ook deelbaar is door 4.

Stel a , b , c en d zijn allen even. Dan zijn alle verschillen even en is het product deelbaar door 4.

Stel drie van de getallen a , b , c en d zijn even. Dan zijn de drie verschillen van deze drie getallen even en is het product deelbaar door 4.

Stel twee van de getallen a , b , c en d zijn even. Zowel het verschil van de twee even getallen als het verschil van de twee oneven getallen is even. Dus het product is deelbaar door 4.

Stel één van de getallen a , b , c en d is even. Dan zijn de drie verschillen van de drie oneven getallen even en is het product deelbaar door 4.

Stel geen van de getallen a , b , c en d is even. Dan zijn alle verschillen even en is het product deelbaar door 4.

Omdat het product zowel deelbaar is door 3 als door 4, is het product deelbaar door 12.

8 Ruimte meetkunde

Bladzijde 202

33 a $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{t}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{q} = \vec{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AT} = \vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{t} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 1 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \text{ dus } M(2\frac{1}{2}, 1, 2\frac{1}{4}).$$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{q} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus $CQ: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{OBT} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$OBT: \begin{cases} x - y = d \\ \text{door } O(0, 0, 0) \end{cases} \quad d = 0 - 0 = 0$$

Dus $OBT: x - y = 0$.

Substitutie van $x = 3\lambda$, $y = 4 - 4\lambda$ en $z = 1\frac{1}{2}\lambda$ in $x - y = 0$ geeft $3\lambda - (4 - 4\lambda) = 0$
 $3\lambda - 4 + 4\lambda = 0$
 $7\lambda = 4$
 $\lambda = \frac{4}{7}$

$\lambda = \frac{4}{7}$ geeft $x = \frac{4}{7} \cdot 3 = 1\frac{5}{7}$, $y = 4 + \frac{4}{7} \cdot -4 = 1\frac{5}{7}$ en $z = \frac{4}{7} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{6}{7}$.

Dus $S(1\frac{5}{7}, 1\frac{5}{7}, \frac{6}{7})$.

c $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus $PQ: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$z_U = 0$ geeft $3 - 1\frac{1}{2}\lambda = 0$, dus $\lambda = 2$.

$$\lambda = 2 \text{ geeft } \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dus $U(4, -2, 0)$.

d $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{p} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $CP: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$y_V = 0$ geeft $4 - 2\lambda = 0$, dus $\lambda = 2$.

$$\lambda = 2 \text{ geeft } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dus $V(4, 0, 6)$.

$$\text{e } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{q} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ dus } BQ: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$x_W = 0$ geeft $4 - \lambda = 0$, dus $\lambda = 4$.

$$\lambda = 4 \text{ geeft } \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dus $W(0, -12, 6)$.

$$\text{34 a } \vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{t}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{CT} = \vec{c} + \frac{2}{3}(\vec{t} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BE} = \vec{e} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BF} = \vec{f} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{BEF} = \vec{BE} \times \vec{BF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} BEF: 3x + 2y + 4z = d \\ \text{door } B(4, 3, 0) \end{array} \right\} d = 12 + 6 + 0 = 18$$

Dus $BEF: 3x + 2y + 4z = 18$.

$$\text{b } \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } EF: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}_{OBT} = \vec{OB} \times \vec{OT} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} OBT: 3x - 4y = d \\ \text{door } O(0, 0, 0) \end{array} \right\} d = 0$$

Dus $OBT: 3x - 4y = 0$.

Substitutie van $x = 2 - 2\lambda$, $y = \lambda$ en $z = 3 + \lambda$ in $3x - 4y = 0$ geeft

$$3(2 - 2\lambda) - 4\lambda = 0$$

$$6 - 6\lambda - 4\lambda = 0$$

$$-10\lambda = -6$$

$$\lambda = \frac{3}{5}$$

$$\lambda = \frac{3}{5} \text{ geeft } x = 2 - 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5} \text{ en } z = 3 + \frac{3}{5} = 3\frac{3}{5}.$$

Dus het snijpunt is $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 3\frac{3}{5})$.

c Lijn m is een normaal van ABT en lijn n is een normaal van BCT .

$$\vec{r}_m = \vec{n}_{ABT} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_n = \vec{n}_{BCT} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(m, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{65}}$$

Dus $\angle(ABT, BCT) = \angle(m, n) \approx 75,6^\circ$.

d $\vec{r}_{EF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (zie b)

Het vlak V door B loodrecht op EF .

$$\left. \begin{array}{l} V: -2x + y + z = d \\ \text{door } B(4, 3, 0) \end{array} \right\} d = -8 + 3 + 0 = -5$$

Dus $V: -2x + y + z = -5$.

$$EF: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ snijden met } V \text{ geeft}$$

$$-2(2 - 2\lambda) + \lambda + 3 + \lambda = -5$$

$$-4 + 4\lambda + \lambda + 3 + \lambda = -5$$

$$6\lambda = -4$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}$$

Het snijpunt is $S(3\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3})$.

$$d(B, EF) = d(B, S) = |\overrightarrow{BS}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -3 \\ 2\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{19\frac{1}{3}}$$

35 a $\vec{r}_{AG} = \vec{g} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{r}_{CE} = \vec{e} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(AG, CE)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-9 - 9 + 4|}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{22}} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$$

Dus $\angle(AG, CE) \approx 50,5^\circ$.

$$\text{b } \vec{r}_{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lijn n is een normaal van ACF .

$$\vec{r}_n = \vec{n}_{ACF} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 54 \\ -54 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(BD, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-2-3-2|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{51}}$$

Dus $\angle(BD, n) \approx 11,4^\circ$ en $\angle(BD, ACF) \approx 90^\circ - 11,4^\circ = 78,6^\circ$.

$$\text{c } \vec{n}_{BEG} = \overrightarrow{BG} \times \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 \\ -54 \\ -54 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} BEG: x + y + z = d \\ \text{door } B(6, 9, 0) \end{array} \right\} d = 6 + 9 + 0 = 15$$

Dus $BEG: x + y + z = 15$.

Snijden met de z -as geeft $0 + 0 + z = 15$ ofwel $z = 15$.

Dus het snijpunt is $(0, 0, 15)$.

$$\text{d } \vec{n}_{ACF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (zie b)}$$

$$\left. \begin{array}{l} ACF: x + y - z = d \\ \text{door } A(9, 0, 0) \end{array} \right\} d = 9 + 0 - 0 = 9$$

Dus $ACF: x + y - z = 9$.

$$d(D, ACF) = \frac{|0 + 0 - 6 - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$

Bladzijde 203

$$\text{36 a } \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MN} = \vec{n} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$d(M, N) = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\mathbf{b} \quad \overrightarrow{NM} = \vec{m} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NC} = \vec{c} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NC})) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0+0+0}{\sqrt{45} \cdot 2} = 0$$

$$\angle MNC = \angle(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NC}) = 90^\circ$$

c Lijn m is een normaal van EMN en lijn n is een normaal van OBE .

$$\vec{r}_m = \vec{n}_{EMN} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{EN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_n = \vec{n}_{OBE} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -24 \\ 24 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(m, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|18 - 2 + 4|}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{17}} = \frac{20}{\sqrt{697}}$$

Dus $\angle(EMN, OBE) = \angle(m, n) \approx 40,8^\circ$.

$$\mathbf{d} \quad \vec{r}_{EM} = \vec{m} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lijn n is een normaal van ACD .

$$\vec{r}_n = \vec{n}_{ACD} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(EM, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|6 - 12 - 6|}{7 \cdot \sqrt{17}} = \frac{12}{7\sqrt{17}}$$

Dus $\angle(EM, n) \approx 65,4^\circ$ en $\angle(EM, ACD) \approx 90^\circ - 65,4^\circ = 24,6^\circ$.

- 37 a** Breng een $Oxyz$ -assenstelsel aan zo, dat je de volgende punten krijgt: $O(0, 0, 0)$, $A(4, 0, 0)$, $B(4, 3, 0)$, $C(0, 3, 0)$ en $T(0, 0, 6)$.
 $A(4, 0, 0)$ en $T(0, 0, 6)$, dus $E(2, 0, 3)$.

$$\vec{f} = \vec{c} + \frac{2}{3} \vec{CT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } F(0, 1, 4).$$

$$\vec{r}_{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{BT} = \vec{t} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(EF, BT)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|8 - 3 + 6|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{61}} = \frac{11}{\sqrt{366}}$$

Dus $\angle(EF, BT) \approx 54,9^\circ$.

- b** Lijn m is een normaal van OBF en lijn n is een normaal van BCE .

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{OB} \times \vec{r}_{OF} = \vec{b} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{BE} = \vec{e} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_n = \vec{n}_{BCE} = \vec{r}_{BC} \times \vec{r}_{BE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(m, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|0 - 4 + 1|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{52}}$$

Dus $\angle(OBF, BCE) = \angle(m, n) \approx 65,4^\circ$.

$$\text{c } \vec{r}_{CE} = \vec{e} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{CF} = \vec{f} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{CEF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} CEF: 3x + 4y + 2z = d \\ \text{door } C(0, 3, 0) \end{array} \right\} d = 12$$

$$\text{Dus } CEF: 3x + 4y + 2z = 12.$$

$$d(B, CEF) = \frac{|12 + 12 + 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{29}} = \frac{12}{29}\sqrt{29} \approx 2,2$$

$$\text{d } \vec{r}_{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V is het vlak door T , loodrecht op EF .

$$\left. \begin{array}{l} V: -2x + y + z = d \\ \text{door } T(0, 0, 6) \end{array} \right\} d = 6$$

$$\text{Dus } V: -2x + y + z = 6.$$

$$EF: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ snijden met } -2x + y + z = 6 \text{ geeft } \begin{array}{l} -2(2 - 2\lambda) + \lambda + 3 + \lambda = 6 \\ -4 + 4\lambda + \lambda + 3 + \lambda = 6 \\ 6\lambda = 7 \\ \lambda = 1\frac{1}{6} \end{array}$$

Het snijpunt is $S(-\frac{1}{3}, 1\frac{1}{6}, 4\frac{1}{6})$.

$$d(T, EF) = d(T, S) = |\overrightarrow{TS}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{6} \\ -1\frac{5}{6} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(-\frac{11}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{174}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{174} \approx 2,2$$

e Van de kleinste driehoek EFB is EF de basis en $d(EF, BT)$ de hoogte.

$$\vec{r}_{EF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{r}_{BT} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ (zie a).}$$

V is het vlak door BT en evenwijdig met EF .

$$\vec{n}_V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} V: 9x + 8y + 10z = d \\ \text{door } T(0, 0, 6) \end{array} \right\} d = 60$$

$$\text{Dus } V: 9x + 8y + 10z = 60.$$

$$d(EF, BT) = d(E, V) = \frac{|18 + 0 + 30 - 60|}{\sqrt{9^2 + 8^2 + 10^2}} = \frac{12}{\sqrt{245}} = \frac{12}{7\sqrt{5}} = \frac{12}{35}\sqrt{5}$$

$$d(E, F) = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6}$$

$$\text{Oppervlakte kleinste driehoek is } \frac{1}{2} \cdot d(E, F) \cdot d(EF, BT) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{12}{35}\sqrt{5} = \frac{6}{35}\sqrt{30}.$$

- 38** $ABCD$ is een piramide met top D en grondvlak ABC .

$$I_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot \text{opp grondvlak} \cdot \text{hoogte}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot d(A, B) \cdot d(C, AB)$$

$$d(A, B) = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

V is het vlak door $C(4, 1, -2)$ en loodrecht op AB .

$$\vec{n}_V = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V: \begin{cases} 3x + 2y - z = d \\ \text{door } C(4, 1, -2) \end{cases} \quad d = 12 + 2 - (-2) = 16$$

Dus $V: 3x + 2y - z = 16$.

$$AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ snijden met } 3x + 2y - z = 16 \text{ geeft } \begin{aligned} 3(-1 + 3\lambda) + 2 \cdot 2\lambda - (3 - \lambda) &= 16 \\ -3 + 9\lambda + 4\lambda - 3 + \lambda &= 16 \\ 14\lambda &= 22 \\ \lambda &= 1\frac{4}{7} \end{aligned}$$

$\lambda = 1\frac{4}{7}$ geeft het snijpunt $S(\frac{26}{7}, \frac{22}{7}, \frac{10}{7})$.

$$d(C, AB) = d(C, S) = |\overrightarrow{CS}| = \sqrt{(\frac{2}{7})^2 + (-\frac{15}{7})^2 + (-\frac{24}{7})^2} = \sqrt{\frac{805}{49}} = \frac{1}{7}\sqrt{805}$$

$$\text{Dus } O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{1}{7}\sqrt{805} = \frac{1}{14}\sqrt{11270} = \frac{1}{2}\sqrt{230}.$$

De hoogte van de piramide is gelijk aan $d(D, ABC)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } |\overrightarrow{AC}| = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ dus } \vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$ABC: \begin{cases} -9x + 10y - 7z = d \\ \text{door } A(-1, 0, 3) \end{cases} \quad d = 9 + 0 - 21 = -12$$

Dus $ABC: -9x + 10y - 7z = -12$.

$$D(6, 3, 0), \text{ dus } d(D, ABC) = \frac{|-54 + 30 - 0 + 12|}{\sqrt{(-9)^2 + 10^2 + (-7)^2}} = \frac{12}{\sqrt{230}} = \frac{6}{115}\sqrt{230}$$

$$\text{Dus } I_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot O(\triangle ABC) \cdot d(D, ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{230} \cdot \frac{6}{115}\sqrt{230} = \frac{1}{115} \cdot 230 = 2.$$

39 a $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dus } AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

P op AB , dus $P(1 + \lambda, -\lambda, 3 - \lambda)$.

b $d(C, P) = |\overrightarrow{CP}| = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ -\lambda - 4 \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} = \sqrt{(1 + 2\lambda)^2 + (-\lambda - 4)^2 + (1 - \lambda)^2} =$

$$\sqrt{1 + 4\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 + 8\lambda + 16 + 1 - 2\lambda + \lambda^2} = \sqrt{6\lambda^2 + 10\lambda + 18}$$

c $L = \sqrt{6\lambda^2 + 10\lambda + 18}$ geeft $\frac{dL}{d\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{6\lambda^2 + 10\lambda + 18}} \cdot (12\lambda + 10) = \frac{6\lambda + 5}{\sqrt{6\lambda^2 + 10\lambda + 18}}$

Minimum voor $\frac{dL}{d\lambda} = 0$, dus voor $\lambda = -\frac{5}{6}$.

d $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot d(A, B) \cdot d(C, AB)$

$$d(A, B) = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Zie vraag c: } \lambda = -\frac{5}{6} \text{ geeft } d(C, AB) = d(C, P) = \sqrt{6 \cdot (-\frac{5}{6})^2 + 10 \cdot -\frac{5}{6} + 18} = \sqrt{\frac{83}{6}}.$$

$$\text{Dus } O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{83}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{83}.$$

$$\text{e } AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

V is het vlak door Q loodrecht op AB .

$$\left. \begin{array}{l} V: 2x - y - z = d \\ \text{door } Q(0, \mu, 0) \end{array} \right\} d = -\mu$$

Dus $V: 2x - y - z = -\mu$.

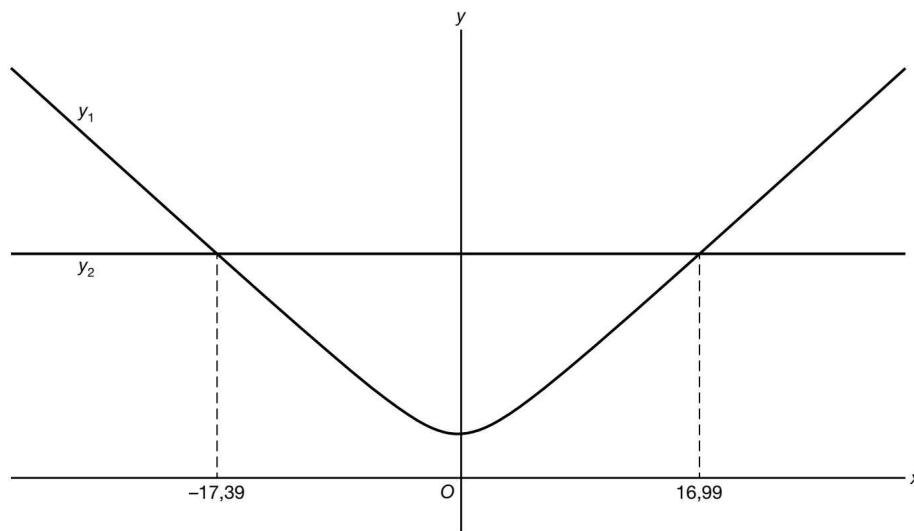
$$AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ snijden met } 2x - y - z = -\mu \text{ geeft } \begin{aligned} 2(1 + 2\lambda) + \lambda - (3 - \lambda) &= -\mu \\ 2 + 4\lambda + \lambda - 3 + \lambda &= -\mu \\ 6\lambda &= 1 - \mu \\ \lambda &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\mu \end{aligned}$$

Het snijpunt is $S(-\frac{1}{3}\mu + 1\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\mu - \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\mu + 2\frac{5}{6})$.

$$d(Q, AB) = d(Q, S) = |\overrightarrow{QS}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\mu + 1\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6}\mu - \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}\mu + 2\frac{5}{6} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\mu + 1\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\mu - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\mu + 2\frac{5}{6}\right)^2}$$

Voer in $y_1 = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}x + 2\frac{5}{6}\right)^2}$ en $y_2 = 16$.

Intersect geeft $x \approx -17,39$ en $x \approx 16,99$.



Dus $d(Q, AB) < 16$ voor $-17,39 < \mu < 16,99$.

Bladzijde 204

- 40 a P op l , dus $P(2 - 2\lambda, \lambda, -1 + 2\lambda)$.
 Q op m , dus $Q(1, 3 + \mu, 2 - 2\mu)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 + \mu \\ 2 - 2\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda \\ \lambda \\ -1 + 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 \\ -\lambda + \mu + 3 \\ -2\lambda - 2\mu + 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b } \overrightarrow{PQ} \perp l \text{ geeft } \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 \\ -\lambda + \mu + 3 \\ -2\lambda - 2\mu + 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-4\lambda + 2 - \lambda + \mu + 3 - 4\lambda - 4\mu + 6 = 0$$

$$-9\lambda - 3\mu = -11$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp m \text{ geeft } \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 \\ -\lambda + \mu + 3 \\ -2\lambda - 2\mu + 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda + \mu + 3 + 4\lambda + 4\mu - 6 = 0$$

$$3\lambda + 5\mu = 3$$

Je krijgt het stelsel $\begin{cases} -9\lambda - 3\mu = -11 \\ 3\lambda + 5\mu = 3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 9\lambda + 3\mu = 11 & |1| \\ 3\lambda + 5\mu = 3 & |3| \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 9\lambda + 3\mu = 11 \\ 9\lambda + 15\mu = 9 \\ \hline -12\mu = 2 \\ \mu = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$3\lambda + 5\mu = 3 \quad \left. \begin{matrix} \mu = -\frac{1}{6} \\ 3\lambda + 5\mu = 3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 3\lambda - \frac{5}{6} = 3 \\ 3\lambda = 3\frac{5}{6} \\ \lambda = \frac{23}{18} \end{matrix}$$

Dus $\mu = -\frac{1}{6}$ en $\lambda = \frac{23}{18}$.

c $\lambda = \frac{23}{18}$ geeft $P(-\frac{5}{9}, \frac{23}{18}, \frac{14}{9})$ en $\mu = -\frac{1}{6}$ geeft $Q(1, \frac{17}{6}, \frac{7}{3})$.

- d De afstand tussen l en m is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van l en m .
Het lijnstuk dat zowel loodrecht op l als loodrecht op m staat is het kortste verbindingslijnstuk.
 $PQ \perp l$ en $PQ \perp m$, dus

$$d(l, m) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{14}{9} \\ \frac{14}{9} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{441}{81}} = \frac{21}{9} = 2\frac{1}{3}.$$

e $Q(1, 3 + \mu, 2 - 2\mu)$ en $R(1 - v, -1, 2v)$

$$|\overrightarrow{QR}| = \vec{r} - \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ 2v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 + \mu \\ 2 - 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v - 1 \\ -1 - 3 - \mu \\ 2v - 2 + 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\mu - 4 \\ 2\mu + 2v - 2 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{QR}| \perp m \text{ geeft } \begin{pmatrix} -v \\ -\mu - 4 \\ 2\mu + 2v - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\mu - 4 - 4\mu - 4v + 4 = 0$$

$$-5\mu - 4v = 0$$

$$5\mu + 4v = 0$$

$$|\overrightarrow{QR}| \perp n \text{ geeft } \begin{pmatrix} -v \\ -\mu - 4 \\ 2\mu + 2v - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$v + 4\mu + 4v - 4 = 0$$

$$4\mu + 5v = 4$$

Je krijgt het stelsel $\begin{cases} 5\mu + 4v = 0 \\ 4\mu + 5v = 4 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 5\mu + 4v = 0 & |4| \\ 4\mu + 5v = 4 & |5| \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 20\mu + 16v = 0 \\ 20\mu + 25v = 20 \\ \hline -9v = -20 \\ v = \frac{20}{9} \end{cases}$$

$$5\mu + 4v = 0 \quad \left. \begin{matrix} v = \frac{20}{9} \\ 5\mu + 4v = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 5\mu + 4 \cdot \frac{20}{9} = 0 \\ 5\mu = -\frac{80}{9} \\ \mu = -\frac{16}{9} \end{matrix}$$

$\mu = -\frac{16}{9}$ geeft $Q(1, \frac{11}{9}, \frac{50}{9})$ en $v = \frac{20}{9}$ geeft $R(-\frac{11}{9}, -1, \frac{40}{9})$

f V is het vlak door l en evenwijdig met n .

$$\vec{n}_V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} V: 2x + 2y + z = d \\ \text{door } (2, 0, -1) \end{array} \right\} d = 4 + 0 - 1 = 3$$

$$\text{Dus } V: 2x + 2y + z = 3.$$

$$d(l, n) = d((1, -1, 0), V) = \frac{|2 - 2 + 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

$$\text{41 a } \left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ |\vec{a}|^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{array} \right\} \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ \vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\begin{aligned} \text{c } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 \\ (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_2 \\ (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1 \\ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_2 \\ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3 \end{pmatrix} = \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \end{aligned}$$

$$\text{d } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} =$$

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) =$$

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \left. \begin{array}{l} \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ \sin^2(\angle(\vec{a}, \vec{b})) + \cos^2(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 1 \end{array} \right\} \sin^2(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) &= \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)^2} = \sqrt{\frac{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2}} = \sqrt{\frac{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \end{aligned}$$

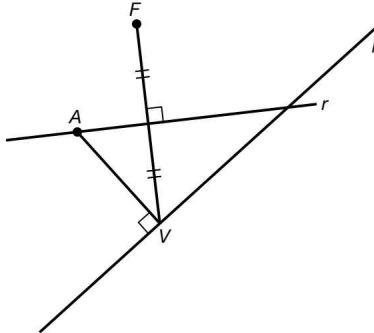
$$\text{f } O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

Gemengde opgaven

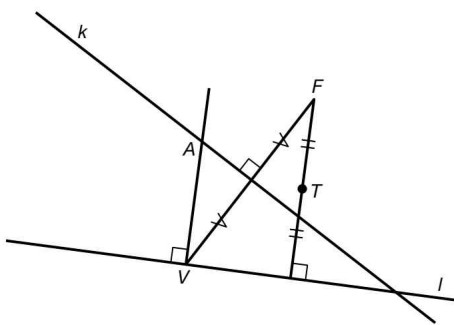
9 Meetkundige plaatsen en raaklijneigenschappen

Bladzijde 182

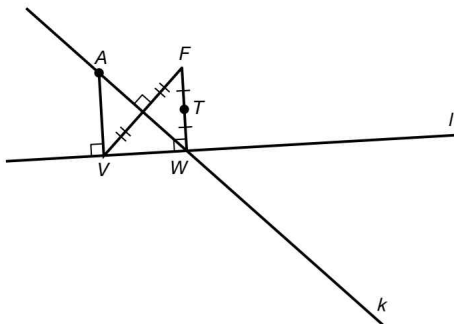
1 a



b

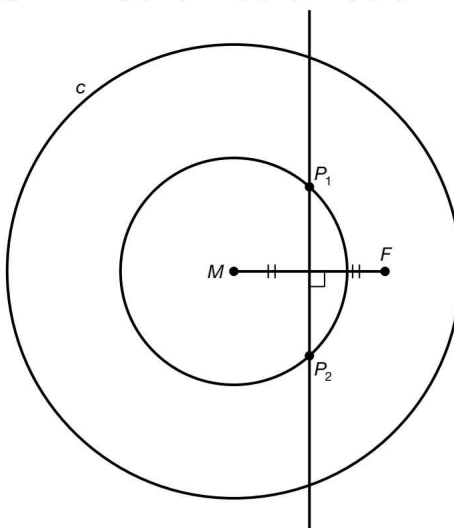


c

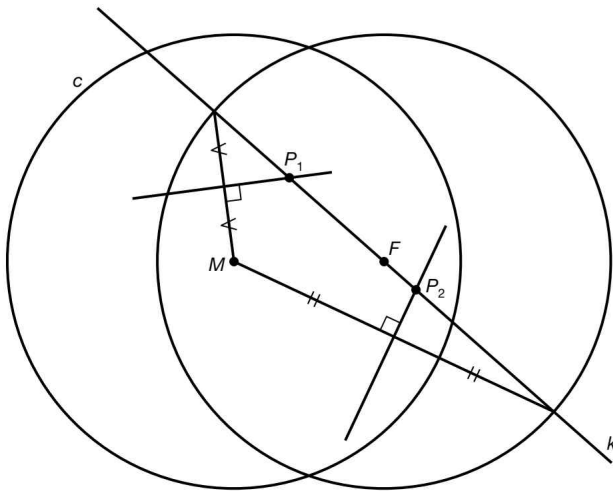


2 a De straal van de cirkel is $2r$.

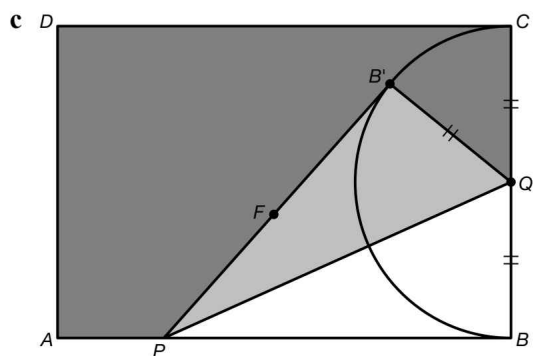
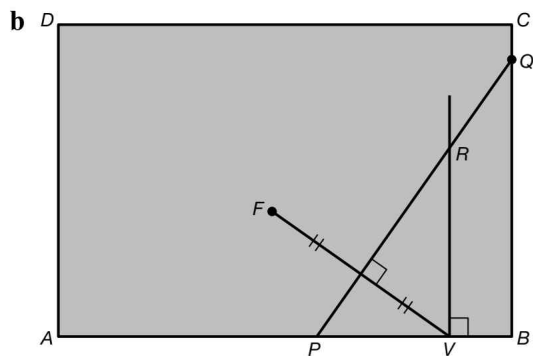
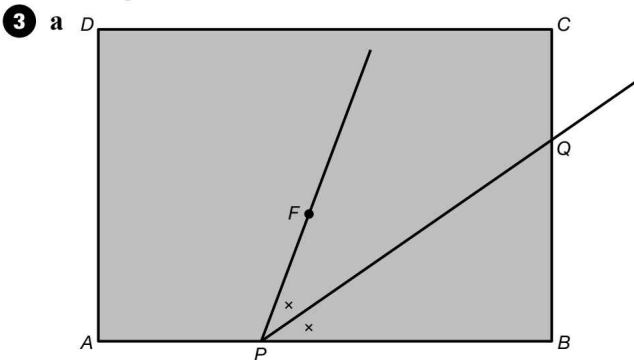
Teken de cirkel met middelpunt M en straal r en de middelloodlijn van het lijnstuk MF . Voor de punten P_1 en P_2 geldt nu $d(P, M) = d(P, F) = d(P, c) = r$.



b De snijpunten van e en k zijn de punten P_1 en P_2 in de figuur hieronder.



Bladzijde 183

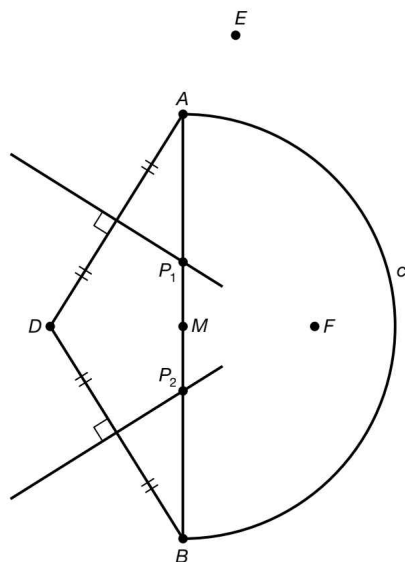


$$\left. \begin{array}{l} BQ = B'Q \text{ (elkaars spiegelbeeld)} \\ BQ = CQ \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} BQ = B'Q = CQ$$

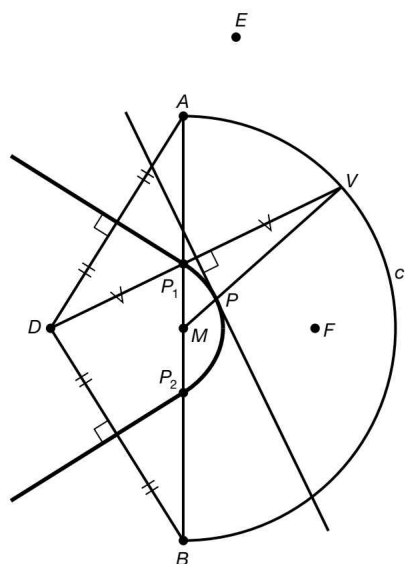
Dus B' ligt op de cirkel met middellijn BC .
Hieruit volgt $\angle BB'C = 90^\circ$ (Thales).

Bladzijde 184

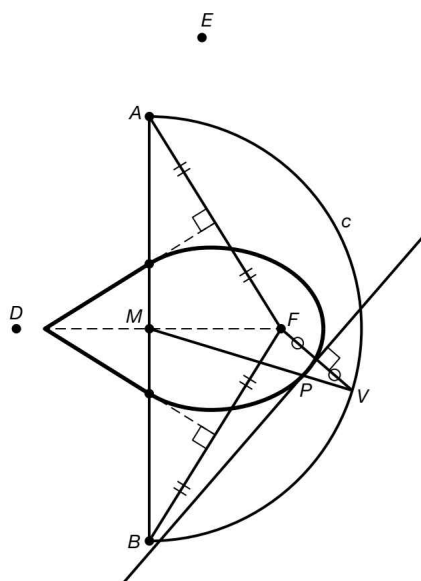
- 4 a** De punten waar de halve lijnen overgaan in de ellips zijn de punten P_1 en P_2 in de figuur hieronder.



b



c



$$\left. \begin{array}{l} \angle MPF = 90^\circ \text{ (Thales)} \\ FN = \frac{1}{2} FM \text{ (gegeven)} \\ FR = \frac{1}{2} FP \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle FNR \sim \triangle FMP \text{ (zhz)} \left\} \angle NRF = 90^\circ \text{ en } NR = \frac{1}{2} MP$$

$$\left. \begin{array}{l} NR = \frac{1}{2} MP \\ MP = NF \text{ (want beide cirkels even groot)} \end{array} \right\} NR = \frac{1}{2} NF$$

$\angle NRF = 90^\circ$, dus R op de cirkel met middellijn NF (Thales).

T op de hyperbooltak met brandpunt F en richtcirkel c_1 , dus $d(T, F) = d(T, c_1)$ ofwel $TF = TN$, dus T is het midden van de cirkel met middellijn NF , en dus $TR = TN = TF = \frac{1}{2} NF$ (cirkel).

$$\left. \begin{array}{l} TR = TN = TF = \frac{1}{2} NF \\ NR = \frac{1}{2} NF \end{array} \right\} TR = TN = NR, \text{ dus } \triangle RNT \text{ is gelijkzijdig.}$$

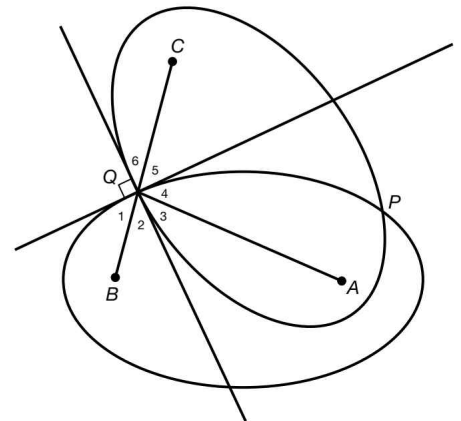
$$\begin{array}{l} \text{6 a } d(P, A) + d(P, B) = c \text{ (ellips), dus } PB = c - PA. \\ d(Q, A) + d(Q, B) = c \text{ (ellips), dus } QB = c - QA. \\ d(P, A) + d(P, C) = d \text{ (ellips), dus } PC = d - PA. \\ d(Q, A) + d(Q, C) = d \text{ (ellips), dus } QC = d - QA. \\ \left. \begin{array}{l} PB + QC = c - PA + d - QA \\ PC + QB = d - PA + c - QA \end{array} \right\} PB + QC = PC + QB \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle Q_1 = \angle Q_4 \text{ (raaklijneigenschap ellips)} \\ \angle Q_1 + \angle Q_2 = 90^\circ \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \angle Q_2 + \angle Q_4 = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle Q_2 + \angle Q_4 = 90^\circ \\ \angle Q_3 + \angle Q_4 = 90^\circ \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \angle Q_2 = \angle Q_3$$

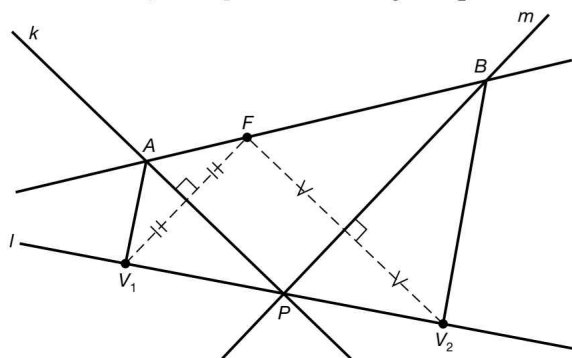
$$\left. \begin{array}{l} \angle Q_2 = \angle Q_3 \\ \angle Q_3 = \angle Q_6 \text{ (raaklijneigenschap ellips)} \end{array} \right\} \angle Q_2 = \angle Q_6$$

$\angle Q_2 = \angle Q_6$, dus $\angle Q_2$ en $\angle Q_6$ zijn gelijke overstaande hoeken van de raaklijn aan de onderste ellips en de lijn BC . Dus Q op BC .



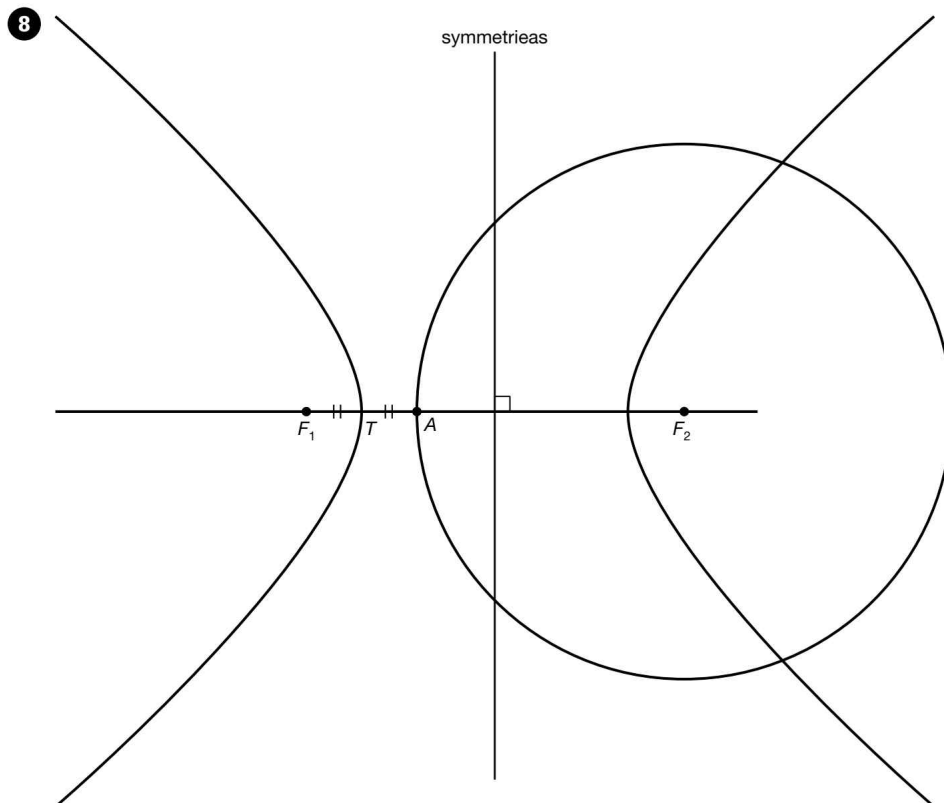
Bladzijde 185

- 7 a Spiegeling van F in k geeft het beeld V_1 , en spiegeling van F in m geeft het beeld V_2 .
Er geldt $d(A, V_1) = d(A, F)$, dus V_1 op de richtlijn van p
en $d(B, V_2) = d(B, F)$, dus V_2 op de richtlijn van p .
 l is de richtlijn van p , dus l door V_1 en V_2 .



- b k is de middelloodlijn van V_1F en P op k , dus $PV_1 = PF \dots (1)$
 m is de middelloodlijn van V_2F en P op m , dus $PV_2 = PF \dots (2)$

Uit (1) en (2) volgt $\left. \begin{array}{l} F \text{ ligt op de cirkel met middellijn } V_1V_2 \\ F \text{ ligt op de cirkel met middelpunt } P \text{ en straal } PV_1 \end{array} \right\} P \text{ ligt op } V_1V_2.$



Zie de figuur.

F_1 spiegelen in de symmetrieas geeft F_2 .

F_1 spiegelen in de top van de hyperbool geeft A .

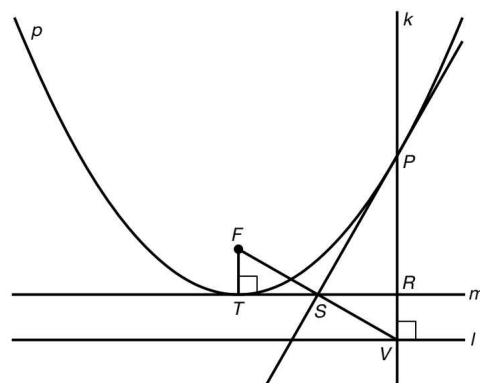
De cirkel met middelpunt F_2 en straal F_2A is richtcirkel.

Spiegelen van de linker hyperbooltak in de symmetrieas geeft de rechter hyperbooltak.

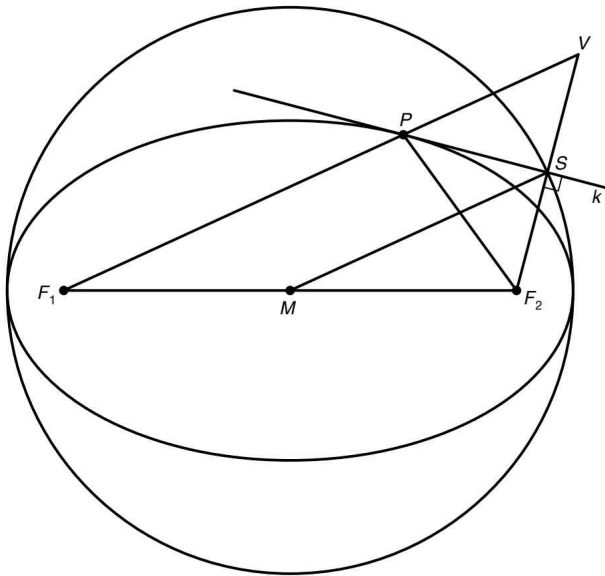
- 9 Teken FT , FS en RV met V het snijpunt van k en l .
 $m \parallel l$, dus $\angle R = \angle V = 90^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle T = \angle R = 90^\circ \\ \angle F = \angle SVR \text{ (Z-hoeken)} \\ FT = VR \end{array} \right\} \triangle FTS \cong \triangle VRS \text{ (HZH)}$$

Hieruit volgt $ST = SR$.



10 a Zie de figuur hieronder.



V is het bij P horende punt op de richtcirkel met straal F_1V .

Nu is k de middelloodlijn van het lijnstuk F_2V , dus S is het midden van F_2V ... (1)

Verder is M het midden van F_1F_2 ... (2)

Uit (1) en (2) volgt dat MS een middenparallel van $\triangle F_1F_2V$ is.

$$\left. \begin{array}{l} F_2P = PV \text{ (ellips), dus } F_1V = F_1P + PV = F_1P + F_2P \\ MS = \frac{1}{2}F_1V \text{ (middenparallel)} \end{array} \right\} MS = \frac{1}{2}(F_1P + F_2P)$$

b $F_1P + F_2P = \text{constant}$ (ellips), dus de meetkundige plaats van de punten S is de cirkel met middelpunt M en straal MS . Zie de figuur bij a.

Bladzijde 186

11 a p_1 heeft brandpunt F_1 en richtlijn F_2F_4 .

Zie F_2 als variabel punt op de richtlijn F_2F_4 , dan kun je het hierbij horende punt A van p_1 tekenen.

De middelloodlijn van F_1F_2 is tevens raaklijn van p_1 in A .

p_2 heeft brandpunt F_2 en richtlijn F_1F_3 .

Zie F_1 als variabel punt op de richtlijn F_1F_3 , dan kun je het hierbij horende punt B van p_2 tekenen.

De middelloodlijn van F_1F_2 is tevens raaklijn van p_2 in B .

Dus p_1 en p_2 hebben als gemeenschappelijke raaklijn de middelloodlijn van F_1F_2 ... (1)

p_1 heeft brandpunt F_1 en richtlijn F_2F_4 .

Zie F_4 als variabel punt op de richtlijn F_2F_4 , dan kun je het hierbij horende punt C van p_1 tekenen.

De middelloodlijn van F_1F_4 is tevens raaklijn van p_1 in C .

p_2 heeft brandpunt F_2 en richtlijn F_1F_3 .

Zie F_3 als variabel punt op de richtlijn F_1F_3 , dan kun je het hierbij horende punt D van p_2 tekenen.

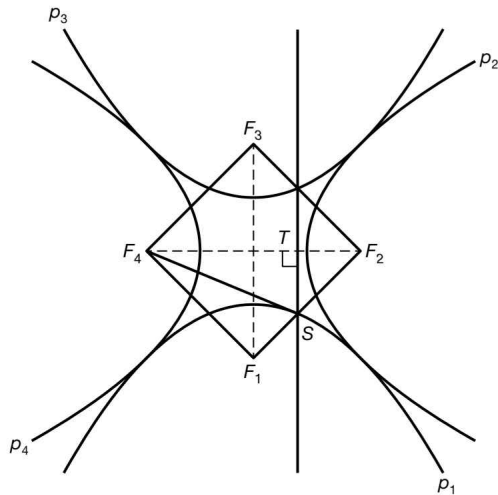
De middelloodlijn van F_2F_3 is tevens raaklijn van p_2 in D .

$F_1F_2F_3F_4$ is een vierkant, dus de middelloodlijn van F_1F_4 is tevens middelloodlijn van F_2F_3 .

Dus p_1 en p_2 hebben als gemeenschappelijke raaklijn de middelloodlijn van F_1F_4 ... (2)

Uit (1) en (2) volgt dat de parabolen p_1 en p_2 twee gemeenschappelijke raaklijnen hebben.

- b Teken SF_4 en teken de loodlijn door S op F_2F_4 .
Zie de figuur hieronder.



$$\left. \begin{array}{l} SF_1 = ST \text{ (parabool)} \\ \angle SF_1F_4 = \angle STF_4 = 90^\circ \\ SF_4 = SF_4 \end{array} \right\} \triangle SF_1F_4 \cong \triangle STF_4 \text{ (ZZR)}$$

Hieruit volgt $\angle F_1SF_4 = \angle TSF_4$, en dus is volgens de raaklijneigenschap SF_4 raaklijn van p_1 .
Dus de raaklijn in S aan p_1 gaat door F_4 .

10 Complexe getallen

- 12 a** $3a + 2b = 6bi - 4ai$
 $3a + 4ai = 6bi - 2b$
 $a(3 + 4i) = 6bi - 2b$
 $a = \frac{6bi - 2b}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{18bi - 24bi^2 - 6b + 8bi}{9 - 16i^2} = \frac{18bi + 24b - 6b + 8bi}{9 + 16} = \frac{18b + 26bi}{25} = \frac{18}{25}b + 1\frac{1}{25}bi$
- b** $\frac{a + 5i}{b - ai} = 2$
 $a + 5i = 2(b - ai)$
 $a + 5i = 2b - 2ai$
 $a + 2ai = 2b - 5i$
 $a(1 + 2i) = 2b - 5i$
 $a = \frac{2b - 5i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2b - 4bi - 5i + 10i^2}{1 - 4i^2} = \frac{2b - 4bi - 5i - 10}{1 + 4} = \frac{2b - 10 - 4bi - 5i}{5} = \frac{2}{5}b - 2 - (\frac{4}{5}b + 1)i$
- c** $2a - b + (3 - 2a + b)i = 0$
 $2a - b + 3i - 2ai + bi = 0$
 $2a - 2ai = b - bi - 3i$
 $a(2 - 2i) = b - bi - 3i$
 $a = \frac{b - bi - 3i}{2 - 2i} \cdot \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{2b + 2bi - 2bi - 2bi^2 - 6i - 6i^2}{4 - 4i^2} = \frac{2b + 2b - 6i + 6}{4 + 4} = \frac{4b + 6 - 6i}{8} = \frac{1}{2}b + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$
- 13 a** $z = \frac{3 + i}{2 + 2i} \cdot \frac{3 - i}{2 + 2i} = \frac{9 - i^2}{4 + 8i + 4i^2} = \frac{9 + 1}{4 + 8i - 4} = \frac{10}{8i} = \frac{10i}{8i^2} = \frac{10i}{-8} = -1\frac{1}{4}i$
- b** $z = (1 - i)^4 \cdot (1 + i)^3 = (1 - i) \cdot (1 - i)^3 \cdot (1 + i)^3 = (1 - i) \cdot ((1 - i)(1 + i))^3 = (1 - i) \cdot (1 - i^2)^3 = (1 - i) \cdot (1 + 1)^3 = (1 - i) \cdot 2^3 = 8 - 8i$
- c** $z = (\cos(\frac{1}{3}\pi) - i\sin(\frac{1}{3}\pi))^2 \cdot (\cos(\frac{1}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\pi)) = (\cos(\frac{1}{3}\pi) - i\sin(\frac{1}{3}\pi)) \cdot ((\cos(\frac{1}{3}\pi) - i\sin(\frac{1}{3}\pi)) \cdot (\cos(\frac{1}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\pi))) = (\cos(\frac{1}{3}\pi) - i\sin(\frac{1}{3}\pi)) \cdot ((\cos^2(\frac{1}{3}\pi) - i^2\sin^2(\frac{1}{3}\pi)) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}) \cdot ((\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}) \cdot (\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$
- d** $z = \frac{(3 + 3i\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{3} - i)^{-2}}{(\sqrt{3} - i)^2} = \frac{(9 + 18i\sqrt{3} + 27i^2) \cdot (\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)^2} = \frac{(9 + 18i\sqrt{3} - 27) \cdot (\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)^2} = \frac{(-18 + 18i\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)^2} = \frac{-18 - i\sqrt{3}}{2 - 2i\sqrt{3}} \cdot \frac{2 + i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} = \frac{-36 - 36i\sqrt{3} - 36i\sqrt{3} - 108i^2}{4 - 12i^2} = \frac{-36 - 72i\sqrt{3} + 108}{4 + 12} = \frac{72 - 72i\sqrt{3}}{16} = 4\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}i\sqrt{3}$

$$\text{e } z = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^4}{-3} = \frac{((\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^2)^2}{-3} = \frac{(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{4}i^2)^2}{-3} = \frac{(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{4})^2}{-3} = \frac{(\frac{1}{2}i)^2}{-3} = \frac{\frac{1}{4}i^2}{-3} = \frac{-\frac{1}{4}}{-3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{f } z = (2 - 2i)^{-2} \cdot \overline{(1 - i\sqrt{3})^2} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{(2 - 2i)^2} = \frac{1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2}{4 - 8i + 4i^2} = \frac{1 + 2i\sqrt{3} - 3}{4 - 8i - 4} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{-8i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-2i + 2i^2\sqrt{3}}{-8i^2} = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{8} = -\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}i$$

Bladzijde 187

14 a $(z - 2i)^2 = -4$

$$(z - 2i)^2 = 4i^2$$

$$z - 2i = -2i \vee z - 2i = 2i$$

$$z = 0 \vee z = 4i$$

b $z^2 + 2z + 2 = 0$

$$(z + 1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$(z + 1)^2 = -1$$

$$(z + 1)^2 = i^2$$

$$z + 1 = i \vee z + 1 = -i$$

$$z = -1 + i \vee z = -1 - i$$

c $z^3 = i$

$$z^3 = e^{\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z = e^{\frac{1}{6}\pi i + k \cdot \frac{2}{3}\pi i}$$

$$z = e^{-\frac{1}{2}\pi i} \vee z = e^{\frac{1}{6}\pi i} \vee z = e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

$$z = -i \vee z = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \vee z = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$$

d $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$

$$\text{Stel } z^2 = u.$$

$$u^2 + 4u + 3 = 0$$

$$(u + 1)(u + 3) = 0$$

$$u = -1 \vee u = -3$$

$$z^2 = -1 \vee z^2 = -3$$

$$z^2 = i^2 \vee z^2 = 3i^2$$

$$z = i \vee z = -i \vee z = i\sqrt{3} \vee z = -i\sqrt{3}$$

e $z^4 + 4z^3 + 5z^2 = 0$

$$z^2(z^2 + 4z + 5) = 0$$

$$z^2 = 0 \vee z^2 + 4z + 5 = 0$$

$$z = 0 \vee (z + 2)^2 - 4 + 5 = 0$$

$$z = 0 \vee (z + 2)^2 = -1$$

$$z = 0 \vee (z + 2)^2 = i^2$$

$$z = 0 \vee z + 2 = i \vee z + 2 = -i$$

$$z = 0 \vee z = -2 + i \vee z = -2 - i$$

f $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

$$\text{Stel } z^3 = u.$$

$$u^2 - 7u - 8 = 0$$

$$(u + 1)(u - 8) = 0$$

$$u = -1 \vee u = 8$$

$$z^3 = -1 \vee z^3 = 8$$

$$z^3 = e^{\pi i + k \cdot 2\pi i} \vee z^3 = 8e^{k \cdot 2\pi i}$$

$$z = e^{\frac{1}{3}\pi i + k \cdot \frac{2}{3}\pi i} \vee z = 2e^{k \cdot \frac{2}{3}\pi i}$$

$$z = e^{-\frac{1}{3}\pi i} \vee z = e^{\frac{1}{3}\pi i} \vee z = e^{\pi i} \vee z = 2e^{-\frac{2}{3}\pi i} \vee z = 2 \vee z = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \vee z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \vee z = -1 \vee z = -1 - i\sqrt{3} \vee z = 2 \vee z = -1 + i\sqrt{3}$$

15 a $\frac{i}{1+i} = \frac{e^{\frac{1}{2}\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{4}\pi i}$

$$\sqrt[3]{\frac{i}{1+i}}, \text{ dus los op } z^3 = \frac{i}{1+i}$$

$$z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{4}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{\frac{1}{12}\pi i + k \cdot \frac{2}{3}\pi i}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{-\frac{7}{12}\pi i} \vee z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{\frac{1}{12}\pi i} \vee z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

$$\text{Dus } \sqrt[3]{\frac{i}{1+i}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{-\frac{7}{12}\pi i} \vee \sqrt[3]{\frac{i}{1+i}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{\frac{1}{12}\pi i} \vee \sqrt[3]{\frac{i}{1+i}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{\frac{3}{4}\pi i}.$$

b $\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}$, dus los op $z^4 = 2\sqrt{3}-2i$

$$z^4 = 4e^{-\frac{1}{6}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z = \sqrt[4]{2}e^{-\frac{1}{24}\pi i + k \cdot \frac{1}{2}\pi i}$$

$$z = \sqrt[4]{2}e^{-\frac{13}{24}\pi i} \vee z = \sqrt[4]{2}e^{-\frac{1}{24}\pi i} \vee z = \sqrt[4]{2}e^{\frac{11}{24}\pi i} \vee z = \sqrt[4]{2}e^{\frac{23}{24}\pi i}$$

$$\text{Dus } \sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i} = \sqrt[4]{2}e^{-\frac{13}{24}\pi i} \vee \sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i} = \sqrt[4]{2}e^{-\frac{1}{24}\pi i} \vee \sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{11}{24}\pi i} \vee \sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{23}{24}\pi i}.$$

c $\sqrt[3]{6+6i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{6-6i\sqrt{3}}$, dus los op $z^3 = 6-6i\sqrt{3}$

$$z^3 = 12e^{-\frac{1}{3}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z = \sqrt[3]{12}e^{-\frac{1}{9}\pi i + k \cdot \frac{2}{3}\pi i}$$

$$z = \sqrt[3]{12}e^{-\frac{7}{9}\pi i} \vee z = \sqrt[3]{12}e^{-\frac{1}{9}\pi i} \vee z = \sqrt[3]{12}e^{\frac{5}{9}\pi i}$$

$$\text{Dus } \sqrt[3]{6+6i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{12}e^{-\frac{7}{9}\pi i} \vee \sqrt[3]{6+6i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{12}e^{-\frac{1}{9}\pi i} \vee \sqrt[3]{6+6i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{12}e^{\frac{5}{9}\pi i}.$$

d $\sqrt{8\cos(\frac{1}{4}\pi) + 8i\sin(\frac{1}{4}\pi)}$, dus los op $z^2 = 8\cos(\frac{1}{4}\pi) + 8i\sin(\frac{1}{4}\pi)$

$$z^2 = 8(\cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi))$$

$$z^2 = 8e^{\frac{1}{4}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z = 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{8}\pi i + k \cdot \pi i}$$

$$z = 2\sqrt{2}e^{-\frac{7}{8}\pi i} \vee z = 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{8}\pi i}$$

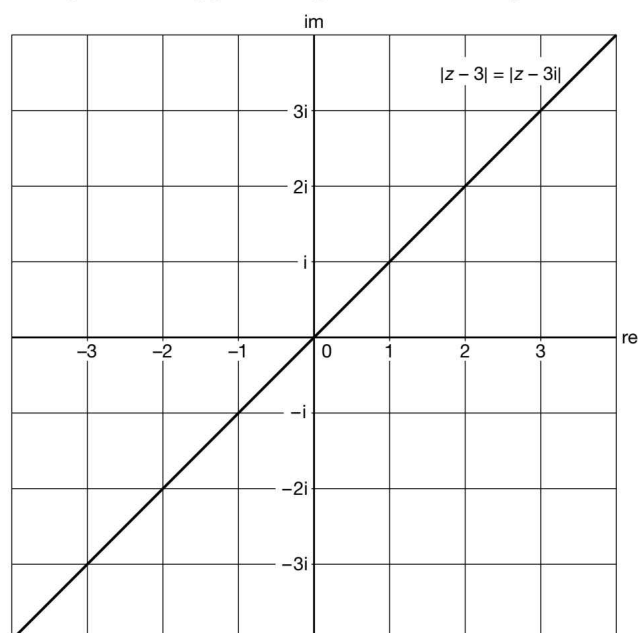
$$\text{Dus } \sqrt{8\cos(\frac{1}{4}\pi) + 8i\sin(\frac{1}{4}\pi)} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{7}{8}\pi i} \vee \sqrt{8\cos(\frac{1}{4}\pi) + 8i\sin(\frac{1}{4}\pi)} = 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{8}\pi i}.$$

16 a $\left| \frac{z-3}{z-3i} \right| = 1$

$$\frac{|z-3|}{|z-3i|} = 1$$

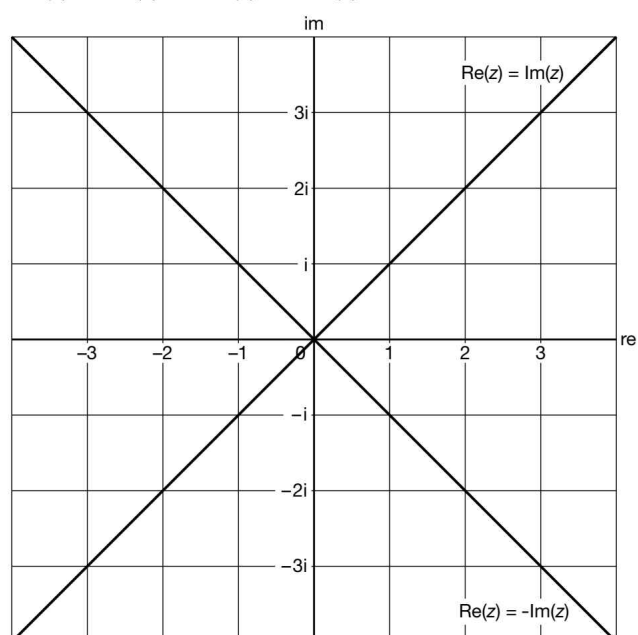
$$|z-3| = |z-3i|$$

De afstand van z tot 3 moet gelijk zijn aan de afstand van z tot $3i$.
Alle getallen z liggen dus op de middelloodlijn van 3 en $3i$.



b $(\operatorname{Re}(z))^2 = (\operatorname{Im}(z))^2$

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \vee \operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$$

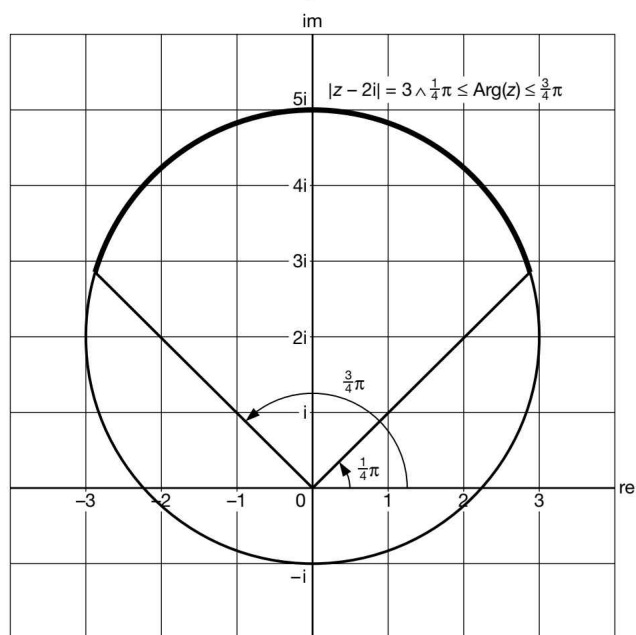


c $(z - 2i) \cdot \overline{(z - 2i)} = 9$

$$|z - 2i|^2 = 9$$

$$|z - 2i| = 3$$

Dit is de cirkel met middelpunt $2i$ en straal 3 .

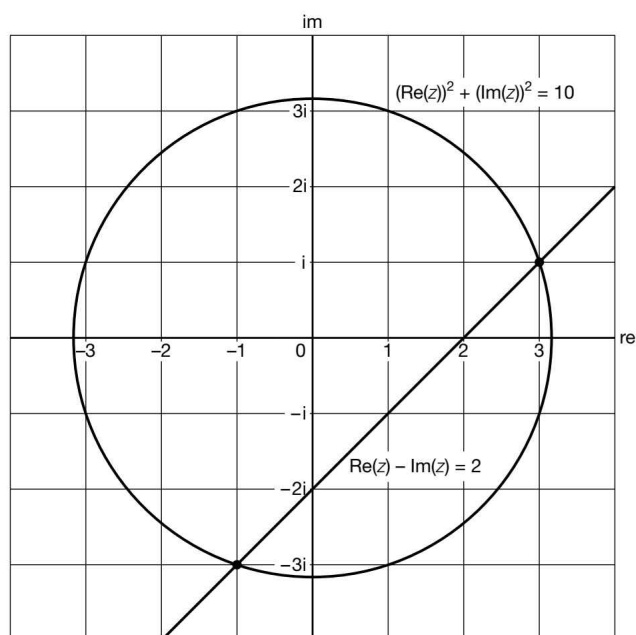


d $(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = 10$

$$|z|^2 = 10$$

$$|z| = \sqrt{10}$$

Dit is de cirkel met middelpunt 0 en straal $\sqrt{3}$.



e $|z + \bar{z}| < 2$

Stel $z = a + bi$.

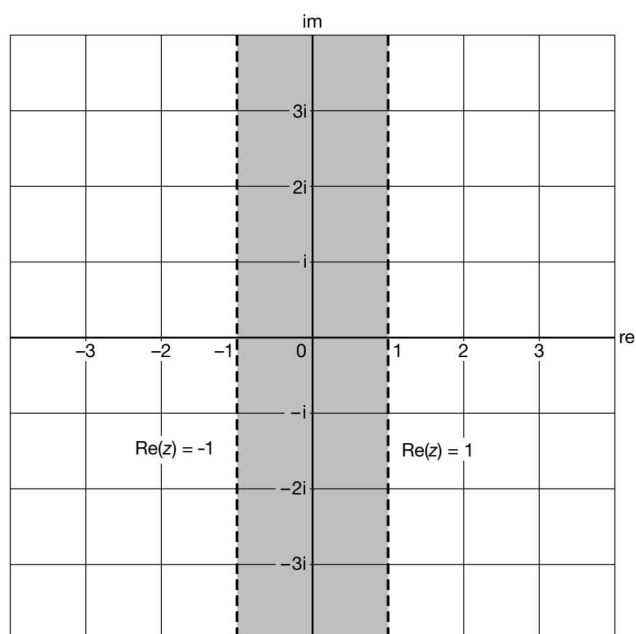
$$|a + bi + a - bi| < 2$$

$$|2a| < 2$$

$$|a| < 1$$

$$-1 < a < 1$$

Dus $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$.



f $|z - \bar{z}| < 4$

Stel $z = a + bi$.

$$|a + bi - (a - bi)| < 4$$

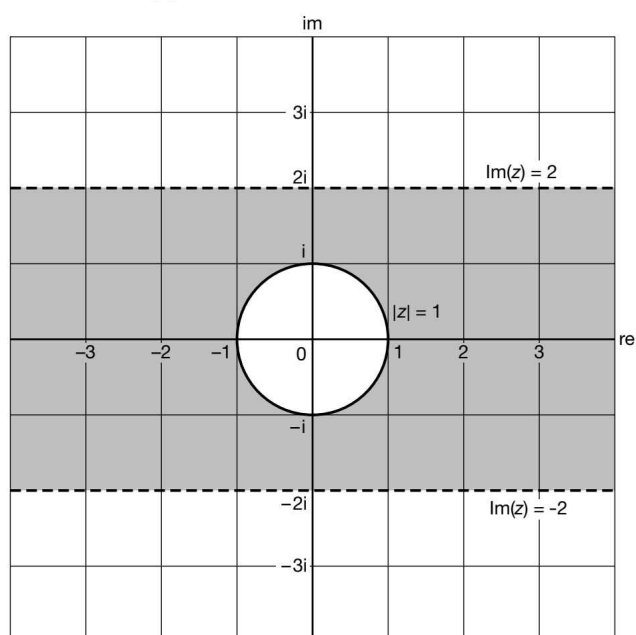
$$|a + bi - a + bi| < 4$$

$$|2bi| < 4$$

$$|b| < 2$$

$$-2 < b < 2$$

Dus $-2 < \operatorname{Im}(z) < 2$.



17
$$\left. \begin{aligned} x_n &= 3x_{n-1} - 5y_{n-1} \text{ geeft } x_{n+1} = 3x_n - 5y_n \\ y_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \\ x_{n+1} &= 3x_n - 5(x_{n-1} + y_{n-1}) \\ x_{n+1} &= 3x_n - 5x_{n-1} - 5y_{n-1} \\ x_n &= 3x_{n-1} - 5y_{n-1} \text{ geeft } 5y_{n-1} &= -x_n + 3x_{n-1} \\ x_{n+1} &= 3x_n - 5x_{n-1} - (-x_n + 3x_{n-1}) \\ x_{n+1} &= 3x_n - 5x_{n-1} + x_n - 3x_{n-1} \\ x_{n+1} &= 4x_n - 8x_{n-1} \\ x_n &= 4x_{n-1} - 8x_{n-2} \end{aligned} \right\}$$

Substitutie van $x_n = g^n$ in $x_n = 4x_{n-1} - 8x_{n-2}$ geeft

$$g^2 - 4g + 8 = 0$$

$$(g - 2)^2 - 4 + 8 = 0$$

$$(g - 2)^2 = -4$$

$$(g - 2)^2 = 4i^2$$

$$g - 2 = 2i \vee g - 2 = -2i$$

$$g = 2 + 2i \vee g = 2 - 2i$$

$$|2 + 2i| = 2\sqrt{2} \text{ en } \arg(2 + 2i) = \frac{1}{4}\pi$$

$$x_n = (A \cos(\frac{1}{4}\pi n) + B \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (2\sqrt{2})^n$$

$$x_0 = 1 \text{ en } y_0 = 2 \text{ geeft } x_1 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -7$$

$$x_0 = 1 \text{ geeft } A = 1$$

$$x_1 = -7 \text{ geeft } (A \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} = -7 \text{ ofwel } 2A + 2B = -7 \left. \vphantom{\begin{aligned} x_1 = -7 \text{ geeft } (A \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} = -7 \text{ ofwel } 2A + 2B = -7 \end{aligned}} \right\} A = 1 \text{ en } B = -4\frac{1}{2}$$

Dus $x_n = (\cos(\frac{1}{4}\pi n) - 4\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (2\sqrt{2})^n$.

$$\left. \begin{aligned} y_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \text{ geeft } y_{n+1} = x_n + y_n \\ x_n &= 3x_{n-1} - 5y_{n-1} \\ y_{n+1} &= x_n + y_n = 3x_{n-1} - 5y_{n-1} + y_n \\ y_{n+1} &= 3x_{n-1} - 5y_{n-1} + y_n \\ y_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \text{ geeft } x_{n-1} &= y_n - y_{n-1} \\ y_{n+1} &= 3(y_n - y_{n-1}) - 5y_{n-1} + y_n \\ y_{n+1} &= 3y_n - 3y_{n-1} - 5y_{n-1} + y_n \\ y_{n+1} &= 4y_n - 8y_{n-1} \\ y_n &= 4y_{n-1} - 8y_{n-2} \end{aligned} \right\}$$

Dus $y_n = (A \cos(\frac{1}{4}\pi n) + B \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (2\sqrt{2})^n$.

$$x_0 = 1 \text{ en } y_0 = 2 \text{ geeft } y_1 = 1 + 2 = 3$$

$$y_0 = 2 \text{ geeft } A = 2$$

$$y_1 = 3 \text{ geeft } (A \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} = 3 \text{ ofwel } 2A + 2B = 3 \left. \vphantom{\begin{aligned} y_1 = 3 \text{ geeft } (A \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} = 3 \text{ ofwel } 2A + 2B = 3 \end{aligned}} \right\} A = 2 \text{ en } B = -\frac{1}{2}$$

Dus $y_n = (2 \cos(\frac{1}{4}\pi n) - \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (2\sqrt{2})^n$.

18 a $|z + 4i|$ is de afstand van z tot $-4i$.

$|z - 4i|$ is de afstand van z tot $4i$.

Dus $|z + 4i| = 3|z - 4i|$.

b $z = a + bi$ geeft

$$|a + bi + 4i| = 3 \cdot |a + bi - 4i|$$

$$|a + (b + 4)i| = 3 \cdot |a + (b - 4)i|$$

$$\sqrt{a^2 + (b + 4)^2} = 3 \cdot \sqrt{a^2 + (b - 4)^2}$$

$$a^2 + (b + 4)^2 = 9(a^2 + (b - 4)^2)$$

$$a^2 + b^2 + 8b + 16 = 9(a^2 + b^2 - 8b + 16)$$

$$a^2 + b^2 + 8b + 16 = 9a^2 + 9b^2 - 72b + 144$$

$$8a^2 + 8b^2 - 80b + 128 = 0$$

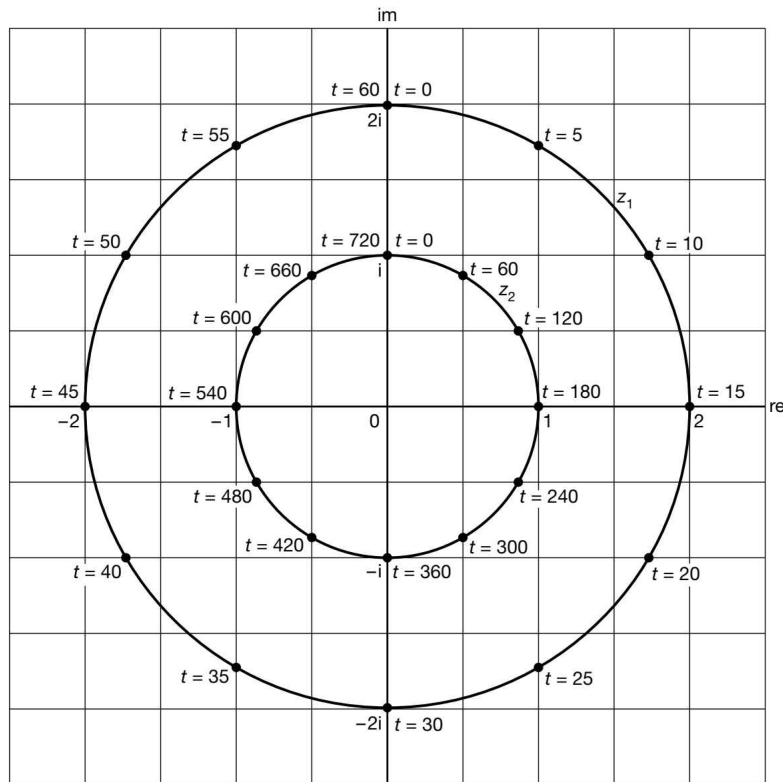
$$a^2 + b^2 - 10b + 16 = 0$$

$$a^2 + (b - 5)^2 - 25 + 16 = 0$$

$$a^2 + (b - 5)^2 = 9$$

Dit is de cirkel met middelpunt $5i$ en straal 3 .

c $|z - 5i| = 3$

Bladzijde 188**19 a,b****c** De wijzers staan op elkaar als

$$\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{30}\pi t = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{360}\pi t \vee \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{30}\pi t + 2\pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{360}\pi t \vee \dots$$

$$t = 0 \vee -\frac{11}{360}\pi t = -2\pi$$

$$t = 0 \vee t = \frac{-2\pi}{-\frac{11}{360}\pi} = 65\frac{5}{11}$$

Dus na $65\frac{5}{11}$ minuten na 12 uur staan de wijzers van een klok voor het eerst op elkaar.
Dat is om $5\frac{5}{11}$ minuten over 1.

d $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{30}\pi t + 9 \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{360}\pi t$

$$-\frac{11}{360}\pi t = -18\pi$$

$$t = \frac{-18\pi}{-\frac{11}{360}\pi} = 589\frac{1}{11}$$

Dus na $589\frac{1}{11}$ minuten na 12 uur staan de wijzers van een klok op elkaar.
Dat is na 9 uur en $49\frac{1}{11}$ minuut.
Dus om $10\frac{10}{11}$ minuten voor 10 staan de wijzers van een klok op elkaar.

e $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{30}\pi t - \pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{360}\pi t$

$$-\frac{11}{360}\pi t = \pi$$

$$t = \frac{\pi}{-\frac{11}{360}\pi} = -32\frac{8}{11}$$

Dus $32\frac{8}{11}$ minuten voor 12 uur ofwel om $27\frac{3}{11}$ minuten over 11 staan de wijzers van een klok voor het laatst voor 12 uur in elkaars verlengde.

20 Bij de resulterende snelheid hoort het complexe getal $z_1 = 300(\cos(37^\circ) + i \sin(37^\circ))$.Bij de wind hoort het complexe getal $z_2 = 60(\cos(135^\circ) + i \sin(135^\circ))$.Voor de snelheid van het vliegtuig geldt $z_3 = z_1 - z_2$.De GR geeft $|z_1 - z_2| \approx 314$ en $\arg(z_1 - z_2) \approx 26^\circ$.De piloot moet 314 km/uur vliegen op een koers van $90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$.

- 21 a** $z = \ln(-i) = \ln(e^{-\frac{1}{2}\pi i}) = -\frac{1}{2}\pi i$
- b** $z = \log\left(-\frac{1}{100}\right) = \frac{\ln\left(-\frac{1}{100}\right)}{\ln(10)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{100} \cdot e^{\pi i}\right)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10^{-2}) + \ln(e^{\pi i})}{\ln(10)} = \frac{-2\ln(10) + \pi i}{\ln(10)}$
- c** $z = {}^3\log(-27 + 27i) = \frac{\ln(-27 + 27i)}{\ln(3)} = \frac{\ln(27\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i})}{\ln(3)} = \frac{\ln(27\sqrt{2}) + \ln(e^{\frac{3}{4}\pi i})}{\ln(3)} = \frac{\ln(27\sqrt{2}) + \frac{3}{4}\pi i}{\ln(3)}$
- d** $z = \ln(-e) = \ln(-1) + \ln(e) = \ln(e^{\pi i}) + 1 = 1 + \pi i$
- e** $z = \ln(i^i) = i \ln(i) = i \ln(e^{\frac{1}{2}\pi i}) = i \cdot \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi$
- f** $\ln(i^i) = -\frac{1}{2}\pi$ geeft $e^{\ln(i^i)} = e^{-\frac{1}{2}\pi}$, dus $i^i = e^{-\frac{1}{2}\pi}$.

Bladzijde 189

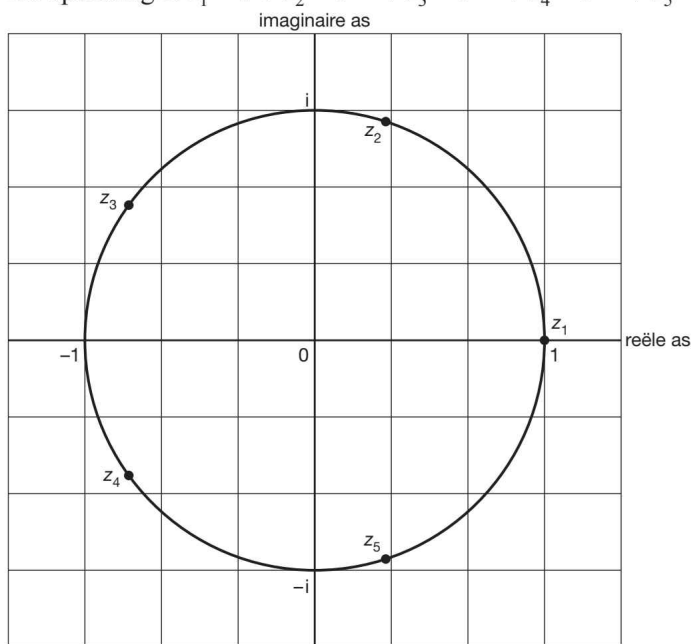
- 22** Bij de krachten $\vec{F}_z$, $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ horen de complexe getallen
 $z_z = -500i$
 $z_1 = 630(\cos(350^\circ) + i\sin(350^\circ))$
 en z_2 .
 $z_z + z_1 + z_2 = 0$ geeft $z_2 = -z_z - z_1$
 De GR geeft $|-z_z - z_1| \approx 870$ en $\arg(-z_z - z_1) \approx 136^\circ$.
 Dus de grootte van $\vec{F}_2 \approx 870$ N en de hoek tussen $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_z$ is $270^\circ - 136^\circ = 134^\circ$.

- 23 a** $\arg(z^5) = \arg(1) = 0$, dus één van de oplossingen heeft als argument 0.

$|z^5| = |1| = 1$, dus de straal van de cirkel is 1.

De argumenten verschillen steeds $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$ van elkaar.

De oplossing is $z_1 = 1 \vee z_2 = e^{\frac{2}{5}\pi i} \vee z_3 = e^{\frac{4}{5}\pi i} \vee z_4 = e^{\frac{6}{5}\pi i} \vee z_5 = e^{\frac{8}{5}\pi i}$.



- b** Zie a.

$$z_1 = 1 = e^0 = \cos(0) + i\sin(0)$$

$$z_2 = e^{\frac{2}{5}\pi i} = \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)$$

$$z_3 = e^{\frac{4}{5}\pi i} = \cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{5}\pi\right)$$

$$z_4 = e^{\frac{6}{5}\pi i} = \cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{6}{5}\pi\right)$$

$$z_5 = e^{\frac{8}{5}\pi i} = \cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{8}{5}\pi\right)$$

Hieruit volgt $\sin(0) + \sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{4}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{6}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{8}{5}\pi\right) = 0$.

$\sin(0) = 0$, dus $\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{4}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{6}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{8}{5}\pi\right) = 0$.

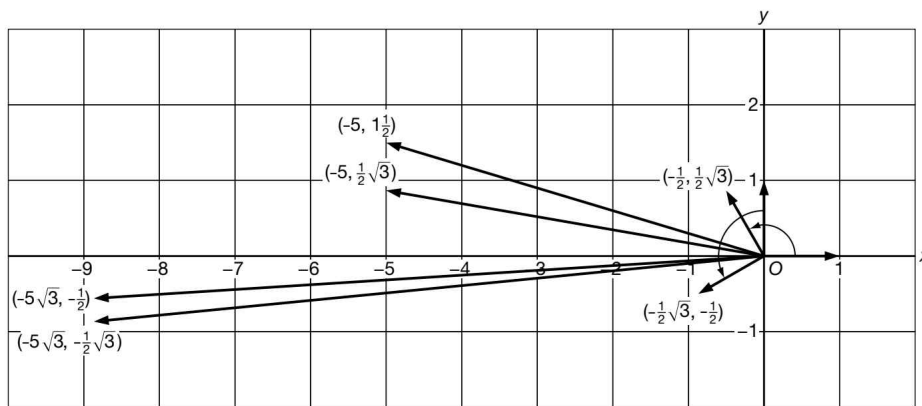
Ook geldt $\cos(0) + \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = 0$.

$\cos(0) = 1$, dus $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{8}{5}\pi\right) = -1$.

c
$$\sum_{x=1}^{10} \left(\sin\left(\frac{2k\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right) \right) = \sum_{x=1}^{10} \sin\left(\frac{2k\pi}{10}\right) + \sum_{x=1}^{10} \cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right) = 0 + 0 = 0$$

11 Lineaire algebra

24 a

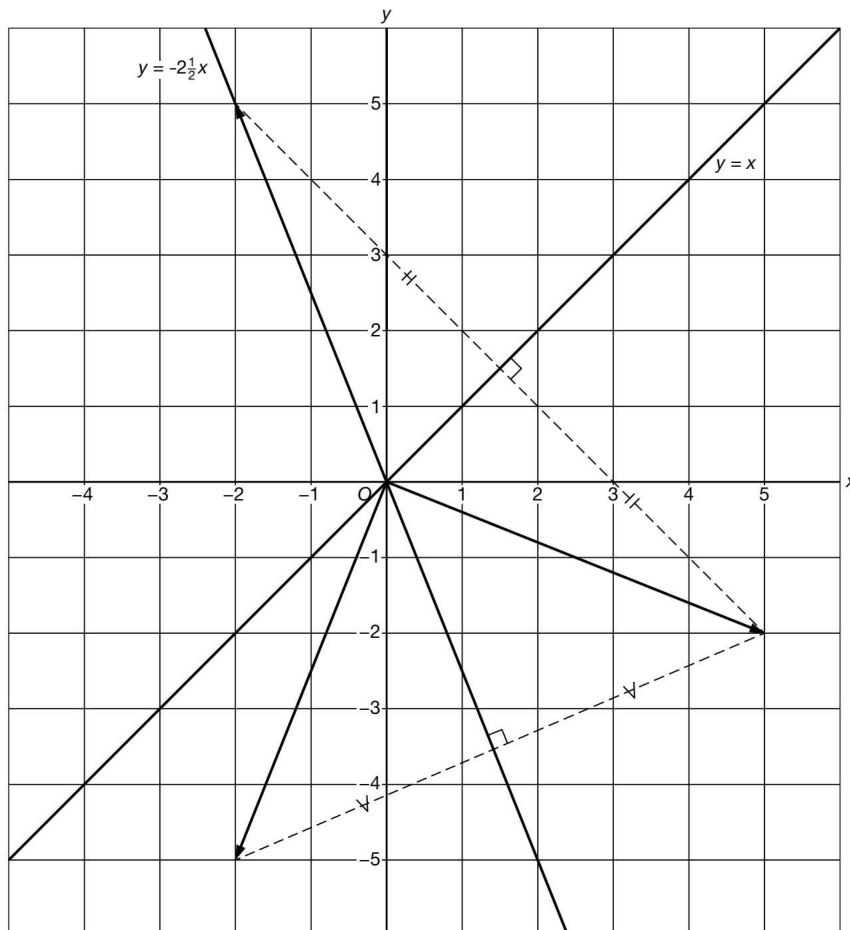


$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -5 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -5\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

dus $M = \begin{pmatrix} -5 & -5\sqrt{3} \\ 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Dit geeft $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 & -5\sqrt{3} \\ 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 - 75\sqrt{3} \\ -6 - 7\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, dus $A' (20 - 75\sqrt{3}, -6 - 7\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

b



Het beeld van $(-2, 5)$ is $(5, -2)$.

Het beeld van $(-2, -5)$ is $(-2, 5)$.

Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ geeft $-2a + 5b = 5$ en $-2c + 5d = -2$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ geeft $-2a - 5b = -2$ en $-2c - 5d = 5$.

$$\begin{cases} -2a + 5b = 5 \\ -2a - 5b = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \hline 10b = 7 \\ b = \frac{7}{10} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} -2a + 5 \cdot \frac{7}{10} = 5, \text{ dus } a = -\frac{3}{4} \\ -2a + 5b = 5 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} -2c + 5d = -2 \\ -2c - 5d = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \hline 10d = -7 \\ d = -\frac{7}{10} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} -2c + 5 \cdot -\frac{7}{10} = -2, \text{ dus } c = -\frac{3}{4} \\ -2c + 5d = -2 \end{array} \right\}$$

$$M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{7}{10} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{19}{20} \\ -1\frac{11}{20} \end{pmatrix}, \text{ dus } B'(-2\frac{19}{20}, -1\frac{11}{20}).$$

25 a $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(3 - \lambda) - 0 \cdot 1 = 0$$

$$(3 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

$$\lambda = 3$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 3$ volgen uit $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $x + 3y = 3y$ ofwel $x = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda = 3$ is $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b $(1, 1)$ ligt op k .

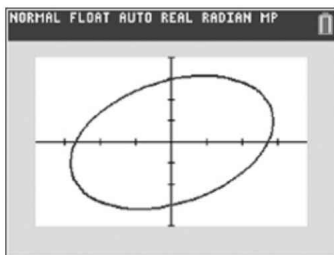
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dus } (3, 4) \text{ op } l.$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{3}x$.

c De coördinaten van een punt P op de eenheidscirkel zijn gegeven door $P(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, met α in radialen.

$$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) + 3 \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \text{ dus } K: x = 3 \cos(\alpha) \wedge y = \cos(\alpha) + 3 \sin(\alpha).$$

Invoeren van de parametervoorstelling op de GR geeft



Snijpunten met de x -as, dus $y = 0$ geeft $\cos(\alpha) + 3 \sin(\alpha) = 0$.

Voer in $y_1 = \cos(x) + 3 \sin(x)$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 2,81\dots$ en $x = 5,96\dots$

De snijpunten met de x -as zijn $(3 \cos(2,81\dots); 0) \approx (-2,85; 0)$ en $(3 \cos(5,96\dots); 0) \approx (2,85; 0)$.

Bladzijde 190

26 a $\det(M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 3 \cdot -2 \cdot 1 = -6$

b $M = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 27 & -12 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 & 27 & -12 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix}, \text{ dus } A'(204, 40, 35).$$

c $M^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 & 27 & -12 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\frac{1}{2} \\ 3\frac{2}{3} \\ 8\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ dus het origineel van } B(2, 1, 6) \text{ is } (-3\frac{1}{2}, 3\frac{2}{3}, 8\frac{2}{3}).$

- 27 a** De lijn met richtingscoëfficiënt 2 die door (1, 0) gaat heeft vergelijking $y = 2x - 2$.
 $3x = 2x - 2$ geeft $x = -2$, en dit geeft $y = 3 \cdot -2 = -6$.

Dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

De lijn met richtingscoëfficiënt 2 die door (0, 1) gaat heeft vergelijking $y = 2x + 1$.
 $3x = 2x + 1$ geeft $x = 1$, en dit geeft $y = 3 \cdot 1 = 3$.

Dus $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dus $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

b $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } A'(-1, -3).$

c $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ geeft $-2x + y = 2$ en $-6x + 3y = 6$.

Het stelsel $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ -6x + 3y = 6 \end{cases}$ is onbepaald en heeft oneindig veel oplossingen.

De originelen van $B(2, 6)$ bij deze afbeelding liggen op de lijn $-2x + y = 2$, ofwel $y = 2x + 2$.

28 a $A^2 = M$ ofwel $A \cdot A = M$ met $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $M = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$ geeft

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dit geeft de vergelijkingen $a^2 + bc = 17$, $ab + bd = 8$, $ac + cd = 16$ en $bc + d^2 = 9$.

b A is diagonaliseerbaar, dus $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Dit geeft $A^2 = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$.

$A^2 = M$, dus ook $M = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$.

Hieruit volgt dat de kwadraten van de eigenwaarden van A gelijk zijn aan de eigenwaarden van M , en dat A en M dezelfde eigenvectoren hebben.

c $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & 8 \\ 16 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(17 - \lambda)(9 - \lambda) - 8 \cdot 16 = 0$$

$$153 - 17\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 128 = 0$$

$$\lambda^2 - 26\lambda + 25 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 25) = 0$$

$$\lambda = 1 \vee \lambda = 25$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 1$ volgen uit $\begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $17x + 8y = x$ ofwel $16x + 8y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 1$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 25$ volgen uit $\begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 25 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $17x + 8y = 25x$ ofwel $-8x + 8y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 25$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dus de eigenwaarden van A zijn $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 5$ en $\lambda = -5$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gebruik de GR om de oplossingen van de vergelijking $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$ te berekenen.

$$\text{Met } D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ krijg je de oplossing } A_1 = P \cdot D_1 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} \\ 2\frac{2}{3} & 2\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Met } D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ krijg je de oplossing } A_2 = P \cdot D_2 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Met } D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ krijg je de oplossing } A_3 = P \cdot D_3 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Met } D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ krijg je de oplossing } A_4 = P \cdot D_4 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -3\frac{2}{3} & -1\frac{1}{3} \\ -2\frac{2}{3} & -2\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

d Het stelsel is te schrijven als $\begin{pmatrix} A_t \\ B_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{t-1} \\ B_{t-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{t-1} \\ B_{t-1} \end{pmatrix}.$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \cdot I\right) = 0 \text{ geeft}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(5-\lambda) - 3 \cdot 3 = 0$$

$$25 - 10\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = 8$$

$$\text{De eigenvectoren bij } \lambda = 2 \text{ volgen uit } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt $5x + 3y = 2x$ ofwel $3x + 3y = 0$.

$$\text{Dus een eigenvector bij } \lambda_1 = 2 \text{ is } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De eigenvectoren bij } \lambda = 8 \text{ volgen uit } \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt $5x + 3y = 8x$ ofwel $-3x + 3y = 0$.

$$\text{Dus een eigenvector bij } \lambda_2 = 8 \text{ is } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_2^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1600 \\ 2400 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 636 \\ 778 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_2^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1600 \\ 2400 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 778 \\ 636 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_2^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1600 \\ 2400 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -778 \\ -636 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_2^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1600 \\ 2400 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -636 \\ -778 \end{pmatrix}$$

Dus $A_2^1 \approx 636$ en $B_2^1 \approx 778$ of $A_2^1 \approx 778$ en $B_2^1 \approx 636$.

Bladzijde 191

29 a Een rotatie om de oorsprong over 90° .

b Omdat de afbeelding een rotatie om de oorsprong over 90° is, bestaat er geen lijn waarbij M alle punten van de lijn op de lijn zelf afbeeldt. M heeft dus geen eigenvectoren, en dus geen reële eigenwaarden.

c $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda^2 = i^2$$

$$\lambda = i \vee \lambda = -i$$

d De eigenvectoren bij $\lambda = i$ volgen uit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $-y = ix$ ofwel $ix + y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = i$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = -i$ volgen uit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $-y = -ix$ ofwel $ix - y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = -i$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

e $P \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ geeft $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt $ai + c = 1$, $bi + d = 0$, $a + ci = 0$ en $b + di = 1$.

$a + ci = 0$ geeft $a = -ci$

Substitutie in $ai + c = 1$ geeft $-ci^2 + c = 1$ ofwel $c + c = 1$, dus $c = \frac{1}{2}$.

$c = \frac{1}{2}$ geeft $a = -\frac{1}{2}i$

$bi + d = 0$ geeft $d = -bi$

Substitutie in $b + di = 1$ geeft $b - bi^2 = 1$ ofwel $b + b = 1$, dus $b = \frac{1}{2}$.

$b = \frac{1}{2}$ geeft $d = -\frac{1}{2}i$

Dus $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

f $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i^n & 0 \\ 0 & (-i)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^{n+1} & (-i)^n \\ i^n & -(-i)^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} =$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i^{n+2} + (-i)^n & i^{n+1} + (-i)^{n+1} \\ -i^{n+1} - (-i)^{n+1} & i^n - (-i)^{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^n + (-i)^n & i^{n+1} + (-i)^{n+1} \\ -i^{n+1} - (-i)^{n+1} & i^n + (-i)^n \end{pmatrix}$$

30 a $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c $P = N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$

- d Stel A is het origineel en B is het beeld van A bij spiegeling in de lijn $y = 2$.

Zie de figuur hiernaast.

Er geldt $x_B = x_A$.

Verder geldt $AB = y_B - y_A$, en dus $BS = \frac{1}{2}(y_B - y_A) = \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_A$.

Dus $y_B = 2 + \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_A$

$$\frac{1}{2}y_B = 2 - \frac{1}{2}y_A$$

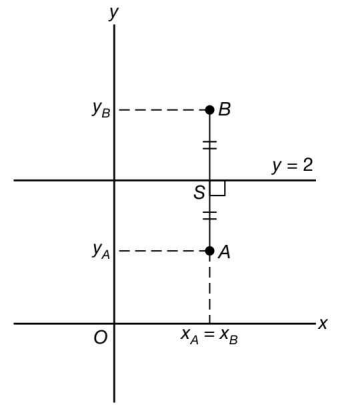
$$y_B = 4 - y_A$$

Ga weer uit van het punt $(x_A, y_A, 1)$.

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ 4 - y_A \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ 4 - y_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ 4 - y_A \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Bladzijde 192

31 $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{c}$

$$M \cdot \vec{c} = M \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = M \cdot \vec{a} + M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ dus } C'(2, 7, 2).$$

32 a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ geeft $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

$$M = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ a & 0 & c \\ 2a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a - b + 1\frac{1}{2}c & a - c \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{2}c & a - c \\ -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c & -a - \frac{1}{2}b + 1\frac{1}{2}c & 2a - c \end{pmatrix}$$

b $M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ geeft $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a - b + 1\frac{1}{2}c & a - c \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{2}c & a - c \\ -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c & -a - \frac{1}{2}b + 1\frac{1}{2}c & 2a - c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt het stelsel
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a - b + 1\frac{1}{2}c = -4 \\ -\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{2}c = 0 \\ -a - \frac{1}{2}b + 1\frac{1}{2}c = -5 \end{cases}$$

Invoeren van de bijbehorende matrix $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1\frac{1}{2} & -4 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix}$ en de optie rref(TI) of Rref (Casio) geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dus $a = 6$, $b = 4$ en $c = 2$.

Dit geeft $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & 10 \end{pmatrix}$.

$$M \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 49 \end{pmatrix}, \text{ dus } B'(24, 20, 49).$$

33 a Bij het stelsel hoort de matrix

$$W = \begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} m & b & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ b \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$W^2 = \begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} m & b & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ b \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,44 & 0,28 & 0,28 \\ 0,36 & 0,40 & 0,36 \\ 0,20 & 0,32 & 0,36 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De kans dat het overmorgen weer mooi weer is, is 0,44.

b

$$W^4 = \begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} m & b & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ b \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,3504 & 0,3248 & 0,3248 \\ 0,3744 & 0,376 & 0,3744 \\ 0,2752 & 0,2992 & 0,3008 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De gevraagde kans is 0,3008.

c Voer de matrix W in op de GR, en voer vervolgens in $y_1 = \det([A] - x \cdot \text{identity}(3))$ (TI) of $y_1 = \text{Det}(\text{Mat } A - x \cdot \text{Identity}(3))$ (Casio).

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 0,2$, $x = 0,4$ en $x = 1$.

Dus de eigenwaarden zijn $\lambda = 0,2$, $\lambda = 0,4$ en $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ geeft het stelsel } \begin{cases} 0,6x + 0,2y + 0,2z = 0,2x \\ 0,3x + 0,5y + 0,3z = 0,2y \text{ ofwel} \\ 0,1x + 0,3y + 0,5z = 0,2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,4x + 0,2y + 0,2z = 0 \\ 0,3x + 0,3y + 0,3z = 0 \\ 0,1x + 0,3y + 0,3z = 0 \end{cases}$$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 0,2$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ geeft het stelsel } \begin{cases} 0,6x + 0,2y + 0,2z = 0,4x \\ 0,3x + 0,5y + 0,3z = 0,4y \text{ ofwel} \\ 0,1x + 0,3y + 0,5z = 0,4z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,2x + 0,2y + 0,2z = 0 \\ 0,3x + 0,1y + 0,3z = 0 \\ 0,1x + 0,3y + 0,1z = 0 \end{cases}$$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 0,4$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ geeft het stelsel } \begin{cases} 0,6x + 0,2y + 0,2z = x \\ 0,3x + 0,5y + 0,3z = y \text{ ofwel} \\ 0,1x + 0,3y + 0,5z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,4x + 0,2y + 0,2z = 0 \\ 0,3x - 0,5y + 0,3z = 0 \\ 0,1x + 0,3y - 0,5z = 0 \end{cases}$$

Invoeren van de matrix $\begin{pmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & -0,5 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$ en de optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{8}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Hieruit volgt } x - \frac{8}{7}z = 0 \text{ ofwel } x = \frac{8}{7}z, \text{ en } y - \frac{9}{7}z = 0 \text{ ofwel } y = \frac{9}{7}z.$$

$z = 7$ geeft bij $\lambda_3 = 1$ de eigenvector $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

- d** Bij de eigenwaarde 1 is er een stabiele situatie, dus hiermee kan het percentage mooie dagen in mei worden bepaald. Een bijbehorende eigenvector is $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

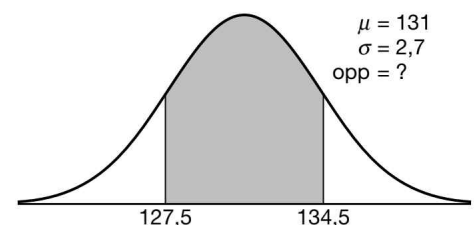
$8 + 9 + 7 = 24$, dus ook $\begin{pmatrix} \frac{8}{24} \\ \frac{9}{24} \\ \frac{7}{24} \end{pmatrix}$ is een eigenvector bij eigenwaarde 1.

Dus het percentage mooie dagen in mei is $\frac{8}{24} \times 100\% \approx 33,3\%$.

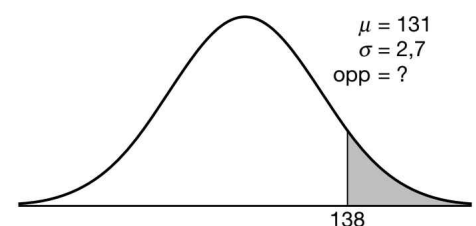
12 Continue kansverdelingen

Bladzijde 193

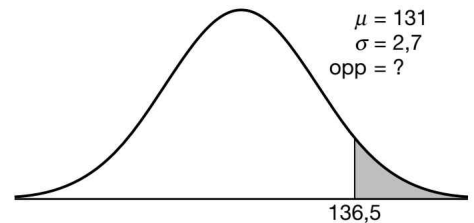
- 34 a** Normale verdeling met $\mu = 131$ °Oe en $\sigma = 2,7$ °Oe.
opp = normalcdf(127,5, 134,5, 131, 2,7) $\approx 0,805$
Dus van 80,5%.



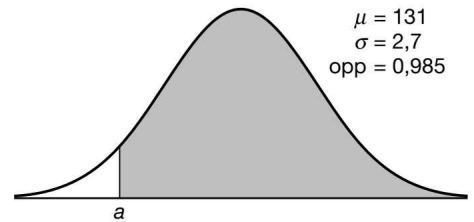
- b** X = het aantal druiven met een suikergehalte van meer dan 138 °Oe.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 5$ en
 $p = \text{normalcdf}(138, 10^9, 131, 2,7) = 0,0047\dots$
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \text{binompdf}(5, 0,0047\dots, 0) \approx 0,024$



- c $\text{opp} = \text{normalcdf}(136.5, 10^{99}, 131, 2.7) \approx 0,021$
 $0,021 > 0,02$, dus Goettelmann heeft geen gelijk.



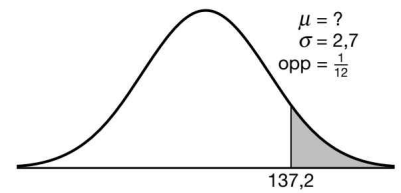
- d opp links van a is $1 - 0,985 = 0,015$.
 $a = \text{invNorm}(0,015, 131, 2.7) \approx 125,1$
 Dus de wettelijk vastgestelde ondergrens ligt hoger dan 125°Oe .



- e Normale verdeling met onbekende μ en $\sigma = 2,7^\circ\text{Oe}$.
 $\text{normalcdf}(137.2, 10^{99}, \mu, 2.7) = \frac{1}{12}$

Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(137.2, 10^{99}, x, 2.7)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(137.2, 10^{99}, 2.7, x)$ (Casio) en $y_2 = \frac{1}{12}$.
 Intersect geeft $x \approx 133,5$.

Dus op 4 december bevatten de druiven gemiddeld $133,5^\circ\text{Oe}$ suiker.

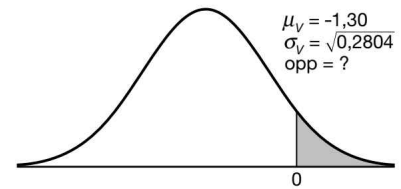


- 35 De totale dikte T in cm van 20 tabletten is normaal verdeeld met
 $\mu_T = 20 \cdot 0,81 = 16,20$ en $\sigma_T = \sqrt{20} \cdot 0,05 = 0,1\sqrt{5}$.
 De tabletten passen niet in een buisje als $T > L$ ofwel $T - L > 0$, dus
 $V > 0$ met $V = T - L$.

V is normaal verdeeld met $\mu_V = 16,20 - 17,50 = -1,30$ cm en

$$\sigma_V = \sqrt{(0,1\sqrt{5})^2 + 0,48^2} = \sqrt{0,2804}.$$

$$P(\text{de tabletten passen niet in een buisje}) = P(V > 0) = \text{normalcdf}(0, 10^{99}, -1,30, \sqrt{0,2804}) \approx 0,007$$



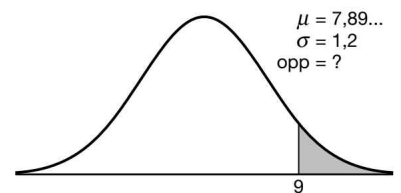
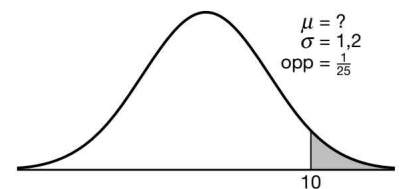
Bladzijde 194

- 36 Normale verdeling met onbekende μ en $\sigma = 1,2$ uur.
 $\text{normalcdf}(10, 10^{99}, \mu, 1.2) = \frac{1}{25}$

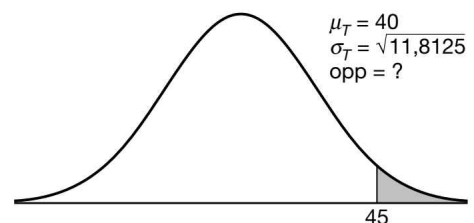
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(10, 10^{99}, x, 1.2)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(10, 10^{99}, 1.2, x)$ (Casio) en $y_2 = \frac{1}{25}$.
 Intersect geeft $x = 7,89\dots$, dus $\mu = 7,89\dots$

$$P(\text{levensduur is meer dan 9 uur}) = \text{normalcdf}(9, 10^{99}, 7,89\dots, 1,2) \approx 0,179$$

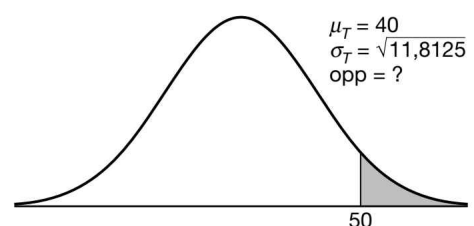
Dus 17,9%.



- 37 a De totale fietstijd T in minuten is normaal verdeeld met
 $\mu_T = 18 + 7 + 15 = 40$ en $\sigma_T = \sqrt{2,5^2 + 1,25^2 + 2^2} = \sqrt{11,8125}$.
 $P(\text{totale fietstijd is meer dan drie kwartier}) = P(T > 45) =$
 $\text{normalcdf}(45, 10^{99}, 40, \sqrt{11,8125}) \approx 0,073$
 De gevraagde kans is 0,073.



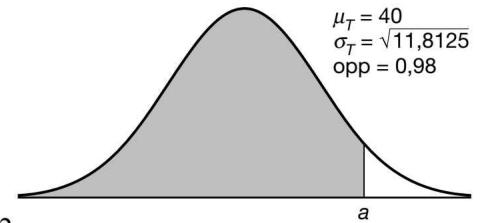
- b Van 7:25 uur tot 8:15 uur is 50 minuten.
 X = het aantal keer dat ze te laat op school komt.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 35$ en
 $p = \text{normalcdf}(50, 10^{99}, 40, \sqrt{11,8125}) = 0,0018\dots$
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \text{binompdf}(35, 0,0018\dots, 0) \approx 0,061$



c $a = \text{invNorm}(0.98, 40, \sqrt{11.8125}) \approx 47.06$

Dus minstens 47 minuten voor 8:15.

Dat is dus voor 7:28 uur.



38 a De primitieven van $g_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{t-12}} = \frac{1}{a}(t-12)^{-\frac{1}{2}}$ zijn $G_a(t) = \frac{2}{a}(t-12)^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{a}\sqrt{t-12} + c$.

Er moet gelden $G(12) = 0$, dus $\frac{2}{a} \cdot 0 + c = 0$ en dit geeft $c = 0$.

Dus $G_a(t) = \frac{2}{a}\sqrt{t-12}$.

De primitieven van $h(t) = \frac{8}{5(t-12)^2} = \frac{8}{5}(t-12)^{-2}$ zijn $H(t) = -\frac{8}{5}(t-12)^{-1} + d = -\frac{8}{5(t-12)} + d$.

Er moet gelden $H(20) = 1$, dus $-\frac{8}{5 \cdot 8} + d = 1$ ofwel $-\frac{1}{5} + d = 1$, dus $d = 1\frac{1}{5}$.

Dus $H(t) = -\frac{8}{5(t-12)} + 1\frac{1}{5}$.

Verder moet gelden $G_a(16) = H(16)$

$$\frac{2}{a}\sqrt{16-12} = -\frac{8}{5(16-12)} + 1\frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{a} \cdot 2 = -\frac{8}{5 \cdot 4} + 1\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{a} = -\frac{2}{5} + 1\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{a} = \frac{4}{5}$$

$$a = 5$$

Dus $G(t) = \frac{2}{5}\sqrt{t-12}$.

$$\text{Dus } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq 12 \\ \frac{2}{5}\sqrt{t-12} & \text{voor } 12 < t < 16 \\ -\frac{8}{5(t-12)} + 1\frac{1}{5} & \text{voor } 16 \leq t < 20 \\ 1 & \text{voor } t \geq 20 \end{cases}$$

b $P(15 < T < 17) = P(T < 17) - P(T \leq 15) = F(17) - F(15) = -\frac{8}{5(17-12)} + 1\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{15-12} \approx 0,187$

c X = het aantal keer dat Simone 's maandags voor één uur wordt gebeld.

X is binomiaal verdeeld met $n = 4$ en $p = P(T < 13) = F(13) = \frac{2}{5}\sqrt{13-12} = \frac{2}{5}$.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \text{binomcdf}(4, \frac{2}{5}, 1) \approx 0,525$

d $P(T > u) = \frac{1}{10}$ ofwel $1 - P(T \leq u) = \frac{1}{10}$ ofwel $P(T \leq u) = \frac{9}{10}$

$F(16) = 0,8$, dus los op $-\frac{8}{5(u-12)} + 1\frac{1}{5} = \frac{9}{10}$

$$-\frac{8}{5u-60} = -\frac{3}{10}$$

$$15u - 180 = 80$$

$$15u = 260$$

$$u = 17\frac{1}{3}$$

Dus 17:20 uur.

Bladzijde 195

39 a Y = het aantal keer dat een getal groter dan $E(X)$ wordt gekozen.

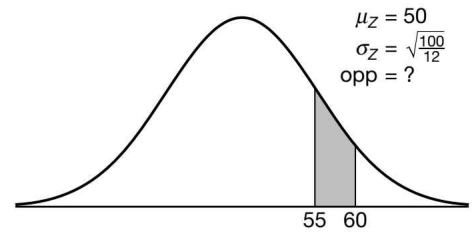
Y is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = \frac{1}{2}$.

$P(Y > 50) = 1 - P(Y \leq 50) = 1 - \text{binomcdf}(100, \frac{1}{2}, 50) \approx 0,460$

b Z = de som van de getallen.

Z is normaal verdeeld met $\mu_Z = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ en $\sigma_Z = \sqrt{100} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{100}{12}}$.

$$P(55 < Z < 60) = \text{normalcdf}\left(55, 60, 50, \sqrt{\frac{100}{12}}\right) \approx 0,041$$



c S = de som van de eerste 45 getallen.

S is normaal verdeeld met $\mu_S = 45 \cdot \frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$ en $\sigma_S = \sqrt{45} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{45}{12}}$.

T = de som van de laatste 55 getallen.

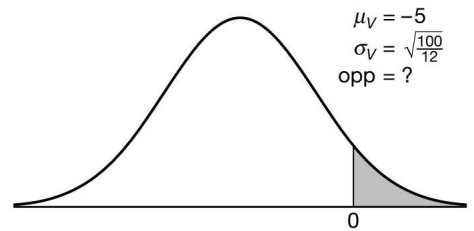
T is normaal verdeeld met $\mu_T = 55 \cdot \frac{1}{2} = 27\frac{1}{2}$ en $\sigma_T = \sqrt{55} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{55}{12}}$.

De som van de eerste 45 getallen is groter dan de som van de rest van de getallen als $S > T$ ofwel $S - T > 0$, dus $V > 0$ met $V = S - T$.

V is normaal verdeeld met $\mu_V = 22\frac{1}{2} - 27\frac{1}{2} = -5$ en

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{45}{12}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{55}{12}}\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{12} + \frac{55}{12}} = \sqrt{\frac{100}{12}}.$$

De gevraagde kans is $P(V > 0) = \text{normalcdf}\left(0, 10^9, -5, \sqrt{\frac{100}{12}}\right) \approx 0,042$.



d $\bar{R}$ = het gemiddelde van Roos bij het 50 keer uitvoeren van het experiment.

$\bar{R}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{R}} = \frac{1}{2}$ en $\sigma_{\bar{R}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{12}}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{1}{600}}$.

$\bar{M}$ = het gemiddelde van Maud bij het 50 keer uitvoeren van het experiment.

$\bar{M}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{M}} = \frac{1}{2}$ en $\sigma_{\bar{M}} = \sqrt{\frac{1}{600}}$.

Het gemiddelde van Roos wijkt meer dan $\frac{1}{12}$ af van het gemiddelde van Maud

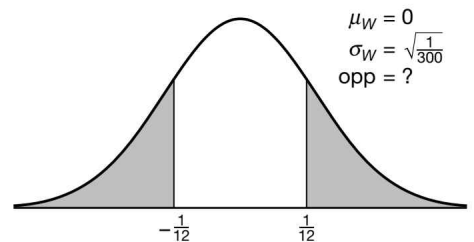
als $\bar{R} - \bar{M} < -\frac{1}{12}$ of $\bar{R} - \bar{M} > \frac{1}{12}$, dus als $W < -\frac{1}{12}$ of $W > \frac{1}{12}$ met $W = \bar{R} - \bar{M}$.

W is normaal verdeeld met $\mu_W = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ en

$$\sigma_W = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{600}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{600}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{600} + \frac{1}{600}} = \sqrt{\frac{1}{300}}.$$

De gevraagde kans is $P(W < -\frac{1}{12} \vee W > \frac{1}{12}) =$

$$2 \cdot \text{normalcdf}\left(\frac{1}{12}, 10^9, 0, \sqrt{\frac{1}{300}}\right) \approx 0,149.$$



40 a X_1 en X_2 zijn onafhankelijk, dus $P(X_1 < x \wedge X_2 < x) = P(X_1 < x) \cdot P(X_2 < x)$.

Omdat X = het minimum van X_1 en X_2 , is $P(X < x) = P(X_1 < x \wedge X_2 < x) = P(X_1 < x) \cdot P(X_2 < x)$.

$$P(X_1 < x) = 1 - e^{-2x}$$

$$P(X_2 < x) = 1 - e^{-2x}$$

$$\text{Dus } P(X < x) = (1 - e^{-2x}) \cdot (1 - e^{-2x}) = 1 - 2e^{-2x} + e^{-4x}.$$

$$\text{Dit geeft } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 - 2e^{-2x} + e^{-4x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

b $P(Y < y) = P(Y_1 + Y_2 < y) = 1 - e^{-3y} - 3ye^{-3y}$

$$\text{Dit geeft } F(y) = \begin{cases} 0 & \text{voor } y < 0 \\ 1 - e^{-3y} - 3ye^{-3y} & \text{voor } y \geq 0 \end{cases}$$

41 a X = het aantal vulkaanuitbarstingen in 4 weken.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 28 \cdot \frac{60}{365} = \frac{1680}{365}$.

$$P(X = 5) = \text{poissonpdf}\left(\frac{1680}{365}, 5\right) \approx 0,173$$

b $P(T + T + T + T + T < 4) = P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{poissoncdf}\left(\frac{1680}{365}, 4\right) \approx 0,487$

c $P(T > 7) = 1 - P(T \leq 7) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{60}{365} \cdot 7}\right) = e^{-\frac{420}{365}}$

De gevraagde kans is $\left(e^{-\frac{420}{365}}\right)^4 \approx 0,010$.

d Y = het aantal vulkaanuitbarstingen per dag.

Y is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{60}{365}$.

$P(T + T + T < d) = 0,25$ ofwel $P(Y \geq 3) = 0,25$ ofwel $1 - P(Y \leq 2) = 0,25$

geeft $1 - \text{poissoncdf}(\lambda, 2) = 0,25$.

Voer in $y_1 = 1 - \text{poissoncdf}(x, 2)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{PoissonCD}(2, x)$ (Casio) en $y_2 = 0,25$.

Intersect geeft $x = 1,72\dots$, dus $\lambda = 1,72\dots$

Op $[0, 1]$ is $\lambda = \frac{60}{365}$ en op $[0, x]$ is $\lambda = 1,72\dots$

Dit geeft $x \cdot \frac{60}{365} = 1,72\dots$ ofwel $x = \frac{365}{60} \cdot 1,72\dots \approx 10,5$.

e $P(500 < T + T + \dots + T < 700) = P(T + T + \dots + T < 700) - P(T + T + \dots + T \leq 500)$

A = het aantal vulkaanuitbarstingen in 500 dagen.

A is poissonverdeeld met $\lambda = 500 \cdot \frac{60}{365} = \frac{30000}{365}$.

$P(T + T + \dots + T \leq 500) = P(A \geq 100) = 1 - P(A \leq 99) = 1 - \text{poissoncdf}(\frac{30000}{365}, 99)$

B = het aantal vulkaanuitbarstingen in 700 dagen.

B is poissonverdeeld met $\lambda = 700 \cdot \frac{60}{365} = \frac{42000}{365}$.

$P(T + T + \dots + T < 700) = P(B \geq 100) = 1 - P(B \leq 99) = 1 - \text{poissoncdf}(\frac{42000}{365}, 99)$

Dus $P(500 < T + T + \dots + T < 700) = P(T + T + \dots + T < 700) - P(T + T + \dots + T \leq 500) =$

$1 - \text{poissoncdf}(\frac{42000}{365}, 99) - (1 - \text{poissoncdf}(\frac{30000}{365}, 99)) =$

$\text{poissoncdf}(\frac{30000}{365}, 99) - \text{poissoncdf}(\frac{42000}{365}, 99) \approx 0,898$.

Bladzijde 196

42 a T_W = de tijd in minuten die een klant moet wachten.

$P(T_W > 10) = 0,25$ ofwel $1 - P(T_W \leq 10) = 0,25$, dus $P(T_W \leq 10) = 0,75$ geeft

$1 - e^{-\lambda_W \cdot 10} = 0,75$

$e^{-10\lambda_W} = 0,25$

$-10\lambda_W = \ln(0,25) = -\ln(4)$

$\lambda_W = \frac{1}{10} \ln(4) = 0,138\dots$

Dus de gemiddelde wachttijd is $\frac{1}{0,138\dots} \approx 7,2$ minuten.

T_H = de tijd in minuten die nodig is om een klant te helpen.

$P(T_H < 2) = 0,5$ geeft

$1 - e^{-\lambda_H \cdot 2} = 0,5$

$e^{-2\lambda_H} = 0,5$

$-2\lambda_H = \ln(0,5) = -\ln(2)$

$\lambda_H = \frac{1}{2} \ln(2) = 0,346\dots$

Dus de gemiddelde helptijd is $\frac{1}{0,346\dots} \approx 2,9$ minuten.

b $P(T_W > 15) = 1 - P(T_W \leq 15) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{10} \ln(4) \cdot 15}) = e^{-1\frac{1}{2} \ln(4)} = (e^{\ln(4)})^{-1\frac{1}{2}} = 4^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{8}$

$P(T_H < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \ln(2) \cdot 1} = 1 - (e^{\ln(2)})^{-\frac{1}{2}} = 1 - 2^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

De gevraagde kans is $\frac{1}{8} \cdot (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\sqrt{2}$.

c X = het aantal klanten dat in een uur aan de beurt is.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 60 \cdot \frac{1}{10} \ln(4) = 6 \ln(4)$.

$P(T_W + T_W + \dots + T_W > 1) = 1 - P(T_W + T_W + \dots + T_W \leq 1) = 1 - P(X \geq 10) = 1 - (1 - P(X \leq 9)) =$

$P(X \leq 9) = \text{poissoncdf}(6 \ln(4), 9) \approx 0,676$

d Y = het aantal klanten dat in x minuten is geholpen.

Y is poissonverdeeld met parameter λ_Y .

$P(T_H + T_H + \dots + T_H < x) = 0,1$ ofwel $P(Y \geq 10) = 0,1$ ofwel

$1 - P(Y \leq 9) = 0,1$ geeft $1 - \text{poissoncdf}(\lambda_Y, 9) = 0,1$.

Voer in $y_1 = 1 - \text{poissoncdf}(x, 9)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{PoissonCD}(9, x)$ en $y_2 = 0,1$.

Intersect geeft $x = 6,22\dots$, dus $\lambda_Y = 6,22\dots$

Op $[0, 1]$ is $\lambda_H = \frac{1}{2} \ln(2)$ en op $[0, x]$ is $\lambda_Y = 6,22\dots$

Dit geeft $x \cdot \frac{1}{2} \ln(2) = 6,22\dots$

Dus $x = \frac{6,22\dots}{\frac{1}{2} \ln(2)} \approx 18,0$.

43 a De machtreeks van e^x is $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\text{Dus } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

$$\text{b } \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot P(X=k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

$$\text{c } \text{Uit a volgt } \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^j}{j!} \right) = e^{\lambda}.$$

$$\text{b geeft } \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot P(X=k)) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^j}{j!} \right).$$

$$\text{Dus } E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot P(X=k)) = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

44 a $F(x) = -x e^{-ax} - \frac{1}{a} e^{-ax}$ geeft $F'(x) = -e^{-ax} + ax e^{-ax} + e^{-ax} = ax e^{-ax}$

$F'(x) = f(x)$, dus F is een primitieve van f .

$$\text{b } E(T) = \int_0^{\infty} (t \cdot f(t)) dt = \int_0^{\infty} (t \cdot \lambda e^{-\lambda t}) dt = \int_0^{\infty} (\lambda t e^{-\lambda t}) dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p (\lambda t e^{-\lambda t}) dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^p =$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[-p e^{-\lambda p} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda p} - \left(0 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[-\frac{p}{(e^{\lambda})^p} - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{(e^{\lambda})^p} + \frac{1}{\lambda} \right] = 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Gemengde opgaven

13 Kegelsneden

Bladzijde 202

- 1 $c_1: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ ofwel $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
 De poollijn van Q is $x_Q x + y_Q y - 3x_Q - 4y_Q = 0$.
 $Q(-22, 29)$ geeft $-22x + 29y + 66 - 3x - 116 - 4y = 0$ ofwel $x = y - 2$.
 Substitutie van $x = y - 2$ in $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ geeft
 $(y-2)^2 + y^2 - 6(y-2) - 8y = 0$
 $y^2 - 4y + 4 + y^2 - 6y + 12 - 8y = 0$
 $2y^2 - 18y + 16 = 0$
 $y^2 - 9y + 8 = 0$
 $(y-1)(y-8) = 0$
 $y = 1 \vee y = 8$
 $y = 1$ geeft $x = -1$ en $y = 8$ geeft $x = 6$.
 Dus $A(-1, 1)$ en $B(6, 8)$.
 Het midden van lijnstuk AB is $\left(\frac{-1+6}{2}, \frac{1+8}{2}\right) = (2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$.
 $d(A, B) = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (8 - 1)^2} = 7\sqrt{2}$, dus de straal van c_2 is $3\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
 Dit geeft $(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 4\frac{1}{2})^2 = (3\frac{1}{2}\sqrt{2})^2$
 $x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} + y^2 - 9y + 20\frac{1}{4} = 24\frac{1}{2}$
 $x^2 + y^2 - 5x - 9y + 2 = 0$
 Dus $p = -5$, $q = -9$ en $r = 2$.

- 2 Stel $P(\lambda, 0)$.
 $rc_l = m$ en l door $A(0, 5)$ geeft $l: y = mx + 5$.
 P op l geeft $m\lambda + 5 = 0$
 $m\lambda = -5$
 $m = -\frac{5}{\lambda}$
 Dus $l: y = -\frac{5}{\lambda}x + 5$.
 $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $rc_k = \frac{1}{5}\lambda$.
 k door $A(0, 5)$, dus $k: y = \frac{1}{5}\lambda x + 5$.
 p loodrecht op de x -as en p door $P(\lambda, 0)$ geeft $p: x = \lambda$.
 k en p snijden elkaar in S , dus $y = \frac{1}{5}\lambda x + 5$
 $x = \lambda$ } $y = \frac{1}{5}x^2 + 5$

De kromme waarop alle punten S liggen is de parabool $y = \frac{1}{5}x^2 + 5$.

- 3 a $p_a: x^2 + ax = ay - a^2$
 $(x + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 = ay - a^2$
 $(x + \frac{1}{2}a)^2 = ay - \frac{3}{4}a^2$
 $(x + \frac{1}{2}a)^2 = a(y - \frac{3}{4}a)$
 $2p = a$, dus $p = \frac{1}{2}a$.
 $x^2 = ay \xrightarrow{\text{translatie } (-\frac{1}{2}a, \frac{3}{4}a)} (x + \frac{1}{2}a)^2 = a(y - \frac{3}{4}a)$
 top $(-\frac{1}{2}a, \frac{3}{4}a)$
 brandpunt $(0 - \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}a)$, dus brandpunt $(-\frac{1}{2}a, a)$
 richtlijn $y = -\frac{1}{2}a + a$, dus $y = \frac{1}{2}a$

b $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$

$$(x+3)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 + 16 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$$

De cirkel met middelpunt $(-3, 4)$ en straal 3 heeft de horizontale raaklijnen $y = 1$ en $y = 7$.

Dus voor $a = 2$ en voor $a = 14$ is de richtlijn van p_a een raaklijn van c .

c $A(2, -2)$ op p_a geeft $2^2 + 2a = -2a - a^2$

$$a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0$$

$$a = -2$$

$a = -2$ geeft p : $x^2 - 2x = -2y - 4$ ofwel p : $x^2 - 2x + 2y + 4 = 0$.

De raaklijn in A is $x_A x - x_A - x + y_A + y + 4 = 0$.

$A(2, -2)$ geeft $2x - 2 - x - 2 + y + 4 = 0$ ofwel $x + y = 0$.

n snijdt $x + y = 0$ loodrecht geeft n : $x - y = c$.

n door $A(2, -2)$ geeft $c = 2 + 2 = 4$.

Dus n : $x - y = 4$.

De poollijn van P is $x_P x - x_P - x + y_P + y + 4 = 0$

$$x_P x - x + y = x_P - y_P - 4$$

$$x - x_P x - y = 4 - x_P + y_P$$

$$(1 - x_P)x - y = 4 - x_P + y_P$$

Ook n : $x - y = 4$ is de poollijn van P , en dit geeft $x_P = 0$ en $y_P = 0$.

Dus $P(0, 0)$.

4 a $y^2 + 4y - 6x + 13 = 0$

$$(y+2)^2 - 4 - 6x + 13 = 0$$

$$(y+2)^2 = 6x - 9$$

$$(y+2)^2 = 6(x - 1\frac{1}{2})$$

$$T(1\frac{1}{2}, -2)$$

$$F(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}, 0 - 2) = F(3, -2)$$

as k : $y = -2$

richtlijn l : $x = -1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$, dus l : $x = 0$

b De poollijn van P is $y_P y + 2y_P + 2y - 3x_P - 3x + 13 = 0$.

$P(4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ geeft $2\frac{1}{2}y + 5 + 2y - 13\frac{1}{2} - 3x + 13 = 0$ ofwel $x = 1\frac{1}{2}y + 1\frac{1}{2}$.

Substitutie van $x = 1\frac{1}{2}y + 1\frac{1}{2}$ in $y^2 + 4y - 6x + 13 = 0$ geeft

$$y^2 + 4y - 6(1\frac{1}{2}y + 1\frac{1}{2}) + 13 = 0$$

$$y^2 + 4y - 9y - 9 + 13 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$(y-1)(y-4) = 0$$

$$y = 1 \vee y = 4$$

$y = 1$ geeft $x = 3$ en $y = 4$ geeft $x = 7\frac{1}{2}$.

Raaklijn in $(3, 1)$ is $y + 2 + 2y - 9 - 3x + 13 = 0$ ofwel $x - y = 2$.

Raaklijn in $(7\frac{1}{2}, 4)$ is $4y + 8 + 2y - 22\frac{1}{2} - 3x + 13 = 0$ ofwel $x - 2y = -\frac{1}{2}$.

c Stel $Q(x_Q, y_Q)$.

De poollijn van Q is ten opzichte van de parabool is

$$y_Q y + 2y_Q + 2y - 3x_Q - 3x + 13 = 0 \text{ ofwel } -(y_Q + 2)y = -3x - 3x_Q + 2y_Q + 13.$$

Omdat gegeven is dat m : $y = -3x + 20$ de poollijn van Q ten opzichte van de parabool is, moet gelden

$$y_Q + 2 = -1 \wedge -3x_Q + 2y_Q + 13 = 20$$

$$y_Q = -3 \wedge -3x_Q - 6 + 13 = 20$$

$$y_Q = -3 \wedge -3x_Q = 13$$

$$y_Q = -3 \wedge x_Q = -4\frac{1}{3}$$

Dus $Q(-4\frac{1}{3}, -3)$.

d middelpunt (a, b) geeft $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

y -as raken, dus $r^2 = a^2$.

Dit geeft $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$.

Door $A(3, -2)$ geeft $(3-a)^2 + (-2-b)^2 = a^2$

$$9 - 6a + a^2 + 4 + 4b + b^2 = a^2$$

$$b^2 + 4b - 6a + 13 = 0$$

Dus de middelpunten van alle cirkels die de y -as raken en door het punt $A(3, -2)$ gaan, liggen op p .

Bladzijde 203

- 5 a** De poollijn van $C(x_C, y_C)$ ten opzichte van de parabool $y^2 = 4x$ is $y_C y = 2x_C + 2x$ ofwel $x = \frac{1}{2}y_C y - x_C$. Deze lijn valt samen met de lijn $x = ay + 1$. Dit geeft $\frac{1}{2}y_C = a$ en $-x_C = 1$. Dus $C(-1, 2a)$.

- b** Substitutie van $x = ay + 1$ in $y^2 = 4x$ geeft $y^2 = 4(ay + 1)$

$$y^2 = 4ay + 4$$

$$y^2 - 4ay = 4$$

$$(y - 2a)^2 - 4a^2 = 4$$

$$(y - 2a)^2 = 4a^2 + 4$$

$$y - 2a = \sqrt{4a^2 + 4} \vee y - 2a = -\sqrt{4a^2 + 4}$$

$$y = 2a + 2\sqrt{a^2 + 1} \vee y = 2a - 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$y = 2a + 2\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $x = 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 1} + 1$ en $y = 2a - 2\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $x = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 + 1} + 1$.

Raaklijn in $(2a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 1} + 1, 2a + 2\sqrt{a^2 + 1})$ is l : $(2a + 2\sqrt{a^2 + 1})y = 2(2a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 1} + 1) + 2x$

ofwel l : $(a + \sqrt{a^2 + 1})y = x + 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 1} + 1$. Dit geeft $rc_l = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 + 1}}$.

Raaklijn in $(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 + 1} + 1, 2a - 2\sqrt{a^2 + 1})$ is m : $(2a - 2\sqrt{a^2 + 1})y = 2(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 + 1} + 1) + 2x$

ofwel m : $(a - \sqrt{a^2 + 1})y = x + 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 + 1} + 1$. Dit geeft $rc_m = \frac{1}{a - \sqrt{a^2 + 1}}$.

$$rc_l \cdot rc_m = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 + 1}} \cdot \frac{1}{a - \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{1}{a^2 - (\sqrt{a^2 + 1})^2} = \frac{1}{a^2 - (a^2 + 1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Dus $l \perp m$.

- 6 a** De poollijn van P ten opzichte van de ellips is $4x_P x + y_P y = 25$.

$P(3\frac{1}{2}, 1)$ geeft $14x + y = 25$ ofwel $y = -14x + 25$.

Substitutie van $y = -14x + 25$ in $4x^2 + y^2 = 25$ geeft $4x^2 + (-14x + 25)^2 = 25$

$$4x^2 + 196x^2 - 700x + 625 = 25$$

$$200x^2 - 700x + 600 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$D = 1$$

$$x = \frac{7+1}{4} = 2 \vee x = \frac{7-1}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$x = 1\frac{1}{2}$ geeft $y = 4$ en $x = 2$ geeft $y = -3$.

Raaklijn in $(1\frac{1}{2}, 4)$ is m : $6x + 4y = 25$.

Raaklijn in $(2, -3)$ is n : $8x - 3y = 25$.

- b** De poollijn van Q ten opzichte van e_2 ontstaat door translatie van de poollijn van P ten opzichte van e_1 over $(1, -4)$ en de lijnen p en q die door het punt Q gaan en e_2 raken ontstaan door translatie van de lijnen m : $6x + 4y = 25$ en n : $8x - 3y = 25$ over $(1, -4)$, dus

$$m: 6x + 4y = 25 \xrightarrow{\text{translatie } (1, -4)} p: 6(x - 1) + 4(y + 4) = 25$$

$$n: 8x - 3y = 25 \xrightarrow{\text{translatie } (1, -4)} q: 8(x - 1) - 3(y + 4) = 25$$

Dit geeft p : $6x - 6 + 4y + 16 = 25$ en q : $8x - 8 - 3y - 12 = 25$, dus p : $6x + 4y = 15$ en q : $8x - 3y = 45$.

- 7 a** De poollijn van $(0, -4)$ ten opzichte van de hyperbool is $5 \cdot 0x - 4 \cdot -4y = 16$ ofwel $y = 1$.

$y = 1$ substitueren in $5x^2 - 4y^2 = 16$ geeft $5x^2 - 4 = 16$

$$5x^2 = 20$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Dus $A(2, -1)$ en $B(-2, -1)$.

- b** De poollijn van $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van de hyperbool is $5x_P x - 4y_P y = 16$ ofwel $3\frac{3}{4}x_P x - 3y_P y = 12$.

Deze poollijn valt samen met n : $x - 4y = 12$.

Dit geeft $3\frac{3}{4}x_P = 1$ ofwel $x_P = \frac{4}{15}$, en $3y_P = 4$ ofwel $y_P = 1\frac{1}{3}$.

Dus $P(\frac{4}{15}, 1\frac{1}{3})$.

- 8 a** Er moet gelden $a = 2a - 1$, dus $a = 1$.

$$a = 1 \text{ geeft } x^2 + y^2 + 4x + 2by + 1 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 2by + 1 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y + b)^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y + b)^2 = b^2 + 3$$

Dit is een cirkel als $b^2 + 3 \geq 0$ en dat is voor elke b het geval.

Dus als $a = 1$, dan is het de vergelijking van een cirkel voor elke waarde van b .

- b** Er moet gelden $a = 0 \vee 2a - 1 = 0$.

$$a = 0 \text{ geeft } -1y^2 + 2by = 0$$

$$-y(y - 2b) = 0$$

$$y = 0 \vee y = 2b$$

Dit zijn twee horizontale lijnen, dus $a = 0$ voldoet niet.

$$a = \frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2by + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + 4x = -4by - \frac{1}{2}$$

$$(x + 2)^2 - 4 = -4by - \frac{1}{2}$$

$$(x + 2)^2 = -4by + 3\frac{1}{2}$$

Dit is een parabool als $b \neq 0$.

Dus als $a = \frac{1}{2} \wedge b \neq 0$, dan is het de vergelijking van een parabool.

- 9 a** $c: (x + 4)^2 + y^2 = 36$ is de cirkel met middelpunt $M(-4, 0)$ en straal 6.

$$d(A, M) = \sqrt{(4 - (-4))^2 + (0 - 0)^2} = 8$$

$d(A, M) > 6$, dus A ligt buiten de cirkel.

De kromme is een tak van de hyperbool met brandpunten $(-4, 0)$ en $(4, 0)$.

De oorsprong is het middelpunt van de hyperbool en de punten $(3, 0)$ en $(-3, 0)$ zijn de toppen van de hyperbool.

De vergelijking is van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ met $a = 3$.

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ geeft } b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 3^2 = 7.$$

Dus de vergelijking van de kromme is $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

- b** $d(O, M) = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (0 - 0)^2} = 4$

$d(c, M) = 6$, dus de oorsprong ligt binnen de cirkel.

De kromme is een ellips. De brandpunten zijn $(-4, 0)$ en $(0, 0)$, dus het is een liggende ellips.

Het punt $(-2, 0)$ is middelpunt van de ellips en de punten $(-5, 0)$ en $(1, 0)$ zijn de toppen van de ellips.

De vergelijking is van de vorm $\frac{(x + 2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ met $a = 3$.

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ geeft } b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$$

Dus de vergelijking van de kromme is $\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

- 10 a** $d(A, B) = 2$, dus de afstand van B tot de richtlijn moet ook 2 zijn.

De x -as is symmetrieas, dus het is een liggende parabool.

Uit bovenstaande volgt dat $x = 0$ of $x = 4$ richtlijn is.

Richtlijn $x = 4$ geeft parabool van de vorm $y^2 = 2p(x - a)$ met $p = d(A, \text{richtlijn}) = 2$.

$$y^2 = 4(x - a) \text{ door } B(2, 2) \text{ geeft } 4 = 4(2 - a) \text{ en hieruit volgt } a = 1.$$

Richtlijn $x = 0$ geeft parabool van de vorm $y^2 = -2p(x - a)$ met $p = d(A, \text{richtlijn}) = 2$.

$$y^2 = -4(x - a) \text{ door } B(2, 2) \text{ geeft } 4 = -4(2 - a) \text{ en hieruit volgt } a = 3.$$

Dus de vergelijkingen zijn $y^2 = 4(x - 1)$ en $y^2 = -4(x - 3)$.

- b** Stel $D(0, \lambda)$, dan $C(\lambda + 2, 0)$.

$$\text{Stel } AD: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - \lambda}{2 - 0} = -\frac{1}{2}\lambda \text{ en } b = \lambda.$$

$$\text{Dus } AD: y = -\frac{1}{2}\lambda x + \lambda \text{ en dit geeft } y = \lambda\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$\lambda = \frac{y}{1 - \frac{1}{2}x} = \frac{2y}{2 - x}$$

Stel BC : $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{2-(\lambda+2)} = -\frac{2}{\lambda}$.

$$y = -\frac{2}{\lambda}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{\lambda} \cdot 2 + b = 2 \\ b = 2 + \frac{4}{\lambda} \end{array} \right.$$

door $B(2, 2)$

Dus BC : $y = -\frac{2}{\lambda}x + 2 + \frac{4}{\lambda}$ en dit geeft $y - 2 = -\frac{2}{\lambda}x + \frac{4}{\lambda}$

$$\lambda(y - 2) = -2x + 4$$

$$\lambda = \frac{-2x + 4}{y - 2}$$

Uit $\lambda = \frac{2y}{2-x}$ en $\lambda = \frac{-2x+4}{y-2}$ volgt $\frac{2y}{2-x} = \frac{-2x+4}{y-2}$

$$2y(y-2) = (2-x)(-2x+4)$$

$$2y^2 - 4y = -4x + 8 + 2x^2 - 4x$$

$$2x^2 - 2y^2 - 8x + 4y + 8 = 0$$

Een vergelijking van K is $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

11 a Stel $P(x_P, y_P)$.

De poollijn van P ten opzichte van de parabool $y^2 = 2x$ is $y_P y = x_P + x$ ofwel $-x + y_P y = x_P$.

De poollijn van P ten opzichte van de parabool $x^2 = 2py$ is $x_P x = py_P + py$ ofwel $x_P x - py = py_P$.

De poollijnen vallen samen als $\frac{-1}{x_P} = \frac{y_P}{-p} = \frac{x_P}{py_P}$.

Hieruit volgt $p = x_P y_P \wedge -py_P = x_P^2 \wedge -px_P = py_P^2$.

$p = x_P y_P \wedge -py_P = x_P^2$ geeft $-x_P y_P^2 = x_P^2$ ofwel $x_P = -y_P^2$

$-px_P = py_P^2$ geeft $x_P = -y_P^2$

Dus een vergelijking van K is $x + y^2 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Bladzijde 204

12 a $x = 0 \wedge \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ ofwel $x = 0 \wedge 9y^2 + 4z^2 = 36$

De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is een cirkel met middelpunt $M(0, 0, \lambda)$.

Uit $z = \lambda$ en $9y^2 + 4z^2 = 36$ volgt $9y^2 + 4\lambda^2 = 36$

$$9y^2 = 36 - 4\lambda^2$$

$$y^2 = 4 - \frac{4}{9}\lambda^2$$

$$y = \sqrt{4 - \frac{4}{9}\lambda^2} \vee y = -\sqrt{4 - \frac{4}{9}\lambda^2}$$

Dus de straal van de cirkel is $\sqrt{4 - \frac{4}{9}\lambda^2}$.

Voor een punt $P(x, y, \lambda)$ van deze cirkel geldt $z = \lambda \wedge x^2 + y^2 = 4 - \frac{4}{9}\lambda^2$.

Dit geeft $x^2 + y^2 = 4 - \frac{4}{9}\lambda^2$.

Dus een vergelijking is $9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.

b De doorsnede van het vlak $y = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is een cirkel met middelpunt $(0, \lambda, 0)$.

Uit $y = \lambda$ en $x^2 - y^2 = -2$ volgt $x^2 - \lambda^2 = -2$

$$x^2 = \lambda^2 - 2$$

$$x = \sqrt{\lambda^2 - 2} \vee x = -\sqrt{\lambda^2 - 2}$$

Dus de straal van de cirkel is $\sqrt{\lambda^2 - 2}$.

Voor een punt $P(x, \lambda, z)$ van deze cirkel geldt $y = \lambda \wedge x^2 + z^2 = \lambda^2 - 2$.

Dit geeft $x^2 + z^2 = \lambda^2 - 2$.

Dus de vergelijking is $x^2 - y^2 + z^2 = -2$.

c $y = 0 \wedge \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ ofwel $y = 0 \wedge 9x^2 - 4z^2 = 36$

De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is een cirkel met middelpunt $M(0, 0, \lambda)$.

Uit $z = \lambda$ en $9x^2 - 4z^2 = 36$ volgt $9x^2 - 4\lambda^2 = 36$

$$9x^2 = 36 + 4\lambda^2$$

$$x^2 = 4 + \frac{4}{9}\lambda^2$$

$$x = \sqrt{4 + \frac{4}{9}\lambda^2} \vee x = -\sqrt{4 + \frac{4}{9}\lambda^2}$$

Dus de straal van de cirkel is $\sqrt{4 + \frac{4}{9}\lambda^2}$.

Voor een punt $P(x, y, \lambda)$ van deze cirkel geldt $z = \lambda \wedge x^2 + y^2 = 4 + \frac{4}{9}\lambda^2$.

Dit geeft $x^2 + y^2 = 4 + \frac{4}{9}\lambda^2$.

Dus een vergelijking is $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$.

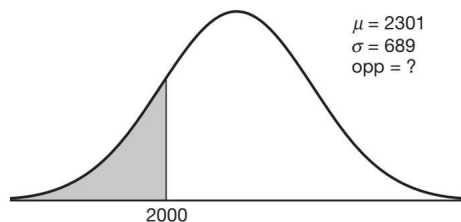
14 Mathematische statistiek

- 13 a** Voer in lijst 1 = {6.2, 8.1, 9.0, 7.4, 5.8} en lijst 2 = {21, 35, 40, 17, 16}.
 LinReg($ax + b$) L1, L2 geeft $\hat{Y} = 7,23X - 27,0$
 LinReg($ax + b$) L2, L1 geeft $\hat{X} = 0,105Y + 4,60$
b $X = 7,0$ geeft $\hat{Y} = 7,23 \cdot 7,0 - 27,0 \approx 23,6$
 Dus de voorspelling is 24 studiepunten.
c $Y = 32$ geeft $\hat{X} = 0,105 \cdot 32 + 4,60 \approx 8,0$
 Dus het gemiddelde van Marc is naar verwachting 8,0.

- 14 a** $r^2 = a_X \cdot a_Y = 1,2 \cdot 0,675 = 0,81$, dus $r = 0,9$.
 $a_Y = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ geeft $\sigma_X = \frac{r}{a_Y} \cdot \sigma_Y = \frac{0,9}{1,2} \cdot \sigma_Y = 0,75\sigma_Y$
 Hiermee zijn σ_X en σ_Y niet te berekenen, er is nog een gegeven nodig.
b Substitutie van $\sigma_X = 0,75\sigma_Y$ in $\sigma_X + \sigma_Y = 5$ geeft $0,75\sigma_Y + \sigma_Y = 5$
 $1,75\sigma_Y = 5$
 $\sigma_Y = \frac{5}{1,75} \approx 2,86$
 $\sigma_X + \sigma_Y = 5$ ofwel $\sigma_X = 5 - \sigma_Y \approx 5 - 2,86 = 2,14$.
 Dus $\sigma_X = 2,14$ en $\sigma_Y = 2,86$.

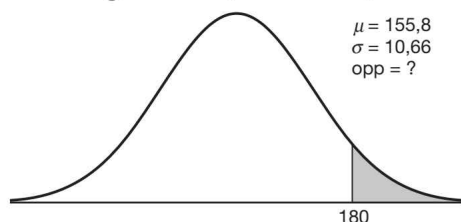
Bladzijde 205

- 15 a** Voer in lijst 1 = {47000, 25300, 60000, 18000, 65000, 27000, 38000, 29000}
 en lijst 2 = {2500, 1600, 4000, 2000, 5600, 3000, 2000, 2200}.
 LinReg($ax + b$) L1, L2 geeft $\hat{Y} = 0,0650X + 351$
b $r^2 \approx 0,6956$ en $\sigma_Y \approx 1248$
 $\sigma_d = \sigma_Y \sqrt{1 - r^2} \approx 1248 \cdot \sqrt{1 - 0,6956} \approx 689$
c $X = 30000$ geeft $\hat{Y} = 0,0650 \cdot 30000 + 351 \approx 2301$



$$P(Y < 2000) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 2000, 2301, 689) \approx 0,331$$

- d** $X = 25000$ geeft $\hat{Y} = 0,0650 \cdot 25000 + 351 \approx 1976$
 Het 68%-betrouwbaarheidsinterval is $\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle = \langle 1976 - 689, 1976 + 689 \rangle = \langle 1287, 2665 \rangle$.
- 16 a** Voer in lijst 1 = {136, 180, 133, 150, 141, 166, 131} en lijst 2 = {140, 213, 160, 167, 158, 166, 149}.
 $r \approx 0,87$ en LinReg($ax + b$) L1, L2 geeft $\hat{Y} = 1,09X + 2,51$
b $X = 150$ geeft $\hat{Y} = 1,09 \cdot 150 + 2,51 \approx 166$
 Werk je met de onafgeronde regressiecoëfficiënten, dan krijg je $\hat{Y} \approx 166,7$.
c LinReg($ax + b$) L2, L1 geeft $\hat{X} = 0,691X + 34,4$
 $Y = 180$ geeft $\hat{X} = 0,691 \cdot 180 + 34,4 \approx 159$
 De voorspelling van de bloeddruk in rust is 159.
d $r^2 \approx 0,756$ en $\sigma_Y \approx 21,59$
 $\sigma_d = \sigma_Y \sqrt{1 - r^2} \approx 21,59 \cdot \sqrt{1 - 0,756} \approx 10,66$
e Het 68%-betrouwbaarheidsinterval is $\langle 166,7 - 10,66; 166,7 + 10,66 \rangle \approx \langle 156, 177 \rangle$.
f $X = 140$ geeft $\hat{Y} = 1,09 \cdot 140 + 2,51 \approx 155,8$



$$P(\text{bloeddruk} > 180) = \text{normalcdf}(180, 10^{99}, 155,8, 10,66) \approx 0,012$$

Dus ongeveer 1,2%.

Bladzijde 206

- 17 a** Voer in lijst 1 = {20, 24, 34, 40, 53, 60, 62, 69, 75, 89},
lijst 2 = {52, 85, 65, 60, 55, 60, 58, 75, 70, 65} en
lijst 3 = {110, 130, 125, 140, 135, 150, 145, 160, 155, 180}.
- LinReg($ax + b$) L1, L3 geeft $\hat{Z} = 0,818X + 100$
 $X = 30$ geeft $\hat{Z} = 0,818 \cdot 30 + 100 \approx 125$
- b** LinReg($ax + b$) L2, L3 geeft $\hat{Z} = 0,500Y + 111$
 $Y = 80$ geeft $\hat{Z} = 0,500 \cdot 80 + 111 \approx 151$
- c** $\hat{Z} \geq 150$ geeft $0,818X + 100 \geq 150$
 $0,818X \geq 50$
 $X \geq 61,1$
Dus voor $X \geq 62$.
- d** $\hat{Z} \geq 150$ geeft $0,500Y + 111 \geq 150$
 $0,500Y \geq 39$
 $Y \geq 78,0$
Dus voor $Y > 78$.
- e** Gebruik de bij vraag a ingevoerde lijsten.
 $\Sigma X = 526$, $\Sigma Y = 645$, $\Sigma Z = 1430$, $\Sigma(XY) = 34\,011$, $\Sigma(XZ) = 79\,000$, $\Sigma(YZ) = 92\,680$, $\Sigma(X^2) = 32\,292$ en $\Sigma(Y^2) = 42\,493$.
- f** Uit vraag e volgt het stelsel
$$\begin{cases} 526a + 645b + 10c = 1430 \\ 32\,292a + 34\,011b + 526c = 79\,000 \\ 34\,011a + 42\,493b + 645c = 92\,680 \end{cases}$$
- Voer in $A = \begin{pmatrix} 526 & 645 & 10 & 1430 \\ 32\,292 & 34\,011 & 526 & 79\,000 \\ 34\,011 & 42\,493 & 645 & 92\,680 \end{pmatrix}$.
- De optie rref(TI) of Rref (Casio) geeft
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,81015 \\ 0 & 1 & 0 & 0,423299 \\ 0 & 0 & 1 & 73,0835 \end{pmatrix}$$
- Dus $a \approx 0,81015$, $b \approx 0,42330$ en $c \approx 73,0835$.
- g** $X = 70$ en $Y = 80$ geeft $\hat{Z} = 0,81015 \cdot 70 + 0,42330 \cdot 80 + 73,0835 \approx 164$
- h** Van X en Z is $r \approx 0,94$ en van Y en Z is $r \approx 0,25$. Er lijkt dus een sterkere (lineaire) samenhang te bestaan tussen X en Z dan tussen Y en Z . Dit komt overeen met de formule van $\hat{Z}$, waarvoor geldt dat de invloed van X groter is dan die van Y . Immers $a \approx 0,81015$ en $b \approx 0,42330$.

18 a
$$r = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\frac{\Sigma XY}{n} - \frac{\Sigma X}{n} \cdot \frac{\Sigma Y}{n}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\frac{80\,000}{10} - \frac{500}{10} \cdot \frac{1500}{10}}{15 \cdot 40} = 0,833...$$

$$\sigma_d = \sigma_Y \sqrt{1 - r^2} = 40 \cdot \sqrt{1 - 0,833...^2} \approx 22,1$$

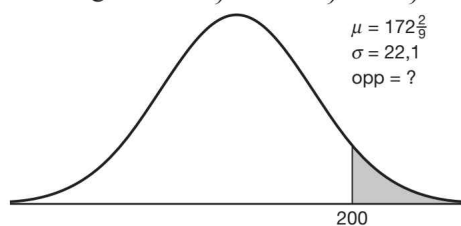
b $a_Y = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 0,833... \cdot \frac{40}{15} = 2\frac{2}{9}$

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y} &= 2\frac{2}{9}X + b \\ (\bar{X}, \bar{Y}) &= (50, 150) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2\frac{2}{9} \cdot 50 + b &= 150 \\ b &= 38\frac{8}{9} \end{aligned}$$

Dus $\hat{Y} = 2\frac{2}{9}X + 38\frac{8}{9}$.

$$X = 45 \text{ geeft } \hat{Y} = 2\frac{2}{9} \cdot 45 + 38\frac{8}{9} \approx 139$$

c $X = 60$ geeft $\hat{Y} = 2\frac{2}{9} \cdot 60 + 38\frac{8}{9} = 172\frac{2}{9}$



$$P(Y > 200) = \text{normalcdf}(200, 10^{99}, 172\frac{2}{9}, 22,1) \approx 0,104$$

Bladzijde 207

- 19 a $H_0: \mu_X = 4,20$, $H_1: \mu_X < 4,20$ en $\alpha = 0,05$

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4,20$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,075}{\sqrt{20}}$.

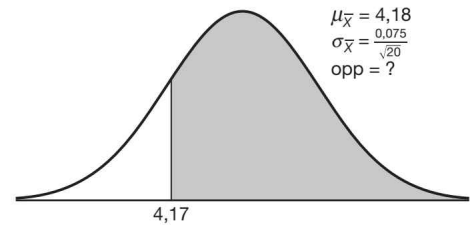
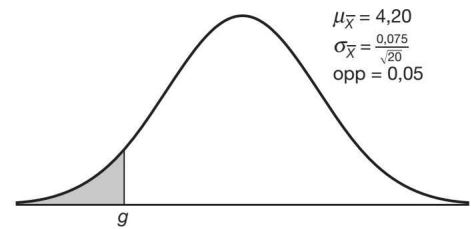
$$P(\bar{X} \leq g) = 0,05, \text{ dus } g = \text{invNorm}\left(0,05, 4,20, \frac{0,075}{\sqrt{20}}\right) \approx 4,172.$$

Bij steekproefgemiddelden van 4,17 cm of kleiner zal men de machine bijstellen.

- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4,18$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,075}{\sqrt{20}}$.

$$P(\text{niet bijstellen}) = P(\bar{X} \geq 4,17) =$$

$$\text{normalcdf}\left(4,17, 10^{99}, 4,18, \frac{0,075}{\sqrt{20}}\right) \approx 0,7245$$



- c $H_0: \mu_Y = 4,10$, $H_1: \mu_Y \neq 4,10$ en $\alpha = 0,05$

$\bar{Y}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{Y}} = 4,10$ en $\sigma_{\bar{Y}} = \frac{0,05}{\sqrt{10}}$.

Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

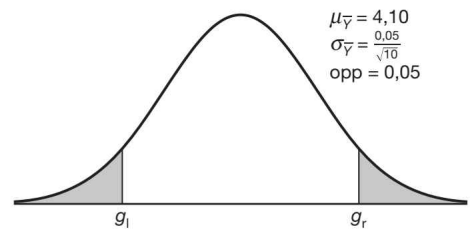
‘verwerp H_0 als $\bar{Y} \leq g_l$ of als $\bar{Y} \geq g_r$ ’.

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$

$$P(\bar{Y} \leq g_l) = 0,025, \text{ dus } g_l = \text{invNorm}\left(0,025, 4,10, \frac{0,05}{\sqrt{10}}\right) \approx 4,069.$$

$$P(\bar{Y} \leq g_r) = 1 - 0,025 = 0,975, \text{ dus } g_r = \text{invNorm}\left(0,975, 4,10, \frac{0,05}{\sqrt{10}}\right) \approx 4,131.$$

Bij steekproefgemiddelden van 4,06 cm of kleiner en 4,14 cm of groter zal men de machine bijstellen.

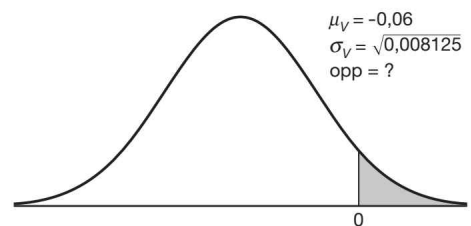


- d De zuiger past niet in de cilinder als $Y > X$ ofwel $Y - X > 0$, dus $V > 0$ met $V = Y - X$.

V is normaal verdeeld met $\mu_V = 4,12 - 4,18 = -0,06$ cm en

$$\sigma_V = \sqrt{0,075^2 + 0,05^2} = \sqrt{0,008125} \text{ cm.}$$

$$P(V > 0) = \text{normalcdf}(0, 10^{99}, -0,06, \sqrt{0,008125}) \approx 0,25$$



- 20 X = het aantal langste jongens dat in april geboren is.

X is binomiaal verdeeld met $n = 14$ en $p = 0,5$.

$H_0: p = 0,5$, $H_1: p > 0,5$ en $\alpha = 0,05$

De overschrijdingskans van 10 is $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \text{binomcdf}(14, 0,5, 9) \approx 0,090$.

$P(X \geq 10) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Dit resultaat geeft geen aanleiding te veronderstellen dat een kind dat in april geboren is langer wordt dan een kind dat in oktober geboren is.

Bladzijde 208

- 21 a X = het IQ van een persoon.

X is normaal verdeeld met $\mu_X = 100$ en $\sigma_X = 15$.

$$P(\text{IQ van 128 of meer}) = P(X \geq 127,5) =$$

$$\text{normalcdf}(127,5, 10^{99}, 100, 15) \approx 0,0334$$

Je verwacht $0,0334 \cdot 15000 \approx 501$ personen met een IQ van 128 of meer in een groep van 15000 personen.

- b $H_0: \mu_N = 97,92$, $H_1: \mu_N > 97,92$ en $\alpha = 0,01$

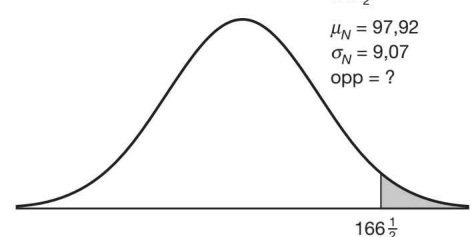
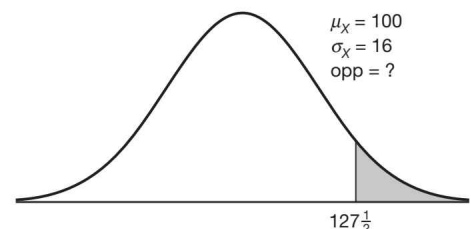
27,3% van 612 is $0,273 \cdot 612 \approx 167$.

$$P(167 \text{ personen of meer}) = P(N \geq 166,5) =$$

$$\text{normalcdf}(166,5, 10^{99}, 97,92, 9,07) \approx 2,0 \cdot 10^{-14}$$

$P(167 \text{ personen of meer}) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

De 27,3% ligt significant boven de 16% die men van tevoren aannam.



- 22 a** X = het aantal keer dat het balletje op een van de sectoren 1, 8 en 5 blijft liggen.

X is binomiaal verdeeld met $n = 400$ en $p = 0,3$.

$H_0: p = 0,3$, $H_1: p \neq 0,3$ en $\alpha = 0,025$

De overschrijdingskans van 110 is $P(X \leq 110) = \text{binomcdf}(400, 0,3, 110) \approx 0,150$.

$P(X \leq 110) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding de zuiverheid van de roulette in twijfel te trekken.

- b** X = het aantal keer dat het balletje op een van de sectoren 3 en 6 blijft liggen.

X is binomiaal verdeeld met $n = 800$ en $p = 0,2$.

$H_0: p = 0,2$, $H_1: p \neq 0,2$ en $\alpha = 0,01$

Verwerp H_0 als $X \leq g_l$ of als $X \geq g_r$.

Zoek het grootste gehele getal g_l zo, dat $P(X \leq g_l) \leq \frac{1}{2}\alpha = 0,005$ ofwel $\text{binomcdf}(800, 0,2, g_l) \leq 0,005$.

En zoek het kleinste gehele getal g_r zo, dat $P(X \geq g_r) \leq 0,005$ ofwel $1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,005$, dus

$1 - \text{binomcdf}(800, 0,2, g_r - 1) \leq 0,005$.

Voer in $y_1 = \text{binomcdf}(800, 0,2, x)$ (TI) of $y_1 = \text{BinomialCD}(x, 800, 0,2)$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 130$ geeft $y_1 \approx 0,0039$

$x = 131$ geeft $y_1 \approx 0,0051$.

Verwerp H_0 als $X \leq 130$.

Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(800, 0,2, x - 1)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(x - 1, 800, 0,2)$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 190$ geeft $y_1 \approx 0,0052$

$x = 191$ geeft $y_1 \approx 0,0041$.

Verwerp H_0 als $X \geq 191$.

Bij de aantallen 131 tot en met 190 zal de zuiverheid van de roulette niet in twijfel worden getrokken.

- c** X = het aantal keer dat het balletje op een van de sectoren 3, 6, 9 en 10 komt.

X is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = 0,4$.

$H_0: p = 0,4$, $H_1: p < 0,4$ en $\alpha = 0,10$

De overschrijdingskans van 52 is $P(X \leq 52) = \text{binomcdf}(150, 0,4, 52) \approx 0,105$.

$P(X \leq 52) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is niet voldoende reden om het met Petra eens te zijn.

Bladzijde 209

- 23 a** X = de tijd in minuten die per patiënt nodig is voor het triage-onderzoek.

$\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 3,5$ minuten

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{0,75}{\sqrt{25}} = 0,15$ minuten

De gevraagde kans is $P(X > 4) = \text{normalcdf}(4, 10^{99}, 3,5, 0,15) \approx 0,0004$.

- b** X = het aantal patiënten waarbij het triage-onderzoek langer dan vier minuten duurt.

X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = \text{normalcdf}(4, 10^{99}, 3,5, 0,75) = 0,252\dots$

De gevraagde kans is $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \text{binomcdf}(25, 0,252\dots, 5) \approx 0,633$.

- c** X = het aantal patiënten waarbij het triage-onderzoek langer dan vier minuten duurt.

X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,252\dots$

$H_0: p = 0,252\dots$, $H_1: p < 0,252\dots$ en $\alpha = 0,05$

De overschrijdingskans van 20 is $P(X \leq 20) = \text{binomcdf}(100, 0,252\dots, 20) \approx 0,136$.

$P(X \leq 20) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is niet aangetoond dat de gemiddelde tijd die een triage-onderzoek duurt is afgenomen.

- d** X = het gemiddelde aantal patiënten per jaar dat zich meldt bij de SEH.

$365 \cdot 36 = 13\,140$

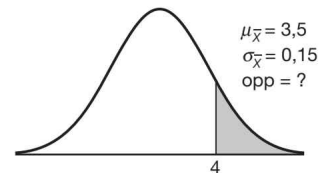
$H_0: \lambda = 13\,140$, $H_1: \lambda > 13\,140$ en $\alpha = 0,01$

De overschrijdingskans van 13 402 is $P(X \geq 13\,402) = 1 - P(X \leq 13\,401) =$

$1 - \text{poissoncdf}(13\,140, 13\,401) \approx 0,011$.

$P(X \geq 13\,402) > \alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is niet voldoende aanleiding het personeel van de afdeling gelijk te geven.



Bladzijde 210

- 24 a** $H_0: \mu_X = 10,5$, $H_1: \mu_X \neq 10,5$ en $\alpha = 0,05$

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 10,5$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3,2}{\sqrt{60}}$.

De overschrijdskans van 9,8 is

$$P(\bar{X} \leq 9,8) = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 9,8, 10,5, \frac{3,2}{\sqrt{60}}\right) \approx 0,045.$$

$P(\bar{X} \leq 9,8) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding om te twijfelen aan de bewering van het onderzoeksbureau.

- b** $H_0: \mu_X = 10,5$, $H_1: \mu_X \neq 10,5$ en $\alpha = 0,10$

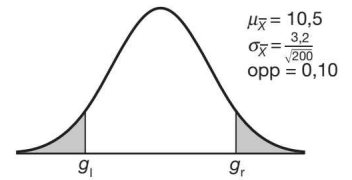
$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 10,5$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3,2}{\sqrt{200}}$.

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,10 = 0,05$

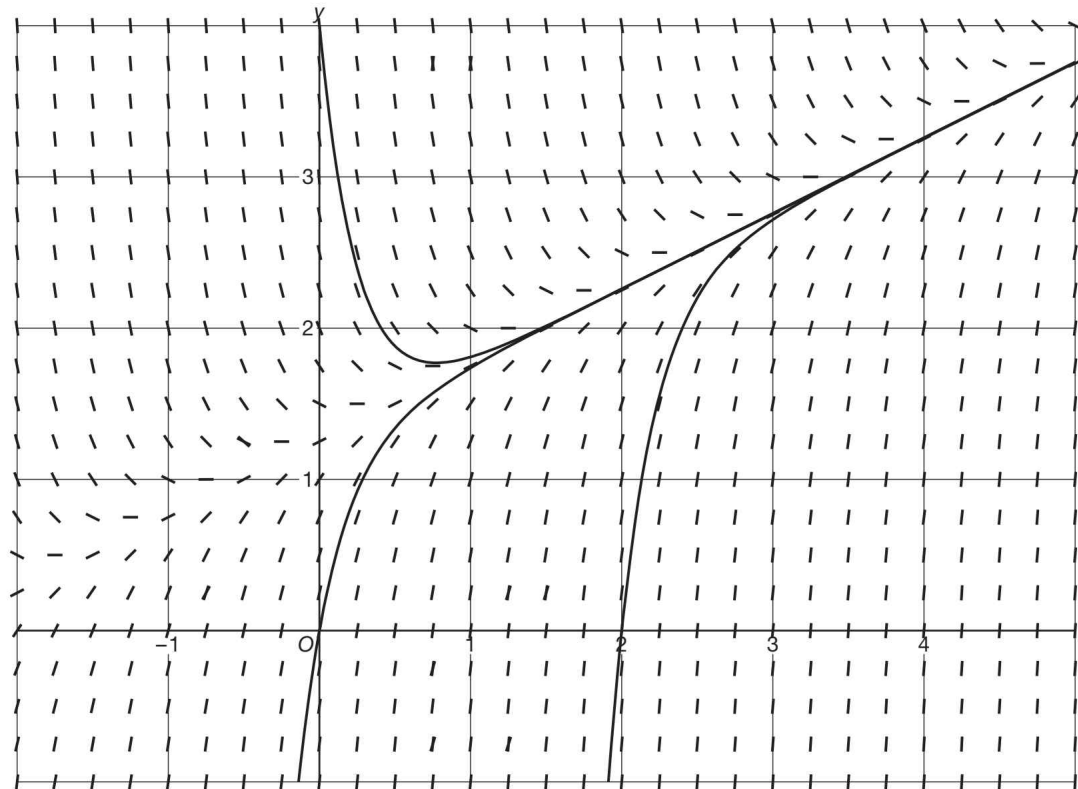
$$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05, \text{ dus } g_l = \text{invNorm}\left(0,05, 10,5, \frac{3,2}{\sqrt{200}}\right) \approx 10,128.$$

$$P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,05 = 0,95, \text{ dus } g_r = \text{invNorm}\left(0,95, 10,5, \frac{3,2}{\sqrt{200}}\right) \approx 10,872.$$

Men zal het onderzoeksbureau gelijk geven bij steekproefresultaten van 10,13 tot en met 10,87 uur.

**15 Continue dynamische modellen**

25 a



- b** De lijn $y = 0,5t + 1,25$ lijkt een oplossingskromme te zijn.

Substitutie van $y = 0,5t + 1,25$ en $\frac{dy}{dt} = 0,5$ in $\frac{dy}{dt} = 2t - 4y + 5,5$ geeft

$$0,5 = 2t - 4(0,5t + 1,25) + 5,5$$

$$0,5 = 2t - 2t - 5 + 5,5$$

$$0,5 = 0,5$$

Dit klopt voor elke waarde van t , dus $y = 0,5t + 1,25$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

- c** Stel $k: y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{(4,4)} = 8 - 16 + 5,5 = -2,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2,5t + b \\ \text{door } (4, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2,5 \cdot 4 + b = 4 \\ b = 14 \end{array}$$

Dus $k: y = -2,5t + 14$.

d $rc_l = 5,5$, dus $\frac{dy}{dt} = 5,5$.

Dit geeft $2t - 4y + 5,5 = 5,5$ ofwel $t = 2y$.

Substitutie van $t = 2y$ in $y = 5,5t - 30$ geeft $y = 5,5 \cdot 2y - 30$

$$y = 11y - 30$$

$$-10y = -30$$

$$y = 3$$

$y = 3$ geeft $t = 6$.

Dus $A(6, 3)$.

e Substitutie van $y = 3e^{-4t} + 0,5t + 1,25$ en $\frac{dy}{dt} = -12e^{-4t} + 0,5$ in $\frac{dy}{dt} = 2t - 4y + 5,5$ geeft

$$-12e^{-4t} + 0,5 = 2t - 4(3e^{-4t} + 0,5t + 1,25) + 5,5$$

$$-12e^{-4t} + 0,5 = 2t - 12e^{-4t} - 2t - 5 + 5,5$$

$$-12e^{-4t} + 0,5 = -12e^{-4t} + 0,5$$

Dit klopt voor elke waarde van t , dus $y = 3e^{-4t} + 0,5t + 1,25$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

26 a $\frac{dT}{dt} = 12 - 0,6T$

$T = 20$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dT}{dt} = -0,6T \text{ geeft } T(t) = ce^{-0,6t}$$

De algemene oplossing is $T(t) = ce^{-0,6t} + 20$.

$$T(0) = 200 \text{ geeft } ce^{-0,6 \cdot 0} + 20 = 200$$

$$c + 20 = 200$$

$$c = 180$$

De formule is $T = 20 + 180e^{-0,6t}$.

b $T = 100$ geeft $20 + 180e^{-0,6t} = 100$

$$180e^{-0,6t} = 80$$

$$e^{-0,6t} = \frac{4}{9}$$

$$-0,6t = \ln\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}{-0,6} = 1,35\dots$$

Dus na $1,35\dots \cdot 60 \approx 81$ minuten is de temperatuur van het voorwerp gedaald tot 100°C .

c De omgevingstemperatuur is 20°C .

$$\text{Los op } 20 + 180e^{-0,6t} = 21$$

$$180e^{-0,6t} = 1$$

$$e^{-0,6t} = \frac{1}{180}$$

$$-0,6t = \ln\left(\frac{1}{180}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{180}\right)}{-0,6} \approx 8,7$$

Dus na ongeveer 8,7 uur is het verschil met de omgevingstemperatuur minder dan 1°C .

Bladzijde 211

27 a $rc = 0,5$, dus $\frac{dy}{dt} = 0,5$.

In het raakpunt A geldt $y = 0,5t - 2,5$ en $\frac{t+1}{2-y} = 0,5$.

Substitutie van $y = 0,5t - 2,5$ in $\frac{t+1}{2-y} = 0,5$ geeft $\frac{t+1}{2-(0,5t-2,5)} = 0,5$

$$\frac{t+1}{4,5-0,5t} = 0,5$$

$$t+1 = 0,5(4,5-0,5t)$$

$$t+1 = 2,25-0,25t$$

$$1,25t = 1,25$$

$$t = 1$$

$t = 1$ geeft $y = 0,5 - 2,5 = -2$.

Dus $A(1, -2)$.

$$\text{b } \frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{2-y} \text{ geeft } \int (2-y) dy = \int (t+1) dt$$

$$2y - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + t + c$$

$$\text{Door } (-4, 3) \text{ geeft } 6 - \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{1}{2} \cdot 16 - 4 + c$$

$$6 - 4\frac{1}{2} = 8 - 4 + c$$

$$c = -2\frac{1}{2}$$

De vergelijking van de oplossingskromme door $(-4, 3)$ is $2y - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + t - 2\frac{1}{2}$.

$$\text{De } y\text{-as snijden, dus } t = 0 \text{ geeft } 2y - \frac{1}{2}y^2 = 0 + 0 - 2\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}y^2 + 2y + 2\frac{1}{2} = 0$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$(y+1)(y-5) = 0$$

$$y = -1 \vee y = 5$$

Dus $y_B = -1$ of $y_B = 5$.

c De cirkel met middelpunt $M(-1, 2)$ en straal r heeft de vergelijking $(t+1)^2 + (y-2)^2 = r^2$.

$$\text{Door } (0, 6) \text{ geeft } (0+1)^2 + (6-2)^2 = r^2$$

$$1 + 16 = r^2$$

$$r^2 = 17$$

Dus de vergelijking van de cirkel is $(t+1)^2 + (y-2)^2 = 17$.

$$\text{Differentiëren naar } t \text{ geeft } 2(t+1) + 2(y-2) \cdot y' = 0$$

$$2(y-2) \cdot y' = -2(t+1)$$

$$y' = \frac{-2(t+1)}{2(y-2)} = \frac{t+1}{2-y}$$

Dus de cirkel $(t+1)^2 + (y-2)^2 = 17$ voldoet aan de differentiaalvergelijking en dus is de cirkel een oplossingskromme.

$$\text{28 } y = 1 + \frac{1}{e^{2t-1}} = 1 + e^{-2t+1} \text{ geeft } \frac{dy}{dt} = -2e^{-2t+1} = \frac{-2}{e^{2t-1}}$$

$$\text{Substitutie van } y = 1 + \frac{1}{e^{2t-1}} \text{ en } \frac{dy}{dt} = \frac{-2}{e^{2t-1}} \text{ in } \frac{dy}{dt} = a(y-b) \text{ geeft } \frac{-2}{e^{2t-1}} = a \left(1 + \frac{1}{e^{2t-1}} - b \right)$$

$$\frac{-2}{e^{2t-1}} = a + \frac{a}{e^{2t-1}} - ab$$

$$\frac{-2}{e^{2t-1}} = \frac{a}{e^{2t-1}} + a - ab$$

$$\text{Dit klopt voor elke waarde van } t \text{ als } a = -2 \wedge a - ab = 0$$

$$a = -2 \wedge -2 + 2b = 0$$

$$a = -2 \wedge b = 1$$

$$\text{Dus } \frac{dy}{dt} = -2(y-1) = -2y + 2.$$

$y = 1$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -2y \text{ geeft } y(t) = c e^{-2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{-2t} + 1$.

$$y(1) = 2 \text{ geeft } c e^{-2 \cdot 1} + 1 = 2$$

$$c e^{-2} = 1$$

$$c = e^2$$

De formule is $y = e^2 \cdot e^{-2t} + 1$ ofwel $y = 1 + e^{2-2t}$.

$$\text{29 a De karakteristieke vergelijking is } \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda+5) = 0$$

$$\lambda = -1 \vee \lambda = -5$$

Dus de algemene oplossing is $y(t) = A e^{-t} + B e^{-5t}$.

$$\text{b De karakteristieke vergelijking is } \lambda^2 - 12\lambda + 36 = 0$$

$$(\lambda-6)^2 = 0$$

$$\lambda = 6$$

Dus de algemene oplossing is $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{6t}$.

$$\text{c De karakteristieke vergelijking is } \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

$$(\lambda-4)^2 - 16 + 20 = 0$$

$$(\lambda-4)^2 = -4$$

$$(\lambda-4)^2 = 4i^2$$

$$\lambda-4 = 2i \vee \lambda-4 = -2i$$

$$\lambda = 4+2i \vee \lambda = 4-2i$$

Dus de algemene oplossing is $y(t) = (A \cos(2t) + B \sin(2t)) \cdot e^{4t}$.

$$\begin{aligned}
 \text{30 a } y(t) &= \frac{1 + c \cdot e^{2t}}{1 - c \cdot e^{2t}} \text{ geeft } y'(t) = \frac{(1 - c \cdot e^{2t}) \cdot 2c \cdot e^{2t} - (1 + c \cdot e^{2t}) \cdot (-2c \cdot e^{2t})}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} \\
 &= \frac{2c \cdot e^{2t} - 2c^2 \cdot e^{4t} + 2c \cdot e^{2t} + 2c^2 \cdot e^{4t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} \\
 &= \frac{4c \cdot e^{2t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2}
 \end{aligned}$$

Substitutie van $y(t) = \frac{1 + c \cdot e^{2t}}{1 - c \cdot e^{2t}}$ en $y'(t) = \frac{4c \cdot e^{2t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2}$ in $y' = y^2 - 1$ geeft

$$\begin{aligned}
 \frac{4c \cdot e^{2t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} &= \left(\frac{1 + c \cdot e^{2t}}{1 - c \cdot e^{2t}} \right)^2 - 1 \\
 \frac{4c \cdot e^{2t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} &= \frac{(1 + c \cdot e^{2t})^2}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} - \frac{(1 - c \cdot e^{2t})^2}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} \\
 \frac{4c \cdot e^{2t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} &= \frac{1 + 2c \cdot e^{2t} + c^2 \cdot e^{4t}}{1 - 2c \cdot e^{2t} + c^2 \cdot e^{4t}} - \frac{1 - 2c \cdot e^{2t} + c^2 \cdot e^{4t}}{1 - 2c \cdot e^{2t} + c^2 \cdot e^{4t}} \\
 \frac{4c \cdot e^{2t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} &= \frac{(1 + 2c \cdot e^{2t} + c^2 \cdot e^{4t}) - (1 - 2c \cdot e^{2t} + c^2 \cdot e^{4t})}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} \\
 \frac{4c \cdot e^{2t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2} &= \frac{4c \cdot e^{2t}}{(1 - c \cdot e^{2t})^2}
 \end{aligned}$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus de functies $y(t) = \frac{1 + c \cdot e^{2t}}{1 - c \cdot e^{2t}}$ zijn oplossing van de differentiaalvergelijking.

$$\begin{aligned}
 \text{b } y(0) &= 1 \text{ geeft } \frac{1 + c \cdot e^{2 \cdot 0}}{1 - c \cdot e^{2 \cdot 0}} = 1 \\
 \frac{1 + c}{1 - c} &= 1 \\
 1 + c &= 1 - c \\
 2c &= 0 \\
 c &= 0
 \end{aligned}$$

Dus de oplossing van $y' = y^2 - 1$ met $y(0) = 1$ is $y(t) = 1$.

31 a Stel $y = at^2 + bt + c$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at^2 + bt + c$ en $y' = 2at + b$ in $(2t + y)y' = 2t^3 + 4y$ geeft

$$\begin{aligned}
 (2t + at^2 + bt + c)(2at + b) &= 2t^3 + 4(at^2 + bt + c) \\
 4at^2 + 2bt + 2a^2t^3 + abt^2 + 2abt^2 + b^2t + 2act + bc &= 2t^3 + 4at^2 + 4bt + 4c \\
 2a^2t^3 + (4a + 3ab)t^2 + (2b + b^2 + 2ac)t + bc &= 2t^3 + 4at^2 + 4bt + 4c
 \end{aligned}$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$\begin{aligned}
 2a^2 &= 2 \wedge 4a + 3ab = 4a \wedge 2b + b^2 + 2ac = 4b \wedge bc = 4c \\
 a^2 &= 1 \wedge 3ab = 0 \wedge b^2 - 2b + 2ac = 0 \wedge bc = 4c \\
 (a = 1 \vee a = -1) \wedge 3ab &= 0 \wedge b^2 - 2b + 2ac = 0 \wedge bc = 4c \\
 (a = 1 \vee a = -1) \wedge 3ab &= 0 \text{ geeft } b = 0 \\
 (a = 1 \vee a = -1) \wedge b &= 0 \wedge b^2 - 2b + 2ac = 0 \wedge bc = 4c \text{ geeft } 2ac = 0 \wedge 0 = 4c \text{ dus } c = 0 \\
 \text{Dus } (a = 1 \vee a = -1) \wedge b &= 0 \wedge c = 0.
 \end{aligned}$$

Dus de functies $y(t) = t^2$ en $y(t) = -t^2$ zijn oplossing van de differentiaalvergelijking.

$$\begin{aligned}
 \text{b } (2t + y)y' &= 2t^3 + 4y \text{ geeft } \frac{dy}{dt} = \frac{2t^3 + 4y}{2t + y} \\
 \text{Stel } k: y &= at + b \text{ met } a = \left[\frac{dy}{dt} \right]_{A(1, 1)} = \frac{2 + 4}{2 + 1} = 2.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 2t + b \\ \text{door } A(1, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2 + b &= 1 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 2t - 1$.

Voor de punten waarin de lijn k oplossingskrommen raakt geldt $y' = 2$ en $y = 2t - 1$.

Substitutie van $y' = 2$ en $y = 2t - 1$ in $(2t + y)y' = 2t^3 + 4y$ geeft

$$\begin{aligned}
 (2t + 2t - 1) \cdot 2 &= 2t^3 + 4(2t - 1) \\
 (4t - 1) \cdot 2 &= 2t^3 + 8t - 4 \\
 8t - 2 &= 2t^3 + 8t - 4 \\
 2 &= 2t^3 \\
 t^3 &= 1 \\
 t &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t = 1 \text{ geeft } y &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\
 \text{Dus } k \text{ raakt alleen een oplossingskromme in het punt } &A(1, 1).
 \end{aligned}$$

- 32 a** Stel $y = (At + B) \cdot e^{-t}$ is een oplossing.

Substitutie van $\frac{dy}{dt} = A \cdot e^{-t} + (At + B) \cdot -e^{-t}$ in $\frac{dy}{dt} = (2t + 4)e^{-t}$ geeft

$$A \cdot e^{-t} + (At + B) \cdot -e^{-t} = (2t + 4)e^{-t}$$

$$A \cdot e^{-t} - At \cdot e^{-t} - B \cdot e^{-t} = (2t + 4)e^{-t}$$

$$(-At + A - B)e^{-t} = (2t + 4)e^{-t}$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$-A = 2 \wedge A - B = 4$$

$$A = -2 \wedge -2 - B = 4$$

$$A = -2 \wedge B = -6$$

Een particuliere oplossing is $y = (-2t - 6) \cdot e^{-t}$.

De algemene oplossing is $y = (-2t - 6) \cdot e^{-t} + c$.

- b** $\frac{dy}{dt} = \frac{t-3}{y+5}$ geeft $(y+5)dy = (t-3)dt$

$$\frac{1}{2}y^2 + 5y = \frac{1}{2}t^2 - 3t + c$$

De algemene oplossing is $\frac{1}{2}y^2 + 5y = \frac{1}{2}t^2 - 3t + c$.

- c** $\frac{dA}{dt} = 10A(1-A) = 10A - 10A^2$

Substitutie van $A = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 10 \cdot \frac{1}{u} - 10 \cdot \frac{1}{u^2}$

$$\frac{du}{dt} = 10 - 10u$$

$u(t) = 1$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = 10 - 10u$.

$$\frac{du}{dt} = -10u \text{ geeft } u(t) = c_1 e^{-10t}$$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = 10 - 10u$ is $u(t) = c_1 e^{-10t} + 1$.

$$A = \frac{1}{u} \text{ geeft } A(t) = \frac{1}{c_1 e^{-10t} + 1}.$$

De algemene oplossing is $A(t) = \frac{1}{1 + c e^{-10t}}$.

- d** Stel $y = at^2 + bt + c$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at^2 + bt + c$ en $\frac{dy}{dt} = 2at + b$ in $\frac{dy}{dt} = 3y + t^2 - 2t + 4$ geeft

$$2at + b = 3(at^2 + bt + c) + t^2 - 2t + 4$$

$$2at + b = 3at^2 + 3bt + 3c + t^2 - 2t + 4$$

$$2at + b = (3a + 1)t^2 + (3b - 2)t + 3c + 4$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$3a + 1 = 0 \wedge 2a = 3b - 2 \wedge b = 3c + 4$$

$$a = -\frac{1}{3} \wedge -\frac{2}{3} = 3b - 2 \wedge b = 3c + 4$$

$$a = -\frac{1}{3} \wedge 3b = 1\frac{1}{3} \wedge b = 3c + 4$$

$$a = -\frac{1}{3} \wedge b = \frac{4}{9} \wedge \frac{4}{9} = 3c + 4$$

$$a = -\frac{1}{3} \wedge b = \frac{4}{9} \wedge 3c = -3\frac{5}{9}$$

$$a = -\frac{1}{3} \wedge b = \frac{4}{9} \wedge c = -1\frac{5}{27}$$

Dus $y = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - 1\frac{5}{27}$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 3y \text{ geeft } y(t) = c e^{3t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c e^{3t} - \frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{9}t - 1\frac{5}{27}$.

- e Stel $y = At + B + Ce^t$ is een oplossing.

Substitutie van $y = At + B + Ce^t$ en $\frac{dy}{dt} = A + Ce^t$ in $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y + e^t + t$ geeft

$$A + Ce^t = -\frac{1}{2}(At + B + Ce^t) + e^t + t$$

$$A + Ce^t = -\frac{1}{2}At - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}Ce^t + e^t + t$$

$$A + Ce^t = \left(1 - \frac{1}{2}A\right)t - \frac{1}{2}B + \left(1 - \frac{1}{2}C\right)e^t$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$1 - \frac{1}{2}A = 0 \wedge A = -\frac{1}{2}B \wedge C = 1 - \frac{1}{2}C$$

$$A = 2 \wedge 2 = -\frac{1}{2}B \wedge \frac{1}{2}C = 1$$

$$A = 2 \wedge B = -4 \wedge C = \frac{2}{3}$$

Dus $y = 2t - 4 + \frac{2}{3}e^t$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y \text{ geeft } y(t) = ce^{-\frac{1}{2}t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^{-\frac{1}{2}t} + 2t - 4 + \frac{2}{3}e^t$.

- f Stel $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ is een oplossing.

Substitutie van $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ en $\frac{dy}{dt} = A \cos(t) - B \sin(t)$ in $\frac{dy}{dt} = 2y + 4 \cos(t)$ geeft

$$A \cos(t) - B \sin(t) = 2(A \sin(t) + B \cos(t)) + 4 \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = 2A \sin(t) + 2B \cos(t) + 4 \cos(t)$$

$$A \cos(t) - B \sin(t) = (2B + 4) \cos(t) + 2A \sin(t)$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$A = 2B + 4 \wedge -B = 2A$$

$$A = 2B + 4 \wedge B = -2A$$

$$A = -4A + 4 \wedge B = -2A$$

$$5A = 4 \wedge B = -2A$$

$$A = \frac{4}{5} \wedge B = -\frac{8}{5}$$

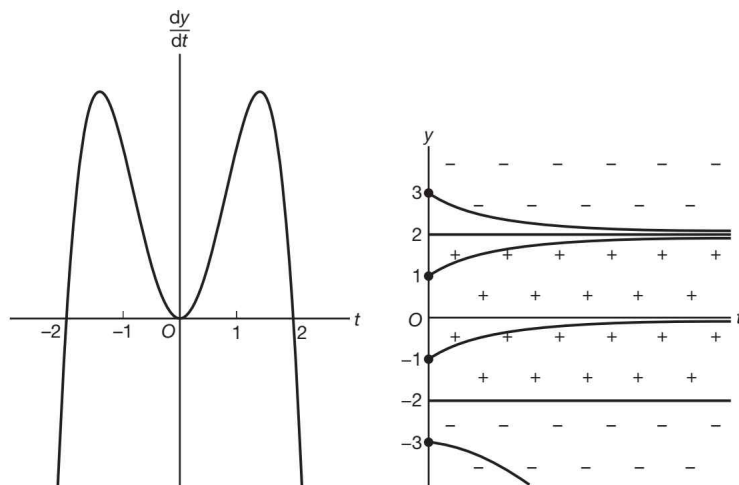
Dus $y = \frac{4}{5} \sin(t) - \frac{8}{5} \cos(t)$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = 2y \text{ geeft } y(t) = ce^{2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = ce^{2t} + \frac{4}{5} \sin(t) - \frac{8}{5} \cos(t)$.

Bladzijde 212

- 33 a $4y^2 - y^4 = 0$
 $y^2(4 - y^2) = 0$
 $y^2 = 0 \vee y^2 = 4$
 $y = 0 \vee y = 2 \vee y = -2$



- b Stel $k: y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt}\right]_{(3,3)} = 4 \cdot 3^2 - 3^4 = -45$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -45t + b \\ \text{door } (3, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -45 \cdot 3 + b = 3 \\ b = 138 \end{array}$$

Dus $k: y = -45t + 138$.

c In (2, 4) is helling = $\left[\frac{dy}{dt}\right]_{(2,4)} = 4 \cdot 4^2 - 4^4 = -192$.

l snijdt de oplossingskromme loodrecht in dit punt, dus $rc_l \cdot -192 = -1$ en dit geeft $rc_l = \frac{1}{192}$.
Stel $l: y = ax + b$ met $a = rc_l = \frac{1}{192}$.

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{192}t + b \\ \text{door } (2, 4) \end{aligned} \right\} \frac{1}{192} \cdot 2 + b = 4$$

$$b = 3\frac{95}{96}$$

Dus $l: y = \frac{1}{192}t + 3\frac{95}{96}$.

34 a $y = A \sin(t) + B \cos(t)$ geeft $y' = A \cos(t) - B \sin(t)$

$y' = A \cos(t) - B \sin(t)$ geeft $y'' = -A \sin(t) - B \cos(t)$

Substitutie van $y = A \sin(t) + B \cos(t)$, $y' = A \cos(t) - B \sin(t)$ en $y'' = -A \sin(t) - B \cos(t)$ in $y'' + 4y' + 5y = 8 \cos(t)$ geeft

$$-A \sin(t) - B \cos(t) + 4(A \cos(t) - B \sin(t)) + 5(A \sin(t) + B \cos(t)) = 8 \cos(t)$$

$$-A \sin(t) - B \cos(t) + 4A \cos(t) - 4B \sin(t) + 5A \sin(t) + 5B \cos(t) = 8 \cos(t)$$

$$4A \sin(t) + 4B \cos(t) + 4A \cos(t) - 4B \sin(t) = 8 \cos(t)$$

$$(4A - 4B) \sin(t) + (4A + 4B) \cos(t) = 8 \cos(t)$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$4A - 4B = 0 \wedge 4A + 4B = 8$$

$$4A = 4B \wedge 4A + 4B = 8$$

$$A = B \wedge 8B = 8$$

$$A = 1 \wedge B = 1$$

Dus $y = \sin(t) + \cos(t)$ is een particuliere oplossing van $y'' + 4y' + 5y = 8 \cos(t)$.

b De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

$$(\lambda + 2)^2 - 4 + 5 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = -1$$

$$(\lambda + 2)^2 = i^2$$

$$\lambda + 2 = i \vee \lambda + 2 = -i$$

$$\lambda = -2 + i \vee \lambda = -2 - i$$

De algemene oplossing van $y'' + 4y' + 5y = 0$ is $y(t) = (A \cos(t) + B \sin(t)) \cdot e^{-2t}$.

c $y(t) = (A \cos(t) + B \sin(t)) \cdot e^{-2t} + \sin(t) + \cos(t)$

$$y'(t) = (-A \sin(t) + B \cos(t)) \cdot e^{-2t} + (A \cos(t) + B \sin(t)) \cdot -2e^{-2t} + \cos(t) - \sin(t)$$

$$= (-A \sin(t) + B \cos(t) - 2A \cos(t) - 2B \sin(t)) \cdot e^{-2t} + \cos(t) - \sin(t)$$

$$y''(t) = (-A \cos(t) - B \sin(t) + 2A \sin(t) - 2B \cos(t)) \cdot e^{-2t} +$$

$$(-A \sin(t) + B \cos(t) - 2A \cos(t) - 2B \sin(t)) \cdot -2e^{-2t} - \sin(t) - \cos(t)$$

$$= (3A \cos(t) + 3B \sin(t) + 4A \sin(t) - 4B \cos(t)) \cdot e^{-2t} - \sin(t) - \cos(t)$$

Substitutie van y , y' en y'' in $y'' + 4y' + 5y = 8 \cos(t)$ geeft

$$(3A \cos(t) + 3B \sin(t) + 4A \sin(t) - 4B \cos(t)) \cdot e^{-2t} - \sin(t) - \cos(t) +$$

$$4((-A \sin(t) + B \cos(t) - 2A \cos(t) - 2B \sin(t)) \cdot e^{-2t} + \cos(t) - \sin(t)) +$$

$$5((A \cos(t) + B \sin(t)) \cdot e^{-2t} + \sin(t) + \cos(t)) = 8 \cos(t) \text{ ofwel}$$

$$(3A \cos(t) + 3B \sin(t) + 4A \sin(t) - 4B \cos(t) - 4A \sin(t) + 4B \cos(t) - 8A \cos(t) - 8B \sin(t) +$$

$$5A \cos(t) + 5B \sin(t)) \cdot e^{-2t} - \sin(t) - \cos(t) + 4 \cos(t) - 4 \sin(t) + 5 \sin(t) + 5 \cos(t) = 8 \cos(t)$$

$$8 \cos(t) = 8 \cos(t)$$

Deze vergelijking klopt voor elke waarde van t , dus de som van de oplossingen van de vragen a en b voldoet aan $y'' + 4y' + 5y = 8 \cos(t)$.

d $y(0) = 0$ geeft $(A \cos(0) + B \sin(0)) \cdot e^0 + \sin(0) + \cos(0) = 0$

$$A + 1 = 0$$

$$A = -1$$

$$y'(0) = 1 \text{ geeft } (-A \sin(0) + B \cos(0) - 2A \cos(0) - 2B \sin(0)) \cdot e^0 + \cos(0) - \sin(0) = 1$$

$$B - 2A + 1 = 1$$

$$B = 2A$$

$$A = -1 \text{ geeft } B = -2$$

De gevraagde oplossing is $y(t) = (-\cos(t) - 2 \sin(t)) \cdot e^{-2t} + \sin(t) + \cos(t)$.

- e Neem aan dat ook bij $y'' + 3y' + 2y = 2e^t$ geldt dat de algemene oplossing de som is van de algemene oplossing van de homogene vergelijking en een particuliere oplossing.

Stel $y = A \cdot e^t$ is een oplossing.

$$y = A \cdot e^t \text{ geeft } y' = A \cdot e^t$$

$$y' = A \cdot e^t \text{ geeft } y'' = A \cdot e^t$$

Substitutie van y , y' en y'' in $y'' + 3y' + 2y = 2e^t$ geeft

$$A \cdot e^t + 3A \cdot e^t + 2A \cdot e^t = 2e^t$$

$$6A \cdot e^t = 2e^t$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus $6A = 2$ en dit geeft $A = \frac{1}{3}$.

Dus $y = \frac{1}{3}e^t$ is een particuliere oplossing van $y'' + 3y' + 2y = 2e^t$.

Van $y'' + 3y' + 2y = 0$ is de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = -1 \vee \lambda = -2$$

De algemene oplossing van $y'' + 3y' + 2y = 0$ is $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$.

Uit bovenstaande volgt dat $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$ voldoet aan $y'' + 3y' + 2y = 2e^t$.

$$y(0) = 0 \text{ geeft } Ae^0 + Be^0 + \frac{1}{3}e^0 = 0$$

$$A + B + \frac{1}{3} = 0$$

$$A = -B - \frac{1}{3}$$

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{1}{3}e^t \text{ geeft } y'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$$

$$y'(0) = 1 \text{ geeft } -Ae^0 - 2Be^0 + \frac{1}{3}e^0 = 1$$

$$-A - 2B + \frac{1}{3} = 1$$

$$-A - 2B = \frac{2}{3}$$

Substitutie van $A = -B - \frac{1}{3}$ in $-A - 2B = \frac{2}{3}$ geeft $B + \frac{1}{3} - 2B = \frac{2}{3}$

$$-B = \frac{1}{3}$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$B = -\frac{1}{3} \text{ geeft } A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

De gevraagde oplossing is $y(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$.

- f Neem aan dat ook bij $y'' - 5y' + 4y = t^2$ geldt dat de algemene oplossing de som is van de algemene oplossing van de homogene vergelijking en een particuliere oplossing.

Stel $y = at^2 + bt + c$ is een oplossing.

$$y = at^2 + bt + c \text{ geeft } y' = 2at + b$$

$$y' = 2at + b \text{ geeft } y'' = 2a$$

Substitutie van y , y' en y'' in $y'' - 5y' + 4y = t^2$ geeft

$$2a - 5(2at + b) + 4(at^2 + bt + c) = t^2$$

$$2a - 10at - 5b + 4at^2 + 4bt + 4c = t^2$$

$$4at^2 + (-10a + 4b)t + 2a - 5b + 4c = t^2$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$4a = 1 \wedge -10a + 4b = 0 \wedge 2a - 5b + 4c = 0$$

$$a = \frac{1}{4} \wedge -2\frac{1}{2} + 4b = 0 \wedge \frac{1}{2} - 5b + 4c = 0$$

$$a = \frac{1}{4} \wedge 4b = 2\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} - 5b + 4c = 0$$

$$a = \frac{1}{4} \wedge b = \frac{5}{8} \wedge \frac{1}{2} - 3\frac{1}{8} + 4c = 0$$

$$a = \frac{1}{4} \wedge b = \frac{5}{8} \wedge 4c = 2\frac{5}{8}$$

$$a = \frac{1}{4} \wedge b = \frac{5}{8} \wedge c = \frac{21}{32}$$

Dus $y = \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{8}t + \frac{21}{32}$ is een particuliere oplossing van $y'' - 5y' + 4y = t^2$.

Van $y'' - 5y' + 4y = 0$ is de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda = 1 \vee \lambda = 4$$

De algemene oplossing van $y'' - 5y' + 4y = 0$ is $y(t) = Ae^t + Be^{4t}$.

Uit bovenstaande volgt dat $y(t) = Ae^t + Be^{4t} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{8}t + \frac{21}{32}$ voldoet aan $y'' - 5y' + 4y = t^2$.

$$y(0) = 0 \text{ geeft } Ae^0 + Be^0 + 0 + 0 + \frac{21}{32} = 0$$

$$A + B + \frac{21}{32} = 0$$

$$A = -B - \frac{21}{32}$$

$$y(t) = Ae^t + Be^{4t} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{8}t + \frac{21}{32} \text{ geeft } y'(t) = Ae^t + 4Be^{4t} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}$$

$$y'(0) = 10 \text{ geeft } Ae^0 + 4Be^0 + 0 + \frac{5}{8} = 10$$

$$A + 4B + \frac{5}{8} = 10$$

$$A + 4B = 9\frac{3}{8}$$

Substitutie van $A = -B - \frac{21}{32}$ in $A + 4B = 9\frac{3}{8}$ geeft $-B - \frac{21}{32} + 4B = 9\frac{3}{8}$

$$3B = 10\frac{1}{32}$$

$$B = 3\frac{11}{32}$$

$B = 3\frac{11}{32}$ geeft $A = -3\frac{11}{32} - \frac{21}{32} = -4$

De gevraagde oplossing is $y(t) = -4e^t + 3\frac{11}{32}e^{4t} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{8}t + \frac{21}{32}$.

- 35 a** Op $t = 0$ is $Z = 500\,000 \cdot 0,0035 = 1750$ kg.

Per uur komt er $60 \cdot 100 \cdot 0,0025 = 15$ kg zout bij.

Er stroomt zout weg met een snelheid van $60 \cdot \frac{100}{500\,000} Z = 0,012Z$ kg per uur.

Dus $\frac{dZ}{dt} = 15 - 0,012Z$ met Z in kg en t in uren.

- b** $Z = 1250$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dZ}{dt} = -0,012Z \text{ geeft } Z(t) = ce^{-0,012t}$$

De algemene oplossing is $Z(t) = ce^{-0,012t} + 1250$.

$$Z(0) = 1750 \text{ geeft } ce^{-0,012 \cdot 0} + 1250 = 1750$$

$$c + 1250 = 1750$$

$$c = 500$$

$$\text{Dus } Z = 1250 + 500e^{-0,012t}$$

- c** Voor $t = 24$ is $Z = 1250 + 500e^{-0,012 \cdot 24} = 1624,8\dots$ kg.

Dus het zoutgehalte is na 24 uur $\frac{1624,8\dots}{500\,000} \approx 0,00325$ kg/L, ofwel 3,25 gram/L.

- d** 3 gram per liter geeft $Z = 500\,000 \cdot 0,003 = 1500$ kg.

$$Z = 1500 \text{ geeft } 1250 + 500e^{-0,012t} = 1500$$

$$500e^{-0,012t} = 250$$

$$e^{-0,012t} = 0,5$$

$$-0,012t = \ln(0,5)$$

$$t = \frac{\ln(0,5)}{-0,012} = 57,76\dots$$

Dus na $57,76\dots \cdot 60 \approx 3466$ minuten is het zoutgehalte in het aquarium 3 gram/L.

Bladzijde 213

- 36 a** $y = 2$ is een horizontale raaklijn, dus $y' = 0$.

$$y = 2 \text{ en } y' = 0 \text{ geeft } \cos(t) \cdot 0 = 1 - 2 \cdot \sin(t)$$

$$0 = 1 - 2 \sin(t)$$

$$2 \sin(t) = 1$$

$$\sin(t) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}.$$

De coördinaten van de raakpunten zijn $(\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi, 2)$ en $(\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, 2)$ met $k \in \mathbb{Z}$.

- b** Substitutie van $y = a \sin(t) + b \cos(t)$ en $y' = a \cos(t) - b \sin(t)$ in $\cos(t) \cdot y' = 1 - y \cdot \sin(t)$ geeft

$$\cos(t) \cdot (a \cos(t) - b \sin(t)) = 1 - (a \sin(t) + b \cos(t)) \cdot \sin(t)$$

$$a \cos^2(t) - b \sin(t) \cos(t) = 1 - a \sin^2(t) - b \sin(t) \cos(t)$$

$$a \sin^2(t) + a \cos^2(t) = 1$$

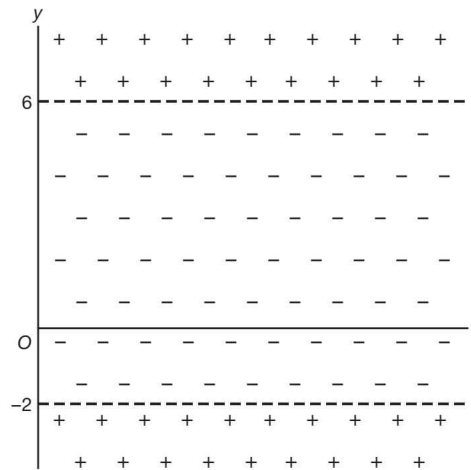
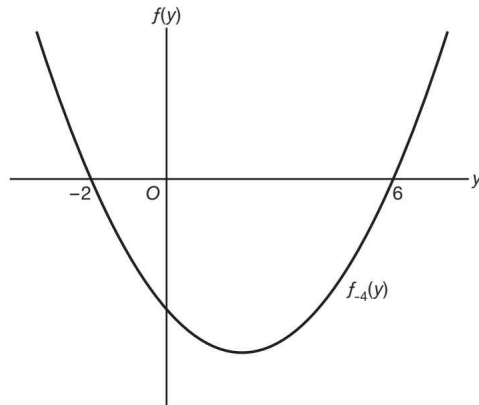
$$a(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = 1$$

$$a \cdot 1 = 1$$

$$a = 1$$

Dus voor $a = 1$ en $b \in \mathbb{R}$ is $y = a \sin(t) + b \cos(t)$ een oplossing van $\cos(t) \cdot y' = 1 - y \sin(t)$.

37 a $f_{-4}(y) = 0$ geeft $y^2 - 4y - 12 = 0$
 $(y + 2)(y - 6) = 0$
 $y = -2 \vee y = 6$



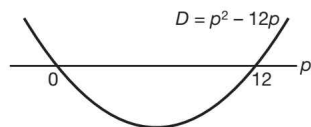
De lijn $y = -2$ is horizontale asymptoot van de oplossingskrommen voor $-2 < y(0) < 6 \vee y(0) < -2$.

- b** De oplossingskrommen zijn stijgend als $f_p(y) > 0$ voor elke waarde van y . Hieruit volgt dat voor de discriminant van $\frac{dy}{dt} = y^2 + py + 3p$ geldt $D < 0$.

$$D = p^2 - 12p$$

$$D < 0 \text{ geeft } p^2 - 12p < 0$$

$$p(p - 12) < 0$$



Uit de schets volgt $0 < p < 12$.

$f_p(y) > 0$ voor elke waarde van y als $0 < p < 12$, dus alle oplossingskrommen zijn stijgende functies als $0 < p < 12$.

c $y = 2t + q \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + q = 6 \\ \text{door } (5, 6) \end{array} \right. \quad q = -4$

Substitutie van $\frac{dy}{dt} = 2$ en $y = 6$ in $\frac{dy}{dt} = y^2 + py + 3p$ geeft

$$2 = 6^2 + 6p + 3p$$

$$9p = -34$$

$$p = -3\frac{7}{9}$$

Dus $p = -3\frac{7}{9}$ en $q = -4$.

38 a De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + \frac{g}{L} = 0$

$$\lambda^2 = -\frac{g}{L}$$

$$\lambda^2 = \frac{g}{L} i^2$$

$$\lambda = i\sqrt{\frac{g}{L}} \vee \lambda = -i\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Dus de algemene oplossing is $\theta(t) = A \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}\right) + B \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$.

- b** Stel de periode van $\theta(t) = A \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}\right) + b \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$ is p .

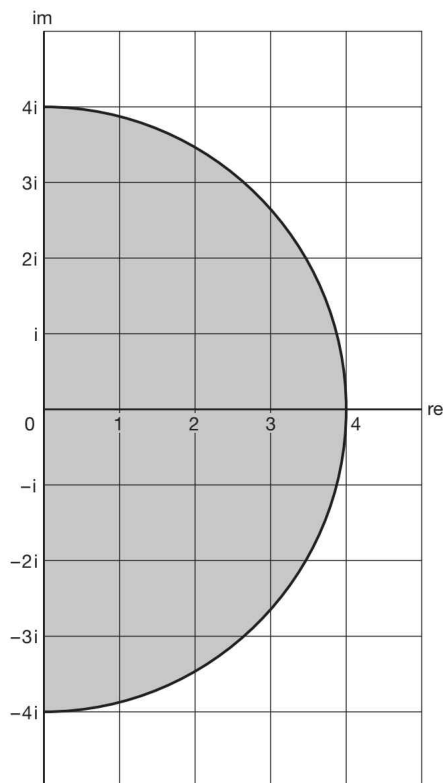
Dan geldt $\frac{2\pi}{p} = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$p\sqrt{\frac{g}{L}} = 2\pi$$

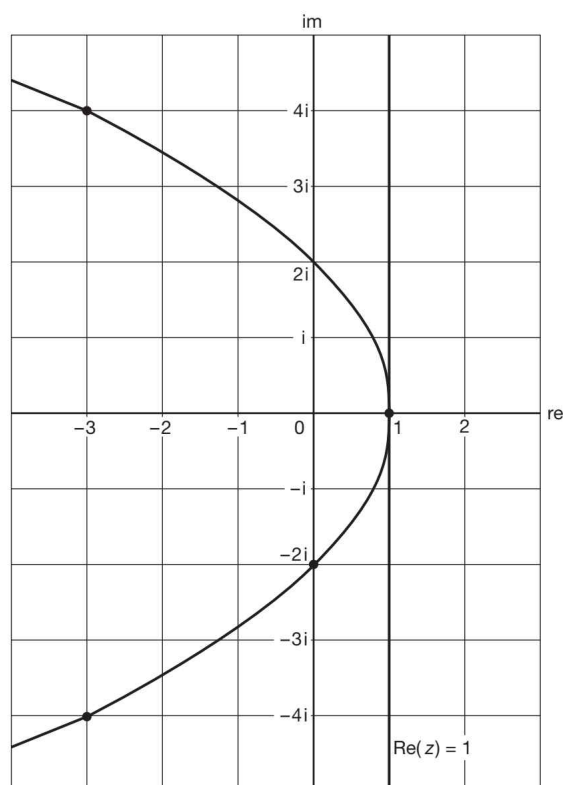
$$p = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

16 Complexe functies

- 39 a** $|z^2| = |z|^2 = 2^2 = 4$ en $\arg(z^2) = 2 \cdot \arg(z)$, dus $-\frac{1}{2}\pi \leq \arg(z^2) \leq \frac{1}{2}\pi$.



- b** $f(1 + bi) = (1 + bi)^2 = 1 + 2bi - b^2 = 1 - b^2 + 2bi$
 $b = 0$ geeft $f(1) = 1$
 $b = 1$ geeft $f(1 + i) = 2i$
 $b = 2$ geeft $f(1 + 2i) = -3 + 4i$
 $b = -1$ geeft $f(1 - i) = -2i$
 $b = -2$ geeft $f(1 - 2i) = -3 - 4i$



- c** $\text{Im}(z) = 4$, dus stel $z = a + 4i$.
 $f(z) = f(a + 4i) = (a + 4i)^2 = a^2 + 8ai - 16 = a^2 - 16 + 8ai$
 $\text{Re}(a^2 - 16 + 8ai) = 0$ dus $a^2 - 16 = 0$.
Dit geeft $a^2 = 16$, dus $a = 4 \vee a = -4$.
Dus $z = 4 + 4i$ en $z = -4 + 4i$ worden op de imaginaire as afgebeeld.

40 a $f(z) = 0$ geeft $(3 - i)z + 2 + i = 0$

$$(3 - i)z = -2 - i$$

$$z = \frac{-2 - i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{-6 - 2i - 3i - i^2}{9 - i^2} = \frac{-5 - 5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Het nulpunt is $-\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}$.

$f(z) = z$ geeft $(3 - i)z + 2 + i = z$

$$(2 - i)z = -2 - i$$

$$z = \frac{-2 - i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{-4 - 2i - 2i - i^2}{4 - i^2} = \frac{-3 - 4i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

Het dekpunt is $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

b $g(z) = 0$ geeft $z^2 + 4 = 0$

$$z^2 = -4$$

$$z^2 = 4i^2$$

$$z = 2i \vee z = -2i$$

De nulpunten zijn $2i$ en $-2i$.

$g(z) = z$ geeft $z^2 + 4 = z$

$$z^2 - z + 4 = 0$$

$$(z - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 4 = 0$$

$$(z - \frac{1}{2})^2 = -3\frac{3}{4}$$

$$(z - \frac{1}{2})^2 = \frac{15}{4}i^2$$

$$z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}i\sqrt{15} \vee z - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}i\sqrt{15}$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{15} \vee z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{15}$$

De dekpunten zijn $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{15}$ en $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{15}$.

Bladzijde 214

41 a A' roteren om 0 over $\frac{1}{2}\pi$ en dan translatie $(-3, -1)$ geeft $i(3 + 2i) - 3 - i = 3i - 2 - 3 - i = -5 + 2i$.

Dus A hoort bij $z = -5 + 2i$.

b B hoort bij het dekpunt van $f(z) = (1 + i)z + 2 - 3i$.

$f(z) = z$ geeft $(1 + i)z + 2 - 3i = z$

$$z + iz + 2 - 3i = z$$

$$iz = -2 + 3i$$

$$z = \frac{-2 + 3i}{i} \cdot \frac{i}{i} = 3 + 2i$$

Dus $z = 3 + 2i$ hoort bij B .

42 a $f(z) = 0$ geeft $(2 - 2i)z + 3 - i = 0$

$$(2 - 2i)z = -3 + i$$

$$z = \frac{-3 + i}{2 - 2i} \cdot \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{-6 - 6i + 2i + 2i^2}{4 - 4i^2} = \frac{-8 - 4i}{8} = -1 - \frac{1}{2}i$$

Het nulpunt is $-1 - \frac{1}{2}i$.

$f(z) = z$ geeft $(2 - 2i)z + 3 - i = z$

$$(1 - 2i)z = -3 + i$$

$$z = \frac{-3 + i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{-3 - 6i + i + 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{-5 - 5i}{5} = -1 - i$$

Het dekpunt is $-1 - i$.

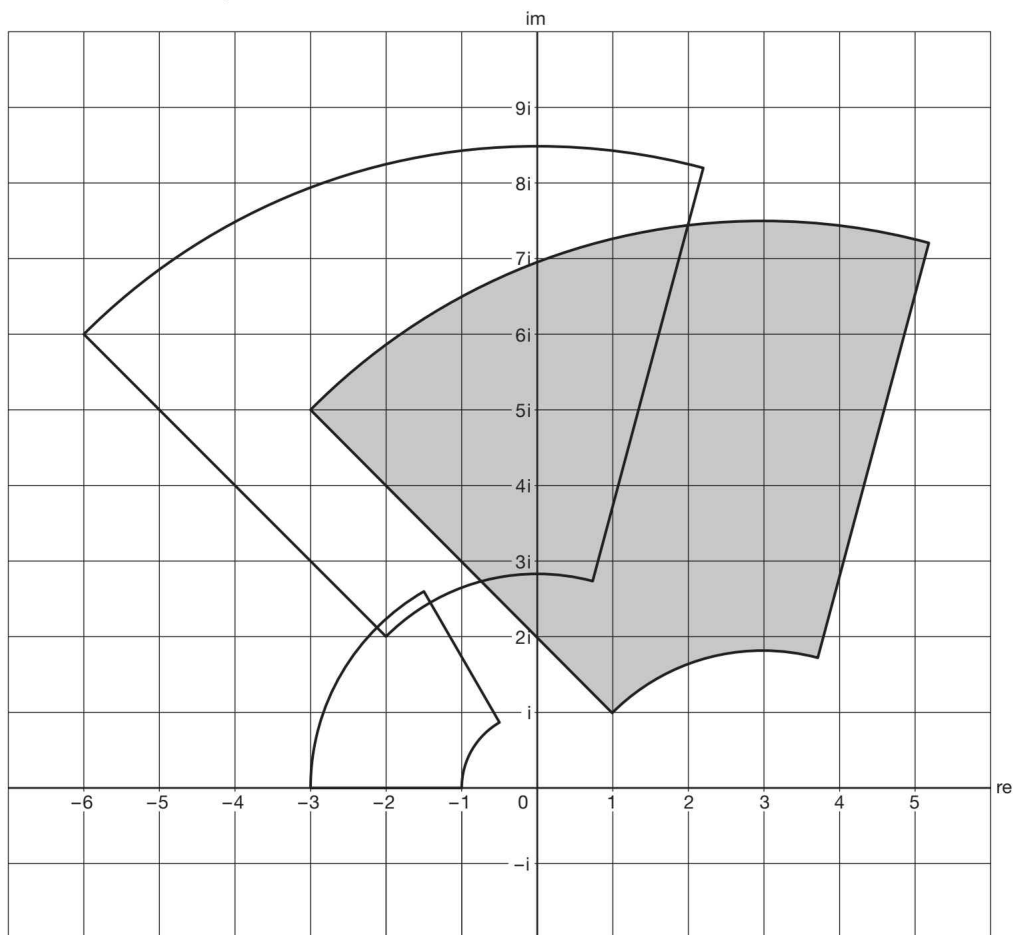
b $f(z) = 2 - 3i$ geeft $(2 - 2i)z + 3 - i = 2 - 3i$

$$(2 - 2i)z = -1 - 2i$$

$$z = \frac{-1 - 2i}{2 - 2i} \cdot \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{-2 - 2i - 4i - 4i^2}{4 - 4i^2} = \frac{2 - 6i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$$

Het origineel van $2 - 3i$ is $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$.

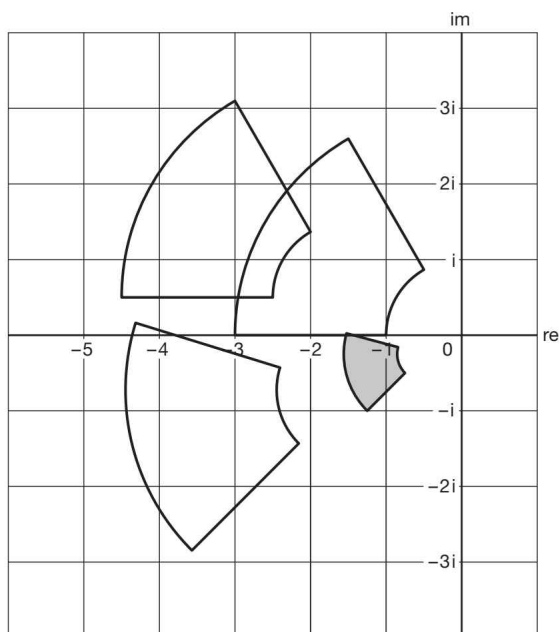
- c $|2 - 2i| = 2\sqrt{2}$ en $\text{Arg}(2 - 2i) = -\frac{1}{4}\pi$, dus vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met $2\sqrt{2}$, rotatie om 0 over $-\frac{1}{4}\pi$ en translatie $(3, -1)$.



$$\text{oppervlakte origineel} = \frac{\pi - \frac{2}{3}\pi}{2\pi} \cdot \pi \cdot (3^2 - 1^2) = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 8 = 1\frac{1}{3}\pi$$

$$\text{oppervlakte beeld} = (2\sqrt{2})^2 \cdot 1\frac{1}{3}\pi = 10\frac{2}{3}\pi$$

- d translatie $(-3, 1)$, vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ en rotatie om 0 over $\frac{1}{4}\pi$.



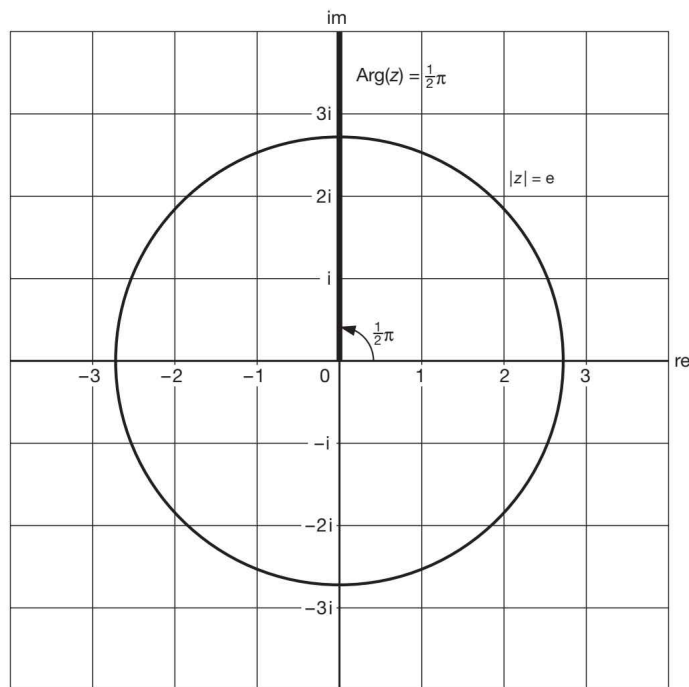
$$\text{oppervlakte beeld} = \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2 \cdot 1\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$$

- 43 a** $\operatorname{Re}(z) = 2$, dus $z = 2 + bi$ geeft $f(2 + bi) = e^{\frac{1}{2}(2 + bi)} = e^{1 + \frac{1}{2}bi} = e \cdot e^{\frac{1}{2}bi}$.

Dus het beeld van $\operatorname{Re}(z) = 2$ is de cirkel met middelpunt 0 en straal e , ofwel de cirkel met vergelijking $|z| = e$.

$\operatorname{Im}(z) = \pi$, dus $z = a + \pi i$ geeft $f(a + \pi i) = e^{\frac{1}{2}(a + \pi i)} = e^{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\pi i} = e^{\frac{1}{2}a} \cdot e^{\frac{1}{2}\pi i}$.

Dus het beeld van $\operatorname{Im}(z) = \pi$ is de halve lijn met beginpunt 0 die een hoek van $\frac{1}{2}\pi$ radialen maakt met de positieve reële as, ofwel de halve lijn met vergelijking $\operatorname{Arg}(z) = \frac{1}{2}\pi$.

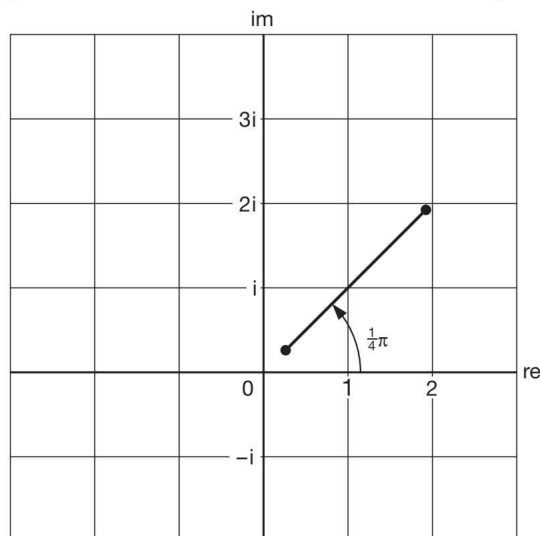


- b** De eindpunten van het lijnstuk zijn $-2 + \frac{1}{2}\pi i$ en $2 + \frac{1}{2}\pi i$, dus $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}\pi$ is vast.

$z = -2 + \frac{1}{2}\pi i$ geeft $f(-2 + \frac{1}{2}\pi i) = e^{\frac{1}{2}(-2 + \frac{1}{2}\pi i)} = e^{-1 + \frac{1}{4}\pi i} = e^{-1} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$

$z = 2 + \frac{1}{2}\pi i$ geeft $f(2 + \frac{1}{2}\pi i) = e^{\frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}\pi i)} = e^{1 + \frac{1}{4}\pi i} = e \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$

Dus het beeld is het lijnstuk onder een hoek van $\frac{1}{4}\pi$ radialen met de positieve reële as tussen de punten die een afstand hebben tot 0 van respectievelijk e^{-1} en e .



- 44 a** Bij een punt op de eenheidscirkel hoort het complexe getal $z = e^{i\varphi}$.

Dit geeft $f(ie^{i\varphi}) = \ln(ie^{i\varphi}) = \ln(e^{\frac{1}{2}\pi i} \cdot e^{i\varphi}) = \ln(e^{\frac{1}{2}\pi i}) + \ln(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\pi i + i\varphi = (\frac{1}{2}\pi + \varphi)i$

Omdat is afgesproken dat $-\pi < \operatorname{Im}(f(z)) \leq \pi$ is het beeld van de eenheidscirkel het lijnstuk met eindpunten $-\pi i$ en πi . Zie de figuur bij vraag b.

- b Om het beeld van $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}\pi$ te tekenen, bereken je een aantal functiewaarden.

$$f\left(\frac{1}{2}\pi - 3i\right) \approx 1,22 + 0,48i$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi - 2i\right) \approx 0,93 + 0,67i$$

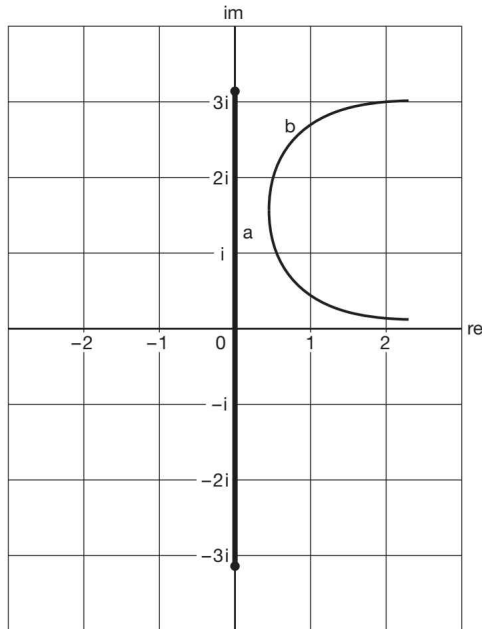
$$f\left(\frac{1}{2}\pi - i\right) \approx 0,62 + 1,00i$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) \approx 0,45 + 1,57i$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi + i\right) \approx 0,62 + 2,14i$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi + 2i\right) \approx 0,93 + 2,48i$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi + 3i\right) \approx 1,22 + 2,66i$$



45 a $z = u + v$ en $-9 = -3uv$ geeft $u^3 + v^3 = 80$

$$\left. \begin{array}{l} u^3 + \left(\frac{3}{u}\right)^3 = 80 \\ u^3 + \frac{27}{u^3} = 80 \end{array} \right\}$$

$$u^6 - 80u^3 + 27 = 0$$

$$D = 6292, \text{ dus } \sqrt{D} = 22\sqrt{13}$$

$$u^3 = \frac{80 + 22\sqrt{13}}{2} = 40 + 11\sqrt{13} \text{ is een oplossing}$$

$$v^3 = 80 - u^3 = 80 - (40 + 11\sqrt{13}) = 40 - 11\sqrt{13}$$

$$z = \sqrt[3]{40 + 11\sqrt{13}} + \sqrt[3]{40 - 11\sqrt{13}} = 5$$

$$\begin{array}{r} z - 5 \mid z^3 - 5z^2 - 9z - 80 \\ \underline{z^3 - 5z^2} \\ 9z - 80 \\ \underline{9z - 80} \\ 0 \end{array}$$

$$z^2 + 5z + 16 = 0$$

$$\left(z + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} + 16 = 0$$

$$\left(z + 2\frac{1}{2}\right)^2 = -9\frac{3}{4}$$

$$\left(z + 2\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{39}{4}i^2$$

$$z + 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}i\sqrt{39} \vee z + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}i\sqrt{39}$$

$$z = -2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{39} \vee z = -2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{39}$$

$$\text{Dus } z = 5 \vee z = -2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{39} \vee z = -2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{39}.$$

b $z^3 + 4z^2 - 24 = 0$

$a = 4, b = 0$ en $c = -24$

$p = b - \frac{1}{3}a^2 = 0 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 = -\frac{16}{3}$ en $q = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c = -\frac{2}{27} \cdot 4^3 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 0 - (-24) = 19\frac{7}{27}$

$$z = -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} =$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 4 + \sqrt[3]{9\frac{17}{27} + \sqrt{\left(9\frac{17}{27}\right)^2 + \left(-1\frac{7}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{9\frac{17}{27} - \sqrt{\left(9\frac{17}{27}\right)^2 + \left(-1\frac{7}{9}\right)^3}} = 2$$

$z^3 - 2 / z^3 + 4z^2 - 24 \setminus z^2 + 6z + 12$

$$\begin{array}{r} z^3 - 2z^2 \\ \hline 6z^2 - \\ 6z^2 - 12z \\ \hline 12z - 24 \\ 12z - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$z^2 + 6z + 12 = 0$

$(z + 3)^2 - 9 + 12 = 0$

$(z + 3)^2 = -3$

$(z + 3)^2 = 3i^2$

$z + 3 = i\sqrt{3} \vee z + 3 = -i\sqrt{3}$

$z = -3 + i\sqrt{3} \vee z = -3 - i\sqrt{3}$

Dus $z = 2 \vee z = -3 + i\sqrt{3} \vee z = -3 - i\sqrt{3}$.

c $z^3 - 6z^2 + 18z - 40 = 0$

$a = -6, b = 18$ en $c = -40$

$p = b - \frac{1}{3}a^2 = 18 - \frac{1}{3} \cdot (-6)^2 = 6$ en $q = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c = -\frac{2}{27} \cdot (-6)^3 + \frac{1}{3} \cdot (-6) \cdot 18 - (-40) = 20$

$$z = -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} =$$

$$-\frac{1}{3} \cdot (-6) + \sqrt[3]{10 + \sqrt{10^2 + 2^3}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{10^2 + 2^3}} = 4$$

$z^3 - 4 / z^3 - 6z^2 + 18z - 40 \setminus z^2 - 2z + 10$

$$\begin{array}{r} z^3 - 4z^2 \\ \hline -2z^2 + 18z \\ -2z^2 + 8z \\ \hline 10z - 40 \\ 10z - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$z^2 - 2z + 10 = 0$

$(z - 1)^2 - 1 + 10 = 0$

$(z - 1)^2 = -9$

$(z - 1)^2 = 9i^2$

$z - 1 = 3i \vee z - 1 = -3i$

$z = 1 + 3i \vee z = 1 - 3i$

Dus $z = 4 \vee z = 1 + 3i \vee z = 1 - 3i$.

46 a $c = a + \frac{1}{2}(\cos(120^\circ) + i\sin(120^\circ))(b - a) = a + \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{2}{3}\pi i}$

b $d = c + (\cos(60^\circ) + i\sin(60^\circ))(b - c)$

$= c + (b - c)e^{\frac{1}{3}\pi i}$

$= c + be^{\frac{1}{3}\pi i} - ce^{\frac{1}{3}\pi i}$

$= a + \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{2}{3}\pi i} + be^{\frac{1}{3}\pi i} - \left(a + \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)e^{\frac{1}{3}\pi i}$

Dus $d - a = \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{2}{3}\pi i} + be^{\frac{1}{3}\pi i} - \left(a + \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)e^{\frac{1}{3}\pi i}$

$= \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{2}{3}\pi i} + be^{\frac{1}{3}\pi i} - ae^{\frac{1}{3}\pi i} - \frac{1}{2}(b - a)e^{\pi i}$

$= \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{2}{3}\pi i} + (b - a)e^{\frac{1}{3}\pi i} + \frac{1}{2}(b - a)$

$= (b - a)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}\pi i} + e^{\frac{1}{3}\pi i}\right)$

- c $d - a = (b - a)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}\pi i} + e^{\frac{1}{3}\pi i}\right)$
 $= (b - a)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) + \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)$
 $= (b - a)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$
 $= (b - a)\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i\sqrt{3}\right)$
 $= \frac{1}{2}(b - a)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)$
 $= \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{1}{3}\pi i}$
- d $|d - a| = \left|\frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{1}{3}\pi i}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \cdot |b - a| \cdot |e^{\frac{1}{3}\pi i}| = \frac{1}{2} \cdot |b - a| \cdot 1 = \frac{1}{2}|b - a|$, dus $AD = \frac{1}{2}AB$.
 $d - a = \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{1}{3}\pi i} = \frac{1}{2}(b - a)\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)$
 $\frac{1}{3}\pi$ komt overeen met 60° .
Dus $\angle BAD = 60^\circ$, en dus is AD de bissectrice van $\angle A = 120^\circ$.

Bladzijde 215

- 47 a Alle punten Z die gelijke afstanden hebben tot de punten P en Q vormen de middelloodlijn van het lijnstuk PQ . Voor deze punten geldt $d(Z, P) = d(Z, Q)$. Dus een vergelijking van een lijn in het complexe vlak is $|z - p| = |z - q|$. Hierin zijn p en q de complexe getallen die horen bij de punten P en Q en is z het complexe getal dat hoort bij een punt van de middelloodlijn van het lijnstuk PQ .
- b $|z - p|^2 = |z - q|^2$
 $(z - p)(\overline{z - p}) = (z - q)(\overline{z - q})$
 $(z - p)(\bar{z} - \bar{p}) = (z - q)(\bar{z} - \bar{q})$
 $z\bar{z} - z\bar{p} - p\bar{z} + p\bar{p} = z\bar{z} - z\bar{q} - q\bar{z} + q\bar{q}$
 $(\bar{q} - \bar{p})z + (q - p)\bar{z} + |p|^2 - |q|^2 = 0$
 $\mu z + \bar{\mu} \cdot \bar{z} + c = 0$ met $\mu = \bar{q} - \bar{p}$ een complex getal en $c = |p|^2 - |q|^2$ een reëel getal.
- c $z = 0$ geeft $\bar{z} = 0$
Invullen in $\mu z + \bar{\mu} \cdot \bar{z} + c = 0$ geeft $0 + 0 + c = 0$, dus $c = 0$.
Dus $\mu z + \bar{\mu} \cdot \bar{z} = 0$ met μ een complex getal is een vergelijking van een lijn door 0.
- d $|z - m| = r$ geeft $|z - m|^2 = r^2$
 $(z - m)(\overline{z - m}) = r^2$
 $(z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2$
 $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + m\bar{m} = r^2$
 $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + |m|^2 - r^2 = 0$
 $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + d = 0$ met $d = |m|^2 - r^2$ een reëel getal
- e $z = 0$ geeft $\bar{z} = 0$
Invullen in $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + d = 0$ geeft $0 - 0 - 0 + d = 0$, dus $d = 0$.
Dus $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} = 0$ is een vergelijking van een cirkel door 0.
- f Uit $w = \frac{1}{z}$ en $\bar{w} = \frac{1}{\bar{z}}$ volgt $z = \frac{1}{w}$ en $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$.
Substitutie in $\mu z + \bar{\mu} \cdot \bar{z} = 0$ geeft $\mu \cdot \frac{1}{w} + \bar{\mu} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = 0$ ofwel $\mu\bar{w} + \bar{\mu}w = 0$.
Dit is een vergelijking van een lijn door 0.
- g Substitutie van $z = \frac{1}{w}$ en $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ in $\mu z + \bar{\mu} \cdot \bar{z} + c$ geeft $\mu \cdot \frac{1}{w} + \bar{\mu} \cdot \frac{1}{\bar{w}} + c = 0$
 $\mu\bar{w} + \bar{\mu}w + c\bar{w}w = 0$
 $w\bar{w} + \frac{\bar{\mu}}{c} \cdot w + \frac{\mu}{c} \cdot \bar{w} = 0$
- Dit is een vergelijking van een cirkel die door 0 gaat.
Dus het beeld van een lijn die niet door 0 gaat ligt op een cirkel die door 0 gaat.
- h Substitutie van $z = \frac{1}{w}$ en $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ in $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} = 0$ geeft $\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} - \bar{m} \cdot \frac{1}{\bar{w}} - m \cdot \frac{1}{w} = 0$
 $1 - \bar{m} \cdot \bar{w} - mw = 0$
 $mw + \bar{m} \cdot \bar{w} - 1 = 0$
- Dit is een vergelijking van een lijn die niet door 0 gaat.
Dus het beeld van een cirkel die door 0 gaat ligt op een lijn die niet door 0 gaat.

i Substitutie van $z = \frac{1}{w}$ en $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ in $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + d = 0$ geeft $\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} - \bar{m} \cdot \frac{1}{w} - m \cdot \frac{1}{\bar{w}} + d = 0$

$$1 - \bar{m} \cdot \bar{w} - mw + dw\bar{w} = 0$$

$$w\bar{w} - \frac{m}{d} \cdot w - \frac{\bar{m}}{d} \cdot \bar{w} + \frac{1}{d} = 0$$

Dit is een vergelijking van een lijn die niet door 0 gaat.

Dus het beeld van een cirkel die niet door 0 gaat ligt op een lijn die niet door 0 gaat.

48 a $\cos(2z) = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2}$

$$1 - 2\sin^2(z) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{e^{2iz} - 2e^0 + e^{-2iz}}{-4} = \frac{-4 - 2e^{2iz} + 4 - 2e^{-2iz}}{-4} = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2}$$

Dus voor elk complex getal z geldt $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z)$.

b $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\cos\left(z - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{e^{i \cdot (z - \frac{1}{2}\pi)} + e^{-i \cdot (z - \frac{1}{2}\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} \cdot e^{-\frac{1}{2}i\pi} + e^{-iz} \cdot e^{\frac{1}{2}i\pi}}{2} = \frac{-i \cdot e^{iz} + i \cdot e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Dus voor elk complex getal z geldt $\cos\left(z - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(z)$.

Bladzijde 216

- 49 a • Als z reëel is, dan is $z = a$ en $\bar{z} = a$.

Dus geldt $z = \bar{z}$.

- Als z imaginair is, dan is $z = bi$ en $\bar{z} = -bi$

Dus geldt $z = -\bar{z}$.

- Als z op de eenheidscirkel ligt, dan geldt $|z|^2 = 1$
- $$z \cdot \bar{z} = 1$$
- $$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

- Als $AB \parallel CD$, dan geldt $a - b = k \cdot (c - d)$ met k reëel.

Hieruit volgt dat $\frac{a-b}{c-d} = k$, dus dat $\frac{a-b}{c-d}$ reëel is.

- Als de punten A, B en C op één lijn liggen, dan geldt $c - b = k \cdot (c - a)$ met k reëel.

Hieruit volgt dat $\frac{c-b}{c-a} = k$, dus dat $\frac{c-b}{c-a}$ reëel is.

- Als $AB \perp CD$, dan geldt $a - b = ki \cdot (c - d)$ met k reëel.

Hieruit volgt dat $\frac{a-b}{c-d} = ki$, dus dat $\frac{a-b}{c-d}$ imaginair is.

b $AB \parallel CD$, dus $\frac{a-b}{c-d}$ is reëel, dus $\frac{a-b}{c-d} = \overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)} = \frac{\overline{a-b}}{\overline{c-d}} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{d}} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{d-c}{cd}} = \frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{cd}{ab}$

Dus $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{cd}{ab}$, en dit geeft $ab = cd$.

- c $AB \perp AC$, dus $\frac{a-b}{a-c}$ is imaginair, dus volgens het uitgewerkte voorbeeld boven vraag b in het leerboek

geldt dan $ab = -ac$, en dit geeft $ab + ac = 0$ ofwel $a(b+c) = 0$. En omdat punt A op de eenheidscirkel ligt, volgt hieruit dat $b+c=0$.

- d P op de lijn AB , dus $\frac{p-a}{p-b}$ is reëel, dus $\frac{p-a}{p-b} = \overline{\left(\frac{p-a}{p-b}\right)} = \frac{\overline{p-a}}{\overline{p-b}} = \frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{p}-\bar{b}}$. Dit geeft

$$(p-a)(\bar{p}-\bar{b}) = (p-b)(\bar{p}-\bar{a})$$

$$p\bar{p} - p\bar{b} - a\bar{p} + ab = p\bar{p} - p\bar{a} - b\bar{p} + b\bar{a}$$

$$p\bar{a} - p\bar{b} = a\bar{p} - b\bar{p} - ab + b\bar{a}$$

$$p(\bar{a}-\bar{b}) = (a-b)\bar{p} + \bar{a}b - ab$$

$$p = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} \bar{p} + \frac{\bar{a}b - ab}{\bar{a}-\bar{b}}$$

$$p = \frac{a-b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \bar{p} + \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$p = \frac{a-b}{\left(\frac{b-a}{ab}\right)} \bar{p} + \frac{\left(\frac{b^2-a^2}{ab}\right)}{\left(\frac{b-a}{ab}\right)}$$

$$p = -ab\bar{p} + \frac{b^2-a^2}{b-a}$$

$$p = -ab\bar{p} + \frac{(b+a)(b-a)}{b-a}$$

$$p = a + b - ab\bar{p}$$

- e S op AB geeft $s = a + b - ab\bar{s}$ (zie vraag d), en dit geeft $ab\bar{s} = a + b - s$

$$\bar{s} = \frac{a+b-s}{ab}$$

- S op CD geeft $s = c + d - cd\bar{s}$ (zie vraag d), en dit geeft $cd\bar{s} = c + d - s$

$$\bar{s} = \frac{c+d-s}{cd}$$

Hieruit volgt $\frac{a+b-s}{ab} = \frac{c+d-s}{cd}$

$$ab(c+d-s) = cd(a+b-s)$$

$$abc + abd - abs = acd + bcd - cds$$

$$abs - cds = abc + abd - acd - bcd$$

$$s(ab - cd) = ab(c + d) - cd(a + b)$$

$$s = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$

- f De lijnen AP en CQ snijden elkaar in punt H geeft $h = \frac{ap(c+q) - cq(a+p)}{ap - cq}$ (zie vraag e).

$AP \perp BC$ geeft $ap = -bc$ (zie het uitgewerkte voorbeeld boven vraag b in het leerboek), dus $p = \frac{-bc}{a}$.

$CQ \perp AB$ geeft $cq = -ab$ (zie het uitgewerkte voorbeeld boven vraag b in het leerboek), dus $q = \frac{-ab}{c}$.

Uit bovenstaande volgt $h = \frac{-bc\left(c - \frac{ab}{c}\right) + ab\left(a - \frac{bc}{a}\right)}{-bc + ab} = \frac{a\left(a - \frac{bc}{a}\right) - c\left(c - \frac{ab}{c}\right)}{a - c} = \frac{a^2 - bc - c^2 + ab}{a - c}$

$$= \frac{(a+c)(a-c) + b(a-c)}{a-c} = a + b + c.$$

Bladzijde 217

- 50 a Voor de weerstand geldt $U_R = I \cdot R = 10e^{i \cdot 1000\pi t} \cdot 500 = 5000e^{i \cdot 1000\pi t}$.

Voor de condensator geldt $\frac{dQ}{dt} = I = 10e^{i \cdot 1000\pi t}$ geeft $Q = \int 10e^{i \cdot 1000\pi t} dt = \frac{10}{1000\pi i} e^{i \cdot 1000\pi t} = -\frac{1}{100\pi} i e^{i \cdot 1000\pi t}$.

Uit $Q = C \cdot U$ volgt $U_C = \frac{Q}{C} = \frac{-\frac{1}{100\pi} i e^{i \cdot 1000\pi t}}{0,001} = -\frac{10}{\pi} i e^{i \cdot 1000\pi t}$.

Voor de spoel geldt $U_{\text{spoel}} = L \cdot \frac{dI}{dt} = 0,01 \cdot 10000\pi i e^{i \cdot 1000\pi t} = 100\pi i e^{i \cdot 1000\pi t}$.

$$U = U_R + U_C + U_{\text{spoel}} = 5000e^{i \cdot 1000\pi t} - \frac{10}{\pi} i e^{i \cdot 1000\pi t} + 100\pi i e^{i \cdot 1000\pi t} = \left(5000 + \left(100\pi - \frac{10}{\pi}\right)i\right)e^{i \cdot 1000\pi t}$$

b $Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{\left|5000 + \left(100\pi - \frac{10}{\pi}\right)i\right|}{10} = \frac{\sqrt{5000^2 + \left(100\pi - \frac{10}{\pi}\right)^2}}{10} \approx 501 \Omega$

- c $\arg(U) - \arg(I) = \arg\left(5000 + \left(100\pi - \frac{10}{\pi}\right)i\right) + 1000\pi t - 1000\pi t = \arg\left(5000 + \left(100\pi - \frac{10}{\pi}\right)i\right) \approx 0,06 \text{ rad}$
 U loopt 0,06 rad voor op I .

- 51 a** Voor lage frequenties heeft de condensator die in serie met de tweeter is geschakeld een hoge weerstand, terwijl de weerstand voor hoge frequenties juist heel laag is. Hierdoor zal de tweeter voornamelijk hoge tonen weergeven.
 Voor hoge frequenties heeft de spoel die in serie met de woofer is geschakeld een hoge weerstand, terwijl de weerstand voor lage frequenties juist heel laag is. Hierdoor zal de woofer voornamelijk lage tonen weergeven.
 In de schakeling met de squawker onderdrukt de condensator de hoge en de spoel de lage frequenties. Vandaar dat bij een juiste keuze van de condensator en de spoel de squawker vooral tonen uit het middengebied weer zal geven.

b Bij 100 Hz geldt $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 1^2} \approx 15,9 \, \Omega$.

Bij 10 000 Hz geldt $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi \cdot 10\,000 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 1^2} \approx 1,01 \, \Omega$.

c Voor de impedantie geldt de formule $Z = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$.

Bij 100 Hz geldt $Z = \sqrt{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-3})^2 + 1^2} \approx 1,18 \, \Omega$.

Bij 10 000 Hz geldt $Z = \sqrt{(2\pi \cdot 10\,000 \cdot 10^{-3})^2 + 1^2} \approx 63 \, \Omega$.