

GETAL & RUIMTE 4

GETAL & RUIMTE

vwo D deel 4

ELFDE EDITIE, 2016

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers Groningen

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo D deel 4

Samen met de delen 1, 2 en 3 van vwo wiskunde D bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde D, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak vwo wiskunde D is 440 uur.

Omdat het vak wiskunde D geen Centraal Examen kent, is het mogelijk met name de domeinen F en G vrij in te vullen. Van de invulling die *Getal & Ruimte* hierbij heeft gekozen, kan dus worden afgeweken. In de voorwoorden wordt dit aangegeven.

Deel 4 is bedoeld voor het zesde leerjaar van het vwo.

Hoofdstuk 13 Kegelsneden sluit aan op hoofdstuk 9 uit deel 3. In hoofdstuk 13 worden de kegelsneden met coördinaten behandeld. Bij wiskunde B zijn de cirkelvergelijkingen al aan de orde geweest. Nieuw zijn de vergelijkingen van de kegelsneden parabool, ellips en hyperbool. De vergelijkingen van de raaklijnen en de poollijnen worden algemeen voor alle kegelsneden behandeld, waarbij y wordt gediifferentieerd naar x . In de laatste paragraaf worden vergelijkingen van krommen opgesteld waarop punten S liggen die afhankelijk zijn van variabele punten P . Ook worden enkele omwentelingsoppervlakken behandeld. Hiermee is het gehele domein D: Meetkunde behandeld.

Hoofdstuk 14 Mathematische statistiek bevat de onderwerpen correlatie en regressie (subdomein B6) en het toetsen van hypothesen (subdomein B5).

In hoofdstuk 15 Continue dynamische modellen vindt de behandeling plaats van het subdomein C2 (Continue dynamische systemen). In het begin van het hoofdstuk ligt de nadruk op het opstellen van dynamische modellen. Vanaf paragraaf 15.2 komen verschillende typen differentiaalvergelijkingen aan de orde. Het eindniveau wordt bereikt met het toepassen van differentiaalvergelijkingen van de tweede orde bij gedempte trillingen, hetgeen past bij subdomein C3.

Hoofdstuk 16 Complexe functies sluit aan op hoofdstuk 10 van deel 3. In de paragrafen 16.1 en 16.2 worden de complexe functies behandeld. In de paragrafen 16.3, 16.4 en 16.5 worden enkele toepassingen van complexe getallen aangeboden. De toepassing in paragraaf 16.3 (Meetkunde met complexe getallen) wordt in het programma genoemd. Indien gewenst kan een keuze worden gemaakt uit de toepassingen die in de paragrafen 16.4 en 16.5 worden aangeboden. Daarbij kan een overweging zijn of de leerling in een vervolgstudie kiest voor de meer wiskundige kant (dan valt het doornemen van paragraaf 16.4 Derdegraadsvergelijkingen te overwegen), of de meer natuurkundige kant (dan komt paragraaf 16.5 Wisselspanning in aanmerking).

Online materiaal

In het *Docentenpakket online* staat een studiewijzer bij elk hoofdstuk. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

najaar 2016

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit wiskunde B of uit voorgaande hoofdstukken die je in het hoofdstuk paraat moet hebben.

O 2 Oriënterende opgave

Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [▶▶6] Testopgave

Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ▶▶ staat.

4 Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 Reflecterende opgave

In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 Afsluitende opgave

De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 Denkopgave

Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[▶ GR]

Verwijzing naar een module in de handleiding bij de grafische rekenmachine.

[▶ WERKBLAD]

Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

13 Kegelsneden 6

Voorkennis Meetkundige plaatsen 8

13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool 14

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool 20

13.3 Raaklijnen en poollijnen 32

13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken 39
Diagnostische toets 46

14 Mathematische statistiek 48

Voorkennis Kansverdelingen en correlatie 50

14.1 Regressielijnen en correlatiecoëfficiënt 55

14.2 Regressievoorspellingen 71

14.3 Beslissen op grond van een steekproef 78

14.4 Eenzijdig en tweezijdig toetsen 87

14.5 Binomiale toetsen 93
Diagnostische toets 102

15 Continue dynamische modellen 104

Voorkennis Discrete dynamische modellen en de tweede wet van Newton 106

15.1 Dynamische modellen 109

15.2 Differentiaalvergelijkingen 117

15.3 Oplossingen van differentiaalvergelijkingen 125

15.4 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde 133

15.5 Differentiaalvergelijkingen van de tweede orde 143
Diagnostische toets 150

16 Complexe functies 152

Voorkennis Complexe getallen 154

16.1 Lineaire complexe functies 158

16.2 Niet-lineaire complexe functies 166

16.3 Meetkunde met complexe getallen 175

16.4 Derdegraadsvergelijkingen 180

16.5 Wisselspanning 188
Diagnostische toets 200

Gemengde opgaven 202

Overzicht GR-handleiding 218

Trefwoordenregister 219

Verantwoording 222

Het nieuwe station van Arnhem is in het najaar van 2015 gereedgekomen. Aan de buitenkant van het sierlijke gebouw valt vooral het dak op, dat grotendeels is opgebouwd uit regelvlakken. Dit zijn gebogen oppervlakken, zoals een kegel, die uit rechte lijnen bestaan. Om voor vloeiende overgangen te zorgen heeft elke aansluiting hetzelfde raakvlak, waardoor het dak geen knikken heeft.

Wat leer je?

- Dat cirkel, parabool, ellips en hyperbool kegelsneden zijn.
- Waar de naam kegelsnede vandaan komt.
- Vergelijkingen van kegelsneden opstellen en gebruiken.
- Vergelijkingen opstellen van raaklijnen en poollijnen bij kegelsneden.
- Werken met variabele punten en omwentelingsoppervlakken.



Kegelsneden

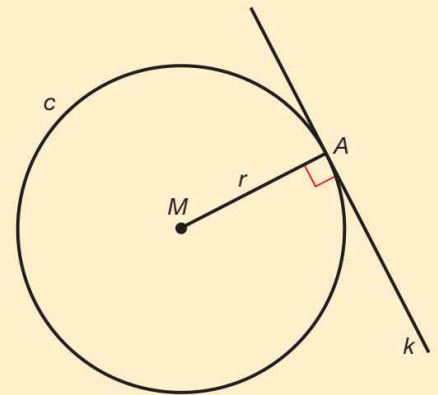
13



Voorkennis Meetkundige plaatsen

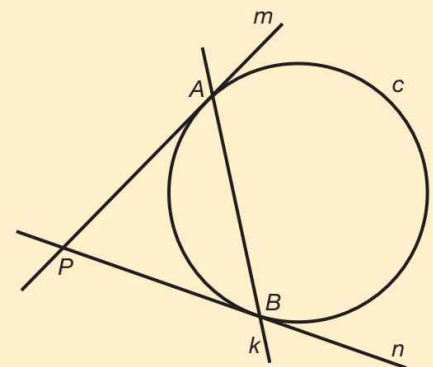
Theorie A Cirkel en parabool

Een cirkel is de verzameling van alle punten P met gelijke afstanden tot een punt. Noemen we het middelpunt van de cirkel M en de straal r , dan geldt $d(P, M) = r$. Voor de raaklijn k in het punt A van de cirkel c met middelpunt M en straal r geldt $d(M, k) = d(M, A) = r$.



figuur 13.1 De lijn k raakt c in A .

In figuur 13.2 snijdt de lijn k de cirkel c in de punten A en B . De lijn m raakt c in A en de lijn n raakt c in B . De lijnen m en n snijden elkaar in het punt P . Het punt P heet de pool van de lijn k , en de lijn k heet de poollijn van de pool P .



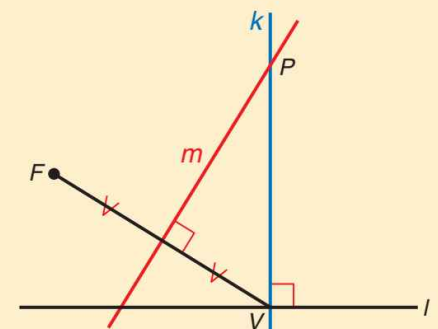
figuur 13.2 Pool en poollijn bij een cirkel.

Een parabool is de verzameling van alle punten P die gelijke afstanden hebben tot een punt en een lijn. Dit punt is het brandpunt F en de lijn is de richtlijn l .

Er geldt dus $d(P, F) = d(P, l)$.

Voor het tekenen van een punt P van de parabool met brandpunt F en richtlijn l ga je als volgt te werk.

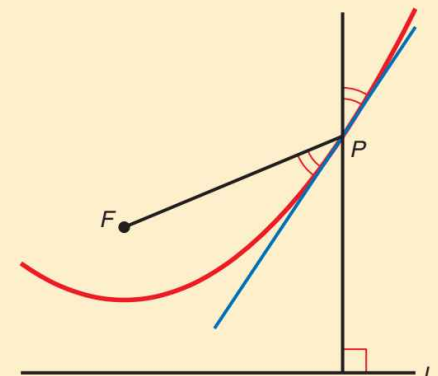
- 1 Teken een punt V op l .
- 2 Teken door V de loodlijn k op l .
- 3 Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV .
- 4 Het snijpunt van k en m is het punt P .



figuur 13.3 Er geldt $d(P, F) = d(P, l)$.

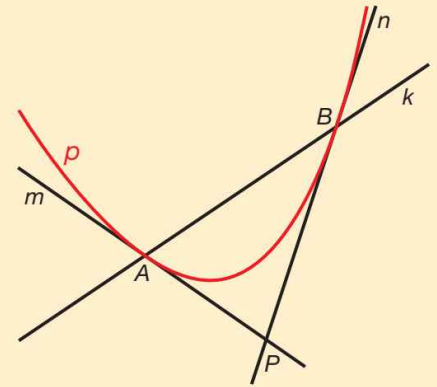
De lijn m is tevens raaklijn van de parabool in het punt P .

Bij de parabool ken je de volgende raaklijneigenschap. De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn.



figuur 13.4 Raaklijneigenschap parabool.

In figuur 13.5 is het punt P de pool van de lijn k , en de lijn k is de poollijn van de pool P . De lijnen m en n gaan door P en raken de parabool in de punten A en B .



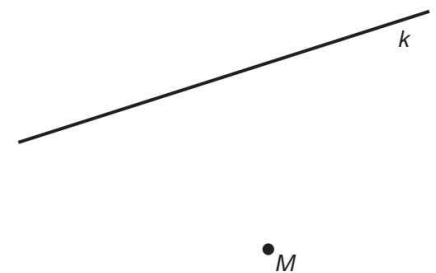
figuur 13.5 Pool en poollijn bij een parabool.

- 1 [► WERKBLAD] Gegeven is de lijn k en het punt M . Zie figuur 13.6. De cirkel c met middelpunt M raakt k in het punt A .

a Teken A en c .

Het punt B ligt op c zo, dat $\angle AMB = 120^\circ$. De lijn l raakt c in B . De lijnen k en l snijden elkaar in het punt P .

b Druk de oppervlakte van vierhoek $AMBP$ uit in de straal r van c .



figuur 13.6

- 2 [► WERKBLAD] Gegeven is cirkel c_1 met middelpunt M en straal $r_1 = 2$, en cirkel c_2 met middelpunt N en straal $r_2 = 3$. De afstand tussen de punten M en N is $4\frac{1}{2}$. Zie figuur 13.7.

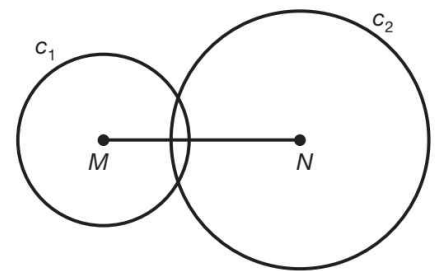
De lijn k raakt c_1 in A en c_2 in B . De lijn l raakt c_1 in C en c_2 in D . De lijnen k en l snijden elkaar in het punt P .

a Teken k , l en P .

b Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen k en l .

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig $d(A, C)$.

d Bereken in twee decimalen nauwkeurig de afstand van de pool P tot de poollijn AC .



figuur 13.7

- 3 [► WERKBLAD] Van de parabool p is het brandpunt F en de richtlijn l . Het punt A ligt op l . Zie figuur 13.8. Het punt A is de loodrechte projectie op l van een punt P op p .

a Teken P .

Verder is gegeven dat $d(F, l) = 1$ en $d(F, A) = \sqrt{5}$.

b Bereken $d(P, A)$.

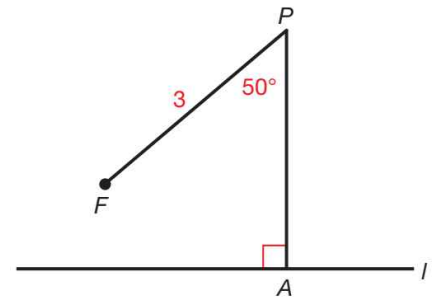


figuur 13.8

- 4 Van de parabool p is het brandpunt F en de richtlijn l . Het punt P ligt op p en het punt A is de loodrechte projectie van P op l . Er geldt $d(P, F) = 3$ en $\angle APF = 50^\circ$. Zie figuur 13.9.

De lijn k raakt p in P en snijdt l in het punt B .

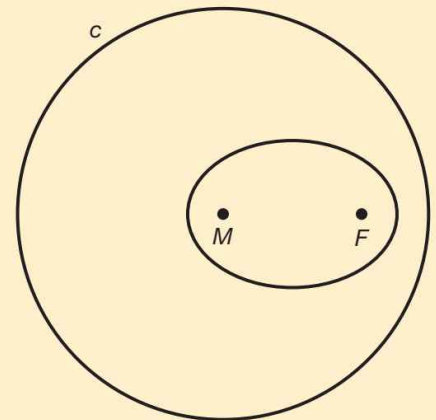
- Bereken $d(A, B)$ in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken $d(F, l)$ in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 13.9

Theorie B Ellips en hyperbool

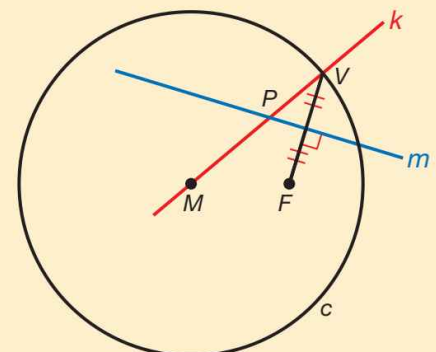
Een ellips is de verzameling van alle punten P met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt binnen de cirkel. Het punt binnen de cirkel is een brandpunt F van de ellips, en de cirkel c is een richtcirkel van de ellips. Er geldt dus $d(P, F) = d(P, c)$.



figuur 13.10

Voor het tekenen van een punt P van de ellips met brandpunt F en richtcirkel c met middelpunt M ga je als volgt te werk.

- Teken een punt V op c .
- Teken de lijn k door M en V .
- Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV .
- Het snijpunt van k en m is het punt P .

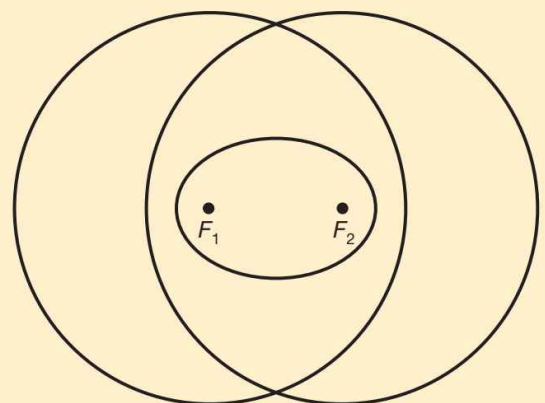


figuur 13.11 Er geldt $d(P, F) = d(P, c)$.

De lijn m is tevens raaklijn van de ellips in het punt P .

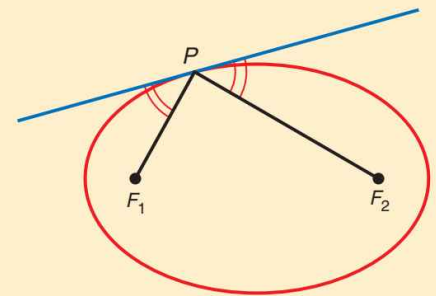
De ellips heeft nog een brandpunt, namelijk het middelpunt M van de richtcirkel. In de figuur hiernaast zie je dat de punten F en M dezelfde rol spelen in de ellips. Daarom geven we het punt M aan met F_1 , en F met F_2 .

Voor alle punten P van de ellips geldt $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$, waarbij r de straal van de richtcirkel is. Zie ook opgave 5.



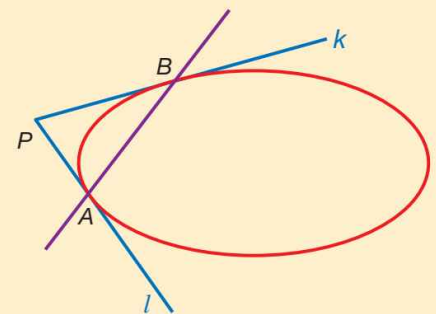
figuur 13.12 Een ellips heeft twee brandpunten en twee richtcirkels.

Bij de ellips ken je de volgende raaklijneigenschap.
De raaklijn in een punt P van een ellips maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.



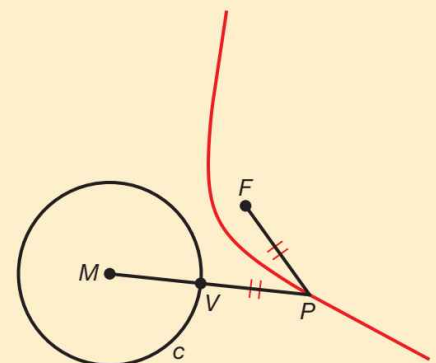
figuur 13.13 Raaklijneigenschap ellips.

Op dezelfde manier als bij de parabool hoort bij elk punt P buiten de ellips een poollijn. Zie figuur 13.14, waarin de lijn AB de poollijn is van de pool P .



figuur 13.14 Pool en poollijn bij een ellips.

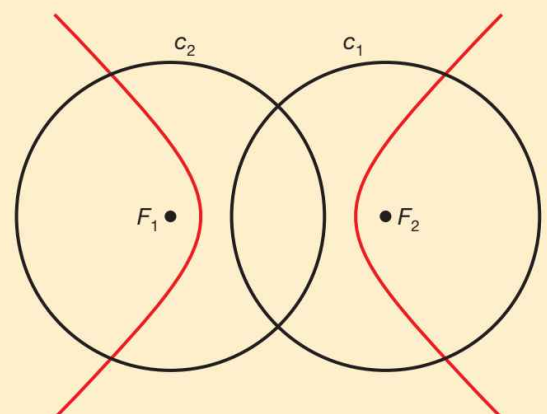
Een hyperbooltak is de verzameling van alle punten P met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt buiten de cirkel. Het punt buiten de cirkel is het brandpunt F van de hyperbooltak en de cirkel c is de richtcirkel van de hyperbooltak. Voor alle punten P van de hyperbooltak geldt $d(P, M) - d(P, F) = r$.



figuur 13.15 Er geldt $d(P, F) = d(P, c)$.

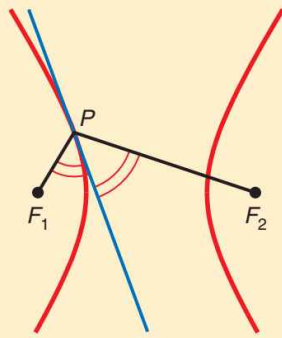
Een hyperbool heeft twee takken. De andere tak van de hyperbool krijg je als je uitgaat van de cirkel met middelpunt F en straal r . Het punt M is dan het punt buiten de cirkel. Voor alle punten P van de tak die je zo krijgt geldt $d(P, F) - d(P, M) = r$.

Voor alle punten P van een hyperbool geldt $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = r$, waarbij F_1 en F_2 de brandpunten van de hyperbool zijn en r de straal van de richtcirkels van de hyperbool is. Zie ook opgave 7. Een hyperbool heeft twee symmetrieassen en twee asymptoten.



figuur 13.16 Een hyperbool heeft twee brandpunten en twee richtcirkels.

In figuur 13.17 zie je de raaklijneigenschap van de hyperbool in beeld gebracht. In figuur 13.18 zie je een hyperbool met pool en poollijn.

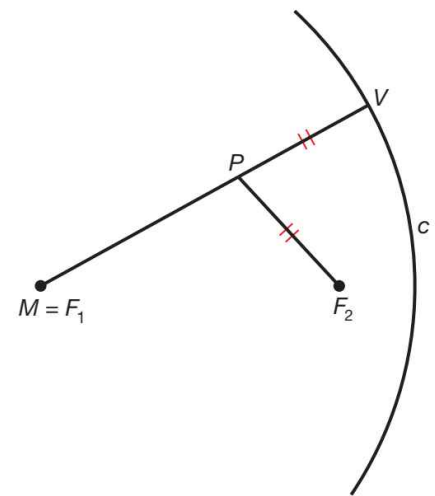


figuur 13.17 Raaklijneigenschap hyperbool.



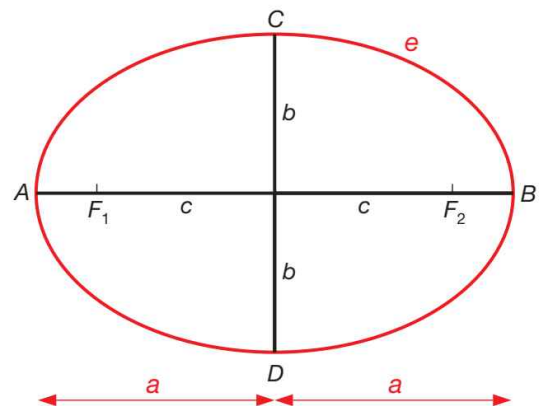
figuur 13.18 Pool en poollijn bij een hyperbool.

- 5 In de figuur hiernaast is $M = F_1$ het middelpunt van de cirkel c met straal r en F_2 een punt binnen c . Het punt P is een punt waarvoor geldt $d(P, F_2) = d(P, c)$. Toon aan dat geldt $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$.



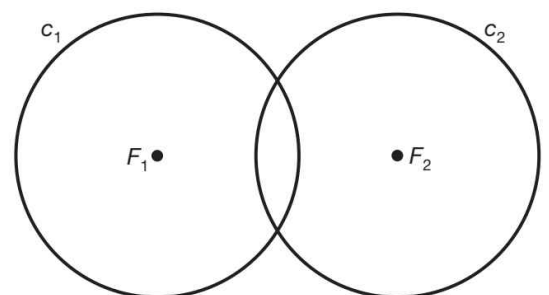
figuur 13.19 $d(P, c) = d(P, V)$

- 6 In figuur 13.20 is de ellips e getekend met de brandpunten F_1 en F_2 . De brandpuntsafstand F_1F_2 is $2c$. Het lijnstuk AB is de lange as van de ellips en heeft lengte $2a$. Het lijnstuk CD is de korte as van de ellips en heeft lengte $2b$.
- Toon aan dat $a^2 = b^2 + c^2$.
 - Van een ellips is de straal van een richtcirkel 8 en de lengte van de korte as 4,8. Bereken de brandpuntsafstand.



figuur 13.20

- 7 In figuur 13.21 is F_1 het middelpunt van cirkel c_1 en is F_2 het middelpunt van cirkel c_2 . Van zowel c_1 als c_2 is de straal r . Voor punten P met $d(P, F_2) = d(P, c_1)$ geldt $d(P, F_1) - d(P, F_2) = r$ en voor punten P met $d(P, F_1) = d(P, c_2)$ geldt $d(P, F_2) - d(P, F_1) = r$.
- Toon dit aan.
 - Hoe volgt uit vraag a dat voor alle punten P op de hyperbool met de brandpunten F_1 en F_2 geldt $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = r$?



figuur 13.21

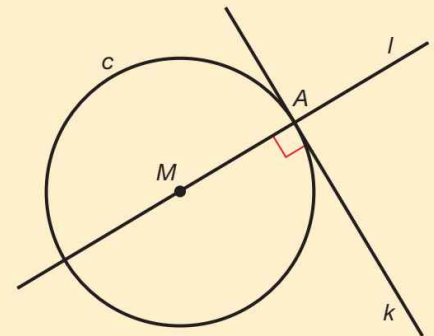
Theorie C Cirkels in een assenstelsel

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r is $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Door de haakjes weg te werken is de cirkelvergelijking te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Deze vergelijking is met kwadraatafsplitsen te schrijven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

Bij het opstellen van een vergelijking van de lijn k die de cirkel c met middelpunt M raakt in het punt A , ga je als volgt te werk.

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A .
- 2 Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
- 3 Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.



figuur 13.22 $k \perp l$

Voorbeeld

Het punt $A(2, 3)$ ligt op de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.
Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in A .

Uitwerking

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 + 5 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

Dus $M(3, 1)$ is het middelpunt van c .

Stel $k: y = ax + b$.

$$l \text{ door } M \text{ en } A \text{ met } rc_l = \frac{3 - 1}{2 - 3} = -2, \text{ dus } a = rc_k = \frac{1}{2}.$$

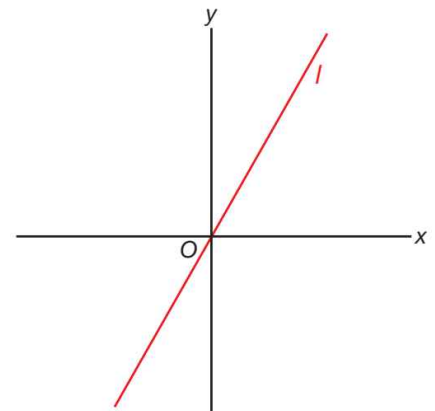
$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 3) \end{array} \right\} \frac{1}{2} \cdot 2 + b = 3, \text{ dus } b = 2$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{2}x + 2.$$

- 8** a Het punt $A(3, 0)$ ligt op de cirkel $c: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$.
Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in A .
- b Het punt $B(-1, 4)$ ligt op de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.
Stel een vergelijking op van de lijn l die c raakt in B .
- c De punten $C(1, 4)$ en $D(5, 2)$ liggen op de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$. Het punt P is de pool van de lijn CD .
Bereken de coördinaten van P .

13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool

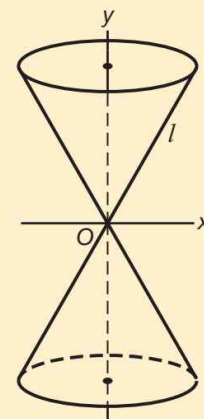
- O 1** In figuur 13.23 is in een assenstelsel een lijn l door de oorsprong getekend. De lijn wordt gewenteld om de y -as. Zo ontstaat een ruimtelijke figuur. Deze ruimtelijke figuur wordt gesneden door een vlak V dat loodrecht op de y -as staat. Welke vorm heeft de doorsnede van V met de ruimtelijke figuur als O niet in V ligt?



figuur 13.23

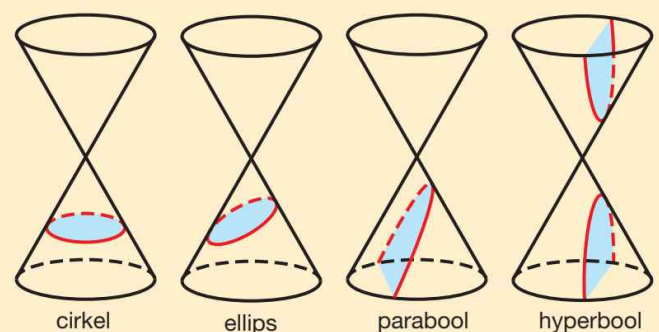
Theorie A De bollen van Dandelin

Bij wentelen van de lijn l in figuur 13.24 om de y -as ontstaat een **kegelvlak**. Dit kegelvlak bestaat uit twee kegels zonder grondvlak, met de gemeenschappelijke top O . Doorsneden van een vlak met een kegelvlak heten **kegelsneden**.

figuur 13.24 De y -as is de as van de kegel.

Het kegelvlak kan op verschillende manieren worden gesneden met een vlak V . Door de hellingshoek van V te vergroten, krijg je als doorsnede achtereenvolgens een cirkel, een ellips, een parabool en een hyperbool. Meer concreet kun je de volgende situaties onderscheiden.

- Het vlak V snijdt één deel van de kegel, met als doorsnede een gesloten kromme. Ligt het vlak V horizontaal, dus is de hellingshoek van het vlak 0° , dan is de doorsnede een cirkel. Bij andere hellingshoeken krijg je een ellips.
- Het vlak V snijdt één deel van de kegel, maar de doorsnede is geen gesloten kromme. Je krijgt een parabool.
- Het vlak V snijdt beide delen van de kegel. De doorsnede is een hyperbool.

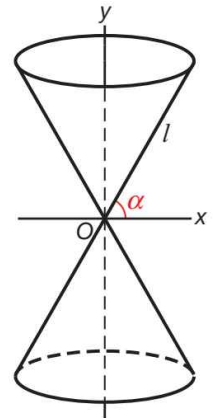


figuur 13.25

Een kegelsnede is de doorsnede van een plat vlak met een kegelvlak. Cirkel, parabool, ellips en hyperbool zijn kegelsneden.

Met de zogenaamde **bollen van Dandelin** ga je in de opgaven 3, 4 en 5 aantonen dat je inderdaad een ellips, een parabool en een hyperbool krijgt. De bollen van Dandelin zijn bollen met middelpunt op de as van het kegelvlak, die zowel het vlak V als het kegelvlak raken.

- 2** De lijn l in figuur 13.26 heeft richtingshoek α . Door l te wentelen om de y -as ontstaat een kegelvlak. Het vlak V heeft hellingshoek φ en gaat niet door O .
- Licht toe dat de doorsnede van V met het kegelvlak een ellips is als $0 < \varphi < \alpha$.
 - Voor welke waarden van φ is de doorsnede van V met het kegelvlak een parabool? En voor welke waarden van φ is de doorsnede een hyperbool?

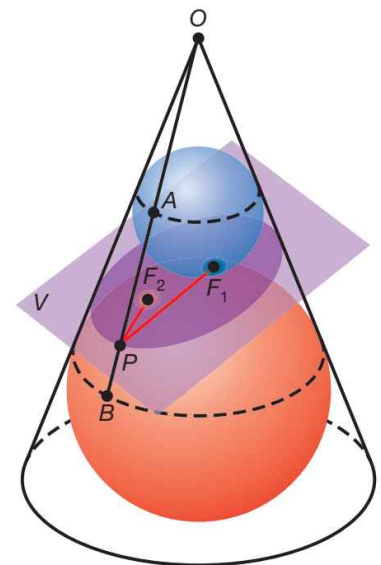


figuur 13.26

- 3** In figuur 13.27 is de doorsnede van het vlak V met het kegelvlak een gesloten kromme. Het vlak V raakt de bollen van Dandelin in de punten F_1 en F_2 . Het punt P is een punt van de doorsnede van V met het kegelvlak. De lijn door P en de top O raakt de bollen in de punten A en B .
- Licht toe dat $PF_1 = PA$ en $PF_2 = PB$.

Uit vraag a volgt dat $PF_1 + PF_2 = PA + PB$.

- Licht dit toe. Hoe volgt hieruit dat P op een ellips ligt?



figuur 13.27

Geschiedenis Germinal Pierre Dandelin

Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) werd in Parijs geboren als zoon van een Franse vader en een Belgische moeder. Hij studeerde eerst in Gent en daarna aan de École Polytechnique in Parijs.

In 1814 meldde hij zich aan als vrijwilliger voor de legers van Napoleon. Op 20 maart 1814 raakte hij gewond tijdens de verdediging van Parijs. Na het definitieve einde van de regering van Napoleon keerde Dandelin terug naar België. In 1817 nam hij de Nederlandse nationaliteit aan. In 1822 kwam hij met een bewijs dat ellips, hyperbool en parabool kegelsneden zijn, waarbij de bollen die naar hem zijn vernoemd een belangrijke rol spelen.

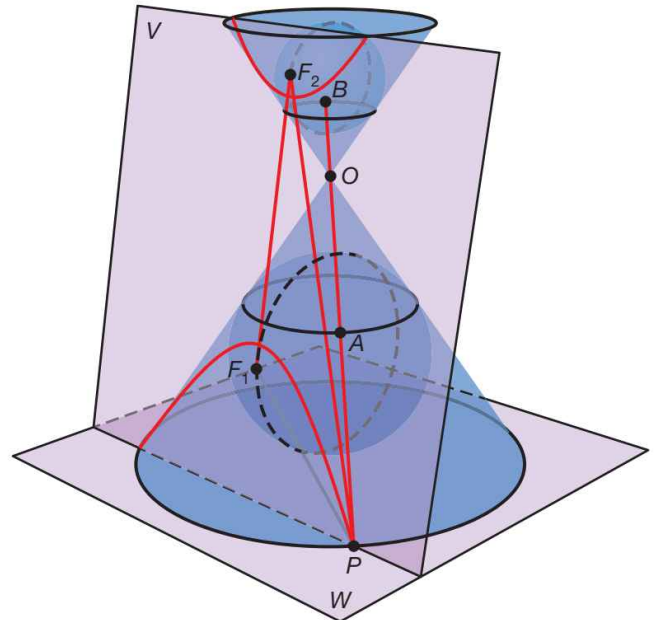


Dandelin

- 4** In figuur 13.28 is de hellingshoek van het vlak V zo, dat de doorsnede van V met het kegelvlak uit twee delen bestaat. Het vlak V raakt de bollen van Dandelin in de punten F_1 en F_2 . Het punt P is een punt van de doorsnede van V met het kegelvlak. De lijn door P en de top O raakt de bollen in de punten A en B .
- a** Licht toe dat $PF_1 = PA$ en $PF_2 = PB$.

Uit vraag a volgt dat
 $PF_2 - PF_1 = PB - PA$.

- b** Licht dit toe. Hoe volgt hieruit dat P op een hyperbool ligt?



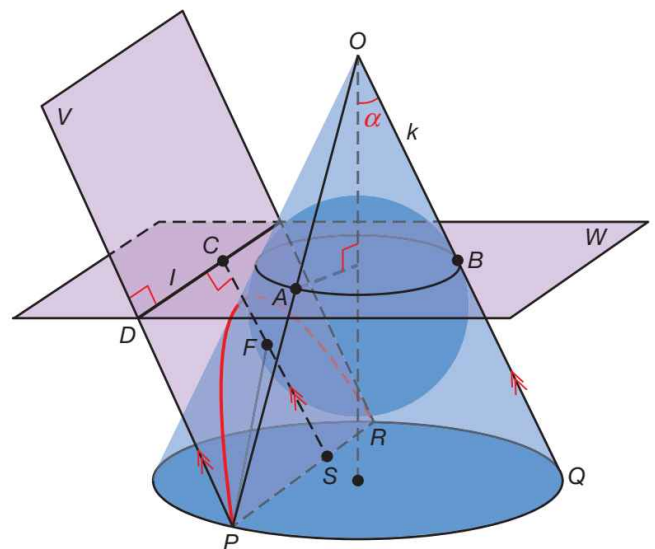
figuur 13.28

- 5** In figuur 13.29 is de hoek α van het vlak V met de as van de kegel zo, dat de doorsnede van V met het kegelvlak uit één, niet-gesloten deel bestaat. Dus in de figuur is V evenwijdig met de lijn k van het kegelvlak. Het vlak V raakt de bol van Dandelin in het punt F .
- a** Licht toe dat er slechts één bol van Dandelin is.

De punten P en R zijn punten van de doorsnede van V met het kegelvlak. De lijn door P en de top O raakt de bol in het punt A .

Het vlak W is het vlak dat door de raakcirkel van de bol en de kegel gaat. De snijlijn van V en W is de lijn l . Het punt B is het snijpunt van k en W . Het punt S is het midden van PR . Het punt C ligt op l zo, dat $SC \perp l$. PD is loodrecht op l getrokken.

- b** Licht toe dat $PF = PA$.
c Licht toe dat $PA = QB$.
d Licht toe dat $QB = SC$.
e Licht toe dat $SC = PD$.
f Licht toe dat uit het voorgaande volgt dat $PF = PD$, en dat hieruit volgt dat P op een parabool ligt.



figuur 13.29

6 In figuur 13.30 is de parabool getekend met top $O(0, 0)$, brandpunt $F(\frac{1}{2}p, 0)$ en richtlijn $l: x = -\frac{1}{2}p$. Het punt $P(x, y)$ ligt op de parabool.

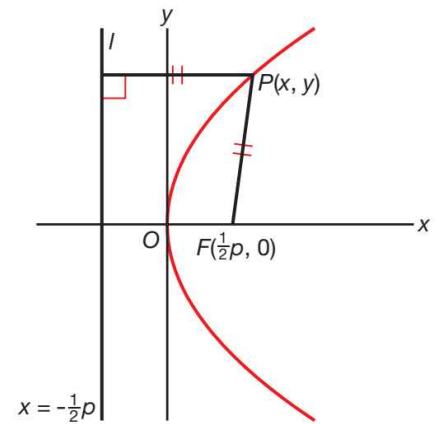
Er geldt $d(P, F) = \sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}$ en $d(P, l) = x + \frac{1}{2}p$.

a Toon dit aan.

b Omdat $d(P, F) = d(P, l)$ geldt

$$\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2} = x + \frac{1}{2}p.$$

Toon aan dat hieruit volgt dat $y^2 = 2px$.



figuur 13.30

Theorie B De vergelijking van een parabool

In opgave 6 heb je de vergelijking opgesteld van de parabool met brandpunt $F(\frac{1}{2}p, 0)$ en richtlijn $l: x = -\frac{1}{2}p$.

De parabool met brandpunt $F(\frac{1}{2}p, 0)$ en richtlijn $l: x = -\frac{1}{2}p$ heeft de vergelijking $y^2 = 2px$.

Bij de parabool met brandpunt $F(\frac{3}{4}, 0)$ en richtlijn $l: x = -\frac{3}{4}$ is $p = 1\frac{1}{2}$ de **parameter van de parabool**. Merk op dat $d(F, l) = 1\frac{1}{2}$. De vergelijking van deze parabool is dus $y^2 = 3x$. De top van de parabool is $O(0, 0)$. De symmetrieas, kortweg de **as van de parabool**, is de x -as. Je hebt te maken met een **liggende parabool** met de **opening** naar rechts.

Bij $y^2 = -3x$ hoort een liggende parabool met de opening naar links, bij $x^2 = 3y$ hoort een **staande parabool** met de opening naar boven, en bij $x^2 = -3y$ hoort een staande parabool met de opening naar beneden.

Bij de translatie van de parabool $y^2 = 3x$ over $(1, 4)$ krijg je de parabool $(y - 4)^2 = 3(x - 1)$. De top van deze parabool is het punt $(1, 4)$, het brandpunt is $(\frac{3}{4} + 1, 0 + 4) = (1\frac{3}{4}, 4)$ en de richtlijn is de lijn $x = -\frac{3}{4} + 1$, dus $x = \frac{1}{4}$.

Van de parabool $(y - b)^2 = 2p(x - a)$ is de top (a, b) , het brandpunt $F(\frac{1}{2}p + a, b)$ en de richtlijn $l: x = -\frac{1}{2}p + a$.

$$x^2 = 3y \text{ ofwel } y = \frac{1}{3}x^2$$

$$x^2 = -3y \text{ ofwel } y = -\frac{1}{3}x^2$$

Voorbeeld

Bereken van de parabool $y^2 + 4y = 3 - 2x$ de coördinaten van de top T en het brandpunt F , en stel een vergelijking op van de as k en de richtlijn l .

Aanpak

Schrijf de formule in de vorm $(y - b)^2 = 2p(x - a)$ door een kwadraat af te splitsen.

Uitwerking

$$y^2 + 4y = 3 - 2x$$

$$(y + 2)^2 - 4 = -2x + 3$$

$$(y + 2)^2 = -2x + 7$$

$$(y + 2)^2 = -2\left(x - 3\frac{1}{2}\right)$$

$$T\left(3\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$F\left(-\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}, -2\right) = F(3, -2)$$

$$\text{as } k: y = -2$$

$$\text{richtlijn } l: x = \frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}, \text{ dus } l: x = 4$$

- R 7** a Stel op de manier van opgave 6 een vergelijking op van de parabool met brandpunt $F(0, \frac{1}{2}p)$ en richtlijn $l: y = -\frac{1}{2}p$.

b Zie het voorbeeld.

Met wat voor parabool heb je te maken? Kies uit liggend of staand en noem de kant van de opening.

- 8** Stel een vergelijking op van de parabool
- a met brandpunt $F(1\frac{1}{2}, 0)$ en richtlijn $l: x = -1\frac{1}{2}$
 - b met brandpunt $F(0, -\frac{3}{8})$ en richtlijn $l: y = \frac{3}{8}$
 - c met brandpunt $F(3, 1)$ en richtlijn $l: x = 1$
 - d met brandpunt $F(1, 4)$ en richtlijn $l: y = 3$.

- 9** Bereken van de volgende parabolen de coördinaten van de top T en het brandpunt F , en stel een vergelijking op van de as k en de richtlijn l .

a $y^2 + 10y = 4x - 1$

b $x^2 - 6x = 2y - 3$

c $y^2 + 5x + 4y = 1$

d $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6$

- A 10** Gegeven is de parabool $y^2 + ay = ax + a^2$.

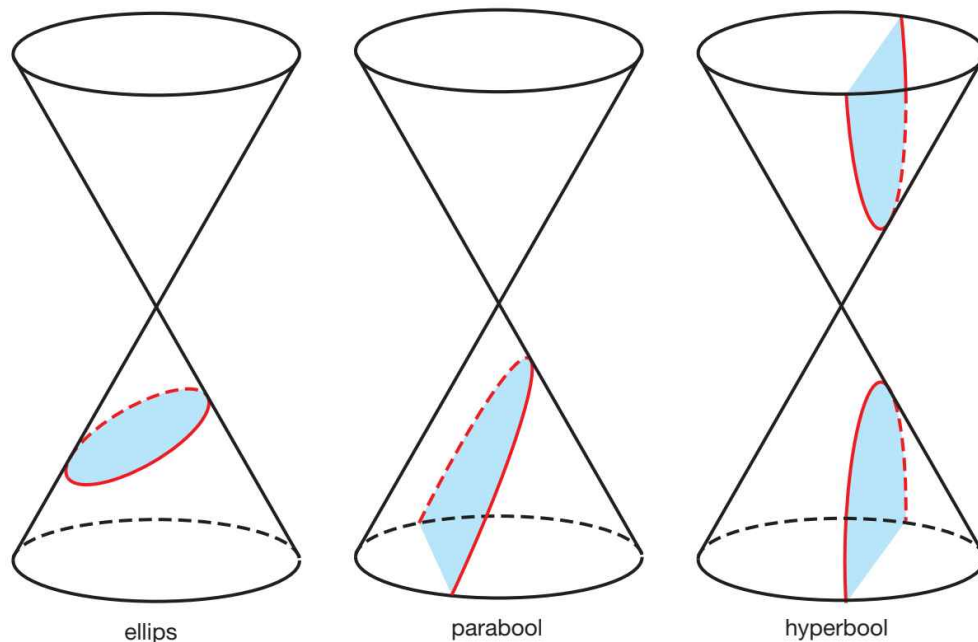
a Druk de coördinaten van de top en het brandpunt van de parabool uit in a .

b Voor welke waarden van a ligt het brandpunt op de cirkel $x^2 + y^2 = 10$?

Terugblik

Ellips, parabool en hyperbool als kegelsnede

Door een kegelvlak te snijden met een vlak kan als doorsnede een ellips, parabool of hyperbool ontstaan.



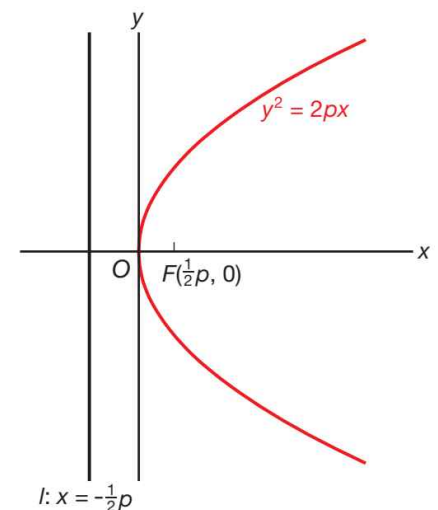
Met de bollen van Dandelin kan worden aangetoond dat je inderdaad met een ellips, een parabool of een hyperbool te maken hebt. Merk op dat een cirkel een bijzondere ellips is.

De vergelijking $y^2 = 2px$

Een parabool is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een punt en een lijn. De afstand tussen het brandpunt F en de richtlijn l heet de parameter van de parabool en wordt aangegeven met p .

Neem je bij een liggende parabool zoals in de figuur hiernaast de top in de oorsprong en $F(\frac{1}{2}p, 0)$, dan hoort bij de parabool de vergelijking $y^2 = 2px$.

Bij een staande parabool met top $O(0, 0)$ hoort de vergelijking $x^2 = 2py$.



De vergelijking $(y - b)^2 = 2p(x - a)$

Van de parabool $(y - b)^2 = 2p(x - a)$ is de top (a, b) .

De parabool $(y - b)^2 = 2p(x - a)$ ontstaat uit de parabool $y^2 = 2px$ bij de translatie (a, b) .

Om de coördinaten van het brandpunt F van de parabool $y^2 + 6y = 8x + 3$ te berekenen, ga je kwadraat afsplitsen.

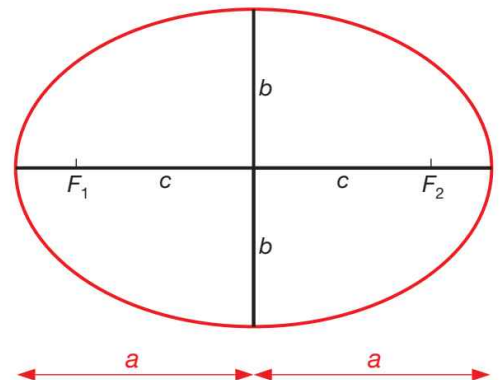
Je krijgt $(y + 3)^2 - 9 = 8x + 3$ en dit geeft $(y + 3)^2 = 8(x + 1\frac{1}{2})$.

Het brandpunt van $y^2 = 8x$ is $(2, 0)$, dus het brandpunt van $y^2 + 6y = 8x + 3$ is $F(2 - 1\frac{1}{2}, 0 - 3) = F(\frac{1}{2}, -3)$.

De as van de parabool is de lijn $y = -3$.

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool

O11 Om de vergelijking van een ellips op te stellen gebruiken we dat voor elk punt P op de ellips geldt $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. Hierbij zijn F_1 en F_2 de brandpunten van de ellips en is $2a$ de lengte van de lange as van de ellips. De lengte van de korte as van de ellips is $2b$ en de brandpuntsafstand is $2c$. Zie figuur 13.31. Er geldt $a^2 = b^2 + c^2$ ofwel $a^2 - c^2 = b^2$.



figuur 13.31

We nemen een assenstelsel zoals in figuur 13.32. De brandpunten zijn $F_1(-c, 0)$ en $F_2(c, 0)$. Voor het punt $P(x, y)$ van de ellips geldt $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, dus

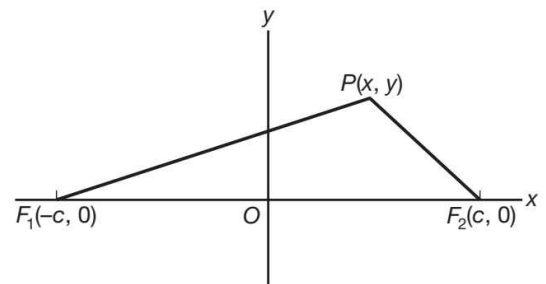
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \text{ ofwel}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Door deze vorm te kwadrateren en te herleiden krijg je $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$.

a Toon dit aan.

b Kwadrateren van $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$, herleiden en gebruiken dat $a^2 - c^2 = b^2$ geeft $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Toon dit aan.



figuur 13.32

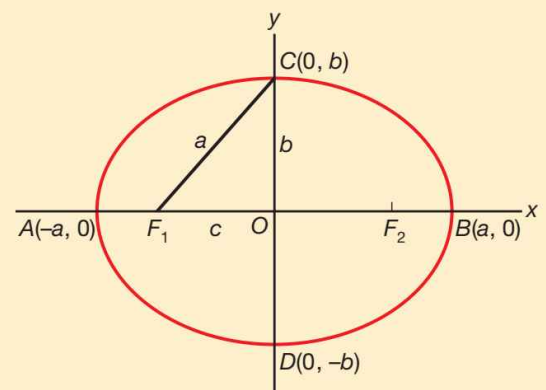
Theorie A De vergelijking van een ellips

In opgave 11 heb je aangetoond dat $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ een vergelijking is van de ellips met middelpunt de oorsprong, lengte van de lange as $2a$ en lengte van de korte as $2b$.

Deze vergelijking is te schrijven als $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

In de figuur hiernaast zie je dat van de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de toppen zijn $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, b)$ en $D(0, -b)$.

In het geval $a > b$ zijn de coördinaten van de brandpunten $(-c, 0)$ en $(c, 0)$. Er geldt dan $c^2 = a^2 - b^2$. Je hebt te maken met een **liggende ellips**.



figuur 13.33

In het geval $a < b$ zijn de coördinaten van de brandpunten $(0, -c)$ en $(0, c)$. Er geldt dan $c^2 = b^2 - a^2$.

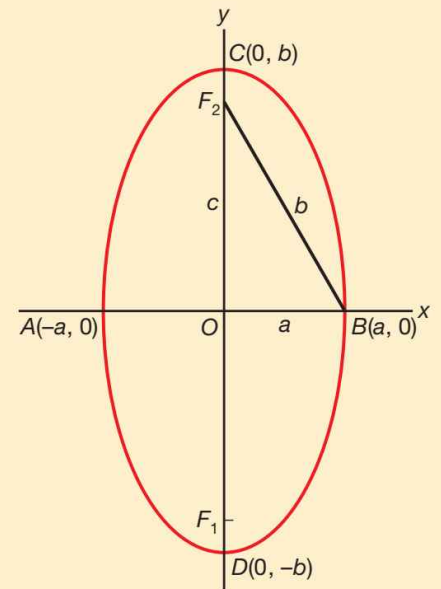
Je hebt te maken met een **staande ellips**.

Ook in dit geval is de vergelijking van de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Je toont dit aan in opgave 12.

De ellips met toppen $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, b)$ en $D(0, -b)$

heeft de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



figuur 13.34

- 12** In figuur 13.34 is een ellips getekend met de brandpunten $F_1(0, -c)$ en $F_2(0, c)$.
Bij deze ellips geldt $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2b$.
Toon aan dat ook deze ellips de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ heeft.
- 13** Stel een vergelijking op van de ellips
- met toppen $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $(0, -3)$ en $(0, 3)$
 - met toppen $(-6, 0)$ en $(6, 0)$ en brandpunten $(-5, 0)$ en $(5, 0)$
 - met toppen $(0, -4)$ en $(0, 4)$ en brandpunten $(-5, 0)$ en $(5, 0)$
 - met toppen $(-3, 0)$ en $(3, 0)$ die door $(1, 2)$ gaat
 - met brandpunten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$ die door $(2, \sqrt{2})$ gaat.
- 14** Een ellips heeft richtcirkel $(x + 3)^2 + y^2 = 100$ en brandpunt $(3, 0)$. Hieruit volgt dat de oorsprong het middelpunt van de ellips is, dus dat de vergelijking van de vorm $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is.
- Licht dit toe.
 - Bereken a en b .
- A 15** Stel een vergelijking op van
- de ellips met brandpunten $F_1(-4, 0)$ en $F_2(4, 0)$ die door $A(3, 2\frac{2}{5})$ gaat
 - de ellips met brandpunt $F(0, -4)$ en richtcirkel $x^2 + y^2 - 8y - 84 = 0$.
- D 16** De punten $A(2, 2\sqrt{3})$ en $B(4, \sqrt{3})$ liggen op de ellips $px^2 + qy^2 = 60$.
Bereken exact de coördinaten van de brandpunten van de ellips.

O 17 Gegeven zijn de ellipsen $e_1: 9x^2 + 25y^2 = 225$ en $e_2: 25x^2 + 9y^2 = 225$.

a Bereken de coördinaten van de toppen van e_1 en e_2 .

Translatie (5, 6) van e_1 geeft de ellips $9(x - 5)^2 + 25(y - 6)^2 = 225$.

b Licht dit toe en geef de coördinaten van de toppen van deze ellips.

c Stel een vergelijking op van de ellips die je krijgt als je de translatie (5, 6) uitvoert op e_2 , en geef van de beeldfiguur de coördinaten van de toppen en de brandpunten.

Theorie B Toppen en brandpunten van een ellips

De ellips $x^2 + 10y^2 - 4x - 60y + 84 = 0$ ontstaat via translatie uit de ellips $x^2 + 10y^2 = 10$. Deze translatie vind je met kwadraatafsplitsen.

$$x^2 + 10y^2 - 4x - 60y + 84 = 0$$

$$x^2 - 4x + 10(y^2 - 6y) + 84 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + 10((y - 3)^2 - 9) + 84 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + 10(y - 3)^2 - 90 + 84 = 0$$

$$(x - 2)^2 + 10(y - 3)^2 = 10, \text{ dus de translatie is } (2, 3).$$

Van de ellips $x^2 + 10y^2 = 10$ ofwel $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$ zijn de toppen

$$(-\sqrt{10}, 0), (\sqrt{10}, 0), (0, -1) \text{ en } (0, 1).$$

Omdat $a^2 = 10$ en $b^2 = 1$ is $c^2 = a^2 - b^2 = 10 - 1 = 9$, dus de brandpunten zijn $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.

Dus van de ellips $x^2 + 10y^2 - 4x - 60y + 84 = 0$ zijn de toppen

$$(2 - \sqrt{10}, 3), (2 + \sqrt{10}, 3), (2, 2) \text{ en } (2, 4).$$

De brandpunten zijn $(-1, 3)$ en $(5, 3)$, het middelpunt is $(2, 3)$ en de **symmetrieassen** zijn de lijnen $x = 2$ en $y = 3$.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de toppen en de brandpunten van de ellips $9x^2 + 4y^2 - 18x + 40y + 73 = 0$.

Uitwerking

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 40y + 73 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 10y) + 73 = 0$$

$$9((x - 1)^2 - 1) + 4((y + 5)^2 - 25) + 73 = 0$$

$$9(x - 1)^2 - 9 + 4(y + 5)^2 - 100 + 73 = 0$$

$$9(x - 1)^2 + 4(y + 5)^2 = 36$$

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \xrightarrow{\text{translatie } (1, -5)} 9(x - 1)^2 + 4(y + 5)^2 = 36$$

Van $9x^2 + 4y^2 = 36$ ofwel $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ zijn de toppen $(-2, 0)$, $(2, 0)$,

$$(0, -3) \text{ en } (0, 3) \text{ en de brandpunten } (0, -\sqrt{5}) \text{ en } (0, \sqrt{5}).$$

Dus van $9(x - 1)^2 + 4(y + 5)^2 = 36$ zijn de toppen $(-1, -5)$, $(3, -5)$,

$$(1, -8) \text{ en } (1, -2) \text{ en de brandpunten } (1, -5 - \sqrt{5}) \text{ en } (1, -5 + \sqrt{5}).$$

R 18 Zie het voorbeeld.
Licht toe dat $(0, -\sqrt{5})$ en $(0, \sqrt{5})$ de brandpunten zijn van de ellips $9x^2 + 4y^2 = 36$.

19 Bereken van de volgende ellipsen de coördinaten van de toppen en de brandpunten.

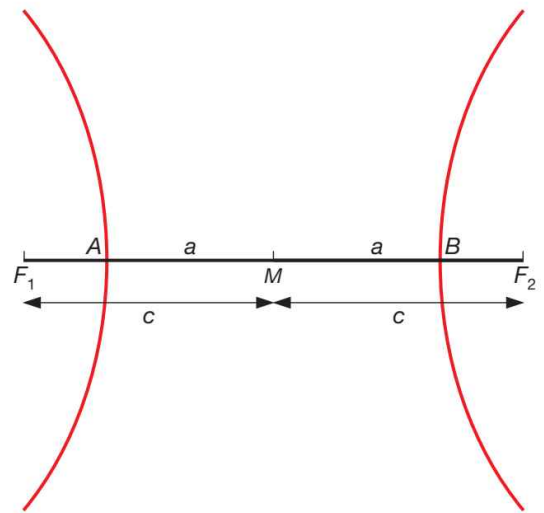
a $5(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

b $4x^2 + 25y^2 + 16x - 84 = 0$

c $9x^2 + 10y^2 - 80y - 200 = 0$

D 20 Gegeven is de ellips e_a : $10x^2 + ay^2 - 80x + 4ay + 160 - 6a = 0$.
Voor welke waarde van a is $(7, -2)$ een brandpunt?

O 21 Om een vergelijking van een hyperbool op te stellen, gebruiken we dat voor elk punt P van de hyperbool geldt $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.
Hierbij zijn F_1 en F_2 de brandpunten van de hyperbool en is $2a$ de afstand tussen de toppen A en B van de hyperbool. Het punt M is het middelpunt van de hyperbool en de brandpuntsafstand is $F_1F_2 = 2c$.



figuur 13.35

Door een geschikt assenstelsel te kiezen is een vergelijking van de hyperbool op te stellen.
We nemen een assenstelsel zoals in figuur 13.36. De brandpunten zijn $F_1(-c, 0)$ en $F_2(c, 0)$.
Voor het getekende punt P van de hyperbool geldt $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

ofwel $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Door deze vorm te kwadrateren en te herleiden krijg je $cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

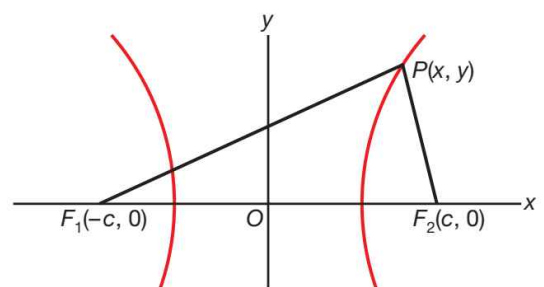
a Toon dit aan.

Kwadrateren van $cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ en herleiden geeft $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$.

b Toon dit aan.

c Stel $c^2 - a^2 = b^2$ en herleid de vergelijking tot

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



figuur 13.36

Theorie C De vergelijking van een hyperbool

In opgave 21 heb je aangetoond dat bij een hyperbool met toppen $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ en brandpunten $F_1(-c, 0)$ en $F_2(c, 0)$ de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hoort. Hierbij is $b^2 = c^2 - a^2$.

Je bent uitgegaan van het geval dat het punt P op de rechtertak van de hyperbool ligt. Ook in het geval P op de andere tak van de hyperbool ligt, krijg je $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

De hyperbool met toppen $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$ en brandpunten

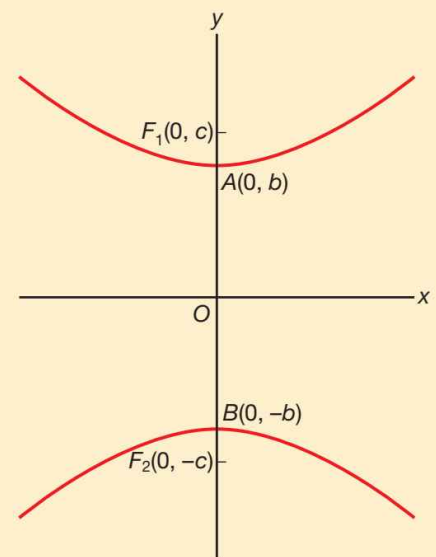
$F_1(-c, 0)$ en $F_2(c, 0)$ heeft de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hierbij is $c^2 = a^2 + b^2$.

In de figuur hiernaast liggen de toppen en de brandpunten van de hyperbool op de y -as.

Bij deze figuur is de vergelijking van de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Ook hierbij is $c^2 = a^2 + b^2$. Je gaat dit in opgave 22 aantonen.



figuur 13.37

- 22** Toon aan dat bij de hyperbool in figuur 13.37 de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ hoort.
- 23** Stel een vergelijking op van de hyperbool
- met toppen $(-2, 0)$ en $(2, 0)$ en brandpunten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$
 - met toppen $(0, -3)$ en $(0, 3)$ en brandpunten $(0, -4)$ en $(0, 4)$
 - met toppen $(-4, 0)$ en $(4, 0)$ die door $(12, 4)$ gaat
 - met brandpunten $(-5, 0)$ en $(5, 0)$ die door $(4, 3)$ gaat.
- 24** Gegeven is de hyperbool $3x^2 - 5y^2 = 30$.
- Bereken exact de coördinaten van de toppen en de brandpunten van de hyperbool.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn $k: x + y = 8$ en de hyperbool.

- 25** Van een hyperbool is een richtcirkel $(x + 4)^2 + y^2 = 36$ en een top $(3, 0)$. Hieruit volgt dat de oorsprong het middelpunt van de hyperbool is, dus dat de vergelijking van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ is.

- a** Licht dit toe.
b Bereken a en b .

- 26** In figuur 13.38 is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{2}{x}$ getekend.

In deze opgave ga je bewijzen dat deze grafiek een hyperbool is volgens de definitie van de hyperbool op bladzijde 24.

Daartoe toon je aan dat het punt $P\left(x, \frac{2}{x}\right)$ op de grafiek van f gelijke afstanden heeft tot het punt $F(2, 2)$ en de cirkel $c: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

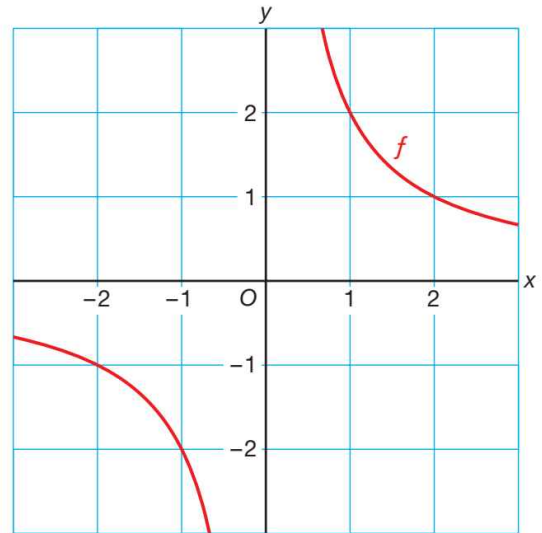
- a** Druk $d(P, F)$ uit in x .
b Licht toe dat

$$d(P, c) = \sqrt{(x + 2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2} - 4.$$

- c** Stel $d(P, F) = d(P, c)$ en toon aan dat hieruit volgt

$$x + \frac{2}{x} + 2 = \sqrt{(x + 2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2}.$$

- d** Stel $\frac{2}{x} + 2 = p$ en laat zien dat de vergelijking van vraag c te herleiden is tot $px = 2x + 2$. Maak vervolgens het bewijs af.



figuur 13.38

- A 27** Stel een vergelijking op van de hyperbool waarvan een van de richtcirkels $x^2 + y^2 + 10y - 39 = 0$ is en een top $(0, 4)$.

- A 28** De punten $A(5, 2)$ en $B(10, -8)$ liggen op de hyperbool $px^2 - qy^2 = 80$. Bereken exact de coördinaten van de toppen en de brandpunten van de hyperbool.

- O 29** Gegeven is de hyperbool $h: 16x^2 - 9y^2 = 144$.

- a** Bereken de coördinaten van de toppen en de brandpunten van h .

Translatie $(1, 5)$ van h geeft de hyperbool $16(x - 1)^2 - 9(y - 5)^2 = 144$.

- b** Licht dit toe en geef de coördinaten van de toppen en de brandpunten van deze hyperbool.

- c** De vergelijking $16(x - 1)^2 - 9(y - 5)^2 = 144$ is te schrijven in de vorm $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. Bereken a , b , c , d en e .

Theorie D Toppen en brandpunten van een hyperbool

De hyperbool $5x^2 - 4y^2 - 40x - 8y + 56 = 0$ ontstaat via translatie uit de hyperbool $5x^2 - 4y^2 = 20$. Deze translatie vind je met kwadraatplitsen.

$$5x^2 - 4y^2 - 40x - 8y + 56 = 0$$

$$5(x^2 - 8x) - 4(y^2 + 2y) + 56 = 0$$

$$5((x - 4)^2 - 16) - 4((y + 1)^2 - 1) + 56 = 0$$

$$5(x - 4)^2 - 80 - 4(y + 1)^2 + 4 + 56 = 0$$

$$5(x - 4)^2 - 4(y + 1)^2 = 20$$

De translatie is $(4, -1)$.

Bij de hyperbool $5x^2 - 4y^2 = 20$ ofwel $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ is $a^2 = 4$ en

$b^2 = 5$, dus $c^2 = 9$. De toppen zijn dus $(-2, 0)$ en $(2, 0)$ en de brandpunten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.

Dus van de hyperbool $5x^2 - 4y^2 - 40x - 8y + 56 = 0$ zijn de toppen $(2, -1)$ en $(6, -1)$ en de brandpunten $(1, -1)$ en $(7, -1)$.

Het middelpunt van de hyperbool is $(4, -1)$ en de symmetrieassen zijn de lijnen $x = 4$ en $y = -1$.

- 30** Bereken van de volgende hyperbolen de coördinaten van de toppen en de brandpunten.

a $5(x + 1)^2 - 3(y - 3)^2 = 30$

b $11x^2 - 5y^2 + 44x - 10y - 16 = 0$

c $7x^2 - 2y^2 - 28x + 16y + 10 = 0$

- O31** In de figuur hiernaast zie je de hyperbool $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- a** Licht toe dat de vergelijking van de hyperbool te

schrijven is als $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 1$.

- b** Schrijf de vergelijking van de hyperbool als

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{y}{3}} \text{ en toon hiermee aan dat geldt } y = \frac{3}{2}x$$

als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow \infty$.

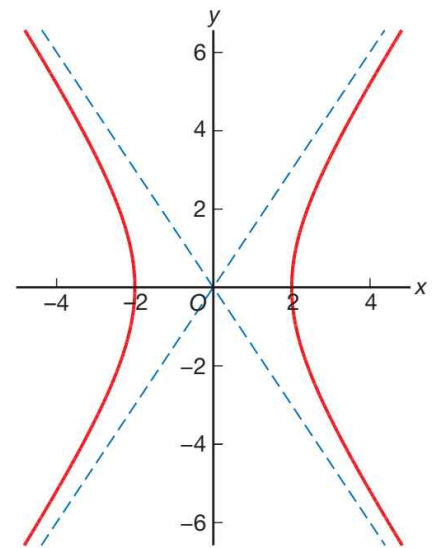
- c** Schrijf de vergelijking van de hyperbool als $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{\frac{x}{2} - \frac{y}{3}}$

en toon hiermee aan dat geldt $y = -\frac{3}{2}x$ als $x \rightarrow \infty$ en

$y \rightarrow -\infty$.

- d** Licht toe dat uit vraag b en c volgt dat de lijnen $y = \frac{3}{2}x$ en

$y = -\frac{3}{2}x$ de scheve asymptoten zijn van de hyperbool $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.



figuur 13.39

Theorie E Asymptoten van een hyperbool

De vergelijking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ is te herleiden tot $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$,

en dit is te schrijven als $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}$ en ook als $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$.

Voor de situatie dat $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow \infty$ gebruiken we de vorm

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}$ om aan te tonen dat de lijn $y = \frac{b}{a}x$ scheve

asymptoot is van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dit gaat als volgt.

Als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow \infty$, dan is de limiet van $\frac{1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}$ gelijk aan nul.

Zo krijg je $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ ofwel $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Dit geeft $ay = bx$ ofwel $y = \frac{b}{a}x$.

Als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow \infty$ nadert de hyperbool dus de lijn $y = \frac{b}{a}x$, dus deze lijn is scheve asymptoot van de hyperbool.

In opgave 32 ga je op dezelfde manier aantonen dat de lijn $y = -\frac{b}{a}x$ scheve asymptoot is in de situatie dat $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow -\infty$.

Uit de symmetrie van de hyperbool volgt dan dat de lijnen $y = \frac{b}{a}x$

en $y = -\frac{b}{a}x$ ook **asymptoten van de hyperbool** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zijn in

de situatie waarbij $x \rightarrow -\infty$.

De lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$ zijn de asymptoten van de hyperbool

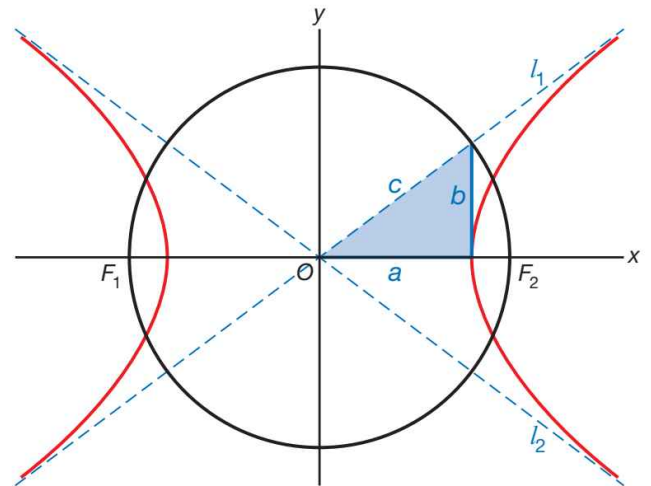
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

32 Gegeven is de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Toon aan dat de lijn $y = -\frac{b}{a}x$ scheve asymptoot is van de hyperbool.

- 33** In figuur 13.40 is de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ getekend met de asymptoten l_1 en l_2 . Ook is de betekenis van b in beeld gebracht.

- a** Licht toe dat b de verticale afstand is van een top tot een asymptoot.
b Maak een soortgelijke tekening als in figuur 13.40 van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.
 Wat zijn de vergelijkingen van de asymptoten van deze hyperbool?



figuur 13.40

- 34** Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de hyperbool

- a** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
b $16x^2 - 25y^2 = 400$
c $x^2 - 9y^2 + 9 = 0$
d met toppen $(-4, 0)$ en $(4, 0)$ en brandpunten $(-5, 0)$ en $(5, 0)$
e met toppen $(0, -2)$ en $(0, 2)$ en brandpunten $(0, -3)$ en $(0, 3)$.

- 35** Van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zijn de asymptoten $y = \frac{1}{2}x$ en $y = -\frac{1}{2}x$. Verder ligt het punt $(10, 4)$ op de hyperbool.

- a** Bereken a en b .
b Bereken de coördinaten van de toppen en de brandpunten van de hyperbool.

- A 36** Van de hyperbool h_1 zijn de asymptoten $y = 3x$ en $y = -3x$. Verder is gegeven dat het punt $A(3, 3\sqrt{5})$ op h_1 ligt.

- a** Stel een vergelijking op van h_1 .
b Bereken de coördinaten van de brandpunten van h_1 .

De brandpunten van h_1 zijn de toppen van de orthogonale hyperbool h_2 .

- c** Stel een vergelijking op van h_2 .

Een orthogonale hyperbool is een hyperbool waarvan de asymptoten loodrecht op elkaar staan.

- O 37** Gegeven zijn de volgende vergelijkingen.

- I $y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$
 II $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$
 III $2x^2 + y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$
 IV $2x^2 - y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$

Deze vergelijkingen horen bij een cirkel, een parabool, een ellips en een hyperbool.

Zoek de juiste vergelijking bij elk van deze krommen.

Theorie F Kegelsneden onderzoeken

De algemene vergelijking van de tweede graad in x en y is

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Door getallen te nemen voor a, b, c, d, e en f kunnen kegelsneden ontstaan. Van zo'n kegelsnede zijn vervolgens de kenmerken, zoals toppen en brandpunten, te berekenen.

Door de kegelsnede over een geschikte hoek om de oorsprong te roteren, is het mogelijk een vergelijking te krijgen waarin de term met xy ontbreekt. Zie het informatief op bladzijde 30.

We bekijken alleen situaties waarin de term met xy ontbreekt.

Voorbeeld

Onderzoek de kegelsnede.

a $y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$

b $25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 444 = 0$

Uitwerking

a $y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$

$$y^2 - 6y = -4x - 17$$

$$(y - 3)^2 - 9 = -4x - 17$$

$$(y - 3)^2 = -4x - 8$$

$$(y - 3)^2 = -4(x + 2)$$

Parabool met top $(-2, 3)$ en brandpunt $F(-1 - 2, 0 + 3) = F(-3, 3)$.

b $25x^2 - 16y^2 - 100x + 96y - 444 = 0$

$$25x^2 - 100x - 16y^2 + 96y - 444 = 0$$

$$25(x^2 - 4x) - 16(y^2 - 6y) - 444 = 0$$

$$25((x - 2)^2 - 4) - 16((y - 3)^2 - 9) - 444 = 0$$

$$25(x - 2)^2 - 100 - 16(y - 3)^2 + 144 - 444 = 0$$

$$25(x - 2)^2 - 16(y - 3)^2 = 400$$

$$\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$$

Hyperbool met middelpunt $(2, 3)$ en toppen $(-4 + 2, 3) = (-2, 3)$

en $(4 + 2, 3) = (6, 3)$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 25 = 41$$

De brandpunten zijn $(-\sqrt{41} + 2, 3)$ en $(\sqrt{41} + 2, 3)$.

De asymptoten zijn de lijnen $y - 3 = \frac{5}{4}(x - 2)$ en

$$y - 3 = -\frac{5}{4}(x - 2) \text{ ofwel } y = 1\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \text{ en } y = -1\frac{1}{4}x + 5\frac{1}{2}.$$

38 Onderzoek de kegelsnede.

a $y^2 - 6x + 8y + 28 = 0$

b $x^2 + 9y^2 + 2x - 8 = 0$

c $x^2 - 9y^2 + 4x - 5 = 0$

A 39 Onderzoek de kegelsnede.

a $4x^2 + 4y^2 + 2x - 12y - 15 = 0$

b $4x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$

c $x^2 - y^2 + 4x + 8y - 20 = 0$

Informatief Kegelsneden roteren

Om de kromme $K: x^2 + xy + y^2 = 6$ te onderzoeken, roteren we de kromme om de oorsprong over φ radialen.

Bij deze rotatie hoort de matrix $M = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

Elk punt (x, y) van K heeft als beeld het punt (x', y') waarvoor geldt $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\text{Dus } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)x' + \sin(\varphi)y' \\ -\sin(\varphi)x' + \cos(\varphi)y' \end{pmatrix}.$$

Substitutie in $K: x^2 + xy + y^2 = 6$ geeft

$$(\cos(\varphi)x' + \sin(\varphi)y')^2 + (\cos(\varphi)x' + \sin(\varphi)y')(-\sin(\varphi)x' + \cos(\varphi)y') + (-\sin(\varphi)x' + \cos(\varphi)y')^2 = 6.$$

Deze vergelijking is te herleiden tot

$$(1 - \sin(\varphi)\cos(\varphi))(x')^2 + (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi))x'y' + (1 + \sin(\varphi)\cos(\varphi))(y')^2 = 6.$$

Het beeld (x', y') van (x, y) voldoet dus aan de vergelijking

$$(1 - \sin(\varphi)\cos(\varphi))x^2 + (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi))xy + (1 + \sin(\varphi)\cos(\varphi))y^2 = 6.$$

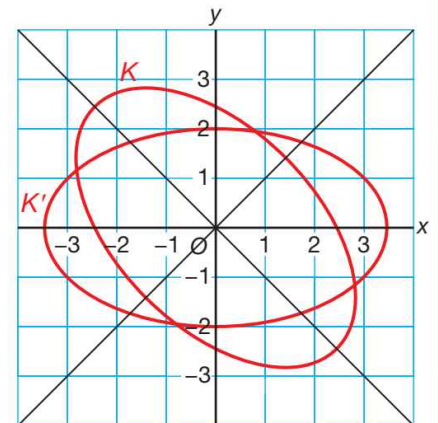
Hiermee is de vergelijking gevonden van het beeld van K na rotatie om O over φ radialen. Omdat $\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 0$ voor $\varphi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ krijg je een vergelijking zonder een term met xy als je bijvoorbeeld $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ kiest.

Dit geeft $\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}y^2 = 6$ ofwel $x^2 + 3y^2 = 12$.

De kromme K is dus een ellips die na rotatie om O over $\frac{1}{4}\pi$ de toppen $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$, $(0, 2)$ en $(0, -2)$ heeft.

De toppen van K krijg je door de toppen van het beeld van K om O te roteren over $-\frac{1}{4}\pi$.

Onderzoek zelf de kromme $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$ en controleer het resultaat met GeoGebra.



Terugblik

De vergelijking van een ellips

De ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ heeft O als middelpunt en toppen $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ en $(0, -b)$.

De coördinaten van de brandpunten bereken je met $c^2 = a^2 - b^2$ als de lange as langs de x -as valt. Je krijgt de brandpunten $(-c, 0)$ en $(c, 0)$. Valt de lange as langs de y -as, dan gebruik je $c^2 = b^2 - a^2$. Je krijgt de brandpunten $(0, -c)$ en $(0, c)$.

Om de coördinaten van de toppen van de ellips $4x^2 + 5y^2 = 80$ te berekenen, herleid je de vergelijking tot de vorm $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Je krijgt $\frac{4x^2}{80} + \frac{5y^2}{80} = 1$ ofwel $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$.

De toppen zijn dus $(-2\sqrt{5}, 0)$, $(2\sqrt{5}, 0)$, $(0, 4)$ en $(0, -4)$. Omdat $2\sqrt{5} > 4$ liggen de brandpunten op de x -as en is $c^2 = 20 - 16 = 4$. De brandpunten zijn $(-2, 0)$ en $(2, 0)$.

De vergelijking van een hyperbool

Van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zijn de toppen $A(-a, 0)$ en $B(a, 0)$ en de brandpunten $F_1(-c, 0)$ en $F_2(c, 0)$. Daarbij is $c^2 = a^2 + b^2$.

De asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$.

Om van de hyperbool $5x^2 - 4y^2 = 80$ de coördinaten van de toppen en de brandpunten en de vergelijkingen van de asymptoten te berekenen, herleid je deze

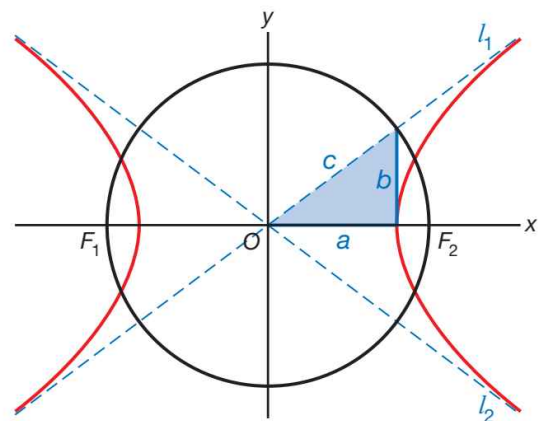
vergelijking tot de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Je krijgt

$\frac{5x^2}{80} - \frac{4y^2}{80} = 1$ ofwel $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$. De toppen zijn dus $(-4, 0)$ en $(4, 0)$.

Omdat $c^2 = 16 + 20 = 36$ zijn de brandpunten $(-6, 0)$ en $(6, 0)$.

De asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{\sqrt{20}}{4}x$ en $y = -\frac{\sqrt{20}}{4}x$ ofwel $y = \frac{1}{2}x\sqrt{5}$ en $y = -\frac{1}{2}x\sqrt{5}$.

Van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ liggen de toppen en brandpunten op de y -as. De toppen zijn $(0, b)$ en $(0, -b)$ en de brandpunten zijn $(0, c)$ en $(0, -c)$. Ook hierbij is $c^2 = a^2 + b^2$.



De algemene vergelijking $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Neem je in de algemene vergelijking van de tweede graad in x en y de coëfficiënt $b = 0$, dan krijg je bij geschikte keuzes van de andere coëfficiënten kegelsneden met symmetrieassen evenwijdig aan de x -as en/of y -as. Door kwadraatplitsen is te zien om welke kegelsnede het gaat en zijn de kenmerken af te leiden.

Zo geeft herleiden van $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 21 = 0$ uiteindelijk $\frac{(x+3)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$.

Dit is een ellips met toppen $(-5, 2)$, $(-1, 2)$, $(-3, 3)$ en $(-3, 1)$.

Omdat $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$, zijn de brandpunten $F_1(-3 - \sqrt{3}, 2)$ en $F_2(-3 + \sqrt{3}, 2)$.

13.3 Raaklijnen en poollijnen

13

O40 Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 10$.

De bovenste helft van de cirkel is gegeven door $y(x) = \sqrt{10 - x^2}$.

Uit $y(x) = \sqrt{10 - x^2}$ volgt $y'(x) = -\frac{x}{y}$.

a Toon dit aan.

Uit $y'(x) = -\frac{x}{y}$ volgt $2x + 2y \cdot y'(x) = 0$.

b Toon dit aan.

Theorie A Raaklijn en normaal bij kegelsneden

In opgave 40 heb je gezien dat uit $x^2 + y^2 = 10$ volgt $2x + 2y \cdot y'(x) = 0$. Je kunt dit resultaat sneller krijgen door het linker- en rechterlid van de vergelijking naar x te differentiëren. Je neemt aan dat y een functie van x is, dus voor het differentiëren van y^2 heb je de kettingregel nodig. Je krijgt $2x + 2y \cdot y'(x) = 0$.

Bij het differentiëren naar x van de vergelijking $2x^2 + 3y^2 = 44$ krijg je $4x + 6y \cdot y'(x) = 0$, en hieruit volgt $y'(x) = -\frac{2x}{3y}$. Hiermee kun je een vergelijking van de raaklijn k in het punt $A(4, 2)$ van de ellips $2x^2 + 3y^2 = 44$ opstellen.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = -\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 2} = -\frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} y = -\frac{4}{3}x + b \quad & \left\{ \begin{array}{l} -\frac{4}{3} \cdot 4 + b = 2 \\ -5\frac{1}{3} + b = 2 \\ b = 7\frac{1}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = -\frac{4}{3}x + 7\frac{1}{3}$ ofwel $k: 4x + 3y = 22$.

Bij een vergelijking van een kegelsnede krijg je de formule van y' door te differentiëren naar x .

De lijn door een punt van een kromme die loodrecht staat op de raaklijn in dat punt, heet een **normaal** van de kromme in dat punt. Om een vergelijking van de normaal n in een punt van een kromme op de stellen, bereken je eerst de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in dat punt. Daarna gebruik je $rc_n \cdot rc_k = -1$.

Voorbeeld

Gegeven is de parabool $(y - 2)^2 = -8(x + 3)$.

Stel een vergelijking op van

- a de lijn k die de parabool raakt in het punt $A(-3\frac{1}{2}, 4)$
- b de lijn n die de parabool loodrecht snijdt in het punt $B(-5, -2)$.

Uitwerking

- a $(y - 2)^2 = -8(x + 3)$ geeft $2(y - 2) \cdot y'(x) = -8$

$$y'(x) = \frac{-4}{y - 2}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{-4}{4 - 2} = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(-3\frac{1}{2}, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -3\frac{1}{2} + b = 4 \\ 7 + b = 4 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus $k: y = -2x - 3$ ofwel $k: 2x + y = -3$.

- b De lijn l raakt de parabool in B .

$$rc_l = \frac{-4}{-2 - 2} = 1, \text{ dus } rc_n = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} n: y = -x + b \\ \text{door } B(-5, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 + b = -2 \\ b = -7 \end{array}$$

Dus $n: y = -x - 7$ ofwel $n: x + y = -7$.

- 41** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + 6y + 15 = 0$.

Stel een vergelijking op van

- a de lijn k die c raakt in het punt $A(1, -2)$
- b de lijn n die c loodrecht snijdt in het punt $B(7, -2)$.

- 42** a Stel een vergelijking op van de lijn k die de ellips $(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 = 18$ raakt in het punt $A(5, -4)$.

- b Stel een vergelijking op van de lijn n die de ellips $2x^2 + 5y^2 + 8x - 30y + 16 = 0$ loodrecht snijdt in het punt $B(-6, 4)$.

- A 43** Gegeven is de hyperbool $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 15 = 0$.

- a Bereken de coördinaten van het middelpunt, de toppen en de brandpunten van de hyperbool.
- b Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de hyperbool.
- c Stel een vergelijking op van de lijn k die de hyperbool raakt in het punt $A(3, 9)$.
- d Stel een vergelijking op van de lijn n die de hyperbool loodrecht snijdt in het punt $B(1, 3)$.

O44 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 = r^2$ en het punt $A(x_A, y_A)$ van c . De lijn k raakt c in A .

Een vergelijking van k is $y = -\frac{x_A}{y_A}x + y_A + \frac{x_A^2}{y_A}$.

a Toon dit aan.

De vergelijking van k is ook te schrijven als $x_A x + y_A y = r^2$.

b Toon dit aan.

Theorie B De vergelijking van de poollijn

In opgave 44 heb je de algemene formule van de raaklijn in het punt $A(x_A, y_A)$ van de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ opgesteld. Het is ook mogelijk de algemene formule van de raaklijn k in het punt $A(x_A, y_A)$ van de kegelsnede $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ op te stellen. Je krijgt $k: ax_A x + by_A y + \frac{1}{2}cx_A + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_A + \frac{1}{2}dy + e = 0$. Je gaat dit in opgave 45 aantonen.

De lijn k die de kegelsnede $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ raakt in het punt $A(x_A, y_A)$ heeft vergelijking $k: ax_A x + by_A y + \frac{1}{2}cx_A + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_A + \frac{1}{2}dy + e = 0$.

Bij $ax^2 = ax \cdot x$ de ene x vervangen door x_A zodat je krijgt $ax_A x$ heet **halfsubstitutie**. Ook het vervangen van de ene x door x_A bij $cx = \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}cx$ heet halfsubstitutie.

Met de algemene formule van de raaklijn in het punt $A(x_A, y_A)$ van een kegelsnede is de algemene formule van de poollijn p van het punt $P(x_P, y_P)$ op te stellen.

Dit gaat als volgt.

$P(x_P, y_P)$ op $k: ax_A x + by_A y + \frac{1}{2}cx_A + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_A + \frac{1}{2}dy + e = 0$ geeft

$$ax_A x_P + by_A y_P + \frac{1}{2}cx_A + \frac{1}{2}cx_P + \frac{1}{2}dy_A + \frac{1}{2}dy_P + e = 0.$$

Dus A ligt op de lijn $ax_P x + by_P y + \frac{1}{2}cx_P + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_P + \frac{1}{2}dy + e = 0$.

Op dezelfde manier kun je aantonen dat het punt $B(x_B, y_B)$ van de kegelsnede op deze lijn ligt. Omdat A en B beide op deze lijn liggen, is $ax_P x + by_P y + \frac{1}{2}cx_P + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_P + \frac{1}{2}dy + e = 0$ de vergelijking van de lijn AB , ofwel de vergelijking van de poollijn van het punt $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van de kegelsnede.

De vergelijking van de poollijn p van het punt $P(x_p, y_p)$ ten opzichte van de kegelsnede $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ is
 $p: ax_px + by_py + \frac{1}{2}cx_p + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_p + \frac{1}{2}dy + e = 0$.

Merk op dat de vergelijking van de poollijn gelijk is aan de vergelijking van de raaklijn in P van de kegelsnede als P op de kegelsnede ligt.

De vergelijking van de poollijn is te gebruiken bij het opstellen van vergelijkingen van lijnen die de kegelsnede raken en door een punt P buiten de kegelsnede gaan.

Werkschema: opstellen van vergelijkingen van raaklijnen aan een kegelsnede die door een punt P buiten de kegelsnede gaan

- 1 Stel een vergelijking op van de poollijn p van P .
- 2 Snijd p met de kegelsnede. Dit geeft de raakpunten A en B .
- 3 Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan de kegelsnede in A en B .

Voorbeeld

Gegeven is de ellips $x^2 + 6y^2 = 40$.

Stel vergelijkingen op van de lijnen door het punt $P(7, 1)$ die de ellips raken.

Uitwerking

De poollijn van P is $x_px + 6y_py = 40$.

$P(7, 1)$ geeft $7x + 6y = 40$

$$\begin{cases} 7x + 6y = 40 \\ x^2 + 6y^2 = 40 \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} 6y = -7x + 40 \\ 6x^2 + 36y^2 = 240 \end{cases}$$

Substitutie van $6y = -7x + 40$ in $6x^2 + 36y^2 = 240$ geeft

$$6x^2 + (-7x + 40)^2 = 240$$

$$6x^2 + 49x^2 - 560x + 1600 = 240$$

$$55x^2 - 560x + 1360 = 0$$

$$11x^2 - 112x + 272 = 0$$

$$D = (-112)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 272 = 576$$

$$x = \frac{112 - 24}{22} = 4 \vee x = \frac{112 + 24}{22} = \frac{68}{11}$$

$$x = 4 \text{ geeft } y = 2, \text{ en } x = \frac{68}{11} \text{ geeft } y = -\frac{6}{11}$$

Raaklijn in $(4, 2)$ is $4x + 6 \cdot 2y = 40$ ofwel $x + 3y = 10$.

Raaklijn in $(\frac{68}{11}, -\frac{6}{11})$ is $\frac{68}{11}x + 6 \cdot -\frac{6}{11}y = 40$ ofwel $17x - 9y = 110$.

- 45** Gegeven is de kegelsnede $K: ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ en het punt $A(x_A, y_A)$ van K .

Voor de lijn k die K raakt in A geldt $rc_k = \frac{-2ax_A - c}{2by_A + d}$.

a Toon dit aan.

Voor de lijn k geldt $y = \frac{-2ax_A - c}{2by_A + d}x + y_A + \frac{2ax_A + c}{2by_A + d} \cdot x_A$.

b Toon dit aan, en herleid deze vergelijking tot

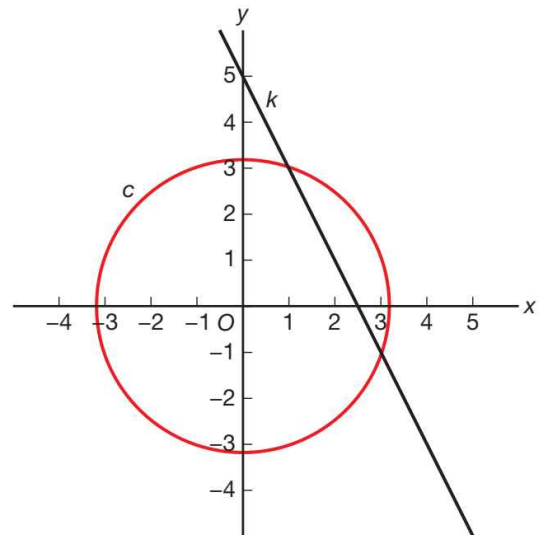
$$ax_Ax + by_Ay + \frac{1}{2}cx_A + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_A + \frac{1}{2}dy + e = 0.$$

Gebruik hierbij: als $A(x_A, y_A)$ op K ligt, geldt $ax_A^2 + by_A^2 = -cx_A - dy_A - e$.

- 46** Stel vergelijkingen op van de lijnen door het punt
- $A(1, 4)$ die de cirkel $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ raken
 - $B(0, 1)$ die de parabool $y^2 - 2y = 3x - 10$ raken
 - $C(8, -1)$ die de ellips $x^2 + 8y^2 = 24$ raken
 - $D(-10, -10)$ die de hyperbool $2x^2 - 3y^2 = 20$ raken.

- 47** Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$.
Stel vergelijkingen op van de lijnen door het punt
- $A(r\sqrt{2}, 0)$ die de cirkel raken
 - $B(r, 2r)$ die de cirkel raken.

- 48** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 = 10$.
De lijn $k: y = -2x + 5$ is de poollijn van P ten opzichte van de cirkel.
- Licht toe dat k te schrijven is als $4x + 2y = 10$.
 - Hoe volgt uit $k: 4x + 2y = 10$ en de vergelijking van de cirkel dat $P(4, 2)$ de pool is die bij de poollijn k hoort?
 - De lijn $l: y = -x - 4$ is de poollijn van Q ten opzichte van de cirkel.
Bereken de coördinaten van Q .



figuur 13.41

- 49**
- De lijn $k: y = -x + 3$ is de poollijn van het punt P ten opzichte van de parabool $y^2 = 4x$.
Bereken de coördinaten van P .
 - De lijn $l: y = -1\frac{1}{5}x + 2$ is de poollijn van het punt Q ten opzichte van de ellips $2x^2 + 3y^2 = 30$.
Bereken de coördinaten van Q .

- A 50** a De lijn k : $x + y = 10$ raakt de hyperbool $x^2 - a^2y^2 = -80$.
Bereken a^2 .
- b De lijn l : $3x - 4y = 10$ raakt de hyperbool $b^2x^2 - 8y^2 = 100$.
Bereken b^2 .
- A 51** De lijn $x - 2y = c$ is de poollijn van het punt $P(1, \frac{1}{5})$ ten opzichte van de hyperbool $x^2 - a^2y^2 = 6$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten van de poollijn met de hyperbool.
- D 52** Gegeven is de ellips $px^2 + (y - q)^2 = 52$.
De lijn l : $15x - 4y = 32$ is de poollijn van het punt $P(5, 1)$ ten opzichte van de ellips.
Bereken p en q .

Terugblik

13

Vergelijkingen van raaklijnen

Door de vergelijking van een kegelsnede naar x te differentiëren krijg je de formule van y' .

Bij de hyperbool h : $2x^2 - 3y^2 - 20x + 18y + 3 = 0$ krijg je

$$4x - 6y \cdot y'(x) - 20 + 18y'(x) = 0$$

$$(18 - 6y) \cdot y'(x) = 20 - 4x$$

$$y'(x) = \frac{20 - 4x}{18 - 6y} \text{ ofwel } y'(x) = \frac{10 - 2x}{9 - 3y}$$

Voor de lijn k die h raakt in het punt $A(9, 5)$ geldt $rc_k = \frac{10 - 2 \cdot 9}{9 - 3 \cdot 5} = \frac{4}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4}{3}x + b \\ \text{door } A(9, 5) \end{array} \right\} \frac{4}{3} \cdot 9 + b = 5, \text{ dus } b = -7$$

Dus k : $y = \frac{4}{3}x - 7$ ofwel k : $4x - 3y = 21$.

Je kunt ook gebruiken dat bij de vergelijking $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ de vergelijking van de raaklijn k in het punt $A(x_A, y_A)$ is

$$k: ax_Ax + by_Ay + \frac{1}{2}cx_A + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_A + \frac{1}{2}dy + e = 0.$$

Dus bij $2x^2 - 3y^2 - 20x + 18y + 3 = 0$ hoort

$$k: 2x_Ax - 3y_Ay - 10x_A - 10x + 9y_A + 9y + 3 = 0.$$

Invullen van $x_A = 9$ en $y_A = 5$ geeft $18x - 15y - 90 - 10x + 45 + 9y + 3 = 0$ ofwel $8x - 6y = 42$, dus k : $4x - 3y = 21$.

De lijn l die de hyperbool loodrecht snijdt in het punt A is een normaal van h . Omdat $l \perp k$ is $rc_l \cdot rc_k = -1$ en dit geeft $rc_l \cdot \frac{4}{3} = -1$, dus $rc_l = -\frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(9, 5) \end{array} \right\} -\frac{3}{4} \cdot 9 + b = 5, \text{ dus } b = 11\frac{3}{4}$$

Dus l : $y = -\frac{3}{4}x + 11\frac{3}{4}$ ofwel l : $3x + 4y = 47$.

Vergelijkingen van poollijnen

De vergelijking van de poollijn p van het punt $P(x_P, y_P)$ ten opzichte van de kegelsnede $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ is

$$p: ax_Px + by_Py + \frac{1}{2}cx_P + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_P + \frac{1}{2}dy + e = 0.$$

Om vergelijkingen op te stellen van de raaklijnen door het punt $P(-5, -7)$ aan de hyperbool h : $2x^2 - 3y^2 - 20x + 18y + 3 = 0$ ga je als volgt te werk.

- 1 Stel een vergelijking op van de poollijn p van P .
Je krijgt p : $2x - 3y = -1$.
- 2 Snijd p met h . Dit geeft de raakpunten A en B .
Je krijgt $A(1, 1)$ en $B(13, 9)$.
- 3 Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan h in A en B .
Je krijgt de lijnen $4x - 3y = 1$ en $8x - 9y = 23$.

13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken

O53 Gegeven zijn de parabool $y^2 = 4x$ en het punt P van de parabool. De lijn k raakt de parabool in P en snijdt de y -as in het punt A . De lijn l gaat door A en het brandpunt F van de parabool. De lijn m gaat door O en P . Het punt S is het snijpunt van l en m .

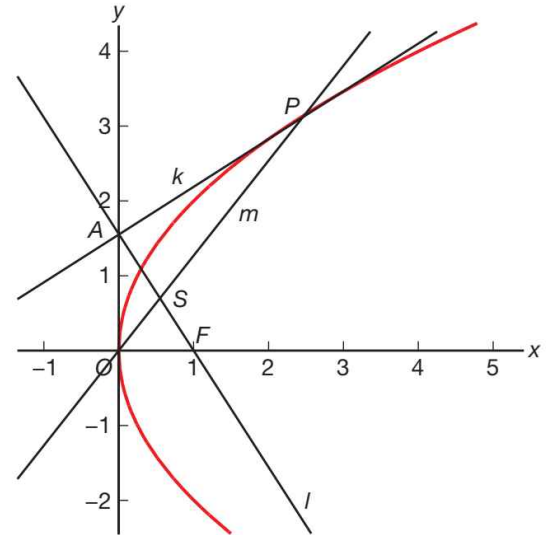
a Maak een tekening met GeoGebra en ontwikkel een vermoeden over de kromme waarop alle punten S liggen als P over de parabool beweegt.

Je kunt nagaan dat het punt $P(\frac{1}{4}\lambda^2, \lambda)$ op de parabool $y^2 = 4x$ ligt. Voor de vergelijking van k geldt dan $k: \lambda y = 2x + \frac{1}{2}\lambda^2$.

b Licht dit toe.

Voor de vergelijking van l geldt $l: y = -\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda$
en voor de vergelijking van m geldt $m: y = \frac{4}{\lambda}x$.

c Licht dit toe.



figuur 13.42

Theorie A Variabele punten en kegelsneden

In opgave 53 is het punt S het snijpunt van de lijnen $l: y = -\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda$ en $m: y = \frac{4}{\lambda}x$. Om een vergelijking van de kromme op te stellen waarop de punten S liggen als het punt P over de parabool beweegt, elimineer je λ uit de vergelijkingen van l en m . Maak daartoe in beide vergelijkingen λ vrij.

Door de zo verkregen uitdrukkingen aan elkaar gelijk te stellen krijg je de vergelijking van de kromme. Na herleiden kun je zien met wat voor kromme je te maken hebt.

Je krijgt

- uit $y = -\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda$ volgt $\lambda x - \lambda = -2y$ en dit geeft $\lambda = \frac{-2y}{x-1}$
- uit $y = \frac{4}{\lambda}x$ volgt $\lambda = \frac{4x}{y}$
- $\frac{-2y}{x-1} = \frac{4x}{y}$ geeft $4x^2 - 4x = -2y^2$ ofwel $2x^2 + y^2 - 2x = 0$

en dit is een ellips.

In opgave 53 is het variabele punt $P(\frac{1}{4}\lambda^2, \lambda)$ op de parabool $y^2 = 4x$ genomen. Hierbij is $y = \lambda$ gekozen, zodat je krijgt $x = \frac{1}{4}\lambda^2$. Je had ook $y = 2\lambda$ kunnen kiezen, dan krijg je $x = \lambda^2$. Bij deze keuze krijg je geen breuken.

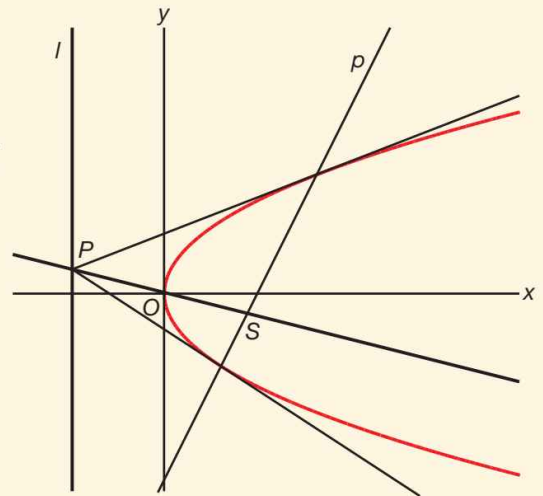
Ligt het variabele punt P op de lijn $l: 2x - 3y = 8$, dan kies je bijvoorbeeld $y = 2\lambda$, zodat $2x = 6\lambda + 8$ ofwel $x = 3\lambda + 4$. Zo krijg je het punt $P(3\lambda + 4, 2\lambda)$.

In het voorbeeld is het variabele punt $(-4, \lambda)$ op de lijn $x = -4$ genomen.

Voorbeeld

Gegeven zijn de parabool $y^2 = 4x$ en de lijn $l: x = -4$. Het punt P ligt op l en de poollijn p van P snijdt de lijn OP in het punt S .

Stel algebraïsch een vergelijking op van de kromme K waarop alle punten S liggen als P over l beweegt.



figuur 13.43

Uitwerking

$P(-4, \lambda)$ op l .

$$\left. \begin{array}{l} p: \lambda y = 2 \cdot (-4) + 2x \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{2x - 8}{y} \\ OP: y = \frac{\lambda}{-4}x \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{-4y}{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2x - 8}{y} = \frac{-4y}{x} \\ 2x^2 - 8x = -4y^2 \end{array}$$

Dus $K: x^2 + 2y^2 - 4x = 0$.

- 54** Gegeven zijn het punt $A(-2, 0)$, de lijn $l: x = 2$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 4$. Het punt P ligt op l . De poollijn p van P snijdt de lijn AP in het punt S .

K is de kromme waarop alle punten S liggen als P over l beweegt.

- Maak een tekening met GeoGebra en ontwikkel een vermoeden over de kromme K .
- Stel algebraïsch een vergelijking op van K .

- 55** Gegeven zijn de ellips $x^2 + 2y^2 = 4$ en de lijn $l: x = 2$. Het punt P ligt op l en de lijn p is de poollijn van P . De lijn k gaat door P en staat loodrecht op p . De lijnen k en p snijden elkaar in het punt S . K is de kromme waarop alle punten S liggen als P over l beweegt.
- Maak een tekening met GeoGebra en ontwikkel een vermoeden over de kromme K .
 - Stel algebraïsch een vergelijking op van K .

- 56** Gegeven zijn de parabool $y^2 = 4x$ en de lijn $k: x = -2$. Het punt F is het brandpunt van de parabool en het punt P ligt op k . De lijn l door P en F snijdt de poollijn p van P in het punt S . K is de kromme waarop alle punten S liggen als P over k beweegt.
- Maak een tekening met GeoGebra en ontwikkel een vermoeden over de kromme K .
 - Stel algebraïsch een vergelijking op van K .

De lijn m gaat door F en staat loodrecht op p . Het snijpunt van m en p is het punt T .

L is de kromme waarop alle punten T liggen als P over k beweegt.

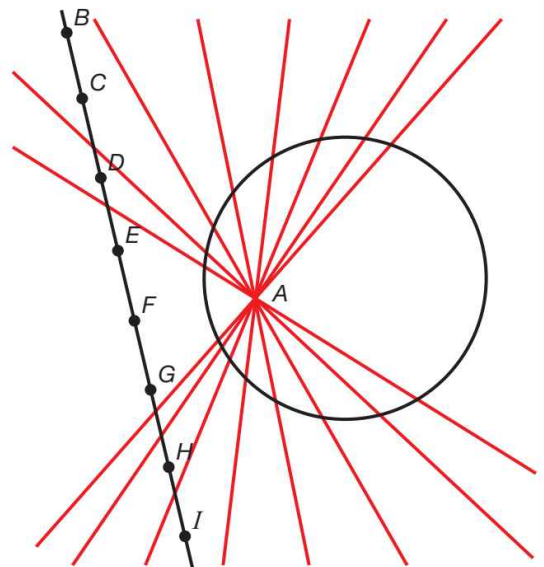
- 57** Gegeven zijn de ellips $x^2 + 4y^2 = 16$ en de lijn $l: x - 2y + 4 = 0$. Het punt P ligt op l . De lijn l en de poollijn p van P snijden elkaar loodrecht. Bereken de coördinaten van P .

Informatief Poollijn bij P binnen of op een kegelsnede

Ligt het punt $P(x_P, y_P)$ op de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$, dan is de lijn $x_P x + y_P y = r^2$ juist de raaklijn in P aan de cirkel. Dus als P op de cirkel ligt, dan is de poollijn van P de raaklijn in P .

Ligt het punt $P(x_P, y_P)$ binnen de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$, dan geeft de vergelijking $x_P x + y_P y = r^2$ ook een lijn. Deze lijn ligt buiten de cirkel.

Met GeoGebra kun je het volgende ontdekken. Bij een punt A binnen een kegelsnede hoort een poollijn l waarbij voor alle punten P van l de poollijnen door het punt A gaan. Dus bij een lijn l die een kegelsnede niet snijdt gaan de poollijnen van alle punten P op l door één punt binnen de kegelsnede. Dat punt is de pool van l , en l is de poollijn van dat punt.



- A 58** Gegeven zijn de ellips $4x^2 + y^2 = 16$ en de lijn $k: y = 2x - 4$.
 Het punt P ligt buiten de ellips op k en p is de poollijn van P .
 Het snijpunt van OP en p is het punt S .
 K is de kromme waarop alle punten S liggen als P over k beweegt.
 a Maak een tekening met GeoGebra en ontwikkel een vermoeden over de kromme K .
 b Stel algebraïsch een vergelijking op van K .

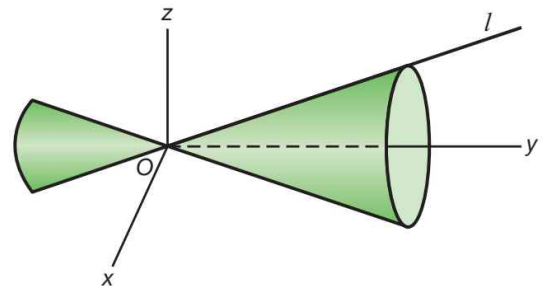
- D 59** Gegeven is de parabool $y^2 = 4x$. Het punt P ligt op de richtlijn l van de parabool. De poollijn p van P snijdt de parabool in de punten A en B . Het midden van lijnstuk AB is het punt M .
 K is de kromme waarop alle punten M liggen als P over l beweegt.
 a Maak een tekening met GeoGebra en ontwikkel een vermoeden over de kromme K .
 b Stel algebraïsch een vergelijking op van K .

- O 60** In figuur 13.44 wentelt de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

om de y -as. Zo ontstaat een kegelvlak.

De punten $A(0, 4, 2)$, $B(3, 6, 0)$, $C(0, -10, 5)$ en $D(-7, -14, 0)$ liggen in dit kegelvlak.

- a Licht dit toe.
 b Controleer dat de coördinaten van A , B , C en D voldoen aan de vergelijking $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$.



figuur 13.44

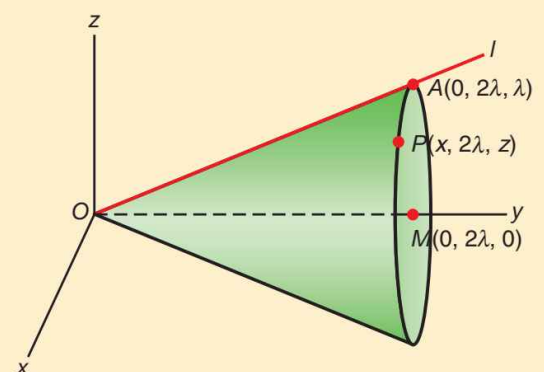
Theorie B Omwentelingsoppervlakken

Het kegelvlak in opgave 60 ontstaat door een lijn te wentelen om een as. Dit kegeloppervlak is een voorbeeld van een **omwentelingsoppervlak**.
 Om een vergelijking op te stellen van dit omwentelingsoppervlak gaan we als volgt te werk. Zie figuur 13.45.

De doorsnede van het vlak $y = 2\lambda$ en het kegelvlak is de cirkel met middelpunt $M(0, 2\lambda, 0)$ en straal λ .
 Voor een punt $P(x, 2\lambda, z)$ op deze cirkel geldt dus $y = 2\lambda \wedge x^2 + z^2 = \lambda^2$.

$\lambda = \frac{1}{2}y$ substitueren in $x^2 + z^2 = \lambda^2$ geeft $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}y^2$ ofwel $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$.

De vergelijking van het kegelvlak is dus $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$.



figuur 13.45

Voorbeeld

De parabool $x = 0 \wedge z = y^2$ wordt gewenteld om de z -as.
Stel een vergelijking op van het omwentelingsoppervlak dat zo ontstaat.

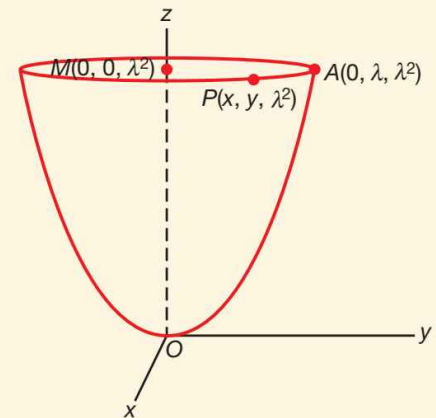
Uitwerking

$A(0, \lambda, \lambda^2)$ is een punt van de parabool $x = 0 \wedge z = y^2$.

Voor een punt $P(x, y, \lambda^2)$ van de cirkel met middelpunt

$M(0, 0, \lambda^2)$ in het vlak $z = \lambda^2$ geldt $x^2 + y^2 = \lambda^2 \wedge z = \lambda^2$.

Hieruit volgt dat de gevraagde vergelijking $z = x^2 + y^2$ is.



Het omwentelingsoppervlak in het voorbeeld heet een **omwentelingsparaboloïde**.

61 Gegeven is de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Stel een vergelijking op van het kegelvlak dat ontstaat als l

- a wentelt om de y -as
- b wentelt om de z -as.

62 Stel een vergelijking op van de omwentelingsparaboloïde die ontstaat als

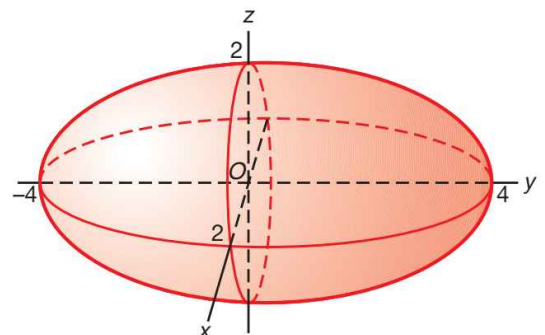
- a de parabool $x = 0 \wedge z = \frac{1}{2}y^2$ wentelt om de z -as
- b de parabool $x = 0 \wedge y = 2z^2$ wentelt om de y -as.

63 Door de ellips $x = 0 \wedge y^2 + 4z^2 = 16$ te wentelen om de y -as ontstaat een **ellipsoïde**.

De doorsnede van dit omwentelingsoppervlak met het vlak $y = \lambda$ is de cirkel met middelpunt

$M(0, \lambda, 0)$ en straal $\sqrt{4 - \frac{1}{4}\lambda^2}$.

- a Licht dit toe. Hoe volgt hieruit dat $x^2 + z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2$ een vergelijking van deze cirkel is?
- b Toon aan dat een vergelijking van deze ellipsoïde $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ is.
- c Stel een vergelijking op van de ellipsoïde die ontstaat als de ellips $x = 0 \wedge y^2 + 4z^2 = 16$ wentelt om de z -as.



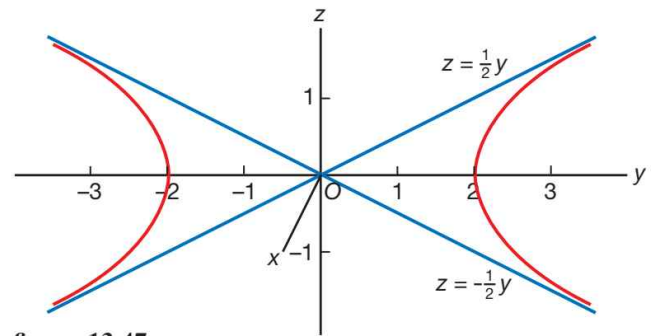
figuur 13.46

A 64 Gegeven is de hyperbool $x = 0 \wedge y^2 - 4z^2 = 4$. Door de hyperbool te wentelen om de z -as ontstaat een **eenbladige hyperboloïde**. Zie figuur 13.48.

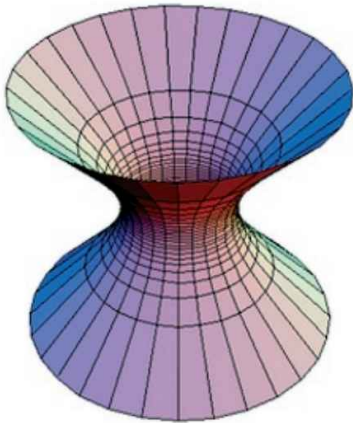
a Stel hiervan een vergelijking op.

Door de hyperbool te wentelen om de y -as ontstaat een **tweebladige hyperboloïde**. Zie figuur 13.49.

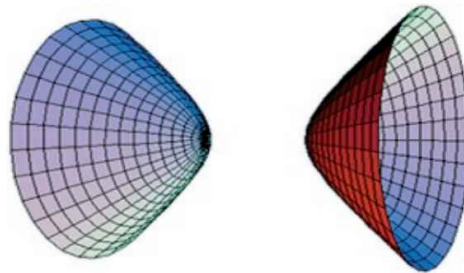
b Stel hiervan een vergelijking op.



figuur 13.47



figuur 13.48 eenbladige hyperboloïde



figuur 13.49 tweebladige hyperboloïde

Informatief Paraboloïden en ellipsoïden

De in dit hoofdstuk behandelde ruimtelijke oppervlakken zijn alle door wenteling verkregen. Ze heten daarom omwentelingsoppervlakken. Er zijn echter ook andere ruimtelijke tweedegraadsoppervlakken. Zo heten oppervlakken met een vergelijking van de vorm

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0 \text{ elliptische paraboloïden.}$$

Neem je in de formule $a = b$ dan krijg je een omwentelingsparaboloïde.

Omwentelingsparaboloïden worden bijvoorbeeld gebruikt bij schotelantennes, omdat alle stralen die evenwijdig aan de as binnenvallen naar het brandpunt worden geleid en daar dus geconcentreerd kunnen worden opgevangen.

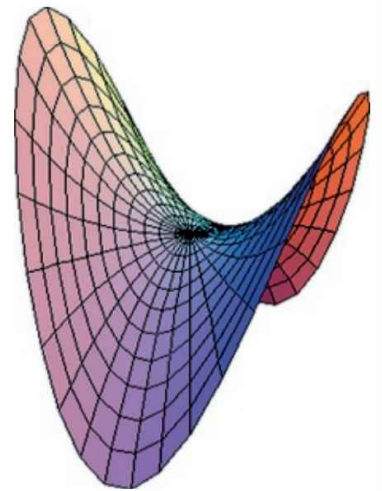
Ook de werking van zonneovens berust op deze eigenschap.

Oppervlakken met een vergelijking van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$

zijn hyperbolische paraboloïden.

Het bijzondere van hyperbolische paraboloïden is dat op het oppervlak rechte lijnen liggen. Hiervan maakt men in de praktijk gebruik door constructies te maken in de vorm van een hyperbolische paraboloïde die worden opgetrokken uit spankabels of gewapend beton. Je krijgt dan een stevige vorm die er bovendien sierlijk uit ziet.

Oppervlakken met een vergelijking van de vorm $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ zijn ellipsoïden met hoofdassen die in drie richtingen verschillend van lengte kunnen zijn.



Een hyperbolische paraboloïde, horizontale doorsneden zijn hyperbolen, verticale doorsneden zijn parabolen.

Terugblik

Variabele punten en kegelsneden

Het punt P ligt op de lijn $k: x + y = 6$. De poollijn p van P ten opzichte van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en de poollijn q van P ten opzichte van de ellips $3x^2 + 4y^2 = 12$ snijden elkaar in het punt S .

Om een vergelijking op te stellen van de kromme K waarop alle punten S liggen als P over k beweegt, neem je een variabel punt $P(\lambda, -\lambda + 6)$ op k . Je stelt vervolgens twee vergelijkingen op en elimineert hieruit λ . Je hebt dan de vergelijking van de kromme K gekregen.

$$p: \lambda x + (-\lambda + 6)y = 1 \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{1 - 6y}{x - y}.$$

$$q: 3\lambda x - 4\lambda y + 24y = 12 \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{12 - 24y}{3x - 4y}.$$

$$\frac{1 - 6y}{x - y} = \frac{12 - 24y}{3x - 4y} \text{ herleiden geeft } 9x - 8y - 6xy = 0 \text{ ofwel } y = \frac{9x}{6x + 8}.$$

Dus de kromme is een hyperbool.

Omwentelingsoppervlakken

Een omwentelingsoppervlak ontstaat door een lijn of een vlakke kromme te wentelen om een (coördinaat)as.

Bekende omwentelingsoppervlakken zijn het kegelvlak, de omwentelingsparaboloïde, de ellipsoïde en de hyperboloïde.

Door de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ te wentelen om de x -as

ontstaat een kegelvlak. Zie de figuur hiernaast.

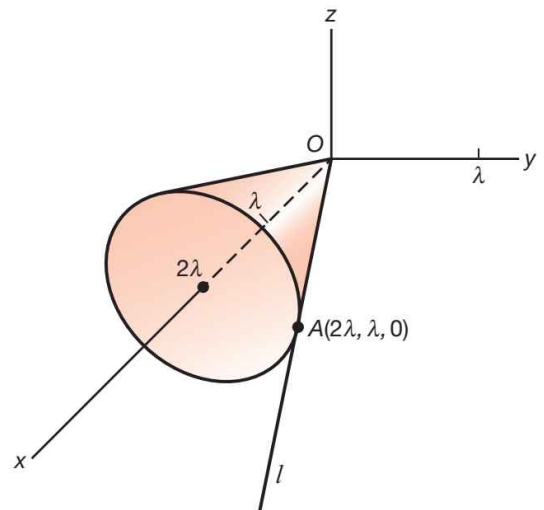
De doorsnede van het vlak $x = 2\lambda$ en het kegelvlak is de cirkel met middelpunt $M(2\lambda, 0, 0)$ en straal λ .

Voor een punt P op deze cirkel geldt

$$x = 2\lambda \wedge y^2 + z^2 = \lambda^2.$$

$$\text{Hieruit volgt } y^2 + z^2 = \frac{1}{4}x^2 \text{ ofwel } x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0.$$

Hiermee is de vergelijking van het kegelvlak gevonden.



Diagnostische toets

13

13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool

- 1 Stel een vergelijking op van de parabool
 - a met top $O(0, 0)$ en brandpunt $F(8, 0)$
 - b met brandpunt $F(6, 0)$ en top $T(10, 0)$
 - c met brandpunt $F(4, 2)$ en richtlijn $l: x = -6$
 - d met richtlijn $l: y = 4$ en top $T(8, 3)$.
- 2 Bereken van de volgende parabolen de coördinaten van de top T en het brandpunt F , en stel een vergelijking op van de as k en de richtlijn l .
 - a $y^2 - 10y = 2x + 1$
 - b $y = \frac{1}{8}x^2 + 2x - 4$

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool

- 3 Stel een vergelijking op van de ellips
 - a met toppen $(0, -2)$, $(0, 2)$, $(-3, 0)$ en $(3, 0)$
 - b met toppen $(4, 2)$ en $(6, 3)$ en middelpunt $(4, 3)$
 - c met toppen $(6, 2)$ en $(10, 2)$ en brandpunt $(7, 2)$.
- 4 Stel een vergelijking op van de ellips met brandpunt $F(2, 1)$ en richtcirkel $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$.
- 5 Bereken van de volgende ellipsen de coördinaten van de toppen en de brandpunten.
 - a $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y - 71 = 0$
 - b $6(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 30$
- 6 Stel een vergelijking op van de hyperbool
 - a met toppen $(-5, 0)$, $(5, 0)$ en brandpunten $(-6, 0)$ en $(6, 0)$
 - b met toppen $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ en brandpunten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$
 - c met toppen $(-3, 0)$ en $(3, 0)$ die door $(12, 6)$ gaat.
- 7 Bereken van de volgende hyperbolen de coördinaten van de toppen en de brandpunten.
 - a $3(x - 2)^2 - 5(y + 2)^2 = -30$
 - b $2x^2 - 7y^2 - 16x + 28y - 10 = 0$
- 8 Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de hyperbool
 - a $4x^2 - 9y^2 = 36$
 - b met toppen $(0, -4)$ en $(0, 4)$ en brandpunten $(0, -5)$ en $(0, 5)$.

- 9 Onderzoek de kegelsnede.
- a $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$
 - b $x^2 + 8x + 12y = 0$
 - c $16x^2 - 9y^2 + 32x - 128 = 0$
 - d $3x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 50 = 0$

13.3 Raaklijnen en poollijnen

- 10 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 + 2x + 6y - 10 = 0$.
- a Stel een vergelijking op van de lijn k die c raakt in het punt $A(1, 1)$.
 - b Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2 die door het punt $B(3, -6)$ gaan en die c raken.
- 11 Stel een vergelijking op van
- a de lijn k die de ellips $(x - 1)^2 + 10(y + 2)^2 = 46$ raakt in het punt $A(7, -3)$
 - b de lijn n die de ellips $4x^2 + 12y^2 + 16x - 24y - 96 = 0$ loodrecht snijdt in het punt $B(0, 4)$.
- 12 Stel vergelijkingen op van de lijnen door het punt $P(4, -2)$ die de hyperbool $x^2 - 32y^2 = 112$ raken.
- 13 De lijn $k: y = -\frac{2}{3}x + 1$ is de poollijn van het punt P ten opzichte van de ellips $4x^2 + 9y^2 = 36$.
Bereken de coördinaten van P .

13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken

- 14 Gegeven zijn de lijn $l: x + y = 6$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 12$.
Het punt P ligt op l . De poollijn p van P snijdt de lijn OP in het punt S .
 K is de kromme waarop alle punten S liggen als P over l beweegt.
Stel algebraïsch een vergelijking op van K .
- 15 Gegeven is de parabool $y^2 = 4x$. Het punt P ligt op de parabool.
De lijn k raakt de parabool in P . De lijn m gaat door O en snijdt k loodrecht in het punt S .
 K is de kromme waarop alle punten S liggen als P over de parabool beweegt.
Stel algebraïsch een vergelijking op van K .
- 16 Gegeven is de parabool $x = 0 \wedge z^2 = 4y$.
Stel een vergelijking op van de paraboloid die ontstaat als de parabool
- a wentelt om de y -as
 - b wentelt om de z -as.

De zevenkamp in de atletiek bij de vrouwen kent twee springnummers: hoogspringen en verspringen. Je kunt je afvragen of een zevenkampster die goed is in hoogspringen ook goed is in verspringen. Dit is te onderzoeken door van een aantal atletes de beste sprongen op deze onderdelen met elkaar te vergelijken. Door de resultaten in een puntenwolk te tekenen kun je zien of er samenhang is. Ook is het mogelijk de mate van samenhang in een getal uit te drukken.

Wat leer je?

- Wat het begrip correlatie inhoudt.
- Rekenen met regressiemodellen op de GR.
- Wat de correlatiecoëfficiënt is en hoe je dit getal moet interpreteren.
- De begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese, beslissingsvoorschrift, significantieniveau en overschrijdingskans.
- Werken met eenzijdige toetsen, tweezijdige toetsen, toetsen bij de normale verdeling en toetsen bij de binomiale verdeling.



Mathematische statistiek

14



Voorkennis Kansverdelingen en correlatie

Theorie A De wortel-n-wet

In hoofdstuk 12 heb je gezien dat het gemiddelde

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

van n gelijke, onderling onafhankelijke

toevalsvariabelen X met verwachtingswaarde $E(X)$ en standaardafwijking σ_X voor grote waarden van n bij benadering

normaal verdeeld is met $\mu_{\bar{X}} = E(X)$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

Is X normaal verdeeld dan geldt deze regel voor elke waarde van n . Je hebt dan te maken met een steekproefgemiddelde $\bar{X}$ bij een steekproef van lengte n . Deze regel staat bekend als de **wortel-n-wet**.

Bakker Nollen maakt krentenbollen waarvan het gewicht X in gram normaal verdeeld is met $\mu_X = 52,1$ en $\sigma_X = 2,8$. Hij verkoopt de bollen in zakken van acht stuks. Het gemiddelde gewicht $\bar{X}$ van de krentenbollen in een zak is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 52,1$

$$\text{en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{2,8}{\sqrt{8}}.$$

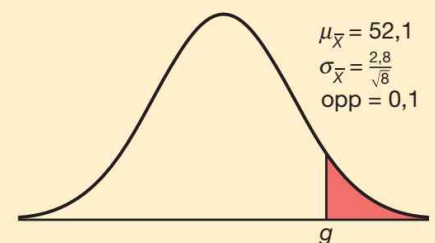
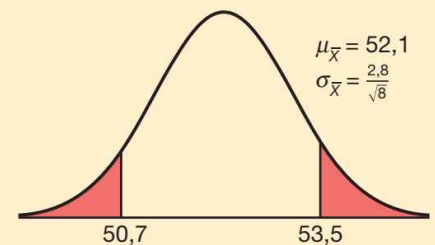
I Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van de krentenbollen in een zak meer dan 1,4 gram van het gemiddelde afwijkt.

$$\begin{aligned} \text{De kans is } P(\bar{X} < 50,7 \vee \bar{X} > 53,5) &= 2 \cdot P(\bar{X} < 50,7) = \\ &= 2 \cdot \text{normalcdf}\left(-10^9, 50,7, 52,1, \frac{2,8}{\sqrt{8}}\right) \approx 0,157. \end{aligned}$$

II Bereken het gemiddelde gewicht van de krentenbollen in de zakken die tot de 10% zwaarste zakken behoren.

$$g = \text{invNorm}\left(0,9, 52,1, \frac{2,8}{\sqrt{8}}\right) = 53,36\dots$$

Het gemiddelde gewicht van de krentenbollen in deze zakken is 53,4 gram of meer.



- 1 Bij de jaarlijkse oliebollentest van het Algemeen Dagblad blijkt het gewicht X in gram van de oliebollen van Bakkerij Brokking in IJsselstein normaal verdeeld te zijn met $\mu_X = 105$ en $\sigma_X = 5$. Bakkerij Brokking verkoopt de oliebollen in zakken van tien stuks.
 - a Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van de oliebollen in een zak meer dan 2 gram van het gemiddelde afwijkt.
 - b Bereken in één decimaal nauwkeurig het gemiddelde gewicht van de oliebollen in de zakken die tot de 20% zwaarste zakken behoren.

- 2 De levensduur van een balpen is het aantal meter dat je ermee kunt schrijven. Pennen van het merk Pilot hebben een levensduur L in meter die normaal verdeeld is met $\mu_L = 90$ en $\sigma_L = 7$. De pennen worden verpakt in doosjes van 12 stuks. Bekijk de 50% van de doosjes waarvan de gemiddelde levensduur van deze pennen zo weinig mogelijk van 90 meter afwijkt. Wat weet je van de gemiddelde levensduur van de pennen in die doosjes? Rond af op één decimaal.

Theorie B De binomiale verdeling

Om de kans te berekenen dat je bij het 25 keer gooien met een dobbelsteen minstens vijf keer 6 ogen gooit, gebruik je de optie binomcdf. Je hebt hier te maken een binomiaal kansexperiment met $X =$ het aantal keer 6 ogen, $n = 25$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{binomcdf}(25, \frac{1}{6}, 4) \approx 0,406$

Voorbeeld

Alex gooit 60 keer met een dobbelsteen. De kans dat hij minstens a keer 6 ogen gooit is kleiner dan 0,05. Onderzoek welke waarden a kan aannemen.

Uitwerking

$X =$ het aantal keer 6 ogen.

X is binomiaal verdeeld met $n = 60$ en $p = \frac{1}{6}$.

$P(X \geq a) < 0,05$ ofwel $1 - P(X \leq a - 1) < 0,05$

Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(60, \frac{1}{6}, x - 1)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(x - 1, 60, \frac{1}{6})$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 15$ geeft $y_1 \approx 0,065$

$x = 16$ geeft $y_1 \approx 0,034$.

Dus a is 16, 17, 18, ..., 59 of 60.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS $\blacktriangleleft$ TO EDIT FUNCTION				
X	Y1			
12	.29206			
13	.19033			
14	.11522			
15	.06478			
16	.03385			
17	.01645			
18	.00744			
19	.00313			
20	.00123			
21	4.5E-4			
22	1.6E-4			
Y1=		.06478037359		

Je verwacht $60 \cdot \frac{1}{6} = 10$ keer 6 ogen, dus begin de tabel bijvoorbeeld bij $x = 12$.

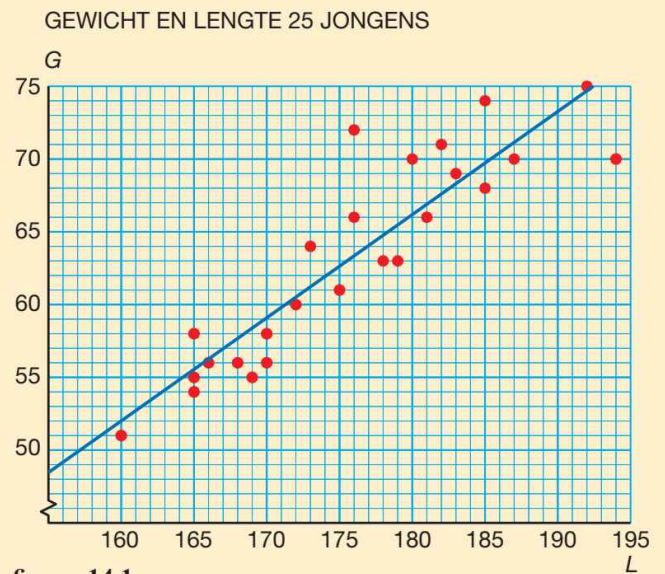
- 3 Sofie gooit 100 keer met een dobbelsteen.
- Bereken de kans dat ze minstens 40 keer meer dan 4 ogen gooit.
 - De kans dat ze minstens a keer meer dan 4 ogen gooit is kleiner dan 0,06.
Onderzoek welke waarden a kan aannemen.
 - De kans dat ze hoogstens b keer meer dan 4 ogen gooit is kleiner dan 0,20.
Onderzoek welke waarden b kan aannemen.
 - De kans dat ze precies c keer meer dan 4 ogen gooit is groter dan 0,075.
Onderzoek welke waarden c kan aannemen.

Theorie C Correlatie

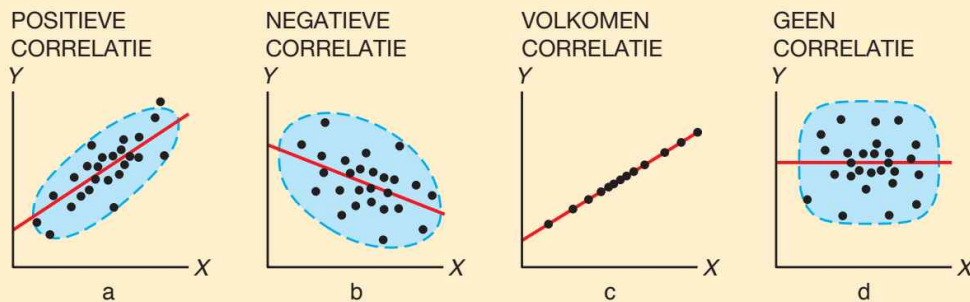
Van 25 jongens is het gewicht G in kg en de lengte L in cm gemeten. Deze gegevens zijn verwerkt in het **spreadsdiagram** in figuur 14.1. De punten in het diagram vormen samen een **puntenwolk**.

Uit de figuur ontstaat de indruk dat bij grotere lengten een groter gewicht hoort. We zeggen dat er een samenhang bestaat tussen de variabelen L en G . In plaats van samenhang gebruikt men in de statistiek het woord **correlatie**.

In de figuur is bovendien de **best passende lijn** bij de puntenwolk getekend. Deze lijn heeft een positieve richtingscoëfficiënt. Er is sprake van **positieve correlatie**.



figuur 14.1



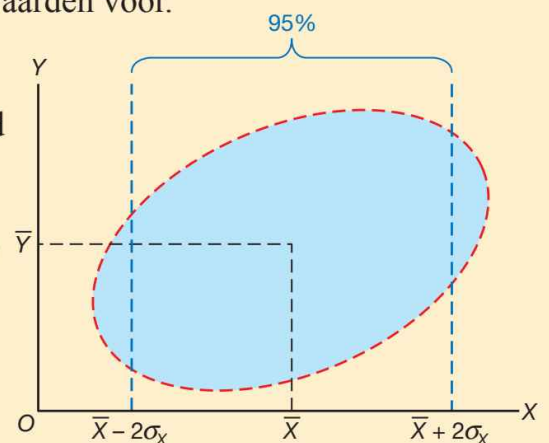
figuur 14.2

In figuur 14.2b bestaat er ook correlatie tussen X en Y , maar hier gaan lage X -waarden samen met hoge Y -waarden en hoge X -waarden samen met lage Y -waarden. Er is dan sprake van **negatieve correlatie**.

In figuur 14.2c is de correlatie **volkomen**. De punten liggen precies op een lijn. Bij een gegeven X is de bijbehorende Y exact te berekenen.

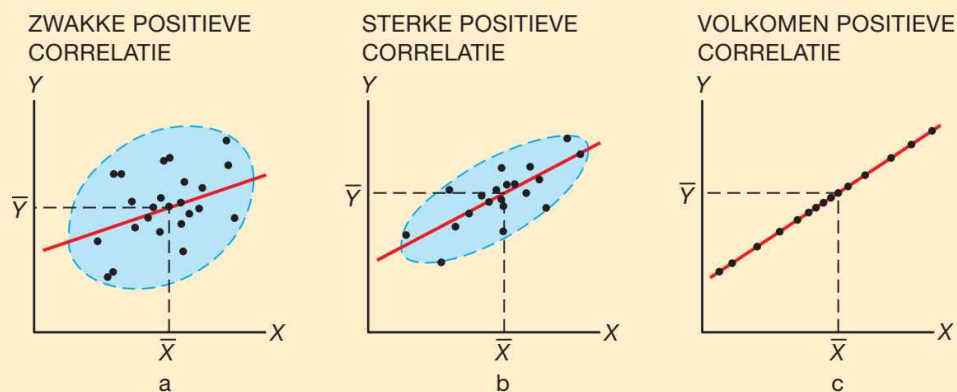
In figuur 14.2d ten slotte is er geen enkele samenhang tussen X en Y . Hoge Y -waarden komen zowel bij lage als bij hoge X -waarden voor. Er is geen correlatie tussen X en Y .

In een spreadsdiagram is de puntenwolk gegroepeerd om het punt $(\bar{X}, \bar{Y})$. Dit punt heet het **zwaartepunt** van de puntenwolk. In het geval X normaal verdeeld is bevindt ongeveer 95% van de punten zich in de verticale strook met afstand kleiner dan $2\sigma_X$ van het gemiddelde $\bar{X}$. Hierbij is σ_X de standaardafwijking van X .



figuur 14.3

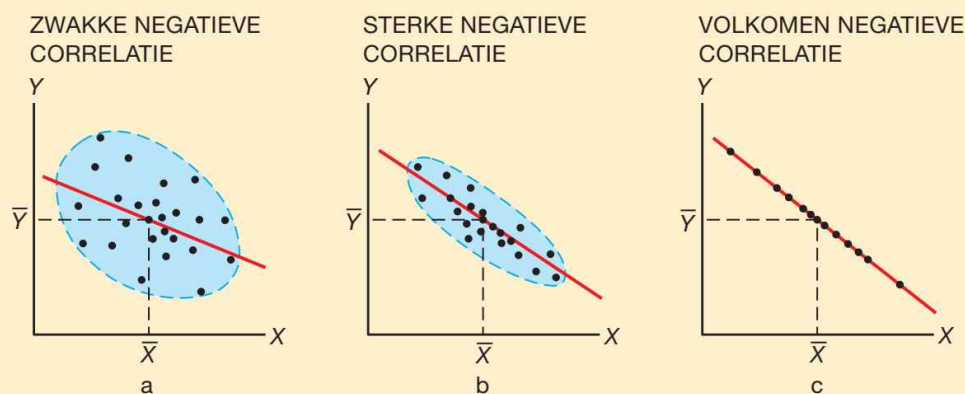
In figuur 14.4 zie je drie spreidingsdiagrammen. In elk van die figuren zijn $\bar{X}$, $\bar{Y}$, σ_X en σ_Y hetzelfde. Toch kan er nog een flink verschil optreden in de mate van samenhang tussen X en Y . In figuur 14.4a is de spreiding om de best passende lijn vrij groot. De ellipsvormige puntenwolk is nogal breed. We spreken dan van **zwakke correlatie** tussen X en Y .



figuur 14.4

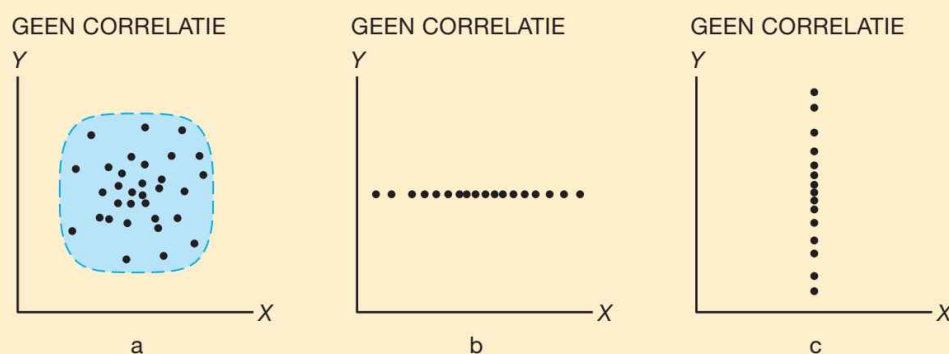
In figuur 14.4b is de samenhang veel sterker. Hier is sprake van **sterke correlatie** tussen X en Y , te herkennen aan de smalle puntenwolk.

In figuur 14.5 zie je dat ook bij negatieve correlatie de uitdrukkingen zwakke, sterke en volkomen correlatie voorkomen.



figuur 14.5

In figuur 14.6 zie je drie voorbeelden waarbij geen sprake is van correlatie. Let hierbij vooral op figuur 14.6b. Hoewel de punten op een lijn liggen is er toch geen correlatie tussen X en Y . De uitkomst van Y is constant en heeft niets te maken met de X -waarde.



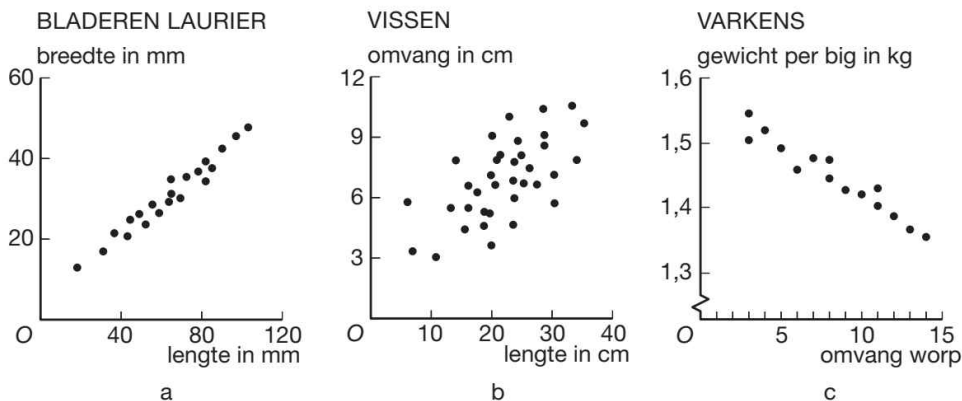
figuur 14.6

4 Zie figuur 14.1

- a** Wat is de lengte van de langste jongen? Is deze jongen ook het zwaarst?

In de figuur gaat de best passende lijn door de punten (160, 53) en (190, 75).

- b** Stel de formule van de lijn op.

5 Zie figuur 14.7. Omschrijf bij elke figuur de correlatie.

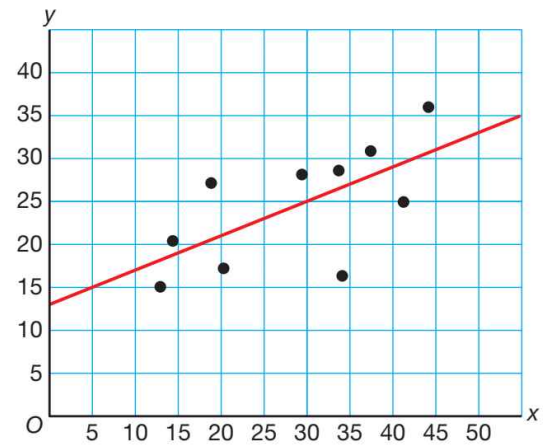
figuur 14.7

6 Geef in de volgende gevallen aan of er naar jouw mening sprake is van sterke, zwakke of geen correlatie. Maak zo mogelijk ook onderscheid tussen positieve en negatieve correlatie.

- a** Hoogte boven zeeniveau en maximale jaartemperatuur van plaatsen op aarde.
- b** Levensverwachting en bruto nationaal product per hoofd van de bevolking in een land.
- c** Woordenschat en leesvaardigheid van schoolgaande kinderen.
- d** Schoenmaat en IQ van personen.
- e** Jaarinkomen en aantal keren dat iemand uit eten gaat.
- f** Leeftijd van partners in huwelijken.
- g** Cijfer voor het schoolexamen en cijfer voor het centraal examen voor wiskunde B.
- h** Afstand huis-school en het aantal keren te laat komen van leerlingen.

14.1 Regressielijnen en correlatiecoëfficiënt

- 01** In de figuur hiernaast is bij een puntenwolk de best passende lijn getekend. Stel de formule op van deze lijn.



figuur 14.8

Theorie A Regressiemodellen en de GR

De best passende lijn bij een puntenwolk wordt ook wel de **regressielijn** genoemd.

Met de GR kun je na het invoeren van een tabel

- een spreidingsdiagram plotten
- de formule van de regressielijn opstellen
- de regressielijn in het spreidingsdiagram plotten
- Y voorspellen bij een gegeven X .

Zo geeft de GR bij de tabel hieronder de regressielijn $Y = 0,054X + 28,6$.

X	50	100	150	200	250	300	350
Y	30	35	35	45	40	40	50

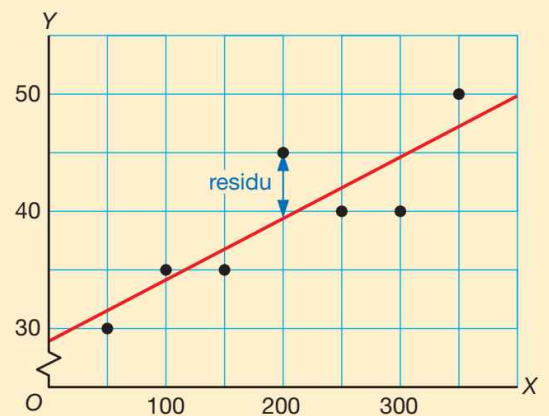
Met de formule $Y = 0,054X + 28,6$ kun je bij een gegeven X een voorspelling doen over Y . Zo vind je bij $X = 200$ als voorspelling $Y = 39,4$. De tabel geeft echter bij $X = 200$ als werkelijke waarde $Y = 45$.

Om verwarring te voorkomen geven we de door het **regressiemodel** voorspelde waarde van Y aan met $\hat{Y}$. Dus bij $X = 200$ hoort $\hat{Y} = 39,4$.

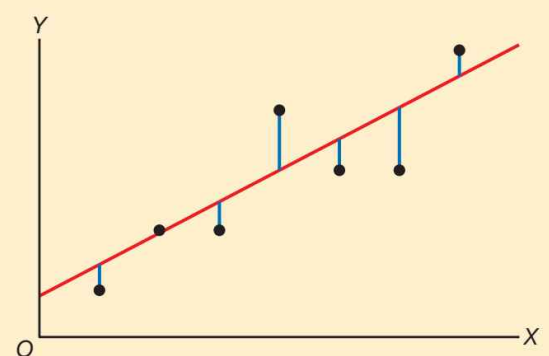
Ook in de formule van de regressielijn wordt het 'dakje' soms gebruikt. Dus $\hat{Y} = 0,054X + 28,6$.

We noemen $\hat{Y} = 39,4$ de **voorwaardelijke voorspelling** van Y gegeven $X = 200$.

Het verschil tussen de waargenomen Y en de voorspelde $\hat{Y}$ heet het **residu**. In figuur 14.10 zijn de residuen weergegeven met de blauwe lijnen.



figuur 14.9



figuur 14.10

Het residu bij een waarde van X is het verschil tussen de waargenomen Y en de door de formule van de regressielijn voorspelde $\hat{Y}$, dus $\text{residu} = Y - \hat{Y}$.

Bij het uitvoeren van een regressieberekening met de GR kun je de residuen in een aparte lijst zetten.

[► GR] Neem de module **Regressielijnen en residuen** door. Hierin leer je hoe je de GR kunt gebruiken bij het opstellen van regressiemodellen.

Bij het opstellen van de best passende lijn door een puntenwolk spoort de GR de lijn op waarvan de som van de kwadraten van de residuen minimaal is. De GR maakt daarbij gebruik van de **methode van de kleinste kwadraten**, een methode die omstreeks 1800 onafhankelijk van elkaar door Gauss en Legendre is ontwikkeld. Op bladzijde 59 wordt deze methode uitgelegd.

- 2** In de tabel staat informatie over de resultaten van een groep examenkandidaten vwo wiskunde B.

leerling	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
SE-score X	62	45	58	52	80	69	48	62	79	87	61	55	87	67	56	49	73	61	74	75	62	60	69	59	71
CE-score Y	83	50	74	62	84	78	66	71	76	87	62	65	93	79	73	76	78	64	76	91	76	53	72	66	73

- Voer de gegevens in op de GR en plot een spreidingsdiagram.
- Omschrijf de mate van correlatie.
- Stel de formule op van de regressielijn en plot de regressielijn samen met de puntenwolk.
- Robin heeft een SE-score van 33.
Geef een schatting van zijn CE-score.
- Vanaf welke SE-score is de voorspelde CE-score hoger dan 5,5?

- 3** Gegeven is de onderstaande tabel.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	2	3	2	4	5	7	9	11	10	12

- Stel de formule op van de regressielijn.
- Geef de voorwaardelijke voorspelling $\hat{Y}$ bij $X = 8$.
- Maak een lijst met de residuen. Bij welke X wijkt de voorwaardelijke voorspelling $\hat{Y}$ het meest af van Y ?
- Bereken de som van de kwadraten van de residuen.
- Ronald neemt als best passende formule $Y = 1,25X - 0,25$.
Bereken de som van de kwadraten van de residuen bij deze formule en controleer of deze som inderdaad groter is dan die in vraag d.

Geschiedenis Adrien Marie Legendre (1752-1833)

Legendre was een veelzijdige geleerde die zich op vele onderdelen van de wiskunde heeft onderscheiden. Zijn *Éléments de Géométrie* was een toonaangevend meetkundig werk in de 19^e eeuw. Ook in de getaltheorie kwam hij tot indrukwekkende ontdekkingen en in de algebra publiceerde hij zijn belangrijkste werk, over elliptische integralen. Omstreeks 1795 ontstond er, mede onder invloed van keizer Napoleon, de wens om gewichten en lengtematen te standaardiseren. De nieuwe lengtemaat meter werd gedefinieerd als het veertig miljoenste deel van de omtrek van de aarde. Om heel precies de omtrek van de aarde te bepalen, werd een commissie ingesteld die de lengte van de meridiaan van Duinkerken tot Barcelona moest opmeten. Ook Legendre behoorde tot die commissie. Bij het analyseren van de talloze waarnemingsresultaten ontwikkelde hij de theorie van de methode van de kleinste kwadraten. In 1805 publiceerde Legendre een boek waarin hij deze theorie uiteenzette.



Legendre

14

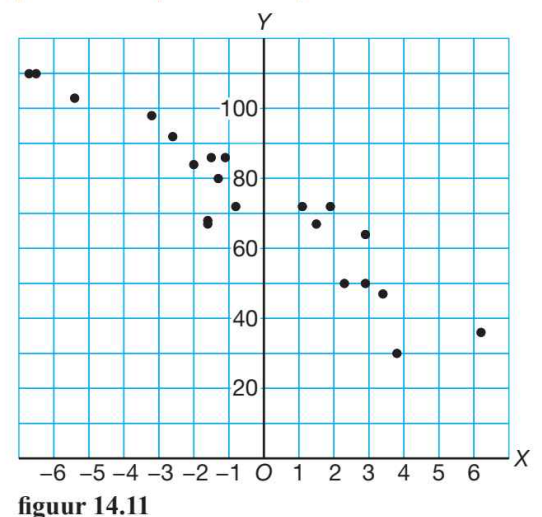
- A 4** Harry heeft in de winter van 2010/2011 bijgehouden hoeveel gas hij wekelijks heeft verbruikt. Bovendien heeft hij de effectieve gemiddelde etmaaltemperatuur van die week genoteerd. De effectieve gemiddelde etmaaltemperatuur (T_{eff}) is de buitentemperatuur verlaagd met 1°C voor elke $1,5 \text{ m/s}$ windsnelheid. Het weekverbruik Y is in m^3 .

datum	071110	141110	211110	281110	051210	121210	191210
$T_{\text{eff}} X$	6,2	2,9	2,9	-1,6	-6,7	-2,0	-5,4
weekverbruik Y	36	64	50	68	110	84	103

datum	261210	020111	090111	160111	230111	300111	060211
$T_{\text{eff}} X$	-6,5	-3,2	-1,1	1,9	1,2	-2,6	-0,8
weekverbruik Y	110	98	86	72	72	92	72

datum	130211	200211	270211	060311	130311	200311	270311
$T_{\text{eff}} X$	1,5	-1,3	-1,5	-1,6	2,3	3,4	3,8
weekverbruik Y	67	80	86	67	50	47	30

- Stel de formule op van de regressielijn.
- Geef de voorwaardelijke voorspelling $\hat{Y}$ bij $X = -8,0$.
- Vanaf een zekere effectieve gemiddelde etmaaltemperatuur wordt in huishoudens gas alleen gebruikt voor koken en baden. Daarom geldt de formule niet meer vanaf deze temperatuur. Neem aan dat het wekelijks verbruik voor koken en baden bij Harry 7 m^3 gas is. Bereken vanaf welke effectieve gemiddelde etmaaltemperatuur de in vraag a genoemde formule niet meer geldt.



Theorie B Afhankelijke en onafhankelijke variabelen

In opgave 4 heb je te maken met de variabelen X en Y , waarbij X de effectieve gemiddelde etmaaltemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is en Y het weekverbruik aan gas in m^3 . In deze situatie is Y de **afhankelijke variabele**. Het weekverbruik Y hangt namelijk af van de temperatuur $T_{\text{eff}} X$. De variabele X heet de **onafhankelijke variabele**.

Er zijn ook situaties waarbij je geen onderscheid tussen een afhankelijke en een onafhankelijke variabele kunt maken.

In de tabel hieronder gaan we uit van zo'n situatie.

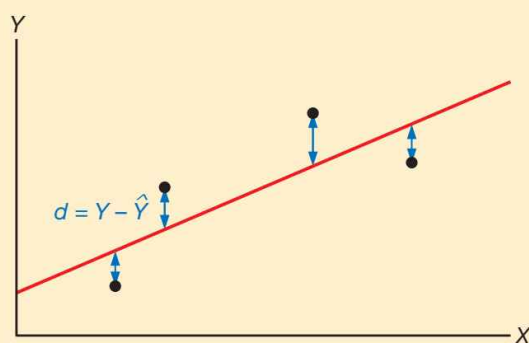
X	1	2	3	4	4	5	6	7
Y	3	1	7	5	7	11	9	13

De regressielijn is $\hat{Y} = 1,79X - 0,14$. Met deze formule kun je Y voorspellen bij een gegeven X . We spreken van **regressie van Y op X** . Bij het voorspellen van X bij een gegeven Y spreken we van **regressie van X op Y** . Je wilt dan X als functie van Y schrijven en een eerste gedachte is wellicht de formule $\hat{Y} = 1,79X - 0,14$ via

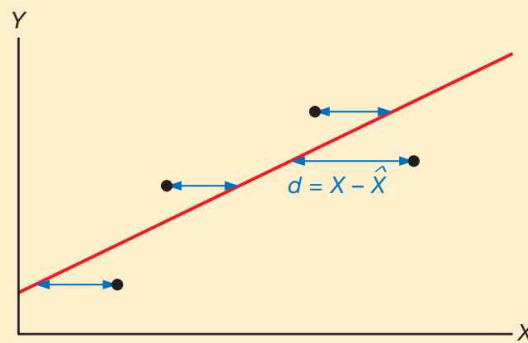
$1,79X = \hat{Y} + 0,14$ te herleiden tot $X = \frac{1}{1,79}\hat{Y} + \frac{0,14}{1,79}$ en dan bij X het

dakje van Y toe te voegen. Maar dat is een foute gedachtegang.

Bij het voorspellen van X bij een gegeven Y moet bij het vinden van de best passende lijn namelijk de *horizontale* afstand van elk punt van de puntenwolk tot de lijn gebruikt worden. Bij regressie van X op Y is de regressielijn zo gekozen dat $\Sigma(\text{horizontale afstand})^2$ minimaal is.



figuur 14.12 Regressie van Y op X .
 $\Sigma(\text{verticale afstand})^2$ is minimaal.



figuur 14.13 Regressie van X op Y .
 $\Sigma(\text{horizontale afstand})^2$ is minimaal.

Ter voorkoming van misverstanden gebruiken we zo nodig de index X bij a_X en b_X om aan te geven dat het om regressie van X op Y gaat.

Regressie van Y op X $\hat{Y} = a_Y X + b_Y$

Regressie van X op Y $\hat{X} = a_X Y + b_X$

A 5 Gegeven is onderstaande tabel.

X	5	11	1	2	13	8	17	20
Y	1	14	1	3	12	8	16	15

- Stel van beide regressielijnen de formule op.
- Plot het spreidingsdiagram met de regressielijn van Y op X .
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de voorspelling $\hat{X}$ bij $Y = 10$.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de voorspelling $\hat{Y}$ bij $X = 10$.

A 6 In een voetbalcompetitie is van alle 18 teams het aantal thuis gescoorde doelpunten X en het totale aantal doelpunten Y bijgehouden. Na 17 wedstrijden is de volgende tabel gemaakt.

team	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X	13	18	14	15	9	15	14	21	10	13	9	11	20	16	11	18	10	8
Y	36	31	29	28	27	26	25	25	25	25	22	22	21	21	20	20	16	12

- Stel van beide regressielijnen de formule op.
- Plot het spreidingsdiagram met de regressielijn van Y op X .
- Bereken de voorspelling $\hat{X}$ bij $Y = 18$.
- Bereken de voorspelling $\hat{Y}$ bij $X = 18$.

Geschiedenis De methode van de kleinste kwadraten

Het principe van de kleinste kwadraten wordt beschouwd als de belangrijkste ontdekking op statistisch gebied in de 19^e eeuw. Al in de jaren voor 1800 hadden geleerden als Laplace, Boscovich en Mayer er aan gewerkt bij astronomische berekeningen. Uit een overvloed aan waarnemingsmateriaal wilden ze bijvoorbeeld de beste beschrijving van de baan van planeten afleiden, maar ook bij het nauwkeurig beschrijven van de vorm van de aarde kreeg men er mee te maken. Legendre wist in 1805 al het denkwerk te combineren tot de nieuwe theorie in het 80 bladzijden tellende boek *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. De theorie sloeg wereldwijd aan en het is een standaardgereedschap geworden in vele wetenschappen. Niet onvermeld mag blijven dat de grote geleerde Gauss (1777-1855) er in 1809 over publiceerde. Gauss noemde hierbij de naam van Legendre niet. Volgens Gauss werkte hij al sinds 1795 met de theorie van de kleinste kwadraten. Hij beschouwde zichzelf dus als de echte ontdekker. Een flinke strijd tussen Legendre en Gauss was hiermee ontstaan die vele jaren zou aanhouden.

Van Gauss is de volgende kanttekening bekend.

‘Van alle principes is dat van de kleinste kwadraten het eenvoudigst: alle andere leiden tot de meest ingewikkelde berekeningen.’

Deze uitspraak heeft in het digitale tijdperk nog niets aan kracht ingeboet. Het principe van de kleinste kwadraten wordt ook door computers en de GR gebruikt bij het berekenen van regressiemodellen.

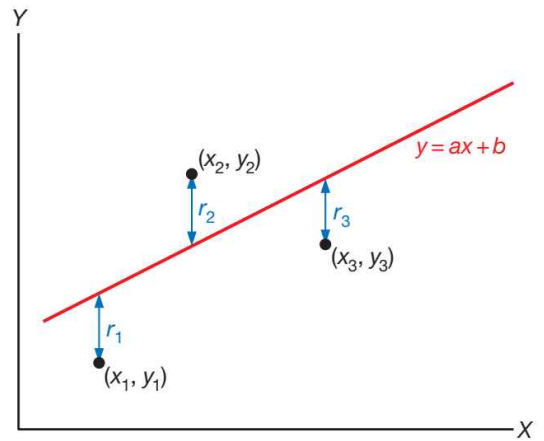


Gauss

- O 7** Bij het principe van de kleinste kwadraten moet de som van de kwadraten van de residuen minimaal zijn.

Licht toe dat je voor de regressielijn $y = ax + b$ dus a en b zo moet bepalen dat

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \text{ minimaal is.}$$



figuur 14.14

- O 8** Gegeven is de tabel hiernaast.

Stel de regressielijn is $\hat{Y} = aX + b$.

$x = 1$ geeft $\hat{Y} = a + b$ en $(\text{residu})^2 = (a + b - 2)^2$.

$x = 2$ geeft $\hat{Y} = 2a + b$ en $(\text{residu})^2 = (2a + b - 3)^2$.

- a** Geef $(\text{residu})^2$ bij $x = 3$, $x = 4$ en $x = 5$.

De som S van de kwadraten van de residuen is

$$S = \sum_{i=1}^5 (ax_i + b - y_i)^2 = 55a^2 + 5b^2 + 30ab - 136a - 40b + 88.$$

- b** Toon dit aan.

- c** Beschouw $S = 5b^2 + (30a - 40)b + 55a^2 - 136a + 88$ als kwadratische vorm in b en toon aan dat S minimaal is voor $b = -3a + 4$.

- d** Beschouw $S = 55a^2 + (30b - 136)a + 5b^2 - 40b + 88$ als kwadratische vorm in a en toon aan dat S minimaal is voor $a = \frac{-30b + 136}{110}$.

- e** Toon aan dat uit c en d volgt $a = 0,8$ en $b = 1,6$.

X	1	2	3	4	5
Y	2	3	5	5	5

Bij de parabool
 $y = ax^2 + bx + c$
 is $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

Theorie C De methode van de kleinste kwadraten

Door te werk te gaan zoals in opgave 8 kan een algemene formule voor de regressielijn worden opgesteld.

Bij regressie van Y op X is de lijn $\hat{Y} = aX + b$ met

$$a = \frac{n\sum XY - \sum X \cdot \sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \text{ en } b = \bar{Y} - a\bar{X} \text{ de best passende lijn.}$$

De getallen a en b heten de **regressiecoëfficiënten**.

De formule van de best passende lijn kan ook worden geschreven

in de vorm $\hat{Y} = a(X - \bar{X}) + \bar{Y}$ met $a = \frac{n\sum XY - \sum X \cdot \sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$.

Aan deze formule kun je zien dat de best passende lijn door het zwaartepunt $(\bar{X}, \bar{Y})$ gaat.

Bij regressie van X op Y gebruik je dezelfde formule, waarbij je X en Y verwisselt.

Voorbeeld

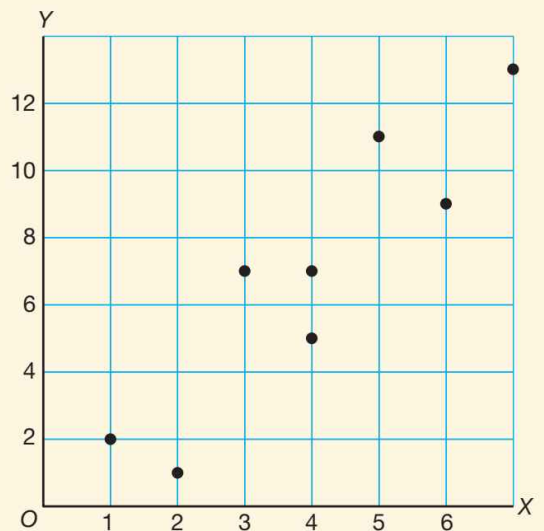
Bij de acht punten in het spreidingsdiagram hiernaast horen de volgende gegevens:

$\sum X = 32$, $\sum Y = 56$, $\sum X^2 = 156$, $\sum Y^2 = 504$ en $\sum XY = 274$.

Stel de formule op van de regressielijn

a van Y op X

b van X op Y .



Uitwerking

$$\begin{aligned} \text{a Stel } \hat{Y} &= aX + b \text{ met } a = \frac{n\sum XY - \sum X \cdot \sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \\ &= \frac{8 \cdot 274 - 32 \cdot 56}{8 \cdot 156 - 32^2} = 1,785... \end{aligned}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{32}{8} = 4 \text{ en } \bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{56}{8} = 7$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y} &= 1,785...X + b \\ (\bar{X}, \bar{Y}) &= (4, 7) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1,785... \cdot 4 + b &= 7 \\ b &\approx -0,143 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \hat{Y} = 1,79X - 0,143.$$

$$\begin{aligned} \text{b Stel } \hat{X} &= aY + b \text{ met } a = \frac{n\sum XY - \sum X \cdot \sum Y}{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2} \\ &= \frac{8 \cdot 274 - 32 \cdot 56}{8 \cdot 504 - 56^2} = 0,4464... \end{aligned}$$

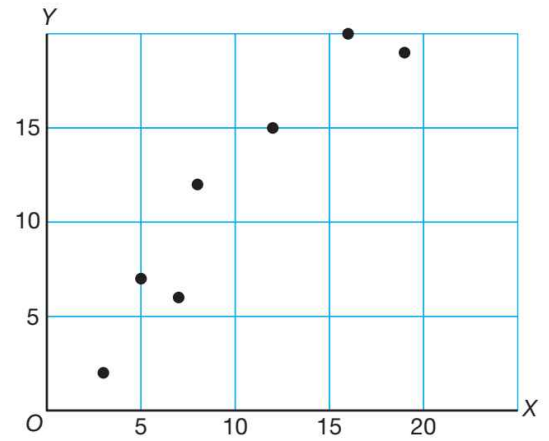
$$\left. \begin{aligned} \hat{X} &= 0,4464...Y + b \\ (\bar{Y}, \bar{X}) &= (7, 4) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0,4464... \cdot 7 + b &= 4 \\ b &\approx 0,875 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \hat{X} = 0,446Y + 0,875.$$

Tenzij anders vermeld geef je de regressiecoëfficiënten in drie significante cijfers.

- 9 Bij de zeven punten in het spreidingsdiagram hiernaast horen de volgende gegevens:
 $\Sigma X = 70$, $\Sigma Y = 81$, $\Sigma X^2 = 908$, $\Sigma Y^2 = 1219$ en $\Sigma XY = 1040$.

- Stel de formule op van de regressielijn van Y op X .
- Stel de formule op van de regressielijn van X op Y .
- Bereken in één decimaal nauwkeurig de voorspelling $\hat{X}$ bij $Y = 14$.
- Bereken in één decimaal nauwkeurig de voorspelling $\hat{Y}$ bij $X = 14$.

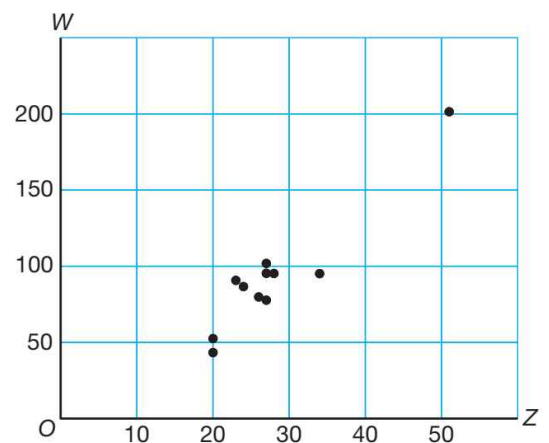


figuur 14.15

- A 10 Een zomerse dag is een dag waarop de maximumtemperatuur 25°C of hoger is.

Het warmtegetal is een maat voor de warmte van 1 april tot en met 31 oktober. Het wordt onder andere door het KNMI gebruikt om zomers met elkaar te vergelijken. Het warmtegetal wordt berekend door het optellen van het aantal graden dat de gemiddelde etmaaltemperatuur van elke dag boven de $18,0^\circ\text{C}$ ligt. Een etmaal met een gemiddelde temperatuur van $20,2$ graden draagt dus $2,2$ bij aan het warmtegetal. Zo komt men uiteindelijk tot een totaal over de periode van 1 april tot en met 31 oktober.

We vragen ons af of er een samenhang bestaat tussen het aantal zomerse dagen in een jaar en het warmtegetal van het jaar. In de tabel zie je voor De Bilt per jaar het aantal zomerse dagen Z en het warmtegetal W in de periode 2005-2015. In figuur 14.16 is het bijbehorende spreidingsdiagram getekend.



figuur 14.16

jaar	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Z	34	51	20	26	27	27	20	24	27	23	28
W	95,1	201,3	52,5	79,8	77,7	95,3	43,3	86,6	101,8	90,7	95,2

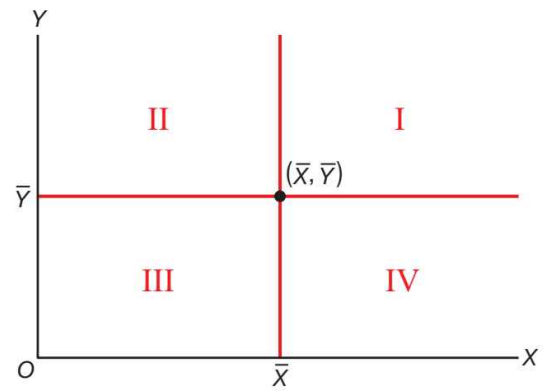
Bij de tabel horen de volgende gegevens:

$\Sigma Z = 307$, $\Sigma W = 1019,3$, $\Sigma Z^2 = 9309$, $\Sigma W^2 = 110836,59$
 en $\Sigma ZW = 31740,2$.

- Stel algebraïsch de formule op van de regressielijn van W op Z .
- Stel algebraïsch de formule op van de regressielijn van Z op W .
- Geef een voorspelling van het warmtegetal van een jaar waarin het aantal zomerse dagen 40 is.
- Geef een voorspelling van het aantal zomerse dagen in een jaar waarin het warmtegetal 120 is.

O 11 In figuur 14.17 zijn in een OXY -assenstelsel de lijnen $X = \bar{X}$ en $Y = \bar{Y}$ getekend die door het zwaartepunt $(\bar{X}, \bar{Y})$ van een puntenwolk gaan. Zo ontstaan de vier kwadranten I, II, III en IV.

- Licht toe: voor een punt in I geldt $X - \bar{X} > 0 \wedge Y - \bar{Y} > 0$.
- Wat weet je van $X - \bar{X}$ van een punt in II? En van $Y - \bar{Y}$?
- Wat weet je van $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ van een punt in III?
- In welke twee kwadranten liggen de meeste punten van de puntenwolk in het geval van positieve correlatie?



figuur 14.17

Theorie D De covariantie

We gaan uit van de tabel hiernaast met de resultaten van vijf leerlingen voor een toets wiskunde B (X) en een toets natuurkunde (Y). Je kunt narekenen dat $\bar{X} = 6,0$ en $\bar{Y} = 5,0$.

In figuur 14.18 zie je het spreidingsdiagram samen met de lijnen $X = 6$ en $Y = 5$. Deze lijnen gaan door het zwaartepunt van de puntenwolk en verdelen het vlak in vier delen (kwadranten), aangegeven met I, II, III en IV.

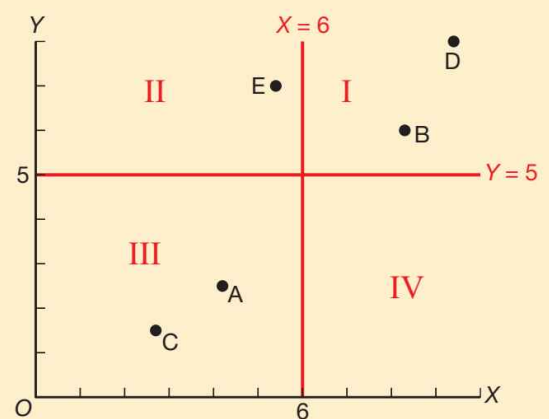
Of een punt (X, Y) in I, II, III of IV ligt, hangt af van het positief of negatief zijn van $X - \bar{X}$ en $Y - \bar{Y}$.

Van een punt in II is $X - \bar{X} < 0$ en $Y - \bar{Y} > 0$, dus $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) < 0$.

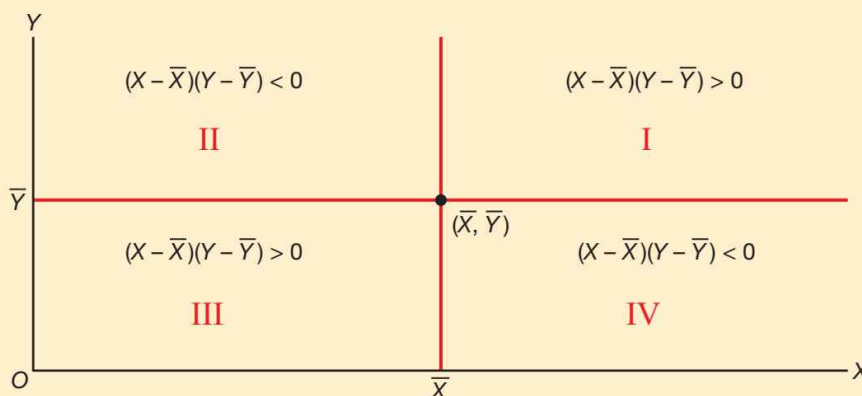
Van een punt in III is $X - \bar{X} < 0$ en $Y - \bar{Y} < 0$, dus $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) > 0$.

Enzovoort. Zie figuur 14.19.

leerling	X	Y
A	4,2	2,5
B	8,3	6,0
C	2,7	1,5
D	9,4	8,0
E	5,4	7,0



figuur 14.18



figuur 14.19

Bij positieve correlatie liggen de meeste punten in I en III. Je mag dan verwachten dat $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ positief is.

Bij negatieve correlatie liggen de meeste punten in II en IV. Het gevolg is dat $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ negatief is.

Liggen de punten verspreid over I, II, III en IV, dan mag je verwachten dat de correlatie bijna nul is. Positieve waarden van $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ vallen voor een groot deel weg tegen de negatieve waarden van $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$, zodat $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ ongeveer nul zal zijn. Uit het teken van $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ volgt dus of er positieve of negatieve correlatie is.

Omdat $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ geen rekening houdt met het aantal getallenparen n , bekijkt men liever het gemiddelde van de producten $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$. Zo krijg je de **covariantie** van X en Y . Notatie: $\text{cov}(X, Y)$ of σ_{XY} .

$$\text{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{n}$$

Merk op:

$$\text{cov}(X, X) = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n} = \sigma_X^2$$

In de tabel hieronder zijn naast de scores van de leerlingen de kolommen toegevoegd die nodig zijn om de covariantie te berekenen.

leerling	X	Y	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$
A	4,2	2,5	-1,8	-2,5	4,5
B	8,3	6,0	2,3	1,0	2,3
C	2,7	1,5	-3,3	-3,5	11,55
D	9,4	8,0	3,4	3,0	10,2
E	5,4	7,0	-0,6	2,0	-1,2
	$\frac{30,0}{5} +$	$\frac{25,0}{5} +$			$\frac{27,35}{5} +$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{30,0}{5} = 6$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{25,0}{5} = 5$$

$$\sigma_{XY} = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{n} = \frac{27,35}{5} = 5,47$$

Je ziet dat de bijdrage van leerling E tot de covariantie negatief is.

De andere vier leerlingen hebben een positieve bijdrage.

Omdat $\sigma_{XY} > 0$ is de correlatie positief.

- O 12** Is een atleet die goed is in hoogspringen ook goed in verspringen?
Van negen atletes zijn de beste sprongen in de tabel te vinden.

atleet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
hoogte X in m	1,59	1,70	1,53	1,72	1,67	1,58	1,77	1,62	1,64
afstand Y in m	5,10	5,84	4,67	5,72	6,17	5,06	5,97	5,59	6,02

Uit de tabel volgt $\sigma_X \approx 0,0715$ m, $\sigma_Y \approx 0,4841$ m en $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 0,2508$ m².

- a Bereken de covariantie σ_{XY} .
- b Bereken in drie decimalen nauwkeurig $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$.

Neem de hoogte X en de afstand Y in cm.

- c Geef, met de afstanden in cm, σ_X , σ_Y en $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ en bereken de covariantie σ_{XY} .
- d Waarom is de covariantie σ_{XY} geen goede correlatiemaat?
- e Bereken, met de afstanden in cm, $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ in drie decimalen nauwkeurig. Wat valt je op?

Theorie E De productmoment-correlatiecoëfficiënt

In opgave 12 heb je gezien dat de covariantie σ_{XY} geen goede correlatiemaat is, want de covariantie is afhankelijk van de gebruikte eenheden. Deel je echter de covariantie door de standaardafwijkingen σ_X en σ_Y dan ontstaat een maat die wel onafhankelijk is van de gebruikte eenheden. Dit brengt ons tot de definitie van de volgende correlatiemaat, die **productmoment-correlatiecoëfficiënt** heet en genoteerd wordt met de letter r van regressie.

De productmoment-correlatiecoëfficiënt is $r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$.

De pmcc is de covariantie gedeeld door het product van de standaardafwijkingen.

De productmoment-correlatiecoëfficiënt, kortweg de pmcc, is te berekenen met de GR. Kies bij de TI in de Catalog zo nodig voor DiagnosticOn.



figuur 14.20 Via LinReg krijg je de regressielijn en de pmcc die horen bij de tabel van opgave 12.

Informatief De pmcc en lineaire samenhang

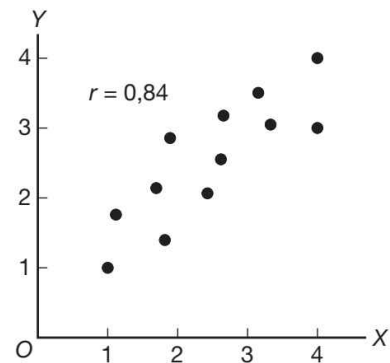
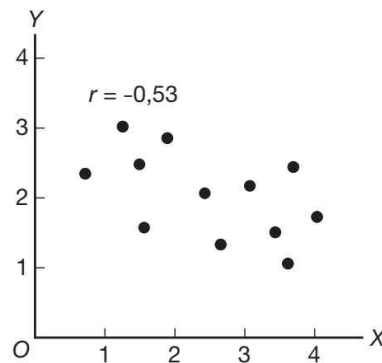
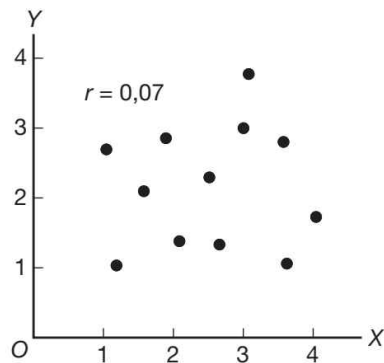
De pmcc geeft aan hoe de punten van de puntenwolk verspreid liggen ten opzichte van de regressielijn. Voor de pmcc geldt $-1 \leq r \leq 1$.

Bij een volkomen positieve correlatie is $r = 1$. De punten liggen dan allemaal op een rechte lijn met positieve richtingscoëfficiënt.

Bij een volkomen negatieve correlatie is $r = -1$. De punten liggen dan allemaal op een rechte lijn met negatieve richtingscoëfficiënt.

Bij geen correlatie is $r = 0$.

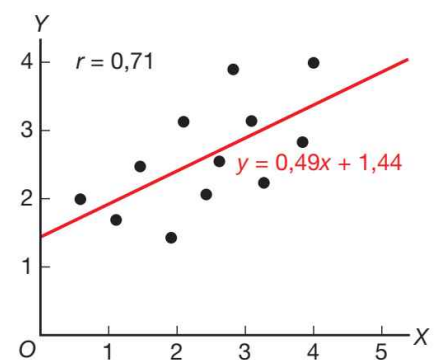
In de figuur hieronder is bij enkele spreidingsdiagrammen de waarde van r vermeld.



GeoGebra kan de regressielijn tekenen en de formule hiervan opstellen. Ga als volgt te werk.

- Teken een aantal punten.
- Kies de optie *Maak een lijst* en sleep een rechthoek om de punten. In het algebrafenster verschijnt nu lijst1.
- Met de opdracht correlatiecoëfficiënt[lijst1] krijg je in het algebrafenster de pmcc.
- Met de opdracht regressielijn[lijst1] tekent GeoGebra de regressielijn in het tekenvenster. In het algebrafenster zie je de bijbehorende formule.

Door punten te verslepen kun je het effect hiervan op de regressielijn en de pmcc onderzoeken.

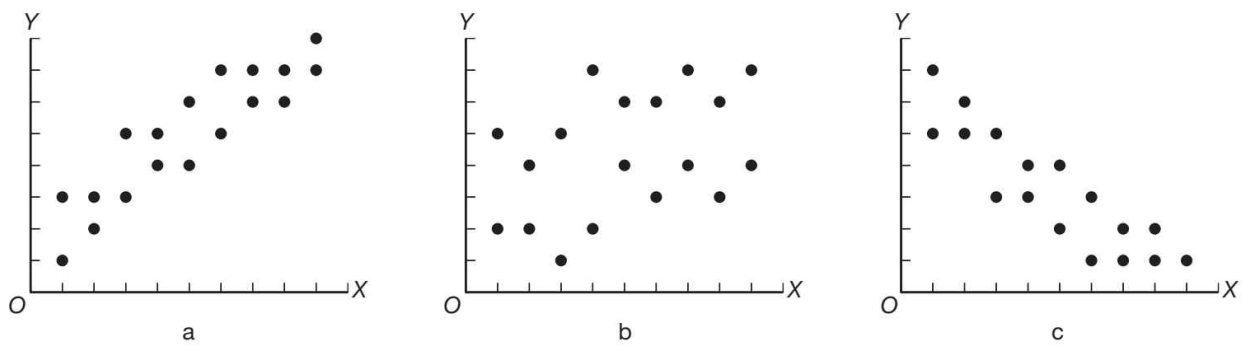


- 13** Van zes leerlingen zijn de cijfers voor een schriftelijke overhoring Engels (X) en een proefwerk Engels (Y) gegeven.

leerling	A	B	C	D	E	F
X	2	5	7	8	7	7
Y	4	6	6	9	7	10

Bereken de pmcc in twee decimalen nauwkeurig.

- 14** Zie de spreidingsdiagrammen hieronder.
Geef bij elk van deze diagrammen de waarde van r .
Kies uit -1 , $-0,9$, $-0,4$, 0 , $0,4$, $0,9$ en 1 .

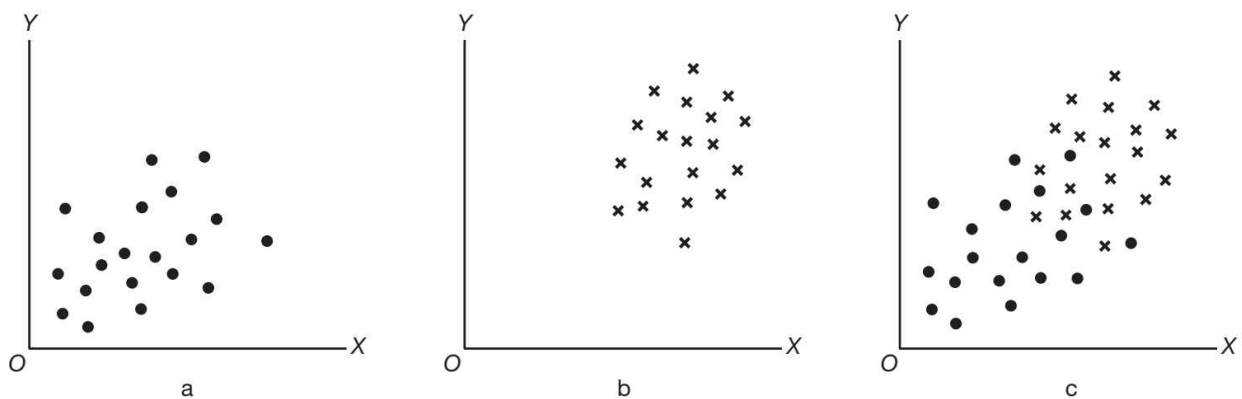


figuur 14.21

- 15** a Geef een schatting van r bij een onderzoek naar de lengte van man en vrouw bij echtparen in Nederland. Kies uit $-0,9$, $-0,2$, $0,2$ en $0,9$.
b Doe dit ook voor de leeftijd van man en vrouw bij echtparen.
c Stel dat bij alle echtparen de man precies 10% langer is dan de vrouw.
Welk getal is r in dat geval?

- 16** Een klas maakt een proefwerk met 25 vragen. Elk antwoord is óf goed, óf fout. De docent zet op elk blaadje het aantal goede antwoorden X en het aantal foute antwoorden Y .
Hij vindt $\bar{X} = 18,6$ met een standaardafwijking $\sigma_X = 2,9$.
Geef $\bar{Y}$, σ_Y en r .

- 17** Zie figuur 14.22 met drie spreidingsdiagrammen.

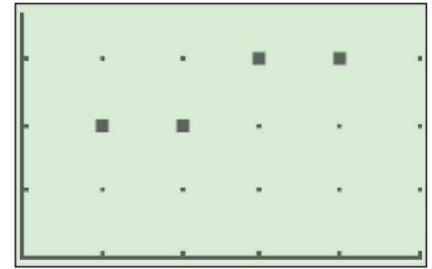


figuur 14.22

In het diagram van figuur 14.22c zijn de gegevens van de beide andere diagrammen samengenomen.
Geef bij elk spreidingsdiagram een schatting van r .
Kies uit $0,1$, $0,3$, $0,7$ en $0,9$.

- 18** Gegeven is het spreidingsdiagram in figuur 14.23. Bij de volgende onderdelen is telkens het venster anders. Bereken voor het diagram de correlatiecoëfficiënt r in twee decimalen nauwkeurig in het geval dat het venster is genomen met

- $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 5$, $Y_{\min} = 0$ en $Y_{\max} = 4$
- $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 5$, $Y_{\min} = 5$ en $Y_{\max} = 9$
- $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 50$, $Y_{\min} = 400$ en $Y_{\max} = 800$.



figuur 14.23

- 19** a Bereken voor de tabellen I, II en III de correlatiecoëfficiënt r in twee decimalen nauwkeurig.
- b Waarom is de waarde van r voor tabel III direct te geven?
- c Neem aan dat de kolommen van tabel I verwisseld worden. Verandert r ? Licht je antwoord toe.
- d Neem aan dat elke Y -waarde van tabel II met 2 verminderd wordt. Verandert r ? Licht je antwoord toe.
- e Neem aan dat elke X -waarde in tabel I met 10 vermenigvuldigd wordt. Wat gebeurt er met r ?

I		II		III	
X	Y	X	Y	X	Y
2	7	3	4	2	8
3	8	4	3	3	7
4	6	6	5	4	6
5	5	7	9	5	5
6	4	8	7	6	4
7	2	9	7	7	3
8	3	5	7	8	2

Geschiedenis Karl Pearson (1857-1936)

De pmcc wordt ook wel Pearson's productmoment-correlatiecoëfficiënt genoemd, naar zijn ontdekker Karl Pearson. Pearson werd in Londen geboren. Hij studeerde wiskunde aan het King's College te Cambridge, waar Stokes, Cayley en Maxwell tot zijn leermeesters behoorden. Later zette hij zijn studie voort in Heidelberg en Berlijn. In deze Duitse jaren veranderde hij zijn voornaam Carl in Karl en raakte de wiskunde eerst wat op de achtergrond. Hij kreeg belangstelling voor Luther, Marx, Darwin en Spinoza en hij begon een rechtenstudie. In 1884 keerde Pearson terug tot de wiskunde: hij werd hoogleraar in de toegepaste wiskunde in Londen, waar hij zich vooral met kansrekening bezighield. Zijn eerste ontdekking op dit gebied stuurde hij ter beoordeling toe aan Galton. In 1894 voerde Pearson het begrip standaarddeviatie in en in 1896 verscheen een artikel over regressie waarbij hij, geïnspireerd door eerdere resultaten van Galton, een kwantitatieve maat voor de correlatie voorstelde: de Pearson's productmoment-correlatiecoëfficiënt.



Pearson

- A 20** Van twintig leerlingen zijn de aantallen fouten bekend bij een reken- en een taaltest. Het aantal fouten in de rekentest is R en dat in de taaltest is T .

De gegevens zijn in de tabel hieronder gezet.

		R				
		0	1	2	3	totaal
T	0	5	3	–	–	8
	1	2	1	2	–	5
	2	–	–	4	3	7
	totaal	7	4	6	3	20

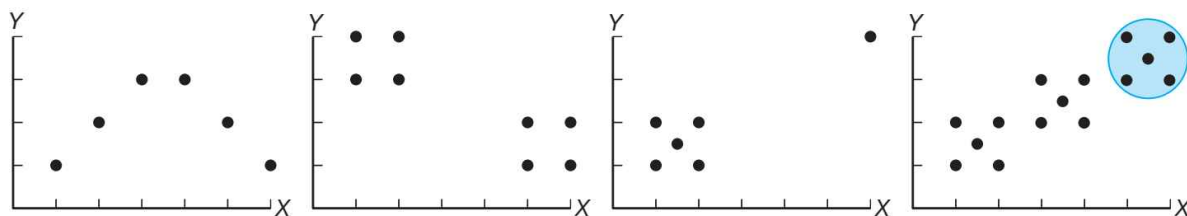
Bereken de pmcc in twee decimalen nauwkeurig.

Aanwijzing

Maak gebruik van lijst L3 om de frequenties in te voeren. Bij LinReg(ax+b) L1, L2, L3 houdt de GR rekening met de verschillende frequenties.

- 21** Bij het geven van een goede interpretatie van de pmcc kunnen zich de volgende problemen voordoen.
- De pmcc geeft alleen informatie over **lineaire samenhang**.
 - **Heterogeniteit van de waarnemingen** kan een misleidend effect hebben.
 - De correlatiecoëfficiënt is erg gevoelig voor **uitschieters**, ook wel **uitbijters** genoemd.
 - **Selectie of uitval** van het waarnemingsmateriaal kan de correlatiecoëfficiënt sterk beïnvloeden.
 - Er kan onduidelijkheid zijn over de **interpretatie van de waarde** van de pmcc.

Onderzoek wat met bovenstaande punten wordt bedoeld. Betrek bij je onderzoek ook het begrip causaliteit.



figuur 14.24 Enkele problemen bij de interpretatie van de pmcc in beeld gebracht.

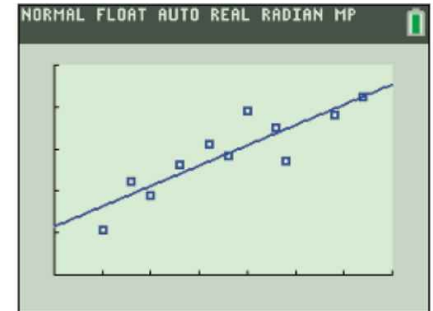
Terugblik

Regressielijnen opstellen

X	5	8	10	13	16	18	20	23	24	29	32
Y	54	112	94	131	155	142	195	176	135	190	212

Na het invoeren van de tabel hierboven op de GR kun je

- een spreidingsdiagram plotten
- de formule van de regressielijn opstellen
- de regressielijn plotten in het spreidingsdiagram
- Y voorspellen bij een gegeven X
- een lijst van residuen maken.



Een residu van een Y -waarde is het verschil tussen een waargenomen Y en de met de formule van de regressielijn voorspelde $\hat{Y}$. Op het derde GR-scherm zie je dat bij $X = 5$ hoort $Y = 54$ en dat het residu ongeveer $-28,2$ is.

Met de formule $\hat{Y} = 4,84X + 58,0$ vind je

$$\hat{Y} = 4,84 \cdot 5 + 58,0 = 82,2.$$

Ook hierbij krijg je het residu $Y - \hat{Y} = 54,0 - 82,2 = -28,2$.



In de formule $Y = 4,84X + 58,0$ is X de onafhankelijke variabele en Y de afhankelijke variabele. Je hebt te maken met regressie van Y op X en de formule wordt genoteerd als $\hat{Y} = 4,84X + 58,0$.

Bij regressie van X op Y is Y de onafhankelijke variabele en X de afhankelijke variabele. De GR geeft $\hat{X} = 0,161Y - 5,36$.

L1	L2	L3	L4	L5	1
5	54	-28.21			
8	112	15.283			
10	94	-12.39			
13	131	10.096			
16	155	19.584			
18	142	-3.091			
20	195	40.234			
23	176	6.7223			
24	135	-39.12			
29	190	-8.302			
32	212	-.814			

De formule van de regressielijn

Met de methode van de kleinste kwadraten is de formule van de regressielijn af te leiden. Bij regressie van Y op X krijg je de formule $\hat{Y} = aX + b$ met de

regressiecoëfficiënten $a = \frac{n\sum XY - \sum X \cdot \sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$ en $b = \bar{Y} - a\bar{X}$.

De formule van $\hat{Y}$ kan ook worden geschreven als $\hat{Y} = a(X - \bar{X}) + \bar{Y}$.

Aan deze formule kun je zien dat de regressielijn door het zwaartepunt $(\bar{X}, \bar{Y})$ gaat.

De covariantie en de pmcc

De covariantie van X en Y is per definitie $\text{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{n}$.

De productmoment-correlatiecoëfficiënt, kortweg correlatiecoëfficiënt, is per definitie gelijk aan $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$. De pmcc wordt aangegeven met de letter r .

Je berekent r met de GR. Bij de tabel hierboven krijg je $r \approx 0,88$.

14.2 Regressievoorspellingen

O 22 a Je weet $\sigma_X^2 = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n}$.

Herleid σ_X^2 tot $\frac{\Sigma X^2}{n} - \bar{X}^2$.

b Je weet $r = \frac{\bar{X}\bar{Y} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$, dus $r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{\bar{X}\bar{Y} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_X^2}$.

Herleid $r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ tot $\frac{n\Sigma XY - \Sigma X \cdot \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$.

Theorie A De richtingscoëfficiënt van de regressielijn

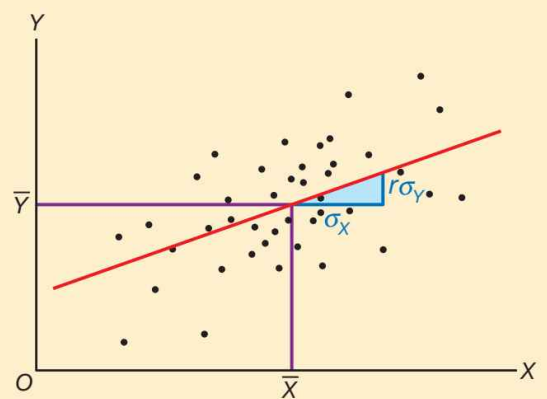
Er is een opmerkelijk verband tussen de pmcc en de richtingscoëfficiënt a van de regressielijn $\hat{Y} = aX + b$. In opgave 22 heb je aangetoond dat

$$r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \cdot \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

en deze laatste vorm is juist a .

Conclusie:

In de regressievergelijking $\hat{Y} = aX + b$ is $a = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.



figuur 14.25

Voorbeeld

Van een aantal leerlingen is de lengte X in cm en het gewicht Y in kg gemeten. Gegeven is dat $\bar{X} = 168$, $\sigma_X = 6$, $\bar{Y} = 64$, $\sigma_Y = 4$ en $r = 0,7$.

Bereken de voorwaardelijke voorspelling van het gewicht van een leerling met een lengte van 183 cm.

Uitwerking

Stel $\hat{Y} = aX + b$ met $a = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 0,7 \cdot \frac{4}{6} = \frac{7}{15}$.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{Y} = \frac{7}{15}X + b \\ (\bar{X}, \bar{Y}) = (168, 64) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{7}{15} \cdot 168 + b = 64 \\ b = -14\frac{2}{5} \end{array}$$

$$\hat{Y} = \frac{7}{15}X - 14\frac{2}{5}$$

$$X = 183 \text{ geeft } \hat{Y} = \frac{7}{15} \cdot 183 - 14\frac{2}{5} = 71 \text{ kg}$$

Bij regressie van Y op X is $\hat{Y} = a_Y X + b_Y$ met $a_Y = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.

Uit symmetrie volgt:

Bij regressie van X op Y is $\hat{X} = a_X Y + b_X$ met $a_X = r \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$.

Uit $a_X = r \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ en $a_Y = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ volgt $a_X \cdot a_Y = r \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = r^2$.

$$a_X \cdot a_Y = r^2$$

- 23** In de VS is een onderzoek gedaan onder mannen van 35 tot 54 jaar naar het verband tussen het aantal jaren schoolopleiding X en het jaarinkomen Y in dollars. Dit leverde $\bar{X} = 11$, $\bar{Y} = 40\,000$, $r = 0,4$, $\sigma_X = 4$ en $\sigma_Y = 12\,000$ op.
- Mr Allister heeft 16 jaar schoolopleiding.
Schat zijn inkomen.
 - Het jaarinkomen van Mr Brown is 35 000 dollar.
Schat de lengte van zijn schoolopleiding.
- 24**
- Neem aan dat $r = a_X$. Wat weet je dan van X en Y ?
 - Stel dat je vindt $a_X = 0,8$ en $a_Y = 2,1$. Waarom kan dit niet kloppen?
 - Stel dat $a_X = 3,0$. Wat is dan de maximumwaarde van a_Y ?
 - Stel dat $a_X = -0,7$. Kan a_Y dan 0,7 zijn? Verklaar je antwoord.
 - Wat weet je van X en Y als $a_X = a_Y$?
- 25** Van de variabelen X en Y is gegeven $\bar{X} = 6$, $\sigma_X = 1$, $\bar{Y} = 8$ en $\sigma_Y = 2$. Teken in aparte figuren de twee regressielijnen in het geval
- $r = 0$
 - $r = 0,6$
 - $r = 1$
 - $r = -0,2$
- 26** Toon aan dat de twee regressielijnen uitsluitend samenvallen als $r^2 = 1$.
- 27** Van een grote groep personen is van iedereen het IQ gemeten op twintigjarige en op veertigjarige leeftijd. Zie de resultaten in de tabel hiernaast.
- Frits had op twintigjarige leeftijd een IQ van 125.
Geef de voorwaardelijke voorspelling van zijn IQ op veertigjarige leeftijd.
 - Frans had op twintigjarige leeftijd een IQ van 95.
Geef de voorwaardelijke voorspelling van zijn IQ op veertigjarige leeftijd.

leeftijd	20	40
gemiddeld IQ	105	105
σ	20	20
$r = 0,80$		

Informatief Regressie naar het gemiddelde

Stel je voor dat in de eerste ronde van een groot kop-of-munt-toernooi duizend personen ieder tien keer een munt op mag gooien. 'Kop' levert een punt op, 'munt' geen punten.

Puur door toeval zal dan meestal één persoon 10 punten scoren, ongeveer tien personen 9 punten, circa 45 personen scoren er 8 en negenhonderd personen behoren tot de brede middenmoot die 3 tot en met 7 punten bij elkaar sprokkelt. De gemiddelde score per persoon is natuurlijk 5 punten, want ze gooien met eerlijke munten. Je kunt deze getallen eventueel zelf narekenen met de binomiale verdeling.

Een scout die op zoek is naar talent besluit om iedereen die 8 of meer punten heeft gescoord in zijn selectieteam op te nemen. Deze naar verwachting $1 + 10 + 45 = 56$ talenten gooien in de tweede ronde opnieuw ieder tien keer een munt op. Nu haalt doorgaans niemand 10 punten, misschien één persoon 9 punten, twee halen 8 punten en de rest 7 punten of minder, op grond van precies dezelfde kansverdeling als in de eerste ronde.

De scout bekijkt ieders score en is zwaar teleurgesteld: maar één talent heeft zich verbeterd (van 8 naar 9), twee talenten zijn constant op 8 gebleven, terwijl de overige talenten lager scoorden (van 8 naar 7 of nog lager). De regressie naar het gemiddelde heeft onverbiddeijk toegeslagen.

In dit voorbeeld is wel duidelijk dat alle scores puur toevallig zijn, maar dit effect treedt altijd op als een selectie wordt gemaakt op basis van een eigenschap die deels door het toeval wordt bepaald. Dat geldt voor voetbalprestaties, maar ook voor patiënten die voor een medicijntest worden geselecteerd op hoge bloeddruk, of het muzikaal talent van kinderen met muzikale ouders. Juist extremen zijn vaak het resultaat van een toevallige samenloop van omstandigheden die zich geen tweede keer zal herhalen.

Bron: Pythagoras, september 2011

- A 28** Een aantal leerlingen doet een test rekenvaardigheid en een test taalvaardigheid. Dit levert de resultaten hiernaast op.
- John haalde voor de rekentest een score van 75. Bereken in gehelen een voorspelling van zijn taalscore.
 - Agnes haalde voor de taaltest een score van 86. Bereken in gehelen een voorspelling van haar rekenscore.

rekentestscore X	$\bar{X} = 65$	$\sigma_X = 5$
taaltestscore Y	$\bar{Y} = 75$	$\sigma_Y = 8$
$r = 0,70$		

- A 29** Er is onderzoek gedaan naar het verschil in geboortegewicht bij tweelingen. Zie de tabel hiernaast.
- Bij een tweeling weegt het eerste kind bij de geboorte 2750 gram. Bereken hoeveel gram het tweede kind naar verwachting weegt.
 - Bij een andere tweeling weegt het tweede kind 2150 gram. Geef de voorwaardelijke voorspelling van het gewicht van het eerste kind.

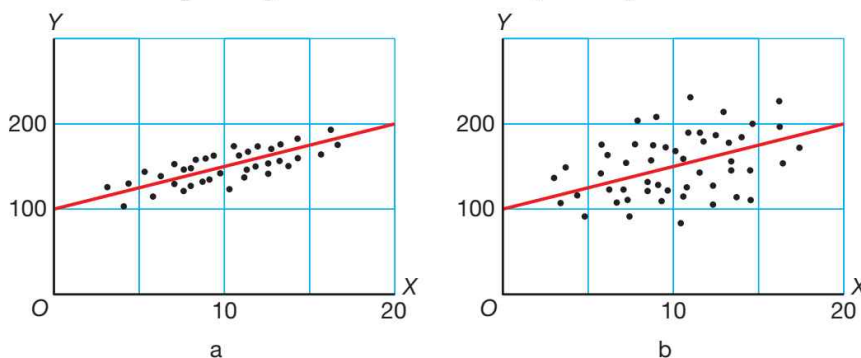
GEBOORTEGEWICHT IN GRAM BIJ
TWEELINGEN

1 ^e kind	$\bar{X} = 2480$	$\sigma_X = 385$
2 ^e kind	$\bar{Y} = 2245$	$\sigma_Y = 350$
$r = 0,85$		

- A 30** Voor een schoolexamen wiskunde D is X het cijfer voor het eerste tentamen en Y het cijfer voor het tweede tentamen. Gegeven is $\bar{X} = 6,4$, $\sigma_X = 0,8$, $\bar{Y} = 4,5$ en $\sigma_Y = 0,5$. Marc haalde voor het eerste tentamen een 8,8 en was ziek bij het tweede tentamen. Zijn docent wist alles af van regressietheorie en gaf hem voor het tweede tentamen zomaar de score $Y = 5,5$. Bereken de correlatiecoëfficiënt in twee decimalen nauwkeurig.



- O 31** Bij zowel figuur 14.26a als figuur 14.26b hoort de regressievergelijking $\hat{Y} = 5X + 100$. In beide gevallen wordt een voorspelling $\hat{Y}$ bij $X = 10$ gemaakt. Welke voorspelling is betrouwbaarder, denk je? Licht toe.



figuur 14.26

- O 32**
- Gegeven is de normale verdeling met $\mu = 100$ en $\sigma = 10$. Bereken hoeveel procent van de waarnemingen in het interval $\langle 90, 110 \rangle$ ligt. Rond af op gehelen.
 - Onderzoek met enkele getallenvoorbeelden de volgende bewering.
Bij een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ ligt voor elke μ en σ ongeveer 68% van de waarnemingen in het interval $\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$.
 - Geef een zelfde soort bewering als bij vraag b voor het interval $\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$.

Theorie B Betrouwbaarheidsintervallen

In figuur 14.27 zie je een spreidingsdiagram met daarin de regressielijn van Y op X . Je kunt narekenen dat $\hat{Y} = 1,79X - 0,143$. Bij $X = 5$ levert het regressiemodel de voorwaardelijke voorspelling $\hat{Y} = 1,79 \cdot 5 - 0,143 \approx 8,8$. We vragen ons af hoe nauwkeurig deze voorspelling is, ofwel hoever kan de werkelijke Y -waarde er redelijkerwijs vanaf liggen?

Je voelt wel aan dat de pmcc invloed zal hebben op deze nauwkeurigheid. Immers, hoe sterker de correlatie is, des te dichter de puntenwolk bij de regressielijn ligt, dus hoe groter de kans is dat de voorspelde $\hat{Y}$ dicht bij Y ligt.

In figuur 14.27 is de afwijking van Y tot $\hat{Y}$ gelijk aan $Y - \hat{Y} \approx 11 - 8,8 = 2,2$.

Zoals je weet heet $Y - \hat{Y}$ het residu, notatie $d = Y - \hat{Y}$. De letter d komt van deviatie (afwijking).

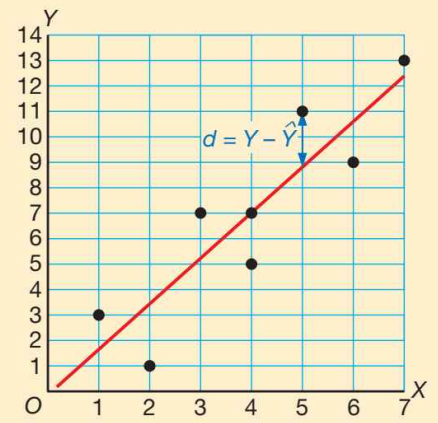
Als maat voor de nauwkeurigheid van de voorspelling $\hat{Y}$ kiest men de standaardafwijking van de residuen. Deze standaardafwijking heet de **standaardschattingsfout** σ_d .

Standaardschattingsfout $\sigma_d = \sigma_Y \sqrt{1 - r^2}$.

Je gaat de formule van σ_d aantonen in opgave 33.

In opgave 32 heb je gezien dat bij de normale verdeling bij ongeveer 68% van de punten de Y -waarde in het interval $\langle \hat{Y} - \sigma_d, \hat{Y} + \sigma_d \rangle$ ligt. En bij ongeveer 95% van de punten ligt Y in het interval $\langle \hat{Y} - 2\sigma_d, \hat{Y} + 2\sigma_d \rangle$. Zie figuur 14.28.

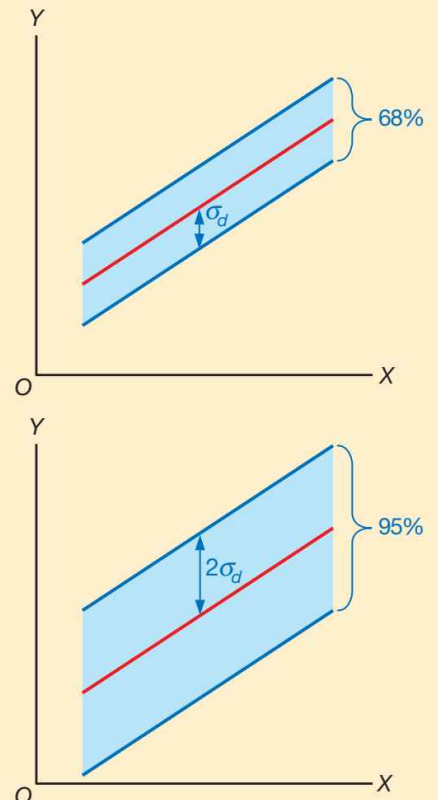
Je kunt ook zeggen: je bent er voor 68% zeker van dat bij een gegeven X de Y -waarde in het interval $\langle \hat{Y} - \sigma_d, \hat{Y} + \sigma_d \rangle$ ligt. Ofwel: de kans dat bij een gegeven X de Y -waarde in het interval $\langle \hat{Y} - \sigma_d, \hat{Y} + \sigma_d \rangle$ ligt, is 68%.



figuur 14.27

De standaardschattingsfout σ_d bij een regressiemodel is de standaardafwijking van de residuen $d = Y - \hat{Y}$.

De standaardschattingsfout is een maat voor de spreiding van de puntenwolk om de regressielijn.



figuur 14.28

Het interval $\langle \hat{Y} - \sigma_d, \hat{Y} + \sigma_d \rangle$ heet het **68%-betrouwbaarheidsinterval**.

Het interval $\langle \hat{Y} - 2\sigma_d, \hat{Y} + 2\sigma_d \rangle$ heet het **95%-betrouwbaarheidsinterval**.

- 33** In deze opgave ga je aantonen dat $\sigma_d = \sigma_Y \sqrt{1 - r^2}$.

Uit $d = Y - \hat{Y}$ ofwel $Y = \hat{Y} + d$ volgt $\sigma_Y^2 = \sigma_{\hat{Y}}^2 + \sigma_d^2$.

Hierbij gaan we ervan uit dat $\hat{Y}$ en d onafhankelijk zijn.

- a** Licht toe dat uit $\hat{Y} = aX + b$ volgt $\sigma_{\hat{Y}} = a\sigma_X$ als $a > 0$ en $\sigma_{\hat{Y}} = -a\sigma_X$ als $a < 0$.

- b** Toon aan dat $\sigma_d^2 = \sigma_Y^2 - a^2\sigma_X^2$.

- c** Gebruik $a = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ en het resultaat van vraag b om aan te tonen dat $\sigma_d = \sigma_Y \sqrt{1 - r^2}$.

- 34** **a** Toon met behulp van de standaardschattingsfout aan dat bij volkomen correlatie alle punten op de regressielijn liggen.
b Toon aan dat in het geval er geen correlatie is, voor elke X de modelwaarde $\hat{Y}$ gelijk is aan $\bar{Y}$ en dat $\sigma_d = \sigma_Y$.

- 35** Alle vijfdeklassers doen twee wiskundetests. De scores X en Y , die uitgedrukt worden in gehele getallen, zijn normaal verdeeld met $\mu_X = 80$, $\sigma_X = 5$, $\mu_Y = 65$ en $\sigma_Y = 10$. Verder geldt $r = 0,60$.
a Stel de formule op van de regressielijn van Y op X .
b Bereken de standaardschattingsfout σ_d .
c Geef een schatting van de Y -score bij $X = 88$.
d In welk interval ligt 68% van alle Y -scores van leerlingen met een X -score van 88?
e In welk interval ligt 95% van alle Y -scores van leerlingen met een X -score van 70?

- A 36** Bij mannelijke tweelingen is de lengte normaal verdeeld met een gemiddelde van 181 cm en een standaardafwijking van 8 cm. De pmcc voor de lengten van de tweelingen is 0,90.
a Bereken σ_d in twee decimalen nauwkeurig.
b Voor je staat een tweeling. Van één van hen is de lengte 184 cm. Geef de voorwaardelijke voorspelling van de lengte van de ander.
c Beschouw alle tweelingen waarvan er één een lengte heeft van 184 cm.
 In welk interval ligt 95% van de lengten van de anderen?

- 37** Alle waarden die een variabele kan aannemen, vormen de schaal waarop de variabele gemeten wordt. Er zijn vier schaaltypen.
a Onderzoek welke schaaltypen er zijn en geef van elk schaaltype enkele voorbeelden.
b Bij welke schaaltypen heeft het zin om over de standaardafwijking van een variabele te spreken?
c Bij welke schaaltypen heeft het zin om over correlatie te spreken?

Terugblik

De richtingscoëfficiënt van de regressielijn

Bij regressie van Y op X is $\hat{Y} = a_Y X + b_Y$ met $a_Y = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.

Bij regressie van X op Y is $\hat{X} = a_X Y + b_X$ met $a_X = r \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$.

Is van de variabelen X en Y gegeven dat $\bar{X} = 80$, $\sigma_X = 5$, $\bar{Y} = 150$,

$\sigma_Y = 12$ en $r = 0,75$, dan is $\hat{Y}$ bij $X = 87$ te berekenen.

$$\hat{Y} = aX + b \text{ met } a = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 0,75 \cdot \frac{12}{5} = 1,8$$

$\hat{Y} = 1,8X + b$ door $(\bar{X}, \bar{Y}) = (80, 150)$ geeft $b = 6$, dus $\hat{Y} = 1,8X + 6$.

$X = 87$ geeft $\hat{Y} = 1,8 \cdot 87 + 6 = 162,6$

$X = 87$ ligt 1,4 keer σ_X boven $\bar{X}$. Maar $\hat{Y} = 162,6$ ligt minder dan

1,4 keer σ_Y boven $\bar{Y}$, want $\frac{12,6}{12} = 1,05$.

Betrouwbaarheidsintervallen

De standaardafwijking van de residuen d heet de standaardschattingsfout σ_d .

Bij regressie van Y op X is σ_d te berekenen met de formule $\sigma_d = \sigma_Y \sqrt{1 - r^2}$

en heet het interval $\langle \hat{Y} - \sigma_d, \hat{Y} + \sigma_d \rangle$ het 68%-betrouwbaarheidsinterval.

Het interval $\langle \hat{Y} - 2\sigma_d, \hat{Y} + 2\sigma_d \rangle$ heet het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Bij een onderzoek onder jongens uit 6 vwo is de lengte en het gewicht genoteerd. Zowel de lengte L in cm als het gewicht G in kg is normaal verdeeld. Zie de tabel hiernaast.

Om het 95%-betrouwbaarheidsinterval te berekenen van het gewicht van jongens met een lengte van 170 cm ga je als volgt te werk.

$\mu_L = 180$	$\sigma_L = 6$
$\mu_G = 64$	$\sigma_G = 5$
$r = 0,84$	

$$\sigma_d = \sigma_G \sqrt{1 - r^2} = 5 \sqrt{1 - 0,84^2} = 2,71 \dots$$

$$\hat{G} = a_G L + b \text{ met } a_G = r \cdot \frac{\sigma_G}{\sigma_L} = 0,84 \cdot \frac{5}{6} = 0,7$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{G} = 0,7L + b \\ L = 180 \text{ en } G = 64 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,7 \cdot 180 + b = 64 \\ b = -62 \end{array}$$

Dus $\hat{G} = 0,7L - 62$.

$L = 170$ geeft $\hat{G} = 0,7 \cdot 170 - 62 = 57$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$$\langle 57 - 2 \cdot 2,71 \dots; 57 + 2 \cdot 2,71 \dots \rangle \approx \langle 51,6; 62,4 \rangle.$$

Dus de kans dat het gewicht van een jongen met een lengte van 170 cm in het interval $\langle 51,6; 62,4 \rangle$ ligt is 95%.

14.3 Beslissen op grond van een steekproef

14

O38

In de fietsindustrie is het van belang dat onderdelen de juiste afmetingen hebben. Fabrikant Aluvia levert aluminium buizen voor fietsen. Er komt een bestelling binnen voor een groot aantal buizen die een lengte van 600 mm moeten hebben. De machine waarmee de buizen worden gemaakt is ingesteld op een gemiddelde van 600 mm. Neem aan dat de lengte van de buizen normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 4 mm.

- Hoe groot is de kans dat een buis een lengte heeft tussen 595 en 605 mm?
- Er wordt een steekproef genomen van tien buizen. Hoe groot is de kans dat de gemiddelde lengte van de buizen in de steekproef tussen 595 en 605 mm zit?

Theorie A Beslissingsvoorschrift

De machine van fabrikant Aluvia maakt aluminium buizen waarvan de lengte X in mm normaal verdeeld is met $\mu_X = 600$ en $\sigma_X = 4$. Door het productieproces kan het zijn dat na verloop van tijd het gemiddelde niet meer precies 600 mm is.

Daarom neemt Aluvia regelmatig een aselechte steekproef. Op grond van het gemiddelde van de steekproef wordt besloten de machine al dan niet bij te stellen.

Aluvia neemt een steekproef van 25 buizen. Uit de wortel- n -wet volgt dat $\bar{X}$ normaal verdeeld is met $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = 600$ en

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Bij een steekproefgemiddelde van 599 mm of van 600,5 mm zal Aluvia op grond van $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$ geen aanleiding zien tot bijstelling over te gaan.

Bij het steekproefgemiddelde 604 mm is er echter alle aanleiding om te twijfelen aan de juiste afstelling van de machine.

Maar wat beslist Aluvia bij $\bar{X} = 598$ of bij $\bar{X} = 601,8$?

Het is bij dit soort problemen gebruikelijk een **beslissingsvoorschrift** op te stellen dat aangeeft bij welke meetresultaten tot bijstelling wordt overgegaan. Aluvia zou bijvoorbeeld kunnen afspreken

machine bijstellen als $\bar{X} \leq 598$ of als $\bar{X} \geq 602$.

Aluvia loopt met zo'n afspraak een zeker risico. Het is immers mogelijk dat het steekproefgemiddelde 597,8 mm is, terwijl de machine goed is afgesteld.

$\bar{X} = 600,5$. Dat is nog geen $\sigma_{\bar{X}}$ van het gemiddelde af.

$\bar{X} = 604$. Dat is maar liefst $5\sigma_{\bar{X}}$ van het gemiddelde af. Het is dus vrijwel onmogelijk dat dit een toevallige afwijking is.

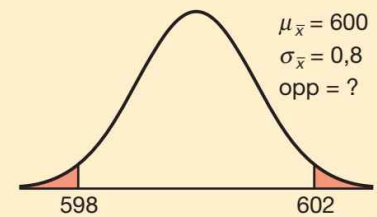
Aluvia vraagt zich daarom af hoe groot de kans is dat de machine wordt bijgesteld, terwijl deze goed is afgesteld.

Deze kans is $P(\bar{X} \leq 598 \vee \bar{X} \geq 602)$ bij $\mu_{\bar{X}} = 600$ en $\sigma_{\bar{X}} = 0,8$.

$$P(\bar{X} \leq 598 \vee \bar{X} \geq 602) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 598) =$$

$$2 \cdot \text{normalcdf}(-10^{99}, 598, 600, 0,8) \approx 0,012$$

Aluvia loopt een risico van 1,2% dat de productie wordt stilgelegd om de machine bij te stellen, terwijl dat eigenlijk niet nodig is. We zeggen dat de machine in dat geval *ten onrechte* wordt bijgesteld.



figuur 14.29

Het risico voor Aluvia wordt kleiner als gekozen wordt voor het beslissingsvoorschrift

machine bijstellen als $\bar{X} \leq 597$ of als $\bar{X} \geq 603$.

Toch is het niet verstandig het beslissingsvoorschrift zo te kiezen dat dit risico heel erg klein is. Aluvia heeft immers nog met een ander soort risico te maken, namelijk het risico dat de productie doorgaat terwijl de machine niet goed is afgesteld. Ook dat kan vervelende consequenties hebben.

Voorbeeld

Fabrikant Aluvia neemt een steekproef van 40 buizen en kiest het beslissingsvoorschrift machine bijstellen als $\bar{X} \leq 598,5$ of als $\bar{X} \geq 601,5$.

- Bereken de kans dat ten onrechte tot bijstelling wordt overgegaan.
- Neem aan dat de machine werkt met een gemiddelde van 598 mm. Bereken de kans dat de machine niet wordt bijgesteld.

Aanpak

- Ten onrechte bijstellen houdt in
 - er wordt bijgesteld, dus voor het steekproefresultaat geldt $\bar{X} \leq 598,5$ of $\bar{X} \geq 601,5$
 - het bijstellen gebeurt ten onrechte, dus in werkelijkheid is het gemiddelde $\mu_X = 600$.
- De machine wordt *niet* bijgesteld, dus voor $\bar{X}$ geldt $598,5 < \bar{X} < 601,5$.

Bereken $P(598,5 < \bar{X} < 601,5)$ met $\mu_{\bar{X}} = 598$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{40}}$.

Uitwerking

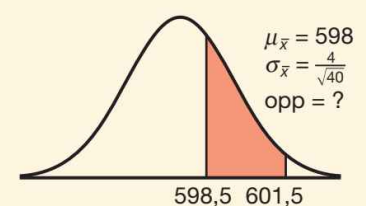
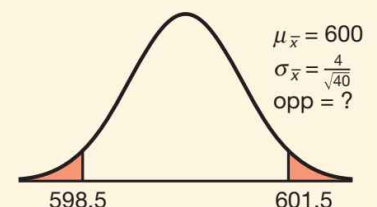
- $P(\text{ten onrechte bijstellen}) =$

$$P(\bar{X} \leq 598,5 \vee \bar{X} \geq 601,5) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 598,5) =$$

$$2 \cdot \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 598,5, 600, \frac{4}{\sqrt{40}}\right) \approx 0,018$$

- $P(\text{niet bijstellen}) = P(598,5 < \bar{X} < 601,5) =$

$$\text{normalcdf}\left(598,5, 601,5, 598, \frac{4}{\sqrt{40}}\right) \approx 0,215$$



- 39** Fabrikant Aluvia neemt een steekproef van 50 buizen en kiest het beslissingsvoorschrift machine bijstellen als $\bar{X} \leq 599$ of als $\bar{X} \geq 601$.
- Bereken de kans dat de machine ten onrechte wordt bijgesteld.
 - Waarom is het niet mogelijk de kans te berekenen dat Aluvia terecht tot bijstelling overgaat?
 - Neem aan dat de machine werkt met een gemiddelde van 601 mm. Bereken de kans dat Aluvia niet tot bijstellen overgaat.



Theorie B Het significantieniveau

Fabrikant Aluvia wil op grond van een steekproef van 25 buizen een beslissing nemen over het al dan niet bijstellen van de machine. Hierbij heeft Aluvia te maken met twee veronderstellingen.

- De lengte van de buizen is normaal verdeeld met $\mu_X = 600$.
- De lengte van de buizen is normaal verdeeld met $\mu_X \neq 600$.

De eerste veronderstelling heet de **nulhypothese**, aangegeven met H_0 . We schrijven $H_0: \mu_X = 600$.

Tegenover de nulhypothese staat de **alternatieve hypothese** H_1 waarin gesteld wordt dat het gemiddelde geen 600 mm is. Notatie $H_1: \mu_X \neq 600$.

Op grond van het steekproefresultaat zal Aluvia al dan niet besluiten H_0 te verwerpen. Kiest Aluvia voor het beslissingsvoorschrift

verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 599$ of als $\bar{X} \geq 601$, dan is de kans dat H_0 ten onrechte verworpen wordt gelijk aan $P(\bar{X} \leq 599 \vee \bar{X} \geq 601) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 599) =$

$$2 \cdot \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 599, 600, \frac{4}{\sqrt{25}}\right) \approx 0,211.$$

De kans dat H_0 bij een beslissingsvoorschrift ten onrechte wordt verworpen heet het **significantieniveau** en wordt aangegeven met α .

H_0 ten onrechte verwerpen houdt in

- H_0 is waar
- op grond van het beslissingsvoorschrift en het steekproefresultaat wordt H_0 verworpen.

Het significantieniveau α is de kans dat je H_0 ten onrechte verwerpt.

Bij het **toetsen van hypothesen** kies je eerst een significantieniveau. Deze keuze is afhankelijk van de ernst van de gevolgen van het al dan niet verwerpen van de nulhypothese. Wil je de kans op het ten onrechte verwerpen van H_0 klein maken, dan moet α klein worden gekozen, bijvoorbeeld $\alpha = 0,01$. Om de kans op het ten onrechte niet verwerpen van H_0 klein te maken, kies je een grotere waarde van α , bijvoorbeeld $\alpha = 0,10$.

Een toets kan nooit 100% zekerheid geven.

Aluvia besluit om $\alpha = 0,01$ te kiezen. De steekproefomvang is 25. Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of als $\bar{X} \geq g_r$.

Bij $\alpha = 0,01$ moet je g_l en g_r zo berekenen, dat $P(\bar{X} \leq g_l \vee \bar{X} \geq g_r) = 0,01$.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 600$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$.

Omdat de normaalkromme symmetrisch is geldt opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005$.

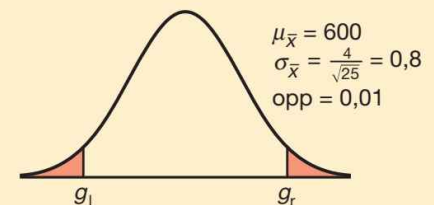
Dus

- $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,005$
dus $g_l = \text{invNorm}(0.005, 600, 0.8) = 597,939\dots$
- $P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,005 = 0,995$
dus $g_r = \text{invNorm}(0.995, 600, 0.8) = 602,060\dots$

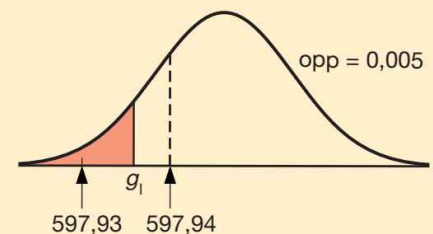
Let in dit soort gevallen op met afronden.

Rond je $g_l = 597,939\dots$ af op twee decimalen dan krijg je $g_l = 597,93$ want $P(\bar{X} \leq 597,94) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 597.94, 600, 0.8) \approx 0,00501 > \frac{1}{2}\alpha$ en dat mag niet.

Na het vaststellen van het beslissingsvoorschrift laat Aluvia de steekproef uitvoeren. Op grond van het gevonden steekproefgemiddelde wordt H_0 al dan niet verworpen. Vindt Aluvia bijvoorbeeld het steekproefgemiddelde 598,03 dan is er geen aanleiding H_0 te verwerpen, maar bij 597,83 zal H_0 verworpen worden. We zeggen dat het steekproefgemiddelde 597,83 **significant afwijkt** van $\mu_X = 600$.



figuur 14.30



figuur 14.31

- 40** Fabrikant Aluvia wil op grond van een steekproef van lengte 100 een beslissing nemen over het al dan niet verwerpen van $H_0: \mu_X = 600$. Als significantieniveau wordt $\alpha = 0,10$ gekozen. Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm
- verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of als $\bar{X} \geq g_r$.
- Bereken g_l en g_r in twee decimalen nauwkeurig.
 - Het steekproefgemiddelde blijkt 601,8 mm te zijn. Welke conclusie trekt Aluvia?

- 41** Een fabrikant maakt lampen waarvan de levensduur X in uren normaal verdeeld is met $\mu_X = 15\,000$ en $\sigma_X = 600$. De afdeling Research heeft voor de fabricage van de lampen een nieuw procedé ontwikkeld waarvan men beweert dat het de levensduur van de lampen niet beïnvloedt. De fabrikant twijfelt hieraan en onderzoekt dit door middel van een steekproef van 100 lampen.
- Als significantieniveau wordt $\alpha = 0,05$ gekozen.
- Geef H_0 en H_1 .
 - Het beslissingsvoorschrift is
verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of als $\bar{X} \geq g_r$.
Bereken g_l en g_r in één decimaal nauwkeurig.
 - Het steekproefgemiddelde blijkt 14 927 te zijn.
Welke conclusie trekt de fabrikant?

- 42** Een autobandenfabrikant beweert dat bij normaal rijgedrag het aantal kilometers X dat zijn banden meegaan normaal verdeeld is met $\mu_X = 35\,000$ en $\sigma_X = 4000$. Een autotijdschrift houdt een bandentest. In een steekproef van 64 van deze banden komt als steekproefgemiddelde 33 844 km tevoorschijn.
- We vragen ons af of dit steekproefresultaat significant van het gemiddelde afwijkt bij $\alpha = 0,05$.
- Geef H_0 en H_1 .
 - Bereken $P(\bar{X} \leq 33\,844)$.
 - Wijkt het steekproefgemiddelde significant af van 35 000?

Informatief Het significantieniveau

De keuze van het significantieniveau α heeft te maken met twee tegenstrijdige belangen van de fabrikant.

Enerzijds wil hij een juiste afstelling van de machine, want een verkeerde afstelling kost hem klanten.

Anderzijds wil de fabrikant het productieproces niet te vaak stilleggen om de machine bij te stellen.

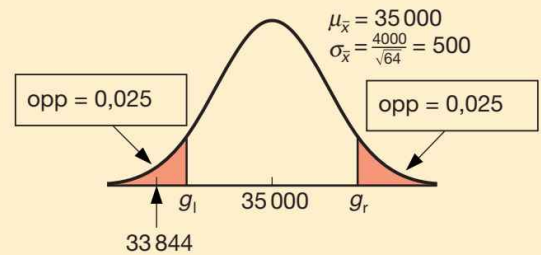
Een grote waarde van α betekent dat hij vaak moet bijstellen, terwijl hij bij een kleine waarde van α het risico loopt buizen te produceren met een afwijkende lengte.

Vóór het uitvoeren van de steekproef moet er overeenstemming zijn over de keuze van α . In de opgaven is steeds een waarde van α gegeven.



Theorie C Overschrijdingskans

Bij de bandentest in opgave 42 is $H_0: \mu_X = 35\,000$, $H_1: \mu_X \neq 35\,000$ en $\alpha = 0,05$. In deze opgave is het steekproefresultaat 33 844 bekend. In zo'n geval is het niet nodig eerst het beslissingsvoorschrift op te stellen. Je weet immers dat er ergens een grens g_1 is waarvoor geldt $P(\bar{X} \leq g_1) = \frac{1}{2}\alpha = 0,025$.



figuur 14.32

Als het steekproefresultaat 33 844 significant afwijkt dan is $\bar{X} = g_1$ of ligt $\bar{X}$ links van g_1 .

Dus $P(\bar{X} \leq 33\,844) \leq 0,025$.

Je hoeft dus alleen $P(\bar{X} \leq 33\,844)$ te berekenen en te kijken of deze kans wel of niet kleiner dan of gelijk is aan 0,025.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 35\,000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4000}{\sqrt{64}} = 500$, dus

$P(\bar{X} \leq 33\,844) = \text{normalcdf}(-10^9, 33\,844, 35\,000, 500) \approx 0,010$.

Dit is kleiner dan 0,025, dus 33 844 wijkt significant af.

$P(\bar{X} \leq 33\,844)$ heet de **overschrijdingskans** van het steekproefresultaat 33 844.

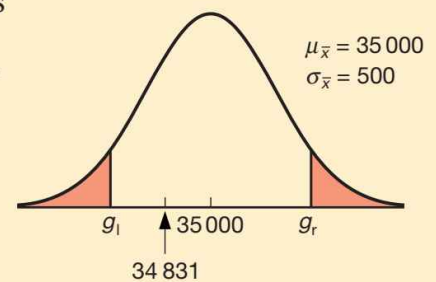
De overschrijdingskans van 34 831 is $P(\bar{X} \leq 34\,831) = \text{normalcdf}(-10^9, 34\,831, 35\,000, 500) \approx 0,368$.

Omdat $0,368 > \frac{1}{2}\alpha$ geeft het steekproefresultaat 34 831 geen aanleiding om H_0 te verwerpen.

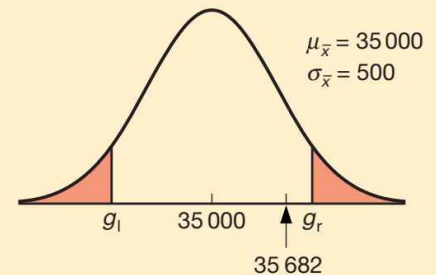
Bij het steekproefresultaat 35 682 is de overschrijdingskans $P(\bar{X} \geq 35\,682)$, want $35\,682 > 35\,000$.

$P(\bar{X} \geq 35\,682) = \text{normalcdf}(35\,682, 10^9, 35\,000, 500) \approx 0,086$

Omdat $0,086 > \frac{1}{2}\alpha$ is er bij het steekproefresultaat 35 682 geen aanleiding H_0 te verwerpen.



figuur 14.33



figuur 14.34

Bij $H_0: \mu = \mu_0$ en $H_1: \mu \neq \mu_0$ is de overschrijdingskans van k

- gelijk aan $P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_0$
- gelijk aan $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_0$.

Is de overschrijdingskans van k kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2}\alpha$, dan wordt H_0 verworpen.

Bij het toetsen van hypothesen wordt op grond van een steekproefresultaat en een significantieniveau α de nulhypothese H_0 al dan niet verworpen.

Men zegt dat de hypothese H_0 getoetst is tegen de hypothese H_1 . Gaat het om een steekproefgemiddelde bij een normale verdeling dan spreken we van een **normale toets**.

Is het steekproefresultaat bekend, bereken dan de overschrijdingskans om te bepalen of H_0 al dan niet verworpen wordt.

Voorbeeld

In een bedrijf is de totale tijd in uren die per dag wordt overgewerkt normaal verdeeld met een gemiddelde van 9,3 uur en een standaardafwijking van 2,1 uur. Sinds kort is een systeem van flexibele werktijden ingevoerd. In een periode van 40 werkdagen bleek de gemiddelde overwerktijd 8,6 uur per dag te zijn.

Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% geconcludeerd kan worden dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.

Uitwerking

X = de overwerktijd per dag in uren.

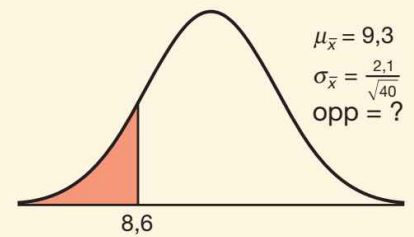
$H_0: \mu_X = 9,3$, $H_1: \mu_X \neq 9,3$ en $\alpha = 0,01$

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 9,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,1}{\sqrt{40}}$.

De overschrijdingskans van 8,6 is

$$P(\bar{X} \leq 8,6) = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 8,6, 9,3, \frac{2,1}{\sqrt{40}}\right) \approx 0,018.$$

$P(\bar{X} \leq 8,6) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen. Er is geen aanleiding te veronderstellen dat het nieuwe systeem invloed heeft op de overwerktijd.



- 43** De levensduur van een bepaald soort batterij is normaal verdeeld met $\mu = 2000$ uur en $\sigma = 25,5$ uur. Een steekproef van 200 batterijen levert een gemiddelde levensduur op van 1995 uur. Onderzoek of het steekproefgemiddelde significant afwijkt van 2000. Neem $\alpha = 0,05$.

Informatief Data-snooping

In het voorbeeld is het verleidelijk om $\alpha = 0,05$ te kiezen.

Dan is namelijk $P(\bar{X} \leq 8,6) < \frac{1}{2}\alpha$ en zou geconcludeerd mogen worden dat het nieuwe systeem inderdaad invloed heeft op de overwerktijd bij het bedrijf. Zo'n verandering van het toetsmodel wordt in de statistiek data-snooping genoemd en is niet toegestaan.

Bij een juiste toetsprocedure moet je vooraf afspraken maken over de hypothesen en over het significantieniveau. Je mag die afspraken niet achteraf, na het uitvoeren van de steekproef, bijstellen.



- 44** Een machine vult pakken suiker. Het gewicht X in kg van een pak suiker is normaal verdeeld met $\mu_X = 1,02$ en $\sigma_X = 0,04$. De fabrikant vermoedt dat na verloop van tijd de vulmachine de neiging vertoont om pakken met een afwijkend gemiddelde af te leveren. Een steekproef van 50 pakken suiker levert een steekproefgemiddelde van 1,04 kg op.
- Onderzoek of de fabrikant bij een significantieniveau van 5% zal besluiten de vulmachine opnieuw in te stellen.
 - Welke conclusie zal de fabrikant trekken bij een significantieniveau van 5% als het steekproefgemiddelde 1,03 kg is?

- A 45** Bij de productie van tennisballen is de diameter X normaal verdeeld met een gemiddelde van 10,2 cm en een standaardafwijking van 9 mm.
- Een afnemer van de tennisballen twijfelt of deze gemiddelde diameter klopt. Bij een steekproef van lengte 40 is het steekproefgemiddelde 9,95 cm. Welke conclusie trekt de afnemer bij een significantieniveau $\alpha = 0,10$? En wat is zijn conclusie bij $\alpha = 0,05$?
 - De tennisbond wil op grond van een steekproef van lengte 100 een beslissing nemen over het al dan niet verwerpen van $H_0: \mu_X = 10,2$. Stel het beslissingsvoorschrift op. Neem hierbij $\alpha = 0,10$.

Informatief Fouten van de eerste en tweede soort

Bij het toetsen van hypothesen zijn vier situaties te onderscheiden.

		beslissing op grond van steekproef	
		H_0 niet verwerpen	H_0 verwerpen
werkelijke situatie	H_0 is waar	juiste beslissing	fout van de eerste soort
	H_1 is waar	fout van de tweede soort	juiste beslissing

De kans dat H_0 ten onrechte wordt verworpen heet de kans op een **fout van de eerste soort**. Deze kans heet de **onbetrouwbaarheid** van de toets. Door de keuze van α wordt van tevoren afgesproken welke onbetrouwbaarheid acceptabel is.

Maar je hebt ook nog te maken met een andere fout. Het is namelijk mogelijk dat je H_0 niet verworpt, terwijl in werkelijkheid H_1 waar is. De kans op deze zogenaamde **fout van de tweede soort** is niet te berekenen, omdat je de μ die bij H_1 hoort niet weet. Deze kans neemt toe naarmate de kans op een fout van de eerste soort afneemt.

Terugblik

Hypothesen toetsen

Een fabrikant maakt tennisballen waarvan het gewicht X in gram normaal verdeeld is met $\mu_X = 58$ en $\sigma_X = 2$. Er wordt een goedkopere productiemethode ontwikkeld. De afdeling Research beweert dat deze methode geen invloed heeft op het gewicht van de tennisballen.

Je hebt hier te maken met

- de nulhypothese $H_0: \mu_X = 58$ (de nieuwe productiemethode heeft geen invloed op het gewicht)
- de alternatieve hypothese $H_1: \mu_X \neq 58$ (de nieuwe productiemethode heeft wel invloed op het gewicht).

Op grond van een steekproef van lengte n en een gekozen significantieniveau α , verwerp je al dan niet H_0 .

De kans dat H_0 ten onrechte wordt verworpen is gelijk aan α .

Steekproefresultaat wel/niet bekend

Er zijn twee mogelijkheden.

- Het steekproefresultaat is niet bekend.
Bereken g_l en g_r bij het beslissingsvoorschrift
verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of als $\bar{X} \geq g_r$.

Bij een steekproef van lengte 10 en $\alpha = 0,05$ krijg je

$$g_l = \text{invNorm}\left(0.025, 58, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx 56,76 \text{ en}$$

$$g_r = \text{invNorm}\left(0.975, 58, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx 59,24.$$

Het beslissingsvoorschrift is

verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 56,7$ of als $\bar{X} \geq 59,3$.

Let hierbij op de afronding.

- Het steekproefresultaat is bekend.
Bereken de overschrijdingskans bij het steekproefgemiddelde k .

De overschrijdingskans is

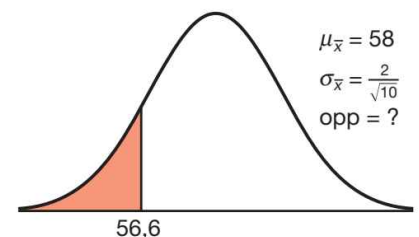
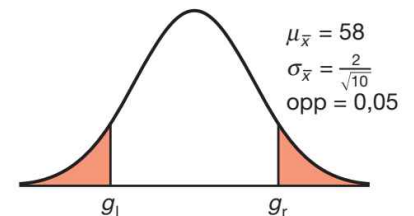
- $P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_X$
- $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_X$.

Is deze kans kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2}\alpha$ dan verwerp je H_0 .

Bij $\alpha = 0,05$ en een steekproef van lengte 10 met een gemiddelde van 56,6 krijg je

$$P(\bar{X} \leq 56,6) = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 56,6, 58, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx 0,013 < \frac{1}{2}\alpha.$$

Het steekproefgemiddelde wijkt significant af van $\mu_X = 58$, dus H_0 wordt verworpen,



14.4 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

46

Bij de fabricage van lampen van het merk Flash is de levensduur X in uren van de lampen normaal verdeeld met $\mu_X = 11\,500$ en $\sigma_X = 250$. Een medewerker beweert een nieuwe productiemethode ontwikkeld te hebben waarmee de levensduur van de lampen verlengd wordt. Door middel van een steekproef van 100 lampen, geproduceerd met de nieuwe methode, wordt onderzocht of het nieuwe procedé inderdaad een gunstig effect heeft.

- Waarom is het niet juist bij $H_0: \mu_X = 11\,500$ als alternatieve hypothese $H_1: \mu_X \neq 11\,500$ te nemen?
- Stel dat het steekproefgemiddelde 11 350 is. Is er aanleiding te veronderstellen dat de nieuwe productiemethode een gunstig effect heeft?

14

Theorie A Eenzijdig toetsen

Tot nu toe was bij het toetsen van hypothesen de alternatieve hypothese steeds van de vorm $H_1: \mu \neq \mu_0$. Je verwierpt dan H_0 als $\bar{X} \leq g_1$ of als $\bar{X} \geq g_1$. Zo'n toets heet een **tweezijdige toets**.

Maar de alternatieve hypothese kan ook van de vorm $H_1: \mu < \mu_0$ of van de vorm $H_1: \mu > \mu_0$ zijn. Je hebt dan te maken met een **eenzijdige toets**.

Als voorbeeld bekijken we de levensduur van een bepaald type beeldscherm. De levensduur X in uren is normaal verdeeld met $\mu_X = 18\,000$ en $\sigma_X = 3000$.

De afdeling Productie beweert een nieuw procedé ontwikkeld te hebben dat de levensduur van de beeldschermen verlengt. Op grond van een steekproef van 100 beeldschermen beslist de directie of het nieuwe procedé zal worden ingevoerd.

Omdat de productieafdeling beweert dat de levensduur is verlengd, is de alternatieve hypothese $H_1: \mu_X > 18\,000$.

Het beslissingsvoorschrift heeft daarom de vorm
verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$.

Hierbij is $\bar{X}$ normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 18\,000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3000}{\sqrt{100}} = 300$.

Bij significantieniveau $\alpha = 0,05$ bereken je g zo, dat $P(\bar{X} \geq g) = 0,05$.

Opp links = $1 - 0,05 = 0,95$, dus

$g = \text{invNorm}(0,95, 18000, 300) \approx 18\,493,46$.

Je verwierpt H_0 als $\bar{X} \geq 18\,494$.

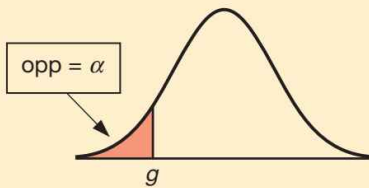
Het toetsen van $H_0: \mu = \mu_0$ tegen $H_1: \mu > \mu_0$ is een **rechtszijdige toets** en het toetsen van $H_0: \mu = \mu_0$ tegen $H_1: \mu < \mu_0$ is een **linkszijdige toets**.

NORMALE TOETSEN

linkszijdige toets

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

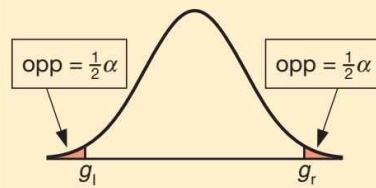


beslissingsvoorschrift:
verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g$

tweezijdige toets

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

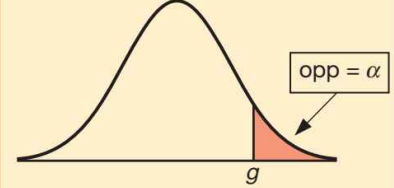


beslissingsvoorschrift:
verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of als $\bar{X} \geq g_r$

rechtszijdige toets

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$



beslissingsvoorschrift:
verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$

- 47** Gegeven is de normaal verdeelde toevalsvariabele X met $\mu_X = 85$ en $\sigma_X = 15$.

Stel het beslissingsvoorschrift op bij de volgende toetsen. Hierbij is n de steekproefomvang.

- a $H_0: \mu_X = 85, H_1: \mu_X > 85, \alpha = 0,10$ en $n = 30$
- b $H_0: \mu_X = 85, H_1: \mu_X < 85, \alpha = 0,05$ en $n = 50$
- c $H_0: \mu_X = 85, H_1: \mu_X \neq 85, \alpha = 0,01$ en $n = 200$

- 48** De afhandelings tijd in minuten van de bestellingen op de verpakkingsafdeling van een groothandel is normaal verdeeld met $\mu = 12$ en $\sigma = 3$.

De groothandel beweert dat door een interne reorganisatie de gemiddelde afhandelings tijd is teruggedrongen.

- a Deze bewering wordt getoetst door van 25 bestellingen de afhandelings tijd te meten.

Bij welke steekproefgemiddelden is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding te veronderstellen dat de afhandelings tijd inderdaad verminderd is? Rond af op één decimaal.

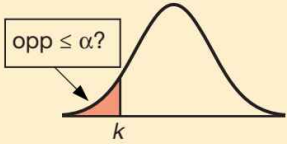
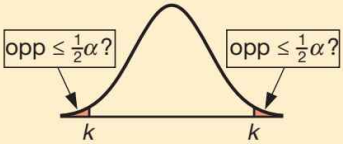
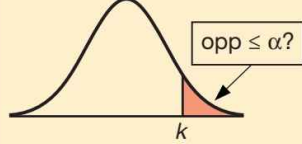
- b Een steekproef van 80 bestellingen heeft een steekproefgemiddelde van 11 minuten en 18 seconden. Is er bij een significantieniveau van 1% aanleiding om te concluderen dat de afhandelings tijd is afgenomen?

Theorie B Overschrijdingskansen bij eenzijdige toetsen

Is het steekproefresultaat bekend, dan is het ook bij eenzijdig toetsen aan te bevelen met overschrijdingskansen te werken.

Bij $H_0: \mu_X = 25$ tegen $H_1: \mu_X > 25$ met significantieniveau α is de overschrijdingskans van het steekproefgemiddelde 26,3 gelijk aan $P(\bar{X} \geq 26,3)$. Je verwerpt H_0 als $P(\bar{X} \geq 26,3) \leq \alpha$.

Bij $H_0: \mu_X = 25$ tegen $H_1: \mu_X < 25$ met significantieniveau α is de overschrijdingskans van 24,2 gelijk aan $P(\bar{X} \leq 24,2)$. Je verwerpt H_0 als $P(\bar{X} \leq 24,2) \leq \alpha$.

OVERSCHRIJDINGSKANSEN bij steekproefresultaat k en significantieniveau α .			
	linkszijdige toets	tweezijdige toets	rechtszijdige toets
nulhypothese	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$
alternatieve hypothese	$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$
overschrijdingskansen van k	$P(\bar{X} \leq k)$	$P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k)$
verwerp H_0 als	$P(\bar{X} \leq k) \leq \alpha$ 	$P(\bar{X} \leq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$ als $k > \mu_0$ 	$P(\bar{X} \geq k) \leq \alpha$ 

Voorbeeld

Een fabrikant beweert dat de levensduur van een nieuw soort batterij normaal verdeeld is met een gemiddelde van 800 uur en een standaardafwijking van 40 uur.

Een consumentenorganisatie beweert dat de gemiddelde levensduur minder is dan 800 uur. Een steekproef van 100 batterijen geeft een gemiddelde levensduur van 793,8 uur.

Is er op grond van dit steekproefresultaat bij een significantieniveau $\alpha = 0,025$ aanleiding om te twijfelen aan de bewering van de fabrikant?

Uitwerking

X is de levensduur van een batterij in uren.

$H_0: \mu_X = 800$, $H_1: \mu_X < 800$ en $\alpha = 0,025$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 800$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{40}{\sqrt{100}} = 4$.

De overschrijdingskans van 793,8 is

$P(\bar{X} \leq 793,8) = \text{normalcdf}(-10^9, 793,8, 800, 4) \approx 0,061$

$P(\bar{X} \leq 793,8) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.

Werkschema: het toetsen van hypothesen

- 1 Formuleer H_0 en H_1 en vermeld het significantieniveau.
- 2 *bij bekend steekproefresultaat* *bij onbekend steekproefresultaat*
Bereken de overschrijdingskansen. Stel het beslissingsvoorschrift op.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

- 49** Een fabrikant levert margarine in pakjes van 500 gram. Bij de productieafdeling bestaat het vermoeden dat de pakjes te veel margarine bevatten. Een steekproef van 100 pakjes margarine levert een gemiddeld gewicht van 500,4 gram per pakje op. Is er op grond van het steekproefresultaat bij een significantieniveau van 5% reden om de productieafdeling gelijk te geven? Ga ervan uit dat het gewicht van een pakje normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 gram en een standaardafwijking van 1,5 gram.

- A 50** Een medicijn is verkrijgbaar in tabletvorm. Het werkzame aandeel X in een tablet is normaal verdeeld met een gemiddelde van 4 mg en een standaardafwijking van 0,12 mg. Het medicijn werkt goed als het werkzame aandeel per tablet tussen 3,8 mg en 4,2 mg ligt.
- Bereken de kans dat een tablet goed werkt.
 - Er vinden regelmatig controles plaats om te kijken of de gemiddelde hoeveelheid werkzame stof inderdaad 4 mg is. Een steekproef van 50 tabletten levert een gemiddelde op van 3,95 mg werkzame stof. Wijkt dit gemiddelde significant af van 4 mg? Neem $\alpha = 0,05$.
 - Stel dat er gemiddeld inderdaad 3,95 mg werkzame stof in een tablet zit. Hoeveel procent van de tabletten werkt dan niet goed?

- A 51** In een koffiebranderij worden pakken gevuld met koffiebonen. Het gewicht van de bonen in een pak is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4 gram. De fabrikant beweert dat de vulmachine zo is ingesteld dat een pak gemiddeld 500 gram bevat.
- Een consumentenorganisatie zegt dat de pakken gemiddeld minder dan 500 gram koffiebonen bevatten. Hoeveel moet het gemiddelde gewicht per pak in een steekproef van lengte 50 zijn om de consumentenorganisatie bij een significantieniveau van 5% in het gelijk te stellen? Rond af op één decimaal.
 - Het hoofd van de afdeling Voorraad beweert dat het gewicht van de koffiebonen in een pak meer dan 500 gram is. Bij een steekproef van 25 pakken is het steekproefgemiddelde 501,94 gram. Is er bij een significantieniveau van 2,5% aanleiding het hoofd van de afdeling Voorraad gelijk te geven?
 - De afdeling Controle beweert dat door een defect aan de vulmachine het gewicht van de bonen in een pak niet 500 gram is. Bij een steekproef van 25 pakken is het gemiddelde gewicht per pak gelijk aan 501,48 gram. Wijkt dit steekproefresultaat significant af van 500 gram? Neem $\alpha = 0,05$.

- O 52** Een kabelfabrikant beweert dat zijn remkabels voor toerfietsen gemiddeld een trekkracht van minstens 800 newton kunnen weerstaan.

De redactie van een fietstijdschrift vindt dit gemiddelde te optimistisch. Een steekproef van 25 kabels levert een gemiddelde trekkracht op van 785 N. Ga ervan uit dat de trekkracht normaal verdeeld is met $\sigma = 35$ N.

- Als het steekproefresultaat 785 N reden geeft om $H_0: \mu = 800$ te verwerpen, dan wordt elke H_0 met $\mu > 800$ ook verworpen. Licht dit toe.
- Licht toe dat $\mu = 800$ voor de fabrikant gunstiger is dan een μ -waarde groter dan 800.

Theorie C Enkelvoudige nulhypothese

In opgave 52 is een eerste gedachte wellicht om $H_0: \mu \geq 800$ en $H_1: \mu < 800$ te kiezen.

Beide hypothesen omvatten dan meerdere waarden van μ , en daar is niet mee te werken. De nulhypothese moet van de vorm $\mu = \mu_0$ zijn. Je kiest daarbij de voor de fabrikant gunstigste H_0 , hier $H_0: \mu = 800$.

Niet altijd is direct duidelijk welke hypothese H_0 en welke H_1 is. De volgende opmerkingen kunnen je helpen de juiste keuze te maken.

- H_0 is de hypothese die als uitgangspunt dient en die door middel van de alternatieve hypothese in twijfel wordt getrokken.
- H_0 dient een **enkelvoudige hypothese** te zijn, dus H_0 heeft de vorm $H_0: \mu = \mu_0$.

Beweert een fabrikant dat de houdbaarheid van zijn producten minstens acht dagen is en trekt een consumentenorganisatie dat in twijfel, dan kies je $H_0: \mu = 8$ en $H_1: \mu < 8$.

Bij H_0 hoort immers de bewering die in twijfel wordt getrokken.

Je kiest niet $H_0: \mu \geq 8$, want de nulhypothese moet enkelvoudig zijn.

Je kiest de voor de fabrikant gunstigste situatie.

- A 53** Volgens Hans kijkt de Nederlander gemiddeld minstens 23,4 uur per week naar de tv. Een medewerker van reclamebureau De Ster trekt deze bewering in twijfel. Bij een steekproef van 30 personen is het steekproefgemiddelde 22,6 uur. Ben je het eens met de bewering van de medewerker van De Ster bij een significantieniveau van 2,5%? Ga ervan uit dat de tijd die een Nederlander per week tv kijkt normaal verdeeld is met $\sigma = 2,4$ uur.

Terugblik

Het beslissingsvoorschrift bij eenzijdige normale toetsen

Bij een linkszijdige toets wordt $H_0: \mu = \mu_0$ tegen $H_1: \mu < \mu_0$ getoetst.

Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g$.

Een fabrikant maakt tennisballen waarvan het gewicht X in gram normaal verdeeld is met $\mu_X = 58$ en $\sigma_X = 2$. Er wordt een goedkopere productiemethode ontwikkeld. Een klant beweert dat het gewicht nu minder is dan 58 gram.

Je hebt te maken met $H_0: \mu = 58$ en $H_1: \mu < 58$.

Bij een steekproef van lengte 20 en $\alpha = 0,05$ is $g = \text{invNorm}\left(0.05, 58, \frac{2}{\sqrt{20}}\right) = 57,264\dots$

Dus je verwerpt H_0 als $\bar{X} \leq 57,26$ gram.

Overschrijdingskans van het steekproefgemiddelde

Bij $H_0: \mu = 25$ en

- $H_1: \mu < 25$ is de overschrijdingskans van 23 gelijk aan $P(\bar{X} \leq 23)$
- $H_1: \mu > 25$ is de overschrijdingskans van 28 gelijk aan $P(\bar{X} \geq 28)$
- $H_1: \mu \neq 25$ is de overschrijdingskans van 23 gelijk aan $P(\bar{X} \leq 23)$ en is de overschrijdingskans van 28 gelijk aan $P(\bar{X} \geq 28)$.

Je verwerpt H_0 als

- de overschrijdingskans kleiner dan of gelijk is aan α (bij eenzijdig toetsen)
- de overschrijdingskans kleiner dan of gelijk is aan $\frac{1}{2}\alpha$ (bij tweezijdig toetsen).

Toetsen van hypothesen

Voer bij het toetsen van hypothesen de volgende stappen uit.

- 1 Formuleer H_0 en H_1 en vermeld het significantieniveau α .
- 2 Bereken de overschrijdingskans als het steekproefresultaat bekend is.
Stel anders het beslissingsvoorschrift op.
- 3 Beantwoord de gestelde vraag.

Bedenk dat H_0 de hypothese is die in twijfel wordt getrokken.

Kies H_0 altijd enkelvoudig, dus $H_0: \mu = \mu_0$.

Eenzijdige en tweezijdige toetsen

	linkszijdige toets	tweezijdige toets	rechtszijdige toets
nulhypothese	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$
alternatieve hypothese	$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$
overschrijdingskans van k	$P(\bar{X} \leq k)$	$P(\bar{X} \leq k)$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k)$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k)$
verwerp H_0 als	$P(\bar{X} \leq k) \leq \alpha$	$P(\bar{X} \leq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$ als $k < \mu_0$ $P(\bar{X} \geq k) \leq \frac{1}{2}\alpha$ als $k > \mu_0$	$P(\bar{X} \geq k) \leq \alpha$

14.5 Binomiale toetsen

54

Frisdrankfabrikant Mol beweert in een advertentie dat 40% van de Nederlanders zijn nieuwe frisdrank de lekkerste frisdrank vindt. Concurrent Franck vecht dit aan bij de reclamecode-commissie. Volgens hem is dit percentage lager.

De reclamecodecommissie besluit een steekproef van 100 personen te nemen. Op grond van het steekproefresultaat zal Mol de advertentie al dan niet moeten herzien.

De toetsingsgrootte X is het aantal personen in de steekproef dat de frisdrank van fabrikant Mol de lekkerste vindt.

- Licht toe dat X een binomiaal verdeelde toevalsvariabele is.
- Neem aan dat $X = 48$. Zal Mol de advertentie moeten herzien?
- Neem aan dat $X = 28$. Welke partij krijgt volgens jou dan gelijk?

Theorie A Eenzijdige binomiale toets

In opgave 54 moet op grond van een steekproefresultaat beslist worden of de firma Mol al dan niet gelijk krijgt. In de steekproef wordt het aantal personen X geteld dat de frisdrank van Mol het lekkerst vindt.

De toetsingsgrootte X is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele.

Indien Mol gelijk heeft is $p = 0,4$, dus de nulhypothese is $H_0: p = 0,4$. De alternatieve hypothese is $H_1: p < 0,4$.

Neem als significantieniveau $\alpha = 0,05$.

H_0 wordt verworpen als het aantal personen in de steekproef dat de frisdrank van Mol de lekkerste vindt, klein is. Dus het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

verwerp H_0 als $X \leq g$.

Hierbij is g het grootste gehele getal dat bij $n = 100$ en $p = 0,4$ voldoet aan $P(X \leq g) \leq 0,05$.

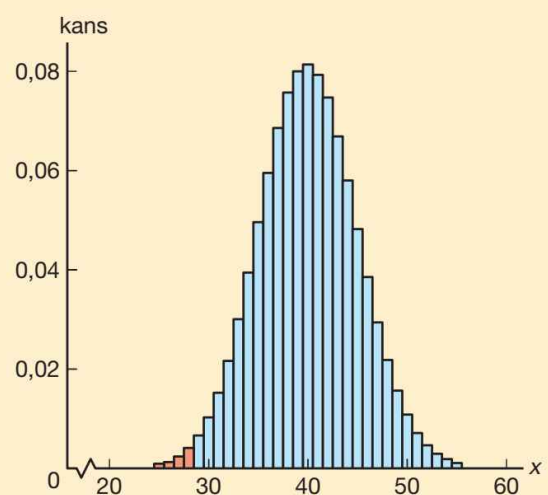
Neem aan dat uit de steekproef blijkt dat 28 personen het met Mol eens zijn. Door de overschrijdingskans van 28 te berekenen, kom je erachter of H_0 al dan niet verworpen dient te worden.

De overschrijdingskans van 28 is $P(X \leq 28) = \text{binomcdf}(100, 0.4, 28) \approx 0,008$.

Omdat $P(X \leq 28) \leq \alpha$ weet je dat $28 \leq g$, dus je verwerpt H_0 . Mol zal de advertentie moeten herzien.

Je hebt hier een voorbeeld van een **binomiale toets** gezien.

Bij een binomiale toets is de toetsingsgrootte X een binomiaal verdeelde toevalsvariabele.



figuur 14.35 Het kanshistogram bij de binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0,4$.

Bij een binomiale toets heeft de nulhypothese de vorm $H_0: p = p_0$.
 Bij een linkszijdige toets is $H_1: p < p_0$ en bij een rechtszijdige toets is $H_1: p > p_0$.

Bij een binomiale toets telt de toetsingsgrootte X hoeveel elementen in de steekproef een bepaald kenmerk hebben.

X is binomiaal verdeeld, waarbij n de steekproefomvang is.

Linkszijdig: $H_0: p = p_0$ en $H_1: p < p_0$

De overschrijdingskans van k is $P(X \leq k)$.

Verwerp H_0 als $P(X \leq k) \leq \alpha$.

Rechtszijdig: $H_0: p = p_0$ en $H_1: p > p_0$

De overschrijdingskans van k is $P(X \geq k)$.

Verwerp H_0 als $P(X \geq k) \leq \alpha$.

Voorbeeld

Een bandenfabrikant beweert dat hoogstens 10% van zijn banden minder dan 40 000 km meegaat. Een consumentenorganisatie vermoedt dat dit percentage hoger is. Er wordt besloten tot een steekproef van 50 autobanden. Hiervan blijken er twaalf minder dan 40 000 km mee te gaan. Is er aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken? Neem $\alpha = 0,05$.

Aanpak

- H_0 is de bewering van de fabrikant, want die wordt aangevochten. Omdat H_0 enkelvoudig moet zijn, neem je niet $H_0: p \leq 0,1$ maar $H_0: p = 0,1$.
- Het steekproefresultaat is bekend, dus gebruik een overschrijdingskans.
- Ga op soortgelijke wijze te werk als in het werkschema op bladzijde 89.

Uitwerking

X = het aantal banden dat minder dan 40 000 km meegaat.

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,1$.

$H_0: p = 0,1$, $H_1: p > 0,1$ en $\alpha = 0,05$

De overschrijdingskans van 12 is

$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - \text{binomcdf}(50, 0,1, 11) \approx 0,003$.

$P(X \geq 12) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Er is inderdaad aanleiding om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken.

- 55** In Nederland heeft 30% van de bevolking last van een vorm van allergie. Onderzoekers beweren dat dit percentage lager ligt bij mensen die op jonge leeftijd regelmatig met honden en katten in contact zijn gekomen. Door de ontwikkeling van het immuunsysteem zijn ze op latere leeftijd dan minder vatbaar voor allergieën. De onderzoekers hebben 474 kinderen gevolgd die dagelijks met minstens twee honden of katten in contact kwamen. Het bleek dat 112 van hen later met een allergie te kampen kregen. Is er bij een significantieniveau van 2,5% voldoende aanleiding de onderzoekers gelijk te geven?

- 56** In de westerse wereld lijdt 8% van de mannen aan een vorm van kleurenblindheid. De bioloog Vosseberg beweert dat dit percentage onder Aziatische mannen hoger ligt. Een onderzoek onder 200 Aziatische mannen wijst uit dat 22 van hen een vorm van kleurenblindheid hebben. Is er aanleiding om Vosseberg gelijk te geven? Neem $\alpha = 0,05$.

- A 57** Mirjam speelt een spel met een dobbelsteen. Volgens haar krijgt ze te weinig keer zes ogen. Bij het 80 keer gooien met de dobbelsteen krijgt ze maar liefst 72 keer geen zes. Is er bij een significantieniveau van 5% voldoende aanleiding om het met Mirjam eens te zijn?

- A 58** Simon beweert dat bij het draaien van de schijf in figuur 14.36 de wijzer te vaak op rood komt. Bij het 160 keer draaien van de schijf komt de wijzer maar liefst 52 keer op rood. Is dat voldoende reden om Simon bij een significantieniveau van 1% gelijk te geven?



figuur 14.36

Theorie B Het beslissingsvoorschrift bij een binomiale toets

Bij een binomiale toets is $H_0: p = 0,42$, $H_1: p > 0,42$ en $\alpha = 0,05$.

Door middel van een steekproef van lengte 100 wordt beslist of H_0 al dan niet verworpen wordt.

In het geval de steekproefuitslag niet bekend is, bereken je voor welke steekproefresultaten H_0 verworpen wordt.

Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

verwerp H_0 als $X \geq g$.

De vraag is dus

Wat is het kleinste gehele getal g waarvoor geldt

$P(X \geq g) \leq 0,05$?

ofwel

Wat is het kleinste gehele getal g zo, dat

$1 - P(X \leq g - 1) \leq 0,05$?

Voer in

$y_1 = 1 - \text{binomcdf}(100, 0.42, x - 1)$ (TI) of

$y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(x - 1, 100, 0.42)$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 50$ geeft $y_1 \approx 0,065$

$x = 51$ geeft $y_1 \approx 0,043$.

Dus verwerp H_0 als $X \geq 51$.

Op de Casio kun je InvBinomialCD gebruiken. Zoek eens uit hoe dat werkt.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS ENTER TO EDIT				
X	Y1			
44	.37881			
45	.30494			
46	.23837			
47	.18074			
48	.13278			
49	.09444			
50	.06498			
51	.04321			
52	.02776			
53	.01722			
54	.01031			
Y1=1-binomcdf(100,.42,X-1)				

Voorbeeld

Een woordvoerder van de NS beweert dat minstens 90% van de treinen op het traject Utrecht-Arnhem op tijd rijdt. Reizigersvereniging Rover vermoedt dat dit percentage lager is. Er wordt besloten van 150 treinen na te gaan of ze op tijd rijden. Hoeveel van deze treinen moeten op tijd rijden om de bewering van de NS bij een significantieniveau van 1% te verwerpen?

Uitwerking

X = het aantal treinen dat op tijd rijdt.

X is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = 0,9$.

$H_0: p = 0,9$, $H_1: p < 0,9$ en $\alpha = 0,01$

Verwerp H_0 als $X \leq g$.

Zoek het grootste gehele getal g zo, dat

$P(X \leq g) \leq 0,01$ ofwel $\text{binomcdf}(150, 0.9, g) \leq 0,01$.

Voer in $y_1 = \text{binomcdf}(150, 0.9, x)$ (TI) of

$y_1 = \text{BinomialCD}(x, 150, 0.9)$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 125$ geeft $y_1 \approx 0,00765$

$x = 126$ geeft $y_1 \approx 0,01431$.

Verwerp H_0 als $X \leq 125$.

De bewering van de NS wordt verworpen als er 125 of minder treinen op tijd rijden.

90% van 150 is 135, dus onder H_0 zal het aantal treinen dat op tijd rijdt niet ver onder 135 liggen. Dus begin de tabel bijvoorbeeld bij $x = 120$.

- 59** De fabrikant van het geneesmiddel Pharmeaplus beweert dat dit middel in minstens 80% van de gevallen doeltreffend werkt.

Een arts vindt dit percentage te optimistisch en daarom wordt van 500 patiënten die het middel hebben gebruikt het ziekteverloop nagegaan.

Bereken het kleinste aantal patiënten waarbij het middel Pharmeaplus een positieve uitwerking moet hebben opdat de bewering van de fabrikant niet verworpen wordt. Neem $\alpha = 0,05$.

- A 60** Volgens een tennisliefhebber wint een speler die in een set met serveren begint in minstens 55% van de gevallen de set. Commentator Jacco vindt dit percentage te optimistisch en daarom onderzoekt hij 500 gespeelde sets op Wimbledon.

- a** Neem aan dat Jacco op grond van zijn steekproef gelijk krijgt.

Wat weet je van het aantal sets waarbij de speler die begint met serveren de set wint? Neem $\alpha = 0,05$.

- b** Wat is je conclusie als het werkelijke aantal 242 blijkt te zijn?

De kans dat een serveerder de game wint, is voor op Wimbledon gespeelde partijen 81,5%. Volgens Jacco geven nieuwe ballen bij het serveren extra voordeel. Door middel van een steekproef van 300 met nieuwe ballen gespeelde games op Wimbledon wordt onderzocht of Jacco gelijk heeft.

- c** Hoeveel van die games moet de serveerder winnen opdat Jacco gelijk krijgt? Neem $\alpha = 0,025$.

Theorie C Tweezijdige binomiale toets

In een krantenartikel is te lezen dat 45% van jongeren van 13 en 14 jaar regelmatig online gamet. Om deze bewering te toetsen wordt aselekt een steekproef van 120 jongeren van 13 en 14 jaar genomen. We vragen ons af bij welke aantallen jongeren het percentage van 45% in twijfel wordt getrokken. We nemen $\alpha = 0,05$.

De toetsingsgrootheid X is het aantal jongeren in de steekproef dat regelmatig online gamet.

De nulhypothese is $H_0: p = 0,45$. Het percentage 45% wordt in twijfel getrokken, dus $H_1: p \neq 0,45$.

Je hebt te maken met een **tweezijdige binomiale toets**.

Onder H_0 is X binomiaal verdeeld met $n = 120$ en $p = 0,45$.

Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

verwerp H_0 als $X \leq g_l$ of als $X \geq g_r$.

Bereken g_l en g_r zo, dat $P(X \leq g_l \text{ of } X \geq g_r) \leq 0,05$.

We kiezen g_l en g_r zo, dat $P(X \leq g_l) \leq 0,025$ en

$P(X \geq g_r) \leq 0,025$.

$$P(X \leq g_l) \leq 0,025$$

$$\text{binomcdf}(120, 0,45, g_l) \leq 0,025$$

De tabel geeft

$$\text{binomcdf}(120, 0,45, 42) \approx 0,017$$

$$\text{binomcdf}(120, 0,45, 43) \approx 0,026.$$

Conclusie $g_l = 42$.

$$P(X \geq g_r) \leq 0,025$$

$$1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,025$$

$$1 - \text{binomcdf}(120, 0,45, g_r - 1) \leq 0,025$$

De tabel geeft

$$1 - \text{binomcdf}(120, 0,45, 65) \approx 0,027$$

$$1 - \text{binomcdf}(120, 0,45, 66) \approx 0,018.$$

Conclusie $g_r - 1 = 66$, dus $g_r = 67$.

Het in het krantenartikel genoemde percentage van 45% wordt bij $\alpha = 0,05$ in twijfel getrokken als het aantal jongeren dat online gamet kleiner dan of gelijk is aan 42 of groter dan of gelijk is aan 67.

Bij de tweezijdige binomiale toets met $H_0: p = p_0$ en $H_1: p \neq p_0$

verwerp je H_0 als $X \leq g_l$ of $X \geq g_r$.

Kies g_l en g_r zo, dat $P(X \leq g_l) \leq \frac{1}{2}\alpha$ en $P(X \geq g_r) \leq \frac{1}{2}\alpha$.

Is het steekproefresultaat k bekend, dan heeft ook bij tweezijdige binomiale toetsen de overschrijdskans de voorkeur. Van tevoren bedenk je of je $P(X \leq k)$ of $P(X \geq k)$ moet berekenen. Daarbij gebruik je de verwachtingswaarde.

Overschrijdingskans van k bij tweezijdige binomiale toetsen

$H_0: p = 0,6, H_1: p \neq 0,6$
 steekproefomvang $n = 60$
 steekproefresultaat $k = 42$

De overschrijdingskans van 42 is $P(X \geq 42)$, want de verwachtingswaarde is $0,6 \cdot 60 = 36$ en $42 > 36$.

$H_0: p = 0,6, H_1: p \neq 0,6$
 steekproefomvang $n = 80$
 steekproefresultaat $k = 42$

De overschrijdingskans van 42 is $P(X \leq 42)$, want de verwachtingswaarde is $0,6 \cdot 80 = 48$ en $42 < 48$.

Verwerp H_0 als de overschrijdingskans van k kleiner dan of gelijk is aan $\frac{1}{2}\alpha$.

Voorbeeld

Een nutsbedrijf beweert dat 30% van de particuliere gasafnemers de energiebespaarwijzer invult. Bij een aselechte steekproef onder 400 afnemers blijken er 262 de bespaarwijzer niet in te vullen. Is er bij een significantieniveau van 5% aanleiding om de bewering van het nutsbedrijf in twijfel te trekken?

Uitwerking

X = het aantal afnemers dat de bespaarwijzer invult.

X is binomiaal verdeeld met $n = 400$ en $p = 0,3$.

$H_0: p = 0,3, H_1: p \neq 0,3$ en $\alpha = 0,05$

Het steekproefresultaat is $400 - 262 = 138$.

De overschrijdingskans van 138 is

$P(X \geq 138) = 1 - P(X \leq 137) =$

$1 - \text{binomcdf}(400, 0,3, 137) \approx 0,029$.

$P(X \geq 138) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding de bewering van het nutsbedrijf in twijfel te trekken.

$0,3 \cdot 400 = 120$ en
 $138 > 120$, dus de
 overschrijdingskans
 van 138 is $P(X \geq 138)$.

- 61** Judith toetst de zuiverheid van een geldstuk door het geldstuk 100 keer op te gooien.
- Waarom is dit een tweezijdige toets?
 - Tot welke conclusie komt ze omtrent de zuiverheid bij $\alpha = 0,05$ als er 59 keer kop boven komt?
- 62** Martin toetst de zuiverheid van een dobbelsteen. Hij neemt $\alpha = 0,05$. Tot welke conclusie komt hij als hij bij 150 worpen 12 zessen telt?

A 63 De rouletteschijf in figuur 14.37 is verdeeld in vijf even grote sectoren. Bij een controle wordt nagegaan of de roulette zuiver is.

- a Men draait de roulette 500 keer en telt hoe vaak het balletje op de sector met het cijfer 1 blijft liggen. Dit blijkt 115 keer te zijn. Is er bij een significantieniveau van 1% aanleiding te vermoeden dat de roulette niet zuiver is?
- b Men draait de roulette 600 keer en telt hoe vaak het balletje op de sectoren met de cijfers 4 en 5 blijft liggen. Bij welke aantallen zal de zuiverheid van de roulette niet in twijfel worden getrokken? Neem $\alpha = 0,01$.
- c Volgens Erik komt het balletje niet vaak genoeg op een sector met een even getal. Bij het 300 keer draaien gebeurt dit slechts 110 keer. Is er bij $\alpha = 0,025$ voldoende reden om het met Erik eens te zijn?



figuur 14.37

14

A 64 Een fabrikant beweert dat minstens 80% van de spaarlampen een levensduur van meer dan 8000 uur heeft. Een steekproef levert de volgende aantallen branduren op.

7831 8521 8471 9321 6827 5277 8711 9216
 5317 9997 5317 9612 8306 8711 8836 7189
 7723 9111 9991 9920 8618 8817 8171 8356
 7881 9158 8377 7583 9313 8271

Ga na of deze steekproef voldoende aanleiding geeft om de fabrikant in het gelijk te stellen bij een significantieniveau van 10%.

A 65 In Nederland wegen baby's bij de geboorte gemiddeld 3250 gram. Het geboortegewicht is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 425 gram.

Op consultatiebureaus rekent men baby's met een geboortegewicht van meer dan 4000 gram tot de categorie 'zwaar'.

- a Bereken de kans dat van 80 pasgeboren baby's er minstens vijf tot de categorie 'zwaar' behoren.

Medewerkers van het consultatiebureau in Appelscha beweren dat in hun omgeving het aantal zware baby's boven het landelijk gemiddelde ligt, want van de laatste 58 borelingen behoorden er maar liefst acht tot de categorie 'zwaar'.

- b Onderzoek of je bij een significantieniveau van 1% de medewerkers van het consultatiebureau gelijk kunt geven.

D 66 Bij een onderzoek naar klimaatverandering is gekeken naar de natste en de droogste jaren in de periode 1901-2000. Zie de tabel.

	droogste jaren		natste jaren	
	jaar	neerslag	jaar	neerslag
1	1921	434	1998	1051
2	1976	535	1966	1038
3	1959	536	1965	984
4	1933	551	1960	941
5	1904	556	1988	936
6	1929	563	1961	929
7	1996	579	1994	904
8	1971	589	2000	900
9	1953	590	1981	889
10	1907	599	1950	889

Als het klimaat niet zou veranderen, is het redelijk om te verwachten dat extreem natte en extreem droge jaren willekeurig over de eeuw zijn verdeeld. In het eindrapport schrijven de onderzoekers echter het volgende.

Negen van de tien natste jaren vallen in de periode na 1950.

De kans dat dit op toevallige variaties in de neerslag berust is verwaarloosbaar klein.

Bij het berekenen van de kans dat bij een aselechte verdeling van de 10 natste jaren in de periode 1901-2000 hiervan 9 in de periode 1951-2000 vallen, krijg je te maken met trekken zonder terugleggen.

$$\text{Deze kans is } \frac{\binom{50}{1} \cdot \binom{50}{9}}{\binom{100}{10}} \approx 0,007.$$

- a** Licht toe dat je hier inderdaad te maken hebt met het kansmodel van trekken zonder terugleggen en licht de berekende kans toe. Toon aan dat je bij een significantieniveau van 1% kunt concluderen dat extreem natte jaren na 1950 vaker voorkomen.

De onderzoekers namen in eerste instantie het volgende aan. Bij een willekeurige verdeling van de natste jaren geldt voor elk van de 10 natste jaren dat de kans 0,8 is dat dit jaar in de periode 1901-1980 valt. Zij kwamen met een tweezijdige binomiale toets tot de conclusie dat er sprake is van een significante afwijking met significantieniveau α .

- b** Voor welke waarden van α is dit het geval? Rond in het antwoord af op drie decimalen.
- c** Licht toe dat het gebruik van de binomiale verdeling bij vraag b niet correct is.

Een van de onderzoekers beweert dat na 1960 vaker extreem natte jaren voorkomen.

- d** Krijgt de onderzoeker bij significantieniveau $\alpha = 0,01$ gelijk?

Terugblik

Binomiale toets

Bij een binomiale toets heeft de nulhypothese de vorm $H_0: p = p_0$.

Is de toets linkszijdig, dan is $H_1: p < p_0$.

Is de toets rechtszijdig, dan is $H_1: p > p_0$.

Is de toets tweezijdig, dan is $H_1: p \neq p_0$.

Beslissingsvoorschrift bij significantieniveau α

Linkszijdig: Verwerp H_0 als $X \leq g$.

Kies g zo, dat $P(X \leq g) \leq \alpha$.

Rechtszijdig: Verwerp H_0 als $X \geq g$.

Kies g zo, dat $P(X \geq g) \leq \alpha$.

Tweezijdig: Verwerp H_0 als $X \leq g_l$ of als $X \geq g_r$.

Kies g_l en g_r zo, dat $P(X \leq g_l) \leq \frac{1}{2}\alpha$ én $P(X \geq g_r) \leq \frac{1}{2}\alpha$.

Bij een binomiale toets telt X bijvoorbeeld

- hoe vaak een bepaalde gebeurtenis optreedt in de steekproef
- hoeveel elementen van de steekproef een zekere eigenschap hebben.

Bij de tweezijdige binomiale toets met $H_0: p = \frac{1}{6}$ en $H_1: p \neq \frac{1}{6}$ met steekproeflengte 100 en significantieniveau $\alpha = 0,05$ vind je g_l en g_r als volgt.

$P(X \leq g_l) \leq 0,025$, dus $\text{binomcdf}(100, \frac{1}{6}, g_l) \leq 0,025$.

De GR geeft $\text{binomcdf}(100, \frac{1}{6}, 9) \approx 0,0213$ $\left. \begin{array}{l} \\ \text{binomcdf}(100, \frac{1}{6}, 10) \approx 0,0427 \end{array} \right\} g_l = 9$.

En $P(X \geq g_r) \leq 0,025$ geeft $1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,025$ ofwel $1 - \text{binomcdf}(100, \frac{1}{6}, g_r - 1) \leq 0,025$.

De GR geeft $1 - \text{binomcdf}(100, \frac{1}{6}, 23) \approx 0,0379$ $\left. \begin{array}{l} \\ 1 - \text{binomcdf}(100, \frac{1}{6}, 24) \approx 0,0217 \end{array} \right\} g_r - 1 = 24$, dus $g_r = 25$.

Conclusie: verwerp H_0 als $X \leq 9$ of als $X \geq 25$.

Overschrijdingskans

Is het steekproefresultaat bekend, dan is het verstandig om bij het toetsen met overschrijdingskansen te werken.

We gaan uit van een steekproef van lengte 50.

Bij $H_0: p = 0,6$ tegen $H_1: p \neq 0,6$ en $\alpha = 0,10$ is de overschrijdingskans van het steekproefresultaat 25 gelijk aan $P(X \leq 25)$.

Want $n = 50$ en $p = 0,6$, dus de verwachtingswaarde is $np = 50 \cdot 0,6 = 30$ en $25 < 30$.

$P(X \leq 25) = \text{binomcdf}(50, 0,6, 25) \approx 0,098 > \frac{1}{2}\alpha$.

Bij het steekproefresultaat 25 is er geen aanleiding H_0 te verwerpen.

De overschrijdingskans van het steekproefresultaat 34 is $P(X \geq 34)$.

Want $50 \cdot 0,6 = 30$ en $34 > 30$.

Diagnostische toets

14.1 Regressielijnen en correlatiecoëfficiënt

- 1 In de tabel staan de lengte en het gewicht van 10 leerlingen.

lengte X in cm	164	155	161	170	170	159	164	161	175	162
gewicht Y in kg	50	60	69	73	62	51	62	59	68	58

- a Voer de gegevens in op de GR en plot een spreidingsdiagram.
 b Stel van beide regressielijnen de formule op.
 c Vanaf welke lengte is het voorspelde gewicht meer dan 75 kg?
 d Vanaf welk gewicht is de voorspelde lengte meer dan 170 cm?
- 2 Van vijf auto's is het gewicht X in kg en het aantal kilometers Y dat de auto gemiddeld met één liter benzine kan rijden onderzocht. Uit het onderzoek kwamen de volgende gegevens:
 $\Sigma X = 5523$, $\Sigma Y = 60,7$, $\Sigma X^2 = 6\,567\,097$, $\Sigma Y^2 = 766,67$
 en $\Sigma XY = 63\,360,8$.
- a Stel de formule op van de regressielijn van Y op X .
 b Stel de formule op van de regressielijn van X op Y .
 c Geef een voorspelling van het aantal kilometers dat je gemiddeld met één liter benzine kunt rijden met een auto van 1000 kg.

- 3 Gegeven is de volgende tabel.

X	7,0	9,5	11,0	9,0	9,5	8,0	8,0	10,0
Y	169	171	178	160	174	192	168	182
Z	56	65	78	56	53	60	57	82

Bereken voor elk paar variabelen de pmcc. Welk paar vertoont de sterkste correlatie?

14.2 Regressievoorspellingen

- 4 Van de variabelen X en Y is gegeven $\bar{X} = 10$, $\bar{Y} = 12$, $\sigma_X = 2$ en $\sigma_Y = 1$.
- a Neem $r = 0,8$ en bereken de voorspelling van Y bij $X = 13$.
 b Voor welke r is $\hat{X} = 0,6Y + 2,8$?
- 5 Van de normaal verdeelde variabelen X en Y is $\mu_X = 100$, $\sigma_X = 10$, $\mu_Y = 20$, $\sigma_Y = 3$ en $r = 0,6$.
- a Stel de formule op van de regressielijn van Y op X .
 b Bereken de standaardschattingfout σ_d .
 c Bereken het 68%-betrouwbaarheidsinterval voor Y als $X = 85$.

14.3 Beslissen op grond van een steekproef

- 6** De hoeveelheid glas X die wekelijks in een glasbak wordt gegooid, is volgens de wethouder van milieuzaken in Leerdam normaal verdeeld met $\mu_X = 2200$ kg en $\sigma_X = 250$ kg. In een glasfabriek weegt men gedurende 20 weken elke week de inhoud van de glasbak om te controleren of het gemiddelde gewicht inderdaad 2200 kg is. Het gemiddelde wordt als afwijkend beschouwd als $\bar{X} \leq 2100$ of als $\bar{X} \geq 2300$.
- Bereken de kans dat het gemiddelde ten onrechte als afwijkend wordt beschouwd.
 - Stel dat het gemiddelde in werkelijkheid 2150 kg is. Bereken de kans dat men concludeert dat het gemiddelde niet afwijkend is.

14.4 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

- 7** Aardappelen worden verpakt in zakken. Het gewicht van een zak aardappelen is normaal verdeeld met $\sigma = 0,4$ kg. De leverancier beweert dat er 5 kg in een zak zit. Een consumentenorganisatie vermoedt dat dit minder is. Een steekproef van 50 zakken levert een gemiddeld gewicht per zak van 4,76 kg op. Kun je bij een significantieniveau van 2,5% zeggen dat de consumentenorganisatie gelijk krijgt?

14.5 Binomiale toetsen

- 8** Een rad van avontuur heeft 20 gelijke sectoren, genummerd van 1 tot en met 20. Om te controleren of het rad zuiver is, telt men hoe vaak de getallen 6 tot en met 11 worden aangewezen.
- Men draait het rad 100 keer.
Bij welke aantallen zal men de zuiverheid van het rad niet in twijfel trekken bij een significantieniveau van 0,05?
 - Men draait het rad 200 keer. Hierbij wordt 70 keer een van de getallen 6 tot en met 11 aangewezen.
Is er bij $\alpha = 0,01$ aanleiding te vermoeden dat het rad niet zuiver is?
- 9** Bij het vullen van pakken koffie levert de vulmachine pakken af waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1006 gram en een standaardafwijking van 5 gram.
- Toon aan dat de kans dat een pak koffie minder dan 1000 gram weegt 0,115 is.
- Na klachten over een te laag gewicht van de pakken, besluit de fabrikant de machine bij te stellen. Nadat de technische dienst de machine heeft bijgesteld blijken in een steekproef van 250 pakken er 18 minder dan 1000 gram te wegen.
- Is er bij een significantieniveau van 1% aangetoond dat het gemiddelde inderdaad is toegenomen?

In het nieuwe treinstation van Delft is het stadskantoor geïntegreerd. De treinen rijden onder het station door een tunnel. Omdat rijdende treinen trillingen veroorzaken die met name voor het stadskantoor erg vervelend zijn, is een trillingsanalyse uitgevoerd. Voor de plaatsen waar de draagconstructie van het stadskantoor op de tunnel rust, is een massa-veersysteem ontworpen. Hieruit bleek dat met een dempende mat trillingshinder door treinpassages kan worden voorkomen.

Wat leer je?

- Continue dynamische modellen opstellen.
- Werken met lijnelementenvelden en tekenoverzichten bij differentiaalvergelijkingen.
- Het aantonen van oplossingen van differentiaalvergelijkingen door substitutie.
- Lineaire en kwadratische differentiaalvergelijkingen van de eerste orde oplossen.
- Werken met differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, bijvoorbeeld bij gedempte trillingen.



Continue dynamische modellen

15



Voorkennis Discrete dynamische modellen en de tweede wet van Newton

Theorie A Discrete dynamische modellen

Op 1 december 2015 leven in een natuurgebied 550 wilde zwijnen. Per jaar neemt het aantal wilde zwijnen met 16% toe. Om de wildstand op peil te houden, worden er vanaf 2016 elk jaar eind november 80 wilde zwijnen afgeschoten.

Bij deze situatie is een *lineaire differentievergelijking van de eerste orde* op te stellen. Is Z_n het aantal wilde zwijnen n jaar na 1 december 2015, dan krijg je de recursieve formule $Z_n = 1,16Z_{n-1} - 80$ met $Z_0 = 550$.

Bij deze recursieve formule is een directe formule op te stellen. Je gebruikt daarbij de volgende regel.

De directe formule van $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ is $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$, waarbij $\bar{u}$ het dekpunt is en A een constante.

Om de directe formule op te stellen bij $Z_n = 1,16Z_{n-1} - 80$ met $Z_0 = 550$ ga je als volgt te werk.

- 1 Bereken het dekpunt $\bar{Z}$. Dit is de oplossing van de vergelijking $\bar{Z} = 1,16\bar{Z} - 80$, dus $\bar{Z} = 500$.
- 2 Stel de directe formule is $Z_n = A \cdot 1,16^n + 500$ en bereken A door te gebruiken dat $Z_0 = 550$.
Dit geeft $A \cdot 1,16^0 + 500 = 550$ ofwel $A + 500 = 550$, dus $A = 50$.
Zo krijg je $Z_n = 50 \cdot 1,16^n + 500$.

We bekijken hier steeds het aantal zwijnen uitsluitend op 1 december. Daarom hebben we te maken met een *discreet model*. Omdat er sprake is van een tijdafhankelijk proces, spreken we van een *discreet dynamisch model*.

Bij een recursieve formule van de vorm $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met $b \neq 0$ heb je te maken met een *lineaire differentievergelijking van de tweede orde*.

Bij het opstellen van de directe formule van de rij $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met startwaarden u_0 en u_1 krijg je te maken met de *karakteristieke vergelijking*. Zie het volgende werkschema.

Werkschema: het opstellen van de directe formule van de rij **$u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met startwaarden u_0 en u_1**

- 1** Substitueren van $u_n = g^n$ geeft de karakteristieke vergelijking $g^2 - ag - b = 0$ met $D = a^2 + 4b$.
- 2a** Is $D > 0$ dan zijn er twee reële oplossingen g_1 en g_2 en is de directe formule van de vorm $u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$.
- 2b** Is $D = 0$ dan is er één reële oplossing g en is de directe formule van de vorm $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$.
- 2c** Is $D < 0$ dan krijg je twee complexe oplossingen g_1 en g_2 en is de directe formule van de vorm $u_n = (A \cos(\varphi n) + B \sin(\varphi n)) \cdot g^n$. Hierbij is φ een argument van g_1 (of van g_2) en is g de modulus van g_1 .
- 3** Je berekent A en B met behulp van de startwaarden u_0 en u_1 .

VoorbeeldStel de directe formule op van de rij $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ met $x_0 = 3$ en $x_1 = 2$.*Uitwerking*Substitutie van $x_n = g^n$ geeft de karakteristieke vergelijking

$$g^2 - 3g - 4 = 0$$

$$(g + 1)(g - 4) = 0$$

$$g = -1 \vee g = 4$$

De directe formule is van de vorm $x_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 4^n$. $x_0 = 3$ geeft $A \cdot (-1)^0 + B \cdot 4^0 = 3$, dus $A + B = 3$. $x_1 = 2$ geeft $A \cdot (-1)^1 + B \cdot 4^1 = 2$, dus $-A + 4B = 2$.

$$A + B = 3$$

$$\begin{array}{r} -A + 4B = 2 \\ \hline 5B = 5 \end{array} +$$

$$\left. \begin{array}{l} B = 1 \\ A + B = 3 \end{array} \right\} A = 2$$

De directe formule is $x_n = 2 \cdot (-1)^n + 4^n$.

- 1**
- Stel de directe formule op.

a $u_n = 0,92u_{n-1} + 16$ met $u_0 = 250$

b $x_n = 4x_{n-1} + 12x_{n-2}$ met $x_0 = 5$ en $x_1 = 3$

c $v_n = 2\frac{1}{2}v_{n-1} - 1\frac{9}{16}v_{n-2}$ met $v_0 = 8$ en $v_1 = 12$

d $x_n = 4x_{n-1} - 8x_{n-2}$ met $x_0 = 1$ en $x_1 = 2$

Theorie B De tweede wet van Newton

Twee krachten F_1 en F_2 die tegengesteld zijn, leveren een resulterende kracht F_R op die te berekenen is met $F_R = F_1 - F_2$.

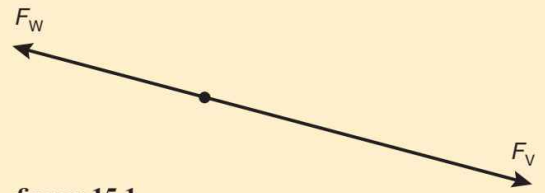
Heb je te maken met een voortstuwende kracht $F_V = 100$ N en een tegengestelde wrijvingskracht

$F_W = 80$ N, dan is de resulterende kracht

$$F_R = F_V - F_W = 100 - 80 = 20 \text{ N.}$$

De resulterende kracht veroorzaakt een versnelling. Volgens de tweede wet van Newton is $F = m \cdot a$ met F de resulterende kracht in N, m de massa in kg en a de versnelling in m/s^2 .

Is gegeven dat de massa 120 kg is, dan geldt $120a = 20$, dus $a = \frac{1}{6} \text{ m/s}^2$.



figuur 15.1

Voorbeeld

Een voorwerp ondergaat een constante voortstuwende kracht van 196 N. De wrijvingskracht neemt toe met de snelheid v volgens de formule $F_W = \frac{1}{4}v^2$ met v in m/s.

Bereken welke snelheid op den duur wordt bereikt.

Uitwerking

$$F_R = F_V - F_W = 196 - \frac{1}{4}v^2$$

$$F_R = 0 \text{ geeft } 196 - \frac{1}{4}v^2 = 0$$

$$\frac{1}{4}v^2 = 196$$

$$v^2 = 784$$

$$v = \sqrt{784} = 28$$

Op den duur is de snelheid 28 m/s.

- 2 Een voorwerp van 40 kg valt van zeer grote hoogte. Behalve de zwaartekracht $F_Z = 392$ N werkt op het voorwerp een wrijvingskracht F_W die gegeven is door $F_W = \frac{1}{6}v^2$, waarbij v de snelheid in m/s is.
 - a Bereken de versnelling van het voorwerp op het moment dat de snelheid 108 km/uur is.
 - b Met welke snelheid in km/uur komt het voorwerp op de grond?
- 3 Een scooter wordt voortbewogen door een constante kracht van 80 N. De luchtweerstand is gegeven door $F_L = \frac{1}{5}v^2$ en voor de rolweerstand van de wielen geldt $F_W = 5v$. Hierin is v in m/s. De massa van de scooter plus berijder is 220 kg.
 - a Bereken de versnelling bij een snelheid van 36 km/uur.
 - b Bereken in gehele km/uur de maximale snelheid van de scooter.

15.1 Dynamische modellen

1 Bram laat een kopje thee afkoelen en maakt een grafiek van het temperatuurverloop. Zie figuur 15.2. Uit de tabel volgt dat de gemiddelde snelheid waarmee de temperatuur op het interval $[0, 10]$ verandert gelijk is aan

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{50 - 90}{10 - 0} = -4 \text{ } ^\circ\text{C/minuut}.$$

a Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op de intervallen $[10, 20]$ en $[20, 30]$.

Bram neemt aan dat de snelheid $\frac{dT}{dt}$ waarmee de thee afkoelt evenredig is met het verschil in temperatuur tussen de thee en de omgeving, dus

$$\frac{dT}{dt} = c(T - 20).$$

Om c te berekenen neemt Bram aan dat

- de grafiek op elk van de genoemde intervallen een lijnstuk is
- de snelheid waarmee de temperatuur daalt op het tijdstip $t = 5$ gelijk is aan de gemiddelde snelheid op het interval $[0, 10]$
- de temperatuur op $t = 5$ gelijk is aan het gemiddelde van de temperaturen op de tijdstippen $t = 0$ en $t = 10$.

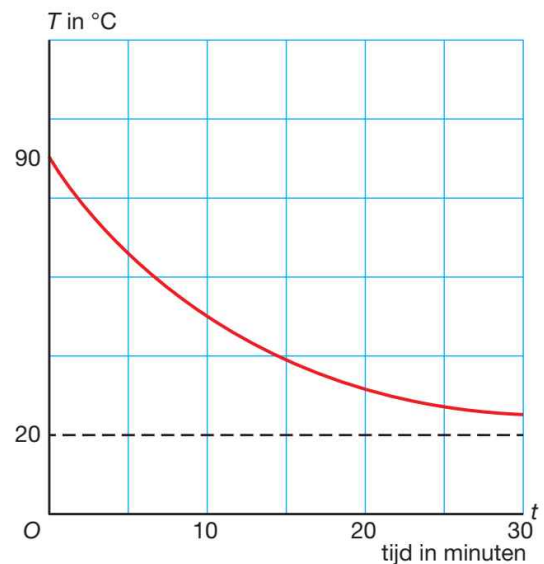
Zo krijgt hij $c(70 - 20) = -4$.

b Licht dit toe en bereken c .

c Bereken c door net zo'n berekening te maken op de intervallen $[10, 20]$ en $[20, 30]$.

d Licht toe dat de formule $\frac{dT}{dt} = -0,078T + 1,55$ het afkoelingsproces van het kopje thee goed beschrijft.

t	0	10	20	30
T	90	50	34	26



figuur 15.2 De temperatuur van de thee is aan het begin van de waarneming 90°C en nadert op den duur de kamertemperatuur van 20°C .

Theorie A Dynamische modellen opstellen

Een wiskundig model voor het afkoelingsproces van opgave 1

wordt gegeven door de formule $\frac{dT}{dt} = -0,078(T - 20)$ ofwel

$\frac{dT}{dt} = -0,078T + 1,55$. Omdat de snelheid waarmee de temperatuur T verandert afhangt van T , noemen we dit model een dynamisch model. De formule geeft het verband tussen T en de snelheid $\frac{dT}{dt}$ waarmee T verandert.

Het proces van de afkoeling van de thee wordt pas volledig

beschreven als je behalve de formule $\frac{dT}{dt} = -0,078T + 1,55$

ook nog bij één waarde van t de waarde van T vermeldt.

Is dus bij het dynamische model voor de temperatuur ook een beginwaarde bekend, dan ligt het temperatuurverloop vast.

Voorbeelden van dynamische modellen zijn $\frac{dA}{dt} = -0,05A$,

$$\frac{dv}{dt} = 5 - \frac{2}{5}v^2 \text{ en } \frac{dN}{dt} = N(1 - N).$$

In het volgende voorbeeld wordt het dynamische model

$\frac{dT}{dt} = c(T - T_{\text{omgeving}})$ gebruikt. Hierin is T de temperatuur van

een voorwerp, t de tijd en c de evenredigheidsconstante.

Dit model gebruik je ook in de opgaven 3 en 4.

Voorbeeld

Een voorwerp heeft op $t = 0$ een temperatuur van 200°C .

Dit voorwerp koelt af in een omgeving waar de temperatuur constant op 15°C wordt gehouden. Na 10 seconden is de temperatuur van het voorwerp gedaald tot 194°C .

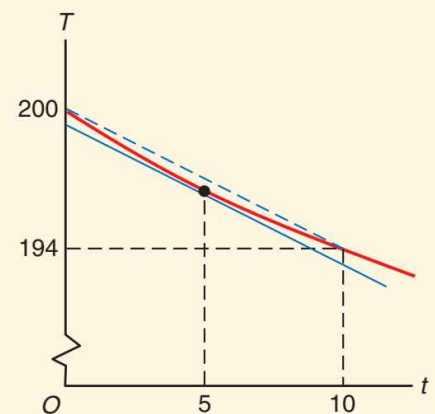
Stel een dynamisch model op bij de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ van het voorwerp.

Aanpak

Gebruik het model $\frac{dT}{dt} = c(T - T_{\text{omgeving}})$ met t in seconden.

Ga er voor de berekening van c van uit

- dat de snelheid waarmee de temperatuur daalt op $t = 5$ gelijk is aan de gemiddelde snelheid waarmee de temperatuur in de eerste 10 seconden daalt
- dat de temperatuur op $t = 5$ het gemiddelde is van de temperaturen op $t = 0$ en $t = 10$.



Uitwerking

$$\frac{dT}{dt} = c(T - 15)$$

$$\text{Op } t = 5 \text{ is } T \approx \frac{200 + 194}{2} = 197^\circ\text{C} \text{ en } \frac{dT}{dt} \approx \frac{194 - 200}{10} = -0,6^\circ\text{C/s.}$$

$$\text{Dit geeft } c \cdot (197 - 15) \approx -0,6, \text{ dus } c \approx \frac{-0,6}{182} \approx -0,0033.$$

$$\text{Dus } \frac{dT}{dt} = -0,0033(T - 15) \text{ met } T \text{ in } ^\circ\text{C} \text{ en } t \text{ in seconden.}$$

Het model $\frac{dT}{dt} = -0,0033(T - 15)$ van het voorbeeld kan worden gebruikt om op elk willekeurig moment de temperatuur te berekenen. Hoe dat gaat zie je verderop in het hoofdstuk.

Omdat, in tegenstelling tot een discreet dynamisch model, dit model voor elke waarde van t een uitkomst voor T oplevert, spreekt men van een **continu dynamisch model**.

Een continu dynamisch model is een formule waarbij de snelheid $\frac{dG}{dt}$ waarmee een grootte G verandert is uitgedrukt in G .

15

R 2 In de uitwerking van het voorbeeld is vermeld ‘met t in seconden’.

- Waarom is deze vermelding nodig?
- Hoe verandert in het model de evenredigheidsconstante als t in minuten wordt gekozen?

3 Een ei wordt op $t = 0$ uit een pannetje kokend water gehaald en onder een straal water van 12°C gehouden. In 10 seconden daalt de temperatuur van het ei van 100°C tot 94°C . Stel een dynamisch model op bij de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ van het ei

- met t in seconden
- met t in minuten.

4 Een glas koude melk wordt in een kamer gezet waar de temperatuur 21°C is. De temperatuur van de melk wordt regelmatig gemeten. Zie de tabel.

t in minuten	0	5	10	15	20	30	60
T in $^\circ\text{C}$	7	9,8	12,1	13,9	15,3	17,4	20,1

- Gebruik het tijdsinterval $[0, 5]$ om een dynamisch model bij T op te stellen.
- Controleer het opgestelde model door enkele andere intervallen te gebruiken.

5 Een bacteriecultuur bevat 10^9 bacteriën op het tijdstip $t = 0$. De snelheid waarmee de cultuur groeit is evenredig met het aantal aanwezige bacteriën. In de eerste minuut na $t = 0$ komen er $4 \cdot 10^6$ bacteriën bij. Stel een dynamisch model op bij het aantal bacteriën N . Neem t in uren.

- 6** In een vat bevindt zich 1000 liter water waarin 5 kg zout is opgelost. Vanaf $t = 0$ stroomt er aan de bovenzijde per seconde 0,5 liter water met een zoutconcentratie van 1 gram per liter het vat in. Aan de onderzijde verlaat per seconde 0,5 liter zoutoplossing het vat. Ga ervan uit dat de binnenstromende zoutoplossing zich meteen volledig mengt met de inhoud van het vat. Stel een dynamisch model op bij de hoeveelheid zout Z in het vat.



- A 7** Een automobilist zet zijn versnelling in de vrijloop. De snelheid $\frac{dv}{dt}$ waarmee de snelheid vanaf dat moment verandert is evenredig met de snelheid v . Na 10 seconden is zijn snelheid 30 m/s en na 16 seconden 24 m/s. Stel een dynamisch model op bij de snelheid v in m/s van de auto
- met t in seconden
 - met t in minuten.

- D 8** Voor de groei van zonnebloemen geldt het dynamische model $\frac{dH}{dt} = aH\left(1 - \frac{H}{b}\right)$. Hierin is H de hoogte in cm en t de tijd in dagen.
- De getallen a en b hangen af van een aantal externe factoren zoals weersomstandigheden, bodemsoort en de soort zonnebloem.
- Voor welke waarden van a en b geldt dat de maximale hoogte van de zonnebloemen 300 cm is?
 - Voor welke a en b geldt dat zonnebloemen van 10 cm hoogte groeien met 0,5 cm per dag en zonnebloemen van 50 cm hoogte groeien met 3 cm per dag?

- O 9** Een Solex wordt aangedreven door een motor die een constante voortstuwende kracht F_V van 50 N levert. De wrijvingskracht F_W werkt in tegengestelde richting en is in grootte evenredig met het kwadraat van de snelheid, dat wil zeggen $F_W = c \cdot v^2$. Hierbij is F_W in N en v in m/s. De Solex kan niet harder dan 36 km/uur. Uit de gegevens volgt dat de evenredigheidsconstante c gelijk is aan 0,5.
- Toon dit aan.
 - Toon aan dat op het moment dat de snelheid van de Solex 24 km/uur is de resulterende kracht F_R gelijk is aan 27,8 N.



Theorie B Dynamische modellen bij beweging

Om bij bewegingen een dynamisch model op te stellen maak je gebruik van de tweede wet van Newton: $F = m \cdot a$. Hierin is F de kracht in N die een voorwerp ondervindt, m de massa van het voorwerp in kg en $a = \frac{dv}{dt}$ de versnelling van het voorwerp in m/s^2 .

Uit $F = m \cdot a$ en $a = \frac{dv}{dt}$ volgt $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$.

In situaties waarin F een functie is van v heb je te maken met een dynamisch model.

In het voorbeeld neemt de wrijvingskracht toe bij oplopende snelheid. Omdat de voortstuwende kracht F_{motor} constant is, nadert de snelheid op den duur tot een grenswaarde. In de grafiek van v als functie van t geeft dit een horizontale asymptoot.

15

Voorbeeld

Een boot van 200 kg wordt vanaf $t = 0$ voortbewogen door de kracht $F_{\text{motor}} = 120$ N. De boot ondervindt van het water een wrijvingskracht F_{w} in N die evenredig is met het kwadraat van de snelheid v in m/s van de boot. De evenredigheidsconstante is 10 en de beginsnelheid is $v(0)$.

- Stel een dynamisch model op bij de snelheid van de boot.
- Schets de grafieken van v als functie van de tijd t voor $v(0) = 1$ en voor $v(0) = 5$.

Aanpak

- Gebruik $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$.
- Stel eerst de formule op van de horizontale asymptoot. Gebruik dat op den duur de snelheid niet meer verandert, dus dat $\frac{dv}{dt} = 0$.

Uitwerking

- Resulterende kracht $F_{\text{R}} = F_{\text{motor}} - F_{\text{w}} = 120 - 10v^2$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{120 - 10v^2}{200} = 0,6 - 0,05v^2$$

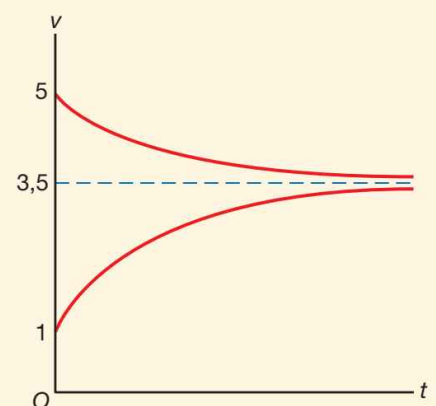
Dus $\frac{dv}{dt} = 0,6 - 0,05v^2$ met v in m/s en t in seconden.

- $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $0,6 - 0,05v^2 = 0$
 $0,05v^2 = 0,6$
 $v^2 = 12$
 $v = \sqrt{12} \approx 3,5$

De asymptoot is de lijn $v = \sqrt{12}$.

$\frac{dv}{dt} > 0$ voor $v < \sqrt{12}$, dus de grafiek van v met $v(0) = 1$ is stijgend.

$\frac{dv}{dt} < 0$ voor $v > \sqrt{12}$, dus de grafiek van v met $v(0) = 5$ is dalend.



R 10 Zie het voorbeeld. Licht toe hoe je de asymptoot van de grafiek van de snelheid ook zonder het dynamische model kunt vinden.

- 11** Een parachutist met een massa van 90 kg springt op $t = 0$ uit een helikopter. Op de parachutist werken tijdens de vrije val de zwaartekracht F_Z van 882 N en de wrijvingskracht F_W met $F_W = \frac{1}{4}v^2$. Hierbij is F_W in N en v de valsnelheid in m/s.
- Stel een dynamisch model op bij de snelheid van de parachutist.
 - Schets de grafiek van v als functie van t .



- 12** Een snorfiets wordt voortbewogen door een constante kracht van 50 N. De luchtweerstand is gegeven door $F_L = \frac{1}{4}v^2$. Voor de rolweerstand van de wielen geldt $F_W = 4v$. Hierbij zijn F_L en F_W in N en is v de snelheid in m/s. Snorfietser en snorfiets samen hebben een massa van 125 kg. De beginsnelheid is $v(0)$.
- Stel een dynamisch model op bij de snelheid van de snorfiets.
 - Kan deze snorfiets harder dan de wettelijk toegestane snelheid van 25 km/uur?
 - Bereken de versnelling van de snorfiets op het moment dat de snelheid 5 m/s is.
 - Schets de grafiek van v als functie van t voor $v(0) = 0$ m/s.
 - Op een zeker moment rijdt de snorfietser met een snelheid van 15 m/s van een hoge brug af. Schets de grafiek van v als functie van t vanaf het moment dat de weg weer vlak is.

- A 13** De Koninklijke Marine bezit twee M-fregatten. De massa van een M-fregat is 3500 ton. Het 150 meter lange schip wordt voortgestuwd door gasturbines met een maximale stuwkracht van 595 000 N. De wrijvingsweerstand van het water in N is evenredig met het kwadraat van de snelheid v in m/s. De evenredigheidsconstante is 2625. Op $t = 0$ is de snelheid van het schip $v(0)$ m/s.
- Stel een dynamisch model op bij de snelheid van het schip in het geval de motoren op volle kracht werken.
 - De grafiek van v als functie van de tijd t heeft een asymptoot. Stel de formule op van deze asymptoot. Rond af op één decimaal.

D 14 Zie opgave 13.

In plaats van vooruit kan de schroef van het schip ook achteruit werken. In dat geval werkt de kracht van 595 000 N in achterwaartse richting. Als hiervoor wordt gekozen, begint het schip af te remmen en na verloop van tijd zal het schip zelfs achteruit gaan varen. Neem aan dat de grootte van de wrijvingskracht bij achteruit varen twee keer zo groot is als bij vooruit varen met dezelfde snelheid.

- Stel een dynamisch model op bij de snelheid van het schip tijdens het afremmen.
- Stel een dynamisch model op bij de snelheid van het schip tijdens het achteruit varen.
- Een M-fregat vaart met $v(0) = 0$ op volle kracht vooruit totdat bijna de maximale snelheid is bereikt. Vervolgens worden de motoren op volle kracht achteruit gezet.

Maak een schets van de grafiek van v als functie van t .

Gebruik bij je schets de beide asymptoten van v .



Terugblik

Dynamische modellen

Is bij een proces de snelheid waarmee een grootte verandert te schrijven als functie van die grootte, dan is hierbij een dynamisch model op te stellen.

Een voorbeeld van een dynamisch model is $\frac{dT}{dt} = -0,04T + 0,88$ met t de tijd en T de temperatuur. Je hebt met een continu dynamisch model te maken, omdat dit model kan worden gebruikt om voor elk moment de temperatuur te berekenen. Andere voorbeelden van continue dynamische modellen zijn $\frac{dv}{dt} = 100v - \frac{1}{5}v^2$ en $\frac{dy}{dt} = ay\left(100 - \frac{y}{b}\right)$ met a en b constanten.

Het model $\frac{dT}{dt} = c(T - T_{\text{omgeving}})$

Wordt een klein voorwerp in een omgeving met een andere temperatuur geplaatst, dan is de snelheid waarmee de temperatuur van dat voorwerp verandert evenredig met het verschil tussen de temperatuur van het voorwerp en de omgevingstemperatuur. Hiermee kan een dynamisch model worden opgesteld.

Is T de temperatuur van een voorwerp in een omgeving van 18°C , dan volgt hieruit het dynamische model $\frac{dT}{dt} = c \cdot (T - 18)$. Is verder gegeven dat op tijdstip $t = 0$ de temperatuur $T = 65^\circ\text{C}$ is en na 10 minuten de temperatuur 57°C , dan kan hiermee de evenredigheidsconstante c berekend worden. Neem hierbij aan dat op $t = 5$ geldt $T = \frac{65 + 57}{2} = 61^\circ\text{C}$ en dat de snelheid waarmee T verandert op $t = 5$ gelijk is aan $\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{57 - 65}{10 - 0} = -0,8^\circ\text{C/minuut}$.

Dit geeft $c = \frac{-0,8}{61 - 18} \approx -0,0186$.

Het dynamische model is dus $\frac{dT}{dt} = -0,0186(T - 18)$ ofwel $\frac{dT}{dt} = -0,0186T + 0,335$.

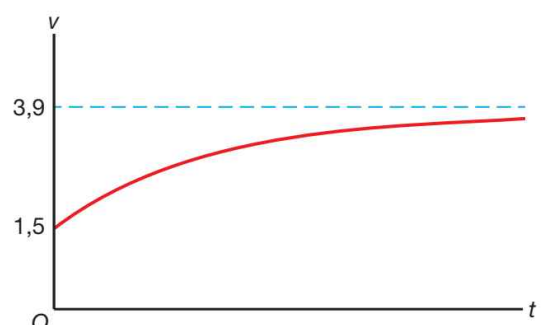
De tweede wet van Newton

De tweede wet van Newton is $F = m \cdot a$.

Uit $F = m \cdot a$ volgt $a = \frac{F}{m}$ en omdat $a = \frac{dv}{dt}$ is $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$.

Geldt voor een voorwerp dat $F = 150 - 10v^2$ en $m = 200$ kg, dan ontstaat het dynamische model $\frac{dv}{dt} = \frac{150 - 10v^2}{200} = 0,75 - 0,05v^2$. Hierbij is t in seconden en v in m/s.

De snelheid nadert op den duur een grenswaarde die je kunt berekenen met $\frac{dv}{dt} = 0$. Dit geeft $0,05v^2 = 0,75$ dus $v = \sqrt{15} \approx 3,9$. Dus de horizontale asymptoot is de lijn $v = \sqrt{15}$. Hiernaast is de grafiek van v als functie van t geschetst voor $v(0) = 1,5$.



15.2 Differentiaalvergelijkingen

O15 Gegeven is de formule $\frac{dy}{dt} = -y + t - 3$.

- Bereken $\frac{dy}{dt}$ in het punt $(t, y) = (0, 2)$. Doe dit ook voor de punten $(4, 1)$, $(-2, 2)$ en $(4, -1)$.
- Teken in een Oty -assenstelsel de punten waarvoor geldt $\frac{dy}{dt} = 0$.
- Geef in de figuur van vraag b de punten aan waarvoor geldt $\frac{dy}{dt} < 0$.

15

Theorie A Lijnelementenveld en oplossingskrommen

Omdat in de vergelijking $\frac{dy}{dt} = -y + t - 3$ van opgave 15 het

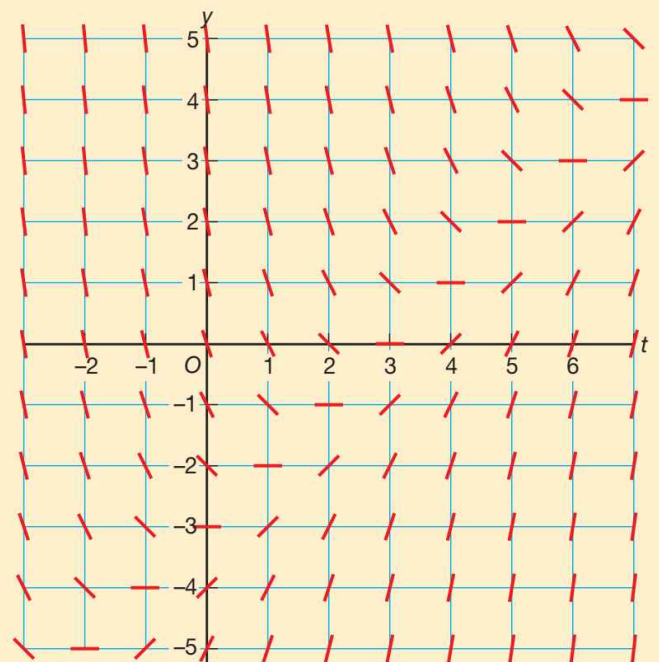
differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dt}$ voorkomt, heet deze vergelijking een

differentiaalvergelijking. Omdat hierin alleen de eerste afgeleide voorkomt, is dit een **differentiaalvergelijking van de eerste orde**.

Een formule die het verband geeft tussen $\frac{dy}{dt}$ en t en/of y is een **differentiaalvergelijking van de eerste orde**.

Bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -y + t - 3$ hoort bij elk punt $A(t, y)$ de richtingscoëfficiënt $\left[\frac{dy}{dt}\right]_A$.

We geven deze richtingscoëfficiënt aan met een lijnstukje. Zo'n lijnstukje heet een **lijnelement** en een tekening met een aantal lijnelementen heet een **lijnelementenveld**. In figuur 15.3 zie je een lijnelementenveld bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -y + t - 3$.

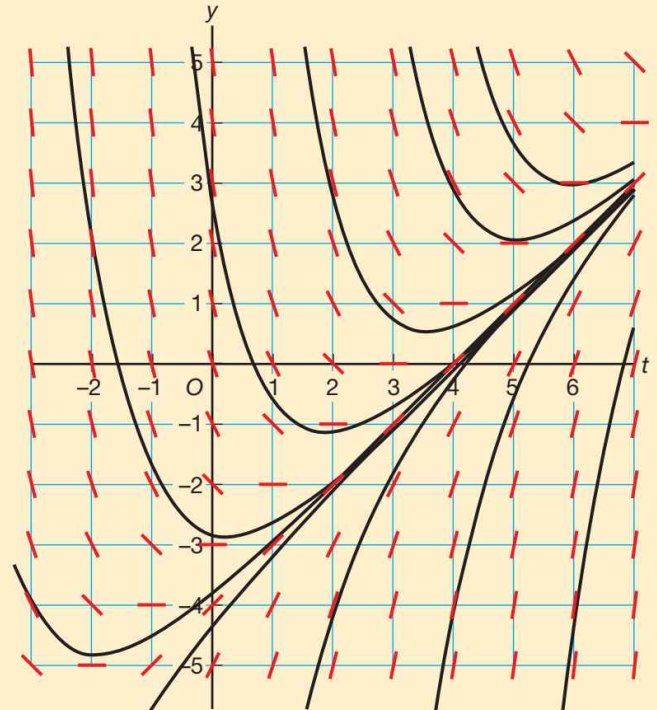


figuur 15.3

Is één punt (t, y) gegeven dan kun je in het lijnelementenveld de grafiek van y als functie van t schetsen. Je maakt daarbij gebruik van de lijnelementen. Zo'n grafiek heet een **oplossingskromme van de differentiaalvergelijking**. De formule die bij een oplossingskromme hoort is een **oplossing van de differentiaalvergelijking**. De oplossingen van een differentiaalvergelijking zijn dus geen getallen maar formules.

In figuur 15.4 zie je een lijnelementenveld bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -y + t - 3$ met een aantal oplossingskrommen. Al deze oplossingskrommen hebben een scheve asymptoot. De vergelijking hiervan is $y = t - 4$. Deze scheve asymptoot is zelf ook een oplossingskromme van de differentiaalvergelijking.

Om een lijnelementenveld te tekenen, bereken je in veel punten eerst de bijbehorende $\frac{dy}{dt}$. Soms valt de hoeveelheid rekenwerk echter mee, zoals in het voorbeeld.



figuur 15.4

Voorbeeld

Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{5}y^2$.

- Teken bij de differentiaalvergelijking het lijnelementenveld voor de roosterpunten (t, y) met $0 \leq t \leq 6$ en $0 \leq y \leq 5$ en schets de oplossingskrommen door $(0, 1)$ en $(1, 4)$.
- Stel de formule op van de lijn l die de oplossingskromme door $(3, 1)$ in dit punt raakt.
- De lijn $y = -10t + 20$ raakt oplossingskrommen. Bereken algebraïsch de coördinaten van de raakpunten.

Aanpak

- Merk op dat $\frac{dy}{dt}$ alleen van y afhangt. Alle richtingscoëfficiënten van lijnelementen op dezelfde horizontale lijn zijn dus gelijk.
- Gebruik dat voor het raakpunt geldt $\frac{dy}{dt} = -10$ en $y = -10t + 20$.

Uitwerking

a

y	0	1	2	3	4	5
$\frac{dy}{dt}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	0

b Stel $l: y = at + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dt} \right]_{(3,1)} = \frac{4}{5}$.

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{4}{5}t + b \\ \text{door } (3, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{4}{5} \cdot 3 + b &= 1 \\ 2\frac{2}{5} + b &= 1 \\ b &= -1\frac{2}{5} \end{aligned}$$

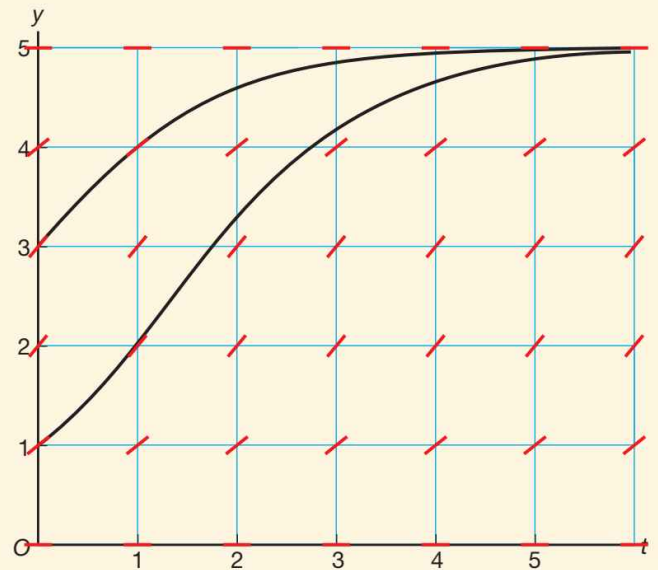
Dus $l: y = \frac{4}{5}t - 1\frac{2}{5}$.

c $\frac{dy}{dt} = -10$ geeft $y - \frac{1}{5}y^2 = -10$

$$\begin{aligned} y^2 - 5y - 50 &= 0 \\ (y + 5)(y - 10) &= 0 \\ y &= -5 \vee y = 10 \end{aligned}$$

$y = -5$ geeft $-10t + 20 = -5$, dus $t = 2\frac{1}{2}$ en dit geeft raakpunt $(2\frac{1}{2}, -5)$.

$y = 10$ geeft $-10t + 20 = 10$, dus $t = 1$ en dit geeft raakpunt $(1, 10)$.



15

16 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y - 2$.

a Teken bij de differentiaalvergelijking het lijnelementenveld voor de roosterpunten (t, y) met $0 \leq t \leq 5$ en $-1 \leq y \leq 5$.

b Stel de formule op van de lijn l die de oplossingskromme door $(2, 3)$ in dit punt raakt.

c De lijn $y = 3t - 7$ raakt een oplossingskromme in het punt A . Bereken algebraïsch de coördinaten van A .

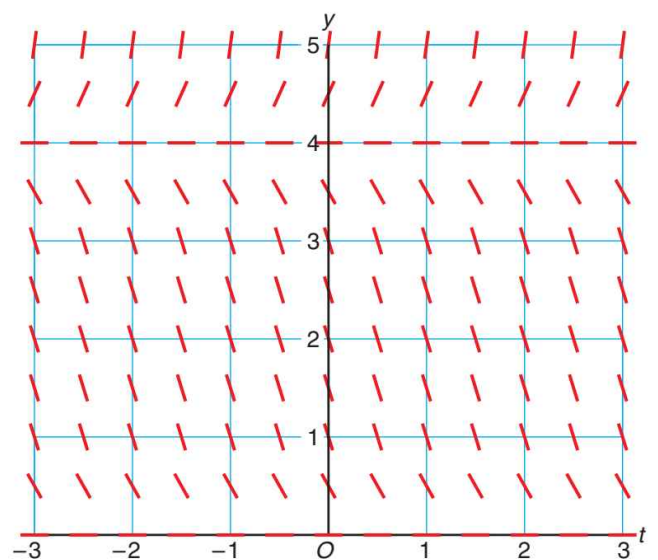
17 Het lijnelementenveld in figuur 15.5 hoort bij een van de volgende differentiaalvergelijkingen. Bij welk van de vier hoort het? Licht je antwoord toe.

I $\frac{dy}{dt} = y - 4$

II $\frac{dy}{dt} = 4y - y^2$

III $\frac{dy}{dt} = y^2 - 4y$

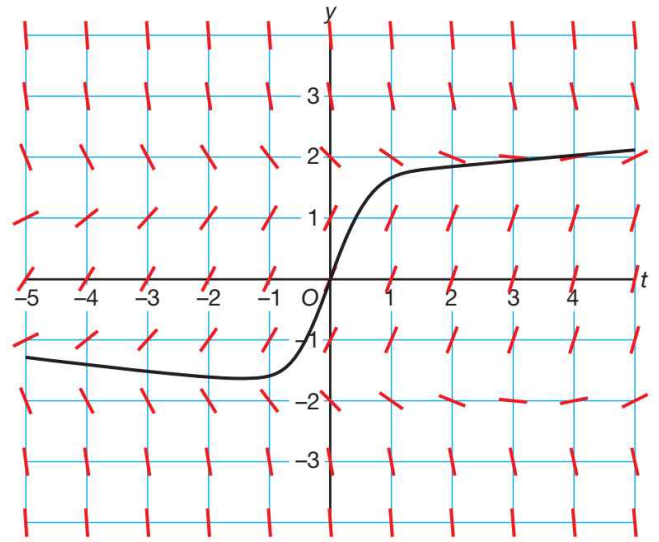
IV $\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{4}y^2$



figuur 15.5

18 [**▶ WERKBLAD**] Het lijnelementenveld in figuur 15.6 hoort bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{10}t - y^2 + 3$. In dit lijnelementenveld is de oplossingskromme door $(0, 0)$ getekend.

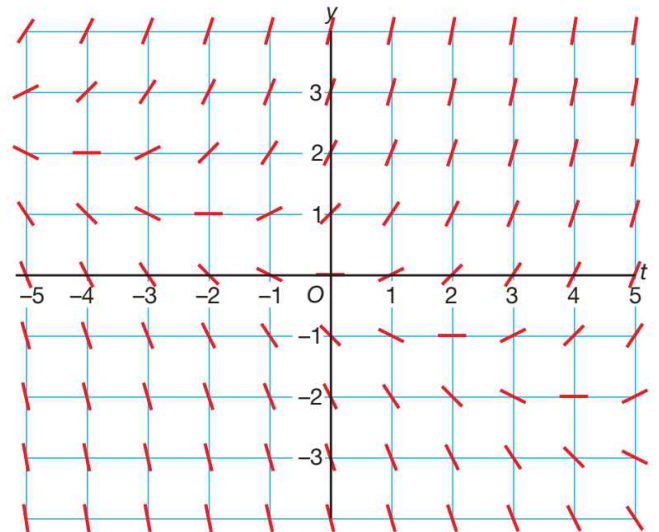
- Schets de oplossingskrommen die gaan door de punten $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$ en $(0, -3)$.
- De lijn $k: y = 3t$ raakt een oplossingskromme van de differentiaalvergelijking behalve in de oorsprong ook nog in het punt A . Bereken algebraïsch de coördinaten van A .
- Er zijn twee oplossingskrommen met een top voor $t = 10$. Bereken van beide toppen de exacte y -coördinaat.
- Stel een vergelijking op van de kromme die door de toppen van de oplossingskrommen gaat.



figuur 15.6

A 19 [**▶ WERKBLAD**] Het lijnelementenveld in figuur 15.7 hoort bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t + y$.

- Schets de oplossingskrommen die gaan door de punten $(0, 3)$, $(0, -3)$ en $(3, 0)$.
- De bij vraag a getekende oplossingskrommen hebben een scheve asymptoot. Geef de formule van deze asymptoot.
- De lijn $k: y = 2t + 7$ raakt een oplossingskromme van de differentiaalvergelijking in het punt A . Bereken algebraïsch de coördinaten van A .



figuur 15.7

O 20 Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5).$$

- Schets de grafiek van $f(y) = (y-1)(y-3)(y-5)$.
- Licht toe dat je aan de grafiek van $f(y) = (y-1)(y-3)(y-5)$ kunt zien dat $\frac{dy}{dt} > 0$ voor alle punten (t, y) met $1 < y < 3$.
- Voor welke waarden van y is $\frac{dy}{dt} < 0$?
- Licht toe dat $y = 3$ een oplossingskromme is.

Theorie B Tekenoverzicht bij differentiaalvergelijkingen

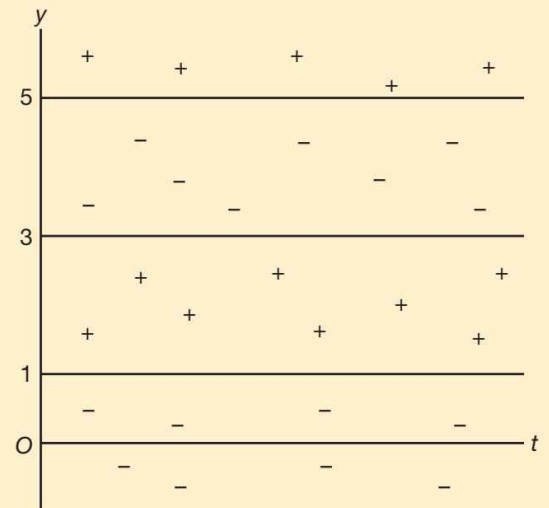
In opgave 20 heb je gezien dat bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5)$ in de punten

(t, y) met $1 < y < 3$ geldt dat $\frac{dy}{dt} > 0$. In figuur 15.8 is dit aangegeven met de plustekens. Ook voor $y > 5$ is $\frac{dy}{dt}$ positief. En voor $y < 1$ en $3 < y < 5$ geldt $\frac{dy}{dt} < 0$.

Dit is aangegeven met de mintekens.

Zo ontstaat het **tekenoverzicht van de differentiaalvergelijking**.

In de gebieden waar de plustekens staan zijn de oplossingskrommen stijgend en in gebieden waar de mintekens staan zijn de oplossingskrommen dalend.



figuur 15.8

Je kunt als volgt begrijpen dat de lijn $y = 3$ asymptoot is van oplossingskrommen van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5)$.

Omdat bij deze differentiaalvergelijking door elk punt van het vlak precies één oplossingskromme gaat en omdat $y = 3$ een oplossingskromme is, gaat elke andere oplossingskromme niet meer door een punt van de lijn $y = 3$.

De oplossingskromme door het punt $(0, 2)$ is stijgend en kan de lijn $y = 3$ dus niet bereiken, maar nadert wel onbeperkt tot deze lijn. Daarom is de lijn $y = 3$ horizontale asymptoot van de oplossingskromme door $(0, 2)$.

Verder lees je in het tekenoverzicht af:

- alle oplossingskrommen door punten (t, y) met $1 < y < 3$ zijn stijgend en hebben de lijn $y = 3$ als horizontale asymptoot
- alle oplossingskrommen door punten (t, y) met $3 < y < 5$ zijn dalend en hebben de lijn $y = 3$ als horizontale asymptoot
- alle oplossingskrommen door punten (t, y) met $y < 1$ zijn dalend
- alle oplossingskrommen door punten (t, y) met $y > 5$ zijn stijgend.

Omdat $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5)$ voor $y > 5$ stijgend is, is elke oplossingskromme door (t, y) met $y > 5$ toenemend stijgend.

Voorbeeld

Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f_p(y)$ met

$$f_p(y) = -y^2 + 4y + p.$$

- Voor welke waarden van $y(0)$ hebben de oplossingskrommen van $\frac{dy}{dt} = f_p(y)$ een horizontale asymptoot?
- Voor welke waarden van p zijn alle oplossingskrommen dalend?
- Onderzoek of er een waarde van p bestaat zo, dat de lijn $y = 3$ een horizontale asymptoot van oplossingskrommen is.

Aanpak

- Maak een tekenoverzicht van de differentiaalvergelijking.
- Dalend, dus $\frac{dy}{dt} < 0$ voor elke y . Omdat $\frac{dy}{dt} = -y^2 + 4y + p$ moet de discriminant van $\frac{dy}{dt}$ kleiner zijn dan 0.
- $y = 3$ is horizontale asymptoot, dus onderzoek of er een waarde van p is waarvoor geldt
 - $\frac{dy}{dt} = 0$ voor $y = 3$
 - $\frac{dy}{dt} < 0$ voor y iets groter dan 3 en/of $\frac{dy}{dt} > 0$ voor y iets kleiner dan 3.

Uitwerking

- $f_5(y) = 0$ geeft $-y^2 + 4y + 5 = 0$
 $y^2 - 4y - 5 = 0$
 $(y + 1)(y - 5) = 0$
 $y = -1 \vee y = 5$

De lijn $y = 5$ is horizontale asymptoot van de oplossingskrommen met $-1 < y(0) < 5 \vee y(0) > 5$.

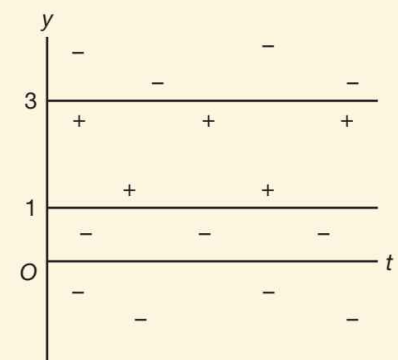
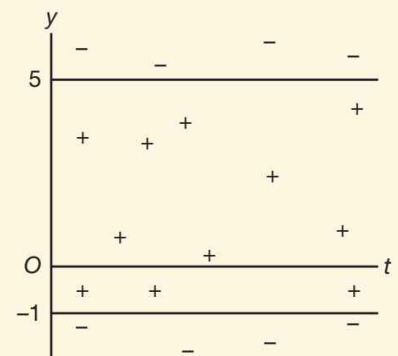
- De oplossingskrommen zijn dalend als $f_p(y) < 0$ voor elke waarde van y . Hieruit volgt dat voor de discriminant van $\frac{dy}{dt} = -y^2 + 4y + p$ geldt $D < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} D = 16 + 4p \\ D < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 16 + 4p < 0 \\ 4p < -16, \text{ dus } p < -4 \end{array}$$

Dus voor $p < -4$ zijn alle oplossingskrommen dalend.

- $f_p(y) = 0$ voor $y = 3$ geeft $-9 + 12 + p = 0$, dus $p = -3$.
 $f_{-3}(y) = 0$ geeft $-y^2 + 4y - 3 = 0$
 $y^2 - 4y + 3 = 0$
 $(y - 1)(y - 3) = 0$
 $y = 1 \vee y = 3$

Voor de oplossingskrommen die gaan door de punten (t, y) met $1 < y < 3 \vee y > 3$ is de lijn $y = 3$ horizontale asymptoot als $p = -3$.



R 21 In de theorie onder aan bladzijde 121 staat

Omdat $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-3)(y-5)$ voor $y > 5$ stijgend is,
is elke oplossingskromme door (t, y) met $y > 5$ toenemend
stijgend.

Licht deze bewering toe.

22 Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f_p(y)$

met $f_p(y) = y^2 - py + 3$.

- a Voor welke waarden van $y(0)$ hebben de oplossingskrommen van $\frac{dy}{dt} = f_4(y)$ een horizontale asymptoot?
- b Voor welke waarden van p zijn alle oplossingskrommen stijgend?
- c Onderzoek of er een waarde van p bestaat zo, dat de lijn $y = 4$ een horizontale asymptoot van oplossingskrommen is.

23 Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \sin(y)$.

- a Schets in het tekenoverzicht van de differentiaalvergelijking de oplossingskrommen met $y(0) = -1$, $y(0) = 1$ en $y(0) = 6$.
- b Geef de formule van de horizontale asymptoot van de oplossingskromme met $y(0) = 50$. Licht je antwoord toe.
- c Stel de formule op van de lijn l die de oplossingskromme door $(4, \frac{1}{6}\pi)$ in dit punt raakt.

A 24 Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = (y^2 - 9)\cos(y).$$

- a Schets in het tekenoverzicht van de differentiaalvergelijking de oplossingskrommen met $y(0) = -1$, $y(0) = 2$ en $y(0) = 4$.
- b Voor welke waarden van $y(0)$ is de lijn $y = -\frac{1}{2}\pi$ asymptoot van de bijbehorende oplossingskromme?
- c Een oplossingskromme raakt de lijn k in het punt $(6, 0)$. Stel de formule op van k .

A 25 Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f_p(y)$

met $f_p(y) = -y^2 + py - 3$.

- a Voor welke waarden van p is de oplossingskromme met $y(0) = 5$ stijgend?
- b Bereken voor welke p een oplossingskromme de lijn $k: y = 2t + 4$ raakt in het punt $(-1\frac{1}{2}, 1)$.
- c Onderzoek of er waarden van p zijn waarvoor alle oplossingskrommen dalend zijn.

Terugblik

Differentiaalvergelijkingen

Een formule die het verband geeft tussen $\frac{dy}{dt}$ en t en/of y heet een differentiaalvergelijking.

Voorbeelden zijn $\frac{dy}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = t - y$ en $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y + t + 2$.

Bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ hoort bij elk punt

$A(t, y)$ de richtingscoëfficiënt $\left[\frac{dy}{dt}\right]_A$.

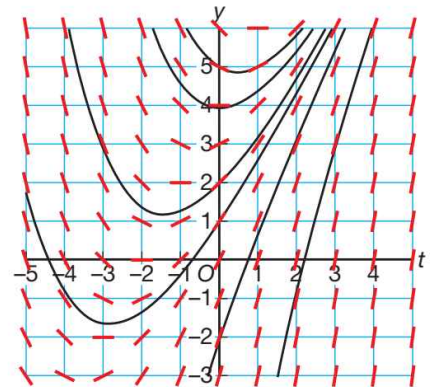
Een lijnstukje door A met $rc = \left[\frac{dy}{dt}\right]_A$ heet een lijnelement.

Een tekening met een aantal lijnelementen heet een lijnelementenveld.

Oplossingskrommen

In de figuur hiernaast zijn in het lijnelementenveld bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y + t + 2$ enkele grafieken getekend die in elk punt dezelfde helling hebben als het lijnelement door dat punt. Deze grafieken zijn oplossingskrommen van de differentiaalvergelijking. De formules die bij deze krommen horen zijn oplossingen van de differentiaalvergelijking.

Ook kun je in het lijnelementenveld zien dat de toppen van oplossingskrommen vermoedelijk op een rechte lijn liggen en dat de oplossingskrommen een scheve asymptoot hebben.



Differentiaalvergelijkingen van de vorm $\frac{dy}{dt} = f(y)$

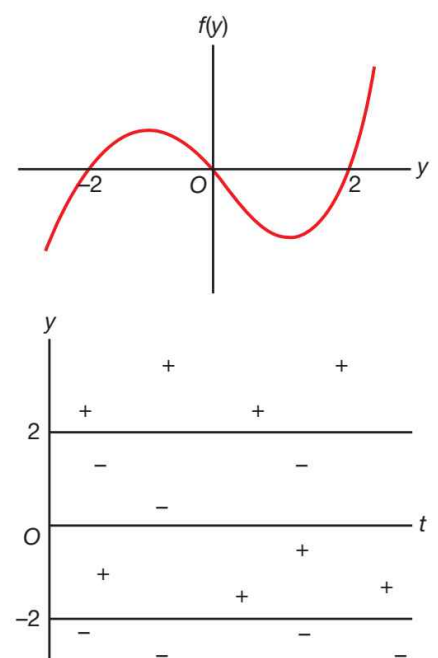
Bij een differentiaalvergelijking van het type $\frac{dy}{dt} = f(y)$

maak je als volgt een tekenoverzicht.

- Bereken de nulpunten van f .
- Onderzoek, eventueel met een schets van de grafiek van f , voor welke waarden van y geldt $\frac{dy}{dt} > 0$ en $\frac{dy}{dt} < 0$ en verwerk dit in een Oty -vlak.

Bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f(y)$ met $f(y) = y^3 - 4y$

lees je uit het tekenoverzicht af dat de oplossingskrommen door de punten (t, y) met $0 < y < 2$ dalend zijn en dat de lijn $y = 0$ asymptoot is van deze krommen.



15.3 Oplossingen van differentiaalvergelijkingen

O26 De vergelijking $(a - 2)t^2 + (2b - 1)t = 5t^2 + 3t$ klopt voor elke waarde van t als geldt $a - 2 = 5 \wedge 2b - 1 = 3$.

a Bereken a en b .

Voor welke a en b klopt de vergelijking voor elke waarde van t ?

b $at^2 + (a + b)t + 5 = 2t^2 + 3t + 5$

c $at^2 + (a^2 + b)t + 4 = 2t^2 + 3t + 4$

d $a^2t^2 + (a - 2b)t + 1 = 4t^2 + 6t + 1$

e $(a^2 - a - 5)t^2 + 5t + a + b = t^2 + 5t + 6$

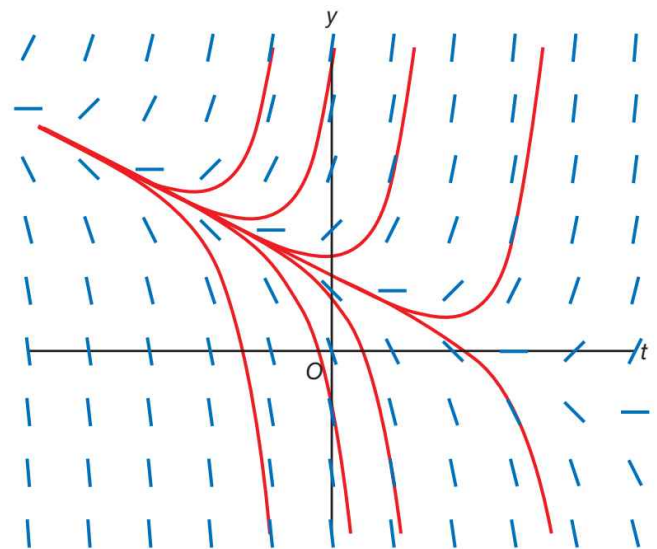
O27 Het lijnelementenveld in figuur 15.9 hoort bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y + t - 3$. In deze figuur zijn ook enkele oplossingskrommen getekend. Op grond van deze figuur kun je vermoeden dat de scheve asymptoot van deze oplossingskrommen zelf ook een oplossingskromme is.

Een van de oplossingen is dus vermoedelijk van de vorm $y = at + b$.

a Substitueer $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in de differentiaalvergelijking en herleid de vergelijking tot $a = (2a + 1)t + 2b - 3$.

b Als $a = (2a + 1)t + 2b - 3$ klopt voor elke waarde van t , dan geldt $2a + 1 = 0 \wedge a = 2b - 3$. Bereken a en b .

c Substitueer de functie $y(t) = e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}$ in de differentiaalvergelijking en herleid je antwoord. Wat valt je op?



figuur 15.9

Theorie A Oplossingen aantonen

In opgave 27 heb je gezien dat $y(t) = -\frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y + t - 3$.

Je kunt laten zien dat ook $y(t) = 5e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking. Dat gaat als volgt.

Uit $y = 5e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}$ volgt $\frac{dy}{dt} = 10e^{2t} - \frac{1}{2}$. Substitutie van

$y(t) = 5e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}$ en $\frac{dy}{dt} = 10e^{2t} - \frac{1}{2}$ in $\frac{dy}{dt} = 2y + t - 3$ geeft

$$10e^{2t} - \frac{1}{2} = 10e^{2t} - t + 2\frac{1}{2} + t - 3$$

$$10e^{2t} - \frac{1}{2} = 10e^{2t} - \frac{1}{2}$$

Dit klopt voor elke waarde van t . Dus de functie

$y(t) = 5e^{2t} - \frac{1}{2}t + 1\frac{1}{4}$ is een oplossing van de

differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y + t - 3$.

Een oplossing van een differentiaalvergelijking is een formule die bij substitutie in de differentiaalvergelijking een ware bewering oplevert.

Voorbeeld

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}ty + \frac{1}{4}y^2.$$

In figuur 15.10 zijn bij deze differentiaalvergelijking een lijnelementenveld en enkele oplossingskrommen getekend. Op grond van deze figuur kun je vermoeden dat de differentiaalvergelijking ook twee lineaire formules als oplossing heeft. Toon aan dat dit inderdaad het geval is en geef deze formules.

Uitwerking

Stel $y = at + b$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$

in $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}ty + \frac{1}{4}y^2$ geeft

$$a = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t(at + b) + \frac{1}{4}(at + b)^2$$

$$a = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}bt + \frac{1}{4}(a^2t^2 + 2abt + b^2)$$

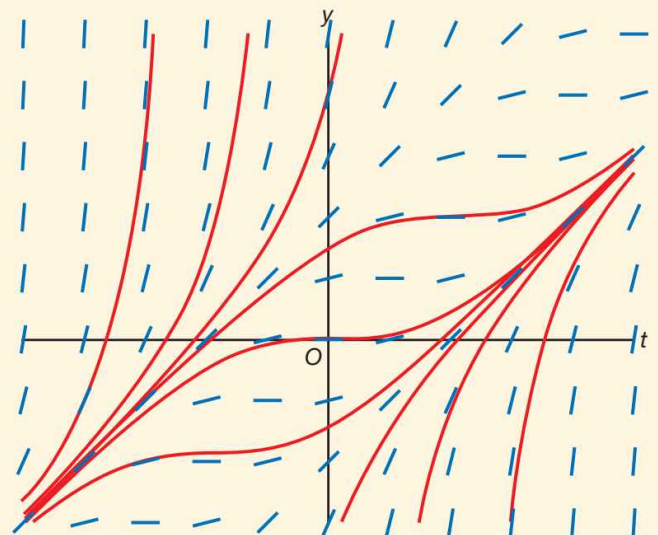
$$a = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}bt + \frac{1}{4}a^2t^2 + \frac{1}{2}abt + \frac{1}{4}b^2$$

$$a = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a^2\right)t^2 + \left(-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}ab\right)t + \frac{1}{4}b^2$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a^2 = 0 \wedge -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}ab = 0 \wedge a = \frac{1}{4}b^2$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \wedge ab - b = 0 \wedge b^2 = 4a$$



figuur 15.10

$$(a-1)^2 = 0 \wedge ab - b = 0 \wedge b^2 = 4a$$

$$a = 1 \wedge ab - b = 0 \wedge b^2 = 4a$$

$$a = 1 \wedge b - b = 0 \wedge b^2 = 4$$

$$a = 1 \wedge b^2 = 4$$

$$(a = 1 \wedge b = 2) \vee (a = 1 \wedge b = -2)$$

Hiermee is aangetoond dat de differentiaalvergelijking twee lineaire formules als oplossing heeft.

Deze formules zijn $y = t + 2$ en $y = t - 2$.

15

28 Gegeven zijn de differentiaalvergelijkingen

$$D_1: \frac{dy}{dt} = y - t^2 + 2t - 1, D_2: \frac{dy}{dt} = y + 1 \text{ en } D_3: \frac{dy}{dt} = \frac{-2y}{t} \text{ en}$$

$$\text{de formules } y_1(t) = \frac{36}{t^2}, y_2(t) = 3e^t + t^2 + 1 \text{ en } y_3(t) = -e^t - 1.$$

Elk van deze formules is een oplossing van een van de differentiaalvergelijkingen.

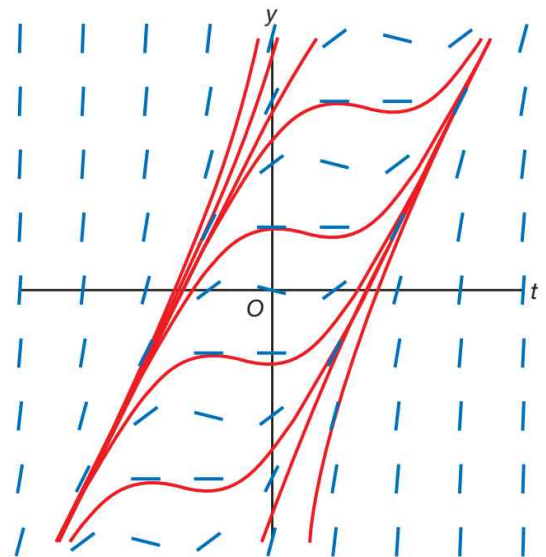
Zoek bij elke formule de juiste differentiaalvergelijking.

29 Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = t^2 - ty + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}.$$

In figuur 15.11 zijn bij deze differentiaalvergelijking een lijnelementenveld en enkele oplossingskrommen getekend. Op grond van deze figuur kun je vermoeden dat de differentiaalvergelijking twee lineaire formules als oplossing heeft.

Toon aan dat dit inderdaad het geval is en geef deze formules.



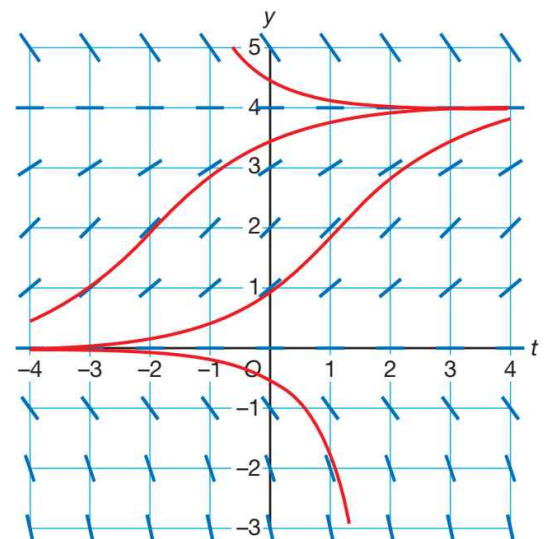
figuur 15.11

30 [▶ WERKBLAD] Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = y - \frac{1}{4}y^2.$$

In figuur 15.12 zijn bij deze differentiaalvergelijking een lijnelementenveld en enkele oplossingskrommen getekend.

- Stel formules op van de horizontale lijnen die oplossingskromme zijn van de differentiaalvergelijking.
- Schets de oplossingskromme door $(0, 2)$.
- Toon aan dat $y(t) = \frac{4}{1 + e^{-t}}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking.

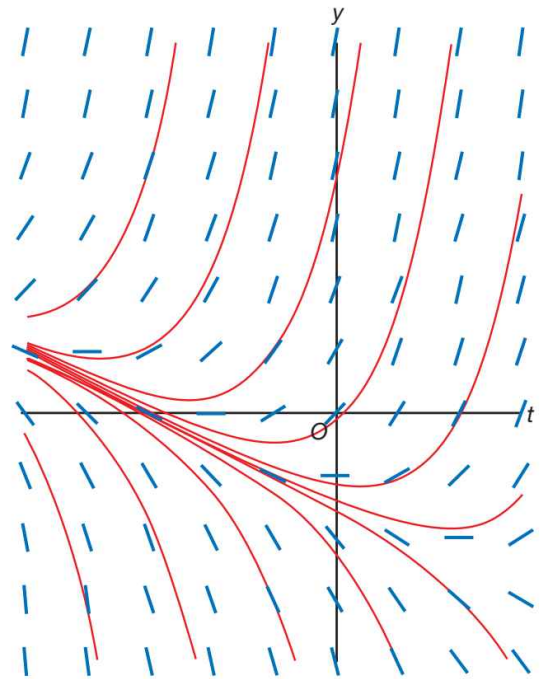


figuur 15.12

- 31** Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t + y + 1$. In figuur 15.13 zijn bij deze differentiaalvergelijking een lijnelementenveld en enkele oplossingskrommen getekend. Op grond van deze figuur kun je vermoeden dat een van de oplossingen een lineaire formule is.
- a** Toon aan dat dit klopt en stel deze formule op.

Elke functie van de vorm $y(t) = c \cdot e^t - \frac{1}{2}t - 1\frac{1}{2}$ is oplossing van de differentiaalvergelijking.

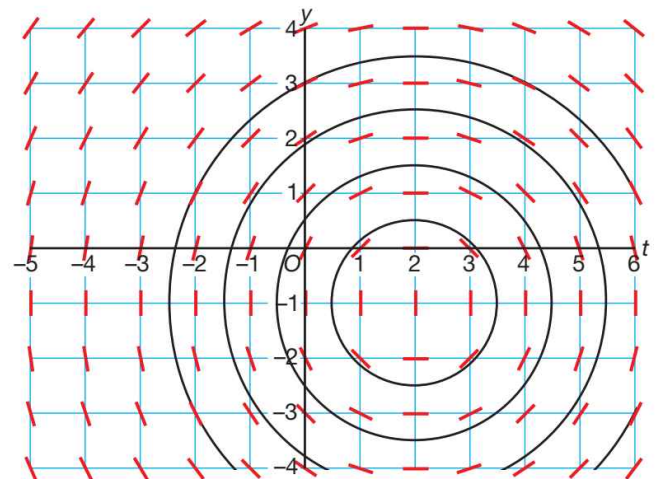
- b** Toon dit aan.
- c** Voor welke waarde van c raakt de grafiek van y de t -as?



figuur 15.13

- A 32** Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{2-t}{y+1}$. In figuur 15.14 zijn bij deze differentiaalvergelijking een lijnelementenveld en enkele oplossingskrommen getekend. De oplossingskrommen lijken cirkels te zijn.

- a** Welk punt is het middelpunt M van deze cirkels, denk je?



figuur 15.14

De cirkel met middelpunt $(2, -1)$ door $A(5, 2)$ heeft de vergelijking $(t - 2)^2 + (y + 1)^2 = 18$.

- b** Toon met behulp van differentiëren naar t aan dat deze cirkel een oplossingskromme is van de differentiaalvergelijking.
- c** Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $(2, -1)$ die door het punt $(0, 6)$ gaat en toon aan dat deze cirkel een oplossingskromme is.

A 33 [▶ WERKBLAD] Het lijnelementenveld in figuur 15.15 hoort bij de

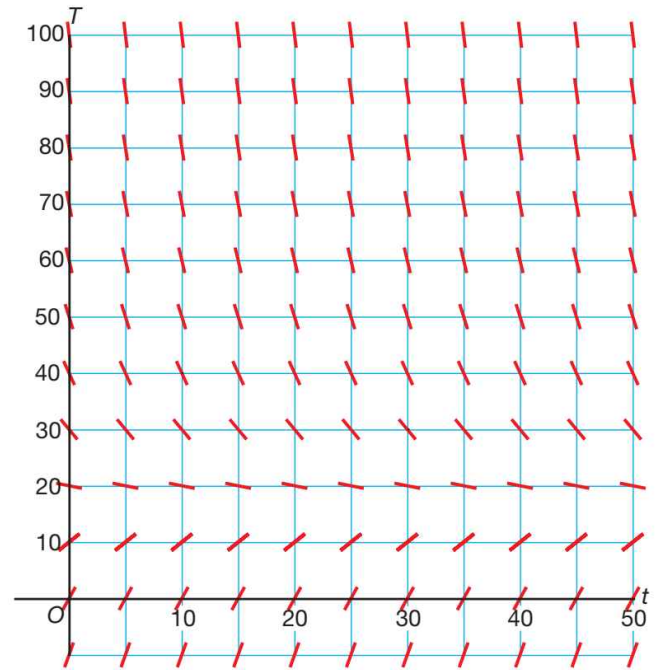
differentiaalvergelijking $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{10}(T - 18)$.

We bekijken het dynamische model

$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{10}(T - 18)$ met $T(0) = a$. Hierbij

is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ van een voorwerp dat is geplaatst in een omgeving met een temperatuur van 18°C , t de tijd in minuten en a de begintemperatuur van het voorwerp.

- Voor welke waarden van a is T een dalende functie?
- Schets de oplossingskromme die hoort bij een begintemperatuur van 85°C .
- Toon aan dat de formule $T = 18 + 67e^{-\frac{1}{10}t}$ bij het dynamische model van vraag b hoort.
- Schets de oplossingskromme die hoort bij een begintemperatuur van 5°C .
- De formule die bij het dynamische model van vraag d hoort is van de vorm $T = p + q \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$. Bereken p en q .



figuur 15.15

O 34 Gegeven zijn de differentiaalvergelijkingen $D_1: \frac{dy}{dt} = 3t$ en

$D_2: \frac{dy}{dt} = 3y$ en de functies $y_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5$, $y_2(t) = 5e^{3t}$,

$y_3(t) = 3t^2$, $y_4(t) = e^{3t} + 2$, $y_5(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6$ en $y_6(t) = -3e^{3t}$.

- Welke van deze functies zijn oplossing van D_1 ?
- Welke van deze functies zijn oplossing van D_2 ?

Theorie B Algemene oplossingen van differentiaalvergelijkingen

De oplossingen van een differentiaalvergelijking zijn formules van oplossingskrommen. Voor enkele typen differentiaalvergelijkingen leer je hoe je deze formules kunt opstellen.

Het opstellen van deze formules heet het **oplossen van de differentiaalvergelijking**.

In opgave 34 heb je gezien dat $y_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 3t$. Dit is een **particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking**.

Alle oplossingen van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 3t$ zijn van de vorm $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$. Hierbij is c een constante. We zeggen dat

$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$ de **algemene oplossing van de differentiaalvergelijking** is.

In opgave 34 heb je ook gezien dat $y(t) = 5e^{3t}$ en $y(t) = -3e^{3t}$ particuliere oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 3y$. Bij deze differentiaalvergelijking hoort de algemene oplossing $y(t) = ce^{3t}$.

De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = g(t)$ is $y(t) = G(t) + c$ met G een primitieve van g en c een constante.

De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = ay$ is $y(t) = ce^{at}$ met c een constante.

In opgave 35 toon je door substitutie aan dat deze algemene oplossingen aan de differentiaalvergelijkingen voldoen.

De differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y}$ is te noteren met

onbepaalde integralen. Je krijgt $\int y dy = \int t^2 dt$. Hieruit volgt $\frac{1}{2}y^2 + c_1 = \frac{1}{3}t^3 + c_2$. Dit geeft $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}t^3 + c_3$ ofwel $y^2 = \frac{2}{3}t^3 + 2c_3$.

Dus de algemene oplossing is $y^2 = \frac{2}{3}t^3 + c$.

Bij de stap van $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y}$ naar $\int y dy = \int t^2 dt$ zijn de variabelen y en t gescheiden. Deze oplossingsmethode wordt daarom **scheiden van variabelen** genoemd.

De algemene oplossing van een differentiaalvergelijking die kan worden herleid tot de vorm $\int f(y) dy = \int g(t) dt$ is $F(y) = G(t) + c$ met F een primitieve van f , G een primitieve van g en c een constante.

$\int f(x) dx$ is een onbepaalde integraal. Er geldt $\int f(x) dx = F(x) + c$.

Voorbeeld

Bereken de algemene oplossing.

a $\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 6t + 5$ **b** $\frac{dy}{dt} = 2y$ **c** $\frac{dy}{dt} = \frac{3-t}{y+2}$

Uitwerking

a $\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 6t + 5$ geeft $y(t) = t^3 + 3t^2 + 5t + c$

Gebruik $\frac{dy}{dt} = g(t)$ geeft $y = G(t) + c$.

b $\frac{dy}{dt} = 2y$ geeft $y(t) = ce^{2t}$

Gebruik $\frac{dy}{dt} = ay$ geeft $y = ce^{at}$.

c $\frac{dy}{dt} = \frac{3-t}{y+2}$ geeft $\int (y+2) dy = \int (3-t) dt$
 $\frac{1}{2}y^2 + 2y = 3t - \frac{1}{2}t^2 + c$

Gebruik $\int f(y) dy = \int g(t) dt$
 geeft $F(y) = G(t) + c$.

35 a Toon aan dat $y(t) = G(t) + c$ oplossing is van $\frac{dy}{dt} = g(t)$.

b Toon aan dat $y(t) = c e^{at}$ oplossing is van $\frac{dy}{dt} = ay$.

36 Bereken de algemene oplossing.

a $\frac{dy}{dt} = \cos(t) + t^2 + 5$

c $\frac{dy}{dt} = \frac{5}{y^2}$

b $\frac{dy}{dt} = 0,2y$

d $\frac{dy}{dt} = \frac{1-t}{y-3}$

A 37 Bereken de algemene oplossing.

a $\frac{dy}{dt} = \frac{6t}{y+1}$

c $\frac{dy}{dt} = t^2 + t^2y$ met $y > -1$

b $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t \cdot y^2}$

d $\frac{dy}{dt} = (1+y) \cdot e^t$ met $y > -1$

A 38 Bij het ontladen van een condensator hoort de differentiaal-

vergelijking $\frac{dI}{dt} = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot I$. Hierbij is I de stroomsterkte in ampère, t de tijd in seconden, R de weerstand van de stroomkring in ohm en C de capaciteit van de condensator in farad.

- a** Voor een ontladstroom blijkt de formule $I(t) = 5 \cdot e^{-t}$ te gelden. Bereken $I(0)$ en de waarde van $R \cdot C$.
- b** Voor een stroomkring met $R \cdot C = 10$ geldt $I(2) = 3$. Bereken $I(0)$.

Terugblik

Oplossingen aantonen

Een oplossing van een differentiaalvergelijking is een formule die bij substitutie in de differentiaalvergelijking een ware bewering oplevert. Hiernaast zie je het lijnelementenveld dat hoort

bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y + t - 3$.

Op grond van de figuur kun je vermoeden dat de differentiaalvergelijking een lineaire formule als oplossing heeft. Om dit aan te tonen stel je dat $y = at + b$ een oplossing is en substitueer je

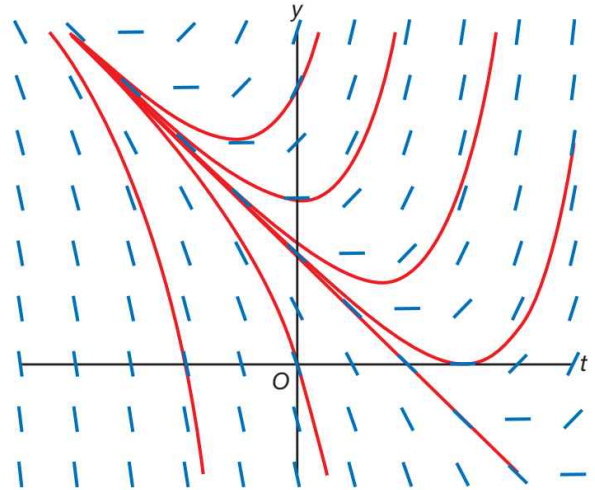
$y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in de differentiaalvergelijking.

Je krijgt $a = at + b + t - 3$

$$a = (a + 1)t + b - 3$$

Dit moet kloppen voor elke waarde van t , dus $a + 1 = 0 \wedge a = b - 3$. Dit geeft $a = -1 \wedge b = 2$.

Dus de formule $y = -t + 2$ is oplossing van de differentiaalvergelijking.



Algemene oplossingen van differentiaalvergelijkingen

De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = g(t)$ is $y(t) = G(t) + c$ met G een primitieve van g en c een constante. Zo is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = t^2 + 3$ de algemene oplossing $y(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t + c$.

De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = ay$ is $y(t) = c \cdot e^{at}$ met c een constante.

Zo is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 4y$ de algemene oplossing $y(t) = c \cdot e^{4t}$.

De algemene oplossing van een differentiaalvergelijking die te herleiden

is tot de vorm $\int f(y) dy = \int g(t) dt$ is $F(y) = G(t) + c$ met F een

primitieve van f , G een primitieve van g en c een constante.

Je hebt te maken met een differentiaalvergelijking met te scheiden variabelen.

Bij $\frac{dy}{dt} = ty + y$ met $y > 0$ krijg je $\frac{dy}{dt} = (t + 1)y$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (t + 1) dt$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2}t^2 + t + c_1$$

$$y = e^{\frac{1}{2}t^2 + t + c_1}$$

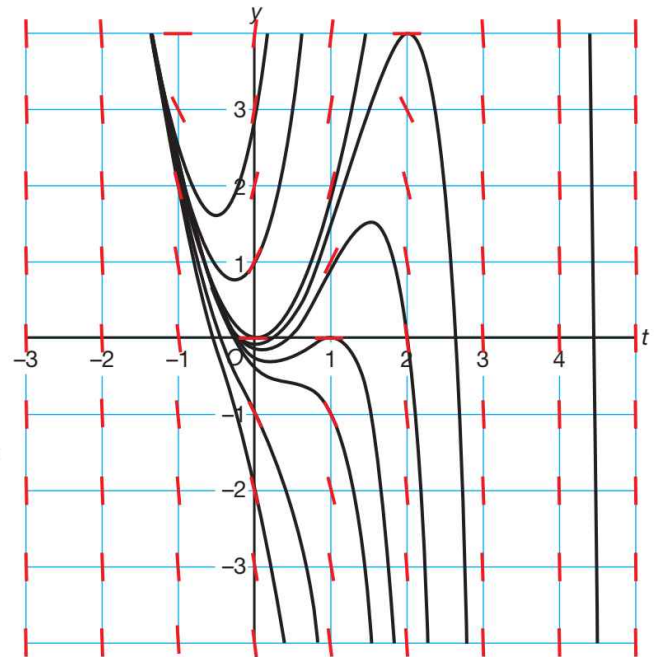
Dus de algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{\frac{1}{2}t^2 + t}$.

$$y = e^{\frac{1}{2}t^2 + t + c_1} = e^{\frac{1}{2}t^2 + t} \cdot e^{c_1}, \text{ dus } c = e^{c_1}.$$

15.4 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

O 39 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t$. In figuur 15.16 zijn van deze differentiaalvergelijking een lijn-elementenveld en enkele oplossingskrommen getekend. Op grond van de figuur kun je vermoeden dat één van de oplossingen een parabool is.

- Toon aan dat dit vermoeden juist is en stel de formule op van deze parabool.
- Bereken de algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = 2y$.
- Toon aan dat de som van de oplossingen van de vragen a en b een oplossing is van $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t$.



figuur 15.16

Theorie A Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

De differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t$ is van

de vorm $\frac{dy}{dt} = Ay + g(t)$. Dit is een **lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde**.

De algemene vorm van een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde is $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$.

In opgave 39 heb je gezien dat de som van een particuliere oplossing van $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t$ en de algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = 2y$ een oplossing is van $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t$. Je zult zien dat dit de algemene oplossing is van $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t$.

De differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y$ heet de **homogene vergelijking** van $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t$.

eerste orde:

alleen de eerste afgeleide $\frac{dy}{dt}$

lineair:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + B$$

kwadratisch:

$$\frac{dy}{dt} = Ay^2 + By + C$$

De algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t^2 + 4t$ is dus de som van een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking en de algemene oplossing van de homogene vergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y$.

In opgave 40 toon je aan dat dit geldt voor elke lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde.

De homogene vergelijking van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t) \text{ is } \frac{dy}{dt} = f(t)y.$$

De algemene oplossing van de lineaire differentiaalvergelijking

van de eerste orde $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$ is de som van een particuliere

oplossing van $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$ en de algemene oplossing van de

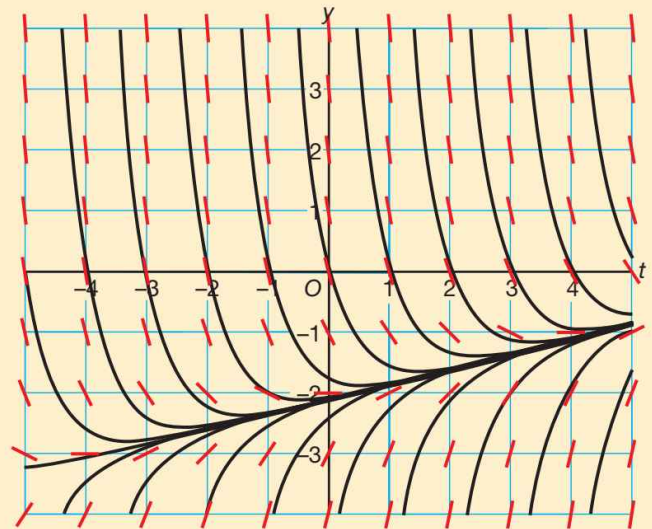
homogene differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f(t)y$.

Het lijnelementenveld in de figuur hiernaast hoort bij de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = -2y + \frac{1}{2}t - 4.$$

Op grond van de getekende oplossingskrommen kun je vermoeden dat een van de oplossingskrommen een rechte lijn is.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt aangetoond dat dit vermoeden juist is, waarmee een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking is gevonden.



figuur 15.17

Informatief De algemene oplossing van een differentiaalvergelijking

De algemene oplossing van een differentiaalvergelijking is een formule met een parameter c die alle oplossingskrommen van de differentiaalvergelijking beschrijft.

Voor een algemene oplossing moet dus aan twee voorwaarden zijn voldaan:

- voor elke waarde van c krijg je een oplossing
- bij elke oplossing hoort een waarde van c .

De eerste voorwaarde is in het algemeen eenvoudig te bewijzen met behulp van een substitutie.

De tweede voorwaarde is veel lastiger te bewijzen. Hoe weet je zeker dat je echt alle oplossingen te pakken hebt? Zo ga je in vraag 40c wel aantonen dat door elk punt precies één oplossing gaat, maar niet dat dit alle oplossingen zijn.

Voorbeeld

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -2y + \frac{1}{2}t - 4$.

Bereken de algemene oplossing. Gebruik dat de differentiaalvergelijking een lineaire particuliere oplossing heeft.

Uitwerking

Stel $y = at + b$ is een oplossing.

Substitutie van $y = at + b$ en $\frac{dy}{dt} = a$ in $\frac{dy}{dt} = -2y + \frac{1}{2}t - 4$ geeft

$$a = -2(at + b) + \frac{1}{2}t - 4$$

$$a = -2at - 2b + \frac{1}{2}t - 4$$

$$a = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)t - 2b - 4$$

Deze vergelijking moet kloppen voor elke waarde van t , dus $-2a + \frac{1}{2} = 0 \wedge a = -2b - 4$

$a = \frac{1}{4} \wedge b = -2\frac{1}{8}$, dus $y = \frac{1}{4}t - 2\frac{1}{8}$ is een particuliere oplossing.

$$\frac{dy}{dt} = -2y \text{ geeft } y(t) = c \cdot e^{-2t}$$

De algemene oplossing is $y(t) = c \cdot e^{-2t} + \frac{1}{4}t - 2\frac{1}{8}$.

40 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$.

Voor een particuliere oplossing $y = p(t)$ geldt

$$p'(t) = f(t) \cdot p(t) + g(t) \text{ en voor de algemene oplossing } y = a(t)$$

van de homogene vergelijking $\frac{dy}{dt} = f(t)y$ geldt $a'(t) = f(t) \cdot a(t)$.

- Toon aan dat $y = a(t) + p(t)$ oplossing van de differentiaalvergelijking is.
- Toon aan dat $a(t) = c \cdot e^{F(t)}$ voldoet aan de homogene differentiaalvergelijking. Hierbij is F een primitieve van f .
- Toon aan dat door elk punt waar $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$ is gedefinieerd precies één oplossingskromme van de vorm $y = a(t) + p(t)$ gaat.

41 Bereken de algemene oplossing. Gebruik dat de differentiaalvergelijking een lineaire particuliere oplossing heeft.

a $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y + 2t - 4$

c $\frac{dy}{dt} = 2y - 4t + 6$

b $\frac{dy}{dt} = 6 - 2y$

d $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{10}(T - 21)$

- 42** Bereken de algemene oplossing. Gebruik dat de differentiaalvergelijking een particuliere oplossing heeft van de vorm $y = A \sin(t) + B \cos(t)$.

a $\frac{dy}{dt} = 2y + \cos(t)$

c $\frac{dy}{dt} = 4y - \cos(t)$

b $\frac{dy}{dt} = -3y - \sin(t)$

d $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y + 2 \sin(t) - 3 \cos(t)$

- 43** Bereken de algemene oplossing. Gebruik dat de differentiaalvergelijking een particuliere oplossing heeft van de vorm $y = A \cdot e^t$.

a $\frac{dy}{dt} = 2y - 3e^t$

c $\frac{dy}{dt} = -2y + e^t$

b $\frac{dy}{dt} = 10y - 5e^t$

d $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y + 2e^t$

- A 44** Bereken de algemene oplossing.

a $\frac{dy}{dt} = 2y + 4t - 2$

d $\frac{dy}{dt} = -2y + 2t^2 - 4t$

b $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y + 4e^{2t}$

e $\frac{dy}{dt} = ty + t$ met $y > -1$

c $\frac{dy}{dt} = -3y + \sin(2t)$

f $\frac{dy}{dt} = ty - t^2 + t + 1$ met $y > 0$

- 45** Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -y - 3$.

- a** Stel de formule op van de oplossing met $y(0) = 1$.
b Toon aan dat het punt $\left(1, -3 + \frac{3}{e}\right)$ op de oplossingskromme door de oorsprong ligt.
c Voor welke waarde van a ligt het punt $(a, 8)$ op de oplossingskromme door het punt $(3, 1)$?

- A 46** Een blikje cola van 5°C wordt op $t = 0$ uit een koelkast gehaald en in een kamer met een temperatuur van 18°C gezet. De snelheid waarmee de temperatuur van het blikje verandert is evenredig met het verschil in temperatuur in $^\circ\text{C}$ tussen het blikje en de omgeving. Neem T de temperatuur van het blikje in $^\circ\text{C}$ en t de tijd in minuten. De evenredigheidsconstante is $-0,035$.

- a** Stel de formule op van T .
b Bereken in graden nauwkeurig de temperatuur van het blikje na 5 minuten.
c Bereken algebraïsch na hoeveel minuten het blikje een temperatuur van 15°C heeft.

A 47 De ketel van een stoommachine wordt opgestookt. Voor de temperatuur van de ketel geldt het dynamische model $\frac{dT}{dt} = c \cdot (T - 150)$ met $T(0) = 20$. Hierbij is T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en is t de tijd in minuten.

Voor $T \leq 100$ is $c = -0,03$ en voor $T > 100$ is $c = -0,001$.

Na hoeveel minuten is de temperatuur van 100°C bereikt?

Hoeveel minuten duurt het daarna nog tot de temperatuur van 120°C is bereikt?

O 48 De kettingregel $f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ is ook te schrijven als $y = u(v(x))$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Bij $y = (x^2 - 5x)^3$ krijg je

$$y = u^3 \text{ met } u = x^2 - 5x \text{ geeft } \frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (2x - 5) = 3(x^2 - 5x)^2 \cdot (2x - 5).$$

Gegeven is $\frac{dy}{dt} = y^2 - 5y$ en $y = 3u$. Gebruik de regel

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \text{ om aan te tonen dat } \frac{du}{dt} = 3u^2 - 5u.$$

O 49 Het begin van een griep epidemie wordt beschreven door het model $\frac{dN}{dt} = 0,7N$. Hierin is N het aantal besmette mensen en t de tijd in weken. Op $t = 0$ zijn er 1000 mensen besmet.

a Stel de formule op van N .

Dit model klopt niet voor het hele verloop van de epidemie.

Er is immers een maximum aan het aantal mensen dat besmet kan raken. De groei van N wordt meer geremd naarmate er minder mensen zijn die nog besmet kunnen raken.

Gaan we uit van een maximum van N van 400 000, dan kan de rem van de groei goed beschreven worden door $0,7N$ te

vermenigvuldigen met de factor $\frac{400\,000 - N}{400\,000}$. Voor kleine N is

deze factor vrijwel 1 en voor N in de buurt van 400 000 is deze factor ongeveer 0.

Zo krijg je voor deze geremde groei de differentiaalvergelijking

$$\frac{dN}{dt} = 0,7N \cdot \frac{400\,000 - N}{400\,000}.$$

b Bereken de groeisnelheid in aantallen per week op het moment dat $N = 10\,000$, $N = 200\,000$ en $N = 390\,000$.

c De differentiaalvergelijking is te schrijven als

$$\frac{dN}{dt} = c \cdot N \cdot (400\,000 - N).$$

Bereken c .

Theorie B Kwadratische differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

De snelheid waarmee een griep epidemie zich verspreidt is niet alleen evenredig met het aantal mensen N dat al besmet is geraakt en dus weer anderen kan besmetten, maar is ook evenredig met het aantal mensen dat nog besmet kan worden.

Daarom is $\frac{dN}{dt}$ evenredig met het product van het aantal zieke mensen en het aantal mensen dat nog ziek wordt.

Dit leidt tot de differentiaalvergelijking

$\frac{dN}{dt} = c \cdot N \cdot (G - N)$. Hierin is G het totale aantal mensen dat uiteindelijk ziek wordt.

In opgave 49 werd het verloop van de griep epidemie beschreven door de differentiaalvergelijking

$\frac{dN}{dt} = 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (400\,000 - N)$. Een op deze wijze **geremde groei** wordt **logistische groei** genoemd.

In de differentiaalvergelijking $\frac{dN}{dt} = c \cdot N \cdot (G - N)$ is

$N = G$ de asymptoot van de oplossingskrommen.

Logistische groei gaat halverwege de grenswaarde over van toenemend stijgend in afnemend stijgend.

Een groot aantal groeiprocessen, zoals bij de oppervlakte van een blad, het gewicht van een pompoen, het aantal fruitvliegjes in een afgesloten ruimte en de bevolking van een land, is goed te beschrijven met het **logistische groeimodel**.

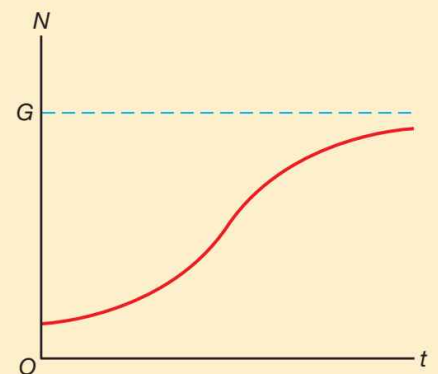
De differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$ is van dezelfde vorm als de differentiaalvergelijking $\frac{dN}{dt} = c \cdot N \cdot (G - N)$.

Om de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$ op te lossen gebruiken we de substitutie $y = \frac{1}{u}$ en de kettingregel in de

vorm $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$.

$\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$ en $y = \frac{1}{u}$ geeft $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{u} \left(1 - \frac{1}{u}\right)$

$y = \frac{1}{u} = u^{-1}$ geeft $\frac{dy}{du} = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$



figuur 15.18

De algemene vorm van een kwadratische differentiaalvergelijking van de eerste orde is

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y^2 + g(t)y + h(t).$$

We beperken ons tot differentiaalvergelijkingen met $f(t)$ en $g(t)$ constant en $h(t) = 0$.

Zo krijg je $\frac{1}{u} \left(1 - \frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$

$$\frac{du}{dt} = -u^2 \cdot \frac{1}{u} \left(1 - \frac{1}{u}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = -u + 1$$

$u(t) = 1$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -u + 1$.

$\frac{du}{dt} = -u$ geeft $u(t) = c e^{-t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -u + 1$ is dus $u(t) = c e^{-t} + 1$.

$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c e^{-t} + 1}$

De substitutie $y = \frac{1}{u}$ kun je gebruiken om oplossingen van

differentiaalvergelijkingen van de vorm $\frac{dy}{dt} = A \cdot y^2 + B \cdot y$ te

vinden. Deze differentiaalvergelijkingen heten **kwadratische differentiaalvergelijkingen van de eerste orde**.

Differentiaalvergelijkingen van de vorm $\frac{dy}{dt} = A \cdot y^2 + B \cdot y$ zijn

kwadratische differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.

Om deze vergelijkingen op te lossen pas je de substitutie

$y = \frac{1}{u}$ toe.

Omdat $y = \frac{1}{u} = u^{-1}$ geeft $\frac{dy}{du} = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$, geldt dat

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$$

Je mag $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$ zonder verdere toelichting in de opgaven gebruiken.

Voorbeeld

Bereken de algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = 4y^2 - 12y$.

Onthoud: $y = \frac{1}{u}$ geeft

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Uitwerking

Substitutie van $y = \frac{1}{u}$ geeft $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = 4 \cdot \frac{1}{u^2} - 12 \cdot \frac{1}{u}$
$$\frac{du}{dt} = -4 + 12u$$

Vermenigvuldig met $-u^2$.

$u(t) = \frac{1}{3}$ is een particuliere oplossing van $\frac{du}{dt} = -4 + 12u$.

$\frac{du}{dt} = 12u$ geeft $u(t) = c_1 \cdot e^{12t}$

De algemene oplossing van $\frac{du}{dt} = -4 + 12u$ is $u(t) = c_1 \cdot e^{12t} + \frac{1}{3}$.

$y = \frac{1}{u}$ geeft $y(t) = \frac{1}{c_1 \cdot e^{12t} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{3c_1 \cdot e^{12t} + 1}$

De algemene oplossing is $y(t) = \frac{3}{1 + c \cdot e^{12t}}$.

50 Bereken de algemene oplossing.

a $\frac{dy}{dt} = y^2 + 4y$

c $\frac{dy}{dt} = 0,1y \left(1 - \frac{y}{100}\right)$

b $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y(1 - y)$

d $\frac{dA}{dt} = 0,001A \left(1 - \frac{A}{20}\right)$

A51 Bereken de algemene oplossing.

a $\frac{dy}{dt} = 2y^2 - 10y$

c $\frac{dy}{dt} = 3ty + 6t$ met $y > -2$

b $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y + 4e^t - 2\sin(t)$

d $\frac{dy}{dt} = -2y + 12y^2$

52 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y - 2y^2$.

a Stel een formule op van de oplossingskromme door het punt $(0, \frac{1}{5})$.

b Toon aan dat het punt $\left(1, \frac{2e}{4e - 3}\right)$ op de oplossingskromme door het punt $(0, 2)$ ligt.

- 53** De groei van een populatie zeeotters is te beschrijven met het dynamische model $\frac{dN}{dt} = c \cdot N \cdot (10000 - N)$.

Verder is gegeven dat er 2000 zeeotters zijn op $t = 0$ en dat de groeisnelheid gelijk is aan 350 exemplaren per jaar. Neem de tijd t in jaren.

- Bereken de populatiegrootte op $t = 20$.
- Bereken vanaf welke t er meer dan 5000 zeeotters zijn.

- A 54** De lengte L van een plantje wordt beschreven door het dynamische model $\frac{dL}{dt} = 6L - 0,2L^2$ met $L(0) = 2$. Hierbij is L in cm en de tijd t in weken.

- Bereken hoeveel het plantje de eerste dag groeit.
- Na hoeveel dagen is de lengte van het plantje voor het eerst 1 cm minder dan de grenswaarde van de lengte?

- A 55** In een leefgebied van de vuursalamander wordt de groei van de populatie vuursalamanders beschreven door het dynamische model $\frac{dN}{dt} = 6 \cdot 10^{-5} \cdot N \cdot (5000 - N)$ met $N(0) = 4500$ en t in jaren.

- Bereken hoeveel vuursalamanders er zijn op $t = 10$.

Op $t = 10$ wordt het leefgebied gehalveerd. Ook het aantal vuursalamanders dat maximaal in dit gebied kan leven halveert. Verder verandert in het model de coëfficiënt $6 \cdot 10^{-5}$ in $4 \cdot 10^{-5}$.

- Hoeveel jaar na $t = 10$ zijn er weer 4500 vuursalamanders?



Terugblik

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde is van de vorm $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$. De differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f(t)y$ is de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking met de algemene oplossing $y = c \cdot e^{F(t)}$, met F een primitieve van f .

Is één oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f(t)y + g(t)$ gevonden, dan is de algemene oplossing de som van deze particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking en de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking.

Zo heeft de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y - t$ de particuliere oplossing $y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$.

De algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = 2y$ is $y(t) = c \cdot e^{2t}$. Dus de algemene oplossing van $\frac{dy}{dt} = 2y - t$ is $y(t) = c \cdot e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$.

Zoeken naar een particuliere oplossing

Aan de differentiaalvergelijking kun je vaak zien welke vorm een particuliere oplossing heeft.

Zo probeer je bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y + \sin(t) + \cos(t)$

een particuliere oplossing van de vorm $y(t) = A \sin(t) + B \cos(t)$.

Substitutie van $y(t) = A \sin(t) + B \cos(t)$ en $\frac{dy}{dt} = A \cos(t) - B \sin(t)$ in de differentiaalvergelijking geeft $A \cos(t) - B \sin(t) = A \sin(t) + B \cos(t) + \sin(t) + \cos(t)$
 $A \cos(t) - B \sin(t) = (B + 1) \cos(t) + (A + 1) \sin(t)$

Dit moet kloppen voor elke waarde van t , dus $A = B + 1 \wedge -B = A + 1$.

Hieruit volgt $A = 0 \wedge B = -1$. Dus een particuliere oplossing is $y(t) = -\cos(t)$.

Omdat de homogene differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y$ de algemene oplossing $y(t) = c \cdot e^t$ heeft, is de algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking $y(t) = c \cdot e^t - \cos(t)$.

Kwadratische differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Een kwadratische differentiaalvergelijking van de eerste orde is van de vorm

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y^2 + g(t)y + h(t).$$

Beperk je je tot differentiaalvergelijkingen met $f(t)$ en $g(t)$ constant en $h(t) = 0$,

dus tot differentiaalvergelijkingen van de vorm $\frac{dy}{dt} = A \cdot y^2 + B \cdot y$, dan kun je

de differentiaalvergelijking oplossen met behulp van de substitutie $y = \frac{1}{u}$.

15.5 Differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

O56 Gegeven is de lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde $y'' + 5y' + 4y = 0$.

- a Licht toe waarom deze differentiaalvergelijking van de tweede orde is.

Om de oplossingen te vinden proberen we functies van de vorm $y(t) = e^{\lambda t}$.

- b Toon aan dat substitutie van $y(t) = e^{\lambda t}$ in de differentiaalvergelijking leidt tot $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ en los deze vergelijking op.
- c Toon aan dat $y(t) = A e^{-t} + B e^{-4t}$ voor elke waarde van A en B voldoet aan de differentiaalvergelijking.

Voor de duidelijkheid schrijven we

y' in plaats van $\frac{dy}{dt}$

en

y'' in plaats van $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

15

O57 Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Om de oplossingen te vinden proberen we functies van de vorm $y(t) = e^{\lambda t}$.

- a Toon aan dat substitutie van $y(t) = e^{\lambda t}$ in de differentiaalvergelijking leidt tot $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ en licht toe dat deze vergelijking geen reële oplossingen heeft.
- b Bereken de complexe oplossingen van $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$.

Theorie A De differentiaalvergelijking $\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0$

Bij differentiaalvergelijkingen noteren we de tweede afgeleide van y naar t met $\frac{d^2y}{dt^2}$.

De differentiaalvergelijking $\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0$ is een

lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde.

De differentiaalvergelijking is van de tweede orde omdat de tweede afgeleide de hoogste afgeleide van y is die in de vergelijking voorkomt.

$\frac{d^2y}{dt^2}$ is hetzelfde als $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$ en dus ook als $y''(t)$.

Een formule waarin als hoogste afgeleide $\frac{d^2y}{dt^2}$ voorkomt is een differentiaalvergelijking van de tweede orde.

Heb je te maken met de variabelen y en t , dan noteren we

$\frac{dy}{dt}$ als y' en $\frac{d^2y}{dt^2}$ als y'' .

Om vergelijkingen van de vorm $y'' + py' + qy = 0$ op te lossen substitueer je $y(t) = e^{\lambda t}$ in de differentiaalvergelijking. Je krijgt $\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + p\lambda \cdot e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0$. Delen door $e^{\lambda t}$ geeft de **karakteristieke vergelijking** $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ met discriminant $D = p^2 - 4q$.

De karakteristieke vergelijking heeft twee reële oplossingen λ_1 en λ_2 als de discriminant $D > 0$. Je gaat in opgave 58 aantonen dat alle functies van de vorm $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ dan oplossing zijn van de differentiaalvergelijking.

$y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ is een lineaire combinatie van $y(t) = e^{\lambda_1 t}$ en $y(t) = e^{\lambda_2 t}$.

De karakteristieke vergelijking heeft één reële oplossing λ als de discriminant $D = 0$. Je gaat in opgave 59 aantonen dat alle functies van de vorm $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda t}$ dan oplossing zijn van de differentiaalvergelijking.

De karakteristieke vergelijking heeft twee complexe oplossingen $\lambda_1 = a + bi$ en $\lambda_2 = a - bi$ als de discriminant $D < 0$. In dit geval zijn alle functies van de vorm $y(t) = (A \cos(bt) + B \sin(bt)) \cdot e^{at}$ oplossing van de differentiaalvergelijking.

Werkschema: het oplossen van een differentiaalvergelijking van de vorm $y'' + py' + qy = 0$

- 1 Substitueren van $y(t) = e^{\lambda t}$ geeft de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ met $D = p^2 - 4q$.
- 2a Is $D > 0$ dan zijn er twee reële oplossingen λ_1 en λ_2 en is de oplossing van de vorm $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$.
- 2b Is $D = 0$ dan is er één reële oplossing λ en is oplossing van de vorm $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda t}$.
- 2c Is $D < 0$ dan krijg je twee complexe oplossingen $\lambda_1 = a + bi$ en $\lambda_2 = a - bi$ en is de oplossing van de vorm $y(t) = (A \cos(bt) + B \sin(bt)) \cdot e^{at}$.
- 3 Je berekent A en B met behulp van de startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$.

Voorbeeld

Bereken van de differentiaalvergelijking $y'' - 3y' - 4y = 0$ de oplossing met $y(0) = 3$ en $y'(0) = 2$.

Uitwerking

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$
 $(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$
 $\lambda = -1 \vee \lambda = 4$

Dus $y(t) = A e^{-t} + B e^{4t}$ is de algemene oplossing.

$y(0) = 3$ geeft $A + B = 3$

$y(t) = A e^{-t} + B e^{4t}$ geeft $y'(t) = -A e^{-t} + 4B e^{4t}$

$y'(0) = 2$ geeft $-A + 4B = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 3 \\ -A + 4B = 2 \\ \hline 5B = 5 \\ B = 1 \\ A + B = 3 \end{array} \right\} A = 2$$

De gevraagde oplossing is $y(t) = 2e^{-t} + e^{4t}$.

- 58** Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'' + py' + qy = 0$.
De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heeft twee reële oplossingen λ_1 en λ_2 .
Toon aan dat alle functies van de vorm $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ oplossing zijn van de differentiaalvergelijking.

- 59** Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'' + py' + qy = 0$.
De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heeft één reële oplossing λ .
Toon aan dat alle functies van de vorm $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda t}$ oplossing zijn van de differentiaalvergelijking.

- 60** Bereken de oplossing met $y(0) = 1$ en $y'(0) = -1$.
a $y'' + 6y' + 8y = 0$ **c** $y'' - 8y' + 16y = 0$
b $y'' + 6y' + 10y = 0$ **d** $y'' + \frac{1}{4}y = 0$

- 61** Voor de functies x en y van t geldt $\frac{dx}{dt} = 2x - 6y \wedge \frac{dy}{dt} = -x + y$
met $x(0) = 1$ en $y(0) = -1$.
a Gebruik $x = -\frac{dy}{dt} + y$ en herleid het stelsel tot $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0$.
b Licht toe dat $y'(0) = -2$.
c Stel de formules op van x en van y .

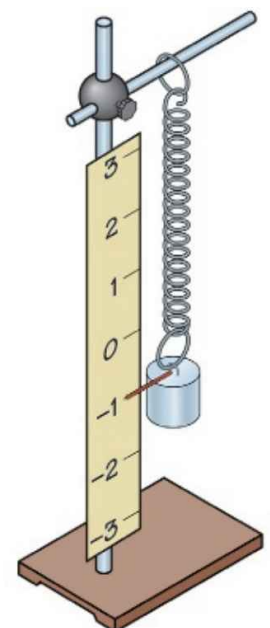
- 62** In figuur 15.19 zie je een veer waaraan een blokje met massa m hangt. Op de schaalverdeling naast de veer is de uitwijking u ten opzichte van de evenwichtsstand af te lezen. In de evenwichtsstand heffen de veerkracht en de zwaartekracht elkaar op. Jeroen trekt het blokje naar beneden tot $u = -1$ en laat het op tijdstip $t = 0$ los. Voor de resultante F van de veerkracht en de zwaartekracht geldt $F = -c \cdot u$. Hierbij is c de veerconstante.

- a** Licht toe dat c positief is.
b Druk $\frac{dv}{dt}$ uit in c , m en u .

Neem je $m = 1$ en $c = 1$, dan wordt de beweging van het blokje

beschreven door het model $\frac{dv}{dt} = -u \wedge \frac{du}{dt} = v$ met $u(0) = -1$ en $v(0) = 0$.

- c** Licht dit toe.
d Licht toe dat $\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0$ en stel de formule op van u .



figuur 15.19

Theorie B Gedempte trillingen

Voor een veer waaraan een blokje hangt, gebruiken we het model $F = -c \cdot u$, waarin c de veerconstante is. Omdat ook geldt $F = m \cdot a$ en $a = \frac{d^2u}{dt^2}$, heb je te maken met een differentiaalvergelijking van de tweede orde.

Volgens het model $F = -c \cdot u$ ondergaat het blokje een harmonische trilling. In werkelijkheid komt het blokje na verloop van tijd stil te hangen omdat er wrijving is. We nemen aan dat de wrijvingskracht tegengesteld is aan en in grootte evenredig is met de snelheid $\frac{du}{dt}$.

De evenredigheidsconstante k noemen we de **dampingcoëfficiënt** van het systeem. Voor de som van de krachten die op het blokje werken geldt dus $F = -c \cdot u - k \cdot \frac{du}{dt}$. Hierin zijn c en k beide

positief. Uit $F = m \cdot a$, $F = -c \cdot u - k \cdot \frac{du}{dt}$ en $a = \frac{d^2u}{dt^2}$ volgt

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{-k \cdot \frac{du}{dt} - c \cdot u}{m} = -\frac{k}{m} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{c}{m} \cdot u.$$

Dit geeft de differentiaalvergelijking $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{c}{m} \cdot u = 0$.

Of bij een **massa-veersysteem** een (gedempte) trilling ontstaat

hangt af van de discriminant $D = \left(\frac{k}{m}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{m} = \frac{k^2 - 4cm}{m^2}$.

Er zijn drie situaties mogelijk.

Onderdamping

Na een verstoring van het evenwicht zal het systeem nog enige tijd natrillen alvorens het tot rust komt. In dit geval is $D < 0$ en is er sprake van gedempte trilling.

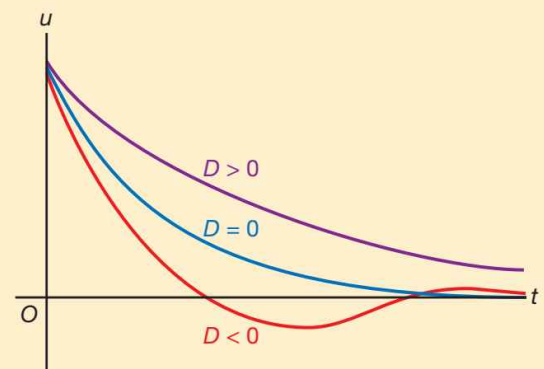
Kritische damping

Na een verstoring van het evenwicht zal het systeem zonder trilling zo snel als mogelijk is tot rust komen. In dit geval is $D = 0$.

Overdamping

Na een verstoring van het evenwicht zal het systeem zonder trillen langzamer tot rust komen dan bij kritische damping. In dit geval is $D > 0$.

Ook de frequentie van een eventuele trilling volgt uit de differentiaalvergelijking. Deze frequentie heet de **eigenfrequentie** van het massa-veersysteem.



figuur 15.20

Voorbeeld

Van een schokdempersysteem is de veerconstante $c = 85$ en de dempingcoëfficiënt $k = 50$. De demper is verbonden met een voorwerp met massa $m = 10$. Op $t = 0$ is $u = \frac{1}{5}$ en $\frac{du}{dt} = \frac{3}{10}$.

Stel de formule op van u .

Uitwerking

$$F = -50 \frac{du}{dt} - 85u \text{ en } \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{F}{10} \text{ geeft } \frac{d^2u}{dt^2} = -5 \frac{du}{dt} - 8\frac{1}{2}u \text{ ofwel}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 5 \frac{du}{dt} + 8\frac{1}{2}u = 0$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 5\lambda + 8\frac{1}{2} = 0$

$$(\lambda + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 8\frac{1}{2} = 0$$

$$(\lambda + 2\frac{1}{2})^2 = -2\frac{1}{4}$$

$$(\lambda + 2\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4}i^2$$

$$\lambda + 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}i \vee \lambda + 2\frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}i$$

$$\lambda = -2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}i \vee \lambda = -2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}i$$

De oplossingen zijn van de vorm $u(t) = (A \cos(1\frac{1}{2}t) + B \sin(1\frac{1}{2}t)) \cdot e^{-2\frac{1}{2}t}$.

$$u(0) = \frac{1}{5} \text{ geeft } A = \frac{1}{5}$$

$$v(t) = \frac{du}{dt} = (-1\frac{1}{2}A \sin(1\frac{1}{2}t) + 1\frac{1}{2}B \cos(1\frac{1}{2}t))e^{-2\frac{1}{2}t} + (A \cos(1\frac{1}{2}t) + B \sin(1\frac{1}{2}t)) \cdot -2\frac{1}{2}e^{-2\frac{1}{2}t}$$

$$v(0) = \frac{3}{10} \text{ geeft } 1\frac{1}{2}B - 2\frac{1}{2}A = \frac{3}{10}$$

$$A = \frac{1}{5} \wedge 1\frac{1}{2}B - 2\frac{1}{2}A = \frac{3}{10} \text{ geeft } 1\frac{1}{2}B = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \text{ ofwel } B = \frac{8}{15}.$$

$$\text{Dus } u(t) = (\frac{1}{5} \cos(1\frac{1}{2}t) + \frac{8}{15} \sin(1\frac{1}{2}t)) \cdot e^{-2\frac{1}{2}t}.$$

- 63** Van een schokdempersysteem is bekend dat de veerconstante $c = 72$ en de dempingcoëfficiënt $k = 40$. Het systeem wordt gebruikt om een voorwerp met massa m te dempen.
- Neem $m = 2$, $u(0) = 1$ en $v(0) = 2$ en stel de formule op van u .
 - Neem $m = 8$ en toon aan dat er een gedempte trilling ontstaat als het voorwerp uit de evenwichtssituatie wordt gehaald.
 - Bereken de maximale waarde van m waarvoor geen gedempte trillingen ontstaan als het voorwerp uit de evenwichtssituatie wordt gehaald.
- 64** Een voorwerp met massa $m = 1000$ is opgenomen in een systeem met een veer en een demper. De veerconstante $c = 500$ en de dempingcoëfficiënt is k .
- Neem $k = 1000$, $u(0) = 1$ en $v(0) = 0$ en stel de formule op van u .
 - Bereken hoe groot k minimaal moet zijn opdat geen gedempte trilling ontstaat als het voorwerp uit de evenwichtsstand wordt gehaald en daarna losgelaten.

- 65** Een voorwerp met massa m is opgenomen in een systeem met een veer met veerconstante c en een demper met dempingcoëfficiënt k . Het voorwerp wordt uit de evenwichtsstand getrokken en op $t = 0$ losgelaten.

a Neem $k = 0$ en toon aan dat er een trilling ontstaat met

$$\text{trillingstijd } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

b Toon aan dat er geen trilling ontstaat als $k \geq 2\sqrt{cm}$.

15

- A 66** Een mountainbike heeft een schokdemper in zijn voorvork met veerconstante $c = 25\,000$ N/m. Tijdens het rijden drukt 50% van de massa op de voorvork. De demper is zo afgesteld dat kritische demping optreedt als de massa gelijk is aan 60 kg.

a Toon aan dat voor de dempingcoëfficiënt k geldt $k \approx 1730$ kg/s.

De totale massa is 100 kg.

- b** Toon aan dat de eigenfrequentie van het veersysteem ongeveer 2,3 Hz is.
- c** Licht toe dat de mountainbiker niet lekker kan fietsen met een trapfrequentie van 70 omwentelingen per minuut.



- A 67** Een kanon wordt afgeschoten zo, dat de 1000 kg zware loop 1,5 m terugloopt. Een demper met veer vangt de loop op en zorgt ervoor dat de loop zo snel mogelijk weer op zijn plaats zit voor het volgende schot. De veerconstante $c = 200\,000$ N/m.

- a** Bereken de dempingcoëfficiënt k .
- b** Stel de formule op van de uitwijking van de loop. Neem $t = 0$ op het moment dat de loop de maximale uitwijking heeft.
- c** Na hoeveel seconden is de uitwijking minder dan 1 cm?

Terugblik

Differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

De differentiaalvergelijking $y'' + py' + qy = 0$ is een differentiaalvergelijking van de tweede orde omdat de tweede afgeleide y'' de hoogste afgeleide is die in de differentiaalvergelijking voorkomt.

Substitutie van $y(t) = e^{\lambda t}$ in de differentiaalvergelijking geeft de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ met discriminant $D = p^2 - 4q$ en oplossingen λ_1 en λ_2 .

- $D > 0$ λ_1 en λ_2 zijn reëel

De oplossingen van de differentiaalvergelijking zijn van de vorm $y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$.

- $D = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$, dus één reële oplossing λ

De oplossingen van de differentiaalvergelijking zijn van de vorm $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{\lambda t}$.

- $D < 0$ $\lambda_1 = a + bi$ en $\lambda_2 = a - bi$

De oplossingen van de differentiaalvergelijking zijn van de vorm $y(t) = (A \cos(bt) + B \sin(bt)) \cdot e^{at}$.

In plaats van $\frac{dy}{dt}$ schrijven we y' en in plaats van $\frac{d^2y}{dt^2}$ schrijven we y'' .

15

Bij de differentiaalvergelijking $y'' + 4y' + 4y = 0$ met $y(0) = -1$ en $y'(0) = 4$ krijg je de karakteristieke vergelijking

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 4\lambda + 4 &= 0 \\ (\lambda + 2)^2 &= 0 \\ \lambda &= -2\end{aligned}$$

Dus $y(t) = (A + Bt) \cdot e^{-2t}$ is de algemene oplossing.

$y(0) = -1$ geeft $A = -1$

$y'(t) = B \cdot e^{-2t} + (A + Bt) \cdot -2e^{-2t}$

$y'(0) = 4$ geeft $B - 2A = 4$

$A = -1$ en $B - 2A = 4$ geeft $B = 2$

Dus de oplossing is $y(t) = (-1 + 2t) \cdot e^{-2t}$.

Gedempte trillingen

Bij massa-veersystemen geldt voor de som van de krachten die op een voorwerp

met massa m werken $F = -c \cdot u - k \cdot \frac{du}{dt}$. Hierin is u de uitwijking van het voorwerp

ten opzichte van de evenwichtsstand, c de veerconstante en k de dempingcoëfficiënt.

De constanten c en k zijn beide positief.

Uit $F = m \cdot a$, $F = -c \cdot u - k \cdot \frac{du}{dt}$ en $a = \frac{d^2u}{dt^2}$ volgt de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{c}{m} \cdot u = 0.$$

Van de karakteristieke vergelijking is de discriminant $D = \frac{k^2 - 4cm}{m^2}$.

Of bij een massa-veersysteem trillingen ontstaan hangt af van D .

Bij $D < 0$ hoort een gedempte trilling. Na een verstoring van het evenwicht

trilt het systeem nog enige tijd na alvorens het tot rust komt. Bij $D > 0$ hoort

overdemping en bij $D = 0$ hoort kritische demping. In de laatste twee gevallen

komt het systeem zonder trilling tot rust.

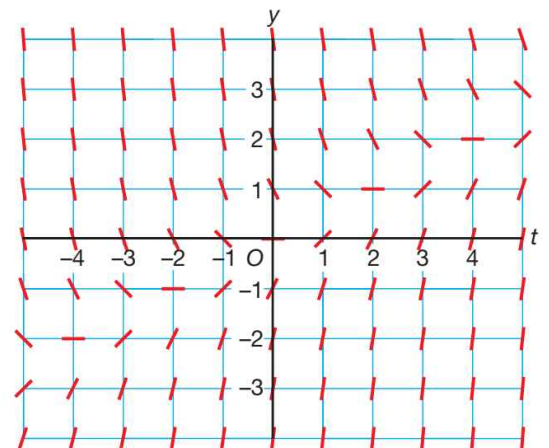
Diagnostische toets

15.1 Dynamische modellen

- 1** Joske zet op tijdstip $t = 0$ een glas met warme melk van 70°C op het aanrecht. De temperatuur in de keuken is 18°C . Na twee minuten is de temperatuur van de melk 60°C .
Stel een dynamisch model op bij de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ van de melk
- met t de tijd in minuten
 - met t de tijd in seconden.
- 2** Marcel daalt op zijn ski's in rechte lijn van een helling af. De zwaartekracht F_Z die op Marcel werkt kan worden ontbonden in de componenten F_E evenwijdig aan de helling en F_N loodrecht op de helling. De luchtweerstand in N die Marcel ondervindt is 0,4 keer zo groot als het kwadraat van zijn snelheid v in m/s. De wrijvingsweerstand van de ski's in N is 10 keer zo groot als de snelheid van Marcel in m/s. De massa van Marcel inclusief zijn skiuitrusting is 110 kg. Verder is $F_E = F_N = 755$ N en is zijn snelheid op $t = 0$ gelijk aan 0 m/s.
- Stel een dynamisch model op bij de snelheid van Marcel.
 - Schets de grafiek van v als functie van de tijd t .

15.2 Differentiaalvergelijkingen

- 3** [► WERKBLAD] Het lijnelementenveld in figuur 15.21 hoort bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = t - 2y$.
- Schets de oplossingskrommen die gaan door de punten $(0, -2)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ en $(0, 2)$.
 - Stel de formule op van de lijn k die de oplossingskromme door $A(-1, -2)$ in dit punt raakt.
 - De lijn $l: y = -t + 5$ raakt een oplossingskromme in het punt B .
Bereken algebraïsch de coördinaten van B .
 - Stel een vergelijking op van de kromme die door de toppen van de oplossingskrommen gaat.



figuur 15.21

- 4** Voor $t \geq 0$ is gegeven $\frac{dy}{dt} = f_p(y)$ met $f_p(y) = -y^2 - 5y + p$.
- Voor welke waarden van $y(0)$ hebben de oplossingskrommen van $\frac{dy}{dt} = f_p(y)$ een horizontale asymptoot?
 - Voor welke waarden van p zijn alle oplossingskrommen dalend?
 - Onderzoek of er een waarde van p bestaat zo, dat de lijn $y = -1$ een horizontale asymptoot van oplossingskrommen is.
 - Een oplossingskromme raakt de lijn $l: y = 3t + 2$ in het punt $A(-1, -1)$.
Bereken p .

15.3 Oplossingen van differentiaalvergelijkingen

- 5** a Toon aan dat de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -2t + y - 1$ een lineaire formule als oplossing heeft en geef deze formule.
 b Toon met behulp van differentiëren naar t aan dat de cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$ door het punt $P(2, 4)$ een oplossingskromme is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{1+t}{3-y}$.
- 6** Bereken de algemene oplossing.
- a $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}$ met $t > 0 \wedge y > 0$ c $\frac{dy}{dt} = y - ty$ met $y > 0$
- b $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}$ d $\frac{dy}{dt} = \frac{t+3}{2-2y}$

15.4 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

- 7** Bereken de algemene oplossing.
- a $\frac{dy}{dt} = y + t + 1$ c $\frac{dy}{dt} = y + \sin(t) + 4 \cos(t)$
- b $\frac{dy}{dt} = -3y - 2e^t$ d $\frac{dy}{dt} = t^2 - ty - t + 1$ met $y > 0$
- 8** De groei van het aantal gistcellen N in miljarden in een afgesloten ruimte wordt beschreven door het dynamische model $\frac{dN}{dt} = N\left(1 - \frac{N}{665}\right)$ met $N = 10$ op $t = 0$. Hierbij is t de tijd in uren. Bereken na hoeveel minuten N voor het eerst minder dan vijf van de grenswaarde verschilt.

15.5 Differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

- 9** Bereken de oplossing met $y(0) = -2$ en $y'(0) = 3$.
- a $y'' + 10y' + 25y = 0$
 b $y'' - 4y' + 8y = 0$
 c $y'' + 5y' - 6y = 0$
- 10** Een kanon wordt afgeschoten zo, dat de 800 kg zware loop 1 meter terugloopt. Een demper met veer vangt de loop op en zorgt ervoor dat de loop zo snel mogelijk weer op zijn plaats zit voor het volgende schot. De veerconstante $c = 125\,000$ N/m.
- a Bereken de dempingcoëfficiënt k .
 b Stel de formule op van de uitwijking van de loop. Neem $t = 0$ op het moment dat de loop maximale uitwijking heeft.
 c Na hoeveel seconden is de uitwijking minder dan 1 mm? Rond af op één decimaal.

De meeste elektriciteitscentrales wekken met een generator energie op in de vorm van wisselspanning van 20 000 volt. Na transport wordt hoogspanning omgezet in een wisselspanning van 220 volt, die geschikt is voor huishoudelijk gebruik. Ook bij draadloze communicatie speelt wisselspanning een belangrijke rol. Hierbij fungeert de antenne als wisselspanningsbron. Door complexe getallen te gebruiken worden de berekeningen die bij wisselspanning nodig zijn eenvoudiger.

Wat leer je?

- Werken met functies van de vorm $f(z) = (a + bi)z + c + di$.
- Werken met complexe functies zoals $f(z) = z^2$, $f(z) = e^z$, $f(z) = \ln(z)$, $f(z) = \sin(z)$ en $f(z) = \cos(z)$.
- Complexe getallen gebruiken bij meetkundige problemen.
- Algebraïsch oplossen van vergelijkingen van de vorm $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.
- Complexe getallen gebruiken bij berekeningen met wisselspanning.



Complexe functies

16



Voorkennis Complexe getallen

Theorie A Vergelijkingen oplossen in $\mathbb{C}$

In de vergelijking $2z + 4 + 3i = \frac{1}{2}z + 5 + 6i$ is z een complex getal, dus een getal van de vorm $z = a + bi$ met a en b reëel. Oplossen van deze vergelijking geeft $2z + 4 + 3i = \frac{1}{2}z + 5 + 6i$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}z &= 1 + 3i \\ z &= 2 + 6i\end{aligned}$$

Voorbeeld

Los op in $\mathbb{C}$.

a $(3 - 2i) \cdot z = 2 + i$

b $z^2 - z + 5 = 0$

Uitwerking

a $(3 - 2i) \cdot z = 2 + i$

$$\begin{aligned}z &= \frac{2 + i}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{6 + 7i + 2i^2}{9 - 4i^2} = \frac{6 + 7i - 2}{9 + 4} \\ &= \frac{4 + 7i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i\end{aligned}$$

$$i^2 = -1$$

$\bar{z} = 3 + 2i$
is de geconjugeerde van
 $z = 3 - 2i$.

b $z^2 - z + 5 = 0$

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 5 = 0$$

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -4\frac{3}{4}$$

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{19}{4}i^2$$

$$z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}i\sqrt{19} \vee z - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}i\sqrt{19}$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{19} \vee z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{19}$$

1 Los op in $\mathbb{C}$.

a $2\frac{1}{2}z - 2 - i = z + 1 + 5i$

b $1\frac{1}{4}z + 5 - 2i = z$

c $(4 - i) \cdot z = 2 + i$

d $(3 + i) \cdot z - 1 + 2i = 5 + i$

e $z^2 - 2z + 5 = 0$

f $z^2 - 5z + 10 = 0$

Theorie B Het complexe vlak

In figuur 16.1 op de volgende bladzijde zijn in het complexe vlak de getallen $z_1 = 1 + 3i$ en $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ getekend.

De lengte van de vector die bij het getal z_1 hoort is $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

We zeggen dat de modulus, of ook wel de absolute waarde van z_1 , gelijk is aan $\sqrt{10}$. Notatie: $|z_1| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$.

En zo is $|z_2| = |2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$.

De modulus van $z = a + bi$ is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 Voor elk complex getal z geldt $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
 Voor de complexe getallen z_1 en z_2 geldt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

De draaiingshoek φ die bij de vector hoort die het complexe getal z aanwijst, is het argument van z .

Notatie: $\varphi = \arg(z)$.

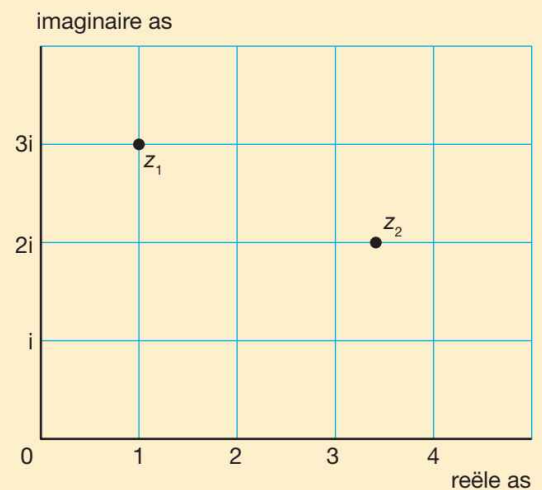
Het argument tussen $-\pi$ en π heet het hoofdargument van z . Notatie: $\text{Arg}(z)$.

Voor de berekening van $\text{Arg}(1 + 3i)$ gebruik je de optie angle (TI) of Arg (Casio).

Je krijgt $\text{Arg}(1 + 3i) \approx 1,249$.

Van het getal $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ is het argument exact te berekenen.

Je krijgt $\text{Arg}(2\sqrt{3} + 2i) = \frac{1}{6}\pi$.



figuur 16.1

Voor elk getal $z \neq 0$ is $\text{Arg}(z)$ de draaiingshoek bij z waarvoor geldt $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$.
 $\text{Arg}(z)$ heet de hoofdwaaarde van het argument van z .

- 2** Bereken de exacte waarde van de modulus en in twee decimalen nauwkeurig de hoofdwaaarde van het argument.

a $z = 3 - i$

c $z = 5 - 2i$

b $z = -4 + 3i$

d $z = -6 - 8i$

- 3** Bereken exact de modulus en de hoofdwaaarde van het argument.

a $z = \sqrt{3} + i$

c $z = -2 + 2i\sqrt{3}$

b $z = 5 - 5i$

d $z = -3 - 3i\sqrt{3}$

- 4** Teken in het complexe vlak de getallen z waarvoor geldt

a $\frac{1}{6}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{2}{3}\pi \wedge |z| \leq 3$

b $-1 \leq \text{Re}(z) \leq 3 \wedge -2 \leq \text{Im}(z) \leq 4$

c $|z - 2 - 3i| = 4 \wedge 0 \leq \text{Im}(z) \leq 5$

d $1 \leq |z| \leq 4 \wedge -\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{4}\pi$.

$$z = a + bi$$

$$a = \text{Re}(z)$$

$$b = \text{Im}(z)$$

Theorie C De formule van Euler

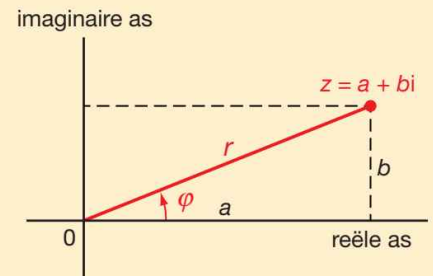
Het complexe getal $z = a + bi$ is ook te schrijven met poolcoördinaten. De poolcoördinaten zijn $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.

Omdat $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$, dus $a = r \cos(\varphi)$ en $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$,
dus $b = r \sin(\varphi)$, is $z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$.

Met machtreeksen is de formule van Euler aangetoond.

De formule van Euler is $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$.

Uit de formule van Euler en $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ volgt
 $z = r e^{i\varphi}$.



figuur 16.2

Drie notaties voor een complex getal

- I De notatie met behulp van het reële deel en het imaginaire deel.
 $z = a + bi$ waarbij $a = \operatorname{Re}(z)$ en $b = \operatorname{Im}(z)$.
- II De notatie met behulp van poolcoördinaten.
 $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ waarbij $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.
- III De notatie $z = r e^{i\varphi}$ waarbij $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.

Voorbeeld

- a Schrijf $z = 5 - 3i$ in de vorm $z = r e^{i\varphi}$. Rond φ af op twee decimalen.
- b Schrijf $z = 5e^{4i}$ in de vorm $z = a + bi$. Rond a en b af op twee decimalen.
- c Schrijf $z = 5e^{\frac{1}{6}\pi i}$ in de vorm $z = a + bi$. Geef a en b exact.

Uitwerking

a $|z| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$ en $\arg(z) \approx -0,54$ geeft $z \approx \sqrt{34} e^{-0,54i}$

b $z = 5e^{4i} = 5(\cos(4) + i \sin(4)) = 5 \cos(4) + 5i \sin(4) \approx -3,27 - 3,78i$

c $z = 5e^{\frac{1}{6}\pi i} = 5(\cos(\frac{1}{6}\pi) + i \sin(\frac{1}{6}\pi)) = 5(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i) = 2\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\frac{1}{2}i$

Omdat in voorbeeld b afgeronde antwoorden worden gevraagd, mag je deze ook meteen met de GR berekenen. Kies dan de instelling $a + bi$. Zie hiernaast.



figuur 16.3 De GR is ingesteld op afronden op twee decimalen.

- 5 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = r e^{i\varphi}$. Rond φ af op twee decimalen.
- a $z = 3 + 2i$
 - b $z = 3 - 4i$
 - c $z = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$

- 6** Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$. Rond a en b af op twee decimalen.
a $z = 3e^{-i}$ **b** $z = \pi^2 e^{2i}$ **c** $z = \sqrt{3} e^{\frac{1}{3}\pi i}$
- 7** Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$. Geef exacte antwoorden.
a $z = 2e^{\frac{1}{4}\pi i}$ **b** $z = \sqrt{3} e^{\frac{1}{3}\pi i}$ **c** $z = 10e^{-\frac{1}{6}\pi i}$
- 8** Omdat $z = \sqrt{3} + i = 2e^{\frac{1}{6}\pi i}$, is $(\sqrt{3} + i)^5 = (2e^{\frac{1}{6}\pi i})^5 = 32e^{\frac{5}{6}\pi i}$.
 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = re^{i\varphi}$. Geef exacte antwoorden.
a $z = (1 - i)^5$ **b** $z = (1 - i\sqrt{3})^{-4}$ **c** $z = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$

Theorie D Complexe wortels

De vergelijking $(z - i)^3 = 8i$ los je op door de vergelijking te schrijven als $(z - i)^3 = 8e^{\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i}$.

Dit geeft $z - i = 2e^{\frac{1}{6}\pi i + k \cdot \frac{2}{3}\pi i}$

$$\begin{aligned} z - i &= 2e^{\frac{1}{6}\pi i} \vee z - i = 2e^{\frac{5}{6}\pi i} \vee z - i = 2e^{\frac{9}{6}\pi i} \\ z - i &= \sqrt{3} + i \vee z - i = -\sqrt{3} + i \vee z - i = -2i \\ z &= \sqrt{3} + 2i \vee z = -\sqrt{3} + 2i \vee z = -i \end{aligned}$$

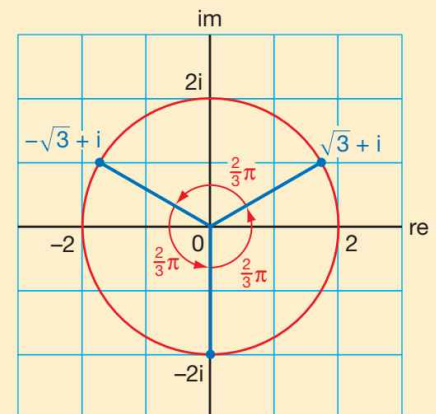
De vergelijking $z^3 = 8i$ los je op door één oplossing op te sporen, deze te tekenen op een cirkel en gebruik te maken van draaisymmetrie.

$\arg(z^3) = \arg(8i) = \frac{1}{2}\pi$, dus een van de oplossingen heeft als argument $\frac{1}{6}\pi$. De straal van de cirkel is 2.

De argumenten verschillen steeds $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

De oplossing is $z = \sqrt{3} + i \vee z = -\sqrt{3} + i \vee z = -2i$.

Om alle uitkomsten van $\sqrt[3]{8i}$ te berekenen, bedenk je dat dit neerkomt op het oplossen van de vergelijking $z^3 = 8i$.



figuur 16.4

- 9** Los exact op in $\mathbb{C}$. Geef de oplossingen in de vorm $z = a + bi$.
a $(z - 3)^2 = 1 + i\sqrt{3}$ **b** $(z - 2 + i)^3 = -8i$ **c** $z^4 = \frac{81}{16}$
- 10** Bereken alle uitkomsten van de volgende wortels. Geef exacte antwoorden in de vorm $z = a + bi$.
a $\sqrt{-10i}$ **b** $\sqrt[3]{-\frac{1}{8i}}$ **c** $\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}}$

16.1 Lineaire complexe functies

- 1** Van een rechthoek in het complexe vlak zijn de hoekpunten gegeven door de getallen $z = 1 + i$, $z = 3 + i$, $z = 3 + 4i$ en $z = 1 + 4i$.
- Teken deze rechthoek.
 - Bereken voor elk van de hoekpunten het getal $z + 3 + 2i$.
 - Teken in de figuur van vraag a de getallen die je in vraag b hebt berekend en teken de rechthoek bij deze getallen. Wat valt je op?

Theorie A De functies $f(z) = z + a + bi$ en $f(z) = a \cdot z$

In opgave 1 heb je bij elk hoekpunt van de gegeven rechthoek het getal $z + 3 + 2i$ berekend.

Zo kreeg je bij elk origineel z het beeld $z + 3 + 2i$.

Je hebt te maken met de functie $f(z) = z + 3 + 2i$.

Bij deze **complexe functie** hoort de translatie $(3, 2)$.

In het algemeen hoort bij de functie $f(z) = z + a + bi$ met a en b reëel de translatie (a, b) .

Bij de functie $f(z) = z + a + bi$ met a en b reëel hoort de translatie (a, b) .

We bekijken nu de complexe functie $f(z) = 2z$.

Uitgaande van de hoekpunten van de rode rechthoek in figuur 16.5 krijg je

$z = 1 + i$ geeft $f(1 + i) = 2 \cdot (1 + i) = 2 + 2i$.

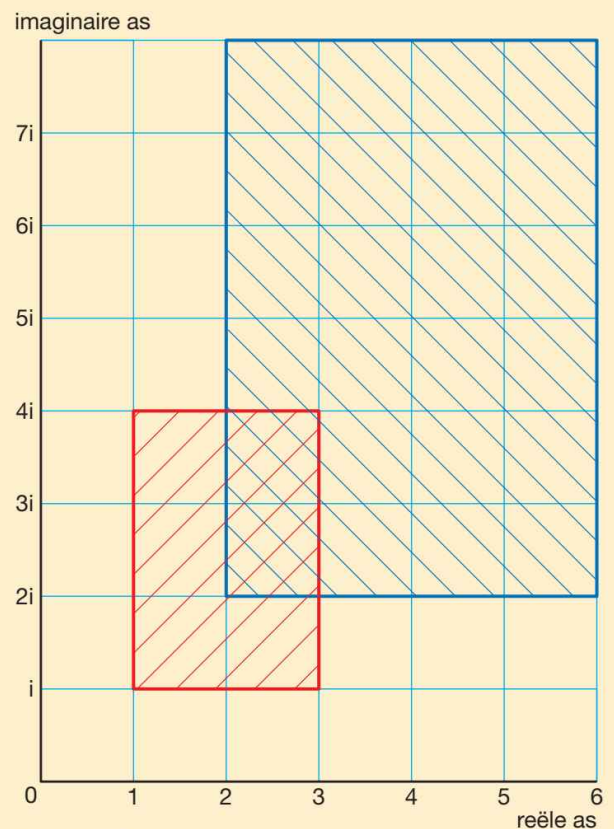
En zo is $f(3 + i) = 2 \cdot (3 + i) = 6 + 2i$,

$f(3 + 4i) = 2 \cdot (3 + 4i) = 6 + 8i$ en

$f(1 + 4i) = 2 \cdot (1 + 4i) = 2 + 8i$.

In figuur 16.5 is het beeld van de rode rechthoek bij deze functie getekend. Je ziet dat het beeld weer een rechthoek is en dat deze verkregen is door het origineel met 2 te vermenigvuldigen ten opzichte van 0.

Bij de functie $f(z) = az$ met a een reëel getal hoort de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor a .



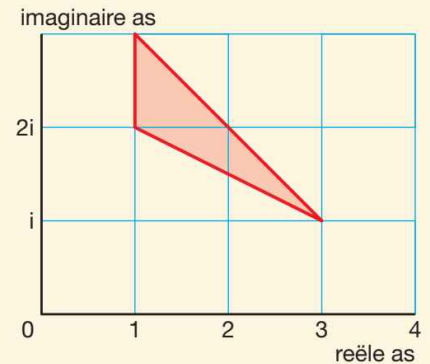
figuur 16.5

Voorbeeld

Teken het beeld van de driehoek met de hoekpunten $1 + 2i$, $3 + i$ en $1 + 3i$ bij de functie $f(z) = -2z + 4 + 3i$.

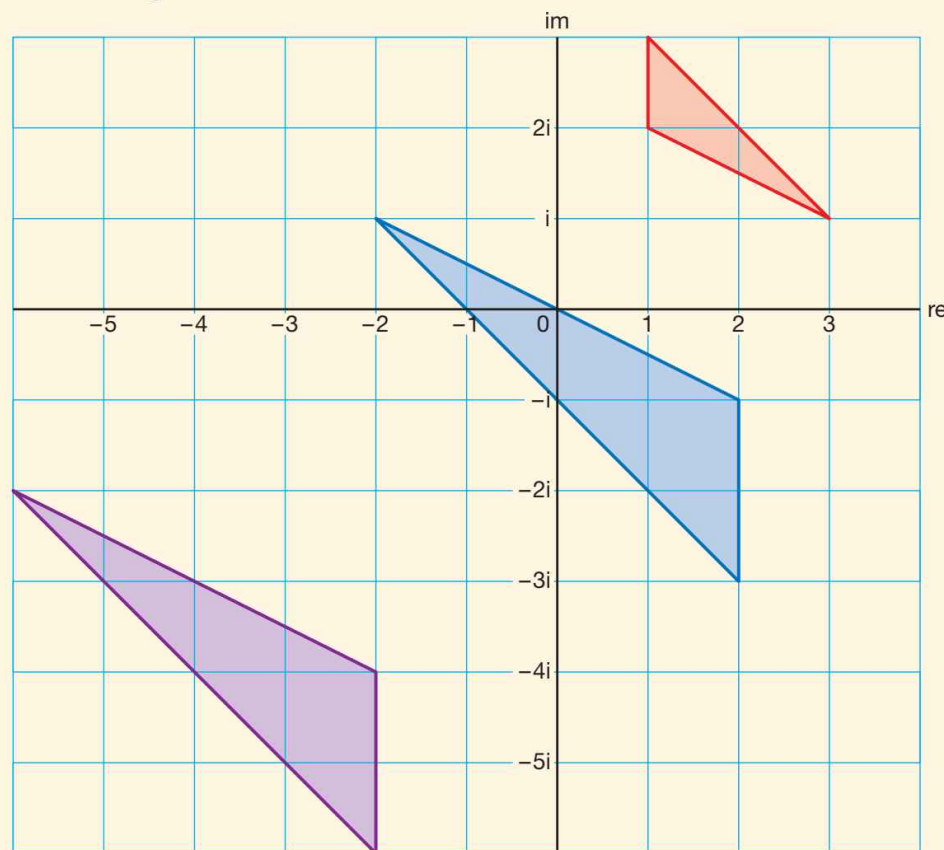
Aanpak

Je hebt te maken met de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor -2 gevolgd door de translatie $(4, 3)$.



figuur 16.6

Uitwerking



In het voorbeeld zie je dat het getal 0 op het beeld ligt. Een getal dat door een functie f op 0 wordt afgebeeld, heet een **nulpunt** van f .

Om het nulpunt van $f(z) = -2z + 4 + 3i$ te vinden, los je de vergelijking $-2z + 4 + 3i = 0$ op.

Je krijgt $-2z + 4 + 3i = 0$

$$2z = 4 + 3i$$

$$z = 2 + 1\frac{1}{2}i$$

Dus het nulpunt is $2 + 1\frac{1}{2}i$.

Ga in de figuur van de uitwerking van het voorbeeld na dat het beeld van $2 + 1\frac{1}{2}i$ inderdaad 0 is.

Een nulpunt van de complexe functie f is een getal dat op $z = 0$ wordt afgebeeld.

Je krijgt de nulpunten van f door de vergelijking $f(z) = 0$ op te lossen.

Een ander belangrijk begrip bij complexe functies is het begrip **dekpunt**.

Een dekpunt van de complexe functie f is een getal dat op zichzelf wordt afgebeeld.

Je krijgt de dekpunten van f door de vergelijking $f(z) = z$ op te lossen.

Oplossen van $f(z) = z$ met $f(z) = -2z + 4 + 3i$ geeft

$$-2z + 4 + 3i = z$$

$$3z = 4 + 3i$$

$$z = 1\frac{1}{3} + i$$

Dus het dekpunt is $1\frac{1}{3} + i$.

Ga na dat in het voorbeeld $f(1\frac{1}{3} + i)$ inderdaad $1\frac{1}{3} + i$ is.

- 2** Gegeven is de functie $f(z) = \frac{1}{2}z + i$.
- Teken de rechthoek met de hoekpunten $-1 + 2i$, $3 + 2i$, $3 + 3i$ en $-1 + 3i$, en teken het beeld van deze rechthoek bij f .
 - Bereken het nulpunt van f .
 - Bereken het dekpunt van f .
- 3** Gegeven is de functie $f(z) = -1\frac{1}{2}z + 3 + 2i$.
- Teken de driehoek met de hoekpunten $2i$, $4 + 2i$ en $2 + 4i$, en teken het beeld van deze driehoek bij f .
 - Bereken het nulpunt van f .
 - Bereken het dekpunt van f .
- A 4** Bereken het nulpunt en het dekpunt van de volgende functies.
- $f(z) = 3z + 2 - 4i$
 - $g(z) = \frac{1}{3}z + 5$
- R 5**
- Voor welke waarde van a heeft de functie $f(z) = az + 5 - 2i$ geen dekpunt?
 - Voor welke waarde van a heeft de functie $f(z) = az + 5 - 2i$ geen nulpunt?
- A 6** Gegeven is de functie $f(z) = 3z + a + bi$.
- Het nulpunt van f is $1 + 2i$.
Bereken a en b .
 - Het dekpunt van f is $1 + 2i$.
Bereken a en b .

- 7** a Teken in het complexe vlak de rechthoek met de hoekpunten $z = 3 + 2i$, $z = 8 + 2i$, $z = 8 + 5i$ en $z = 3 + 5i$.
- b Bereken voor de hoekpunten z van de rechthoek het getal iz en teken de uitkomsten in de figuur van vraag a.
- c De rechthoek van vraag b is ontstaan uit de rechthoek van vraag a door een rotatie.
Over hoeveel radialen en om welk punt is de rechthoek geroteerd?
- d Ook bij de functie $g(z) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})z$ hoort een rotatie.
Over welke hoek wordt geroteerd?

- 8** a Teken in het complexe vlak de driehoek met de hoekpunten $z = 1 + i$, $z = 3 + i$ en $z = 3 + 3i$.
- b Bereken voor de hoekpunten z van de driehoek het getal $-2iz$ en teken de uitkomsten in de figuur van vraag a.
- c De driehoek van vraag b is ontstaan uit de driehoek van vraag a door een rotatie, gevolgd door een vermenigvuldiging.
Geef de rotatiehoek en de vermenigvuldigingsfactor.

Theorie B De functie $f(z) = (a + bi)z$

In opgave 7 heb je gezien dat de functie $f(z) = iz$ het origineel draait om 0 over een hoek van $\frac{1}{2}\pi$.

Neem je de oorspronkelijke rechthoek als domein van de functie f , dan krijg je als bereik de beeldrechthoek.

In opgave 8 kreeg je het beeld van de driehoek door de rotatie over $-\frac{1}{2}\pi$ gevolgd door de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor 2.

Deze eigenschappen van de functies $f(z) = iz$ en $g(z) = -2iz$ volgen uit de formules $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, want voor $f(z) = (a + bi)z$ geldt $|f(z)| = |a + bi| \cdot |z|$ en $\arg(f(z)) = \arg(a + bi) + \arg(z)$.

Elk complex getal z wordt door de functie $f(z) = (a + bi)z$ in het complexe vlak geroteerd over $\arg(a + bi)$ en vermenigvuldigd ten opzichte van 0 met de factor $|a + bi|$. Bij de functie $f(z) = (a + bi)z$ hoort dus een draaivermenigvuldiging.

$$\begin{aligned} |-2iz| &= |-2i| \cdot |z| = 2 \cdot |z| \\ \arg(-2iz) &= \\ \arg(-2i) + \arg(z) &= \\ -\frac{1}{2}\pi + \arg(z) \end{aligned}$$

Bij de functie $f(z) = (a + bi)z$ hoort de draaivermenigvuldiging die bestaat uit de rotatie over $\arg(a + bi)$ en de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor $|a + bi|$.

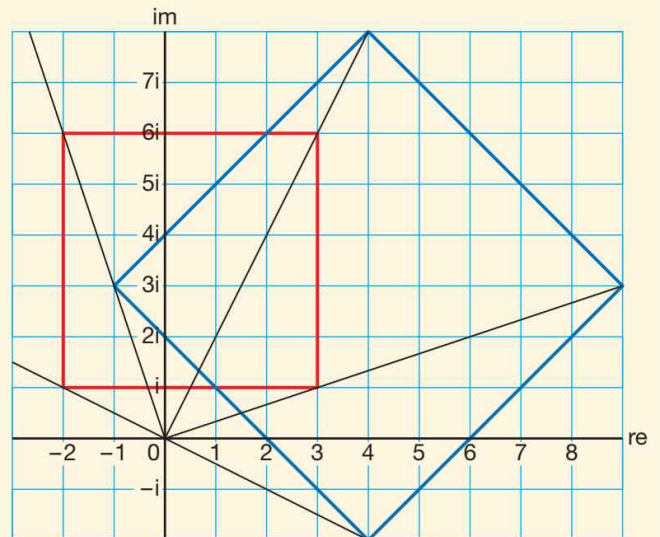
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(z) = (1 - i)z$.

- Teken het beeld van het vierkant met de hoekpunten $-2 + i$, $3 + i$, $3 + 6i$, $-2 + 6i$.
- Geef het bereik bij het domein $|z| \leq 2 \wedge -\frac{1}{4}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{4}\pi$.

Uitwerking

- $|1 - i| = \sqrt{2}$ en $\text{Arg}(1 - i) = -\frac{1}{4}\pi$, dus rotatie over $-\frac{1}{4}\pi$ en vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met $\sqrt{2}$.
- Het bereik is $|z| \leq 2\sqrt{2} \wedge -\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq 0$.



R 9 Zie voorbeeld b.

Teken in één figuur met verschillende kleuren het domein en het bereik.

10 Gegeven is de functie $f(z) = (2 + 2i)z$.

- Teken het beeld van $1 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \wedge 1 \leq \text{Im}(z) \leq 2$.
- Geef het bereik bij het domein $1 \leq |z| \leq 2 \wedge \frac{1}{6}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{3}\pi$.

11 Gegeven is de driehoek met de hoekpunten i , $1 + i$ en $2i$.

Teken het beeld van deze driehoek bij de functie

- $f(z) = (1 + i\sqrt{3})z$
- $g(z) = -3iz$.

12 Gegeven is de functie $f(z) = (\sqrt{3} - i)z$.

- Geef het bereik bij het domein $10 \leq |z| \leq 20 \wedge \frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$.
- Geef het bereik bij het domein $|z| \geq 3 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{2}\pi$.
- Teken het beeld van $\text{Re}(z) \leq \sqrt{3} \wedge \text{Im}(z) \leq 1$.

A 13 Gegeven is de functie $f(z) = (-2 + 2i)z$.

- Teken het beeld van de driehoek met de hoekpunten 1 , $3 + i$ en $2i$.
- Los op $f(z) = 3 + 2i$.
- Los op $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Schrijf eindantwoorden in de vorm $a + bi$.

O14 a Teken de kwartcirkel $|z| \leq 2 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{2}\pi$.

Teken in de figuur van vraag a het beeld van de kwartcirkel bij de functie

b $f(z) = z + 2 + i$

c $g(z) = iz + i$.

Theorie C De functie $f(z) = (a + bi)z + c + di$

Bij de **lineaire complexe functie** $f(z) = (a + bi)z + c + di$ met a, b, c en d reëel hoort een draaivermenigvuldiging gevolgd door de translatie (c, d) .

Bij de functie $f(z) = (a + bi)z + c + di$ met a, b, c en d reëel hoort de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met de factor $|a + bi|$ en de rotatie om 0 over $\arg(a + bi)$ gevolgd door de translatie (c, d) .

16

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(z) = (1 + i)z - 2 + 3i$.

a Bereken het nulpunt van f .

b Teken het beeld van het vierkant met de hoekpunten $1 + i$, $3 + i$, $3 + 3i$ en $1 + 3i$.

c Bereken het origineel van $10 + i$.

Uitwerking

a $f(z) = 0$ geeft $(1 + i)z - 2 + 3i = 0$

$$(1 + i)z = 2 - 3i$$

$$z = \frac{2 - 3i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{2 - 5i - 3}{2} = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$$

Het nulpunt is $-\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$.

b $|1 + i| = \sqrt{2}$ en $\text{Arg}(1 + i) = \frac{1}{4}\pi$, dus

rotatie om 0 over $\frac{1}{4}\pi$,

vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met $\sqrt{2}$ en translatie $(-2, 3)$.

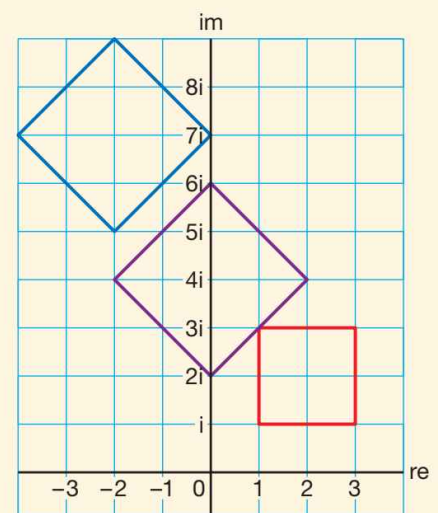
c $f(z) = 10 + i$

$$(1 + i)z - 2 + 3i = 10 + i$$

$$(1 + i)z = 12 - 2i$$

$$z = \frac{12 - 2i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{12 - 14i - 2}{2} = 5 - 7i$$

Dus het origineel is $5 - 7i$.



- 15** Gegeven is de functie $f(z) = (-1 + i)z + 5 + 4i$.
- Bereken het origineel van $10 + i$.
 - Teken het beeld van $|z| \leq 4 \wedge \frac{1}{4}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{2}\pi$.
 - Teken het beeld van $-2 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \wedge -1 \leq \text{Im}(z) \leq 1$.
 - Het beeld van een vierkant V heeft oppervlakte 10.
Bereken de oppervlakte van V .
- 16** Bereken het nulpunt en het dekpunt van de volgende functies.
- $f(z) = (1 + i\sqrt{3})z - 2 + i$
 - $g(z) = -2iz + 1 - 3i$.
- A 17** Gegeven is de functie $f(z) = (\sqrt{3} + i)z + 1 + 2i$.
- Bereken het nulpunt en het dekpunt van f .
 - Bereken het origineel van $5 + 3i$.
 - Teken het beeld van $|z| \leq 3 \wedge \text{Re}(z) \geq 1$.
 - Teken het origineel van $|z| \leq 3 \wedge \text{Re}(z) \geq 1$.

Geschiedenis Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Vóór de tijd van Cauchy was de complexe functietheorie een hulpmiddel bij onder andere hydrodynamica en aerodynamica. Cauchy bouwde een nieuw en zelfstandig onderdeel van de wiskunde rondom de complexe functies.

Cauchy was een Franse wiskundige die zijn leven lang in Parijs heeft geleefd en gewerkt. Hij studeerde en werkte bijvoorbeeld aan de École Polytechnique, een hogeschool bedoeld om ook de 'gewone man' op te leiden tot overheidsfuncties.

De grote verdienste van Cauchy is dat hij een van de eersten was die zich boog over de exactheid in het wiskundig denken.

Zijn naam is verbonden aan diverse begrippen en stellingen in de wiskunde zoals de Cauchy-Riemann vergelijkingen, de Cauchy-integraalstelling en de Cauchyrij. Hij heeft vijf boeken geschreven en meer dan 800 artikelen.



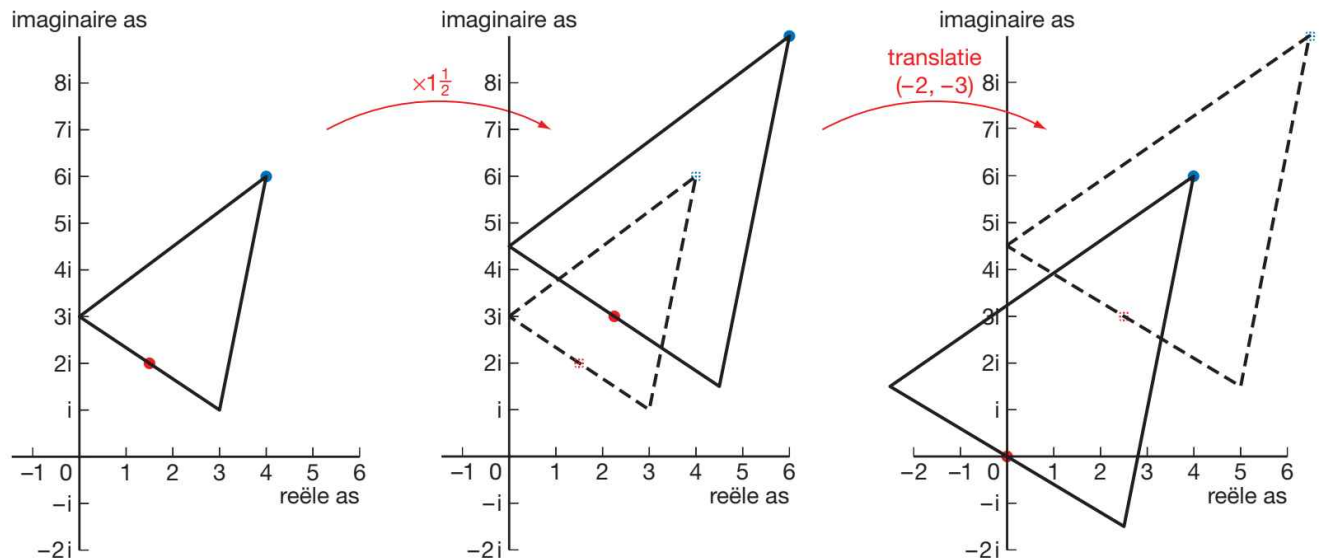
Cauchy

Terugblik

Translaties en vermenigvuldigingen

Bij de functie $f(z) = z + a + bi$ met a en b reëel hoort de translatie (a, b) en bij de functie $f(z) = az$ hoort de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor a .

Bij de functie $f(z) = \frac{1}{2}z - 2 - 3i$ hoort dus de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met $\frac{1}{2}$ gevolgd door de translatie $(-2, -3)$.



Nulpunten en dekpunten

Een nulpunt van de complexe functie f is een getal dat op $z = 0$ wordt afgebeeld. In de figuur hierboven ligt het getal 0 op het beeld.

Het origineel van dit getal vind je door de vergelijking $f(z) = 0$ op te lossen. Dit geeft het getal $\frac{1}{3} + 2i$, dus het nulpunt van $f(z) = \frac{1}{2}z - 2 - 3i$ is $\frac{1}{3} + 2i$. Zie het rode punt in de linkerfiguur.

Het blauwe punt in de linkerfiguur wordt op zichzelf afgebeeld.

Het getal dat hierbij hoort heet een dekpunt van f . Je krijgt het dekpunt van f door de vergelijking $f(z) = z$ op te lossen. Dit geeft het getal $4 + 6i$, dus het getal $4 + 6i$ wordt door f op zichzelf afgebeeld.

Draaivermenigvuldigingen

Bij de functie $f(z) = (a + bi)z$ hoort de draaivermenigvuldiging die bestaat uit de rotatie om 0 over $\arg(a + bi)$ en de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor $|a + bi|$.

Zo hoort bij de functie $f(z) = (1 - i\sqrt{3})z$ de rotatie om 0 over $\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi$ en de vermenigvuldiging ten opzichte van 0

met factor $|1 - i\sqrt{3}| = 2$.

Bij de lineaire complexe functie $f(z) = (a + bi)z + c + di$ met a, b, c en d reëel hoort een draaivermenigvuldiging gevolgd door de translatie (c, d) .

16.2 Niet-lineaire complexe functies

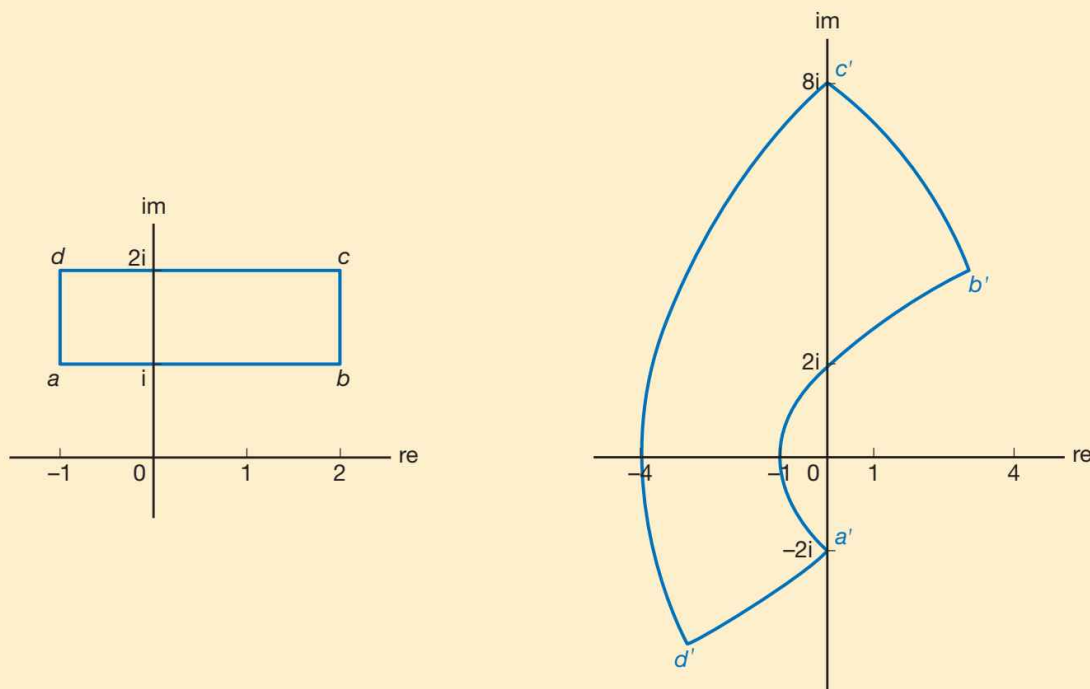
18

Gegeven is de functie $f(z) = z^2$.

- Teken in het complexe vlak de rechthoek met als hoekpunten $a = -1 + i$, $b = 2 + i$, $c = 2 + 2i$ en $d = -1 + 2i$.
- Bereken van de hoekpunten de beelden a' , b' , c' en d' en teken deze beelden in de figuur van vraag a.
- Je weet dat bij een lineaire functie het beeld van een rechthoek weer een rechthoek is. Geldt dit ook voor de functie $f(z) = z^2$? Licht toe.

Theorie A Complexe machtsfuncties

In figuur 16.7 is in het linker assenstelsel de rechthoek uit opgave 18a getekend. In het rechter assenstelsel is het beeld van de rechthoek getekend bij de **complexe machtsfunctie** $f(z) = z^2$.



figuur 16.7

Je ziet dat het beeld geen rechthoek is. Ook zijn de beelden van de zijden van de rechthoek geen lijnstukken, maar delen van krommen.

We lichten dit laatste toe door het beeld van de zijde met de eindpunten a en b te bekijken.

Het getal $1 + i$ ligt op deze zijde.

$$f(1 + i) = (1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

De beelden a' , b' en $2i$ liggen niet op een rechte lijn.

Om het gedrag van complexe machtsfuncties te onderzoeken, gebruik je de regel

$$z^n = (r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Deze regel volgt direct uit de formule van Euler. Dat kun je als volgt inzien.

Je weet dat $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, dus $z^n = r^n(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n$.

De formule van Euler is $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$.

Dus $(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$ en dit geeft $z^n = r^n(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$.

Bij de functie $f(z) = z^n$ geldt $|z^n| = |z|^n$ en $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$.

De regel $(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$ staat bekend als de **formule van De Moivre**.

Bij de functie $f(z) = z^2$ krijg je $|z^2| = |z|^2$ en $\arg(z^2) = 2 \cdot \arg(z)$. Van het origineel $1 + i$ is de modulus $\sqrt{2}$ en het argument $\frac{1}{4}\pi$, dus van

het beeld is de modulus $(\sqrt{2})^2 = 2$ en het argument $2 \cdot \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$.

Het beeld is dus $2i$.

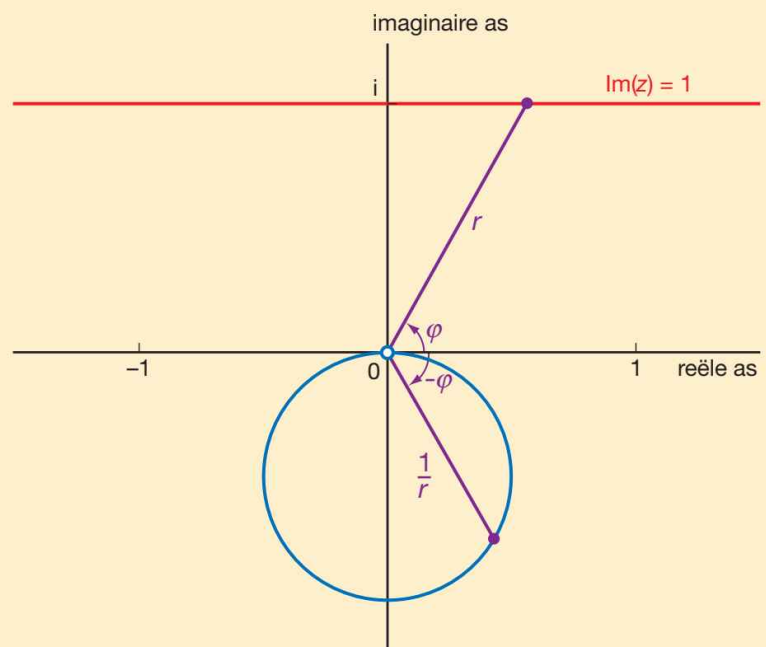
Omdat $\frac{1}{z} = z^{-1}$ krijg je bij de functie $f(z) = \frac{1}{z}$ dat $\left|\frac{1}{z}\right| = |z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{|z|}$

en $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

Hieruit volgt dat je de omgekeerde van de absolute waarde en het tegengestelde van het argument moet nemen. Hiernaast is dat in beeld gebracht met de lijn $\text{Im}(z) = 1$ en zijn beeld.

Bij de functie $f(z) = z^3 + 2 + i$ krijg je als volgt het beeld van z .

- Eerst z^3 , dus $|z|^3$ en $3 \cdot \arg(z)$.
- Dan de translatie $(2, 1)$.



figuur 16.8

Voorbeeld

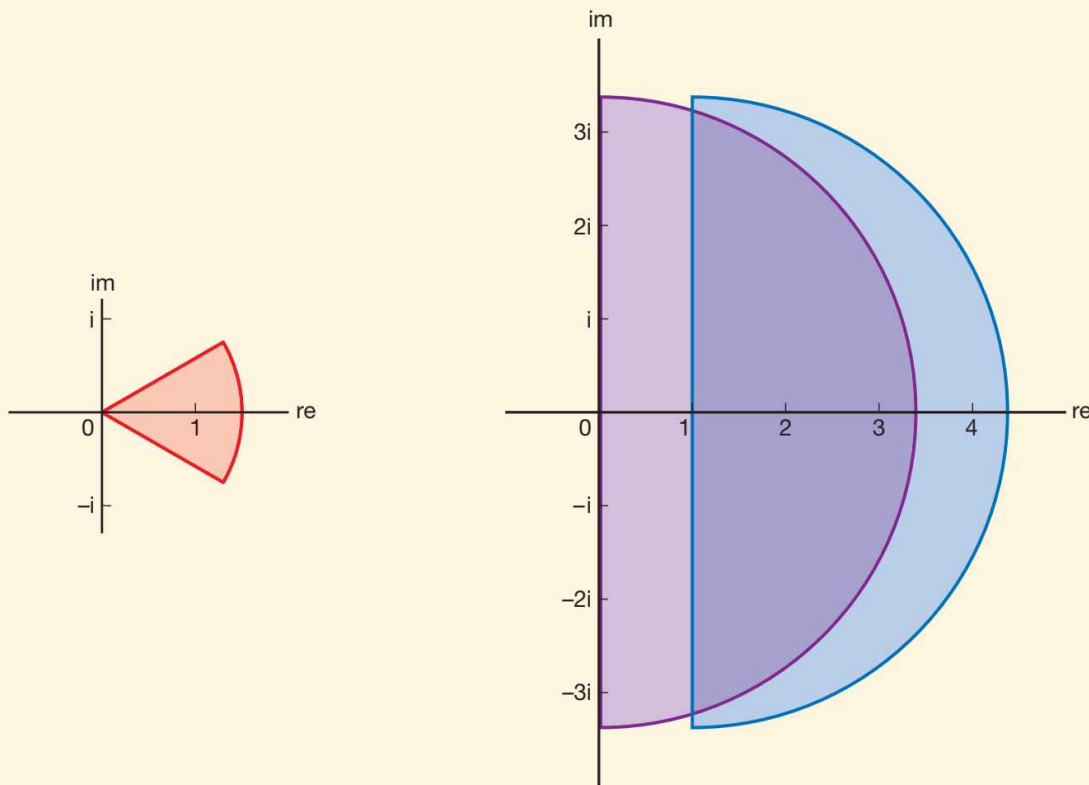
Gegeven is de functie $f(z) = z^3 + 1$.

Teken in twee aparte figuren de cirkelsector

$|z| \leq 1,5 \wedge -\frac{1}{6}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{6}\pi$ en het beeld.

Uitwerking

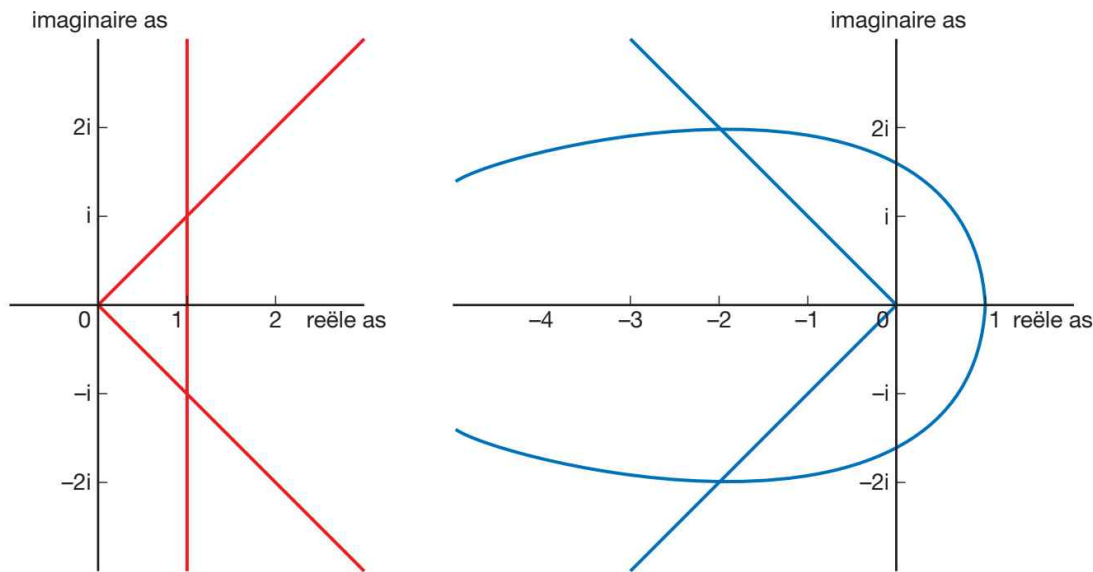
- Eerst z^3 , dus $|z^3| = |z|^3 = 1,5^3 = 3,375$ en $\arg(z^3) = 3 \cdot \arg(z)$,
dus $-\frac{1}{2}\pi \leq \arg(z^3) \leq \frac{1}{2}\pi$.
- Dan de translatie $(1, 0)$.



- 19** Gegeven is de functie $f(z) = z^2 + 2$.
- Bereken de nulpunten van f .
 - Bereken de dekpunten van f .
 - Gegeven is het vlakdeel $2 \leq |z| \leq 3 \wedge \frac{1}{6}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{3}\pi$.
Teken in twee aparte figuren het vlakdeel en het beeld.
 - Het beeld van de lijn $\text{Re}(z) = 1$ is een parabool.
Schets deze parabool. Bereken eerst een aantal punten.

- A 20** Gegeven is de functie $f(z) = iz^2 - 4$.
- Bereken de nulpunten van f .
 - Gegeven is het vlakdeel $|z| \leq 2 \wedge \frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{2}{3}\pi$.
Teken in twee aparte figuren het vlakdeel en het beeld.
 - Schets het beeld van de rechthoek met als hoekpunten $1 - i$, $2 - i$, $2 + i$ en $1 + i$.

- A21** In de linkerfiguur hieronder zie je twee halve lijnen en een verticale lijn. In de rechterfiguur zie je de beelden van deze lijnen bij de functie $f(z) = z^3$.



figuur 16.9

- Lees uit de figuur een oplossing af van de vergelijking $f(z) = -2 - 2i$ en controleer je antwoord met een berekening.
- Rechte lijnen door 0 hebben als beeld bij $f(z) = z^3$ weer een rechte lijn.
Licht dit toe.
- Er zijn twee getallen met $\text{Re}(z) = 1$ die als beeld hetzelfde punt op de reële as hebben.
Bereken welke getallen dit zijn.

O22 Gegeven is de functie $f(z) = e^z$.

- Bereken exact $f(0)$, $f(1)$ en $f(-2)$.
- Licht toe: de functie $f(z) = e^z$ beeldt de reële as af op de positieve reële as.
- Licht toe: $|f(\frac{1}{4}\pi i)| = 1$ en $\text{Arg}(f(\frac{1}{4}\pi i)) = \frac{1}{4}\pi$.
- Bereken $|f(\frac{3}{4}\pi i)|$ en $\text{Arg}(f(\frac{3}{4}\pi i))$.
- Bereken $|f(2\frac{1}{4}\pi i)|$ en $\text{Arg}(f(2\frac{1}{4}\pi i))$.
- Licht toe: de functie $f(z) = e^z$ beeldt de imaginaire as af op de eenheidscirkel.
- Licht toe: de functie $f(z) = e^z$ is periodiek.

O23 Gegeven is de functie $f(z) = \ln(z)$.

- Licht toe dat uit $\ln(e^{i\varphi}) = i\varphi$ volgt $\ln(-1) = \pi i$.
- Licht toe dat ook $\ln(-1) = 3\pi i$.
- Licht toe dat $f(i) = \frac{1}{2}\pi i$.

Theorie B De functies $f(z) = e^z$ en $g(z) = \ln(z)$

Omdat de beelden van de **complexe exponentiële functie** $f(z) = e^z$ positieve reële getallen zijn voor $z \in \mathbb{R}$, beeldt de functie $f(z) = e^z$ de reële as af op de positieve reële as.

Omdat de beelden van $f(z) = e^z$ met z zuiver imaginair op de eenheidscirkel terechtkomen, beeldt de functie $f(z) = e^z$ de imaginaire as af op de eenheidscirkel.

Verder heb je in opgave 22 gezien dat $f(2\frac{1}{4}\pi i) = f(\frac{1}{4}\pi i)$.

In het algemeen is $f(z + k \cdot 2\pi i) = f(z)$, dus de functie $f(z) = e^z$ is periodiek. De periode is $2\pi i$.

De functie $f(z) = e^z$

- beeldt de reële as af op de positieve reële as
- beeldt de imaginaire as af op de eenheidscirkel
- is periodiek met periode $2\pi i$.

Bij de functie $f(z) = e^z$ geldt $f(a + bi) = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$, dus is

- bij vaste a het beeld een cirkel met middelpunt 0 en straal e^a
- bij vaste b het beeld een halve lijn die een hoek van b radialen maakt met de positieve reële as.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(z) = e^z$.

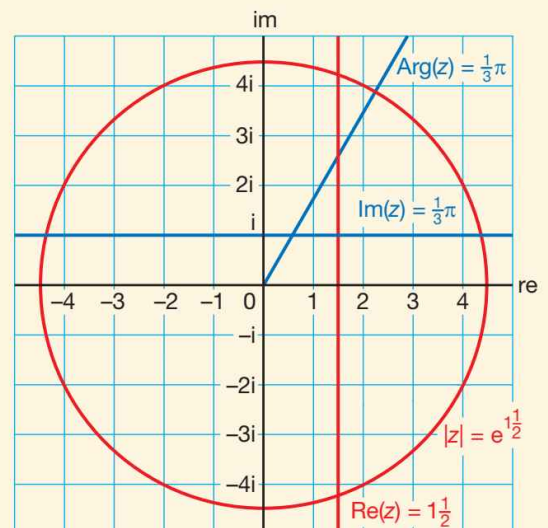
Teken het beeld van $\operatorname{Re}(z) = 1\frac{1}{2}$ en van $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\pi$.

Uitwerking

Het beeld van $\operatorname{Re}(z) = 1\frac{1}{2}$ is de cirkel met

middelpunt 0 en straal $e^{1\frac{1}{2}}$, ofwel de cirkel met vergelijking $|z| = e^{1\frac{1}{2}}$.

Het beeld van $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\pi$ is de halve lijn met beginpunt 0 die een hoek van $\frac{1}{3}\pi$ radialen maakt met de positieve reële as, ofwel de halve lijn met vergelijking $\operatorname{Arg}(z) = \frac{1}{3}\pi$.



Om bij de **complexe logaritmische functie** $f(z) = \ln(z)$ de functiewaarde bij $2i$ exact te berekenen ga je als volgt te werk.
 $f(2i) = \ln(2i) = \ln(2) + \ln(i) = \ln(2) + \ln(e^{\frac{1}{2}\pi i}) = \ln(2) + \frac{1}{2}\pi i$.
 Hierbij is de regel $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ gebruikt.

Ook de andere rekenregels voor reële logaritmen gelden voor complexe logaritmen.

Omdat $\ln(i)$ ook gelijk is aan $\ln(e^{\frac{1}{2}\pi i}) = \frac{1}{2}\pi i$, $\ln(e^{\frac{3}{2}\pi i}) = \frac{3}{2}\pi i$, ... is $\ln(i)$ meerwaardig. In het algemeen is $f(z) = \ln(z)$ met $z \neq 0$ meerwaardig. In dit hoofdstuk beperken we ons tot functiewaarden $f(z)$ waarvoor geldt $-\pi < \operatorname{Im}(f(z)) \leq \pi$.

Uit $z = r \cdot e^{i\varphi}$ volgt
 $i = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{1}{2}\pi} = e^{\frac{1}{2}\pi i}$.

Voorbeeld

Bereken exact bij de functie $f(z) = \ln(z)$.

a $f(-\sqrt{e})$

b $f(i\sqrt{i})$

c $f(1+i)$

Uitwerking

a $f(-\sqrt{e}) = \ln(-\sqrt{e}) = \ln(-1) + \ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\pi i}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \pi i$

b $f(i\sqrt{i}) = \ln(i\sqrt{i}) = \ln(i^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(i) = \frac{1}{2}\ln(e^{\frac{1}{2}\pi i}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi i = \frac{1}{4}\pi i$

c $f(1+i) = \ln(1+i) = \ln(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}) = \ln(\sqrt{2}) + \ln(e^{\frac{1}{4}\pi i}) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4}\pi i$

R 24 Zie de theorie boven het voorbeeld op de vorige bladzijde.

Licht toe dat bij de functie $f(z) = e^z$

- a het beeld van $a + bi$ met a vast de cirkel is met middelpunt 0 en straal e^a
- b het beeld van $a + bi$ met b vast de halve lijn is die een hoek van b radialen maakt met de positieve reële as.

25 Gegeven is de functie $f(z) = e^z$.

Teken het beeld van $\operatorname{Re}(z) = 1$ en van $\operatorname{Im}(z) = \frac{5}{6}\pi$.

26 Gegeven is de functie $f(z) = e^z$.

Teken in aparte figuren het beeld

- a van het lijnstuk met eindpunten $2 - 2i$ en $2 + 4i$
- b van het lijnstuk met eindpunten $-3 + i$ en $2 + i$.

A 27 a Toon aan dat i^i gelijk is aan $e^{-\frac{1}{2}\pi}$.

b Bereken de exacte waarden van i^{2i} en i^{1+i} .

28 Gegeven is de functie $f(z) = \ln(z)$.

Bereken exact.

a $f(-e)$

b $f(-e^2)$

c $f(ei)$

d $f(3i)$

e $f(-3)$

f $f(-2i)$

g $f(2 - 2i)$

h $f(\sqrt{3} - i)$

i $f(e + ei)$

A 29 Bereken exact bij de functie $f(z) = \ln(z)$.

- a $f(-e\sqrt{e})$ c $f\left(-\frac{1}{e}\right)$ e $f\left(\frac{2}{1+i}\right)$
 b $f(-i^2\sqrt{i})$ d $f\left(\frac{2}{i\sqrt{i}}\right)$ f $f\left(\frac{e}{1+i\sqrt{3}}\right)$

A 30 Gegeven is het lijnstuk L met de eindpunten $\sqrt{3} + i$ en $-\sqrt{3} + i$.

- a Teken L en schets het beeld $f(L)$ van L bij de functie $f(z) = \ln(z)$ in één figuur.
 b Teken L en schets het beeld $g(L)$ van L bij de functie $g(z) = \ln(e^2 z)$ in één figuur.
 c Teken L en schets het beeld $h(L)$ van L bij de functie $h(z) = \ln(iz)$ in één figuur.

O 31 In hoofdstuk 10 heb je aangetoond dat $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

Neem $x = i$ en toon aan dat $\cos(i) = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$.

Theorie C De functies $f(z) = \cos(z)$ en $g(z) = \sin(z)$

In hoofdstuk 10 heb je aangetoond dat $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ en

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Neem je in deze formules voor x het complexe getal z , dan krijg je **complexe goniometrische functies**.

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ en } \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(z) = \sin(z)$.

Bereken exact $f\left(\frac{1}{6}\pi + i\right)$. Geef het antwoord in de vorm $a + bi$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{6}\pi + i\right) &= \sin\left(\frac{1}{6}\pi + i\right) = \frac{e^{i\left(\frac{1}{6}\pi + i\right)} - e^{-i\left(\frac{1}{6}\pi + i\right)}}{2i} = \frac{e^{-1 + \frac{1}{6}\pi i} - e^{1 - \frac{1}{6}\pi i}}{2i} = \frac{e^{-1} \cdot e^{\frac{1}{6}\pi i} - e \cdot e^{-\frac{1}{6}\pi i}}{2i} \\ &= \frac{e^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) - e\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)}{2i} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2ei} + \frac{\frac{1}{2}i}{2ei} - \frac{\frac{1}{2}e\sqrt{3}}{2i} + \frac{\frac{1}{2}ei}{2i} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4e} \cdot i + \frac{1}{4e} + \frac{e\sqrt{3}}{4} \cdot i + \frac{e}{4} = \frac{1}{4e} + \frac{e}{4} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{4e} + \frac{e\sqrt{3}}{4}\right)i \end{aligned}$$

32 Gegeven zijn de functies $f(z) = \sin(z)$ en $g(z) = \cos(z)$.

Bereken exact. Geef het antwoord in de vorm $a + bi$.

a $f(i)$

c $f(\frac{1}{4}\pi - 3i)$

b $g(\frac{1}{6}\pi + i)$

d $g(\frac{1}{3}\pi + 2i)$

A 33 Toon aan dat voor elk complex getal z geldt

a $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

b $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

Informatief Hyperbolische functies

Uitgaande van de definitie $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ krijg je $\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ wordt wel de *kettinglijn* genoemd.

Een kettinglijn ontstaat als op een vrijhangend koord alleen de zwaartekracht werkt.

Bij een boog die gebouwd is als een omgekeerde kettinglijn, zoals op de foto hieronder, komen in de constructie alleen drukkrachten voor. Je hebt dus niet te maken met krachten loodrecht op de boog.

De functie $f(x) = \cos(ix)$ staat bekend onder de naam cosinushyperbolicus,

notatie $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. En zo is de functie sinushyperbolicus $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

en de functie tangenshyperbolicus $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

De naam hyperbolicus is als volgt te verklaren.

Net als $x = \cos(t) \wedge y = \sin(t)$ met t op $[0, 2\pi]$ de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$ oplevert, krijg je met $x = \cosh(t) \wedge y = \sinh(t)$ de eenheidshyperbool $x^2 - y^2 = 1$.

Een kettinglijn ontstaat door een parabool te laten rollen over een rechte lijn. Het brandpunt van de parabool beschrijft dan een kettinglijn.



De Gateway Arch in de Amerikaanse stad St. Louis. De poort, die 192 meter hoog en 192 meter breed is, staat symbool voor de vele Amerikanen die westwaarts gingen.

Terugblik

Complexe machtsfuncties

Bij de complexe machtsfunctie $f(z) = z^n$ geldt $|z^n| = |z|^n$ en $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$.

Bij de complexe machtsfunctie $f(z) = \frac{1}{z^2}$ wordt van elk getal z de omgekeerde van de modulus in het kwadraat genomen en het argument met -2 vermenigvuldigd.

Dus het beeld van de cirkelsector $|z| \leq 0,4 \wedge -\frac{1}{4}\pi \leq \arg(z) \leq \frac{1}{3}\pi$

bij de functie $f(z) = \frac{1}{z^2}$ is de cirkelsector

$$|z| \leq \left(\frac{1}{0,4}\right)^2 = 6,25 \wedge -\frac{2}{3}\pi \leq \arg(z) \leq \frac{1}{2}\pi.$$

De functie $f(z) = e^z$

Omdat e^a met a reëel groter dan nul is voor elke waarde van a , beeldt de functie $f(z) = e^z$ de reële as af op de positieve reële as.

Omdat bij e^{bi} voor elke waarde van b geldt $|e^{bi}| = 1$, beeldt de functie $f(z) = e^z$ de imaginaire as af op de eenheidscirkel.

Verder is de functie $f(z) = e^z$ periodiek met periode $2\pi i$.

De functie $f(z) = \ln(z)$

Bij het berekenen van functiewaarden bij de complexe logaritmische functie $f(z) = \ln(z)$ gebruik je de rekenregels voor logaritmen en de notatie $z = re^{i\varphi}$.

Zo is $f(-e^4) = \ln(-e^4) = \ln(-1) + \ln(e^4) = \ln(e^{\pi i}) + 4 = 4 + \pi i$.

$$\text{En } f\left(\frac{10 + 10i}{e}\right) = \ln\left(\frac{10 + 10i}{e}\right) = \ln(10 + 10i) - \ln(e) =$$

$$\ln(10\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}) - 1 = \ln(10\sqrt{2}) + \ln(e^{\frac{1}{4}\pi i}) - 1 = \ln(10\sqrt{2}) - 1 + \frac{1}{4}\pi i.$$

De functies $f(z) = \cos(z)$ en $g(z) = \sin(z)$

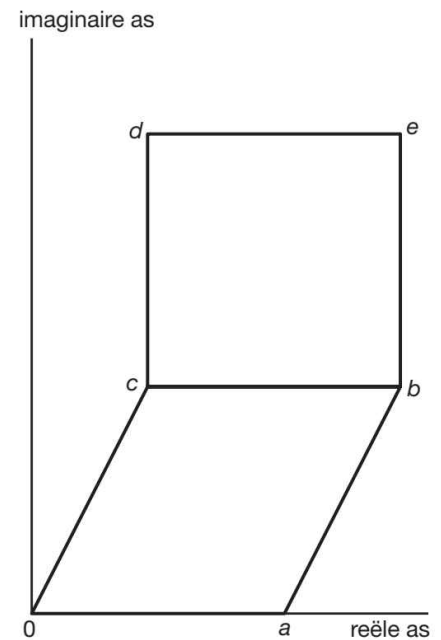
Bij het berekenen van functiewaarden bij de functies $f(z) = \cos(z)$ en $g(z) = \sin(z)$ gebruik je $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ en $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

$$\begin{aligned} \text{Zo is } f\left(\frac{1}{2}\pi + i\right) &= \cos\left(\frac{1}{2}\pi + i\right) = \frac{e^{i(\frac{1}{2}\pi + i)} + e^{-i(\frac{1}{2}\pi + i)}}{2} = \frac{e^{-1 + \frac{1}{2}\pi i} + e^{1 - \frac{1}{2}\pi i}}{2} = \\ &= \frac{e^{-1} \cdot e^{\frac{1}{2}\pi i} + e \cdot e^{-\frac{1}{2}\pi i}}{2} = \frac{e^{-1} \cdot i + e \cdot (-i)}{2} = \frac{i}{2e} - \frac{ei}{2} = \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{2}e\right)i. \end{aligned}$$

16.3 Meetkunde met complexe getallen

O34 In figuur 16.10 is in het complexe vlak een ruit getekend met de hoekpunten 0 , a , b en c . Ook is een vierkant getekend met de hoekpunten b , c , d en e . Het getal m is het midden van het vierkant.

- Licht toe dat $b = a + c$.
- Licht toe dat $d = c + ia$.
- Druk e uit in a en c .
- Druk m uit in a en c .



figuur 16.10

Theorie A Complexe getallen bij meetkundige figuren

Bij meetkundige problemen is het soms handig om te werken met complexe getallen. Je gebruikt dan de complexe getallen a , b , c , enzovoort, waarbij het getal a hoort bij het punt A , het getal b hoort bij het punt B , enzovoort.

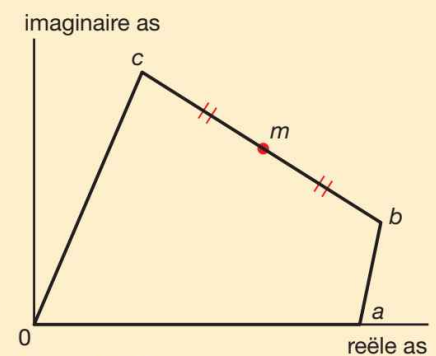
Is het punt M het midden van het lijnstuk BC , dan geldt dus $m = \frac{1}{2}(b + c)$.

Bij de functie $f(z) = (a + bi)z$ hoort de draaivermenigvuldiging die bestaat uit de rotatie om 0 over $\arg(a + bi)$ en de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor $|a + bi|$.

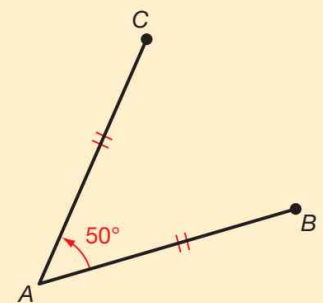
Bij de draaivermenigvuldiging die bestaat uit de rotatie om 0 over de hoek φ en de vermenigvuldiging ten opzichte van 0 met factor 1 hoort de functie $f(z) = (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))z$, immers $\arg(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \varphi$ en $|\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)| = 1$.

Draai je lijnstuk AB over een hoek van 50° om A , dan geldt voor het beeld c van b dat $c = a + (\cos(50^\circ) + i \sin(50^\circ))(b - a)$, immers

$\vec{c} = \vec{a}$ plus de gedraaide vector $\overrightarrow{AB}$.

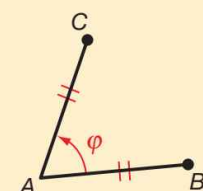


figuur 16.11



figuur 16.12

Bij de rotatie van het lijnstuk AB om A over een hoek φ geldt voor het beeld C van B dat $c = a + (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))(b - a)$. Hierin zijn a , b en c de complexe getallen die horen bij de punten A , B en C .



Draai je het lijnstuk PQ om het punt P over een hoek van 60° , dan geldt voor het beeld R van Q dat

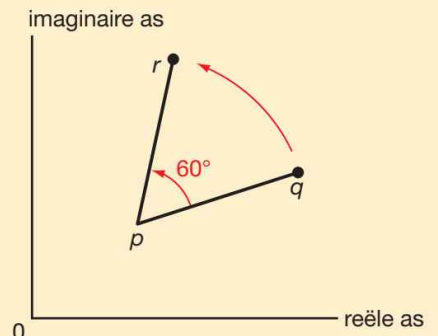
$$r = p + (\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))(q - p)$$

$$= p + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)(q - p)$$

$$= p + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)q - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)p$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)p + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)q.$$

In deze paragraaf laten we het assenstelsel in het vervolg weg.



figuur 16.13

Voorbeeld

In figuur 16.14 is het parallellogram $ABCD$ getekend met op zijde CD de gelijkzijdige driehoek CDE . Verder is het punt M het midden van CE .

Druk de complexe getallen e en m uit in de complexe getallen a , b en d .

Uitwerking

$$c = b + (d - a) = b + d - a$$

$$e = d + (\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))(c - d)$$

$$= d + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)(b - a)$$

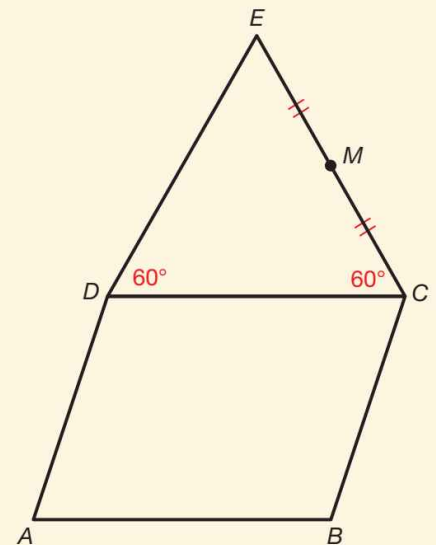
$$= d + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)b - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)a$$

$$m = \frac{1}{2}(c + e)$$

$$= \frac{1}{2}(b + d - a + d + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)b - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)a)$$

$$= \frac{1}{2}((1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})b + 2d - (1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})a)$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i\sqrt{3}\right)b + d - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i\sqrt{3}\right)a$$



figuur 16.14

R 35 Bij wiskunde B heb je gewerkt met vectoren bij vragen zoals in

opgave 34. Je gebruikt dan $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ rechtsom draaien over 90°

geeft $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ en $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ linksom draaien over 90° geeft

$\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$. Zo krijg je bij opgave 34b $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a}_L$.

a Geef op dezelfde manier $\vec{e}$ en $\vec{m}$.

b Welk voordeel heeft het werken met complexe getallen in plaats van met vectoren?

36 Het lijnstuk AB wordt gedraaid om het punt A over een hoek φ .

Noteer het complexe getal c dat hoort bij het beeld C van B bij

a $\varphi = 90^\circ$

c $\varphi = -60^\circ$

e $\varphi = 45^\circ$

b $\varphi = -90^\circ$

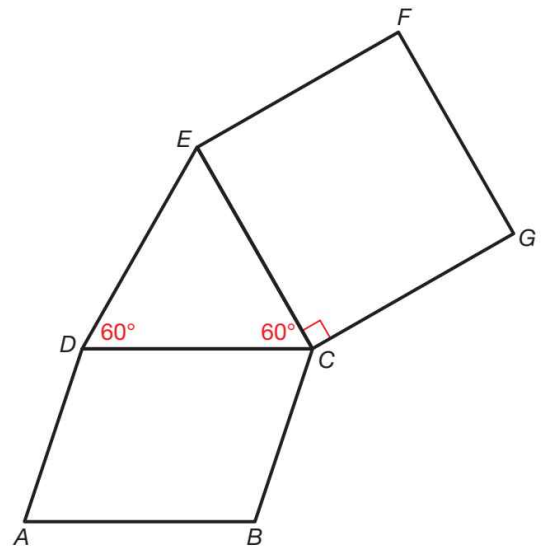
d $\varphi = 30^\circ$

f $\varphi = 135^\circ$

- 37** In figuur 16.15 is de figuur van het voorbeeld nog eens getekend. Bovendien is het vierkant $CEFG$ getekend.

Bij het punt G hoort het complexe getal $g = c - i(e - c)$ ofwel $g = (1 + i)c - ie$.

- a** Licht dit toe en druk g uit in b en d .
b Druk het complexe getal f uit in b en d .



figuur 16.15

- 38** In figuur 16.16 is in het complexe vlak een parallellogram getekend met op twee zijden een vierkant.

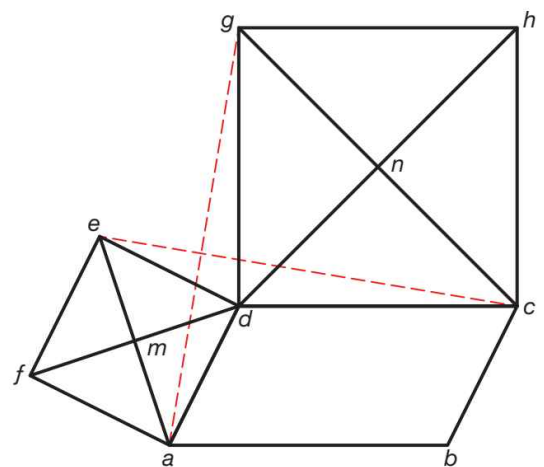
Om h uit te drukken in a , b en d bedenk je dat

$$\begin{aligned} h &= b + (c - b) + (h - c) \\ &= b + (d - a) - i(d - c) \\ &= b + d - a - i(a - b) \\ &= (-1 - i)a + (1 + i)b + d. \end{aligned}$$

- a** Druk c , e , f , g , m en n uit in a , b en d .

Er geldt $g - a = d - a + i(b - a)$.

- b** Licht dit toe.
c Druk $e - c$ uit in a , b en d en toon aan dat $i(g - a) = e - c$.
d Welke conclusie trek je uit vraag c over de lijnstukken AG en CE ?

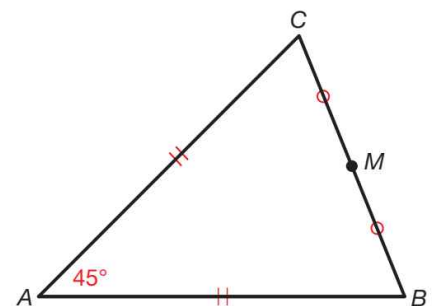


figuur 16.16

- 39** Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 45^\circ$ en $AB = AC$. Het punt M is het midden van BC .

Het complexe getal m kan worden uitgedrukt in a en b volgens $m = pa + qb$.

Bereken de exacte waarden van p en q .

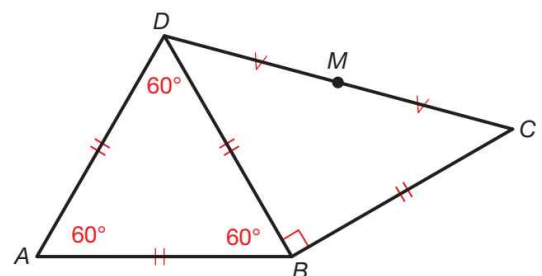


figuur 16.17

- 40** Van de vierhoek $ABCD$ is $\angle A = 60^\circ$ en $AB = BC = AD$. Verder is $\angle CBD = 90^\circ$ en $BD = AB$. Zie figuur 16.18. Het punt M is het midden van CD .

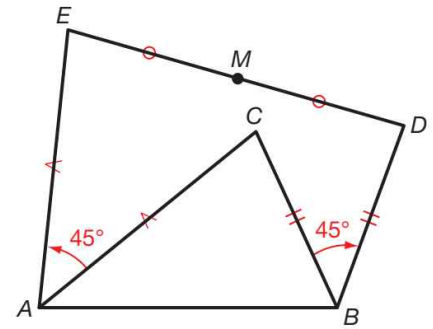
Het complexe getal m kan worden uitgedrukt in a en b volgens $m = pa + qb$.

Bereken de exacte waarden van p en q .



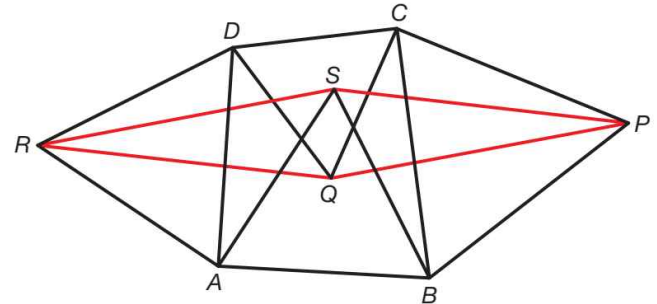
figuur 16.18

- A 41** Gegeven is de driehoek ABC in figuur 16.19. De zijde AC is om A over een hoek van 45° geroteerd en de zijde BC is om B over een hoek van -45° geroteerd. Zo ontstaan de punten E en D .
 Het punt M is het midden van het lijnstuk DE .
 Het complexe getal m kan worden uitgedrukt in a , b en c volgens $m = pa + qb + rc$.
 Bereken de exacte waarden van p , q en r .



figuur 16.19

- 42** In figuur 16.20 is de vierhoek $ABCD$ getekend met de naar buiten gerichte gelijkzijdige driehoeken BCP en ADR en de naar binnen gerichte gelijkzijdige driehoeken CDQ en ABS .



figuur 16.20

- a** Toon aan dat
 $q - r = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}c\sqrt{3}\right)i$.
b Toon aan dat
 $p - s = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}c\sqrt{3}\right)i$.

Uit vraag a en b volgt dat $PS = QR$ en $PS \parallel QR$.

- c** Toon aan dat $PQ = RS$ en $PQ \parallel RS$.

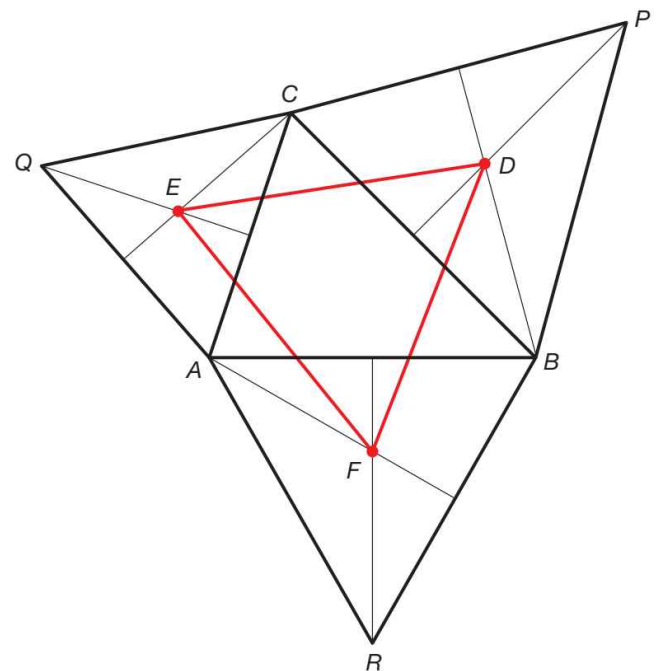
- d** Hoe volgt uit het bovenstaande dat $PQRS$ een parallellogram is?

- A 43** In deze opgave ga je **de stelling van Napoleon** bewijzen met behulp van complexe getallen.

Stelling van Napoleon

Als op de zijden van een driehoek gelijkzijdige driehoeken worden opgericht, dan zijn de zwaartepunten van deze driehoeken de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

- a** Bewijs de stelling. Gebruik dat bij het zwaartepunt D van driehoek BCP het complexe getal $d = \frac{1}{3}(b + c + p)$ hoort.
b Bewijs dat de stelling ook geldig is als de drie gelijkzijdige driehoeken naar binnen zijn gericht.

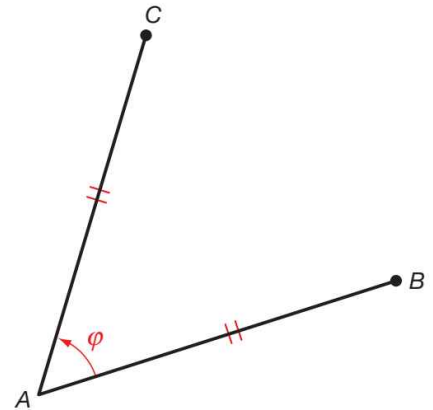


figuur 16.21

Terugblik

Complexe getallen bij meetkundige figuren

Bij de rotatie van het lijnstuk AB om A over een hoek φ geldt voor het beeld C van B dat $c = a + (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))(b - a)$. Hierin zijn a , b en c de complexe getallen die horen bij de punten A , B en C .



In de figuur hiernaast is de vierhoek $ABDE$ ontstaan uit de driehoek ABC door de zijde AC te roteren om A over 60° en de zijde BC te roteren om B over -30° . Je kunt het complexe getal dat hoort bij het midden M van DE uitdrukken in de complexe getallen a , b en c .

$$e = a + (\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))(c - a)$$

$$= a + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)(c - a)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)a + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)c$$

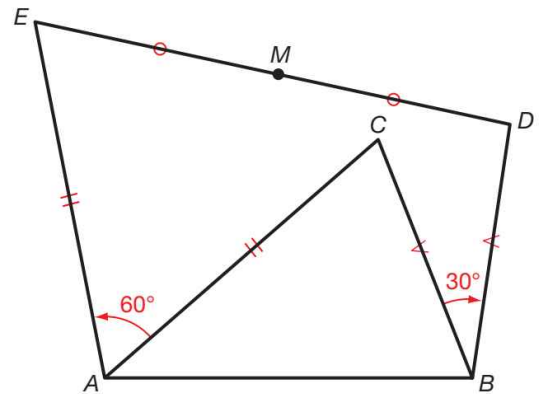
$$d = b + (\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ))(c - b)$$

$$= b + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)(c - b)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)b + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)c$$

$$m = \frac{1}{2}(d + e)$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\sqrt{3}\right)a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i\right)b + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}i + \frac{1}{4}i\sqrt{3}\right)c$$



16.4 Derdegraadsvergelijkingen

O44 Gegeven is de vergelijking $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

a Licht toe dat $x = 1$ een oplossing van de vergelijking is.

De vergelijking heeft ook twee complexe oplossingen.

b Toon aan dat $x = -1 + i\sqrt{2}$ één van deze oplossingen is.

Theorie A De factorstelling

In opgave 44 heb je gezien dat $x = 1$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$. Daarom is $x^3 + x^2 + x - 3$ te ontbinden, waarbij één van de factoren $x - 1$ is.

Door een staartdeling te maken is de andere factor van de ontbinding te vinden.

$$\begin{array}{r}
 x - 1 \overline{) x^3 + x^2 + x - 3} \quad \backslash x^2 + 2x + 3 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 2x^2 + x \\
 \underline{2x^2 - 2x} \\
 3x - 3 \\
 \underline{3x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 216 \overline{) 52920} \quad \backslash 245 \\
 \underline{432} \\
 972 \\
 \underline{864} \\
 1080 \\
 \underline{1080} \\
 0
 \end{array}$$

Handwritten notes: 2×216 (pointing to 432), $529 : 216$ gaat 2 keer (pointing to 245).

Dus $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ geeft

$(x - 1)(x^2 + 2x + 3) = 0$ en dus is

$x - 1 = 0 \vee x^2 + 2x + 3 = 0$

$x = 1 \vee (x + 1)^2 - 1 + 3 = 0$

$x = 1 \vee (x + 1)^2 = -2$

$x = 1 \vee (x + 1)^2 = 2i^2$

$x = 1 \vee x + 1 = i\sqrt{2} \vee x + 1 = -i\sqrt{2}$

$x = 1 \vee x = -1 + i\sqrt{2} \vee x = -1 - i\sqrt{2}$

De vergelijking $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ heeft dus drie oplossingen waarvan er twee complex zijn.

Weet je van een derdegraadsvergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ één oplossing k , dan volgt uit de **factorstelling** dat $x^3 + ax^2 + bx + c$ te ontbinden is in twee factoren waarvan $x - k$ een factor is.

Factorstelling

Als $x = k$ een oplossing is van de vergelijking $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, dan is $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - k)(x^2 + \dots)$.

Voorbeeld

Los $z^3 + 3z^2 + 4z + 4 = 0$ op in $\mathbb{C}$.

Uitwerking

Voer in $y_1 = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = -2$.

$z + 2 \mid z^3 + 3z^2 + 4z + 4 \searrow z^2 + z + 2$

$$\begin{array}{r} z^3 + 2z^2 \quad - \\ \hline z^2 + 4z \\ z^2 + 2z \quad - \\ \hline 2z + 4 \\ 2z + 4 \quad - \\ \hline 0 \end{array}$$

$$z^2 + z + 2 = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -1\frac{3}{4}$$

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}i^2$$

$$z + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}i\sqrt{7} \vee z + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}i\sqrt{7}$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7} \vee z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{7}$$

$$\text{Dus } z = -2 \vee z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7} \vee z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{7}.$$

45 Los op in $\mathbb{C}$.

a $z^3 - 4z^2 + 4z - 16 = 0$

b $z^3 + 2z - 12 = 0$

c $2z^3 + 3z^2 - 8z = 30$

d $2z^3 - z^2 + 3z + 2 = 0$

46 Gegeven is de vergelijking $z^3 + pz = q$.

Stel $z = u + v$ en $p = -3uv$.

a Toon aan dat zo de vergelijking $u^3 + v^3 = q$ ontstaat.

Uit $p = -3uv$ volgt $v = -\frac{p}{3u}$.

b Toon aan dat hiermee de vergelijking $u^3 + v^3 = q$ te schrijven is als $u^6 - qu^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$.

O47

Gegeven is de vergelijking $z^3 + 6z = 20$.

Substitutie van $z = u + v$ en $uv = -2$ geeft de vergelijking $u^3 + v^3 = 20$.

a Toon dit aan.

Uit $uv = -2$ volgt $v = -\frac{2}{u}$.

b Toon aan dat hiermee de vergelijking $u^3 + v^3 = 20$ te schrijven is als $u^6 - 20u^3 - 8 = 0$.

c Toon aan dat uit $u^6 - 20u^3 - 8 = 0$ volgt dat

$$u^3 = \frac{20 - \sqrt{432}}{2} \vee u^3 = \frac{20 + \sqrt{432}}{2}.$$

d Toon aan dat uit de oplossing

$$u^3 = \frac{20 + \sqrt{432}}{2} = 10 + \sqrt{108} = 10 + 6\sqrt{3} \text{ volgt}$$

$$v^3 = 10 - 6\sqrt{3}.$$

Uit $z = u + v$, $u^3 = 10 + 6\sqrt{3}$ en $v^3 = 10 - 6\sqrt{3}$ volgt

$$z = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}.$$

e Licht dit toe.

f Bereken $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$ met de GR en controleer deze oplossing door substitutie in de vergelijking $z^3 + 6z = 20$.

Eerst $z = u + v$
en daarna $uv = -2$!!
Wie komt er nu
op zo'n idee?!



Theorie B De vergelijking $z^3 + pz = q$

Door de vergelijking $z^3 + 6z = 20$ op te lossen met de GR krijg je $z = 2$. Daarna zijn met behulp van de factorstelling de andere oplossingen te berekenen.

Het is echter ook mogelijk de oplossing $z = 2$ algebraïsch te berekenen. Dit heb je in opgave 47 gedaan. Je stelde $z = u + v$ en $uv = -2$ en na substitutie kreeg je een vergelijking in u die algebraïsch was op te lossen.

Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $z^3 + pz = q$ stel je $z = u + v$ en $p = -3uv$. Je hebt in opgave 46 aangetoond dat zo de vergelijking $u^3 + v^3 = q$ ontstaat.

Ja, eerst $z = u + v$
en dan $p = -3uv$
zodat je krijgt $u^3 + v^3 = q$
en dus $u^6 - qu^3 - r = 0$.
Je moet er maar opkomen!



Werkschema: het algebraïsch oplossen van de vergelijking $z^3 + pz = q$

- 1 Stel $z = u + v$ en $p = -3uv$ en herleid hiermee de vergelijking tot $u^3 + v^3 = q$.
- 2 Gebruik $p = -3uv$ om de vergelijking te herleiden tot $u^6 - qu^3 - r = 0$.
- 3 Bereken u^3 en v^3 en bereken hiermee z .

Voorbeeld

Los $z^3 + 12z = 63$ algebraïsch op in $\mathbb{C}$.

Uitwerking

$$z = u + v \text{ en } 12 = -3uv \text{ geeft } \left. \begin{aligned} u^3 + v^3 &= 63 \\ \text{Uit } -3uv = 12 \text{ volgt } v &= -\frac{4}{u}. \end{aligned} \right\} u^3 + \left(-\frac{4}{u}\right)^3 = 63$$

$$u^3 - \frac{64}{u^3} = 63$$

$$u^6 - 63u^3 - 64 = 0$$

$$D = 4225, \text{ dus } \sqrt{D} = 65$$

$$u^3 = \frac{63 + 65}{2} = 64 \text{ is een oplossing}$$

$$v^3 = 63 - u^3 = 63 - 64 = -1$$

$$z = \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{-1} = 4 - 1 = 3$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 3/z^3 + 12z - 63 \setminus z^2 + 3z + 21 \\ \underline{z^3 - 3z^2} \\ 3z^2 + 12z \\ \underline{3z^2 - 9z} \\ 21z - 63 \\ \underline{21z - 63} \\ 0 \end{array}$$

$$z^2 + 3z + 21 = 0$$

$$\left(z + 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + 21 = 0$$

$$\left(z + 1\frac{1}{2}\right)^2 = -18\frac{3}{4}$$

$$\left(z + 1\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}i^2$$

$$z + 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}i\sqrt{3} \vee z + 1\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$z = -1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}i\sqrt{3} \vee z = -1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$\text{Dus } z = 3 \vee z = -1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}i\sqrt{3} \vee z = -1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{75}{4}} &= \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{4}} = \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} &= 2\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

R 48 In opgave 47 is verder gerekend met $u^3 = 10 + 6\sqrt{3}$ en in het voorbeeld is verder gerekend met $u^3 = 64$.

Laat zien dat verder rekenen met respectievelijk $u^3 = 10 - 6\sqrt{3}$ en $u^3 = -1$ hetzelfde resultaat oplevert.

49 Los algebraïsch op in $\mathbb{C}$.

a $z^3 + 36z = 208$

b $z^3 - 18z = 108$

c $z^3 + 2\frac{1}{4}z = 3\frac{1}{4}$

d $z^3 + 81z = 702$

- 50** Gegeven is de vergelijking $z^3 - 15z = 4$.
 Grafisch-numeriek oplossen van deze vergelijking levert drie oplossingen, waarvan één geheel.
a Geef deze gehele oplossing.

Stel je $z = u + v$ en $-15 = -3uv$, dan is de vergelijking te herleiden tot $u^6 - 4u^3 + 125 = 0$.

- b** Laat zien dat $u = \sqrt[3]{2 + 11i}$ een oplossing van deze vergelijking is en dat geldt $v = \sqrt[3]{2 - 11i}$.
c Bereken $z = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$ op de GR.
 Welke oplossing van de vergelijking $z^3 - 15z = 4$ krijg je?

Geschiedenis De ontdekking van de complexe getallen

De zoektocht naar een formule voor de oplossingen van derde- en vierdegraadsvergelijkingen kwam in een stroomversnelling vlak nadat Luca Pacioli in 1494 in zijn publicatie *Summa* stelde dat het vinden van een formule voor de algemene oplossing van de derdegraadsvergelijkingen net zo lastig was als de kwadratuur van de cirkel. In 1515 was Scipione del Ferro de eerste die de vergelijking $x^3 + px = q$ wist op te lossen. Zoals gebruikelijk was in die tijd, hield Del Ferro zijn ontdekking geheim. Vlak voor zijn dood vertelde hij zijn geheim aan zijn leerling Antonio Fior. Omdat Fior nogal loslippig was circuleerden er al snel geruchten dat er een formule voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen was gevonden.



Cardano

Ook Niccolo Tartaglia beweerde een methode te hebben om derdegraadsvergelijkingen op te lossen. Fior daagde Tartaglia uit tot een wedstrijd waarbij iedere deelnemer dertig vergelijkingen moest inleveren die door de andere deelnemer moesten worden opgelost. Slechts acht dagen voor de wedstrijd slaagde Tartaglia erin een methode te vinden voor alle derdegraadsvergelijkingen, terwijl Fior alleen maar beschikte over een methode voor vergelijkingen van de vorm $x^3 + px = q$. Het was dus geen wonder dat Tartaglia deze wedstrijd won: in twee uur tijd loste hij de dertig vergelijkingen op. Het nieuws van de overwinning bereikte ook Girolamo Cardano, die bezig was om een publicatie voor te bereiden over derde- en vierdegraadsvergelijkingen. Cardano smeekte Tartaglia hem zijn oplossing te geven en beloofde de oplossing niet te publiceren voordat Tartaglia dat zelf had gedaan. Nadat Cardano echter ontdekte dat niet Tartaglia, maar Del Ferro de eerste was geweest die een methode voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen had ontdekt, voelde hij zich ontslagen van zijn belofte en publiceerde hij de formule in zijn boek *Ars Magna* in 1545. Het probleem met derdegraadsvergelijkingen waarvan de discriminant $(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3$ negatief was bleef echter bestaan. Zo kon bijvoorbeeld $x^3 - 15x = 4$ niet worden opgelost met de formule van Cardano, omdat de discriminant negatief is. Wel is eenvoudig in te zien dat $x = 4$ een oplossing is. Dit heb je gezien in opgave 50.

Het was Rafael Bombelli die in zijn vijfdelige boek *Algebra* (1572) met complexe getallen liet zien dat de formule van Cardano ook geldt als de discriminant kleiner is dan 0. In dit boek bespreekt Bombelli ook negatieve getallen. Hij was de eerste die vaststelde dat het product van twee negatieve getallen positief is. Je kunt dus stellen dat de rekenregels voor complexe getallen en die voor negatieve getallen vrijwel gelijktijdig zijn ontwikkeld.

Theorie C De vergelijking $z^3 + az^2 + bz + c = 0$

De werkwijze die je in de vorige opgaven hebt gevolgd om vergelijkingen van het type $z^3 + pz = q$ op te lossen, is te beschrijven met een formule. Bij het afleiden van deze formule gaan we net zo te werk als in de opgaven.

$$z^3 + pz = q \dots (1)$$

Stel $z = u + v$ en $p = -3uv$.

$$\begin{aligned} \text{Substitutie in (1) geeft } (u + v)^3 - 3uv(u + v) &= q \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u^2v - 3uv^2 &= q \\ u^3 + v^3 &= q \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{Uit } p = -3uv \text{ volgt } v = -\frac{p}{3u}.$$

Substitutie van $v = -\frac{p}{3u}$ in (2) geeft

$$\begin{aligned} u^3 - \frac{p^3}{27u^3} &= q && \text{Vermenigvuldig met } u^3. \\ u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} &= 0 \dots (3) \end{aligned}$$

Vergelijking (3) is kwadratisch in u^3 . Een van de oplossingen is

$$u^3 = \frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3} \dots (4)$$

$$\text{Omdat } u^3 + v^3 = q \text{ krijg je } v^3 = q - u^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3} \dots (5)$$

Uit (4) en (5) volgt nu

$$z = u + v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} \dots (6)$$

Formule (6) geeft een van de oplossingen van de vergelijking $z^3 + pz = q$. Deze formule staat bekend als de **formule van Cardano**, hoewel Scipio del Ferro de eerste was die hem heeft afgeleid voor positieve waarden van p en q .

De vorm $\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3$ wordt de **discriminant van de derdegraadsvergelijking** $z^3 + pz = q$ genoemd.

De formule van Cardano

Een reële oplossing van de vergelijking $z^3 + pz = q$ is

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}.$$

Neem je $p < 0$, dan kan de discriminant $\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3$ negatief worden en krijg je in de berekening van een reële oplossing te maken met complexe getallen. Je hebt daarvan in opgave 50 een voorbeeld gezien. Je hebt op de vorige bladzijde kunnen lezen dat bij deze berekening complexe getallen werden geïntroduceerd.

Om een oplossing van de vergelijking $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ te vinden, herleid je deze eerst tot de vorm $y^3 + py = q$ met de substitutie $z = y - \frac{1}{3}a$.

Door de formule van Cardano te gebruiken om een reële oplossing van de vergelijking $y^3 + py = q$ te vinden en deze te combineren met $z = y - \frac{1}{3}a$, vind je een formule voor een reële oplossing van de vergelijking $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

Je krijgt

$$z = -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}.$$

Hierbij is $p = b - \frac{1}{3}a^2$ en $q = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$.

Je gaat dit aantonen in opgave 51.

16

- 51** a Laat zien dat de substitutie van $z = y - \frac{1}{3}a$ in

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \text{ leidt tot } y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c.$$

- b Toon aan dat een reële oplossing van $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ is

$$z = -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}.$$

Hierbij is $p = b - \frac{1}{3}a^2$ en $q = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$.

- A 52** Los algebraïsch op in $\mathbb{C}$. Gebruik de formule van opgave 51b.

a $z^3 + 6z^2 + 12z + 9 = 0$

b $z^3 - 12z^2 = 392$

c $z^3 + 3z^2 + 4z - 28 = 0$

- A 53** Van een balk is de inhoud 48, de totale oppervlakte van de zijvlakken is 124 en de lichaamsdiagonalen hebben lengte $\sqrt{101}$. In deze opgave ga je de lengte van de ribben a , b en c van de balk

$$\text{berekenen. Hiertoe moet het stelsel } \begin{cases} abc = 48 \\ 2ab + 2ac + 2bc = 124 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 101 \end{cases}$$

worden opgelost.

- a Licht dit toe.

Stel de lengte van één van de ribben is gelijk aan x . Er geldt dan dat $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$.

- b Licht dit toe en herleid deze vergelijking tot $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$.

- c Toon aan dat $(a + b + c)^2 = 225$.

- d Los de vergelijking $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$ algebraïsch op en geef de afmetingen van de balk.

Terugblik

De factorstelling

Weet je van de vergelijking $x^3 + 6x^2 + 9x - 16 = 0$ dat $x = 1$ een oplossing is, dan is volgens de factorstelling $x^3 + 6x^2 + 9x - 16$ te ontbinden met de factor $x - 1$. De andere factor vind je met de staartdeling hiernaast.

Dus $x^3 + 6x^2 + 9x - 16 = (x - 1)(x^2 + 7x + 16)$.

De twee andere oplossingen van de vergelijking $x^3 + 6x^2 + 9x - 16 = 0$ zijn complex en vind je met kwadraatafsplitsen.

Oplossen van $x^2 + 7x + 16 = 0$ geeft zo

$$x = -3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{15} \vee x = -3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{15}.$$

$$\begin{array}{r} x-1 \overline{) x^3 + 6x^2 + 9x - 16} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 7x^2 + 9x \\ \underline{7x^2 - 7x} \\ 16x - 16 \\ \underline{16x - 16} \\ 0 \end{array}$$

Vergelijkingen van de vorm $z^3 + pz = q$

De vergelijking $z^3 - 3z = 18$ los je als volgt algebraïsch op.

- Stel $z = u + v$ en $p = -3uv$, dus $-3 = -3uv$.

Dit geeft de vergelijking $u^3 + v^3 = 18$.

- Uit $-3 = -3uv$ volgt $v = \frac{1}{u}$.

Substitutie in $u^3 + v^3 = 18$ geeft $u^6 - 18u^3 + 1 = 0$.

- Uit $u^6 - 18u^3 + 1 = 0$ volgt $u^3 = \frac{18 + \sqrt{320}}{2} = 9 + 4\sqrt{5}$ en dit geeft $v^3 = 9 - 4\sqrt{5}$.

- Je krijgt $z = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = 3$.

Met een staartdeling krijg je de factor $z^2 + 3z + 6$, en

$z^2 + 3z + 6 = 0$ geeft de complexe oplossingen

$$z = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{15} \text{ en } z = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{15}.$$

Vergelijkingen van de vorm $z^3 + az^2 + bz + c = 0$

Een oplossing van de vergelijking $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ is afgeleid met de substitutie $z = y - \frac{1}{3}a$. Dit levert een vergelijking op van de vorm $y^3 + py = q$. Met de formule van Cardano vind je de reële oplossing van deze vergelijking.

$$\text{Je krijgt zo } z = -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}.$$

$$\text{Hierbij is } p = b - \frac{1}{3}a^2 \text{ en } q = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c.$$

Bij de vergelijking $z^3 + 6z^2 + 9z - 16 = 0$ krijg je $p = 9 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 = -3$

en $q = -\frac{2}{27} \cdot 6^3 + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 9 - 16 = 18$, dus

$$z = -\frac{1}{3} \cdot 6 + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot 18 + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 18\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot (-3)\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot 18 - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 18\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot (-3)\right)^3}} = 1.$$

Als complexe oplossingen vind je $z = -3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{15} \vee z = -3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{15}$.

Zie hierboven.

16.5 Wisselspanning

- O54** Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x)$.
- Schets voor x op $[0, 2\pi]$ de grafieken van f en f' .
 - Hoe ontstaat de grafiek van f' uit de grafiek van f ?

- O55** Gegeven is de functie $f(t) = 6\cos(100\pi t)$.
- Gebruik de formules $\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$ en $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$ om aan te tonen dat $f'(t) = 600\pi \cos(100\pi t + \frac{1}{2}\pi)$.

Gegeven is de functie $g(t) = 6(\cos(100\pi t) + i \sin(100\pi t))$.

Dit is ook te noteren als $g(t) = 6e^{i \cdot 100\pi t}$ en dit geeft

$$g'(t) = i \cdot 600\pi e^{i \cdot 100\pi t} = 600\pi e^{i \cdot (100\pi t + \frac{1}{2}\pi)}.$$

b Licht toe dat $i \cdot 600\pi e^{i \cdot 100\pi t} = 600\pi e^{i \cdot (100\pi t + \frac{1}{2}\pi)}$.

c Toon aan dat $\operatorname{Re}(g'(t)) = f'(t)$.

Theorie A Complexe spanning en faseverschil

Bij spanningsbronnen zoals batterijen en zonnepanelen heb je te maken met gelijkspanning. Het lichtnet levert echter wisselspanning. **Wisselspanning** is een periodieke elektrische spanning die met een zekere frequentie wisselt tussen positieve en negatieve spanning.

Het spanningsverloop van het lichtnet kan worden beschreven met de formule $U = U_{\max} \cdot \cos(100\pi t)$. Hierin is U de spanning in volt en t de tijd in seconden. De frequentie van de

wisselspanning is $\frac{100\pi}{2\pi} = 50$ Hz.

Door aan de formule van de wisselspanning een complex deel toe te voegen kunnen berekeningen waarbij de afgeleide of primitieve een rol speelt sterk worden vereenvoudigd.

Je schrijft $U = U_{\max} \cdot \cos(100\pi t)$ als

$U = U_{\max} \cdot (\cos(100\pi t) + i \sin(100\pi t))$, en dit is te noteren als

$U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$. Merk op dat $|U| = U_{\max}$.

De werkelijke spanning is het reële deel van deze **complexe spanning**.

$U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$ geeft

$$\frac{dU}{dt} = U_{\max} \cdot e^{i \cdot 100\pi t} \cdot i \cdot 100\pi$$

$$= U_{\max} \cdot e^{i \cdot 100\pi t} \cdot e^{\frac{1}{2}\pi i} \cdot 100\pi$$

$$= U_{\max} \cdot 100\pi \cdot e^{i \cdot (100\pi t + \frac{1}{2}\pi)}$$

$$= U_{\max} \cdot 100\pi (\cos(100\pi t + \frac{1}{2}\pi) + i \sin(100\pi t + \frac{1}{2}\pi))$$

Het reële deel van de afgeleide van U is $U_{\max} \cdot 100\pi \cos(100\pi t + \frac{1}{2}\pi)$.

De frequentie f in hertz (Hz) is het aantal trillingen per seconde. Bij $u = \cos(ct)$ is $f = \frac{c}{2\pi}$.

In deze paragraaf nemen we steeds de tijd t in seconden en de spanning U in volt.

De grafiek van $y = 100\pi \cos(100\pi t + \frac{1}{2}\pi)$ loopt een kwart periode voor op $y = \cos(100\pi t)$, want $\frac{\frac{1}{2}\pi}{2\pi} = \frac{1}{4}$. We zeggen dat het **faseverschil** een kwart periode is. In plaats van ‘het faseverschil is een kwart periode’ mag je ook zeggen dat het faseverschil $\frac{1}{2}\pi$ radialen is. Het begrip faseverschil wordt uitsluitend gebruikt bij trillingen met dezelfde periode.

Het faseverschil van twee trillingen is het deel van de periode dat de ene trilling voor- of achterloopt op de andere trilling. Het faseverschil wordt gegeven in radialen of als deel van de periode.

In de formule van de complexe spanning $U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$ is 100π de **hoeksnelheid** in rad/s. De hoeksnelheid wordt genoteerd met de Griekse letter ω (omega).

In de complexe spanning $U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot \omega t}$ is U de spanning in volt, ω de hoeksnelheid in radialen per seconde en t de tijd in seconden.

De afgeleide $\frac{dU}{dt} = i\omega \cdot U_{\max} \cdot e^{i \cdot \omega t} = \omega \cdot U_{\max} \cdot e^{i \cdot (\omega t + \frac{1}{2}\pi)}$ van U heeft een fasevoorsprong van een kwart periode op U .

Bij de complexe spanningen $U_1 = (5 + 5i) \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$ en $U_2 = (10 - 10i\sqrt{3}) \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$ volgt het faseverschil uit het verschil van de argumenten van U_1 en U_2 . Je krijgt

$$\arg(U_1) - \arg(U_2) = (\frac{1}{4}\pi + 100\pi t) - (-\frac{1}{3}\pi + 100\pi t) = \frac{7}{12}\pi \text{ rad.}$$

Je mag ook zeggen dat het faseverschil $\frac{\frac{7}{12}\pi}{2\pi} = \frac{7}{24}$ periode is.

De spanning U_1 loopt $\frac{7}{24}$ periode voor op de spanning U_2 .

Om het reële deel van de complexe spanning

$U_1 = (5 + 5i) \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$ te vinden, herleid je de vergelijking tot de vorm $U_1 = U_{\max} \cdot e^{i \cdot (\omega t + \varphi)}$.

Je krijgt $U_1 = (5 + 5i) \cdot e^{i \cdot 100\pi t} = \sqrt{50} \cdot e^{i \cdot \frac{1}{4}\pi} \cdot e^{i \cdot 100\pi t} = 5\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot (100\pi t + \frac{1}{4}\pi)}$.

De reële spanning is dus $\text{Re}(U_1) = 5\sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t + \frac{1}{4}\pi)$.

$$\begin{aligned} \arg(z_1 \cdot z_2) &= \\ \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{aligned}$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de complexe spanningen $U_1 = (200 + 200i) \cdot e^{i(\omega t + \frac{1}{2}\pi)}$ en $U_2 = e^{i \cdot \omega t}$.

- Schrijf de formule van U_1 in de vorm $U_1 = U_{\max} \cdot e^{i \cdot (\omega t + \varphi)}$ en geef de formule van de reële spanning van U_1 .
- Bereken in radialen het faseverschil van U_1 en U_2 .

Uitwerking

$$\begin{aligned} \text{a } U_1 &= (200 + 200i) \cdot e^{i(\omega t + \frac{1}{2}\pi)} \\ &= \sqrt{200^2 + 200^2} \cdot e^{i \cdot \frac{1}{4}\pi} \cdot e^{i(\omega t + \frac{1}{2}\pi)} \\ &= 200\sqrt{2} \cdot e^{i(\omega t + \frac{3}{4}\pi)} \end{aligned}$$

De reële spanning is $\text{Re}(U_1) = 200\sqrt{2} \cos(\omega t + \frac{3}{4}\pi)$.

- $\arg(U_1) - \arg(U_2) = \omega t + \frac{3}{4}\pi - \omega t = \frac{3}{4}\pi$
Het faseverschil is $\frac{3}{4}\pi$ rad.

- 56** Schrijf in de vorm $U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot (\omega t + \varphi)}$ en geef de formule van de reële spanning.

- $U = (2 + 2i\sqrt{3}) \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$
- $U = (4 + 4i) \cdot e^{i \cdot 5t}$
- $U = (1 - i) \cdot e^{i \cdot 10\pi t + 2}$

- 57** In een stroomkring geldt $U = (10 + 10i) \cdot e^{i \cdot 20\pi t}$ en $I = 2e^{i \cdot 20\pi t}$. Hierin is I de stroom in ampère.

- Bereken in radialen het faseverschil van U en I .
- Bereken exact $\frac{U_{\max}}{I_{\max}}$.

- 58** Een wisselspanningsbron levert een maximale spanning van 12 V bij een frequentie 100 Hz. Op de spanningsbron zijn parallel de lampen 1 en 2 aangesloten, met weerstanden $R_1 = 4 \Omega$ en $R_2 = 6 \Omega$.
- Stel een formule op van de reële spanning. Neem aan dat op $t = 0$ de spanning maximaal is.
 - Stel een formule op van de complexe spanning. Neem aan dat op $t = 0$ de spanning maximaal is.
 - Stel complexe formules op van de stromen I_1 en I_2 door de lampen 1 en 2. Noteer de formules met een e-macht.
 - Stel een complexe formule op van de totale stroom I .

U = spanning in volt (V)
 I = stroomsterkte in ampère (A)
 R = weerstand in ohm (Ω)
 De wet van Ohm:
 $U = I \cdot R$

O59

Een condensator bestaat uit twee geleidende platen die van elkaar zijn gescheiden door een isolatielaag. Voor een condensator geldt de formule $Q = C \cdot U$. Hierin is Q de lading van de condensator in coulomb en U de spanning tussen de platen. De evenredigheidsconstante C is de capaciteit van de condensator in farad. De stroom I in de stroomkring van figuur 16.22 is de verandering van de lading van de condensator. Er geldt dus $I = \frac{dQ}{dt}$.

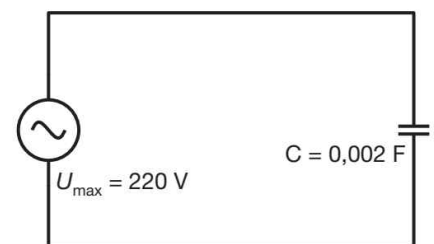
- a Licht toe dat uit $Q = C \cdot U$ en $I = \frac{dQ}{dt}$ volgt dat door een stroomkring met een condensator die is aangesloten op een gelijkspanningsbron geen stroom loopt vanaf het moment dat de condensator volledig is opgeladen.

Een condensator met capaciteit $C = 0,002$ farad wordt aangesloten op een wisselspanningsbron met $U_{\max} = 220$ volt en frequentie 50 Hz.

- b Stel een complexe formule op van U . Neem $t = 0$ op een moment dat de spanning maximaal is en noteer de formule met een e-macht.
- c Stel een complexe formule op van I . Gebruik de formules $Q = C \cdot U$ en $I = \frac{dQ}{dt}$.



figuur 16.22 Een condensator is aangesloten op een gelijkspanningsbron.



figuur 16.23 Een condensator is aangesloten op een wisselspanningsbron.

Theorie B Condensator en impedantie

De eenvoudigste condensator bestaat uit twee geleidende platen die zijn gescheiden door een isolerende laag die ervoor zorgt dat er geen stroom loopt tussen de platen.

Wordt een condensator aangesloten op een gelijkspanningsbron, dan loopt er gedurende korte tijd een stroom tot de platen volledig zijn opgeladen. Zet je de spanningsbron uit of verlaag je de spanning, dan loopt de stroom terug: de condensator ontlad.

Wordt een condensator aangesloten op een wisselspanningsbron, dan zorgt het voortdurend laden en ontladen van de platen ervoor dat er stroom door de kring loopt.

Voor een condensator gelden de formules $Q = C \cdot U$ en $I = \frac{dQ}{dt}$.

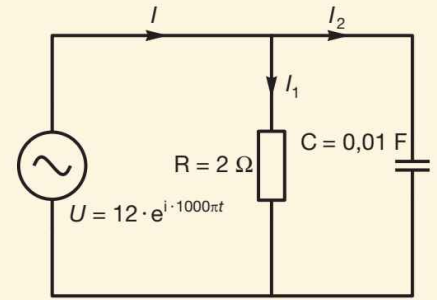
Hierin is Q de lading van de condensator in coulomb, U de spanning in volt, C de capaciteit van de condensator in farad (F) en I de stroom in ampère.

Het quotiënt $Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$ bij een stroomkring wordt de **impedantie** genoemd. Hierin is Z in ohm. Bij een stroomkring met een condensator is de impedantie afhankelijk van de capaciteit C van de condensator en de frequentie $f = \frac{\omega}{2\pi}$ van de wisselspanning.

Voorbeeld

In een stroomkring zijn een weerstand $R = 2 \Omega$ en een condensator $C = 0,01 \text{ F}$ parallel aangesloten op een wisselspanningsbron met $U = 12 \cdot e^{i \cdot 1000\pi t}$.

- Stel een formule op van I .
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de impedantie van deze parallelschakeling.
- Bereken het faseverschil van U en I in radialen. Rond af op twee decimalen.



figuur 16.24 Een weerstand en een condensator zijn parallel aangesloten op een wisselspanningsbron.

Uitwerking

$$\text{a } I_1 = \frac{U}{R} = \frac{12 \cdot e^{i \cdot 1000\pi t}}{2} = 6 \cdot e^{i \cdot 1000\pi t}$$

$$Q = C \cdot U = 0,01 \cdot e^{i \cdot 1000\pi t} \text{ geeft } I_2 = \frac{dQ}{dt} = 120\pi i \cdot e^{i \cdot 1000\pi t}$$

$$I = I_1 + I_2 = 6 \cdot e^{i \cdot 1000\pi t} + 120\pi i \cdot e^{i \cdot 1000\pi t} \\ = (6 + 120\pi i) \cdot e^{i \cdot 1000\pi t}$$

$$\text{b } Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{12}{|6 + 120\pi i|} = \frac{12}{\sqrt{6^2 + (120\pi)^2}} \approx 0,03 \Omega$$

$$\text{c } \arg(I) - \arg(U) = \arg(6 + 120\pi i) + 1000\pi t - 1000\pi t \\ = \arg(6 + 120\pi i) \approx 1,55 \text{ rad}$$

I loopt 1,55 rad voor op U .

Informatief Wisselspanning zonder complexe getallen.

Een formule voor de stroom door de schakeling van het voorbeeld is ook zonder complexe getallen op te stellen.

De reële spanning is $U = 12 \cos(1000\pi t)$.

$$\text{Voor de stroom } I_1 \text{ geldt } I_1 = \frac{U}{R} = \frac{12 \cos(1000\pi t)}{2} = 6 \cos(1000\pi t).$$

Voor de lading Q van de condensator geldt $Q = C \cdot U = 0,01 \cos(1000\pi t)$.

$$\text{Dus } I_2 = \frac{dQ}{dt} = -120\pi \sin(1000\pi t).$$

De stroom door de kring is $I = 6 \cos(1000\pi t) - 120\pi \sin(1000\pi t)$.

Deze formule van I is lastig te herleiden. Het berekenen van de maximale stroomsterkte en het faseverschil met de spanning is zonder GR niet eenvoudig. Vandaar dat Charles Steinmetz in 1893 voorstelde om dit soort berekeningen in het vervolg met complexe getallen uit te voeren en niet meer met sinus- en cosinusfuncties.

Informatief Impedantie

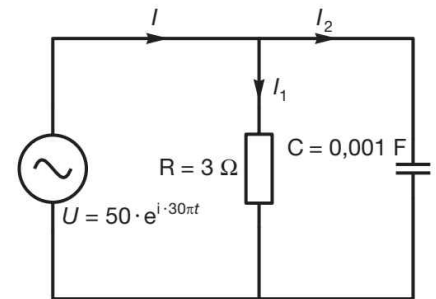
Impedantie is een uitbreiding van het begrip weerstand. Komen er condensatoren of spoelen voor in een stroomkring die is aangesloten op een wisselspanningsbron, dan geldt de wet van Ohm niet meer. In dit soort gevallen wordt met het begrip impedantie gewerkt.

Voor de impedantie Z van een stroomkring geldt $Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$. De eenheid van impedantie is ohm.

Rekenregels die gelden voor weerstand gelden ook voor impedantie. Zo geldt bijvoorbeeld voor de warmteontwikkeling in een stroomkring met gelijkstroom de formule $W = I^2 R t$. Hierin is I de stroom in ampère, R de weerstand in ohm, t de tijd in seconden en W de hoeveelheid energie in joule.

Voor een stroomkring die is aangesloten op een wisselspanningsbron is deze formule $W = I^2 Z t$.

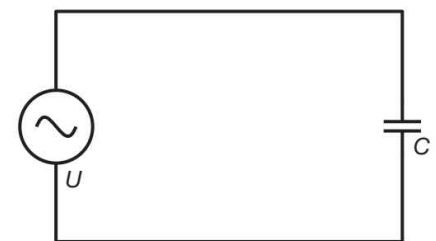
- 60** In een stroomkring zijn een weerstand $R = 3 \Omega$ en een condensator $C = 0,001 \text{ F}$ parallel aangesloten op een wisselspanningsbron met $U = 50 \cdot e^{i \cdot 30\pi t}$.
- Stel een formule op van de stroom I .
 - Bereken in twee decimalen nauwkeurig de impedantie van deze parallelschakeling.
 - Bereken het faseverschil van U en I in radialen. Rond af op twee decimalen.



figuur 16.25

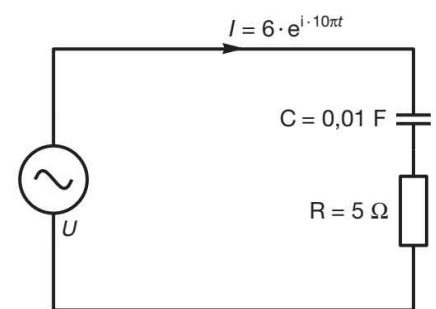
- 61** In de stroomkring in de figuur hiernaast is een condensator met capaciteit C aangesloten op een wisselspanningsbron met hoeksnelheid ω .

Toon aan dat geldt $Z = \frac{1}{\omega C}$.



figuur 16.26

- A 62** In een stroomkring zijn een weerstand $R = 5 \Omega$ en een condensator $C = 0,01 \text{ F}$ in serie aangesloten op een wisselspanningsbron U . Voor de stroom door de kring geldt $I = 6 \cdot e^{i \cdot 10\pi t}$.
- Licht toe dat voor de weerstand geldt $U_R = 30 \cdot e^{i \cdot 10\pi t}$.
 - Stel met behulp van primitiveren een formule op van het spanningsverschil U_C tussen de platen van de condensator.
 - Geef een complexe formule van U .
 - Bereken in twee decimalen nauwkeurig de impedantie van deze schakeling.
 - Bereken het faseverschil van U en I in radialen. Rond af op twee decimalen.

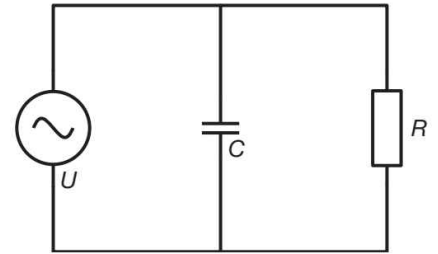


figuur 16.27

Neem bij primitiveren de integratieconstante gelijk aan 0.

D 63 a Toon aan dat voor de impedantie van de schakeling in

figuur 16.28 geldt dat $\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$.



figuur 16.28

b Toon aan dat voor de impedantie van de schakeling in

figuur 16.29 geldt dat $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$.



figuur 16.29

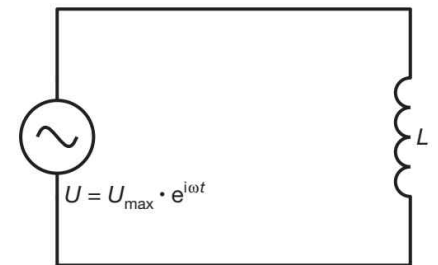
O 64 Een spoel is een component in een elektrische schakeling met als eigenschap $U_{\text{spoel}} = L \cdot \frac{dI}{dt}$. Hierin is L een evenredigheidsconstante, die is uitgedrukt in de eenheid henry (H).

a Wat kun je zeggen van de spanning U_{spoel} als er constant 5 ampère door een spoel $L = 0,012$ H gaat?

Een spoel $L = 0,005$ H wordt aangesloten op een wisselspanningsbron met $U_{\text{max}} = 220$ V en frequentie 50 Hz.

b Bereken exact de impedantie van de stroomkring.

c Bereken exact het faseverschil van U en I in radialen.



figuur 16.30

Theorie C Spoelen

Wordt een spoel aangesloten op een gelijkspanningsbron dan is direct na het inschakelen van de bron de stroom door de kring kleiner dan je zou verwachten op grond van de wet van Ohm. De spoel werkt de verandering van de stroomsterkte tegen door zelf een spanning op te wekken, de **inductiespanning**.

Na verloop van tijd nadert de stroomsterkte de waarde $\frac{U}{R}$,

waarbij R de weerstand is van de draad van de spoel.

Ook het omgekeerde is waar. Wordt de gelijkspanningsbron uitgezet of verlaag je de spanning, dan zorgt de spoel ervoor dat de stroom langzaam kleiner wordt: de verandering van de stroomsterkte wordt tegengewerkt.

Voor de inductiespanning U_{spoel} die de verandering van de stroomsterkte tegenwerkt, geldt de formule $U_{\text{spoel}} = L \cdot \frac{dI}{dt}$.

Hierin is L de **zelfinductiecoëfficiënt** die wordt uitgedrukt in henry (H).

Wordt een spoel aangesloten op een wisselspanningsbron

met $U = U_{\max} \cdot e^{i\omega t}$ dan geldt $U_{\max} \cdot e^{i\omega t} = L \cdot \frac{dI}{dt}$, dus

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_{\max}}{L} \cdot e^{i\omega t}.$$

Hieruit volgt $I = \frac{U_{\max}}{i\omega L} \cdot e^{i\omega t} = -i \cdot \frac{U_{\max}}{\omega L} \cdot e^{i\omega t} = \frac{U_{\max}}{\omega L} \cdot e^{i(\omega t - \frac{1}{2}\pi)}$.

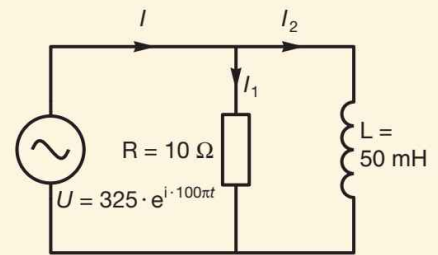
$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

De weerstand van de draad van een spoel is meestal verwaarloosbaar klein. Vandaar dat we deze weerstand in deze paragraaf gelijkstellen aan nul.

Voorbeeld

Bij de schakeling hiernaast is $R = 10 \Omega$, $L = 50 \text{ mH}$ en $U = 325 \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$.

- Stel een formule van I op.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de impedantie.
- Bereken in radialen in twee decimalen nauwkeurig het faseverschil van I en U .



figuur 16.31

Uitwerking

$$\text{a } I_1 = \frac{U}{R} = \frac{325 e^{i \cdot 100\pi t}}{10} = 32,5 e^{i \cdot 100\pi t}$$

Voor de spoel geldt

$$U = L \cdot \frac{dI_2}{dt}, \text{ dus } \frac{dI_2}{dt} = \frac{U}{L} = \frac{325 e^{i \cdot 100\pi t}}{0,05} = 6500 e^{i \cdot 100\pi t}.$$

$$\text{Hieruit volgt } I_2 = \frac{6500}{100\pi i} \cdot e^{i \cdot 100\pi t} = \frac{65}{\pi} \cdot -i \cdot e^{i \cdot 100\pi t}.$$

$$\text{Dus } I = I_1 + I_2 = (32,5 - \frac{65}{\pi} i) e^{i \cdot 100\pi t}.$$

$$\text{b } Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{325}{|32,5 - \frac{65}{\pi} i|} = \frac{325}{\sqrt{32,5^2 + (-\frac{65}{\pi})^2}} \approx 8,44 \Omega$$

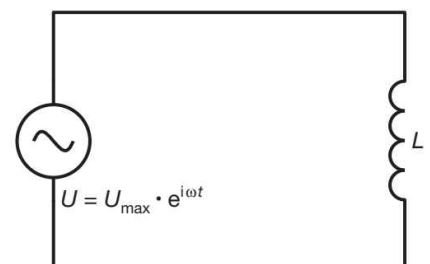
$$\begin{aligned} \text{c } \arg(U) - \arg(I) &= 100\pi t - (\arg(32,5 - \frac{65}{\pi} i) + 100\pi t) \\ &= -\arg(32,5 - \frac{65}{\pi} i) \approx 0,57 \text{ rad} \end{aligned}$$

I loopt 0,57 rad achter op U .

65 In de stroomkring hiernaast geldt

$$U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot \omega t}.$$

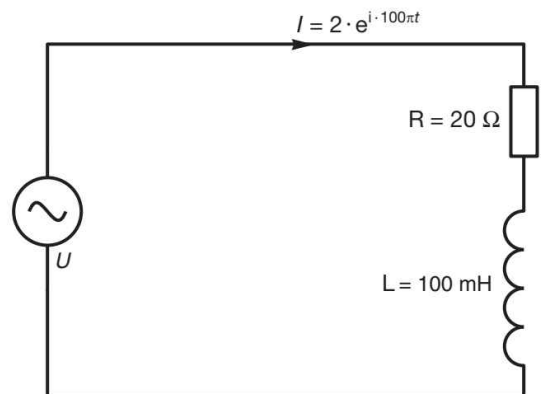
- Bereken het faseverschil van U en I .
- Bereken de impedantie van de stroomkring.



figuur 16.32

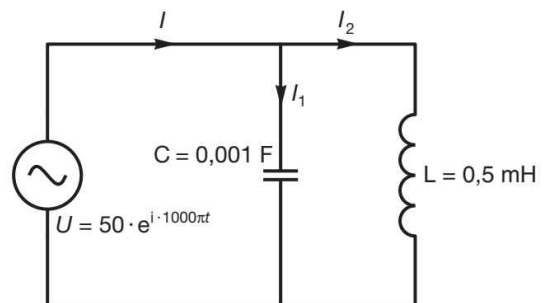
R 66 In de theorie is met primitiveren de formule $I = \frac{U_{\max}}{\omega L} \cdot e^{i(\omega t - \frac{1}{2}\pi)}$ gevonden. Hierbij is de integratieconstante nul genomen. Wat betekent dit voor de stroom I op $t = 0$?

- 67** Gegeven is de schakeling in figuur 16.33.
- Stel een formule op van U .
 - Bereken in één decimaal nauwkeurig de impedantie van de serieschakeling.
 - Bereken in radialen in twee decimalen nauwkeurig het faseverschil van U en I .



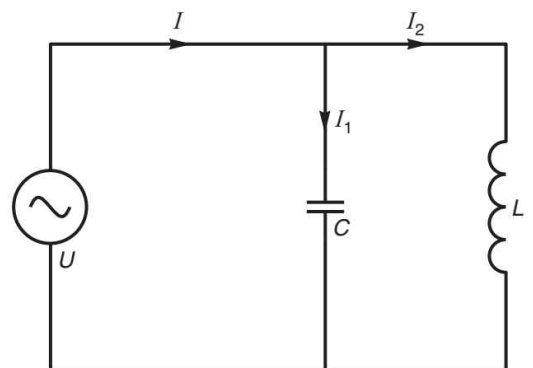
figuur 16.33

- 68** Gegeven is de schakeling in figuur 16.34.
- Stel een formule op van I .
 - Bereken in drie decimalen nauwkeurig de impedantie van de parallelschakeling.
 - Bereken exact het faseverschil van U en I .



figuur 16.34

- O 69** In de stroomkring hiernaast zie je een parallelschakeling van een condensator en een spoel.
- Toon aan dat $I = U_{\max} \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \cdot e^{i \cdot (\omega t + \frac{1}{2}\pi)}$.
 - Druk ω uit in C en L in het geval $I = 0$.



figuur 16.35

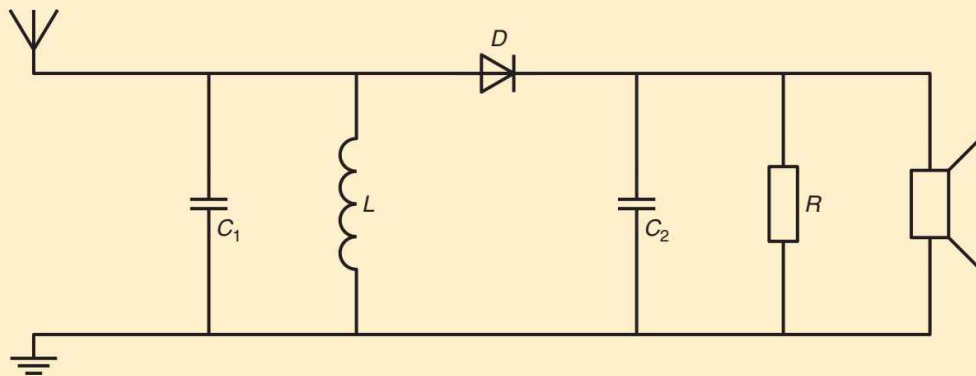
Theorie D LC-schakelingen

In opgave 69 heb je aangetoond dat $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ in het geval $I = 0$.

De elektronen gaan vrijwel zonder weerstand van de ene plaat van de condensator door de spoel naar de andere plaat en weer terug. Deze eigenschap van LC-schakelingen wordt gebruikt bij draadloze communicatie. Een zender verstuurt een signaal met een bepaalde frequentie. Dit signaal veroorzaakt een van de vele elektrische trillingen in een antenne die fungeert als wisselspanningsbron.

De trilling waarvoor geldt $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ veroorzaakt resonantie en wordt doorgelaten. De overige signalen worden onderdrukt. Het signaal dat resoneert wordt versterkt. De informatie die het signaal bevat wordt omgezet in bijvoorbeeld een radio-uitzending, een WhatsAppbericht, een e-mail of een telefoongesprek.

Het schema van een zeer eenvoudige ontvanger zie je in de figuur hieronder.



figuur 16.36 Het schema van de eenvoudigste radio-ontvanger.

Links zie je de antenne waar de trillingen met diverse frequenties worden opgevangen. Alleen de trilling met de hoge frequentie (HF) waarop is afgestemd gaat resoneren in de kring met C_1 en L . De overige trillingen worden gedempt. Dit afstemmen houdt in dat de condensator op de gewenste capaciteit wordt ingesteld. Bij traditionele radio's doe je dit door aan de knop voor de zenderkeuze te draaien. De diode D laat de stroom alleen in de aangegeven richting door.

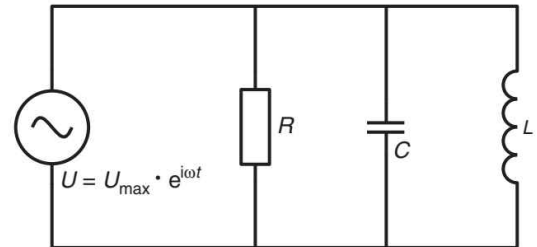
In het rechterdeel van de schakeling is de weerstand voor hoge frequenties vrijwel nul en de weerstand voor lage frequenties relatief hoog. Hierdoor verdwijnt het HF-signaal naar de aarde en gaat het signaal dat de informatie draagt naar de luidspreker.



- 70** In figuur 16.37 zie je een LCR-schakeling. Hierbij zijn een spoel, een condensator en een weerstand parallel aangesloten op een wisselspanningsbron.

Toon aan dat voor deze schakeling de

impedantie maximaal is in het geval $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



figuur 16.37

- A71** Bij een radio-ontvanger is de zelfinductiecoëfficiënt van de spoel $6,76 \cdot 10^{-9}$ H. De zender 3FM zendt uit op de frequentie 96,8 MHz. Op welke capaciteit moet de condensator worden ingesteld als je naar 3FM wilt luisteren?

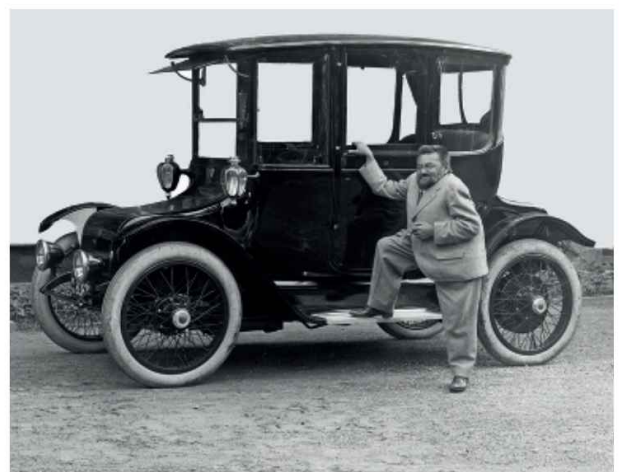
Geschiedenis Charles Steinmetz

Hiernaast zie je een foto van de Hoover Dam in de Coloradorivier bij Las Vegas. De bijbehorende elektriciteitscentrale voorziet sinds 1936 Los Angeles van energie. De hierbij gebruikte spanning bedraagt 275 000 volt. Voor deze hoge spanning is gekozen omdat er dan minder energieverlies tijdens het transport optreedt. De achterliggende theorie is ontwikkeld door Charles Steinmetz.



Steinmetz (1865-1923) werd geboren in Breslau (Duitsland). In 1889 emigreerde hij naar de Verenigde Staten, omdat hij bang was gearresteerd te worden vanwege zijn lidmaatschap van een socialistische studentengroep. Het grootste deel van zijn werkzame leven was Steinmetz in dienst van de firma General Electric, waarvoor hij onderzoek deed en ingenieurs in de elektrotechniek opleidde. Door zijn studenten werd hij ook wel de 'mathematical wizard' genoemd, omdat hij tal van verschijnselen in de elektrotechniek wiskundig kon verklaren. In 1893 introduceerde Steinmetz het gebruik van complexe getallen bij de elektrotechniek in de publicatie *Complex Quantities and their Use in Electrical Engineering*.

Naast het ontwerpen van een wisselstroommotor is Steinmetz ook bekend geworden door het onderzoeken van de bliksem. In 1921 wist hij in een laboratorium kunstmatig bliksemschichten op te wekken.



Steinmetz en zijn elektrische auto

Terugblik

Complexe spanning en faseverschil

Het spanningsverloop van het lichtnet kan worden beschreven met de formule $U = U_{\max} \cdot \cos(100\pi t)$. Hierin is U de spanning in volt en t de tijd in seconden.

De frequentie van deze wisselspanning is $\frac{100\pi}{2\pi} = 50$ Hz.

Door aan de formule een complex deel toe te voegen krijg je $U = U_{\max} \cdot (\cos(100\pi t) + i \sin(100\pi t))$ ofwel $U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$.

Met deze complexe spanning worden berekeningen waarbij de afgeleide of de primitieve een rol speelt vereenvoudigd.

$U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$ geeft $\frac{dU}{dt} = 100\pi \cdot U_{\max} \cdot e^{i \cdot (100\pi t + \frac{1}{2}\pi)}$ ofwel

$$\frac{dU}{dt} = U_{\max} \cdot 100\pi (\cos(100\pi t + \frac{1}{2}\pi) + i \sin(100\pi t + \frac{1}{2}\pi)).$$

Het reële deel hiervan is $U_{\max} \cdot 100\pi \cos(100\pi t + \frac{1}{2}\pi)$.

Het faseverschil tussen $U = U_{\max} \cdot \cos(100\pi t)$ en het reële deel van de afgeleide van U is $\frac{1}{2}\pi$ rad ofwel een kwart periode.

In de formule $U = U_{\max} \cdot e^{i \cdot 100\pi t}$ is de hoeksnelheid 100π rad/s.

Algemeen is in de formule $U = U_{\max} \cdot e^{i\omega t}$ de hoeksnelheid ω in rad/s.

De afgeleide $\frac{dU}{dt} = \omega \cdot U_{\max} \cdot e^{i \cdot (\omega t + \frac{1}{2}\pi)}$ van U heeft een fasevoorsprong van een kwart periode op U .

Het faseverschil van twee complexe spanningen U_1 en U_2 volgt uit het verschil van de argumenten van U_1 en U_2 .

Condensatoren, spoelen en LC-schakelingen

Voor een condensator gelden de formules $Q = C \cdot U$ en $I = \frac{dQ}{dt}$.

Hierin is Q de lading van de condensator in coulomb, U de spanning in volt, C de capaciteit van de condensator in farad en I de stroom in ampère.

Voor een spoel geldt de formule $U_{\text{spoel}} = L \cdot \frac{dI}{dt}$. Hierin is L de

zelfinductiecoëfficiënt in henry.

Bij een stroomkring met een condensator en/of een spoel is de impedantie

$Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$ afhankelijk van de condensator en/of de spoel, en de frequentie

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ van de wisselspanning. De eenheid van impedantie is ohm.

Bij een LC-schakeling (een parallelschakeling van een condensator

en een spoel) geldt $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ in het geval $I = 0$. Hiervan wordt gebruik

gemaakt bij draadloze communicatie zoals radio, telefoon en e-mail.

Diagnostische toets

16.1 Lineaire complexe functies

- 1** Gegeven is de functie $f(z) = 2z + a + bi$.
- Het nulpunt van f is $2 + i$.
Bereken a en b .
 - Het dekpunt van f is $2 + i$.
Bereken a en b .
 - Neem $a = 3$ en $b = -1$.
Teken de driehoek met de hoekpunten $-2i$, $3 + i$ en $1 + 3i$ en teken het beeld van deze driehoek bij f .
- 2** Bereken het nulpunt en het dekpunt van de volgende functies.
- $f(z) = 2iz + 3 - i$
 - $g(z) = (1 + i)z + 2 - 3i$
- 3** Gegeven is de functie $f(z) = (2 + 2i\sqrt{3})z$.
- Geef het bereik bij het domein $|z| \geq 2 \wedge \frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$.
 - Teken het beeld van $\text{Re}(z) \geq 2 \wedge \text{Im}(z) \leq 2\sqrt{3}$.
- 4** Gegeven is de functie $f(z) = (1 - i\sqrt{3})z + 2 - i$.
- Bereken het origineel van $2 + 2i$.
 - Teken het beeld van $-1 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \wedge 1 \leq \text{Im}(z) \leq 3$.
 - Teken het beeld van $1 \leq |z| \leq 3 \wedge \frac{1}{3}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{5}{6}\pi$.
 - Teken het origineel van $1 \leq |z| \leq 3 \wedge \frac{1}{3}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{5}{6}\pi$.

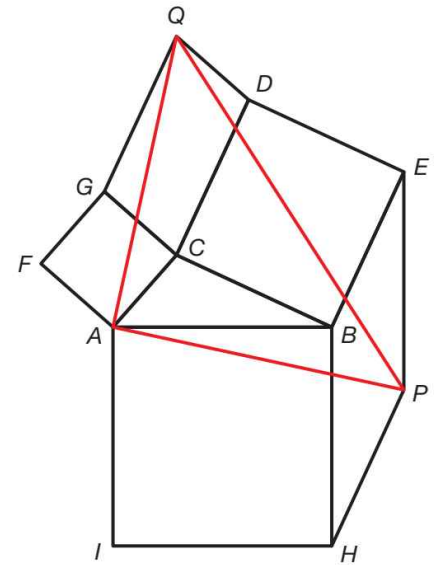
16.2 Niet-lineaire complexe functies

- 5** Teken in twee aparte figuren het vlakdeel $1 \leq |z| \leq 3 \wedge \frac{1}{6}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{5}{6}\pi$ en het beeld bij de functie $f(z) = z^2 - i$.
- 6** Gegeven is de functie $f(z) = e^z$.
- Teken het beeld van $\text{Re}(z) = -2$ en van $\text{Im}(z) = 1\frac{1}{2}\pi$.
 - Teken het beeld van het lijnstuk met de eindpunten $1 - i$ en $1 + i$.
- 7** Gegeven is de functie $f(z) = \ln(z)$.
Bereken exact.
- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------|---|
| a $f(1 + i)$ | c $f(-e^3)$ | e $f\left(\frac{2i}{1-i}\right)$ |
| b $f\left(\frac{i}{e}\right)$ | d $f(i\sqrt{e})$ | f $f(e - ei\sqrt{3})$ |
- 8** Gegeven is de functie $f(z) = \ln(z)$.
- Teken het beeld van de cirkel c met middelpunt 0 en straal e^2 .
 - Teken het beeld van $\text{Im}(z) = \frac{1}{2}\pi$.

- 9 Gegeven zijn de functies $f(z) = \sin(z)$ en $g(z) = \cos(z)$. Bereken exact $f(\frac{1}{3}\pi + 2i)$ en $g(\frac{1}{2}\pi - i)$. Geef je antwoorden in de vorm $a + bi$.

16.3 Meetkunde met complexe getallen

- 10 Op de zijden AB , BC en AC van een driehoek ABC zijn de naar buiten gerichte vierkanten $ABHI$, $BCDE$ en $ACGF$ geplaatst. De punten B , E en H zijn hoekpunten van het parallellogram $BEPH$ en de punten C , D en G zijn hoekpunten van het parallellogram $CGQD$. Zie de figuur.
- Druk h uit in a en b .
 - Druk e uit in b en c .
 - Druk p uit in a , b en c .
 - Druk g uit in a en c .
 - Druk d uit in b en c .
 - Druk q uit in a , b en c .
 - Bewijs dat driehoek APQ een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.



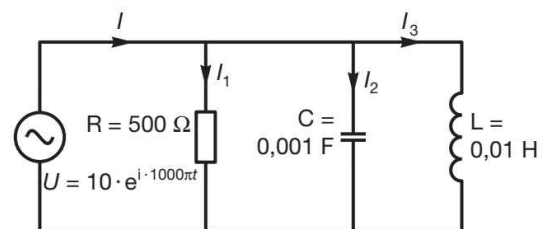
figuur 16.38

16.4 Derdegraadsvergelijkingen

- 11 Los op in $\mathbb{C}$.
- $z^3 + z^2 - 7z - 15 = 0$
 - $(z + 1)(z - i)(z + i) = 15$
- 12 Los algebraïsch op in $\mathbb{C}$.
- $z^3 + 6z - 88 = 0$
 - $z^3 - 3z^2 = 16$
 - $z^3 + 4z^2 + 6z + 4 = 0$

16.5 Wisselspanning

- 13 Een wisselspanningsbron levert een maximale spanning van 360 V bij een frequentie van 500 Hz. Op de spanningsbron zijn parallel de weerstanden $R_1 = 0,4 \Omega$ en $R_2 = 0,8 \Omega$ aangesloten.
- Stel een formule op van de complexe spanning U . Neem aan dat op $t = 0$ de spanning maximaal is.
 - Stel een complexe formule op van de totale stroom I .
- 14 In een stroomkring zijn een weerstand $R = 500 \Omega$, een condensator $C = 0,001 \text{ F}$ en een spoel $L = 0,01 \text{ H}$ parallel aangesloten op een wisselspanningsbron met $U = 10 \cdot e^{i \cdot 1000\pi t}$.
- Stel een formule op van I .
 - Bereken in twee decimalen nauwkeurig de impedantie van deze parallelschakeling.
 - Bereken het faseverschil van U en I in radialen. Rond af op twee decimalen.



figuur 16.39

Gemengde opgaven

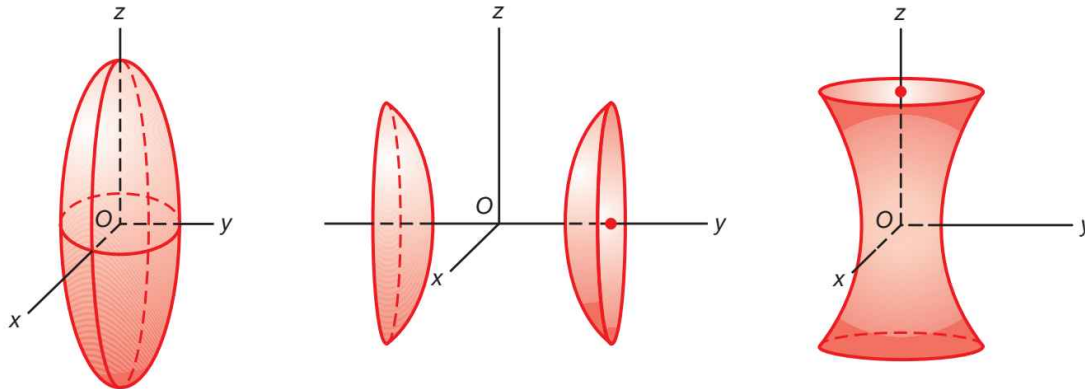
13 Kegelsneden

- 1 Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt $M(3, 4)$ en straal 5, en het punt $Q(-22, 29)$. De lijnen k en l door Q raken c_1 in de punten A en B .
De vergelijking van de cirkel c_2 met middellijn AB is te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$.
Bereken p , q en r .
- 2 De lijn l door $A(0, 5)$ met richtingscoëfficiënt m snijdt de x -as in het punt P . De lijn k door A loodrecht op l en de lijn p door P loodrecht op de x -as snijden elkaar in het punt S .
Stel een vergelijking op van de kromme waarop alle punten S liggen.
- 3 Gegeven zijn de parabolen $p_a: x^2 + ax = ay - a^2$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$.
 - a Druk uit in a
 - de coördinaten van de top van p_a
 - de coördinaten van het brandpunt van p_a
 - de vergelijking van de richtlijn van p_a .
 - b Voor welke waarden van a is de richtlijn van p_a een raaklijn van c ?
 - c Het punt $A(2, -2)$ ligt op p_a . De lijn n snijdt deze parabool loodrecht in A .
Bereken de coördinaten van de pool P van n ten opzichte van de parabool.
- 4 Gegeven is de parabool $p: y^2 + 4y - 6x + 13 = 0$.
 - a Bereken de coördinaten van de top T en het brandpunt F , en stel een vergelijking op van de richtlijn k en de as l .
 - b Stel vergelijkingen op van de lijnen k en l door het punt $P(4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ die de parabool raken.
 - c De lijn $m: y = -3x + 20$ is de poollijn van het punt Q ten opzichte van de parabool.
Bereken de coördinaten van Q .
 - d Toon aan dat de middelpunten van alle cirkels die de y -as raken en door het punt $A(3, -2)$ gaan op p liggen.

- 5** Gegeven is de parabool $p: y^2 = 4x$.
De lijn $k: x = ay + 1$ gaat door het brandpunt F en snijdt de parabool in de punten A en B . De raaklijnen l en m in A en B aan de parabool snijden elkaar in het punt C .
- Druk de coördinaten van C uit in a .
 - Toon aan dat $l \perp m$.
- 6** Gegeven is de ellips $e_1: 4x^2 + y^2 = 25$.
- Stel vergelijkingen op van de lijnen m en n door het punt $P(3\frac{1}{2}, 1)$ die e_1 raken.
 - De ellips e_2 en het punt Q ontstaan door translatie van respectievelijk e_1 en $P(3\frac{1}{2}, 1)$ over $(1, -4)$.
Stel vergelijkingen op van de lijnen p en q die door Q gaan en e_2 raken.
- 7** Gegeven is de hyperbool $h: 5x^2 - 4y^2 = 16$.
- De lijnen k en l gaan door het punt $(0, -4)$ en raken h in de punten A en B .
Bereken de coördinaten van A en B .
 - Bereken de coördinaten van de pool P van de lijn $n: x - 4y = 12$ ten opzichte van de hyperbool.
- 8** Gegeven is de vergelijking $ax^2 + (2a - 1)y^2 + 4ax + 2by + a^2 = 0$.
Voor welke waarden van a en b is dit de vergelijking van
- een cirkel
 - een parabool?
- 9** Gegeven is de cirkel $c: (x + 4)^2 + y^2 = 36$.
- Stel een vergelijking op van de kromme waarop de punten P liggen die gelijke afstanden hebben tot c en het punt $A(4, 0)$.
 - Stel een vergelijking op van de kromme waarop de punten Q liggen die gelijke afstanden hebben tot c en de oorsprong.
- 10** Gegeven zijn de punten $A(2, 0)$ en $B(2, 2)$.
- Stel vergelijkingen op van de parabolen met brandpunt A en de x -as als symmetrieas, die door B gaan.
- Op de x -as ligt een punt C en op de y -as een punt D zo, dat $x_C = y_D + 2$. De lijnen AD en BC snijden elkaar in het punt S . K is de kromme waarop alle punten S liggen als C over de x -as beweegt.
- Stel algebraïsch een vergelijking op van K .
- 11** Gegeven zijn de parabolen $y^2 = 2x$ en $x^2 = 2py$.
 K is de kromme waarop alle punten P liggen waarvan de poollijnen ten opzichte van de parabolen samenvallen.
Stel algebraïsch een vergelijking op van K .

- 12** Stel een vergelijking op van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat als

- a de ellips $x = 0 \wedge \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ wentelt om de z -as
 b de hyperbool $z = 0 \wedge x^2 - y^2 = -2$ wentelt om de y -as
 c de hyperbool $y = 0 \wedge \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ wentelt om de z -as.



figuur G.1

14 Mathematische statistiek

- 13** In de tabel staat van vijf leerlingen het gemiddelde cijfer X waarmee ze geslaagd zijn voor het vwo en het aantal studiepunten Y na één jaar studeren.

gemiddelde eindcijfer X	6,2	8,1	9,0	7,4	5,8
aantal studiepunten Y	21	35	40	17	16

- a Stel van beide regressielijnen de formule op.
 b Geef een voorspelling van het aantal studiepunten in het eerste jaar voor een student die met gemiddeld 7,0 is geslaagd voor het vwo.
 c Marc haalde in zijn eerste jaar 32 studiepunten. Met welk gemiddelde verwacht je dat Marc zijn vwo-diploma heeft gehaald?
- 14** Van de variabelen X en Y is gegeven $\hat{Y} = 1,2X + 20$ en $\hat{X} = 0,675Y + 12,8$.
- a Bereken r en licht toe dat het niet mogelijk is om bij deze gegevens σ_X en σ_Y te berekenen.
 b Bereken σ_X en σ_Y als ook nog is gegeven dat $\sigma_X + \sigma_Y = 5$.

- 15** In de tabel staat van acht gezinnen het jaarinkomen X in euro's en het bedrag Y dat per jaar aan kleding wordt besteed.

X	47 000	25 300	60 000	18 000	65 000	27 000	38 000	29 000
Y	2500	1600	4000	2000	5600	3000	2000	2200

- a Stel de formule op van de regressielijn van Y op X .
b Bereken de standaardschattingsfout.

Neem aan dat X en Y normaal verdeeld zijn.

- c Bereken de kans dat een gezin met een inkomen van 30 000 euro minder dan 2000 euro per jaar aan kleding besteedt.
d Bereken het 68%-betrouwbaarheidsinterval van Y voor de gezinnen met een jaarinkomen van 25 000 euro.

- 16** Van zeven volwassen personen bepaalt men de systolische bloeddruk vóór en direct na een inspanning. Neem aan dat deze personen representatief zijn voor een grote groep.

persoon	A	B	C	D	E	F	G
bloeddruk X ervoor	136	180	133	150	141	166	131
bloeddruk Y erna	140	213	160	167	158	166	149

- a Bereken de pmcc in twee decimalen nauwkeurig en stel de formule op van de regressielijn van Y op X .
b Bereken in gehelen nauwkeurig de voorspelling van Y bij $X = 150$.
c Iemand heeft na een inspanning een bloeddruk van 180. Bereken de voorspelling van zijn bloeddruk in rust.
d Bereken de standaardschattingsfout in twee decimalen nauwkeurig.
e Beschouw alle personen die vóór de inspanning een bloeddruk van 150 hebben. Bereken het 68%-betrouwbaarheidsinterval van de bloeddruk na de inspanning.
f Beschouw alle personen die vóór de inspanning een bloeddruk van 140 hebben. Hoeveel procent van deze personen heeft na de inspanning een bloeddruk boven 180?

- 17** In de tabel staat van tien personen de leeftijd X , het gewicht Y en de bloeddruk Z . Bij deze tabel zijn lineaire regressiemodellen op te stellen.

X	20	24	34	40	53	60	62	69	75	89
Y	52	85	65	60	55	60	58	75	70	65
Z	110	130	125	140	135	150	145	160	155	180

- Bereken in gehelen nauwkeurig de voorspelling van Z bij $X = 30$.
- Bereken in gehelen nauwkeurig de voorspelling van Z bij $Y = 80$.
- Voor welke waarden van X is de voorspelling van Z groter dan 150?
- Voor welke waarden van Y is de voorspelling van Z groter dan 150?

Het ligt voor de hand te veronderstellen dat de bloeddruk van een aantal factoren afhangt, bijvoorbeeld leeftijd, gewicht, geslacht, roken, drinken, enzovoort. Bij de gegevens van de tabel zou dat leiden tot een regressieformule van de vorm $\hat{Z} = aX + bY + c$ met de regressiecoëfficiënten a , b en c . Er is sprake van *meervoudige regressie*. Ook bij meervoudige regressie wordt de methode van de kleinste kwadraten toegepast. Deze methode leidt dan tot de volgende formules.

$$\Sigma Z = \Sigma X \cdot a + \Sigma Y \cdot b + n \cdot c$$

$$\Sigma(XZ) = \Sigma(X^2) \cdot a + \Sigma(XY) \cdot b + \Sigma X \cdot c$$

$$\Sigma(YZ) = \Sigma(XY) \cdot a + \Sigma(Y^2) \cdot b + \Sigma Y \cdot c$$

Om de regressiecoëfficiënten te berekenen moet dit stelsel van drie vergelijkingen met de drie onbekenden a , b en c worden opgelost.

- Bereken ΣX , ΣY , ΣZ , $\Sigma(XY)$, $\Sigma(XZ)$, $\Sigma(YZ)$, $\Sigma(X^2)$ en $\Sigma(Y^2)$. Maak hierbij handig gebruik van lijsten op de GR.
- Bereken a , b en c met behulp van een matrix. Rond af op vijf decimalen.
- Bereken in gehelen nauwkeurig de voorspelling van Z bij $X = 70$ en $Y = 80$.
- Je kunt aan de formule van $\hat{Z}$ zien dat X veel meer invloed op de voorspelling van de bloeddruk heeft dan Y . Onderzoek of dit in overeenstemming is met de pmcc van X en Z en de pmcc van Y en Z .

- 18** Van de normaal verdeelde toevalsvariabelen X en Y levert een steekproef van 10 waarnemingen de volgende gegevens op:
 $\Sigma X = 500$, $\Sigma Y = 1500$, $\Sigma XY = 80\,000$.

De standaardafwijkingen van de waarnemingen voor X en Y zijn respectievelijk 15 en 40.

- Bereken de pmcc en de standaardschattingsfout.
- Neem $X = 45$ en bereken de voorwaardelijke voorspelling van Y .
- Neem $X = 60$ en bereken $P(Y > 200)$.

- 19** In een metaalwarenfabriek worden cilinders met bijpassende zuigers gefabriceerd. Volgens de afdeling Kwaliteitsbewaking is van de cilinders de binnendiameter X in cm normaal verdeeld met $\mu_X = 4,20$ en $\sigma_X = 0,075$. Van de zuigers is de buitendiameter Y in cm normaal verdeeld met $\mu_Y = 4,10$ en $\sigma_Y = 0,05$.
- a** Op de afdeling Kwaliteitsbewaking vermoedt men dat na verloop van tijd de gemiddelde binnendiameter van de afgeleverde cilinders minder is dan 4,20 cm. Door middel van een steekproef van 20 cilinders waarvan de binnendiameter wordt gemeten, besluit men de machine die de cilinders maakt al dan niet bij te stellen.
Bij welke steekproefgemiddelden zal men bij een significantieniveau van 5% de machine bijstellen? Rond af op twee decimalen.
- b** Stel dat de machine cilinders aflevert met een gemiddelde binnendiameter van 4,18 cm en een standaardafwijking van 0,075. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat men bij een steekproef van lengte 20 en het hanteren van de in vraag a gevonden beslissingsregel *niet* tot bijstelling van de machine overgaat.
- c** Ook de machine die de zuigers maakt, gaat na verloop van tijd minder nauwkeurig werken. Regelmatig neemt men een steekproef van tien zuigers waarvan men de buitendiameter Y meet.
Bij welke steekproefgemiddelden besluit men bij een significantieniveau van 5% om deze machine bij te stellen? Rond af op twee decimalen.
- d** Neem aan dat na verloop van tijd cilinders worden afgeleverd met $\mu_X = 4,18$ en $\sigma_X = 0,075$ en zuigers met $\mu_Y = 4,12$ en $\sigma_Y = 0,05$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat een willekeurig gekozen zuiger niet in een willekeurig gekozen cilinder past.

- 20** Wordt een kind dat in april is geboren langer dan een kind dat in oktober is geboren?
Bij een onderzoek heeft men uit 14 gezinnen met twee jongens, waarvan de ene in april en de andere in oktober is geboren, de lengte van deze jongens op hun 18^e verjaardag gemeten. In tien gevallen bleek de in april geboren jongen langer dan de in oktober geboren jongen.
Geeft dit resultaat aanleiding te veronderstellen dat een kind dat in april geboren is langer wordt dan een kind dat in oktober is geboren? Neem $\alpha = 0,05$.



21 Het IQ van een persoon is een maat voor diens intelligentie.

Het IQ wordt gegeven door een geheel getal.

Neem aan dat het IQ bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 15.

Men onderzocht een groep van 15 000 personen en vond hierin 612 personen met een IQ van 128 of meer. Dit aantal van 612 verschilt van het aantal dat men op grond van de aanname van de normale verdeling hierboven mag verwachten.

- a** Toon dit aan met een berekening. Ga er hierbij vanuit dat ook in de groep van 15 000 het IQ bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 15. Omdat het IQ een geheel getal is, bereken je $P(\text{IQ} \geq 128)$ met $P(\text{IQ} \geq 127,5)$.

In een krantenartikel over bijziendheid en intelligentie staat dat 16% van alle onderzochte personen bijziend is. Uitgaande van dit onderzoeksresultaat formuleerde men de hypothese dat ook van de mensen met een hoog IQ (128 of meer) 16% bijziend is. We nemen aan dat het aantal bijzienden N in deze groep normaal verdeeld is met $\mu_N = 97,92$ en $\sigma_N = 9,07$.

Van de groep van 612 onderzochte personen met een hoog IQ bleek 27,3% bijziend.

- b** Onderzoek of de 27,3% bij een significantieniveau van 1% significant boven de 16% uit de hypothese ligt.

22 De rouletteschijf in figuur G.2 is verdeeld in tien even grote sectoren. Bij een controle wordt nagegaan of de roulette zuiver is.

- a** Men draait de roulette 400 keer en telt hoeveel keer het balletje op een van de sectoren 1, 8 en 5 blijft liggen. Dit blijkt 110 keer te zijn. Is er bij een significantieniveau van 2,5% aanleiding de zuiverheid van de roulette in twijfel te trekken?

- b** Men draait de roulette 800 keer en telt hoeveel keer het balletje op de sectoren 3 en 6 blijft liggen.

Bij welke aantallen zal de zuiverheid van de roulette niet in twijfel worden getrokken bij een significantieniveau van 1%?

- c** Volgens Petra komt het balletje te weinig op de sectoren 3, 6, 9 en 10. Bij 150 keer draaien gebeurde dit slechts 52 keer. Is er bij $\alpha = 0,10$ voldoende reden om het met Petra eens te zijn?



figuur G.2

- 23** De afdeling Spoedeisende Hulp (SEH) van een ziekenhuis is 24 uur per dag geopend. De klachten waarmee de patiënten zich melden variëren van langer bestaande klachten tot zeer spoedeisende klachten. Bij binnenkomst worden er op grond van de klachten enkele vragen aan de patiënt gesteld en wordt de patiënt onderzocht. De patiënt krijgt een kleurcode toegewezen die de volgorde voor verdere behandeling aangeeft. Er zijn vijf codes: rood, oranje, geel, groen en blauw. Rood betekent dat er onmiddellijk levensreddend moet worden gehandeld, blauw betekent dat er geen urgentie is. Het indelen van patiënten in verschillende categorieën op basis van de ernst van hun ziekte of verwondingen wordt triage genoemd.
- De tijd die per patiënt nodig is voor het triage-onderzoek is normaal verdeeld met een gemiddelde van 3 minuten en 30 seconden en een standaardafwijking van 45 seconden.

Op een dag melden zich 25 patiënten op de SEH.

- Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat op deze dag de gemiddelde tijd per patiënt voor het triage-onderzoek meer dan 4 minuten is.
- Bereken de kans dat op deze dag bij meer dan 5 patiënten het triage-onderzoek langer dan 4 minuten duurt.

Om het triage-onderzoek sneller te laten verlopen, wordt besloten een stagiair in te zetten om de triage-verpleegkundige te helpen. Van de 100 triage-onderzoeken waarbij de stagiair aanwezig was duurden er 20 meer dan 4 minuten.

- Is er bij een significantieniveau van 5% aangetoond dat de gemiddelde tijd die een triage-onderzoek duurt is afgenomen?

Volgens de directie van het ziekenhuis melden zich gemiddeld 36 patiënten per dag bij de SEH.

Volgens het personeel dat op deze afdeling werkt, is dit aantal hoger. Daarom wordt gedurende een jaar bijgehouden hoeveel patiënten zich melden. Dat zijn er 13 402.

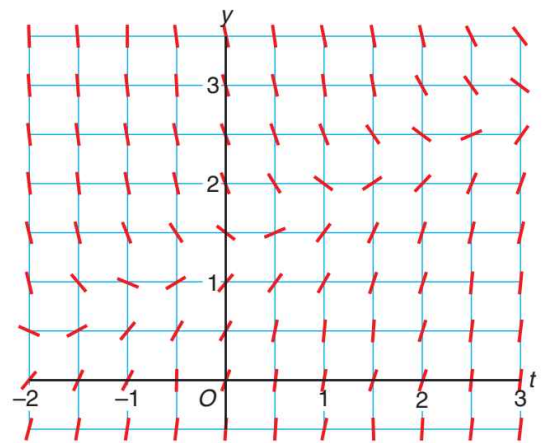
- Bereken de overschrijdskans met de poissonverdeling. Is er bij een significantieniveau van 1% voldoende aanleiding het personeel van de afdeling gelijk te geven?



- 24** Een onderzoeksbureau beweert dat het aantal uur dat een student per week aan bijbaantjes kwijt is normaal verdeeld is met een gemiddelde van 10,5 en een standaardafwijking van 3,2.
- a** Een decaan betwijfelt of dit gemiddelde klopt. Een steekproef van lengte 60 levert een gemiddelde tijd op van 9,8 uur. Is er op grond van dit steekproefresultaat bij een significantieniveau van 5% aanleiding om te twijfelen aan de bewering van het onderzoeksbureau?
- b** Op grond van een steekproef van lengte 200 wil men beslissen of het gemiddelde van 10,5 uur klopt. Bij welke steekproefresultaten zal men het onderzoeksbureau gelijk geven? Neem $\alpha = 0,10$.

15 Continue dynamische modellen

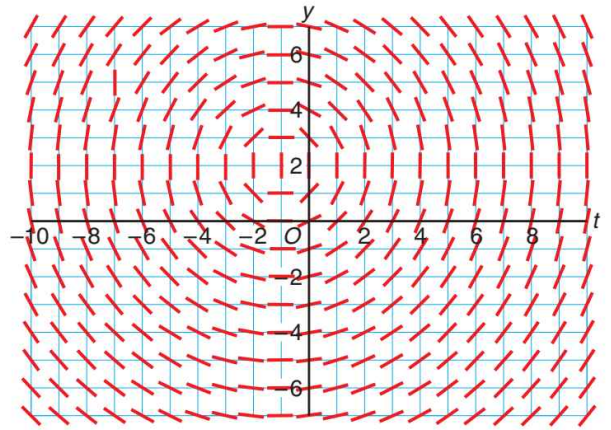
- 25** [**WERKBLAD**] Het lijnelementenveld hiernaast hoort bij de differentiaalvergelijking
- $$\frac{dy}{dt} = 2t - 4y + 5,5.$$
- a** Schets de oplossingskrommen door de punten $(0, 0)$, $(0, 4)$ en $(2, 0)$.
- b** Een van de oplossingskrommen is een rechte lijn. Geef de formule van deze lijn en laat zien dat deze formule inderdaad een oplossing is van de differentiaalvergelijking.
- c** Stel de formule op van de lijn k die de oplossingskromme door $(4, 4)$ in dit punt raakt.
- d** De lijn $l: y = 5,5t - 30$ raakt een oplossingskromme in het punt A . Bereken de coördinaten van A .
- e** Toon aan dat $y = 3e^{-4t} + 0,5t + 1,25$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking.



figuur G.3

- 26** Voor een afkoelend voorwerp geldt $\frac{dT}{dt} = 12 - 0,6T$ met $T(0) = 200$. Hierbij is t de tijd in uren en T de temperatuur van het voorwerp in $^{\circ}\text{C}$.
- a** Stel de formule van T op.
- b** Bereken algebraïsch na hoeveel minuten de temperatuur van het voorwerp is gedaald tot 100°C .
- c** Bereken algebraïsch na hoeveel uur het verschil met de omgevingstemperatuur minder dan 1°C is geworden.

- 27** Het lijnelementenveld hiernaast hoort bij de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{2-y}$.
- De lijn $y = 0,5t - 2,5$ raakt een oplossingskromme van de differentiaalvergelijking in het punt A . Bereken de coördinaten van A .
 - De oplossingskromme door $(-4, 3)$ snijdt de y -as in het punt B . Bereken exact de y -coördinaat van B .
 - Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $(-1, 2)$ die door het punt $(0, 6)$ gaat en toon aan dat deze cirkel een oplossingskromme is.



figuur G.4

- 28** De kromme $y = 1 + \frac{1}{e^{2t-1}}$ is een oplossingskromme van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = a(y - b)$.
Stel de formule op van de oplossingskromme die door het punt $(1, 2)$ gaat.

- 29** Bereken de algemene oplossing.

- $y'' + 6y' + 5y = 0$
- $y'' - 12y' + 36y = 0$
- $y'' - 8y' + 20y = 0$

- 30** Gegeven is de differentiaalvergelijking $y' = y^2 - 1$.

- Toon aan dat de functies $y(t) = \frac{1 + c \cdot e^{2t}}{1 - c \cdot e^{2t}}$ oplossing zijn van de differentiaalvergelijking.
- Bereken de oplossing van $y' = y^2 - 1$ met $y(0) = 1$.

- 31** Gegeven is de differentiaalvergelijking $(2t + y)y' = 2t^3 + 4y$.

- Welke tweedegraadsfuncties zijn oplossing van de differentiaalvergelijking?
- De lijn k raakt een oplossingskromme in het punt $A(1, 1)$. Bewijs dat k geen andere oplossingskromme raakt.

- 32** Bereken de algemene oplossing.

- | | |
|--|--|
| a $\frac{dy}{dt} = (2t + 4)e^{-t}$ | d $\frac{dy}{dt} = 3y + t^2 - 2t + 4$ |
| b $\frac{dy}{dt} = \frac{t-3}{y+5}$ | e $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}y + e^t + t$ |
| c $\frac{dA}{dt} = 10A(1 - A)$ | f $\frac{dy}{dt} = 2y + 4 \cos(t)$ |

- 33** Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = 4y^2 - y^4.$$

- Schets de oplossingskrommen met $y(0) = -3$, $y(0) = -1$, $y(0) = 1$ en $y(0) = 3$.
- Stel de formule op van de lijn k die de oplossingskromme door $(3, 3)$ in dit punt raakt.
- Stel de formule op van de lijn l die de oplossingskromme door $(2, 4)$ in dit punt loodrecht snijdt.

- 34** Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'' + 4y' + 5y = 8\cos(t)$.

- Bereken een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking van de vorm $y = A\sin(t) + B\cos(t)$.
- Bereken de algemene oplossing van $y'' + 4y' + 5y = 0$.
- Toon aan dat de som van de oplossingen van de vragen a en b voldoet aan $y'' + 4y' + 5y = 8\cos(t)$.
- Bereken de oplossing van $y'' + 4y' + 5y = 8\cos(t)$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.
- Bereken de oplossing van $y'' + 3y' + 2y = 2e^t$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.
- Bereken de oplossing van $y'' - 5y' + 4y = t^2$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 10$.

- 35** Een zeeaquarium bevat 500 m^3 water met een zoutgehalte van 3,5 gram per liter. Vanaf $t = 0$ stroomt er 100 liter zout water per minuut weg. Tegelijkertijd wordt er 100 liter water per minuut met een zoutgehalte van 2,5 gram per liter toegevoegd. Ga ervan uit dat het binnenstromende water zich meteen volledig mengt met het aanwezige water.

- Stel bij de hoeveelheid zout Z in het aquarium in kilogram een dynamisch model op. Neem de tijd t in uren.
- Stel de formule van Z op.
- Bereken het zoutgehalte na 24 uur.
- Bereken na hoeveel minuten het zoutgehalte in het aquarium 3 gram per liter is.



36 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\cos(t) \cdot y' = 1 - y \cdot \sin(t)$.

- a** Er zijn oplossingskrommen die de lijn $y = 2$ raken.
Bereken de coördinaten van de raakpunten.
- b** Voor welke waarden van a en b is $y = a \sin(t) + b \cos(t)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking?

37 Voor $t \geq 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = f_p(y)$

met $f_p(y) = y^2 + py + 3p$.

- a** Voor welke waarden van $y(0)$ hebben de oplossingskrommen van $\frac{dy}{dt} = f_{-4}(y)$ een horizontale asymptoot?
- b** Voor welke waarden van p zijn alle oplossingskrommen stijgende functies?
- c** De lijn $y = 2t + q$ raakt een oplossingskromme in het punt $(5, 6)$.
Bereken p en q .

38 Voor een slinger geldt de formule

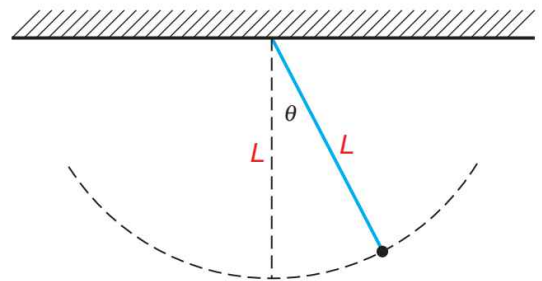
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0. \text{ Hierin is } \theta \text{ in radialen,}$$

L de lengte van de slinger in meter en g de versnelling van de zwaartekracht in m/s^2 .

Zie figuur G.5.

Om een formule voor θ te vinden, gebruiken we dat $\sin(\theta) \approx \theta$ voor kleine waarden van θ .

- a** Bereken de algemene oplossing van $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \theta = 0$.
- b** Stel de formule op van de periode p van een slinger als functie van L en g .



figuur G.5

16 Complexe functies

39 Gegeven is de functie $f(z) = z^2$.

- a** Teken in het complexe vlak het beeld van $|z| \leq 2 \wedge -\frac{1}{4}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{4}\pi$.
- b** Bereken $f(1 + bi)$ en schets het beeld van $\text{Re}(z) = 1$.
- c** Welke getallen z met $\text{Im}(z) = 4$ worden afgebeeld op de imaginaire as?

40 Bereken de nulpunten en de dekpunten van de volgende functies.

- a** $f(z) = (3 - i)z + 2 + i$
- b** $g(z) = z^2 + 4$

- 41** a In het complexe vlak wordt op het punt A eerst de translatie $(3, 1)$ toegepast en vervolgens de rotatie om 0 over $-\frac{1}{2}\pi$. Het beeld A' is het punt dat hoort bij het complexe getal $3 + 2i$. Bereken het getal dat hoort bij het punt A .
- b In het complexe vlak wordt het punt B geroteerd over $\frac{1}{4}\pi$ en vermenigvuldigd met $\sqrt{2}$ ten opzichte van 0 en vervolgens twee naar rechts en drie naar beneden verschoven. Het beeld B' valt samen met B . Bereken het complexe getal dat bij B hoort.

- 42** Gegeven is de functie $f(z) = (2 - 2i)z + 3 - i$.
- a Bereken het nulpunt en het dekpunt van f .
- b Bereken het origineel van $2 - 3i$.
- c Teken het beeld van $1 \leq |z| \leq 3 \wedge \frac{2}{3}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$ en bereken hiervan de oppervlakte.
- d Teken het origineel van $1 \leq |z| \leq 3 \wedge \frac{2}{3}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$ en bereken hiervan de oppervlakte.

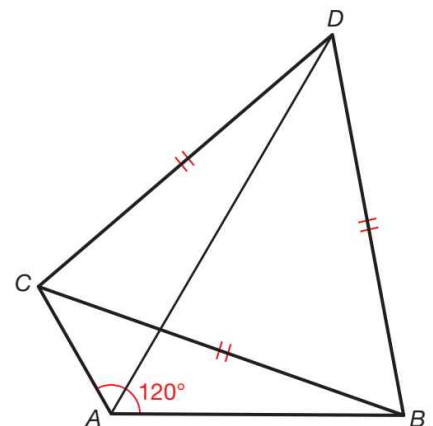
- 43** Gegeven is de functie $f(z) = e^{\frac{1}{2}z}$.
- a Teken het beeld van $\text{Re}(z) = 2$ en van $\text{Im}(z) = \pi$.
- b Teken het beeld van het lijnstuk met de eindpunten $-2 + \frac{1}{2}\pi i$ en $2 + \frac{1}{2}\pi i$.

- 44** Gegeven is de functie $f(z) = \ln(iz)$.
- a Teken het beeld van de eenheidscirkel.
- b Teken het beeld van $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}\pi$.

- 45** Los algebraïsch op in $\mathbb{C}$.
- a $z^3 - 9z = 80$
- b $z^3 + 4z^2 = 24$
- c $z^3 - 6z^2 + 18z - 40 = 0$

- 46** Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 120^\circ$ en $AB = 2AC$. Op zijde BC wordt de naar buiten gerichte gelijkzijdige driehoek BCD geplaatst. Je gaat bewijzen dat $AD = \frac{1}{2}AB$ en dat AD de bissectrice van $\angle A$ is.

- a Licht toe dat $c = a + \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{2}{3}\pi i}$.
- b Het lijnstuk CB wordt gedraaid om C . Het complexe getal d hoort bij het beeld D van B . Druk d uit in a en b en toon aan dat $d - a = (b - a) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}\pi i} + e^{\frac{1}{3}\pi i}\right)$.
- c Toon aan dat $d - a = \frac{1}{2}(b - a)e^{\frac{1}{3}\pi i}$.
- d Licht toe dat $AD = \frac{1}{2}AB$ en dat AD de bissectrice van $\angle A$ is.



figuur G.6

47 In deze opgave ga je onderzoeken wat bij de functie $f(z) = \frac{1}{z}$

het beeld is van een lijn en van een cirkel in het complexe vlak. Daarvoor heb je een geschikte algemene vergelijking van een lijn en van een cirkel in het complexe vlak nodig. Een vergelijking van een lijn in het complexe vlak is $|z - p| = |z - q|$. Hierin zijn p en q twee (verschillende) complexe getallen.

a Licht dit toe.

Uit $|z - p| = |z - q|$ volgt $|z - p|^2 = |z - q|^2$. Hieruit volgt dat $\mu z + \bar{\mu} \cdot \bar{z} + c = 0$ met μ een complex getal en c een reëel getal een vergelijking is van een lijn in het complexe vlak.

b Toon dit aan.

c Licht toe dat $\mu z + \bar{\mu} \cdot \bar{z} = 0$ met μ een complex getal een vergelijking is van een lijn door 0.

Een vergelijking van een cirkel in het complexe vlak is $|z - m| = r$. Hierbij hoort m bij het middelpunt van de cirkel en is r de straal van de cirkel. Deze vergelijking is te schrijven als $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} + d = 0$ met d een reëel getal.

d Toon dit aan.

e Licht toe dat $z\bar{z} - \bar{m}z - m\bar{z} = 0$ een vergelijking is van een cirkel door 0.

Gegeven is de functie $f(z) = \frac{1}{z}$.

Voor het beeld w van z geldt $w = f(z) = \frac{1}{z}$ en $\bar{w} = \frac{1}{\bar{z}}$, dus het

beeld van de lijn $\mu z + \bar{\mu} \cdot \bar{z} = 0$ is $\mu \cdot \frac{1}{w} + \bar{\mu} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = 0$.

f Toon aan dat $\mu \cdot \frac{1}{w} + \bar{\mu} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = 0$ een lijn door 0 is.

g Toon aan dat het beeld van een lijn die niet door 0 gaat op een cirkel ligt die door 0 gaat.

h Onderzoek wat het beeld is van een cirkel door 0.

i Onderzoek wat het beeld is van een cirkel die niet door 0 gaat.

48 Toon aan dat voor elk complex getal z geldt

a $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z)$

b $\cos(z - \frac{1}{2}\pi) = \sin(z)$.

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

49 In deze opgave ga je een aantal eigenschappen van complexe getallen aantonen. Elke aangetoonde eigenschap en zijn omgekeerde mag je bij het vervolg gebruiken. De omgekeerde eigenschappen hoef je niet aan te tonen.

a Toon aan

- als z reëel is, dan geldt $z = \bar{z}$
- als z imaginair is, dan geldt $z = -\bar{z}$
- als z op de eenheidscirkel ligt, dan geldt $\bar{z} = \frac{1}{z}$
- als $AB \parallel CD$, dan is $\frac{a-b}{c-d}$ reëel
- als de punten A , B en C op één lijn liggen, dan is $\frac{c-b}{c-a}$ reëel
- als $AB \perp CD$, dan is $\frac{a-b}{c-d}$ imaginair.

Met de bovenstaande eigenschappen zijn allerlei meetkundige stellingen te bewijzen. Zo geldt: als de punten A , B , C en D op de eenheidscirkel liggen en $AB \perp CD$, dan is $ab = -cd$. Het bewijs gaat als volgt.

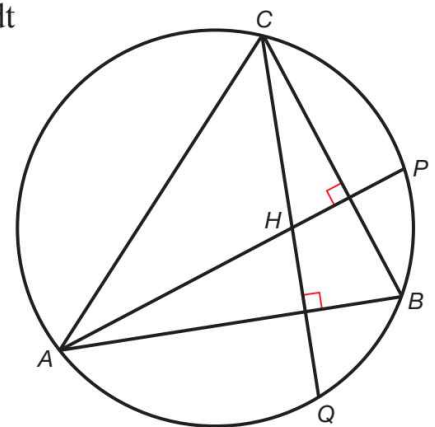
$$AB \perp CD, \text{ dus } \frac{a-b}{c-d} \text{ is imaginair, dus } \frac{a-b}{c-d} = -\overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)} =$$

$$-\frac{\overline{a-b}}{\overline{c-d}} = -\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}} = -\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}} = -\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{d-c}{cd}} = -\frac{b-a}{d-c} \cdot \frac{cd}{ab} = \frac{a-b}{c-d} \cdot -\frac{cd}{ab}.$$

Dus $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a-b}{c-d} \cdot -\frac{cd}{ab}$, en dit geeft $ab = -cd$.

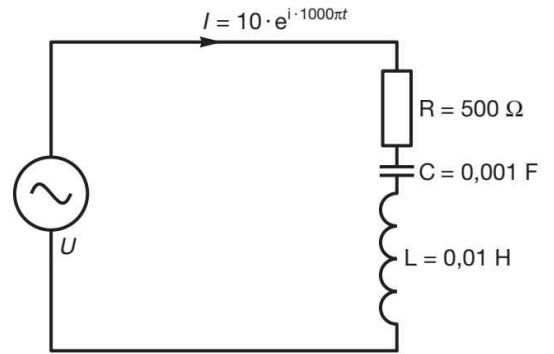
De punten A , B , C en D liggen op de eenheidscirkel. Bewijs de volgende eigenschappen. Elke aangetoonde eigenschap en zijn omgekeerde mag je bij het vervolg gebruiken.

- b** Als $AB \parallel CD$, dan geldt $ab = cd$.
- c** Als driehoek ABC rechthoekig is in A , dan geldt $b + c = 0$.
- d** Als het punt P op de lijn AB ligt, dan geldt $p = a + b - ab\bar{p}$.
- e** Als de lijnen AB en CD elkaar snijden in het punt S , dan geldt $s = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$.
- f** Als H het snijpunt is van de hoogtelijnen van driehoek ABC , dan geldt $h = a + b + c$. Zie figuur G.7.



figuur G.7

- 50** Gegeven is de schakeling in figuur G.8.
- Stel een formule op van U .
 - Bereken in gehelen nauwkeurig de impedantie van de serieschakeling.
 - Bereken het faseverschil van U en I in radialen. Rond af op twee decimalen.



figuur G.8

- 51** De meeste luidsprekers gebruiken twee- of driewegsystemen om geluid zo natuurlijk mogelijk te laten klinken. Het geluidssignaal wordt, nadat het is versterkt, gesplitst in lage, midden- en hoge tonen die via aparte luidsprekers worden weergegeven. De lage tonen komen uit de woofer, de middentonen uit de squawker en de hoge tonen uit de tweeter.
- Het geluidssignaal fungeert als een wisselspanningsbron die is aangesloten op een parallelschakeling van de drie luidsprekers. De tweeter staat in serie met een condensator, de squawker met een condensator en een spoel en de woofer met een spoel.
- Licht toe dat deze schakeling de gewenste werking heeft als de juiste condensatoren en spoelen worden gekozen.

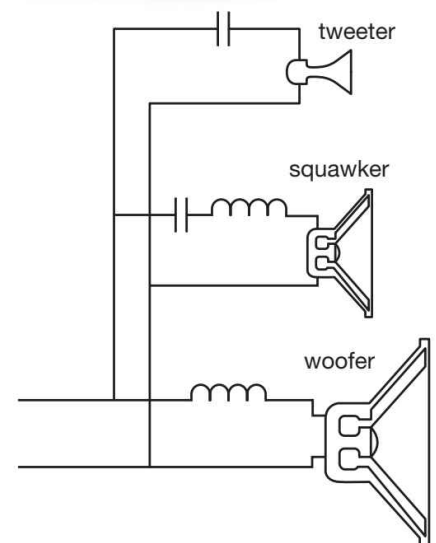
De tweeter kun je opvatten als een serieschakeling van een condensator en een weerstand. Voor een dergelijke schakeling geldt voor de impedantie de formule

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}.$$

- Bereken voor de tweeter de impedantie bij de frequenties 100 Hz en 10 000 Hz. Neem $C = 10^{-4}$ F en $R = 1 \Omega$.

De woofer kun je opvatten als een serieschakeling van een spoel en een weerstand.

- Bereken voor de woofer de impedantie bij de frequenties 100 Hz en 10 000 Hz. Neem $L = 10^{-3}$ H en $R = 1 \Omega$.



figuur G.9

Overzicht GR-handleiding

Module

Het rijen-invoerscherm - Het invoeren van een directe formule - Het invoeren van een recursieve formule	vwo D deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 66
Matrices Rekenen met matrices	vwo D deel 1 hoofdstuk 4 bladzijde 151
Tijdgrafieken Het plotten van een tijdgrafiek	vwo D deel 2 hoofdstuk 6 bladzijde 56
Webgrafieken Het plotten van een webgrafiek	vwo D deel 2 hoofdstuk 6 bladzijde 63
Complexe getallen Het werken met complexe getallen	vwo D deel 3 hoofdstuk 10 bladzijde 52
Centrum- en spreidingsmaten Het berekenen van centrum- en spreidingsmaten	vwo D deel 3 hoofdstuk 12 bladzijde 135
Regressielijnen en residuen Het opstellen van regressiemodellen	vwo D deel 4 hoofdstuk 14 bladzijde 56

Trefwoordenregister

A

afhankelijke variabele 58
algemene oplossing van een
differentiaalvergelijking
129, 134
alternatieve hypothese 80
as van de parabool 17
asymptoten van een
hyperbool 27

B

beslissingsvoorschrift 78
best passende lijn 52, 60
betrouwbaarheidsinterval
75
binomiale toets 93
bollen van Dandelin 15
brandpunten van een ellips
22
brandpunten van een
hyperbool 26

C

Cardano, formule van
185
Cardano, Girolamo 184
Cauchy, Augustin-Louis
164
complexe exponentiële
functie 170
complexe functie 158
complexe getallen, notaties
voor 156
complexe goniometrische
functie 172
complexe lineaire functie
163
complexe logaritmische
functie 171
complexe machtsfunctie
166
complexe spanning 188
condensator 191
continu dynamisch model
111

correlatie 52
correlatie, negatieve 52
correlatie, positieve 52
correlatie, sterke 53
correlatie, volkomen 52
correlatie, zwakke 53
covariantie 64

D

Dandelin, bollen van 15
Dandelin, Germinal Pierre
15
data-snooping 84
De Moivre, formule van
167
dekpunt van een complexe
functie 160
damping, kritische 146
dampingcoëfficiënt 146
derdegraadsvergelijking,
discriminant van 185
differentiaalvergelijking
117
differentiaalvergelijking
van de eerste orde
117, 133, 139
differentiaalvergelijking
van de tweede orde 143
differentiaalvergelijking,
algemene oplossing
van een 129, 134
differentiaalvergelijking,
oplossen van een
129
differentiaalvergelijking,
oplossing van een
118, 126
differentiaalvergelijking,
oplossingskromme van
een 118
differentiaalvergelijking,
oplossing van een 129
differentiaalvergelijking,
tekenoverzicht van
een 121

discreet dynamisch
model 106
discriminant van
derdegraadsvergelijking
185
draaivermenigvuldiging
161, 175
dynamisch model,
continu 111
dynamisch model,
discreet 106

E

eenzijdige toets 87
eerste orde,
differentiaalvergelijking
van de 117, 133, 139
eerste orde, kwadratische
differentiaalvergelijking
van de 139
eerste orde, lineaire
differentiaalvergelijking
van de 133
eigenfrequentie 146
ellips, brandpunten 22
ellips, liggende 20
ellips, staande 21
ellips, symmetrieassen 22
ellips, toppen 22
ellips, vergelijking van
21
ellipsoïde 43
enkelvoudige hypothese
91
Euler, formule van 156
exponentiële functie,
complexe 170

F

factorstelling 180
faseverschil 189
fasevoorsprong 189
formule van Cardano 185
formule van De Moivre
167

fout van de eerste soort 85
 fout van de tweede soort 85
 functie, complexe 158
 functie, hyperbolische 173

G

Gauss, Carl Friedrich 59
 gedempte trillingen 146
 geremde groei 138
 goniometrische functie, complexe 172
 groei, geremde 138
 groei, logistische 138
 groeimodel, logistisch 138

H

halfsubstitutie 34
 hoeksnelheid 189
 homogene vergelijking 133
 hyperbolische functie 173
 hyperboloïde, eenbladige 44
 hyperboloïde, tweebladige 44
 hyperbool, asymptoten van 27
 hyperbool, brandpunten 26
 hyperbool, symmetrieassen 26
 hyperbool, toppen 26
 hyperbool, vergelijking van 24
 hypothese, alternatieve 80
 hypothese, enkelvoudige 91
 hypothese, nul- 80
 hypothesen, toetsen van 81

I

impedantie 191, 193
 inductiespanning 194

K

karakteristieke vergelijking 106, 144
 kegelsnede 14
 kegelsneden onderzoeken 29
 kegelsneden roteren 30
 kegelsneden, normaal bij 32
 kegelsneden, raaklijn bij 32
 kegelvlak 14
 kettinglijn 173
 kleinste kwadraten, methode van 56, 57, 59, 60
 kritische demping 146
 kwadraatafsplitsen 13
 kwadratische differentiaalvergelijking van de eerste orde 139

L

LC-schakeling 197
 Legendre, Adrien Marie 57
 liggende ellips 20
 liggende parabool 17
 lijnelement 117
 lijnelementenveld 117
 lineaire complexe functie 163
 lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde 133
 lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde 143
 lineaire samenhang 66
 linkszijdige toets 87
 logaritmische functie, complexe 171
 logistisch groeimodel 138
 logistische groei 138

M

machtsfunctie, complexe 166
 massa-veersysteem 146

meetkundige plaatsen 8
 methode van de kleinste kwadraten 56, 57, 59, 60

N

Napoleon, stelling van 178
 negatieve correlatie 52
 Newton, tweede wet van 108
 normaal bij kegelsneden 32
 normale toets 83
 nulhypothese 80
 nulpunt van een complexe functie 159

O

omwentelingsoppervlak 42
 omwentelingsparaboloïde 43
 onafhankelijke variabele 58
 onbetrouwbaarheid 85
 onderdemping 146
 onderzoeken van kegelsneden 29
 opening van een parabool 17
 oplossen van een differentiaalvergelijking 129
 oplossing van een differentiaalvergelijking 118, 126
 oplossingskromme 118
 overdemping 146
 overschrijdingskans 83

P

parabool, as van 17
 parabool, liggende 17
 parabool, opening van 17
 parabool, parameter van 17
 parabool, staande 17
 parabool, vergelijking van 17
 parameter van de parabool 17

- particuliere oplossing
van een differentiaal-
vergelijking 129
- Pearson, Karl 68
- pmcc 65, 66
- pool 8
- poollijn bij punt binnen of
op kegelsnede 41
- poollijn 8, 34
- poollijn, vergelijking
van 35
- positieve correlatie 52
- productmoment-
correlatiecoëfficiënt
65, 66
- puntenwolk 52
- puntenwolk, zwaartepunt
van 52
- R**
- raaklijn bij kegelsneden 32
- raaklijneigenschap ellips 11
- raaklijneigenschap
hyperbool 12
- raaklijneigenschap
parabool 8
- rechtszijdige toets 87
- regressie naar het
gemiddelde 73
- regressie van Y op X 58
- regressiecoëfficiënten 60
- regressielijn 55
- regressiemodel 55
- regressievergelijking 71
- residu 55
- roteren van kegelsneden 30
- S**
- samenhang, lineaire 66
- scheiden van
variabelen 130
- significant afwijken 81
- significantieniveau 80
- spanning, complexe 188
- spanning, inductie- 194
- spreidingsdiagram 52
- staande ellips 21
- staande parabool 17
- standaardschattingsfout 75
- Steinmetz, Charles 198
- stelling van Napoleon 178
- sterke correlatie 53
- symmetrieassen van een
ellips 22
- symmetrieassen van een
hyperbool 26
- T**
- tekenoverzicht van een
differentiaalvergelijking
121
- toets, binomiale 93
- toets, eenzijdige 87
- toets, linkszijdige 87
- toets, normale 83
- toets, rechtszijdige 87
- toets, tweezijdige binomiale
97
- toets, tweezijdige 87
- toetsen van hypothesen
81
- toppen van een ellips 22
- toppen van een hyperbool
26
- trillingen, gedempte 146
- tweede orde,
differentiaalvergelijking
van de 143
- tweede orde, lineaire
differentiaalvergelijking
van de 143
- tweede wet van Newton
108
- tweezijdige binomiale toets
97
- tweezijdige toets 87
- V**
- variabele punten 39
- variabele, afhankelijke 58
- variabele,
onafhankelijke 58
- variabelen, scheiden
van 130
- vergelijking van een
ellips 21
- vergelijking van een
hyperbool 24
- vergelijking van een
parabool 17
- vergelijking van een
poollijn 35
- vergelijking, homogene 133
- vergelijking,
karakteristieke 144
- vergelijkingen oplossen
in $\mathbb{C}$ 154
- volkomen correlatie 52
- voorspelling,
voorwaardelijke 55
- voorwaardelijke
voorspelling 55
- W**
- wisselspanning 188
- wortel- n -wet 50
- Z**
- zelfinductiecoëfficiënt 194
- zwaartepunt puntenwolk 52
- zwakke correlatie 53

Verantwoording

Fotoresearch: B en U International Picture
Service, Amsterdam

Illustratieverwerving: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: OKS PrePress

Foto's

Wikimedia Commons: p. 6/7, 59
University of Cambridge, Cambridge: p. 15
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 48/49, 115
National Portrait Gallery, Londen: 57, 68
ANP Foto, Rijswijk: p. 104/105
Imageselect, Wassenaar: p. 112, 184
iStockphoto: p. 114, 141, 173, 197, 198m
Digital Vision: p. 148
Shutterstock: p. 152/153, 217
Library of Congress Prints and Photographs
Division, Washington: p. 164
Getty Images: p. 198o
Novum, Den Haag: p. 209
Dreamstime: p. 212

Colofon

Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: OKS PrePress



2 / 18

© 2016 Noordhoff Uitgevers bv,
Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

ISBN 978-90-01-84241-3