

GETAL & RUIMTE 3

GETAL & RUIMTE

vwo D deel 3

ELFDE EDITIE, 2016

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers Groningen

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo D deel 3

Samen met de delen 1, 2 en 4 van vwo wiskunde D bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde D, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak vwo wiskunde D is 440 uur.

Omdat het vak wiskunde D geen Centraal Examen kent, is het mogelijk met name de domeinen F: Wiskunde in wetenschap en G: Keuzeonderwerpen vrij in te vullen.

Van de invulling die *Getal & Ruimte* hierbij heeft gekozen, kan dus worden afgeweken.

In de voorwoorden van dit en de andere delen wordt dit aangegeven.

Deel 3 is bedoeld voor het vijfde leerjaar van het vwo. Eventueel moeten in het vijfde leerjaar eerst nog een of meer hoofdstukken van deel 2 worden afgehandeld.

In hoofdstuk 9 Meetkundige plaatsen en raaklijneigenschappen wordt een gedeelte van het subdomein D2: Kegelsneden: synthetisch en in coördinaten aangeboden. Het betreft het synthetische gedeelte. Na een oriëntatie met GeoGebra worden de parabool, de ellips en de hyperbool als meetkundige plaats gedefinieerd. Vervolgens komen de raaklijneigenschappen van parabool, ellips en hyperbool aan de orde.

Dit hoofdstuk vindt een vervolg in deel 4, met deze kegelsneden in coördinaten.

In hoofdstuk 10 Complexe getallen wordt een begin gemaakt met het domein E: Complexe getallen. Aan de orde komen onder andere het rekenen met complexe getallen, het complexe vlak, de formule van Euler, complexe e-machten, complexe wortels en enkele toepassingen.

In deel 4 worden de complexe functies behandeld.

Hoofdstuk 11 Lineaire algebra is een vervolg op het hoofdstuk Matrices uit deel 1. De onderwerpen zijn lineaire afbeeldingen, eigenwaarden en eigenvectoren en toepassingen bij machtreeksen en differentievergelijkingen. Met dit hoofdstuk geeft *Getal & Ruimte* invulling aan een gedeelte van de domeinen F en G. Het is dus mogelijk dit hoofdstuk te vervangen door een ander onderwerp.

In hoofdstuk 12 Continue kansverdelingen komen de begrippen kansdichtheid en verdelingsfunctie aan de orde. Verder is er aandacht voor de normale en de exponentiële verdeling. Deze onderwerpen vallen onder het domein B: Kansrekening en statistiek en dan met name onder het subdomein B4: Kansverdelingen.

Online materiaal

In het *Docentenpakket online* staat een studiewijzer bij elk hoofdstuk. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2016

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw, uit wiskunde B of uit voorgaande hoofdstukken die je in het hoofdstuk paraat moet hebben.

O 2 Oriënterende opgave

Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [▶▶6] Testopgave

Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ▶▶ staat.

4 Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 Reflecterende opgave

In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 Afsluitende opgave

De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 Denkopgave

Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[▶ GR]

Verwijzing naar een module in de handleiding bij de grafische rekenmachine.

[▶ WERKBLAD]

Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

9 Meetkundige plaatsen en raaklijneigenschappen	6	11 Lineaire algebra	78
Voorkennis Middelloodlijn en bissectrice	8	Voorkennis Matrices	80
9.1 Meetkundige plaatsen met GeoGebra	9	11.1 Matrixrekening met GeoGebra	84
9.2 Meetkundige plaatsen	15	11.2 Lineaire afbeeldingen	88
9.3 Raaklijneigenschappen	28	11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren	99
Diagnostische toets	36	11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen	109
		Diagnostische toets	118
10 Complexe getallen	38	12 Continue kansverdelingen	120
Voorkennis De exacte-waarden-cirkel	40	Voorkennis Discrete stochasten	122
10.1 Rekenen met complexe getallen	42	12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie	126
10.2 Het complexe vlak	49	12.2 De normale verdeling	135
10.3 Poolcoördinaten en de formule van Euler	56	12.3 Toepassingen van de normale verdeling	146
10.4 Complexe e-machten en complexe wortels	64	12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen	152
10.5 Krachten en snelheden met complexe getallen	72	12.5 De exponentiële verdeling	160
Diagnostische toets	76	Diagnostische toets	170
		Kangoeroe-opgaven	172
		Gemengde opgaven	182
		Overzicht GR-handleiding	197
		Trefwoordenregister	198
		Verantwoording	200

Concentrated Solar Power, kortweg CSP, is de technologie van zonthermische krachtcentrales. De belangrijkste CSP-technologie is de parabolische trog. Hier wordt het zonlicht door parabolische spiegels tot één lijn geconcentreerd. Deze lijn ligt in het brandpunt van de spiegels. In deze zogenaamde brandlijn loopt een buis met transportvloeistof, meestal olie. Het zonlicht warmt de vloeistof op en daarmee wordt elektriciteit opgewekt.

Wat leer je?

- Wat meetkundige plaatsen zijn.
- Meetkundige plaatsen onderzoeken met GeoGebra.
- De parabool, de ellips en de hyperbooltak als meetkundige plaats.
- Raaklijneigenschappen van parabool, ellips en hyperbool.



Meetkundige plaatsen en raaklijneigenschappen

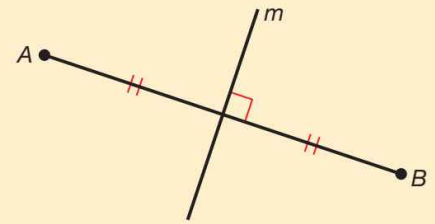
9



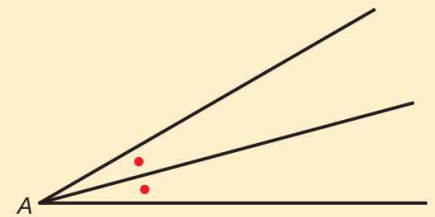
Voorkennis Middelloodlijn en bissectrice

Theorie A Bewijzen met middelloodlijn en bissectrice

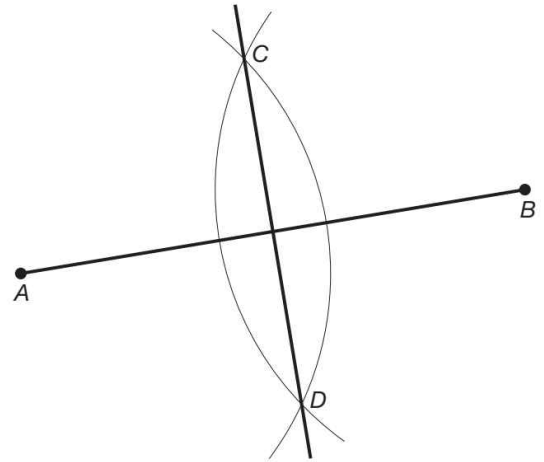
De middelloodlijn van een lijnstuk is de lijn die het lijnstuk loodrecht middendoor snijdt.



De bissectrice (deellijn) van een hoek is de halve lijn die de hoek middendoor deelt.

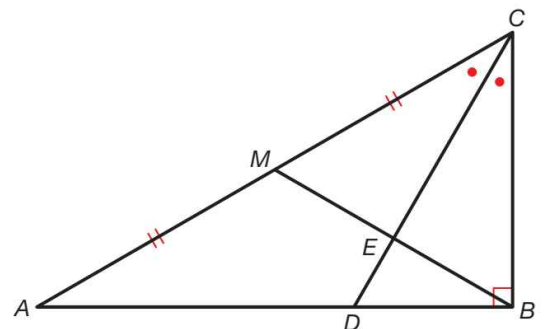


- 1 In figuur 9.1 zijn met de middelpunten A en B gedeelten van cirkels met gelijke straal getekend. De cirkels snijden elkaar in de punten C en D .
Bewijs dat de lijn CD de middelloodlijn van het lijnstuk AB is.



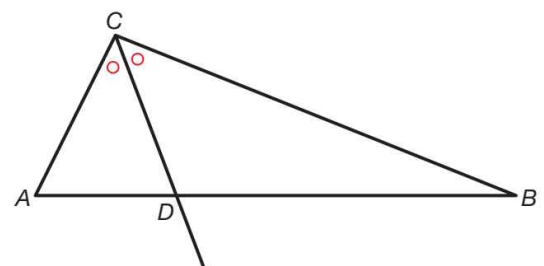
figuur 9.1

- 2 Van driehoek ABC is $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 90^\circ$. Het punt M is het midden van AC . De bissectrice van $\angle C$ snijdt AB in D en BM in E .
Bewijs dat $CD \perp BM$.



figuur 9.2

- 3 In deze opgave ga je de *bissectricestelling* bewijzen. De bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aangrenzende zijden van de driehoek.
Bewijs deze stelling. Gebruik figuur 9.3 en een hulplijn door A , evenwijdig met BC .



figuur 9.3

9.1 Meetkundige plaatsen met GeoGebra

In deze paragraaf ga je met behulp van het computerprogramma GeoGebra meetkundige plaatsen verkennen.

- O 1** Door rechts te klikken op het tekenblad van GeoGebra kun je de assen en het rooster uitzetten. Je krijgt dan een leeg tekenvel. Punten en lijnen een andere naam, kleur of dikte geven doe je door rechts te klikken op het punt of de lijn en eventueel voor Eigenschappen te kiezen.
- Maak een schuifknop r waarvan de waarde varieert van 0 tot 20 met stapgrootte 0,01.
 - Zet de assen en het rooster uit en teken de punten M en N .
 - Teken de cirkel met middelpunt M en straal r en de cirkel met middelpunt N en straal r . Zorg ervoor dat de cirkels elkaar snijden.
 - Teken de snijpunten P en Q van de cirkels en licht toe dat P en Q gelijke afstanden hebben tot M en N .
 - Zet voor P en Q het spoor aan en versleep r .
Waar liggen de punten waarvoor geldt dat ze gelijke afstanden hebben tot M en N ?

Bij vraag e heb je gezien dat alle punten die gelijke afstanden tot M en N hebben op een lijn liggen. Dit is de middelloodlijn van het lijnstuk MN . We zeggen dat de meetkundige plaats van de punten met gelijke afstanden tot M en N de middelloodlijn van MN is.

In het vervolg van deze opgave bekijken we de meetkundige plaats van de punten waarvan de afstand tot M twee keer zo groot is als de afstand tot N .

- Verander de straal van de cirkel met middelpunt M in $2r$.
- Zorg ervoor dat voor P en Q het spoor aan staat en versleep r .
Hoe heet de meetkundige plaats van de punten waarvan de afstand tot M twee keer zo groot is als de afstand tot N ?

Een meetkundige plaats is een verzameling punten met dezelfde meetkundige eigenschap.

- O 2** In deze opgave bekijken we de meetkundige plaats van de punten P die gelijke afstanden hebben tot een punt F en een lijn l .
- Teken een lijn l en een punt F .
 - Teken een punt V op l . Controleer of V bij verslepen op l blijft liggen.
 - Teken het lijnstuk FV , de middelloodlijn m van FV en de lijn k door V loodrecht op l .
 - Teken het snijpunt P van k en m en zet voor P het spoor aan.
 - Versleep V en bekijk het spoor van P .
Welk vermoeden krijg je over de baan van P ?
 - Licht toe dat $d(P, F) = d(P, l)$.

Theorie A De optie Meetkundige plaats

In opgave 2 heb je de meetkundige plaats getekend van de punten P die gelijke afstanden hebben tot het punt F en de lijn l .

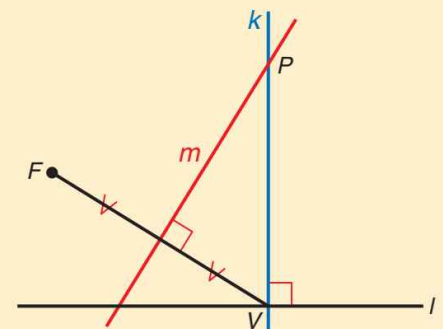
Deze meetkundige plaats is een parabool. Het punt F heet het **brandpunt van de parabool** en de lijn l de **richtlijn van de parabool**.

De punten P waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, l)$ liggen op de parabool met brandpunt F en richtlijn l .

Om een punt P te tekenen met de eigenschap $d(P, F) = d(P, l)$ gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: het tekenen van een punt P van de parabool met brandpunt F en richtlijn l

- 1 Teken een punt V op l .
- 2 Teken door V de loodlijn k op l .
- 3 Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV .
- 4 Het snijpunt van k en m is het punt P .



Tot nu toe heb je bij het tekenen van een meetkundige plaats de optie *Spoor aan* gebruikt voor een verplaatsbaar punt. GeoGebra heeft een optie om een meetkundige plaats direct te tekenen. Het voordeel van het gebruik van deze optie is dat de meetkundige plaats automatisch wordt aangepast als je punten, lijnen of andere objecten van de tekening versleept.

Na het kiezen van de optie *Meetkundige plaats* klik je eerst op het variabele punt V of op een schuifknop en vervolgens op het punt P waarvan je de meetkundige plaats wilt tekenen.

9

- 3
 - a Teken een lijn l en een punt F .
 - b Teken een punt V op l .
 - c Teken de lijn k door V loodrecht op l , het lijnstuk FV en de middelloodlijn m van FV .
 - d Teken het snijpunt P van k en m .
 - e Teken de meetkundige plaats van P . Je krijgt een parabool.
 - f Versleep V en let op de middelloodlijn m van FV . Welk vermoeden krijg je?

- 4** Ga verder met de tekening van opgave 3. Je hebt gezien dat de middelloodlijn van FV een raaklijn is van de parabool, waarbij het raakpunt P is.
- Teken een variabel punt W op de richtlijn l en het bijbehorende punt Q op de parabool. Nu is de middelloodlijn van FW een raaklijn van de parabool met raakpunt Q .
 - Versleep V en W over de richtlijn en let op het snijpunt van de beide raaklijnen. Zorg ervoor dat het snijpunt op de richtlijn ligt. Welk vermoeden krijg je in deze situatie over de raaklijnen?
- 5** In opgave 4 heb je gezien dat twee raaklijnen van een parabool loodrecht op elkaar staan als het snijpunt op de richtlijn ligt. In deze opgave onderzoek je of ook de omkering waar is. Je gebruikt daarbij een aantal handige opdrachten van GeoGebra.
- Teken een punt F en een lijn l .
 - Geef de opdracht Parabool[F, l]. GeoGebra tekent de parabool met brandpunt F en richtlijn l . Verander de naam van de parabool in p .
 - Versleep F en l en merk op dat p steeds wordt aangepast.
 - Teken punten A en B op de parabool. Controleer of A en B bij het verslepen alleen maar over de parabool bewegen.
 - Geef de opdrachten Raaklijn[A, p] en Raaklijn[B, p]. GeoGebra tekent de raaklijnen aan de parabool in A en in B .
 - Bereken de hoek tussen de raaklijnen. Versleep A en B zo, dat de hoek gelijk is aan 90° .
 - Formuleer een vermoeden over raaklijnen aan een parabool die loodrecht op elkaar staan.
- 6** Het onderzoek dat je in opgave 5 hebt gedaan is sneller uit te voeren als je de mogelijkheid hebt om het snijpunt van de beide raaklijnen te verslepen in plaats van de punten A en B . Dit is mogelijk met behulp van de opdracht Poollijn. Bij het maken van deze opgave ontdek je wat een poollijn van een parabool is.
- Teken een parabool p met brandpunt F en richtlijn l .
 - Teken een punt P buiten de parabool.
 - Geef de opdracht Poollijn[P, p] en versleep P zo, dat de poollijn van P twee snijpunten met de parabool heeft die op het scherm te zien zijn. Noem de snijpunten A en B .
 - Teken de raaklijnen aan p in A en B . Wat valt je op?
 - Versleep het punt P . Bedenk een definitie van de poollijn van een punt P ten opzichte van de parabool p .
 - Controleer je vermoeden van opgave 5g.
 - Wat kun je zeggen over de hoek tussen twee raaklijnen aan een parabool als deze raaklijnen elkaar snijden tussen de richtlijn en de parabool?

- 7** a Teken met de opdracht Parabool[F, l] de parabool p met brandpunt F en richtlijn l .
- b Geef de opdracht Assen[p]. GeoGebra tekent de symmetrieas en de lijn door de top loodrecht op de symmetrieas.
- c Teken punten A en B op de parabool. Teken lijnstuk AB , het midden M van AB en een punt C op de parabool tussen A en B .
- d Teken driehoek ABC . Je ziet de oppervlakte van driehoek ABC in het algebravenster. Versleep C zo, dat de oppervlakte van driehoek ABC maximaal is.
- e Teken de lijn CM . Wat valt je op? Controleer je vermoeden in het algebravenster.
- f Teken de raaklijn aan de parabool in C . Wat valt je op als je naar de richting van de raaklijn kijkt? Controleer je vermoeden in het algebravenster.

8 In deze opgave bekijken we de meetkundige plaats van de punten P die gelijke afstanden hebben tot een punt en een cirkel.

- a Teken een cirkel c met middelpunt M en een punt F binnen de cirkel.
- b Teken een punt V op c .
- c Teken het lijnstuk FV , de middelloodlijn m van FV en de lijn k door M en V .
- d Teken het snijpunt P van k en m , zet voor P het spoor aan en bekijk het spoor van P terwijl je V versleept.
- e Licht toe dat $d(P, F) = d(P, c)$.
- f Teken de meetkundige plaats van P met de optie *Meetkundige plaats*. Is de middelloodlijn van FV ook nu een raaklijn van de meetkundige plaats?
- g Versleep F naar een punt buiten de cirkel. Heb je nu nog steeds dezelfde meetkundige figuur? Is de middelloodlijn van FV nog steeds een raaklijn van de meetkundige plaats?

Theorie B Ellipsen en hyperbolen

In opgave 8 heb je de meetkundige plaats getekend van de punten P die gelijke afstanden hebben tot een cirkel c en een punt F dat binnen c ligt. Deze meetkundige plaats is een **ellips**. Het punt F is een **brandpunt van de ellips** en de cirkel c heet een **richtcirkel van de ellips**.

Ligt F buiten de cirkel dan is de meetkundige plaats van de punten P die gelijke afstanden hebben tot de cirkel c en het punt F een **hyperbooltak**. Het punt F is het **brandpunt van de hyperbooltak**. De cirkel c is de **richtcirkel van de hyperbooltak**.

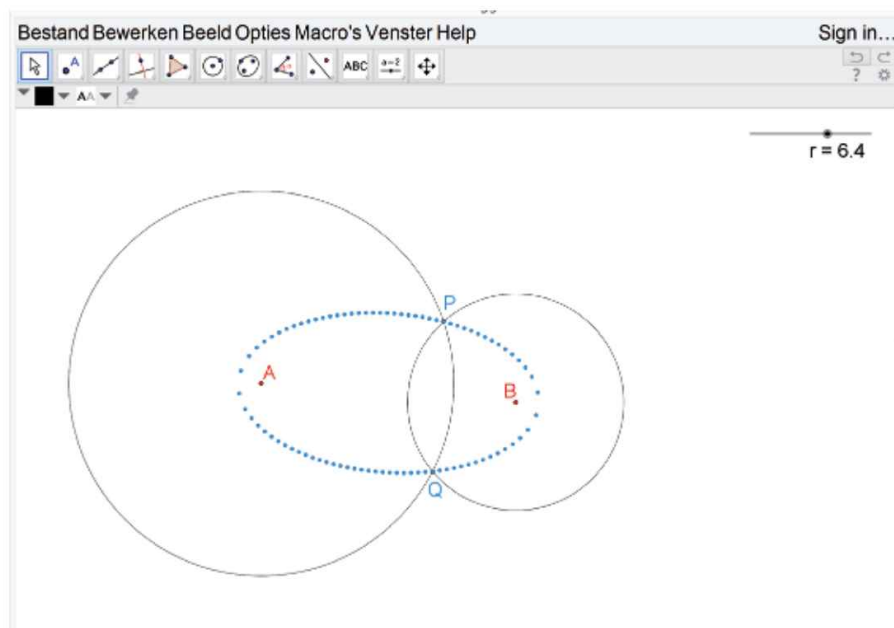
De punten P waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, c)$ liggen op de ellips met brandpunt F en richtcirkel c als F binnen c ligt.

De punten P waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, c)$ liggen op de hyperbooltak met brandpunt F en richtcirkel c als F buiten c ligt.

- 9** In deze opgave bekijken we de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, A) + d(P, B) = 10$.
- Maak een schuifknop r waarvan de waarde varieert van 0 tot 10 met stapgrootte 0,001.
 - Teken de cirkel met middelpunt A en straal r en de cirkel met middelpunt B en straal $10 - r$.
 - Versleep r zo, dat de cirkels elkaar snijden en teken de snijpunten P en Q van de cirkels. Licht toe dat voor P geldt dat de som van de afstanden tot A en B gelijk is aan 10.
 - Zet voor P en Q het spoor aan en versleep r . Welke figuur herken je?
 - Teken de meetkundige plaatsen van P en Q .
 - Verwijder de cirkels en de schuifknop, en geef de opdracht `Ellips[A, B, 5]`.

Merk op dat je bij de vragen e en f dezelfde figuur lijkt te krijgen. Je gaat nu onderzoeken of dit inderdaad het geval is.

- Teken een punt P op de ellips en teken de lijnstukken AP en BP .
- Versleep P over de ellips. Wat kun je zeggen van de som van de afstanden van P tot A en B ?
- Licht toe dat je bij de vragen e en f dezelfde ellips hebt getekend.



- 10** In deze opgave bekijken we de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, A) - d(P, B) = 2$.
- a** Maak een schuifknop r waarvan de waarde varieert van 1 tot 10 met stapgrootte 0,001.
 - b** Teken de cirkel met middelpunt A en straal r en de cirkel met middelpunt B en straal $r - 2$.
 - c** Versleep r zo, dat de cirkels elkaar snijden en teken de snijpunten P en Q van de cirkels. Licht toe dat voor P geldt dat $d(P, A) - d(P, B) = 2$.
 - d** Zet voor P en Q het spoor aan versleep r . Welke figuur herken je?
 - e** Teken de meetkundige plaatsen van P en Q .
 - f** Verwijder de cirkels en de schuifknop, en geef de opdracht `Hyperbool[A, B, 1]`.

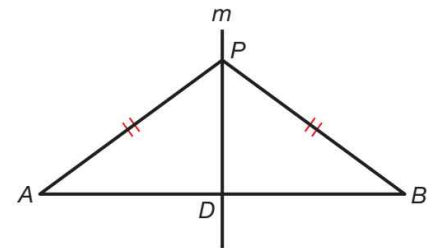
Merk op dat het lijkt of de figuur die je bij vraag e hebt getekend de helft is van de figuur die je bij vraag f krijgt met de opdracht `Hyperbool`.

- g** Teken een punt P op de hyperbooltak waarvan je vermoedt dat deze hetzelfde is als de figuur bij vraag e en teken de lijnstukken AP en BP .
- h** Versleep P over de hyperbool.
Wat kun je zeggen van $d(P, A) - d(P, B)$?
- i** Licht toe dat je bij vraag e een van de hyperbooltakken van vraag f hebt getekend.

- 11** In deze opgave bekijken we de eigenschappen van de poollijn van een punt P ten opzichte van een ellips en een hyperbool.
- a** Teken de punten A en B en geef de opdracht `Ellips[A, B, 10]`.
Versleep A en B zo, dat je een ellips op je scherm krijgt.
 - b** Teken een punt P buiten de ellips en de poollijn van P .
 - c** Teken de snijpunten C en D van de poollijn met de ellips en de lijnen CP en DP .
 - d** Versleep het punt P . Wat kun je zeggen van de lijnen CP en DP ?
 - e** Wat kun je zeggen van de lijnen CP en DP als P op de ellips ligt?
 - f** Maak deze opdracht ook voor een hyperbool.

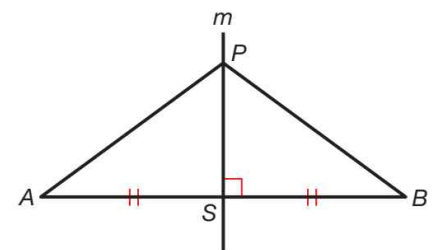
9.2 Meetkundige plaatsen

- O12** a Bewijs de volgende stelling.
Elk punt met gelijke afstanden tot de punten A en B ligt op de middelloodlijn m van het lijnstuk AB .
Gebruik figuur 9.4.



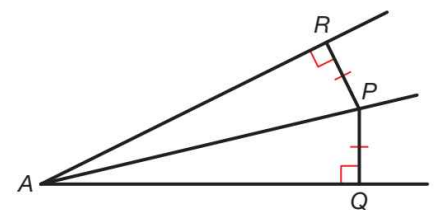
figuur 9.4

- b Formuleer de omkering van de stelling van vraag a en bewijs deze. Gebruik figuur 9.5.



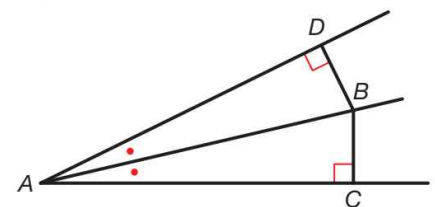
figuur 9.5

- O13** a Bewijs de volgende stelling.
Elk punt met gelijke afstanden tot de benen van een hoek ligt op de bissectrice van die hoek.
Gebruik figuur 9.6.



figuur 9.6

- b Formuleer de omkering van de stelling van vraag a en bewijs deze. Gebruik figuur 9.7.



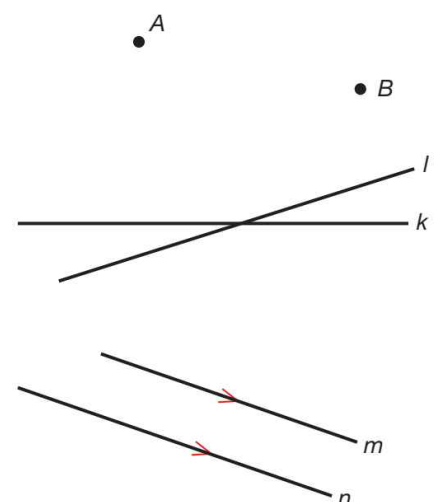
figuur 9.7

- O14** Zie figuur 9.8
a Op welke lijn liggen de punten P waarvoor geldt $d(P, A) = d(P, B)$?

- b De punten P waarvoor geldt $d(P, k) = d(P, l)$ liggen op twee lijnen.
Welke lijnen zijn dat?

- c Op welke lijn liggen de punten P waarvoor geldt $d(P, m) = d(P, n)$?

- d Waar liggen de punten P waarvoor geldt $d(P, M) = 3$?

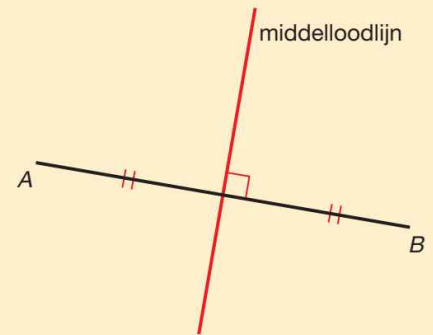


figuur 9.8

Theorie A Middelloodlijn, bissectricepaar, middenparallel en cirkel

Een verzameling van punten die dezelfde meetkundige eigenschap hebben heet een **meetkundige plaats**.

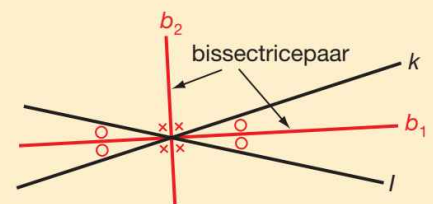
In opgave 12 heb je bewezen dat de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, A) = d(P, B)$ de middelloodlijn van het lijnstuk AB is.



figuur 9.9

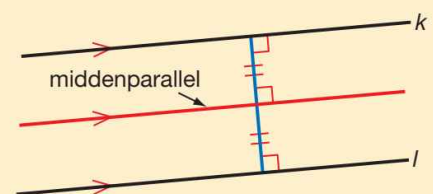
In opgave 13 heb je bewezen dat de meetkundige plaats van de punten die gelijke afstanden hebben tot de benen van een hoek de bissectrice van die hoek is.

Heb je met twee snijdende lijnen k en l te maken, zoals in figuur 9.10, dan is de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, k) = d(P, l)$ het **bissectricepaar** b_1 en b_2 .



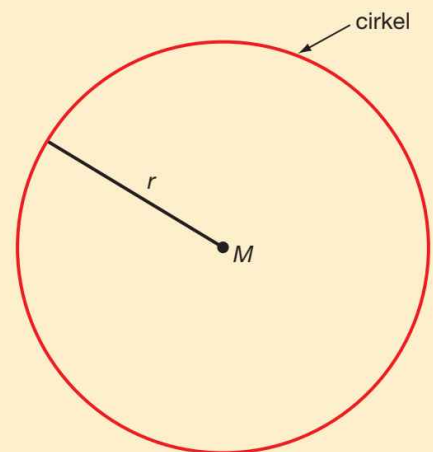
figuur 9.10

Zijn de lijnen k en l evenwijdig, dan is de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, k) = d(P, l)$ de **middenparallel** van k en l .



figuur 9.11

Verder weet je dat de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, M) = r$ de cirkel is met middelpunt M en straal r .



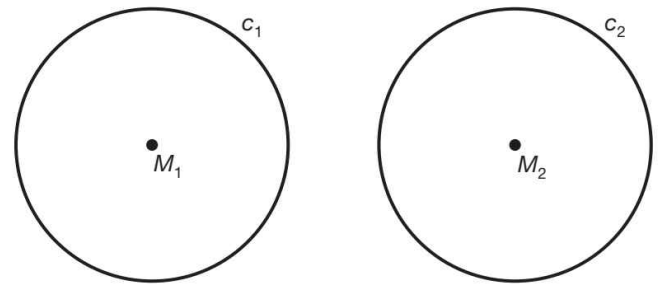
figuur 9.12

De meetkundige plaats van de punten met

- **gelijke afstanden tot de punten A en B is de middelloodlijn van het lijnstuk AB**
- **gelijke afstanden tot de snijdende lijnen k en l is het bissectricepaar van de lijnen k en l**
- **gelijke afstanden tot de evenwijdige lijnen k en l is de middenparallel van de lijnen k en l**
- **afstand r tot het punt M is de cirkel met middelpunt M en straal r .**

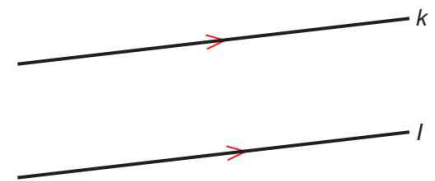
- 15** [▶ WERKBLAD] Gegeven is de lijn k .
- Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, k) = 3$ cm.
 - Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, k) \geq 4$ cm.

- 16** [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de niet-snijdende cirkels c_1 en c_2 , beide met straal 3 cm.
- Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, c_1) = d(P, c_2)$.
 - Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, c_1) \geq 3$ cm $\wedge$ $d(P, c_2) \leq 2$ cm.



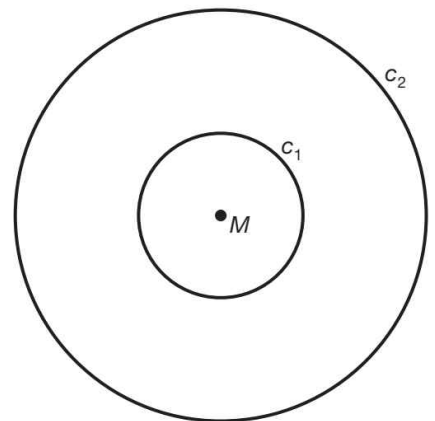
figuur 9.13

- A 17** [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de evenwijdige lijnen k en l . Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, k) = 2 \cdot d(P, l)$.



figuur 9.14

- A 18** [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de concentrische cirkels c_1 en c_2 .
- Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, c_2) = 2 \cdot d(P, c_1)$.
 - Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, c_1) = 2 \cdot d(P, c_2)$.

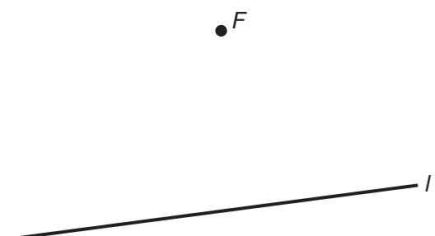


figuur 9.15 De cirkels c_1 en c_2 zijn concentrisch, dat wil zeggen dat ze hetzelfde middelpunt hebben.

- O 19** [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de lijn l en het punt F . Om een punt P te tekenen waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, l)$ ga je als volgt te werk.

- Teken een punt V op l .
- Teken door V de loodlijn k op l .
- Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV .
- Het snijpunt van k en m is het punt P .

- Teken op deze manier enkele punten P .
- Toon aan dat voor de getekende punten P inderdaad geldt $d(P, F) = d(P, l)$.



figuur 9.16

Theorie B De parabool als meetkundige plaats

In opgave 19 heb je enkele punten P getekend waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, l)$. De meetkundige plaats van deze punten P is een parabool.

Het punt F heet het **brandpunt van de parabool** en de lijn l heet de **richtlijn van de parabool**.

In de ontwikkeling van de wiskunde was er eerst de parabool als meetkundige plaats en daarna de parabool als grafiek van een tweedegraadsfunctie.

We geven de historische definitie van de parabool.

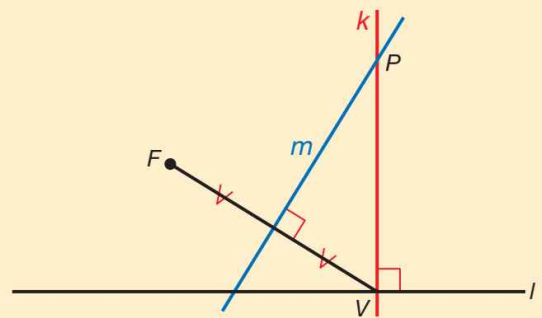
Definitie van parabool

Een parabool met brandpunt F en richtlijn l (F niet op l) is de verzameling van alle punten die gelijke afstanden hebben tot punt F en lijn l .

Voor het tekenen van een punt P van de parabool met brandpunt F en richtlijn l gebruik je het volgende werkschema.

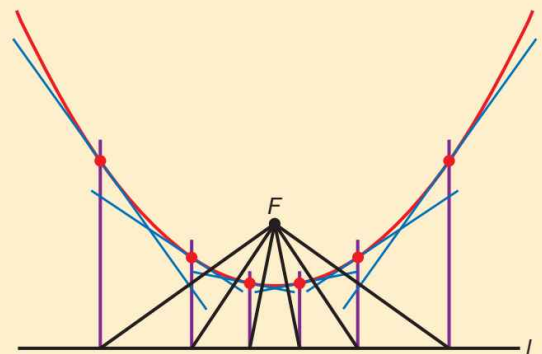
Werkschema: het tekenen van een punt P van de parabool met brandpunt F en richtlijn l

- 1 Teken een punt V op l .
- 2 Teken door V de loodlijn k op l .
- 3 Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV .
- 4 Het snijpunt van k en m is het punt P .



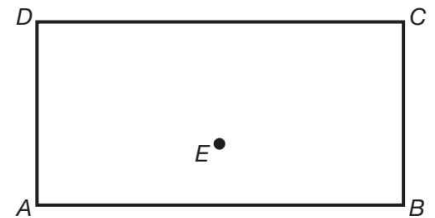
Door zo een flink aantal punten te tekenen, ontstaat de parabool. Zie de figuur hiernaast.

Zorg ervoor dat je werkwijze bij het tekenen van een meetkundige plaats duidelijk is. Laat hulplijnen en dergelijke dus staan.



figuur 9.17 De parabool met brandpunt F en richtlijn l .

- 20** [► WERKBLAD] Gegeven zijn de rechthoek $ABCD$ en het punt E binnen de rechthoek. Zie figuur 9.18. Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, \text{rechthoek } ABCD) = d(P, E)$.

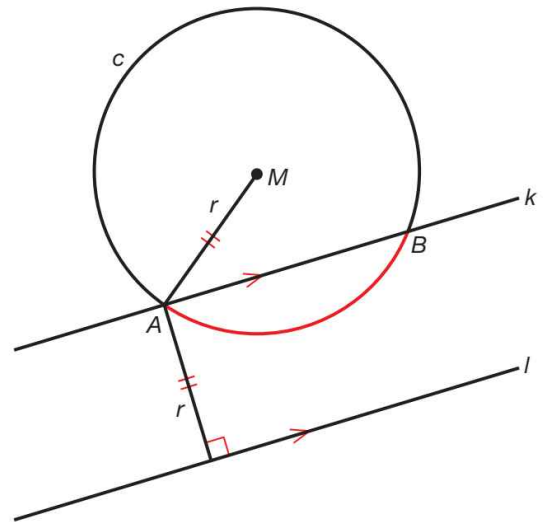


figuur 9.18

- 21** [► WERKBLAD] Gegeven is de lijn k en de cirkel c met middelpunt M en straal r . De lijn k snijdt c in de punten A en B . In figuur 9.19 is cirkelboog AB van c rood gekleurd.

We zoeken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, k) = d(P, \text{cirkelboog } AB)$. Daarbij gebruiken we de hulplijn l op afstand r van k .

- Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, M) = d(P, l)$.
- Bekijk de punten P uit vraag a die liggen tussen k en de cirkelboog AB .
Bewijs dat voor deze punten P geldt $d(P, k) = d(P, \text{cirkelboog } AB)$.

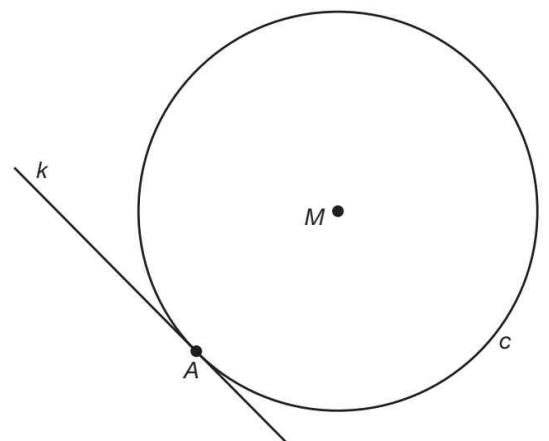


figuur 9.19

- A 22** [► WERKBLAD] Gegeven is de cirkel c met middelpunt M en straal 3 cm. De lijn k raakt c in het punt A . Zie figuur 9.20.

Er zijn vier punten die zowel op afstand 1 cm van k als op afstand 1 cm van c liggen.

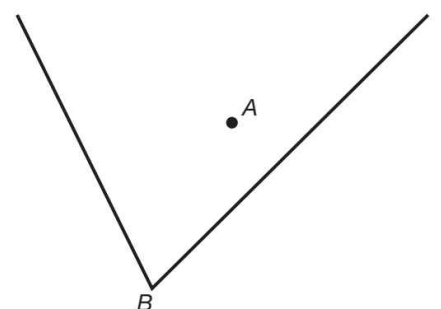
- Teken deze vier punten.
- Teken de meetkundige plaats van de punten die even ver van k als van c liggen.



figuur 9.20

- A 23** [► WERKBLAD] De figuur G in figuur 9.21 bestaat uit de benen van hoek B .

- Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, G) = d(P, A)$.
- De meetkundige plaats vertoont twee knikken. Bewijs dat deze knikken op de bissectrice van hoek B liggen.

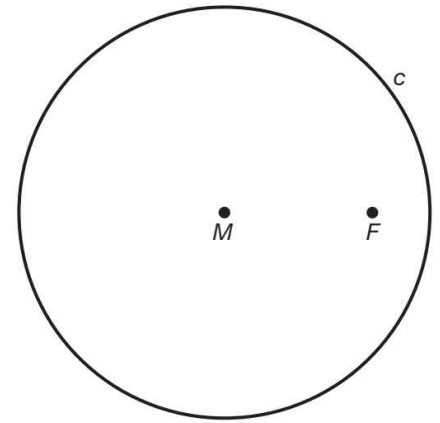


figuur 9.21

O24

[► WERKBLAD] Gegeven zijn de cirkel c met middelpunt M en het punt F binnen de cirkel. Om een punt P te tekenen waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, c)$ ga je als volgt te werk.

- Teken een punt V op c .
 - Teken de lijn k door M en V .
 - Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV .
 - Het snijpunt van k en m is het punt P .
- a Teken op deze manier enkele punten P .
b Toon aan dat voor de getekende punten P inderdaad geldt $d(P, F) = d(P, c)$.



figuur 9.22

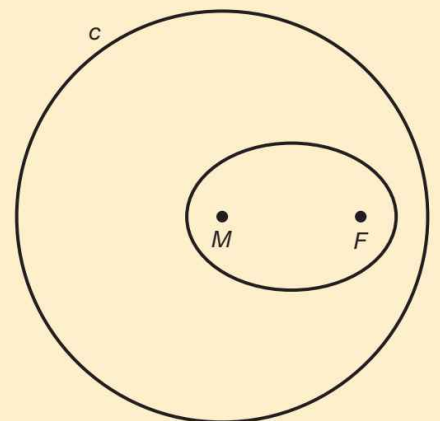
Theorie C De ellips als meetkundige plaats

In opgave 24 heb je enkele punten P getekend waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, c)$. De meetkundige plaats van deze punten P is een **ellips**.

Definitie van ellips

Een ellips is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt binnen de cirkel.

Het punt F in figuur 9.23 is een **brandpunt van de ellips**. De cirkel c is een **richtcirkel van de ellips**.

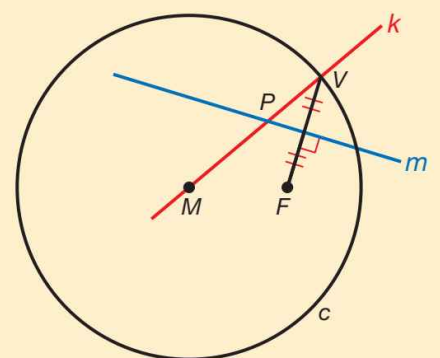


figuur 9.23

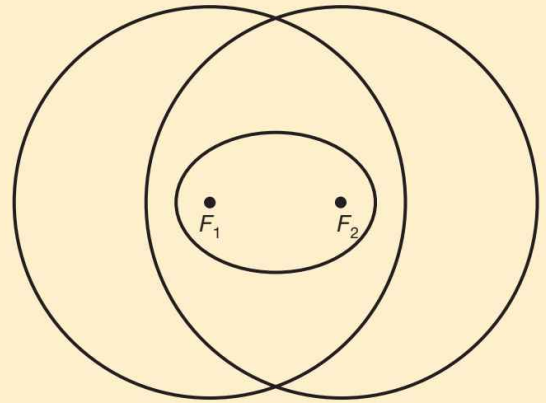
Voor het tekenen van een punt P van de ellips met brandpunt F en richtcirkel c gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: het tekenen van een punt P van de ellips met brandpunt F en richtcirkel c met middelpunt M

- 1 Teken een punt V op c .
- 2 Teken de lijn k door M en V .
- 3 Teken de middelloodlijn m van het lijnstuk FV .
- 4 Het snijpunt van k en m is het punt P .

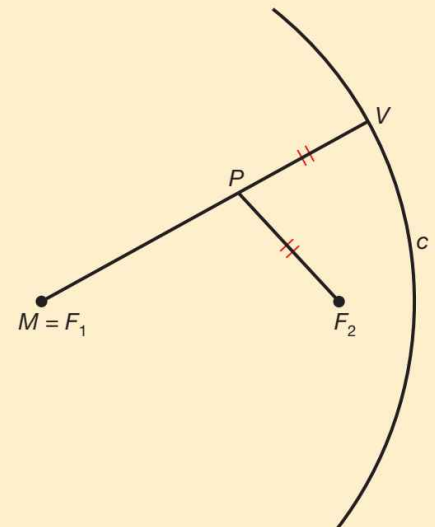


De ellips heeft nog een brandpunt, namelijk het middelpunt M van de richtcirkel. In de figuur hiernaast zie je dat de punten F en M dezelfde rol spelen in de ellips. Daarom geven we het punt M aan met F_1 , en F met F_2 .



figuur 9.24

In de figuur hiernaast zie je dat
 $d(P, c) = PV = MV - MP = r - d(P, F_1)$.
 Omdat $PV = d(P, F_2)$ geldt $d(P, F_2) = r - d(P, F_1)$
 ofwel $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$.



figuur 9.25

In figuur 9.26 is een ellips getekend. De lijn door de punten F_1 en F_2 snijdt de ellips in de punten A en B . Het lijnstuk AB heet de **lange as van de ellips** en heeft lengte $2a$, dus $AB = 2a$.

De lange as is een symmetrieas van de ellips.

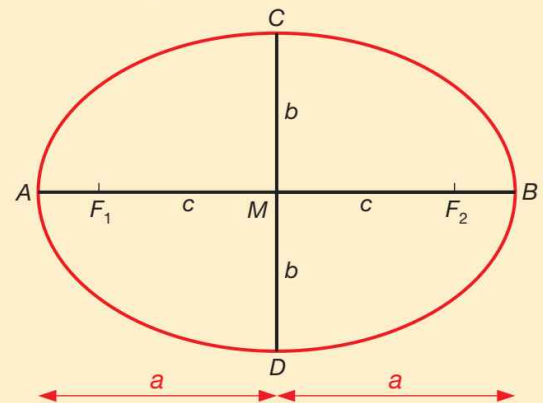
De andere symmetrieas is de middelloodlijn van het lijnstuk F_1F_2 . Deze lijn snijdt de ellips in de punten C en D .

Het lijnstuk CD is de **korte as van de ellips** en heeft lengte $2b$, dus $CD = 2b$.

De punten A, B, C en D zijn de **toppen van de ellips**.

Het snijpunt M van de symmetrieassen is het **middelpunt van de ellips**.

De **brandpuntsafstand** F_1F_2 heeft lengte $2c$, dus $F_1F_2 = 2c$.

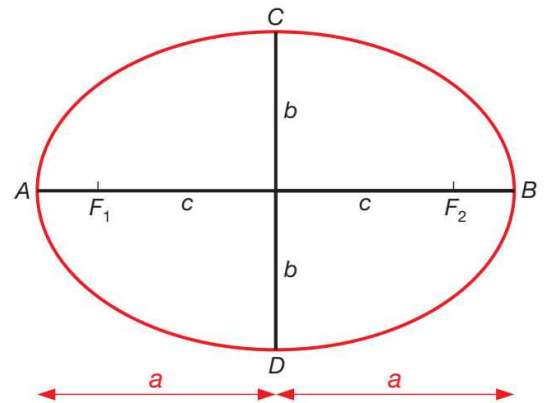


figuur 9.26

In opgave 25 toon je aan dat voor alle punten P op de ellips geldt $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, dus dat de straal van de richtcirkel gelijk is aan de lengte van de lange as van de ellips. Tevens toon je aan dat geldt $a^2 = b^2 + c^2$.

Voor alle punten P op een ellips geldt $d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constant}$. De constante is de straal van de richtcirkel van de ellips en tevens de lengte van de lange as van de ellips. De punten F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de ellips.

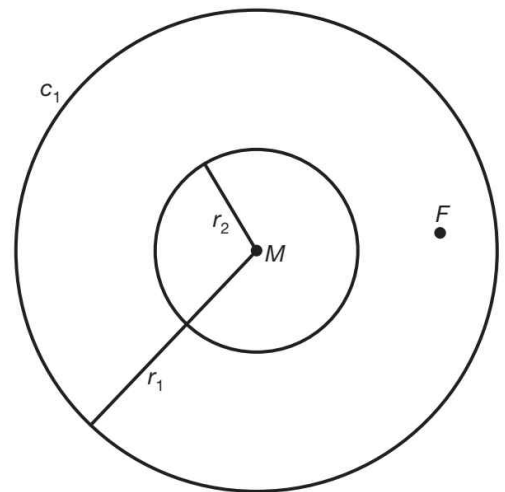
- 25** Hiernaast is nog eens figuur 9.26 getekend. Voor het punt A geldt $d(A, F_1) + d(A, F_2) = r$, waarbij r de straal van de richtcirkel is.
- Licht dit toe.
 - Licht toe dat $d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a$ en hoe hieruit volgt dat de straal van de richtcirkel gelijk is aan de lengte van de lange as van de ellips.
 - Licht toe dat $d(C, F_1) = a$ en hoe hieruit volgt dat $a^2 = b^2 + c^2$.



figuur 9.27

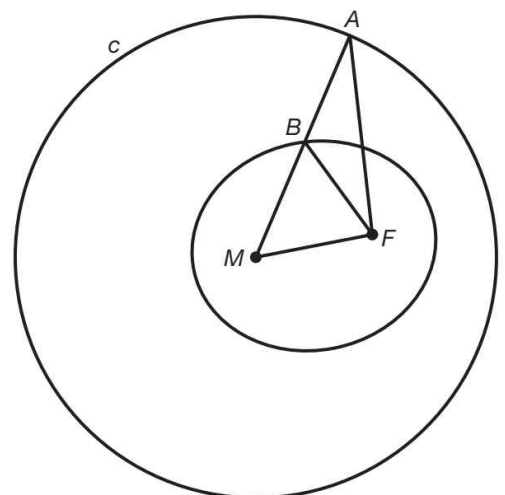
- 26**
- Van een ellips is de straal van de richtcirkel gelijk aan 5 en de brandpuntsafstand gelijk aan 4. Bereken de lengte van de korte as van de ellips.
 - De lengten van de assen van een ellips zijn 6 en 8. Bereken de brandpuntsafstand van de ellips.
 - De toppen van een ellips zijn $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 3)$ en $D(0, -3)$. Bereken de coördinaten van de brandpunten van de ellips.

- A 27**
- [▶WERKBLAD]** Gegeven zijn de concentrische cirkels c_1 en c_2 . De straal van c_1 is r_1 en de straal van c_2 is r_2 . Verder is gegeven het punt F . Zie figuur 9.28. De ellips e heeft richtcirkel c_1 en brandpunt F . Teken de snijpunten van e en c_2 .



figuur 9.28

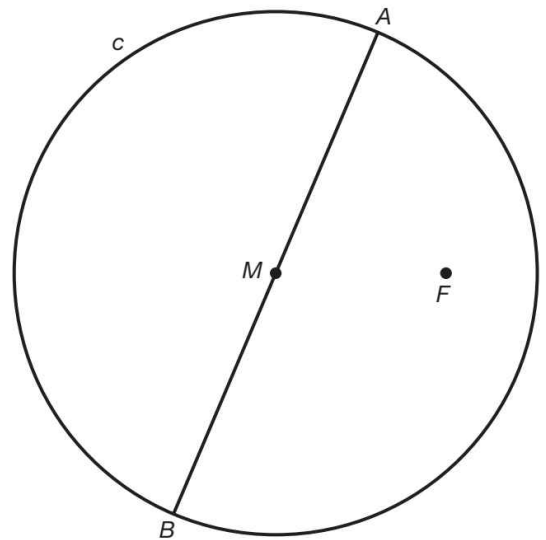
- [▶WERKBLAD]** In figuur 9.29 is de ellips getekend met brandpunten M en F en richtcirkel c . De straal MA van c snijdt de ellips in punt B . Bewijs dat $\angle MBF = 2 \cdot \angle MAF$.



figuur 9.29

A 28 [► WERKBLAD] In figuur 9.30 is de cirkel c getekend met middelpunt M en middellijn AB . Punt F is een punt binnen c .

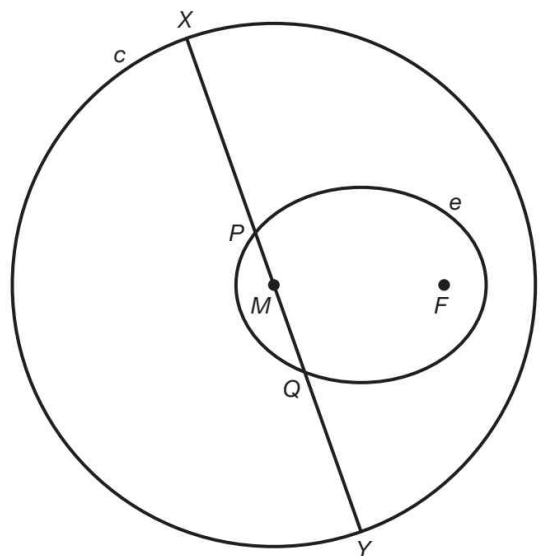
a Teken de punten P op de lijn AB waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, c)$.



figuur 9.30

b In figuur 9.31 is c nogmaals getekend met M en F en ellips e . Verder is een willekeurige middellijn XY getekend. De snijpunten van e en de lijn XY zijn P en Q .

Bewijs dat $\angle XFY = \frac{1}{2} \cdot \angle PFQ + 90^\circ$.



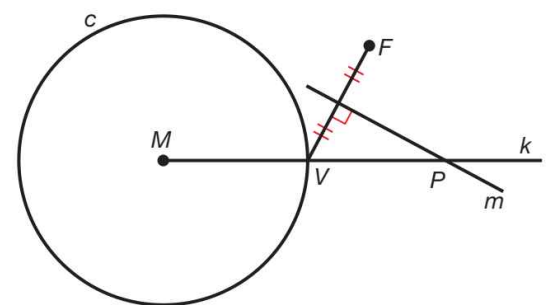
figuur 9.31

R 29 Gegeven is de ellips met toppen $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, b)$ en $D(0, -b)$.

Licht toe: als $a > b$ dan geldt $a^2 = b^2 + c^2$ en als $a < b$ dan geldt $a^2 = b^2 - c^2$.

O 30 [► WERKBLAD] In figuur 9.32 is de cirkel c getekend en het punt F buiten c . Op de manier van het werkschema op bladzijde 20 is een punt P getekend waarvoor geldt $d(P, c) = d(P, F)$.

a Teken de cirkel c en het punt F en teken enkele punten P waarvoor geldt $d(P, c) = d(P, F)$.
b Teken een vloeiende kromme door de punten P .



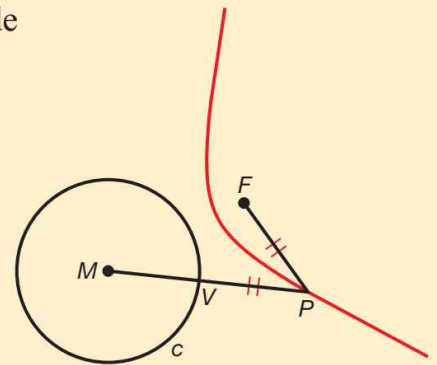
figuur 9.32 $d(P, c) = d(P, F)$

Theorie D De hyperbool als meetkundige plaats

In opgave 30 heb je de meetkundige plaats getekend van de punten P waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, c)$ waarbij het punt F buiten de cirkel c ligt. De kromme die zo ontstaat is een **hyperbooltak**.

Definitie van hyperbooltak

Een hyperbooltak is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt buiten de cirkel.



In opgave 31 bewijs je dat voor alle punten P op deze tak geldt $d(P, M) - d(P, F) = r$. (1)
Hierbij is r de straal van de cirkel.

Een hyperbool heeft twee takken. De andere tak van de hyperbool krijg je als je uitgaat van de cirkel met middelpunt F en straal r . Het punt M is dan het punt buiten de cirkel. Voor alle punten P van de tak die je zo krijgt geldt $d(P, F) - d(P, M) = r$. (2)

Uit (1) en (2) volgt $|d(P, M) - d(P, F)| = r$. (3)

In (3) spelen de punten M en F dezelfde rol. Daarom noteren we deze punten ook hier met F_1 en F_2 .

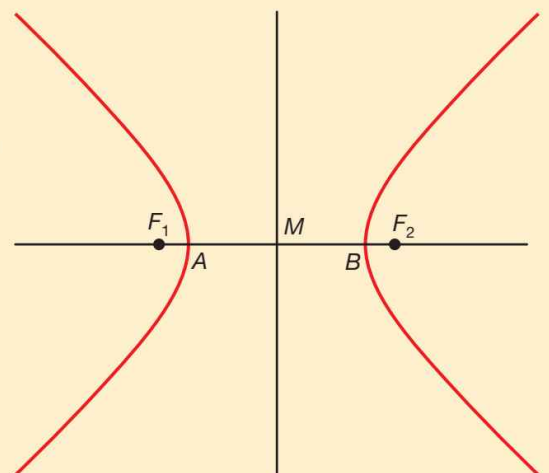
De punten F_1 en F_2 zijn de **brandpunten van de hyperbool**.

De cirkel met middelpunt F_1 en straal r en de cirkel met middelpunt F_2 en straal r zijn de **richtcirkels van de hyperbool**.

Voor alle punten P op een hyperbool geldt $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \text{constant}$. De constante is de straal van de richtcirkels van de hyperbool. De punten F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de hyperbool.

In figuur 9.33 is een hyperbool getekend. De lijn door de brandpunten is een symmetrieas van de hyperbool. De snijpunten A en B van deze symmetrieas met de hyperbool zijn de **toppen van de hyperbool**. De andere symmetrieas is de middelloodlijn van het lijnstuk F_1F_2 . Het snijpunt M van de symmetrieassen is het **middelpunt van de hyperbool**.

Een hyperbool heeft twee asymptoten. Hoe de **asymptoten van de hyperbool** in de constructie van een hyperbool ontstaan, zie je in opgave 33.

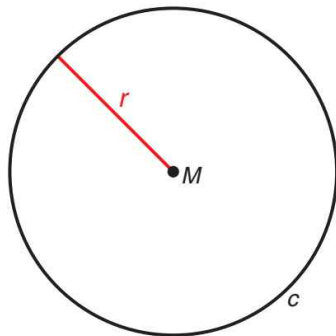


figuur 9.33

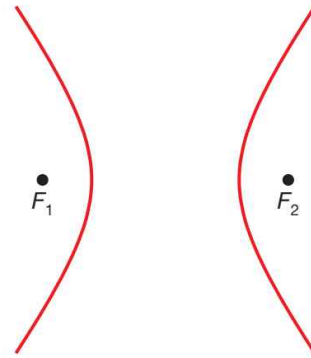
31 [► WERKBLAD] Zie figuur 9.34.

De straal van de cirkel is r .

- Bewijs dat uit $d(P, F) = d(P, c)$ volgt $d(P, M) - d(P, F) = r$.
- Bewijs dat uit $d(P, M) - d(P, F) = r$ volgt $d(P, F) = d(P, c)$.



figuur 9.34

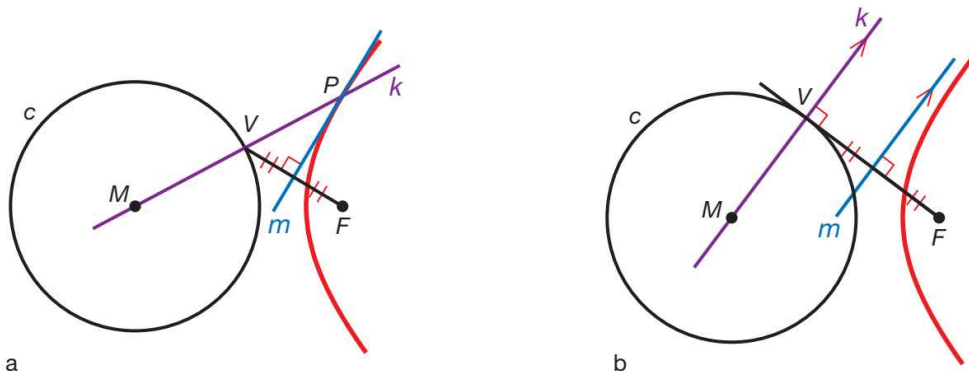


figuur 9.35

32 [► WERKBLAD] In figuur 9.35 is een hyperbool getekend met de brandpunten F_1 en F_2 .

Teken de twee richtcirkels van de hyperbool.

33 [► WERKBLAD] In figuur 9.36a is de constructie van een punt P op een hyperbooltak bij gegeven richtcirkel c en brandpunt F nog eens in beeld gebracht.



figuur 9.36 De lijn m is middelloodlijn van FV .

In figuur 9.36b is het punt V zo gekozen, dat de lijn FV raakt aan c .

- Licht toe dat er in de situatie van figuur b geen punt P is.

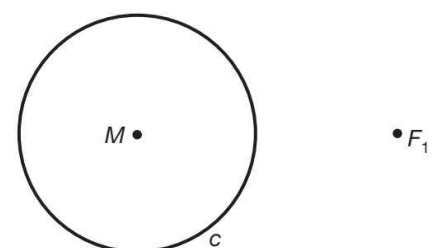
In de situatie van figuur b is m een asymptoot van de hyperbool.

- Teken de andere asymptoot van de hyperbool.

De hyperbool heeft twee symmetrieassen.

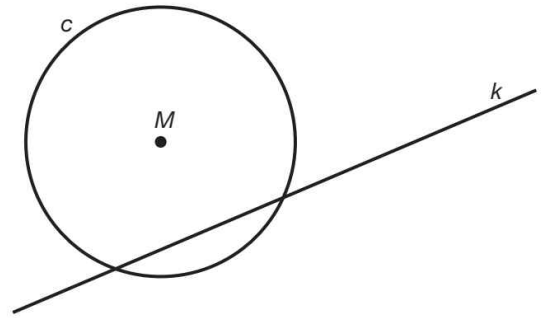
- Welke lijnen zijn dat?
- Gebruik de symmetrie om de andere tak van de hyperbool te tekenen.

34 [► WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je van een hyperbool een van de richtcirkels en het brandpunt F_1 . Teken van deze hyperbool de toppen en de asymptoten.



figuur 9.37

- A 35** [**WERKBLAD**] In figuur 9.38 zijn van een hyperbool een richtcirkel en een asymptoot getekend. Hierbij zijn twee hyperbolen mogelijk. Teken van elk van deze hyperbolen de brandpunten en de andere asymptoot.



figuur 9.38

- R 36** De meetkundige plaats van de punten P met $d(P, F) = d(P, l)$ valt geheel samen met de parabool met brandpunt F en richtlijn l .
- Gaat zoiets ook op voor een ellips? Licht toe.
 - En voor een hyperbool? Licht toe.

Geschiedenis Apollonius

Apollonius van Perga (ca. 262-190 v.Chr.) is een van de grootste wiskundigen uit de Griekse oudheid. Hij is vooral bekend geworden door zijn *Conica* (leer der kegelsneden), een achtdelig standaardwerk over kegelsneden. In deze boeken worden de begrippen parabool, ellips en hyperbool voor het eerst gebruikt. Van de acht delen zijn de eerste zeven bewaard gebleven. Zijn werk heeft grote invloed gehad op wetenschappers als Newton, Kepler en Descartes.

Apollonius, die doceerde in Alexandrië en Pergamum, heeft ook nog vele andere publicaties op zijn naam staan die vrijwel zonder uitzondering gaan over meetkundige onderwerpen als lengten, oppervlakten, raaklijnen aan krommen en het getal π . Dat hij zich ook met meetkundige plaatsen heeft beziggehouden, blijkt uit de volgende stelling.

Alle punten waarvan de afstanden tot twee gegeven punten een vaste verhouding hebben, liggen op een cirkel.

Zo'n cirkel wordt een cirkel van Apollonius genoemd. Aristoteles kende deze meetkundige plaats al, en gebruikte hem voor de constructie van de plaats van een regenboog. Ook kennen we het raakprobleem van Apollonius. Hierbij is het de bedoeling een cirkel te construeren die drie gegeven cirkels raakt. Apollonius heeft dit probleem zelf opgelost.

Dat Apollonius praktisch was ingesteld blijkt wel uit het feit dat hij een zonnewijzer heeft gemaakt. Op deze zonnewijzer lagen de streepjes voor de uren niet op een cirkel, maar op een kegelsnede, waarmee hij een grotere nauwkeurigheid bereikte. Ook was Apollonius de eerste die experimenteerde met parabolische spiegels in plaats van bolvormige spiegels. Hij wist dat een evenwijdige bundel licht na reflectie op een parabolisch oppervlak convergeert naar het brandpunt. Meer hierover lees je in het informatief op bladzijde 30.



Terugblik

Meetkundige plaatsen

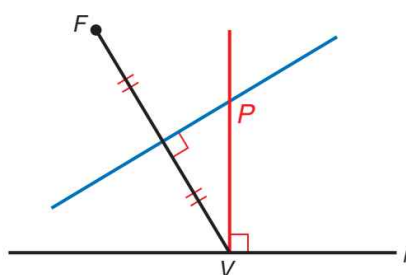
Een meetkundige plaats is een verzameling punten met dezelfde meetkundige eigenschap.

In de volgende opsomming zijn A, B, F, F_1 en F_2 punten, en zijn k en l lijnen. De verzameling punten P waarvoor geldt

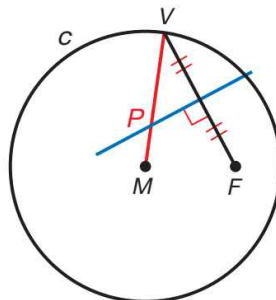
- $d(P, A) = d(P, B)$ is de middelloodlijn van het lijnstuk AB
- $d(P, k) = d(P, l)$ is het bissectricepaar van k en l als k en l snijdende lijnen zijn
- $d(P, k) = d(P, l)$ is de middenparallel van k en l als k en l evenwijdige lijnen zijn
- $d(P, F) = d(P, l)$ is de parabool met brandpunt F en richtlijn l
- $d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constant}$ is een ellips met brandpunten F_1 en F_2
- $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \text{constant}$ is een hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 .

Constructie van parabool, ellips en hyperbool

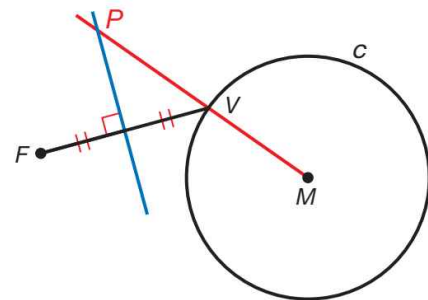
In de figuren hieronder zie je hoe je een punt P construeert van een parabool, van een ellips en van een hyperbool.



P is een punt van de parabool met brandpunt F en richtlijn l .



P is een punt van de ellips met brandpunten M en F . De cirkel c is richtcirkel van de ellips.

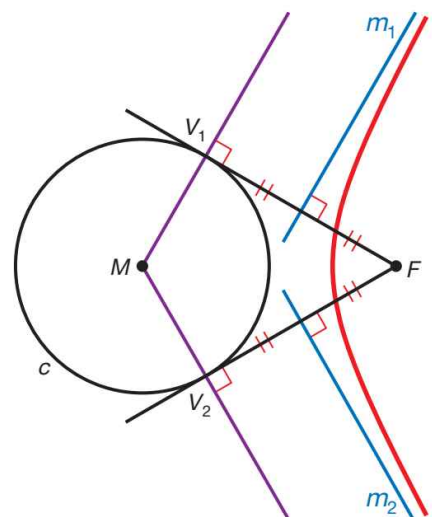


P is een punt van de hyperbool met brandpunten M en F . De cirkel c is richtcirkel van de hyperbool.

De asymptoten van een hyperbool

Bij het tekenen van de asymptoten van een hyperbool met brandpunt F en richtcirkel c ga je als volgt te werk.

- Teken vanuit F de raaklijnen aan de richtcirkel c . Je krijgt de raakpunten V_1 en V_2 .
- De middelloodlijnen van de lijnstukken FV_1 en FV_2 zijn de asymptoten van de hyperbool.

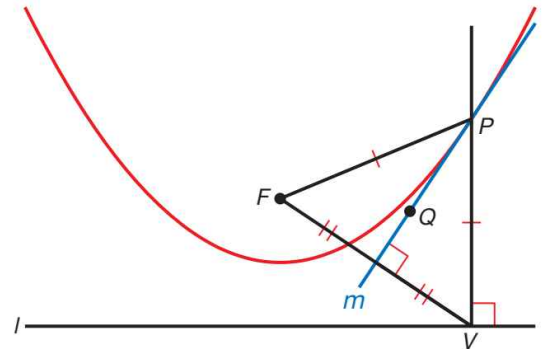


9.3 Raaklijneigenschappen

O37 Zie figuur 9.39.

In deze opgave ga je bewijzen dat de middelloodlijn m van lijnstuk FV raaklijn van de parabool is en dat m gelijke hoeken maakt met PF en PV . Punt Q is een willekeurig punt op m , verschillend van P .

- Toon aan dat $d(Q, l) < d(Q, F)$.
- Uit vraag a volgt dat elk punt van m , behalve het punt P , buiten de parabool ligt.
Licht dit toe.
- Licht toe dat hiermee is bewezen dat m de parabool raakt.
- Bewijs dat m gelijke hoeken maakt met PF en PV .



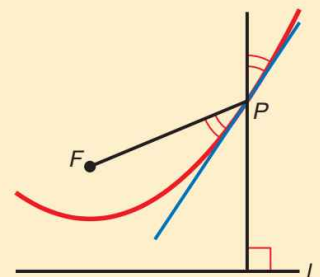
figuur 9.39

Theorie A Raaklijneigenschap parabool

In opgave 37 heb je bewezen dat de middelloodlijn die je gebruikt bij het tekenen van een punt van de parabool, de parabool raakt. Verder heb je in opgave 37 bewezen dat de hoeken die in de figuur hieronder zijn aangegeven aan elkaar gelijk zijn. Je heb hier te maken met de **raaklijneigenschap van de parabool**.

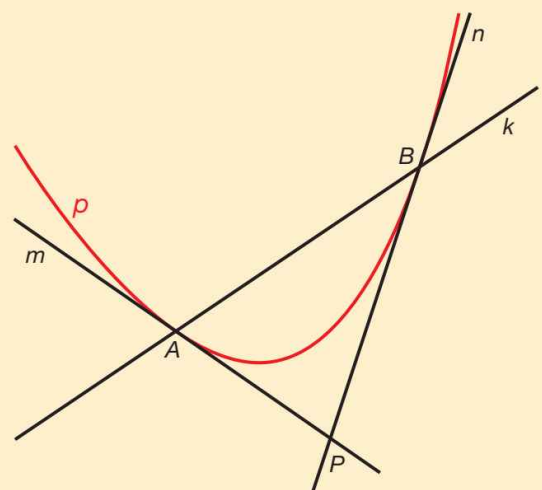
Raaklijneigenschap parabool

De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn.



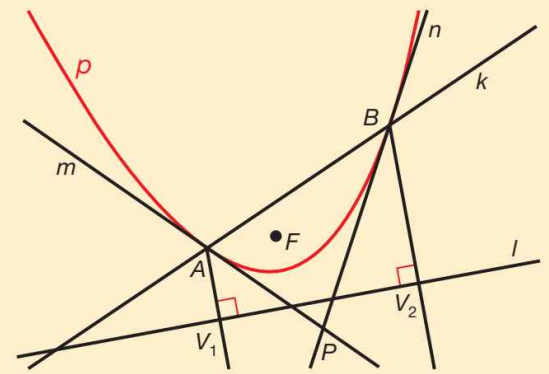
In de figuur hiernaast snijdt de lijn k de parabool p in de punten A en B . De lijn m raakt p in A en de lijn n raakt p in B . De lijnen m en n snijden elkaar in het punt P .

Het punt P heet de **pool** van de lijn k , en de lijn k heet de **poollijn** van de pool P .



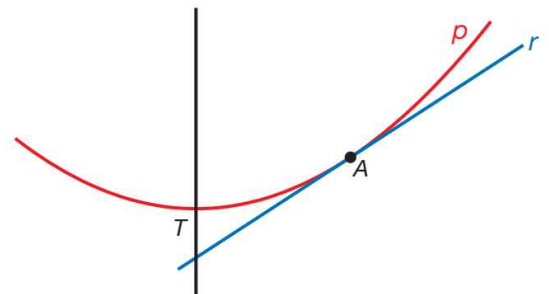
figuur 9.40

In figuur 9.41 zijn van de parabool p tevens het brandpunt F en de richtlijn l getekend. Op de richtlijn liggen de punten V_1 en V_2 zo, dat $AV_1 \perp l$ en $BV_2 \perp l$. In opgave 44 ga je bewijzen dat de punten F , V_1 en V_2 op de cirkel liggen met middelpunt P en straal PF .



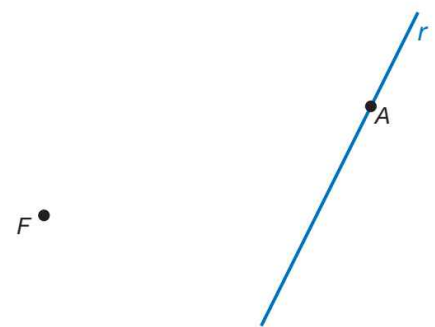
figuur 9.41

- 38** [► WERKBLAD] In figuur 9.42 is een parabool p met zijn symmetrieas en de raaklijn r in A getekend. Teken het brandpunt F en de richtlijn l van de parabool.



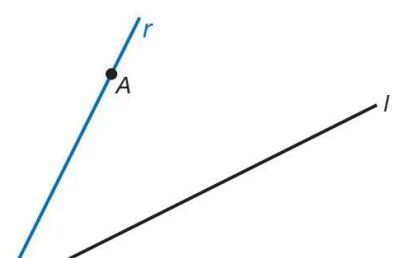
figuur 9.42

- 39** [► WERKBLAD] In figuur 9.43 is A een punt op de parabool p . De lijn r is de raaklijn aan p in A . Het punt F is het brandpunt van de parabool. Teken de richtlijn l en de top T van p .



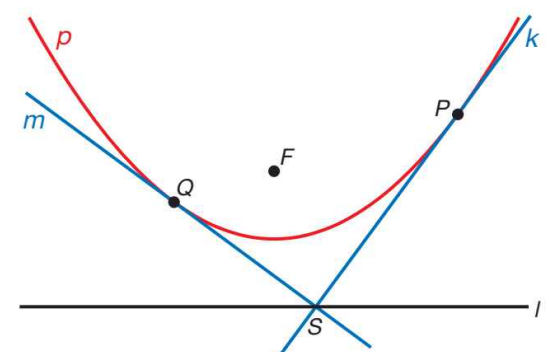
figuur 9.43

- 40** [► WERKBLAD] In figuur 9.44 is A een punt op de parabool p . De lijn r is de raaklijn aan p in A . De lijn l is de richtlijn van de parabool. Teken de top T van p .



figuur 9.44

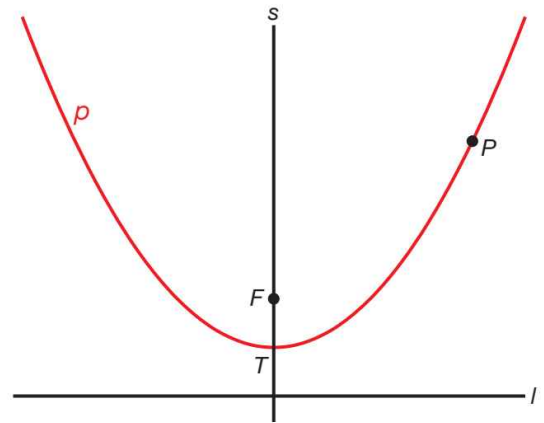
- A 41** [► WERKBLAD] Gegeven is de parabool p met daarop de punten P en Q . De raaklijn k in P aan p en de raaklijn m in Q aan p snijden elkaar in het punt S op de richtlijn l van de parabool. Bewijs dat $\angle PSQ = 90^\circ$.



figuur 9.45

A 42 [► WERKBLAD] Gegeven is de parabool p met brandpunt F , symmetrieas s , richtlijn l en top T . Het punt P ligt op p , het punt A is de loodrechte projectie van P op de symmetrieas, het punt V is de loodrechte projectie van P op de richtlijn en het punt B is het snijpunt van de raaklijn in P met de symmetrieas.

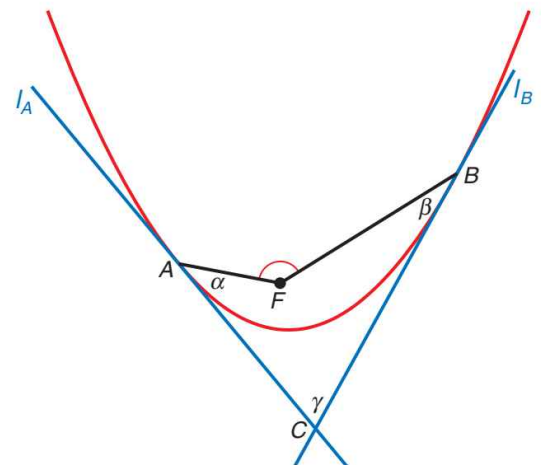
- Teken de punten A , V en B en de vierhoek $BVPF$.
- Bewijs dat vierhoek $BVPF$ een ruit is.
- Bewijs dat $AT = BT$.



figuur 9.46

A 43 [► WERKBLAD] In figuur 9.47 is een parabool getekend met brandpunt F . A en B zijn twee punten op de parabool aan weerszijden van de symmetrieas. l_A en l_B zijn de raaklijnen aan de parabool in A en B . γ is de hoek waaronder l_A en l_B elkaar snijden in C , $\angle CAF = \alpha$ en $\angle CBF = \beta$.

- Bewijs dat $\gamma = \alpha + \beta$.
- Bewijs dat $\angle AFB = 2\gamma$.



figuur 9.47

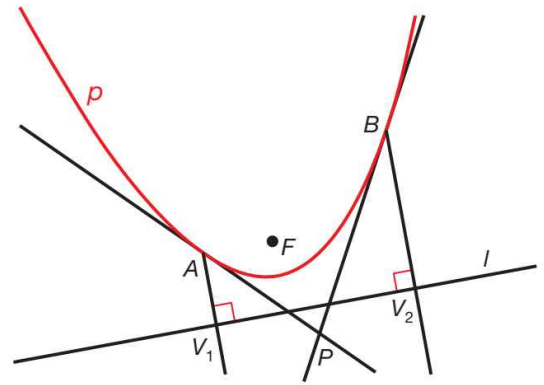
Informatief Paraboloïden

Je realiseert het je waarschijnlijk niet direct, maar in het dagelijks leven heb je regelmatig te maken met paraboloïden. Een paraboloïde krijg je door een parabool om zijn symmetrieas te wentelen. In allerlei voorwerpen kom je deze vorm tegen, bijvoorbeeld in fietslampen en zaklantaarns. Dat is niet voor niets, want een paraboloïde heeft belangrijke natuurkundige eigenschappen. Alle lichtstralen die evenwijdig aan de symmetrieas op een paraboloïde met een spiegellend oppervlak vallen, worden namelijk teruggekaatst in de richting van het brandpunt van de paraboloïde. Van dit principe wordt gebruikgemaakt bij onder andere schotelantennes en spiegeltelescop, zodat invallende straling geconcentreerd wordt. Bij vuurtorens, zaklantaarns en fietslampen werkt het precies andersom: de lichtbron zendt vanuit het brandpunt in alle richtingen lichtstralen uit, die vervolgens als een gerichte lichtbundel de paraboloïde verlaten.



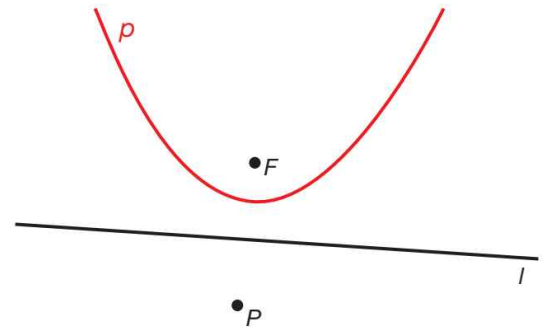
De vuurtoren van Ameland.

- A 44** [► WERKBLAD] In figuur 9.48 zie je de parabool p met brandpunt F en richtlijn l . De punten A en B liggen op p , en de raaklijnen aan p in A en B snijden elkaar in het punt P . Op l liggen de punten V_1 en V_2 zo, dat $AV_1 \perp l$ en $BV_2 \perp l$.
- a Bewijs dat V_1 en V_2 op de cirkel liggen met middelpunt P en straal PF .



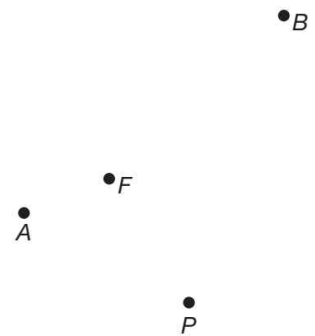
figuur 9.48

- b In figuur 9.49 is het punt P getekend en de parabool p met brandpunt F en richtlijn l . Teken de poollijn k van P .



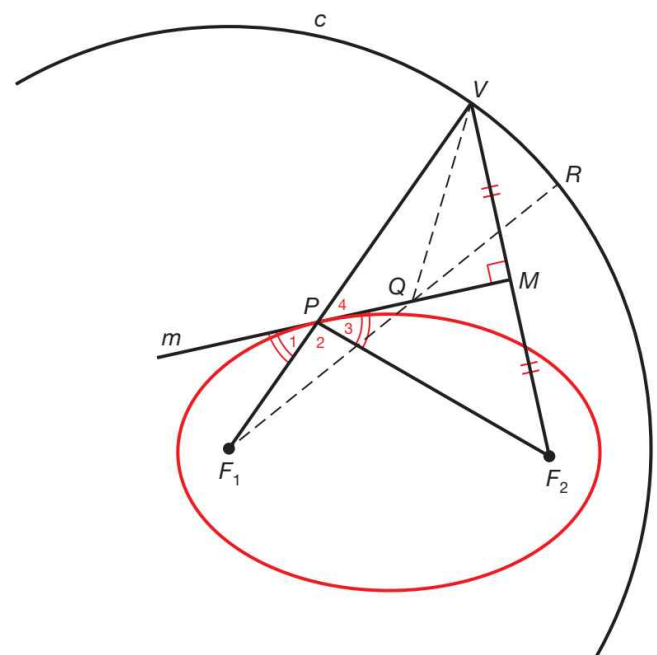
figuur 9.49

- c In figuur 9.50 zie je het brandpunt F van de parabool p en de punten A en B op p . Het punt P is de pool van de lijn AB . Teken de richtlijn van p .



figuur 9.50

- O 45** Gegeven is de ellips met brandpunten F_1 en F_2 en richtcirkel c . Punt P ligt op de ellips en punt V ligt op c . Punt Q ligt op de middelloodlijn m van VF_2 en valt niet samen met P . Zie figuur 9.51. Gebruik de figuur om te bewijzen dat het punt Q buiten de ellips ligt en dat $\angle P_1 = \angle P_3$.



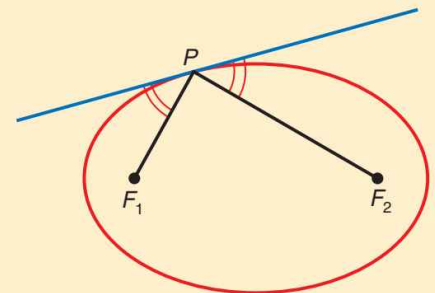
figuur 9.51

Theorie B Raaklijneigenschap ellips

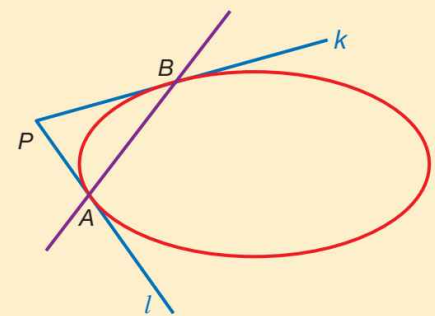
In opgave 45 heb je de **raaklijneigenschap van een ellips** bewezen.

Raaklijneigenschap ellips

De raaklijn in een punt P van een ellips maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.

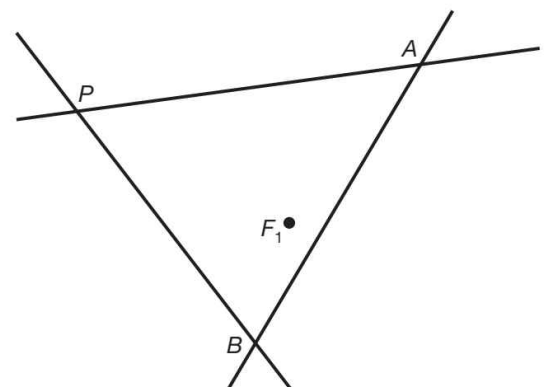


Op dezelfde manier als bij de parabool hoort bij elk punt P buiten de ellips een poollijn. Zie figuur 9.52, waarin de lijn AB de poollijn is van de pool P .



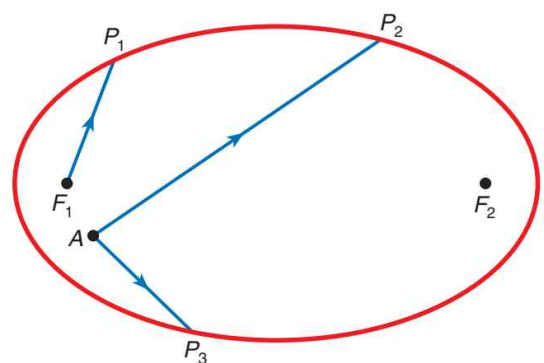
figuur 9.52

- 46** [► WERKBLAD] In figuur 9.53 zijn A en B punten van de ellips e . De lijn AB is de poollijn van het punt P . Het punt F_1 is een brandpunt van de ellips. Teken het brandpunt F_2 van e .



figuur 9.53

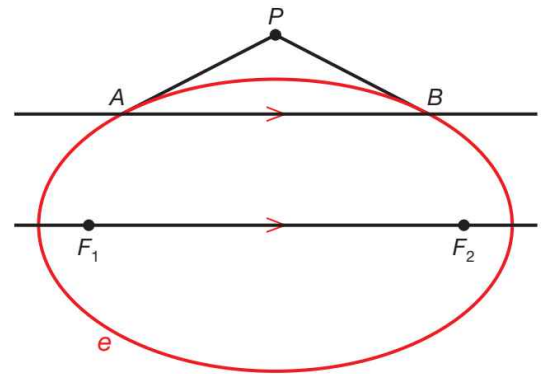
- 47** [► WERKBLAD] In figuur 9.54 is een ellips getekend met de brandpunten F_1 en F_2 . Een lichtstraal die in F_1 begint en in P_1 in de ellips gespiegeld wordt, gaat door F_2 .
- Licht dit toe.
 - Teken het vervolg van de straal AP_2 en de vervolgspegeling hiervan.
 - Alle vervolgspegelingen van de straal AP_2 gaan tussen de brandpunten door. Licht dit toe.
 - Wat kun je zeggen over het vervolg van straal AP_3 en al zijn vervolgspegelingen?



figuur 9.54

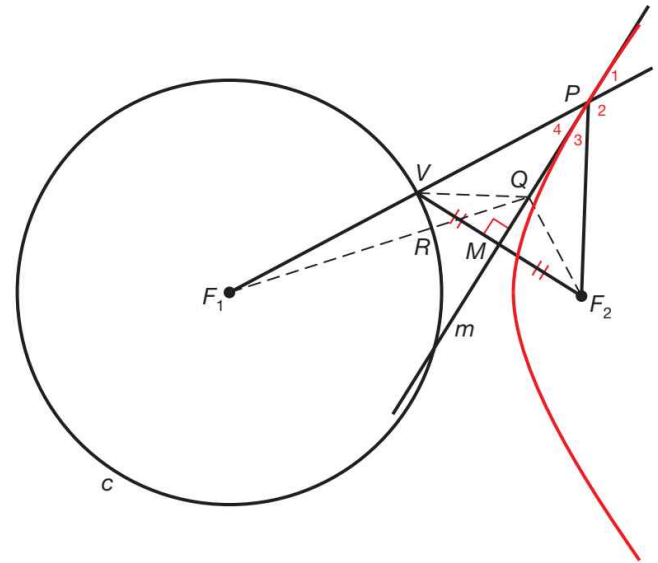
A 48 [► WERKBLAD] Gegeven is de ellips e met de brandpunten F_1 en F_2 . De poollijn AB van het punt P is evenwijdig aan de lange as van e . Zie figuur 9.55.

- Bewijs dat $APBF_1$ een koordenvierhoek is.
- Bewijs dat F_1 en F_2 op de omgeschreven cirkel van driehoek ABP liggen.



figuur 9.55

O 49 Gegeven is de hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 en richtcirkel c . Punt P ligt op de hyperbool en punt V ligt op c . Punt Q ligt op de middelloodlijn m van VF_2 en valt niet samen met P . Zie figuur 9.56. Gebruik de figuur om te bewijzen dat het punt Q buiten de hyperbool ligt en dat $\angle P_1 = \angle P_3$.



figuur 9.56

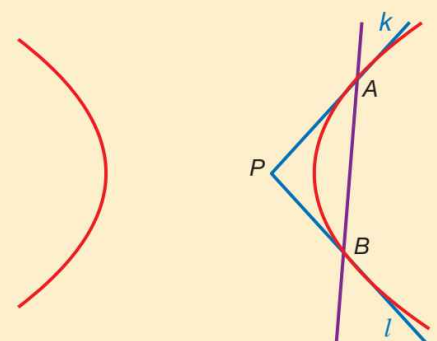
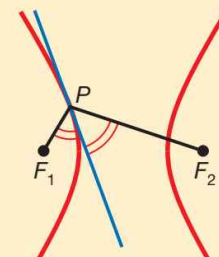
Theorie C Raaklijneigenschap hyperbool

In opgave 49 heb je de **raaklijneigenschap van een hyperbool** bewezen.

Raaklijneigenschap hyperbool

De raaklijn in een punt P van een hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.

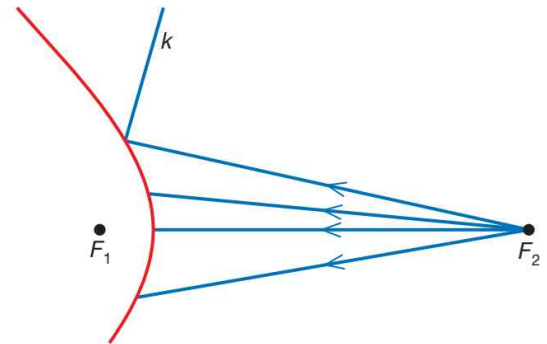
Op dezelfde manier als bij de parabool en de ellips hoort bij elk punt P tussen de hyperbooltakken een poollijn. Zie figuur 9.57, waarin de lijn AB de poollijn is van de pool P .



figuur 9.57

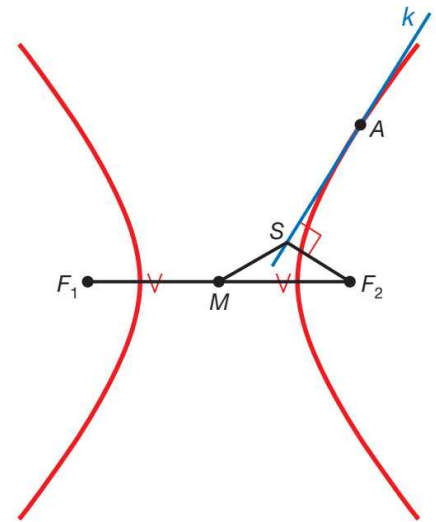
50 [► WERKBLAD] In figuur 9.58 is de hyperbooltak met de brandpunten F_1 en F_2 getekend. De lichtstralen beginnen in F_2 en worden door de hyperbolische spiegel teruggekaatst. In de figuur is k een van de teruggekaatste stralen.

- Bewijs dat F_1 op het verlengde van k ligt.
- Teken de andere teruggekaatste stralen.



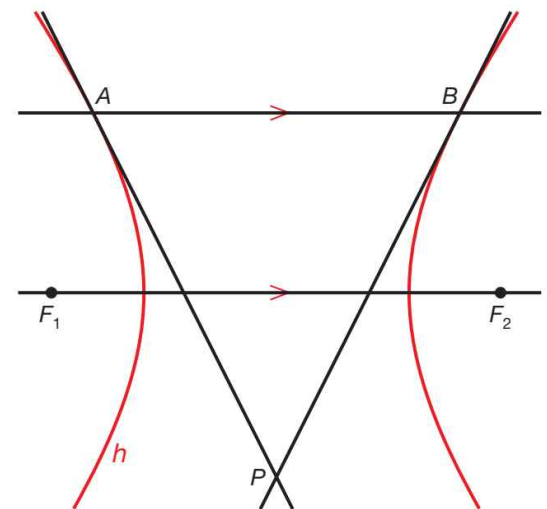
figuur 9.58

A51 [► WERKBLAD] Gegeven is de hyperbool met de brandpunten F_1 en F_2 . Het punt M is het midden van het lijnstuk F_1F_2 . De lijn k raakt een hyperbooltak in het punt A . Punt S is de loodrechte projectie van F_2 op k . Zie figuur 9.59. Bewijs dat $d(M, S)$ onafhankelijk is van de plaats van A .



figuur 9.59

A52 [► WERKBLAD] Gegeven is de hyperbool h met de brandpunten F_1 en F_2 . De poollijn AB van het punt P is evenwijdig aan de lijn door F_1 en F_2 . Zie figuur 9.60. Bewijs dat F_1 en F_2 op de omgeschreven cirkel van driehoek ABP liggen.

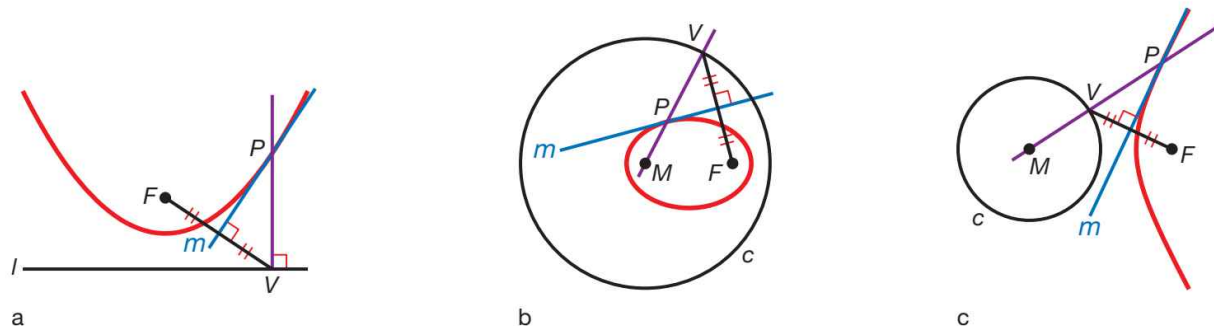


figuur 9.60

Terugblik

Raaklijnen bij parabool, ellips en hyperbool

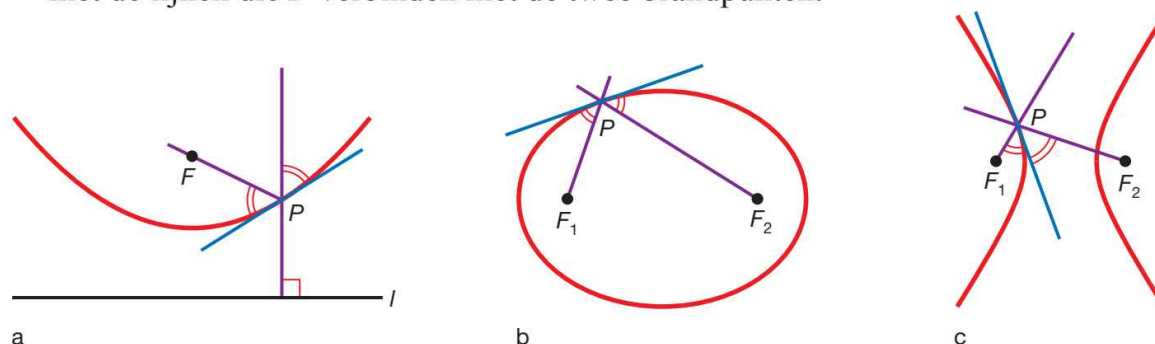
Bij een parabool, een ellips en een hyperbool zijn de middelloodlijnen van de lijnstukken FV raaklijnen van de kromme. Hierbij is F een brandpunt en is V een variabel punt op de richtlijn of op de richtcirkel.



De middelloodlijn m van FV is raaklijn van parabool, ellips en hyperbool.

Raaklijneigenschappen van parabool, ellips en hyperbool

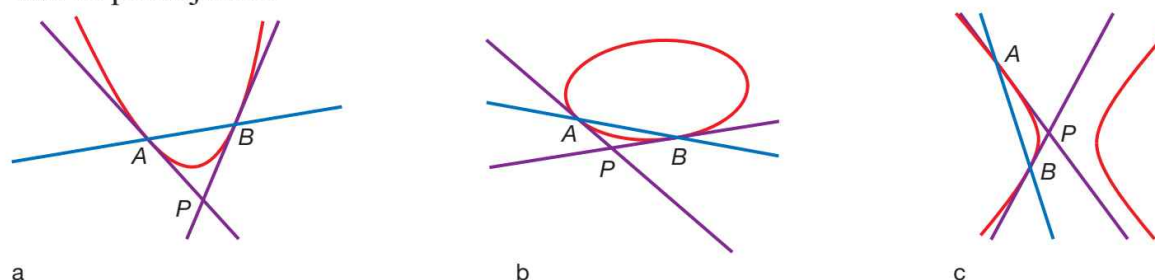
- De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn.
- De raaklijn in een punt P van een ellips maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.
- De raaklijn in een punt P van een hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten.



De raaklijneigenschap bij parabool, ellips en hyperbool.

Pool en poollijn

In de figuur hieronder zijn PA en PB raaklijnen. Het punt P is de pool van de poollijn AB .



Pool en poollijn bij parabool, ellips en hyperbool.

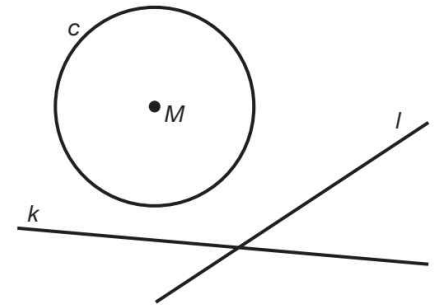
Diagnostische toets

9.2 Meetkundige plaatsen

- 1** [►WERKBLAD] Gegeven zijn de cirkel c met middelpunt M en straal r en de lijnen k en l .

Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt

- a $d(P, k) = d(P, l)$
- b $d(P, c) \geq r \wedge d(P, l) \leq r$
- c $d(P, c) = r \wedge d(P, k) = 0$.

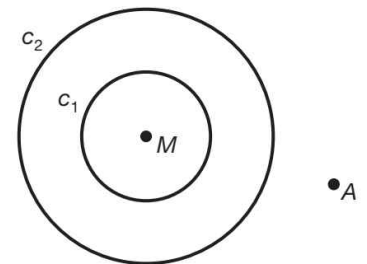


figuur 9.61

- 2** [►WERKBLAD] Gegeven zijn de concentrische cirkels c_1 en c_2 met middelpunt M . De straal van c_1 is 2 cm en de straal van c_2 is 4 cm. Verder is gegeven het punt A zo, dat $AM = 6$ cm.

Teken de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt

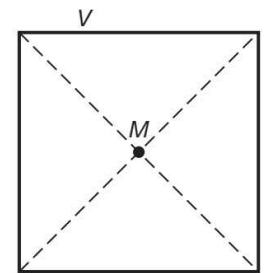
- a $d(P, c_1) = d(P, c_2)$
- b $d(P, A) = d(P, c_2)$
- c $d(P, c_1) = 2 \cdot d(P, c_2) \wedge d(P, A) \leq 4$ cm.



figuur 9.62

- 3** [►WERKBLAD] Gegeven is het vierkant V met middelpunt M . De meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt $d(P, V) = d(P, M)$ heeft vier knikken.

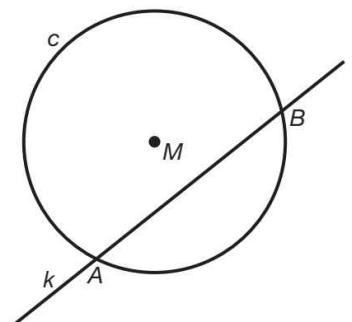
Teken de meetkundige plaats.



figuur 9.63

- 4** [►WERKBLAD] Gegeven zijn de cirkel c met middelpunt M en de lijn k die c snijdt in de punten A en B .

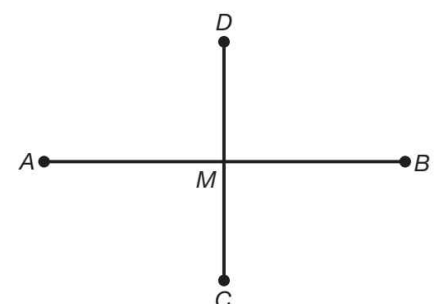
Teken de meetkundige plaats van de punten P binnen of op de cirkel waarvoor geldt $d(P, c) = d(P, k)$.



figuur 9.64

- 5** [►WERKBLAD] Van de ellips e zijn gegeven de toppen A , B , C en D .

- a Teken de brandpunten van de ellips.
- b Teken de richtcirkels van de ellips.
- c Teken de meetkundige plaats van de punten Q waarvoor geldt $d(Q, C) + d(Q, D) = d(A, B)$.



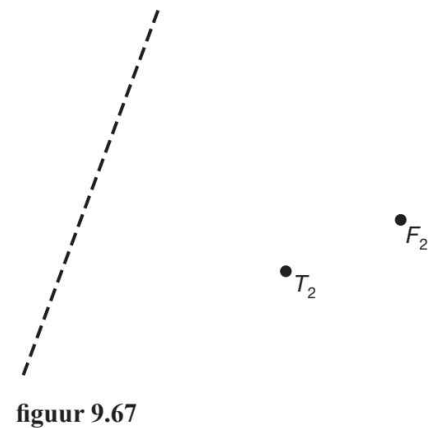
figuur 9.65

- 6 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $AB = 8$ en $BC = 6$. De punten A en C zijn brandpunten van de ellips e die door de middens van de zijden AB en CD gaat. Onderzoek met een berekening of e ook door de middens van AD en BC gaat.

- 7 [▶ WERKBLAD] Op de hyperbool h met de brandpunten F_1 en F_2 ligt het punt P . Zie figuur 9.66. Teken een richtcirkel, de asymptoten en de toppen van h .

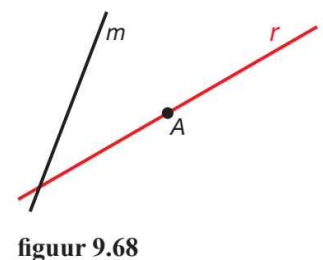


- 8 [▶ WERKBLAD] Van de hyperbool h is een van beide asymptoten, het brandpunt F_2 en de top T_2 gegeven. Zie figuur 9.67. Teken het brandpunt F_1 en de richtcirkel waarvan F_1 middelpunt is.

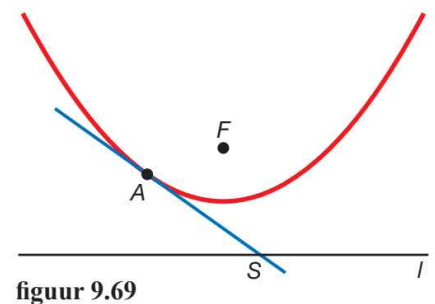


9.3 Raaklijneigenschappen

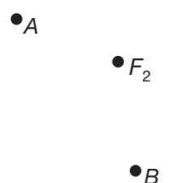
- 9 [▶ WERKBLAD] In figuur 9.68 is het punt A een punt van de parabool p . De lijn r is de raaklijn aan p in A . De lijn m is de symmetrieas van p . Teken het brandpunt en de richtlijn van p .



- 10 [▶ WERKBLAD] In figuur 9.69 is de parabool p getekend met brandpunt F en richtlijn l . De raaklijn aan de parabool in het punt A snijdt de richtlijn in het punt S . Bewijs dat $\angle SFA = 90^\circ$.



- 11 [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de brandpunten F_1 en F_2 van de ellips e . A en B zijn punten van e . Zie figuur 9.70.
a Teken de richtcirkel van e waarvan F_1 middelpunt is.
b Teken de pool P van de lijn AB .



- 12 [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de brandpunten F_1 en F_2 van de hyperbool h . A en B zijn punten van h . Zie figuur 9.70.
a Teken de richtcirkel van h waarvan F_1 middelpunt is.
b Teken de pool P van de lijn AB .



Bij grote transporten over zee zijn vaak meerdere sleepboten betrokken. Elk van deze sleepboten oefent een kracht uit op het te vervoeren object. Het samenspel van deze krachten zorgt voor de verplaatsing in de juiste richting. Bij de berekening van de krachten die nodig zijn, kunnen complexe getallen nuttig zijn.

Wat leer je?

- Wat imaginaire en complexe getallen zijn.
- Hoe je complexe getallen in het complexe vlak kunt afbeelden.
- Verschillende notaties van complexe getallen, bijvoorbeeld met e-machten en poolcoördinaten.
- De formule van Euler.
- Hoe je berekeningen maakt met complexe e-machten en complexe wortels.
- Toepassingen van complexe getallen.



Complexe getallen

10

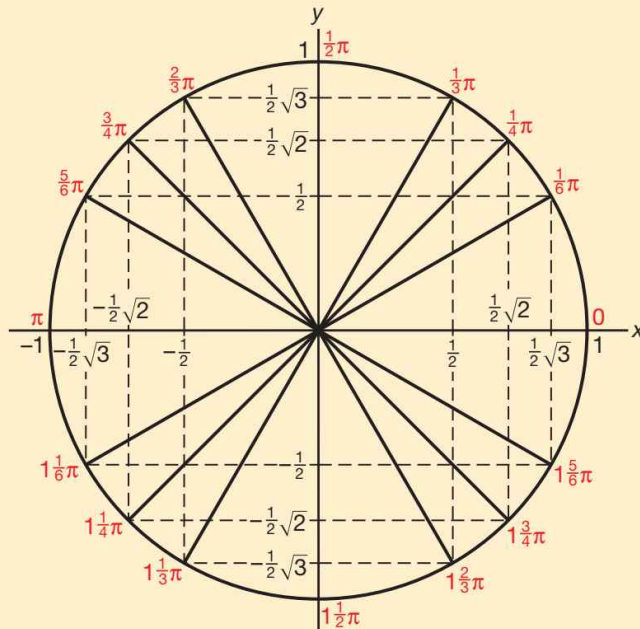


Voorkennis De exacte-waarden-cirkel

Theorie A De exacte-waarden-cirkel

De exacte waarden van de tabel hiernaast zijn verwerkt in de exacte-waarden-cirkel hieronder.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0



figuur 10.1

Je leest bijvoorbeeld af $\cos(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin(-\frac{3}{4}\pi) = \sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

1 Geef de exacte waarde.

a $\sin(\frac{3}{4}\pi)$

b $\cos(-\frac{3}{4}\pi)$

c $\sin(-\frac{2}{3}\pi)$

d $\cos(-\frac{2}{3}\pi)$

e $\sin(-\frac{1}{3}\pi)$

f $\cos(-\frac{5}{6}\pi)$

2 Geef de exacte waarde van α met $-\pi < \alpha \leq \pi$.

a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$

c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\cos(\alpha) = 0$

e $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

f $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Theorie B Punten en draaiingshoeken

Je kent het begrip draaiingshoek van een punt P . Het eerste been van een draaiingshoek is de positieve x -as en het tweede been gaat door P .

In figuur 10.2 is het punt $P(3, 2)$ getekend.

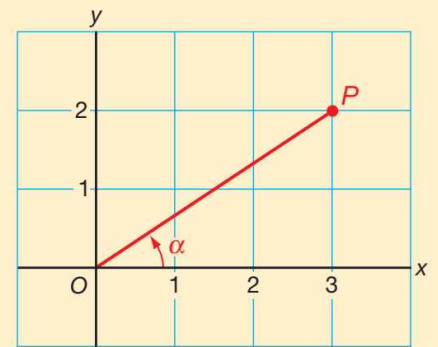
Voor de draaiingshoek α geldt $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$, dus $\alpha \approx 0,588$.

In het geval exacte draaiingshoeken worden gevraagd, gebruik je volgende tabel.

hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

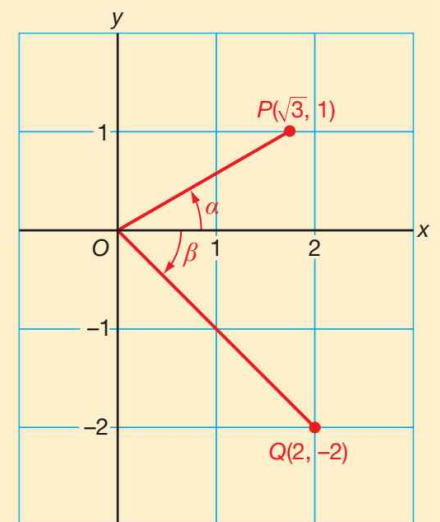
Zo geldt in de figuur hiernaast met het punt $P(\sqrt{3}, 1)$ dat $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

En bij het punt $Q(2, -2)$ geldt dat $\tan(\beta) = \frac{-2}{2} = -1$, dus $\beta = -\frac{1}{4}\pi$.



figuur 10.2

$$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P}$$



figuur 10.3

- 3** Bereken de exacte draaiingshoek α van het punt P .

Neem $-\pi < \alpha \leq \pi$.

- a $P(2, 2\sqrt{3})$
- b $P(-3, 3)$
- c $P(-3\sqrt{3}, -3)$
- d $P(0, 5)$
- e $P(1, -\sqrt{3})$
- f $P(-6, 0)$

- 4** Bereken in drie decimalen nauwkeurig de draaiingshoek α van het punt P . Neem $-\pi < \alpha \leq \pi$.

- a $P(2, 3)$
- b $P(-4, 1)$
- c $P(-2, -5)$
- d $P(3, -1)$

10.1 Rekenen met complexe getallen

01 Gegeven zijn de volgende vergelijkingen.

I $2x + 5 = 13$

III $2x + 5 = 8$

II $2x + 5 = 3$

IV $x^2 + 5 = 8$

a Los de vergelijkingen exact op.

b Neem aan dat je alleen maar gehele getallen kent.

Bij welke van deze vergelijkingen vind je dan geen oplossing?

Theorie A Getallenverzamelingen

In de oudheid kende men alleen maar de getallen 1, 2, 3, ...

Deze getallen heten **natuurlijke getallen**. Tegenwoordig rekent men vaak ook 0 tot de natuurlijke getallen. De verzameling van deze getallen wordt aangegeven met het symbool $\mathbb{N}$, dus $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Omdat men op zeker moment ook vergelijkingen zoals $x + 8 = 5$ op wilde lossen, zijn aan de natuurlijke getallen de negatieve getallen toegevoegd. De verzameling van alle **gehele getallen** (positief, negatief en het getal nul) wordt aangeduid met het symbool $\mathbb{Z}$.

Om vergelijkingen zoals $3x = 7$ te kunnen oplossen, zijn breuken nodig. De verzameling van alle gehele en gebroken getallen (positief en negatief) is $\mathbb{Q}$, de verzameling van de **rationale getallen**.

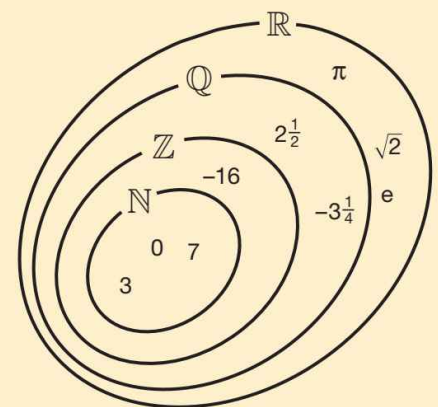
En voor het oplossen van vergelijkingen zoals $x^2 = 7$ zijn er nog andere getallen nodig. Zo ontstaat de verzameling $\mathbb{R}$ van de **reële getallen**, waarin behalve de getallen van $\mathbb{Q}$ ook nog getallen zitten als $\sqrt{7}$ en $-\sqrt{3}$.

Getallen die wel tot $\mathbb{R}$ maar niet tot $\mathbb{Q}$ behoren worden **irrationale getallen** genoemd. Voorbeelden hiervan zijn $\sqrt{2}$, π en $\sin(10^\circ)$.

De getallenverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ zijn hiernaast getekend in een venndiagram. Je ziet dat $\mathbb{N}$ een deelverzameling is van $\mathbb{Z}$, dus $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ komt van het Duitse Zahl.

$\mathbb{Q}$ komt van Quotient, de uitkomst van een deling.



figuur 10.4 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Los je de vergelijking $x^3 - 5x = 0$ op in $\mathbb{Q}$ dan krijg je

$$x^3 - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 5) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = 5$$

$$x = 0 \quad \text{geen oplossing in } \mathbb{Q}$$

Dus de vergelijking $x^3 - 5x = 0$ heeft in $\mathbb{Q}$ de oplossing $x = 0$.

Los je deze vergelijking op in $\mathbb{R}$ dan zijn er drie oplossingen, namelijk $x = 0$, $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$.

- 2 Teken een venndiagram met hierin de verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en zet hierin de getallen

$$1\frac{1}{2}, (-2)^3, \pi^2, \sqrt{6\frac{1}{4}} \text{ en } (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

- 3 Los op in $\mathbb{Q}$.

a $x^2 + x = 6$

b $x^2 + x = 4$

c $x^3 - x = 0$

d $x^3 - 2x = 0$

e $x^4 - 9x = 0$

f $x^4 - 9x^2 = 0$

- 4 a Los de vergelijking $(x + 3)^2 = 7$ op in $\mathbb{R}$.
b Waarom heeft de vergelijking $(x + 3)^2 = -7$ geen oplossingen in $\mathbb{R}$?

Theorie B De verzameling van de complexe getallen

De vergelijking $x^2 = -1$ heeft geen oplossing in $\mathbb{R}$.

De eerste wiskundige die rekende met wortels uit negatieve getallen was Rafael Bombelli in zijn boek Algebra (1572).

Bombelli's boek werd veel gelezen, onder andere door Stevin, Euler en Leibniz. Het was Euler (1707-1783) die de letter i introduceerde voor het getal waarvan het kwadraat -1 is. De letter i komt van imaginair.

Elk getal bi met b een reëel getal is een **imaginair getal**.

Omdat het getal i moeilijk is voor te stellen, wordt dit door wiskundigen bedachte getal imaginair genoemd.

Voor het imaginaire getal i geldt $i^2 = -1$.

Een imaginair getal heeft de vorm bi met $b \in \mathbb{R}$.

De vergelijking $x^2 = -1$ lossen we als volgt op.

$$x^2 = -1$$

$$x^2 = i^2$$

$$x = i \vee x = -i$$

Bij de vergelijking $(2x - 4)^2 = -5$ krijg je

$$(2x - 4)^2 = -5$$

$$(2x - 4)^2 = 5 \cdot i^2$$

$$2x - 4 = \sqrt{5} \cdot i \vee 2x - 4 = -\sqrt{5} \cdot i$$

$$2x = 4 + i\sqrt{5} \vee 2x = 4 - i\sqrt{5}$$

$$x = 2 + \frac{1}{2}i\sqrt{5} \vee x = 2 - \frac{1}{2}i\sqrt{5}$$

De getallen $2 + \frac{1}{2}i\sqrt{5}$ en $2 - \frac{1}{2}i\sqrt{5}$ zijn voorbeelden van complexe getallen. De algemene schrijfwijze voor een **complex getal** is $a + bi$.

Een getal van de vorm $a + bi$ met a en b reële getallen en met $i^2 = -1$ heet een complex getal.

De verzameling van de complexe getallen wordt aangegeven met $\mathbb{C}$. Zoals eenvoudig is in te zien zijn complexe getallen $a + bi$ met $b = 0$ reële getallen, dus $\mathbb{R}$ is een deelverzameling van $\mathbb{C}$.

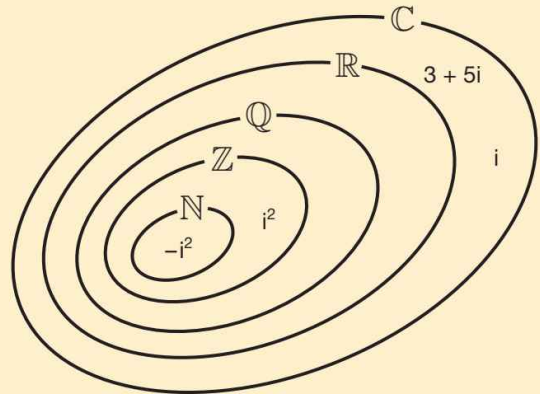
Van een complex getal $a + bi$ wordt a het **reële deel** en b het **imaginaire deel** genoemd. Zowel het reële als het imaginaire deel van een complex getal is dus een reëel getal.

De rekenregels voor complexe getallen mogen niet in strijd zijn met de rekenregels voor de reële getallen, want $\mathbb{R}$ is een deelverzameling van $\mathbb{C}$. Daarom reken je met complexe getallen net zo als met reële getallen.

Dus $(3 + 4i) + (2 + i) = 5 + 5i$ en
 $(3 + 4i) - (2 + i) = 1 + 3i$.

Door kwadraatafsplitsen kan elke tweede-graadsvergelijking geschreven worden in de vorm $(ax + b)^2 + c = 0$. Daarna kan deze vergelijking in $\mathbb{C}$ worden opgelost, waarbij er altijd oplossingen zijn. Elke tweedegraadsvergelijking heeft dus oplossingen in $\mathbb{C}$.

Bij $x^2 + 4x + 8 = 0$ krijg je
 $(x + 2)^2 - 4 + 8 = 0$
 $(x + 2)^2 = -4$
 $(x + 2)^2 = 4i^2$
 $x + 2 = 2i \vee x + 2 = -2i$
 $x = -2 + 2i \vee x = -2 - 2i$



figuur 10.5 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Voorbeeld

Los op in $\mathbb{C}$.

- a** $2x + 3i = 5x + 6i$
b $4x^2 + 12x + 15 = 0$

Uitwerking

- a** $2x + 3i = 5x + 6i$
 $-3x = 3i$
 $x = -i$
b $4x^2 + 12x + 15 = 0$
 $(2x + 3)^2 - 9 + 15 = 0$
 $(2x + 3)^2 = -6$
 $(2x + 3)^2 = 6i^2$
 $2x + 3 = i\sqrt{6} \vee 2x + 3 = -i\sqrt{6}$
 $2x = -3 + i\sqrt{6} \vee 2x = -3 - i\sqrt{6}$
 $x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{6} \vee x = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{6}$

Gebruik dat
 $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$.

5 Los op in $\mathbb{C}$.

a $3x + 5i + 3 = 2i - x$

d $x^2 - 10x + 40 = 0$

b $2x^2 + 10 = 0$

e $x^2 + 8x + 14 = 0$

c $(x + 2)^2 + 10 = 0$

f $(x + 3)^2 = -16$

A 6 Los op in $\mathbb{C}$.

a $\frac{1}{3}x + 10 + 2i = \frac{1}{4}x + 12 - 5i$

c $(x - 3)^2 + 2x = 0$

b $(2x + 3)^2 + 10 = 0$

d $4x^2 + 4x + 7 = 0$

O 7 Bij het vermenigvuldigen van de complexe getallen $2 + i$ en $10 - 5i$ werk je eerst de haakjes weg. Vervolgens gebruik je dat $i^2 = -1$.

a Toon aan dat $(2 + i) \cdot (10 - 5i) = 25$.

b Bereken $(2 + i) \cdot (2 - i)$ en $(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)$.

c Toon aan dat $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Theorie C Herleiden met complexe getallen

Om de breuk $\frac{3-i}{1+i}$ te schrijven in de vorm $a + bi$, vermenigvuldig je teller en noemer met $1 - i$. Je krijgt dan een reëel getal in de noemer.

$$\frac{3-i}{1+i} = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1-i^2} = \frac{3-4i-1}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

Om $\frac{p+qi}{r+si}$ in de vorm $a + bi$ te schrijven, vermenigvuldig je teller en noemer met $r - si$.

Uit

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

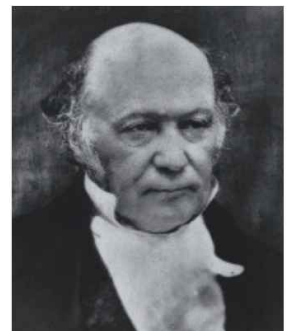
volgt meteen dat

$$(1+i)(1-i) = 1 - i^2, \text{ dus}$$

$$(1+i)(1-i) = 1 - (-1) = 2.$$

Geschiedenis Sir William Rowan Hamilton

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) was de eerste die een formeel correcte opbouw gaf van de complexe getallen met behulp van paren reële getallen (a, b) . William, die op 4 augustus 1805 werd geboren in het Ierse Dublin, sprak als kleine jongen liefst dertien talen. Zijn interesse verschoof echter geleidelijk naar de exacte vakken nadat hij op achtjarige leeftijd kennis maakte met het Amerikaanse rekenwonder Zerah Colburn. In 1822 ontdekte hij een belangrijke fout in *Mécanique céleste* van Laplace. John Brinkley, Astronomer Royal van Ierland, merkte toen over Hamilton op: 'Deze jongeman zal niet alleen de beste wiskundige van zijn tijd zijn, hij is het al.' Behalve met wiskunde hield Hamilton zich ook bezig met optica en dynamica. In 1833 publiceerde hij het belangrijke artikel waarin hij complexe getallen als geordende paren reële getallen beschouwde.



William R. Hamilton

Voorbeeld

Schrijf in de vorm $a + bi$.

a $(2 + 4i) + (1 + i)$

b $(2 + 4i) - (1 + i)$

c $(2 + 4i) \cdot (1 + i)$

d $\frac{2 + 4i}{3 + 4i}$

Uitwerking

a $(2 + 4i) + (1 + i) = 2 + 4i + 1 + i = 3 + 5i$

b $(2 + 4i) - (1 + i) = 2 + 4i - 1 - i = 1 + 3i$

c $(2 + 4i) \cdot (1 + i) = 2 + 2i + 4i + 4i^2 = 2 + 6i - 4 = -2 + 6i$

d $\frac{2 + 4i}{3 + 4i} = \frac{2 + 4i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{6 - 8i + 12i - 16i^2}{9 - 16i^2} = \frac{6 + 4i + 16}{9 + 16} = \frac{22 + 4i}{25} = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$

Informatief Rekenregels voor complexe getallen

Voor het rekenen met complexe getallen bestaan de volgende rekenregels.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

In het voorbeeld zijn deze regels ongemerkt toegepast. We adviseren bij het herleiden de uitwerking van het voorbeeld te volgen. Je hoeft de rekenregels dus niet uit het hoofd te leren.

8 Schrijf in de vorm $a + bi$.

a $(2 + 5i) + (4 - 6i)$

b $(5 - i)(5 + i)$

c $(2 + i)^2$

d $i(6 + 7i)$

e i^5

f $(1 + i)(6 - i) + (3 - i)(3 + 2i)$

9 Schrijf in de vorm $a + bi$.

a $\frac{2}{1 + i}$

b $\frac{2 + 3i}{i}$

c $\frac{2 + i}{2 - i}$

d $\frac{3 + 5i}{12 + 5i}$

e $\frac{2i}{1 + 3i}$

f $(2 + 3i) \cdot \frac{3}{2 + i}$

A 10 Schrijf in de vorm $a + bi$.

a $(3 + 4i)^2$

b $\frac{3 + i}{3 + 4i}$

c $(2 + i)^2 - (2 - i)^2$

d $i^2(i^3 - i^4 - i^5)$

e $\frac{5}{2 + 3i}$

f $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{10}$

- R 11** In het informatief op de vorige bladzijde staat een rekenregel voor delen.
Toon aan dat deze regel juist is.

- O 12** a Toon aan dat $(a + bi)(a - bi)$ een reëel getal is.
b Gebruik het resultaat van vraag a om de producten $(3 + 4i)(3 - 4i)$ en $(100 - 200i)(100 + 200i)$ te berekenen.

Theorie D Geconjugeerde complexe getallen

Complexe getallen worden vaak genoteerd met de letter z , dus $z = a + bi$.

Het complexe getal $a - bi$ heet de **geconjugeerde** van $a + bi$ en wordt genoteerd als $\overline{a + bi}$.

Dus de geconjugeerde van $z = a + bi$ is $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

- **De geconjugeerde van $z = a + bi$ is $\bar{z} = a - bi$.**

In opgave 12a heb je gezien dat het product van twee getallen die elkaars geconjugeerde zijn een reëel getal is.

- **$(a + bi) \cdot \overline{(a + bi)} = a^2 + b^2$**

Bij het complexe getal z wordt het reële deel genoteerd met $\text{Re}(z)$ en het imaginaire deel met $\text{Im}(z)$.

Dus $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ is te noteren als

$$z \cdot \bar{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2.$$

- **$z \cdot \bar{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$**

$$z = a + bi$$

$$a = \text{Re}(z)$$

$$b = \text{Im}(z)$$

$$\text{Dus } z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i.$$

- 13** Toon aan.

a $\frac{z + \bar{z}}{2} = \text{Re}(z)$

b $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \text{Im}(z)$

c $\overline{\bar{z}} = z$

- 14** Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$. Toon aan.

a $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

b $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

c $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$

- A 15** Schrijf in de vorm $a + bi$.

a $\overline{(4 + 3i)^2}$

b $\overline{\left(\frac{4 + 3i}{2 + i}\right)}$

c $\overline{\frac{3 + 4i}{3 - 4i}}$

Terugblik

Getallenverzamelingen

De verzameling van de natuurlijke getallen wordt genoteerd met $\mathbb{N}$, dus $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

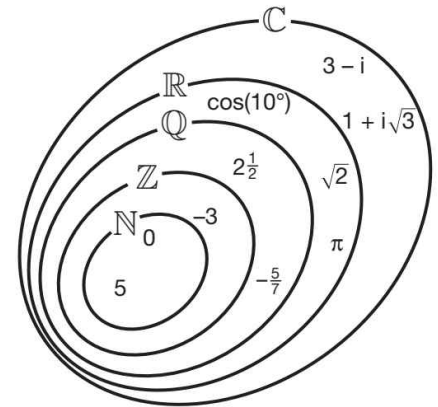
Uitbreiding met de negatieve gehele getallen levert de verzameling van de gehele getallen $\mathbb{Z}$ op.

Voeg je bovendien de gebroken getallen toe, dan krijg je de verzameling van de rationale getallen $\mathbb{Q}$.

Getallen zoals $\sqrt{2}$, π en $\cos(10^\circ)$ zijn irrationale getallen.

De rationale en de irrationale getallen samen vormen de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$.

De verzameling $\mathbb{C}$ bevat bovendien de complexe getallen.



Complexe getallen

Een complex getal heeft de vorm $a + bi$, waarin a en b reële getallen zijn en $i^2 = -1$.

Bij $z = a + bi$ is het getal a het reële deel van z . Notatie: $a = \operatorname{Re}(z)$.

Het getal b is het imaginaire deel van z . Notatie: $b = \operatorname{Im}(z)$.

Dus $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \cdot i$.

Het complexe getal $\bar{z} = a - bi$ is de geconjugeerde van $z = a + bi$.

Je gebruikt de geconjugeerde van $1 + i$ om de breuk $\frac{4 + 5i}{1 + i}$

te schrijven in de vorm $a + bi$. Je krijgt

$$\frac{4 + 5i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{4 - 4i + 5i - 5i^2}{1 - i^2} = \frac{4 + i + 5}{1 + 1} = \frac{9 + i}{2} = 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Vergelijkingen met complexe oplossingen

De vergelijking $(2x + 5)^2 + 10 = 0$ heeft geen oplossingen in $\mathbb{R}$, maar wel in $\mathbb{C}$.

Oplossen in $\mathbb{C}$ geeft $(2x + 5)^2 = -10$

$$(2x + 5)^2 = 10i^2$$

$$2x + 5 = i\sqrt{10} \vee 2x + 5 = -i\sqrt{10}$$

$$2x = -5 + i\sqrt{10} \vee 2x = -5 - i\sqrt{10}$$

$$x = -2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{10} \vee x = -2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{10}$$

Om de vergelijking $9x^2 + 6x + 5 = 0$ in $\mathbb{C}$ op te lossen, ga je kwadraatafsplitsen.

Je krijgt $(3x + 1)^2 - 1 + 5 = 0$

$$(3x + 1)^2 = -4$$

$$(3x + 1)^2 = 4i^2$$

$$3x + 1 = 2i \vee 3x + 1 = -2i$$

$$3x = -1 + 2i \vee 3x = -1 - 2i$$

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \vee x = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$$

10.2 Het complexe vlak

O16 In figuur 10.6 zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ getekend. De hoeken die deze vectoren met de positieve x -as maken zijn α en β .

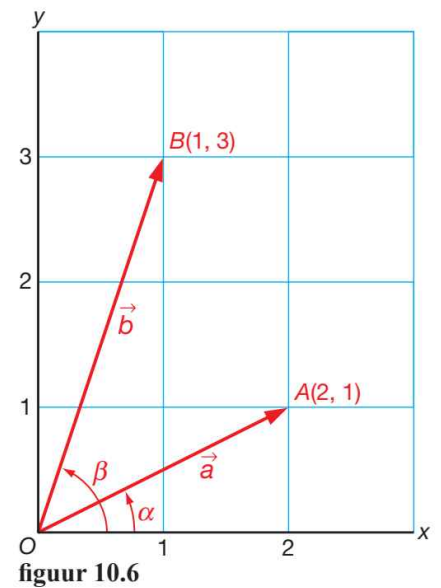
a Teken figuur 10.6 na en teken hierin $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Geef de kentallen van $\vec{c}$.

b De lengte van $\vec{a}$ is $|\vec{a}| = \sqrt{5}$.

Licht dit toe en bereken $|\vec{b}|$ en $|\vec{c}|$.

Geldt $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$?

c Bereken in radialen in twee decimalen nauwkeurig α en β en de hoek die $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ met de positieve x -as maakt.



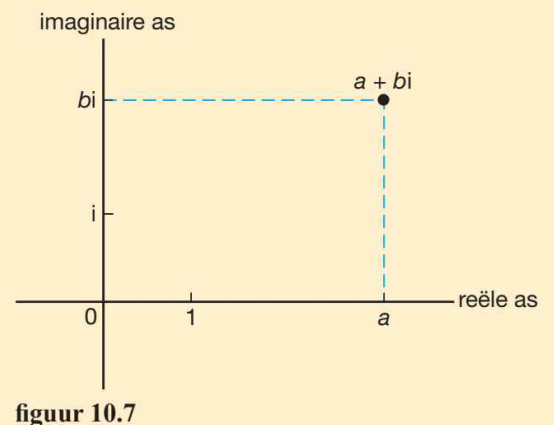
Theorie A Vectoren en complexe getallen

De reële getallen kun je afbeelden op de getallenlijn. Voor de complexe getallen lukt dat niet. Omdat voor elk complex getal $z = a + bi$ het reële deel a en het imaginaire deel b een reëel getal is, zijn er twee assen nodig om een complex getal af te beelden. Je kunt dit vergelijken met het tekenen van het punt (a, b) in een Oxy -assenstelsel. Voor het tekenen van een complex getal nemen we de **reële as** horizontaal en de **imaginaire as** verticaal. Zo ontstaat het **complexe vlak**. Zie de figuur hiernaast.

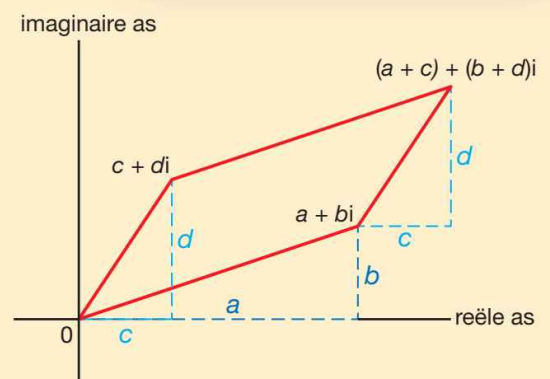
Het complexe vlak heet ook wel het **vlak van Gauss** of een **arganddiagram**.

Om het optellen van complexe getallen in het complexe vlak in beeld te brengen, maak je gebruik van vectoren. In paragraaf 10.1 is de optelling van de complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ gedefinieerd door $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Voor de bijbehorende punten in het complexe vlak geldt dan $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Zie de figuur hiernaast. De complexe getallen zijn daar opgeteld volgens de parallellogramconstructie.



Bij het snijpunt van de reële as en de imaginaire as staat 0, omdat daar het getal $0 + 0i = 0$ is afgebeeld.



figuur 10.8

De lengte van de vector die bij het getal $a + bi$ hoort, is te berekenen met de stelling van Pythagoras. Je krijgt $\sqrt{a^2 + b^2}$. Deze waarde heet de **modulus** of ook wel de **absolute waarde** van het complexe getal $z = a + bi$. Notatie: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

De modulus van $z = a + bi$ is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Je hebt in opgave 16b gezien dat voor de complexe getallen $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ in het algemeen niet geldt dat $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$.

Wel geldt: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Je gaat dit aantonen in de opgaven 20 en 21.

Voor elk complex getal z geldt $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Voor de complexe getallen z_1 en z_2 geldt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Voorbeeld

Teken in het complexe vlak alle getallen z waarvoor geldt

a $\operatorname{Re}(z) + 2 \operatorname{Im}(z) = 3$

b $z \cdot \bar{z} = 5$.

Aanpak

a Gebruik dat $\operatorname{Re}(z) + 2 \operatorname{Im}(z) = 3$ een lineair verband is tussen $\operatorname{Re}(z)$ en $\operatorname{Im}(z)$, dus dat de grafiek een rechte lijn is.

b Uit $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ en $z \cdot \bar{z} = 5$ volgt dat $|z| = \sqrt{5}$.

Je moet dus alle getallen tekenen waarbij een vector met lengte $\sqrt{5}$ hoort.

Dit is de cirkel met straal $\sqrt{5}$ en middelpunt $z = 0$.

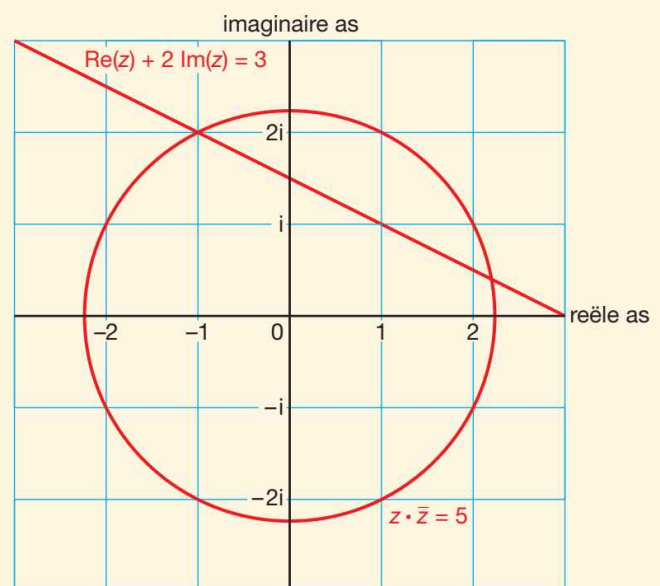
Gebruik dat deze cirkel door $z = 2 + i$ gaat.

Uitwerking

a $\operatorname{Re}(z)$	3	1
$\operatorname{Im}(z)$	0	1

Dus lijn door $z = 3$ en $z = 1 + i$.

b $z \cdot \bar{z} = 5$ geeft $|z| = \sqrt{5}$.



- 17** Gegeven zijn de getallen $z_1 = 1 + 2i$ en $z_2 = -2 + 3i$.
a Teken de getallen in het complexe vlak en bereken de modulus van de getallen.

Gegeven is $z_3 = z_1 + z_2$.

- b** Schrijf z_3 in de vorm $a + bi$.
c Teken z_3 in het complexe vlak door gebruik te maken van het antwoord van vraag b en controleer de tekening met de parallellogramconstructie.

Gegeven is $z_4 = z_1 - z_2$.

- d** Schrijf z_4 in de vorm $a + bi$.
e Teken z_4 in het complexe vlak en controleer de tekening met een parallellogramconstructie.

Gegeven is $z_5 = z_1 \cdot z_2$.

- f** Schrijf z_5 in de vorm $a + bi$.
g Controleer met een berekening dat geldt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

- 18** Teken in het complexe vlak alle getallen z waarvoor geldt
a $\operatorname{Re}(z) = 4$ **c** $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2$
b $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ **d** $\operatorname{Re}(z) - 2 \operatorname{Im}(z) = 4$

- A 19** Teken in het complexe vlak alle getallen z waarvoor geldt
a $(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = 4$ **c** $z \cdot \bar{z} = 2\frac{1}{2}$
b $|z| = 2,5$ **d** $z = \bar{z}$

- 20** Neem $z = a + bi$ en toon aan dat $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

- 21** Neem $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ en toon aan dat $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ door het linker- en het rechterlid uit te drukken in a, b, c en d .

Je mag in je tekeningen reële as afkorten met re en imaginaire as met im.

Geschiedenis Het complexe vlak

De Noorse landmeter Caspar Wessel (1745-1818) was de eerste die complexe getallen voorstelde door middel van punten in het complexe vlak. Ook het gebruik van poolcoördinaten en vectoren in relatie met complexe getallen is door hem bedacht. Hij publiceerde hierover in 1799.

Omdat Wessel alleen in het Deens publiceerde, is zijn werk aan de aandacht van de 19^e-eeuwse wiskundigen ontsnapt. Het complexe vlak is daarna nog twee keer 'ontdekt': door de Fransman Argand in 1806 en door Gauss in 1831.

Nadat het werk van Wessel in 1895 opnieuw werd gepubliceerd, werd algemeen aanvaard dat hij de eerste is geweest die de meetkundige voorstelling van complexe getallen heeft bedacht.



Caspar Wessel

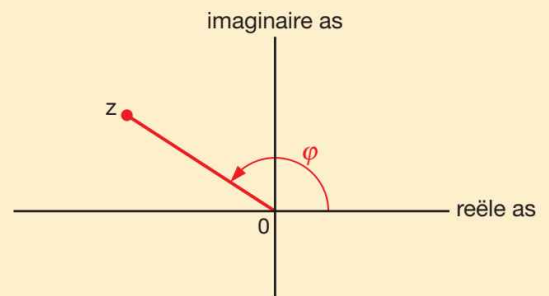
O22 Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 + i$ en

$$z_3 = z_1 \cdot z_2.$$

- Schrijf z_3 in de vorm $a + bi$.
- Teken z_1 , z_2 en z_3 in het complexe vlak. Teken ook de vectoren bij de getallen.
- Bereken de draaiingshoeken in radialen in drie decimalen nauwkeurig van elk van de drie vectoren. Welk verband bestaat er tussen de draaiingshoeken?

Theorie B Het argument van een complex getal

Je hebt gezien dat bij elk complex getal z een vector hoort. De draaiingshoek φ van deze vector heet een **argument** van z . Notatie: $\varphi = \arg(z)$. Hierbij is φ de Griekse letter phi.



figuur 10.9 Het argument is φ .

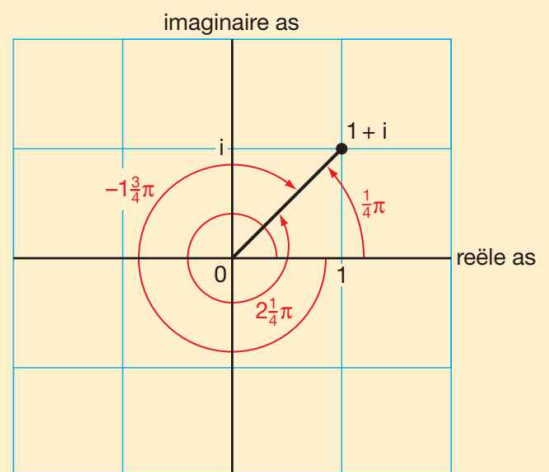
Bij $z = 1 + i$ hoort het argument $\frac{1}{4}\pi$, maar ook bijvoorbeeld $2\frac{1}{4}\pi$ en $-1\frac{3}{4}\pi$.

Voor alle complexe getallen, behalve voor $z = 0$, geldt dat ze oneindig veel argumenten hebben die een veelvoud van 2π van elkaar verschillen.

Bij $z = 1 + i$ zijn dit de argumenten

..., $-3\frac{3}{4}\pi$, $-1\frac{3}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $2\frac{1}{4}\pi$, $4\frac{1}{4}\pi$, ...

Het argument tussen $-\pi$ en π heet de **hoofdwaarde van het argument** van z . Je noteert de hoofdwaarde van het argument met een hoofdletter: $\text{Arg}(z)$.



figuur 10.10

Voor elk getal $z \neq 0$ is $\text{Arg}(z)$ de draaiingshoek van z waarvoor geldt $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$.

$\text{Arg}(z)$ heet de hoofdwaarde van het argument van z .

[► GR] De GR kan rekenen met complexe getallen. Zie de module **Complexe getallen**.

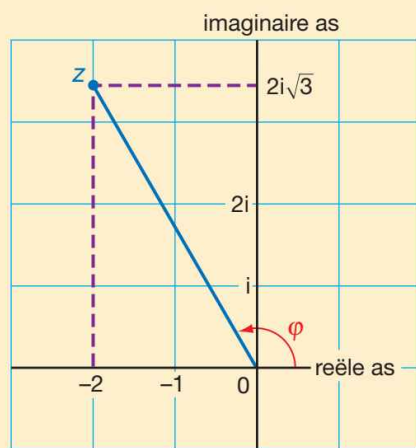
Voor elk argument φ van $z = a + bi$ geldt $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$. Omdat de GR bij $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ hoeken tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ geeft, is het

handiger om voor het berekenen van een argument de optie angle (TI) of Arg (Casio) te gebruiken. Hiermee krijg je de hoofdwaarde van het argument. Zie de GR-schermen hiernaast.

NORMAL FLOAT AUTO a+bi RADIAN HP	
angle(1+3i)	1.249045772
angle(-1+3i)	1.892546881
angle(-3-i)	-2.819842099

Math(Rad) Norm1 ab/c a+bi	
Arg (1+3i)	1.249045772
Arg (-1+3i)	1.892546881
Arg (-3-i)	-2.819842099
i Abs Arg Conjg	

Van sommige complexe getallen moet je exact de waarde van het argument kunnen berekenen. Dat gaat bij $z = -2 + 2i\sqrt{3}$ als volgt.



$$\tan(\varphi) = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

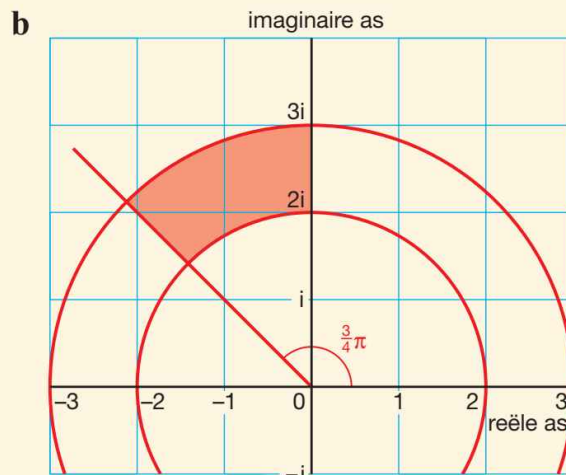
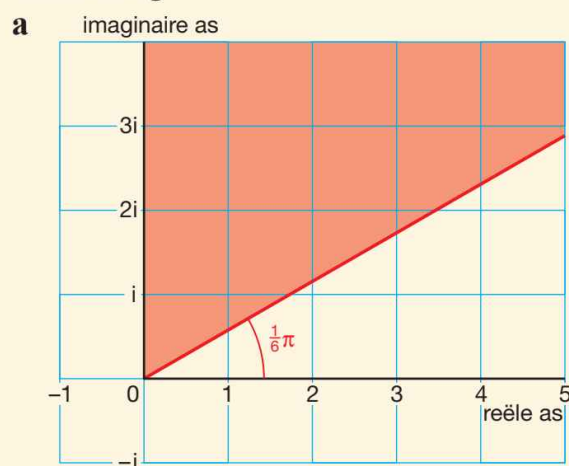
De modulus is

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4.$$

Voorbeeld

- Teken de getallen z waarvoor geldt $\frac{1}{6}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{2}\pi$.
- Teken de getallen z waarvoor geldt $\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3}{4}\pi \wedge 2 \leq |z| \leq 3$.

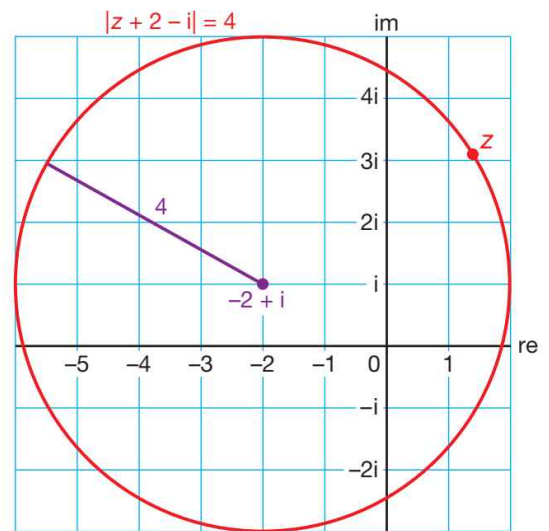
Uitwerking



- 23** a Teken de getallen z waarvoor geldt $-\frac{1}{6}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{6}\pi$.
 b Teken de getallen z waarvoor geldt $\frac{1}{4}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3}{4}\pi \wedge |z| \leq 5$.
- 24** Bereken de exacte waarde van de modulus en in twee decimalen nauwkeurig de hoofdwaaarde van het argument.
 a $z = 3 + 2i$ c $z = -3 - 4i$
 b $z = -2 + 5i$ d $z = 4 - i$
- 25** Bereken exact de modulus en de hoofdwaaarde van het argument.
 a $z = 2\sqrt{3} + 2i$ c $z = -1 - i\sqrt{3}$
 b $z = -4 - 4i$ d $z = 3 - 3i\sqrt{3}$
- 26** a Teken de getallen z waarvoor geldt $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge |z| \leq 5$.
 b Teken de getallen z waarvoor geldt $2 \leq \text{Re}(z) \leq 4 \wedge -2 \leq \text{Im}(z) \leq 3$.

- 27** Alle getallen z met $|z| = 4$ vormen in het complexe vlak een cirkel met middelpunt 0 en straal 4. En de getallen z met $|z - 2| = 3$ vormen een cirkel met middelpunt 2 en straal 3. Teken in vier aparte figuren de volgende cirkels en geef van elke cirkel het middelpunt en de straal.

- a $|z + 2| = 1$
 b $|z - 2i| = 3$
 c $|z - 1 - 2i| = 3$
 d $|z + 2 - i| = 2$



De afstand van het getal z tot $-2 + i$ dus $|z + 2 - i|$ is gelijk aan 4.

- A 28** Teken in de figuren van opgave 27 de getallen z waarvoor geldt
 a $|z + 2| = 1 \wedge \text{Im}(z) = -1$
 b $|z - 2i| = 3 \wedge \text{Re}(z) = 2$
 c $|z - 1 - 2i| = 3 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{1}{4}\pi$
 d $|z + 2 - i| = 2 \wedge \text{Arg}(z + 2 - i) = \frac{3}{4}\pi$

10

- A 29** Teken in het complexe vlak de getallen z waarvoor geldt
 a $|z| \leq 3 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{1}{2}\pi$
 b $2 \leq |z| \leq 5 \wedge \text{Im}(z) \leq -1$
 c $|z| = 4 \wedge \frac{1}{2}\pi \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$
 d $|z| \leq 5 \wedge \text{Arg}(z) = \frac{1}{4}\pi$

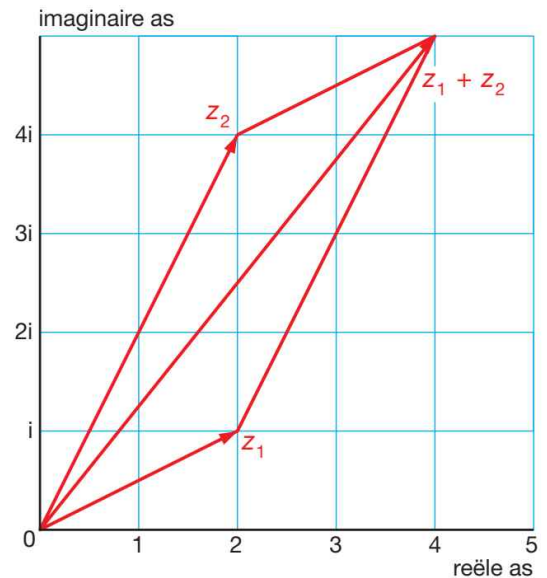
Terugblik

Het complexe vlak

Complexe getallen worden getekend in het complexe vlak. De reële as is horizontaal en de imaginaire as is verticaal.

Optellen met vectoren

Het optellen van complexe getallen in het complexe vlak wordt in beeld gebracht met vectoren. In de figuur hiernaast zijn de getallen $z_1 = 2 + i$ en $z_2 = 2 + 4i$ opgeteld volgens de parallellogramconstructie. Je ziet dat de som $z_1 + z_2 = 4 + 5i$ is.



De modulus van een complex getal

De modulus of absolute waarde van een complex getal z is de lengte van de vector die bij het complexe getal hoort. Notatie: $|z|$.

Uit de stelling van Pythagoras volgt $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Verder geldt voor elk complex getal z dat $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Voor de complexe getallen z_1 en z_2 geldt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Bij $z_1 = 2 + i$ en $z_2 = 2 + 4i$ is $|z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,
 $|z_2| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$, dus $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + i)(2 + 4i) = \\ &= 4 + 8i + 2i + 4i^2 = 10i \\ \text{en} \\ |z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{0^2 + 10^2} = 10. \end{aligned}$$

Het argument van een complex getal

De draaiingshoek φ van de vector die bij het complexe getal $z = a + bi$ hoort heet een argument van z .

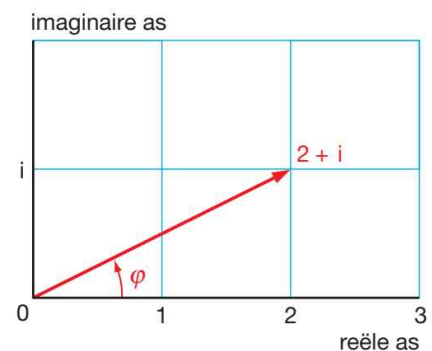
In de figuur hiernaast is $\tan(\varphi) = \frac{1}{2}$, dus $\varphi \approx 0,46$.

Maar ook $\varphi \approx 0,46 + 2\pi \approx 6,75$ en $\varphi \approx 0,46 - 2\pi \approx -5,82$ zijn argumenten van $z = 2 + i$.

De hoofdwaaarde van het argument noteren we met $\text{Arg}(z)$.

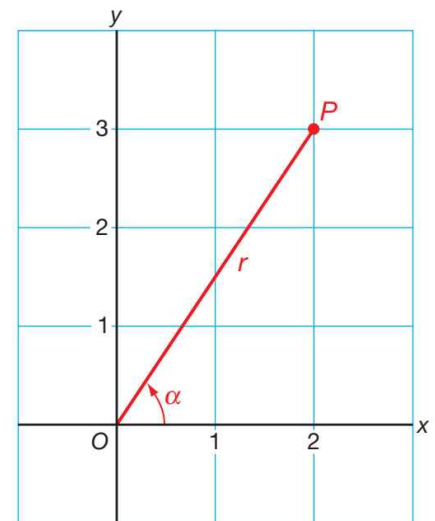
Er geldt $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$.

De GR geeft met $\text{angle}(a + bi)$ (TI) of $\text{Arg}(a + bi)$ (Casio) de hoofdwaaarde van het argument van $z = a + bi$.



10.3 Poolcoördinaten en de formule van Euler

O 30 In de figuur hiernaast is in een Oxy -assenstelsel het punt $P(2, 3)$ getekend. De plaats van P is ook vast te leggen met de afstand van O tot P en de hoek die is aangegeven met α . Bereken de exacte lengte van OP en α in radialen in drie decimalen nauwkeurig.



figuur 10.11

Theorie A Poolcoördinaten

De plaats van een punt in een assenstelsel is vast te leggen door een x - en een y -coördinaat. Dit worden de **cartesishe coördinaten** van het punt genoemd.

Maar de plaats is ook vast te leggen door de afstand r van de oorsprong tot dat punt en de draaiingshoek α met $-\pi < \alpha \leq \pi$. Zo is het punt P in de figuur hiernaast vastgelegd door $r = OP = \sqrt{13}$ en $\alpha \approx 0,588$.

De getallen $\sqrt{13}$ en $0,588$ heten de **poolcoördinaten** van P . Notatie: $P(\sqrt{13}; 0,588)$. Uit de context is op te maken of poolcoördinaten dan wel cartesische coördinaten worden bedoeld.

Bij het werken met poolcoördinaten wordt de draaiingshoek vaak aangegeven met θ (de Griekse letter thèta).

In figuur 10.13 zie je dat $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ en $\tan(\theta) = \frac{y_P}{x_P}$.

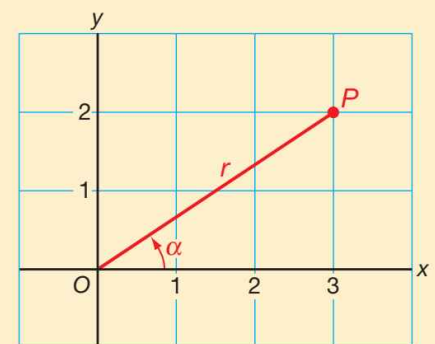
Verder volgt uit $\cos(\theta) = \frac{x_P}{r}$ en $\sin(\theta) = \frac{y_P}{r}$ dat

$x_P = r \cos(\theta)$ en $y_P = r \sin(\theta)$.

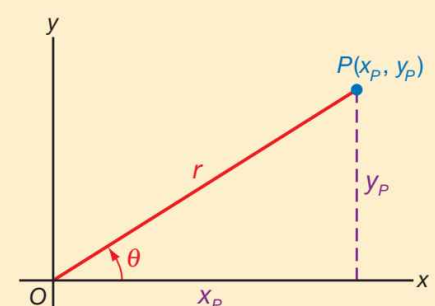
De poolcoördinaten (r, θ) van het punt P zijn

- de afstand r van O tot P
- de draaiingshoek θ van het lijnstuk OP met $-\pi < \theta \leq \pi$.

Er geldt $x_P = r \cos(\theta)$ en $y_P = r \sin(\theta)$.



figuur 10.12 $OP = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ en $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$, dus $\alpha \approx 0,588$.



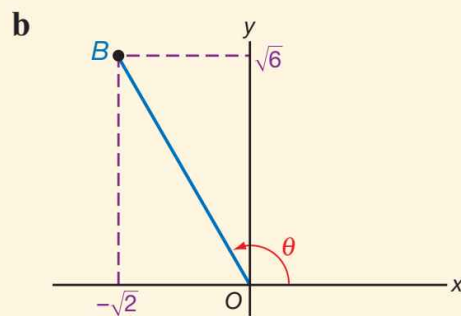
figuur 10.13

Voorbeeld

- a** Gegeven is het punt A met poolcoördinaten $(2, -\frac{1}{3}\pi)$.
Bereken exact de cartesische coördinaten van A .
- b** Gegeven is het punt B met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$.
Bereken exact de poolcoördinaten van B .

Uitwerking

a $x_A = r \cos(\theta) = 2 \cos(-\frac{1}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
 $y_A = r \sin(\theta) = 2 \sin(-\frac{1}{3}\pi) = 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{3}$
 Dus $A(1, -\sqrt{3})$.



$$r = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{Dus } B(2\sqrt{2}, \frac{2}{3}\pi).$$

- 31** Met poolcoördinaten zijn gegeven de punten $A(2, \frac{1}{6}\pi)$,
 $B(2, \frac{2}{3}\pi)$, $C(4, -\frac{3}{4}\pi)$ en $D(4, -\frac{5}{6}\pi)$.
 Bereken exact de cartesische coördinaten van A , B , C en D .
- 32** Met cartesische coördinaten zijn gegeven de punten $A(3, 0)$,
 $B(0, 4)$, $C(3, -3)$ en $D(-2\sqrt{3}, -2)$.
 Bereken exact de poolcoördinaten van A , B , C en D .

A 33 Teken de punten $P(r, \theta)$ waarvoor geldt

- a** $\theta = \frac{2}{3}\pi$
b $r = 4 \wedge -\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq -\frac{1}{4}\pi$
c $2 \leq r \leq 3 \wedge \theta = \frac{1}{3}\pi$
d $1 \leq r \leq 3 \wedge \frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$

O 34 Gegeven is het complexe getal $z = -1 + i$.

- a** Bereken exact $\text{Arg}(z)$ en $|z|$.
b Licht toe dat je in vraag a de poolcoördinaten van het getal z hebt berekend.

Theorie B Poolcoördinaten van een complex getal

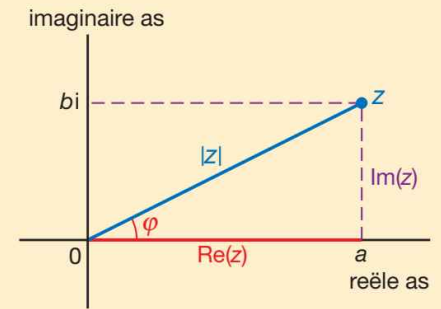
Het complexe getal $z = a + bi$ kun je ook noteren met poolcoördinaten. Je gebruikt dan de afstand van z tot 0, dus de modulus van z , en de draaiingshoek φ . In figuur 10.14 is te zien dat $\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\varphi)$ en $\operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\varphi)$.

Het getal $z = a + bi$ is dus ook te schrijven als

$$z = |z| \cos(\varphi) + i |z| \sin(\varphi).$$

Neem je $|z| = r$ dan krijg je $z = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$ ofwel

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$



figuur 10.14

De poolcoördinaten van een complex getal z zijn $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$. Er geldt $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$.

Voorbeeld

Schrijf de volgende getallen met poolcoördinaten. Rond het argument zo nodig af op twee decimalen.

a $z = 3 - 4i$

b $z = -1 + 3i$

c $z = 5i$

Uitwerking

a $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ en $\arg(z) \approx -0,93$

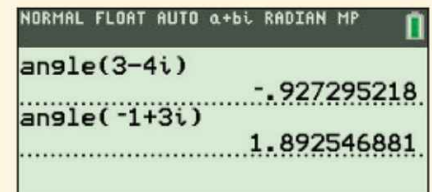
Dus $z = 5(\cos(-0,93) + i \sin(-0,93))$.

b $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$ en $\arg(z) \approx 1,89$.

Dus $z = \sqrt{10}(\cos(1,89) + i \sin(1,89))$.

c $|z| = 5$ en $\arg(z) = \frac{1}{2}\pi$

Dus $z = 5(\cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi))$.



35 Schrijf de volgende getallen met poolcoördinaten. Rond het argument af op twee decimalen.

a $z = 4 - 3i$

b $z = 12 + 5i$

c $z = -\sqrt{3} - 2i$

d $z = 2 - i\sqrt{5}$

36 Schrijf de volgende getallen met poolcoördinaten. Geef exacte antwoorden.

a $z = 10 + 10i$

b $z = 3$

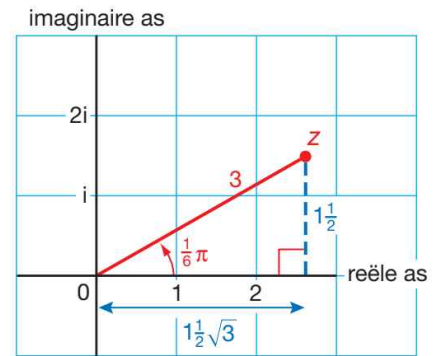
c $z = -5i$

d $z = -\sqrt{3} + i$

e $z = 6 - 6i\sqrt{3}$

f $z = \frac{1-i}{i}$

- 37** Om het getal $z = 3(\cos(\frac{1}{6}\pi) + i\sin(\frac{1}{6}\pi))$ te schrijven in de vorm $z = a + bi$ gebruik je de tekening hiernaast.
- a** Licht de getallen $1\frac{1}{2}$ en $1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ toe.
- b** Schrijf z in de vorm $z = a + bi$.



figuur 10.15

- 38** Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$. Geef exacte antwoorden.
- a** $z = 4(\cos(\frac{1}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\pi))$
- b** $z = 5(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi))$
- c** $z = 6(\cos(-\frac{5}{6}\pi) + i\sin(-\frac{5}{6}\pi))$
- d** $z = 8(\cos(-\frac{1}{6}\pi) + i\sin(-\frac{1}{6}\pi))$
- A 39** **a** Schrijf de getallen $z_1 = 5 + 3i$ en $z_2 = -2 + 3i$ met poolcoördinaten. Rond het argument af op twee decimalen.
- b** Schrijf de getallen $z_3 = -4 - 4i$ en $z_4 = 6 - 2i\sqrt{3}$ met poolcoördinaten. Geef exacte antwoorden.
- c** Schrijf de getallen $z_5 = 3(\cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi))$ en $z_6 = 4(\cos(-1\frac{1}{3}\pi) + i\sin(-1\frac{1}{3}\pi))$ in de vorm $z = a + bi$. Geef exacte antwoorden.
- d** Gegeven is $\text{Arg}(z_7) = -\frac{1}{3}\pi$ en $|z_7| = 2$. Schrijf z_7 in de vorm $z = a + bi$. Geef a en b exact.

- O 40** Je weet dat $[e^x]' = e^x$. Dit gebruiken we om e^x te schrijven als som van oneindig veel machten van x .
Stel $f(x) = e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$
- a** Licht toe dat $f(0) = 1$ geeft $a_0 = 1$.
- b** Uit $f'(x) = e^x$ en $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$ volgt $f'(0) = 1$ geeft $a_1 = 1$.
Licht dit toe.
- c** Licht toe dat $a_2 = \frac{1}{2}$, en bereken a_3 , a_4 en a_5 .
- d** Licht toe dat $a_6 = \frac{1}{6!}$.

- O 41** In deze opgave ga je $\sin(x)$ schrijven als som van oneindig veel machten van x .
Stel $f(x) = \sin(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$
- a** Licht toe dat $f(0) = 0$ geeft $a_0 = 0$.
- b** Uit $f'(x) = \cos(x)$ en $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$ volgt $f'(0) = 1$ geeft $a_1 = 1$.
Licht dit toe.
- c** Bereken a_2 tot en met a_7 .
- d** Geef a_{10} , a_{100} , a_{15} en a_{27} .

Theorie C De formule van Euler

In de opgaven 40 en 41 heb je de **machtreeksen** van e^x en van $\sin(x)$ gevonden.

Door $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ links en rechts te differentiëren

krijg je $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

Hiermee is de machtreeks van $\cos(x)$ gevonden.

Machtreeks van e^x , van $\sin(x)$ en van $\cos(x)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Uit de machtreeks van e^x volgt

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}i - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!}i + \dots$$

Dit toon je aan in opgave 42a.

Uit de machtreeksen van e^{ix} , $\sin(x)$ en $\cos(x)$ volgt

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Dit toon je aan in opgave 42b.

Vervangen van x door φ geeft $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$. Deze laatste vorm heet de **formule van Euler**.

De formule van Euler is $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$.

Uit $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ en $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ volgt $z = r e^{i\varphi}$ waarbij $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.

$z = r e^{i\varphi}$ is een complex getal met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.

Je kunt een complex getal dus op de volgende drie manieren noteren.

- I De notatie met behulp van het reële deel en het imaginaire deel.
 $z = a + bi$ waarbij $a = \operatorname{Re}(z)$ en $b = \operatorname{Im}(z)$.
- II De notatie met behulp van poolcoördinaten.
 $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ waarbij $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.
- III De notatie $z = r e^{i\varphi}$ waarbij $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.

Je kunt het getal $z = 8e^{\frac{1}{6}\pi i}$ schrijven in de vorm $z = a + bi$.

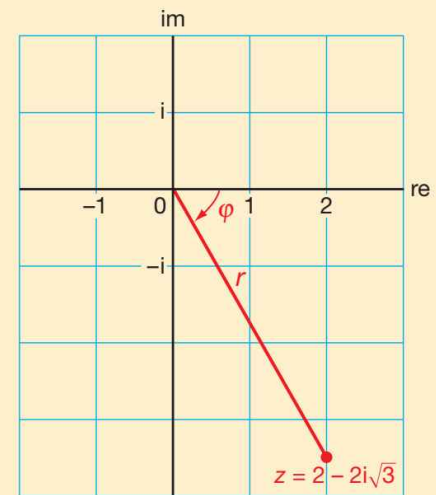
Je krijgt

$$z = 8e^{\frac{1}{6}\pi i} = 8\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = 4\sqrt{3} + 4i.$$

En het getal $z = 2 - 2i\sqrt{3}$ is te schrijven in de vorm $z = re^{i\varphi}$.

Je krijgt $r = |z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$ en

$\arg(z) = -\frac{1}{3}\pi$, dus $z = 4e^{-\frac{1}{3}\pi i}$.



figuur 10.16

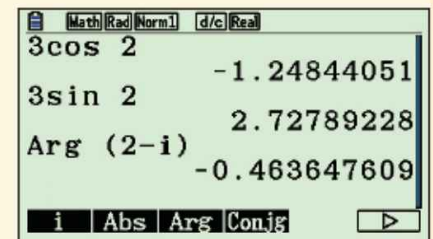
Voorbeeld

- Schrijf het getal $z = 3e^{2i}$ in de vorm $z = a + bi$. Rond a en b af op twee decimalen.
- Schrijf het getal $z = 2 - i$ in de vorm $z = re^{i\varphi}$. Rond φ af op twee decimalen.

Uitwerking

a $z = 3e^{2i} = 3(\cos(2) + i\sin(2)) = 3\cos(2) + 3i\sin(2)$
 $\approx -1,25 + 2,73i$

b $|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ en $\arg(z) \approx -0,46$ geeft $z \approx \sqrt{5}e^{-0,46i}$



- 42 a Toon aan dat uit de machtreeks van e^x volgt

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}i - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!}i + \dots$$
 - Toon met behulp van de machtreeksen van e^{ix} , $\sin(x)$ en $\cos(x)$ aan dat geldt $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.
- 43 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$.
 - $z = 4e^{\frac{1}{4}\pi i}$
 - $z = \sqrt{3}e^{\frac{1}{6}\pi i}$
 - $z = e^{\pi i}$
- 44 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = re^{i\varphi}$.
 - $z = 1 + i$
 - $z = -5$
 - $z = \sqrt{3} + i$
- 45 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$. Rond a en b af op twee decimalen.
 - $z = 5e^i$
 - $z = -4e^{3i}$
 - $z = \pi e^{-i}$
- 46 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = re^{i\varphi}$. Rond φ af op twee decimalen.
 - $z = 5 + 2i$
 - $z = -1 + 2i$
 - $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

- 47** Als je wiskundigen naar hun favoriete formule vraagt, noemen velen $e^{\pi i} + 1 = 0$. In deze formule staan de belangrijke constanten e , π en i , de neutrale elementen voor de optelling (0) en de vermenigvuldiging (1), en de belangrijkste bewerkingen (optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen).

- Controleer dat de formule juist is.
- Maak een soortgelijke formule waarin $e^{\frac{1}{2}\pi i}$ voorkomt. Doe dat ook voor $e^{2\pi i}$.



- A 48**
- Schrijf $z = 5e^{\frac{1}{3}\pi i}$ in de vorm $z = a + bi$.
 - Schrijf $z = 2\sqrt{3} - 2i$ in de vorm $z = re^{i\varphi}$.
 - Schrijf $z = 6e^{4i}$ in de vorm $z = a + bi$. Rond a en b af op twee decimalen.
 - Schrijf $z = -3 + 4i$ in de vorm $z = re^{i\varphi}$. Rond φ af op twee decimalen.

- D 49**
- Toon aan dat $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.
 - Druk $\cos(x)$ uit in e^{ix} en e^{-ix} .

- D 50** Met de formule $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ zijn de complexe oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 2$ te vinden. Stel hiertoe $e^{ix} = u$. Gebruik dat hieruit volgt $e^{-ix} = \frac{1}{u}$ en bereken één van de complexe oplossingen van $\sin(x) = 2$.

Terugblik

Poolcoördinaten van een complex getal

De poolcoördinaten (r, θ) van het punt P zijn

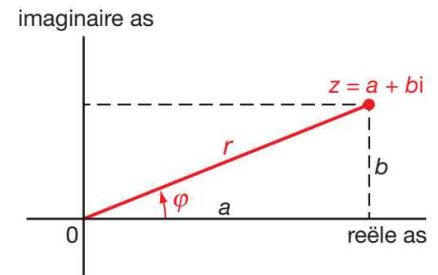
- de afstand r van O tot P
- de draaiingshoek θ van het lijnstuk OP , met $-\pi < \theta \leq \pi$.

Er geldt $x_P = r \cos(\theta)$ en $y_P = r \sin(\theta)$.

Het complexe getal $z = a + bi$ kun je ook noteren met poolcoördinaten, dus met de afstand r tot 0 en de draaiingshoek φ . In de figuur hiernaast is $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$,

dus $a = r \cos(\varphi)$, en $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$, dus $b = r \sin(\varphi)$.

Dus $z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$. Hiermee is z genoteerd met de poolcoördinaten $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.



Machtreeksen

Een machtreeks van een functie is de functie geschreven als de som van oneindig veel machten van x . Je kent de machtreeksen van e^x , $\sin(x)$ en $\cos(x)$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

De formule van Euler

Met behulp van de machtreeksen van e^{ix} , $\sin(x)$ en $\cos(x)$ is de formule van Euler aangetoond.

De formule van Euler is $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$.

Combineer je deze formule met de notatie van een complex getal met poolcoördinaten, dan krijg je het complexe getal $z = r e^{i\varphi}$ met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$.

Elk complex getal $z = a + bi$ is te schrijven in de vorm $z = r e^{i\varphi}$.

Bij $z = \sqrt{3} - 3i$ krijg je $r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

en $\tan(\varphi) = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$, dus $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$.

Dus $z = \sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} e^{-\frac{1}{3}\pi i}$.

Omgekeerd is $z = 2\sqrt{3} e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ te schrijven in de vorm $z = a + bi$. Je krijgt

$$z = 2\sqrt{3} e^{-\frac{1}{3}\pi i} = 2\sqrt{3} (\cos(-\frac{1}{3}\pi) + i \sin(-\frac{1}{3}\pi)) = 2\sqrt{3} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 3i.$$

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels

- O51**
- Ga na dat $(1 + i)^4 = -4$.
 - Licht toe dat $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}$.
 - Door de rekenregel $(e^p)^q = e^{pq}$ toe te passen op $e^{\frac{1}{4}\pi i}$ is $(\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i})^4$ te herleiden tot -4 .
Geef deze herleiding.

Theorie A Berekeningen met complexe e-machten

Voor complexe e-machten gelden dezelfde rekenregels als voor reële e-machten.

Dus net als

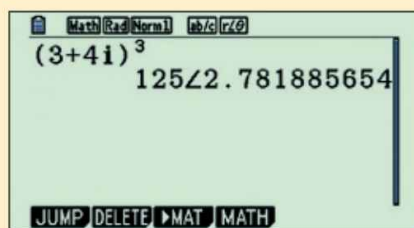
- $2e^3 \cdot 4e^5 = 8e^8$ is $2e^{3i} \cdot 4e^{5i} = 8e^{8i}$
- $\frac{10e^8}{5e^2} = 2e^6$ is $\frac{10e^{8i}}{5e^{2i}} = 2e^{6i}$
- $(3e^2)^4 = 81e^8$ is $(3e^{2i})^4 = 81e^{8i}$.

Met behulp van deze rekenregels en de formule van Euler zijn berekeningen met complexe getallen te maken. Zo gaat het schrijven van $z = (1 + i\sqrt{3})^4$ in de vorm $z = re^{i\varphi}$ als volgt.

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{1}{3}\pi i}, \text{ dus } z = (1 + i\sqrt{3})^4 = (2e^{\frac{1}{3}\pi i})^4 = 16e^{\frac{4}{3}\pi i}.$$

De GR heeft een instelling om complexe getallen in de vorm $re^{i\varphi}$ te schrijven. Deze instelling mag je gebruiken als geen exacte antwoorden worden gevraagd.

Zo geeft $z = (3 + 4i)^3$ met deze instelling meteen $z \approx 125e^{2,78i}$.



Voorbeeld

Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = r e^{i\varphi}$. Geef exacte antwoorden.

a $z = (2 + 2i)(1 - i\sqrt{3})$

b $z = (\sqrt{3} + i)^5$

c $z = (1 - i)^{-6}$

Uitwerking

a $2 + 2i = 2\sqrt{2} e^{\frac{1}{4}\pi i}$ en $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{1}{3}\pi i}$, dus

$$z = (2 + 2i)(1 - i\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} e^{\frac{1}{4}\pi i} \cdot 2e^{-\frac{1}{3}\pi i} = 4\sqrt{2} e^{-\frac{1}{12}\pi i}$$

b $\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{1}{6}\pi i}$, dus $z = (\sqrt{3} + i)^5 = (2e^{\frac{1}{6}\pi i})^5 = 32e^{\frac{5}{6}\pi i}$

c $1 - i = \sqrt{2} e^{-\frac{1}{4}\pi i}$, dus $(1 - i)^{-6} = (\sqrt{2} e^{-\frac{1}{4}\pi i})^{-6} = (2^{\frac{1}{2}})^{-6} \cdot e^{1\frac{1}{2}\pi i} = 2^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\pi i} = \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{2}\pi i}$

52 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = r e^{i\varphi}$. Geef exacte antwoorden.

a $z = (1 - i)^6$

d $z = (5 + 5i)^{-3}$

b $z = (1 + i)(3 - 3i\sqrt{3})$

e $z = (2\sqrt{3} + 2i)(2 - 2i\sqrt{3})^{-2}$

c $z = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$

f $z = \frac{(3\sqrt{3} - 3i)^2}{2\sqrt{3} + 2i}$

53 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = r e^{i\varphi}$. Rond φ af op twee decimalen.

a $z = (2 + 3i)^5$

d $z = (3 - i\sqrt{3})^{-4}$

b $z = (1 + 4i)(4 - i)$

e $z = (2 - i)^3 \cdot (3 + i)^2$

c $z = \frac{2 - 4i}{2 + i}$

f $z = \frac{(1 + 5i)^4}{(1 - 2i)^2}$

A 54 Gegeven $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ en $z_3 = 3(\cos(-\frac{3}{4}\pi) + i \sin(-\frac{3}{4}\pi))$. Bereken exact de modulus en een argument van

a $z_1 \cdot z_2$

b $z_1 \cdot z_3$

c $\frac{z_2}{z_3}$

A 55 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = r e^{i\varphi}$. Geef exacte antwoorden.

a $z = e^{\frac{1}{4}\pi i} + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

b $z = 1 + i\sqrt{3} - e^{\frac{1}{3}\pi i}$

c $z = (2\sqrt{3} - 2i)^2 - 10e^{\frac{2}{3}\pi i}$

d $z = \frac{(1 + i)^6}{4e^{\pi i}}$

- O56** Gegeven is de differentievergelijking $u_n = 2u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$.
- Licht toe dat je met een lineaire differentievergelijking van de tweede orde te maken hebt.
 - Bij de differentievergelijking hoort de karakteristieke vergelijking $g^2 - 2g + 4 = 0$.
Licht dit toe.
 - De karakteristieke vergelijking heeft twee complexe oplossingen.
Bereken deze oplossingen. Geef ze in de vorm $g = a + bi$.
 - Noteer de twee oplossingen van de karakteristieke vergelijking in de vorm $g = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$.

Theorie B Differentievergelijkingen en complexe getallen

Bij het opstellen van een directe formule bij de rij $u_n = 2u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$ in opgave 56 krijg je te maken met de karakteristieke vergelijking $g^2 - 2g + 4 = 0$. Van deze vergelijking is de discriminant D kleiner dan nul. De oplossingen van deze vergelijking zijn complex.

$$g^2 - 2g + 4 = 0$$

$$(g - 1)^2 - 1 + 4 = 0$$

$$(g - 1)^2 = -3$$

$$(g - 1)^2 = 3i^2$$

$$g - 1 = i\sqrt{3} \vee g - 1 = -i\sqrt{3}$$

$$g = 1 + i\sqrt{3} \vee g = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{Omdat } (1 + i\sqrt{3})^n = (2e^{\frac{1}{3}\pi i})^n = 2^n \cdot e^{\frac{1}{3}\pi ni} = 2^n \cdot (\cos(\frac{1}{3}\pi n) + i \sin(\frac{1}{3}\pi n))$$

en $(1 - i\sqrt{3})^n = 2^n \cdot (\cos(-\frac{1}{3}\pi n) + i \sin(-\frac{1}{3}\pi n))$ voldoet elke lineaire combinatie van $\cos(\frac{1}{3}\pi n) \cdot 2^n$, $i \sin(\frac{1}{3}\pi n) \cdot 2^n$, $\cos(-\frac{1}{3}\pi n) \cdot 2^n$ en $i \sin(-\frac{1}{3}\pi n) \cdot 2^n$ aan $u_n = 2u_{n-1} - 4u_{n-2}$.

$$\text{We kiezen } u_n = (A \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi n) + B \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi n)) \cdot 2^n.$$

$$u_0 = 1 \text{ geeft } (A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0)) \cdot 2^0 = 1, \text{ dus } A = 1.$$

$$u_1 = 3 \text{ geeft } (A \cdot \cos(\frac{1}{3}\pi) + B \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi)) \cdot 2^1 = 3, \text{ dus}$$

$$2(A \cdot \frac{1}{2} + B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 3 \text{ ofwel } A + B\sqrt{3} = 3.$$

$$\text{Uit } A = 1 \text{ en } A + B\sqrt{3} = 3 \text{ volgt } B = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\text{Je krijgt dus } u_n = (\cos(\frac{1}{3}\pi n) + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi n)) \cdot 2^n.$$

Je kunt met de GR nagaan dat deze directe formule de rij $u_n = 2u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$ oplevert.

We kunnen nu het werkschema van hoofdstuk 6 (vwo D deel 2, bladzijde 89) compleet maken.

Werkschema: het opstellen van een directe formule bij de rij

$u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met startwaarden u_0 en u_1

- 1 Substitueren van $u_n = g^n$ geeft de karakteristieke vergelijking $g^2 - ag - b = 0$ met $D = a^2 + 4b$.
- 2a Is $D > 0$ dan zijn er twee reële oplossingen g_1 en g_2 en is de directe formule van de vorm $u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$.
- 2b Is $D = 0$ dan is er één reële oplossing g en is de directe formule van de vorm $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$.
- 2c Is $D < 0$ dan zijn er twee complexe oplossingen g_1 en g_2 en is de directe formule van de vorm $u_n = (A \cos(\varphi n) + B \sin(\varphi n)) \cdot g^n$. Daarbij is φ een argument van g_1 (of van g_2) en is g de modulus van g_1 .
- 3 Je berekent A en B met behulp van de startwaarden u_0 en u_1 .

Voorbeeld

Stel de directe formule op bij de rij $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$ met $u_0 = 2$ en $u_1 = 5$.

Uitwerking

Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$ geeft

$$g^2 - 2g + 2 = 0$$

$$(g - 1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$(g - 1)^2 = -1$$

$$(g - 1)^2 = i^2$$

$$g - 1 = i \vee g - 1 = -i$$

$$g = 1 + i \vee g = 1 - i$$

$$|1 + i| = \sqrt{2} \text{ en } \arg(1 + i) = \frac{1}{4}\pi$$

$$u_n = (A \cos(\frac{1}{4}\pi n) + B \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (\sqrt{2})^n$$

$$u_0 = 2 \text{ geeft } A = 2$$

$$u_1 = 5 \text{ geeft } (A \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + B \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 5 \text{ ofwel } A + B = 5 \left. \vphantom{u_1 = 5} \right\} A = 2 \text{ en } B = 3$$

$$\text{Dus } u_n = (2 \cos(\frac{1}{4}\pi n) + 3 \sin(\frac{1}{4}\pi n)) \cdot (\sqrt{2})^n.$$

57 Stel de directe formule op.

a $u_n = 2\sqrt{3} \cdot u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 4$ en $u_1 = \sqrt{3}$

b $v_n = -4v_{n-1} - 16v_{n-2}$ met $v_0 = 1$ en $v_1 = 2$

A 58 Stel de directe formule op.

a $u_n = -6u_{n-1} - 12u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 1$

b $x_n = -\frac{1}{4}x_{n-2}$ met $x_0 = 16$ en $x_1 = 12$

A 59 Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen.

$$\begin{cases} x_n = -2x_{n-1} + 4y_{n-1} \\ y_n = -x_{n-1} - 2y_{n-1} \end{cases} \text{ met } x_0 = 2 \text{ en } y_0 = 3$$

a Toon aan dat uit dit stelsel volgt $x_n = -4x_{n-1} - 8x_{n-2}$.

b Stel van x_n en van y_n de directe formule op.

O 60 **a** Schrijf $(\sqrt{3} + i)^3$, $(-\sqrt{3} + i)^3$ en $(-2i)^3$ in de vorm $a + bi$.

b Geef drie oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8i$.

c Schrijf $2e^{\frac{1}{6}\pi i}$ en $2e^{\frac{2}{6}\pi i}$ in de vorm $a + bi$.

d Licht toe dat $2e^{\frac{5}{6}\pi i} = 2e^{\frac{5}{6}\pi i}$.

e Schrijf $-2i$ op drie verschillende manieren met een e-macht.

Theorie C Complexe wortels

Uit opgave 60 volgt dat $z = \sqrt{3} + i$, $z = -\sqrt{3} + i$ en $z = -2i$ oplossingen zijn van de vergelijking $z^3 = 8i$.

Je hebt daar ook gezien dat de oplossing $z = -2i$ op verschillende manieren te schrijven is als een complexe e-macht. Algemeen is $-2i = 2e^{-\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i}$.

Om de vergelijking $z^3 = 8i$ exact op te lossen in $\mathbb{C}$ schrijf je $8i$ in de vorm $r e^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}$.

Je krijgt $z^3 = 8i$

$$z^3 = 8e^{\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z = (8e^{\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i})^{\frac{1}{3}}$$

$$z = 2e^{\frac{1}{6}\pi i + k \cdot \frac{2}{3}\pi i}$$

...

$$k = 0 \text{ geeft } z = 2e^{\frac{1}{6}\pi i} = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \text{ geeft } z = 2e^{\frac{5}{6}\pi i} = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2 \text{ geeft } z = 2e^{\frac{1}{2}\pi i} = 2 \cdot -i = -2i$$

$$k = 3 \text{ geeft } z = 2e^{\frac{3}{2}\pi i} = 2e^{\frac{1}{2}\pi i} = \sqrt{3} + i$$

...

$2e^{\frac{2}{6}\pi i} = 2e^{\frac{1}{6}\pi i}$, en deze oplossing heb je al. Zo geeft ook $k = 4$ dezelfde oplossing als $k = 1$, enzovoort.

Je ziet dat de vergelijking $z^3 = 8i$ in $\mathbb{C}$ drie oplossingen heeft.

De vergelijking $z^n = c$ met $n = 2, 3, 4, \dots$ en $c \neq 0$ los je op door de vergelijking te schrijven in de vorm $z^n = r e^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}$.

De drie oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8i$ hebben een absolute waarde van 2 en liggen dus op de cirkel met middelpunt 0 en straal 2. De argumenten verschillen steeds $\frac{2}{3}\pi$. Dus als je een van de oplossingen hebt gevonden, kun je de andere oplossingen vinden door gebruik te maken van draaisymmetrie. In de figuur hiernaast zijn de oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8i$ in beeld gebracht.

De drie oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8i$ worden alle drie genoteerd als $\sqrt[3]{8i}$. We zeggen dat $\sqrt[3]{8i}$ drie uitkomsten heeft, namelijk $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$ en $-2i$.

En zo heeft $\sqrt{4i}$ twee uitkomsten.

De **complexe wortel** $\sqrt{4i}$ is tweewaardig en de complexe wortel $\sqrt[3]{8i}$ is driewaardig.

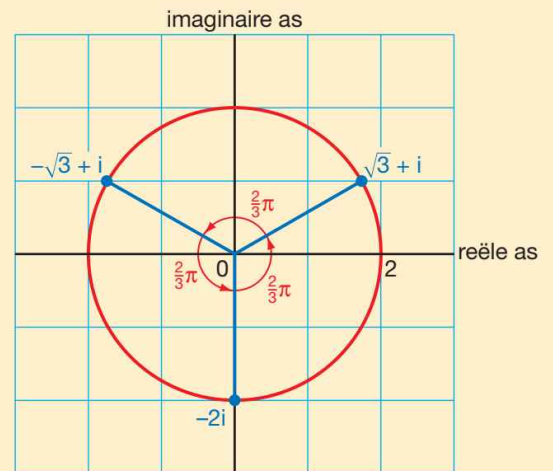
Zo is elke complexe wortel **meerwaardig**.

Algemeen geldt dat $\sqrt[n]{c}$ met $n = 2, 3, 4, \dots$ precies n uitkomsten heeft in $\mathbb{C}$. Dit zijn de oplossingen van de vergelijking $z^n = c$. Hierbij is c een complex getal ongelijk aan 0.

De vergelijking $z^n = c$ met $n = 2, 3, 4, \dots$ en $c \neq 0$ heeft n oplossingen in $\mathbb{C}$. Deze oplossingen zijn de uitkomsten van de n -demachtswortel van c .

Je kunt vergelijkingen van de vorm $z^n = c$ met $n = 2, 3, 4, \dots$ en $c \neq 0$ op twee manieren oplossen.

- 1 Door de vergelijking te schrijven in de vorm $z^n = r e^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}$.
- 2 Door één oplossing op te sporen, deze te tekenen op een cirkel en gebruik te maken van draaisymmetrie.



figuur 10.17 De drie oplossingen van $z^3 = 8i$.



Voorbeeld

Los exact op in $\mathbb{C}$. Geef de oplossingen in de vorm $z = a + bi$.

a $(z - 2i)^2 = -i$

b $z^4 = -16$

Uitwerking

a $(z - 2i)^2 = -i$

$$(z - 2i)^2 = e^{-\frac{1}{2}\pi i + k \cdot 2\pi i}$$

$$z - 2i = e^{-\frac{1}{4}\pi i + k \cdot \pi i}$$

$$z - 2i = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \vee z - 2i = e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

$$z - 2i = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee z - 2i = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

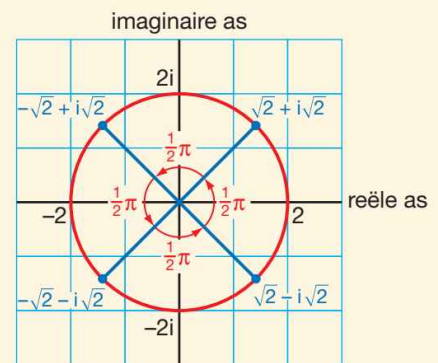
$$z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + (2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})i \vee z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + (2 + \frac{1}{2}\sqrt{2})i$$

b $\arg(z^4) = \arg(-16) = \pi$, dus een van de oplossingen heeft als argument $\frac{1}{4}\pi$.

$|z^4| = |-16| = 16$ geeft $|z| = 2$, dus de straal van de cirkel is 2.

De argumenten verschillen steeds $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

De oplossing is $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \vee z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
 $\vee z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \vee z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.



61 Los exact op in $\mathbb{C}$. Geef de oplossingen in de vorm $z = a + bi$.

a $(z - 1)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

c $z^3 = 27$

b $(z - 1 - i)^2 = -i$

d $z^4 = -81$

62 Bereken alle uitkomsten van de volgende wortels. Geef je antwoorden in de vorm $re^{i\varphi}$ en rond af op twee decimalen.

a $\sqrt{2 + i}$

b $\sqrt{-4 + 3i}$

c $\sqrt[3]{-6 + 3i}$

d $\sqrt[4]{10}$

$\sqrt{2 + i}$, dus los op
 $z^2 = 2 + i$.

10

A 63 Bereken alle uitkomsten van de volgende wortels. Geef exacte antwoorden in de vorm $a + bi$.

a $\sqrt{-5i}$

c $\sqrt[3]{-2 + 2i}$

b $\sqrt{\frac{1}{1 + i\sqrt{3}}}$

d $\sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$

A 64 Los exact op in $\mathbb{C}$. Geef de oplossingen in de vorm $z = a + bi$.

a $z^2 = -4i$

c $z^2 - 4z + 4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

b $z^6 = -64$

d $z^2 - 6z + 10 = i\sqrt{3}$

Terugblik

Herleidingen met complexe e-machten

Bij het herleiden van $z = (1 - i)(2 + 2i)^3$ tot de vorm $z = r e^{i\varphi}$ reken je met complexe e-machten.

$$1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i} \text{ en } 2 + 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$$

$$\text{Dus } z = (1 - i)(2 + 2i)^3 = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i} \cdot (2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i})^3 = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i} \cdot 16\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i} = 32e^{\frac{1}{2}\pi i}.$$

Differentievergelijkingen en complexe getallen

De recursieve formule $u_n = -2u_{n-1} - 4u_{n-2}$ is een lineaire differentievergelijking van de tweede orde. De bijbehorende karakteristieke vergelijking is $g^2 + 2g + 4 = 0$ en dit geeft $g = -1 - i\sqrt{3} \vee g = -1 + i\sqrt{3}$.

Omdat $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi$ en $|-1 + i\sqrt{3}| = 2$ krijg je

$$u_n = (A \cos(\frac{2}{3}\pi n) + B \sin(\frac{2}{3}\pi n)) \cdot 2^n.$$

Is verder gegeven dat $u_0 = 1$ en $u_2 = -13$, dan krijg je $A = 1$ en $B = -4\sqrt{3}$.

Bij de recursieve formule $u_n = -2u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_2 = -13$ hoort

dus de directe formule $u_n = (\cos(\frac{2}{3}\pi n) - 4\sqrt{3} \sin(\frac{2}{3}\pi n)) \cdot 2^n$.

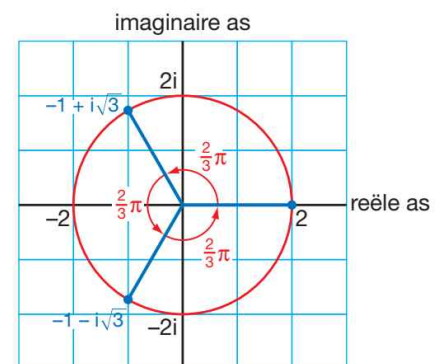
Bij het stelsel differentievergelijkingen $\begin{cases} x_n = x_{n-1} - 7y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} - 3y_{n-1} \end{cases}$ met $x_0 = 1$ en $y_0 = 2$

is het mogelijk een lineaire differentievergelijking van de tweede orde op te stellen.

Complexe wortels

In $\mathbb{C}$ heeft $\sqrt[3]{8}$ drie uitkomsten, dat zijn de oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8$. De oplossingen van deze vergelijking liggen op een cirkel met straal 2. Een van de oplossingen is $z = 2$. De andere oplossingen vind je met behulp van draaisymmetrie. Zie de figuur.

De twee andere oplossingen zijn $z = -1 + i\sqrt{3}$ en $z = -1 - i\sqrt{3}$.



Het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{C}$

De vergelijking $(z - 3)^4 = -16$ los je op door deze te

schrijven in de vorm $(z - 3)^4 = r e^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}$.

Je krijgt $(z - 3)^4 = 16 e^{\pi i + k \cdot 2\pi i}$

$$z - 3 = (16 e^{\pi i + k \cdot 2\pi i})^{\frac{1}{4}}$$

$$z = 3 + 2 e^{\frac{1}{4}\pi i + k \cdot \frac{1}{2}\pi i}$$

$$k = 0 \text{ geeft } z = 3 + 2e^{\frac{1}{4}\pi i} = 3 + 2(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}) = 3 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

En met $k = 1, 2$ en 3 krijg je de oplossingen $z = 3 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

$$z = 3 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} \text{ en } z = 3 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

10.5 Krachten en snelheden met complexe getallen

- O65** a Teken in het complexe vlak de vectoren bij de getallen $z_1 = 100 + 60i$ en $z_2 = 60 - 20i$ en de som van de vectoren.
- b Meet in de figuur de lengte op van de somvector en de hoek in graden die de somvector maakt met de horizontale as.
- c Bereken met de opties van de GR van de somvector de absolute waarde in gehelen en het argument in graden nauwkeurig. Zet de GR op graden en gebruik de instelling $a + bi$.

Theorie A Krachten en complexe getallen

Bij het rekenen met krachten en snelheden is niet alleen de grootte, maar ook de richting van belang. Het is dan handig om gebruik te maken van vectoren.

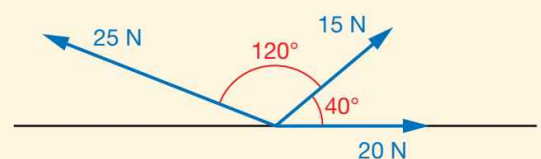
Bij elke vector in het platte vlak hoort een complex getal z . Het argument van z geeft de richting, de absolute waarde van z geeft de lengte van de vector. Om vectoren bij elkaar op te tellen, bereken je de som van de bijbehorende complexe getallen.

De som van krachten heet de **resultante** van de krachten.

In deze paragraaf reken je met hoeken in graden. Verder gebruik je bij de berekeningen opties van de GR.

Voorbeeld

Op een voorwerp werken drie krachten. Zie figuur 10.18. Bereken de grootte en de richting van de resultante van deze krachten. Rond af op gehelen.



figuur 10.18

Uitwerking

Bij de krachten horen de complexe getallen:

$$z_1 = 20$$

$$z_2 = 15(\cos(40^\circ) + i \sin(40^\circ))$$

$$z_3 = 25(\cos(160^\circ) + i \sin(160^\circ))$$

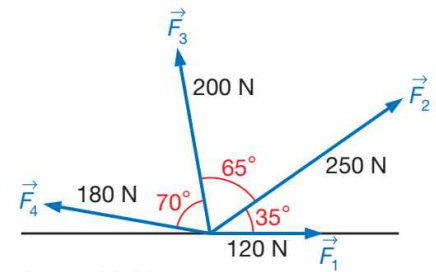
De GR geeft $|z_1 + z_2 + z_3| \approx 19,9$ en

$$\arg(z_1 + z_2 + z_3) \approx 66,3^\circ.$$

De resultante heeft een grootte van ongeveer 20 N en maakt een hoek van 66° met de horizontale as.

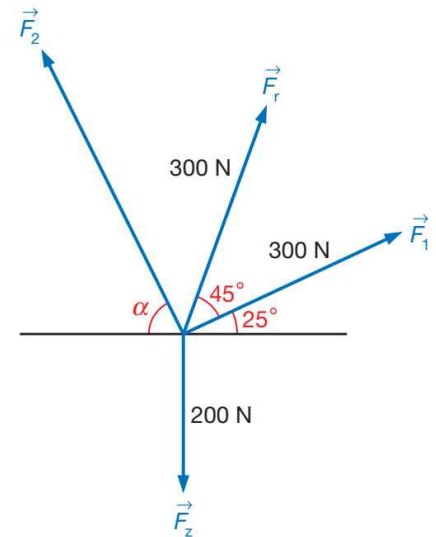
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP	
$15(\cos(40)+i\sin(40)) \rightarrow B$	
$11.49066665+9.641814145i$	
$25(\cos(160)+i\sin(160)) \rightarrow C$	
$-23.49231552+8.550503583i$	
$ A+B+C $	19.87294757
$\text{angle}(A+B+C)$	66.26704821

- 66** Op een voorwerp werken vier krachten. Zie figuur 10.19.
Bereken de grootte en de richting van de resultante van deze krachten. Rond af op gehelen.



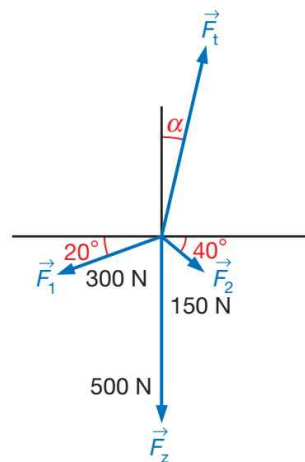
figuur 10.19

- 67** Op een voorwerp werken de zwaartekracht $\vec{F}_z$ met $F_z = 200$ N en de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$. Zie figuur 10.20. De kracht $F_1 = 300$ N en de grootte van de resulterende kracht $\vec{F}_r$ is 300 N.
Bereken hoek α en de grootte van $\vec{F}_2$. Rond af op gehelen.



figuur 10.20

- A 68** Een voorwerp hangt aan een touw. Op het voorwerp werken de zwaartekracht $\vec{F}_z$ met $F_z = 500$ N en de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ met $F_1 = 300$ N en $F_2 = 150$ N. Zie figuur 10.21. Door de krachten $\vec{F}_z$, $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ gaat het touw onder een hoek α hangen en ontstaat de spankracht $\vec{F}_t$ in het touw.
Bereken de grootte van $\vec{F}_t$ en de hoek α in graden nauwkeurig.

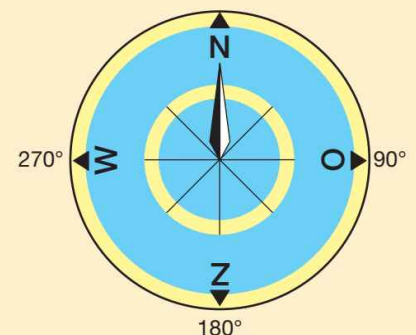


figuur 10.21

Theorie B Snelheden en complexe getallen

Ook van snelheden is vaak de grootte en de richting gegeven. In het voorbeeld zie je dat de berekening net zo gaat als bij krachten.

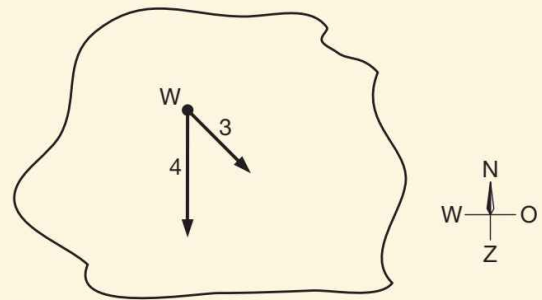
Bij snelheid is het begrip **koers** van belang. De koers is de hoek die de richting van de beweging maakt ten opzichte van de richting noord. Hierbij wordt de hoek in negatieve draairichting genomen, dus met de wijzers van de klok mee. De richting west komt dus overeen met koers 270° .



figuur 10.22

Voorbeeld

Een grote ijsschots drijft met een snelheid van 3 km/uur naar het zuidoosten. Op de ijsschots loopt Willem op de koers van zijn kompas pal naar het zuiden met een snelheid van 4 km/uur. Bereken in één decimaal nauwkeurig de resulterende snelheid van Willem en in graden nauwkeurig zijn koers.



figuur 10.23

Uitwerking

Bij de snelheden horen de complexe getallen

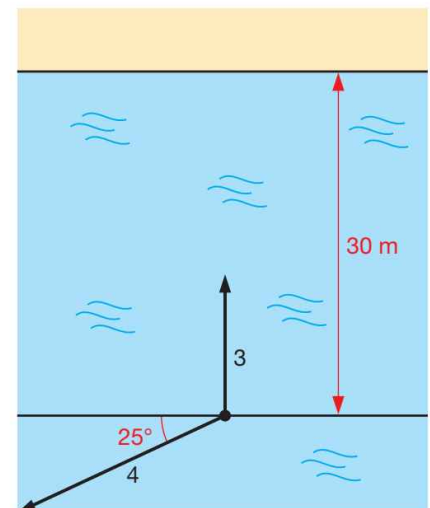
$$z_1 = 3(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)) \text{ en } z_2 = 4(\cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ)).$$

De GR geeft $|z_1 + z_2| \approx 6,48$ en $\arg(z_1 + z_2) \approx -70,9^\circ$.

De resulterende snelheid is 6,5 km/uur en de koers is 161° .

- 69** Een badgast komt 30 meter van het strand in een stroming terecht die schuin van het strand af is gericht. De snelheid van de stroming is 4 km/uur. Zie figuur 10.24.

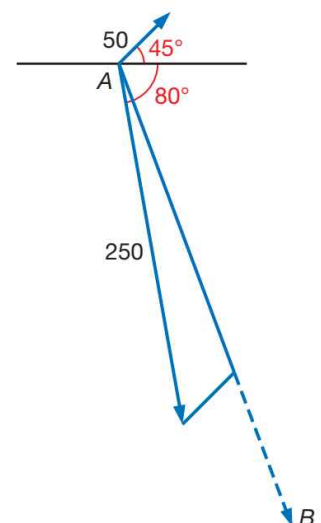
De badgast zwemt met een snelheid van 3 km/uur ten opzichte van het water naar het strand. Bereken in één decimaal nauwkeurig de snelheid van de badgast en in gehelen nauwkeurig de koers.



figuur 10.24

- 70** Een vliegtuig moet van A naar B vliegen. De afstand is 1000 km. De snelheid van het vliegtuig is bij windstil weer 250 km/uur. De wind waait precies uit het zuidwesten en heeft een snelheid van 50 km/uur. Door deze wind moet het vliegtuig op zijn kompas een koers aanhouden van 170° om in een rechte lijn van A naar B te vliegen. Zie figuur 10.25.

Hoe lang doet het vliegtuig erover om van A naar B te vliegen? Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.



figuur 10.25

- A 71** Een vliegtuig vliegt in rechte lijn het traject AB . De afstand tussen A en B is 200 km. Op dit traject is er een wind schuin tegen met een constante snelheid van 20 km/uur. De wind maakt een hoek van 40° met het traject. Het vliegtuig legt de 200 km af in precies één uur. Bereken in gehele km/uur de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de omringende lucht.

Terugblik

Krachten met complexe getallen

Omdat bij het rekenen met krachten zowel de grootte als de richting van belang is, worden krachten vaak voorgesteld door vectoren. Bij het rekenen met vectoren in het platte vlak is goed gebruik te maken van de eigenschappen van complexe getallen.

Om de resultante van de krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_3$ in de figuur te berekenen, voer je de complexe getallen z_1 , z_2 en z_3 in.

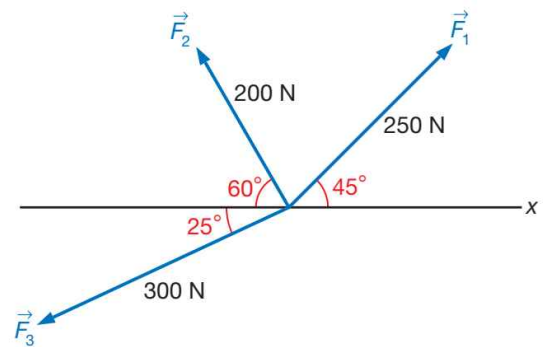
$$z_1 = 250(\cos(45^\circ) + i \sin(45^\circ))$$

$$z_2 = 200(\cos(120^\circ) + i \sin(120^\circ))$$

$$z_3 = 300(\cos(-155^\circ) + i \sin(-155^\circ))$$

De GR geeft $|z_1 + z_2 + z_3| \approx 296,46$ en

$\arg(z_1 + z_2 + z_3) \approx 131,2^\circ$. Dus de resulterende kracht is ongeveer 296 N en maakt een hoek van ongeveer 131° met de horizontale as.



Snelheden met complexe getallen

Ook bij snelheden is de grootte en de richting van belang.

Een vliegtuigje heeft een snelheid ten opzichte van de grond van 200 km/uur en een koers van 150° . Er staat een noordoostenwind met een snelheid van 50 km/uur. Hierdoor moet de piloot een andere koers op het kompas aanhouden dan 150° .

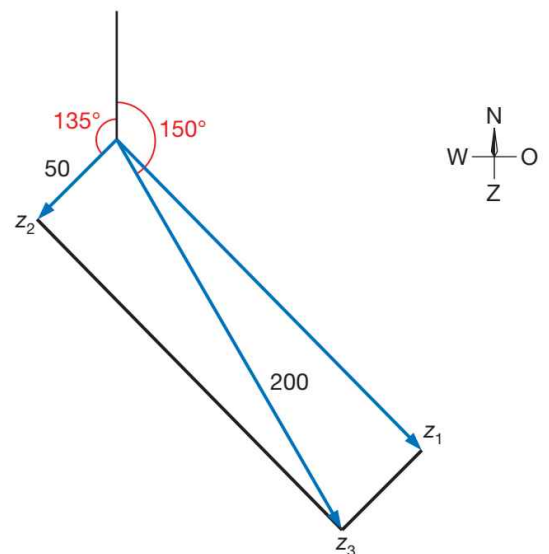
Om deze koers en de snelheid ten opzichte van de omringende lucht te berekenen, gebruik je complexe getallen.

Je zoekt het getal z_1 met $z_1 + z_2 = z_3$, dus $z_1 = z_3 - z_2$

met $z_2 = 50(\cos(-135^\circ) + i \sin(-135^\circ))$ en

$z_3 = 200(\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ))$.

De gevraagde koers is 136° en de snelheid is 193 km/uur.



NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP	
50(cos(-135)+isin(-135))→A	
-35.35533906-35.35533906i	
200(cos(-60)+isin(-60))→B	
100-173.2050808i	
B-A	193.193217
angle(B-A)	-45.52310437
90-Ans	135.5231044

Diagnostische toets

10.1 Rekenen met complexe getallen

- 1 Los op in $\mathbb{C}$.
- a $2x - 1 + 2i = 4x - 2 + 4i$ c $x^2 - 4x + 10 = 0$
 b $(2x + 1)^2 + 9 = 0$ d $4x^2 + 16x + 17 = 0$
- 2 Schrijf in de vorm $z = a + bi$.
- a $z = (2 - i) - (5 - 8i)$ d $z = \frac{2 - 5i}{6i}$
 b $z = (6 - 2i)(3 + 2i)$ e $z = \overline{(2 - 3i)^2}$
 c $z = \frac{3 - i}{4 + i}$ f $z = \frac{\overline{2 - i}}{2 + 3i}$

10.2 Het complexe vlak

- 3 Teken in het complexe vlak alle getallen z waarvoor geldt
- a $|z| = 2$ c $\operatorname{Re}(z) = 2 - \operatorname{Im}(z)$
 b $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0$ d $z \cdot \bar{z} = 10$
- 4 Bereken exact de modulus en de hoofdwaaarde van het argument.
- a $z = -2 + 2i$ c $z = -3i$
 b $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ d $z = 3\sqrt{3} - 3i$
- 5 Teken in het complexe vlak alle getallen z waarvoor geldt
- a $|z - 1 - i| = 1$ c $z \cdot \bar{z} = 9 \wedge \operatorname{Im}(z) = 2$
 b $1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 4 \wedge -\frac{1}{6}\pi \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{1}{6}\pi$ d $3 \leq |z| \leq 4 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq 1$

10.3 Poolcoördinaten en de formule van Euler

- 6 Schrijf de volgende getallen met poolcoördinaten. Rond het argument af op twee decimalen.
- a $z = 5 - 12i$ c $z = 2 + 4i$
 b $z = \sqrt{5} - 2i$ d $z = -\frac{1}{2} - i\sqrt{2}$
- 7 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$. Geef exacte antwoorden.
- a $z = 3\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$
 b $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$
- 8 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$.
- a $z = 10e^{\frac{1}{3}\pi i}$ b $z = 6e^{\frac{1}{2}\pi i}$ c $z = \frac{3}{e^{-\frac{1}{6}\pi i}}$
- 9 Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = re^{i\varphi}$.
- a $z = 3 + 3i$ b $z = -2$ c $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$

10.4 Complexe e-machten en complexe wortels

- 10** Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = r e^{i\varphi}$. Geef exacte antwoorden.

a $z = (3 - 3i\sqrt{3})(1 + i)$

d $z = e^{-\frac{1}{4}\pi i} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

b $z = \frac{(1 + i)^3}{(1 - i)^4}$

e $z = (\sqrt{3} + i)^2 - 6e^{\frac{1}{3}\pi i}$

c $z = (3 - i\sqrt{3})^{-4}$

f $z = \frac{(2 + 2i)^3}{1 - i}$

- 11** Stel de directe formule op bij de rij $u_n = -2u_{n-1} - 2u_{n-2}$ met $u_0 = 2\sqrt{2}$ en $u_1 = 1$.

- 12** Los exact op in $\mathbb{C}$. Geef de oplossingen in de vorm $z = a + bi$.

a $z^2 = -16i$

c $(z - 2i)^2 = -4i$

b $z^3 = 27i$

d $z^2 + 4z + 2 = 2i\sqrt{3}$

- 13** Bereken alle uitkomsten van de volgende wortels. Geef de uitkomsten in de vorm $z = r e^{i\varphi}$.

a $\sqrt[4]{i}$

c $\sqrt[4]{-2 - 2i\sqrt{3}}$

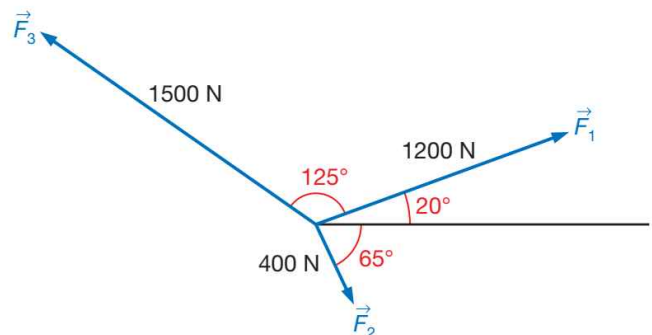
b $\sqrt[4]{-16}$

d $\sqrt[3]{-\frac{1}{i}}$

10.5 Krachten en snelheden met complexe getallen

- 14** Op een voorwerp werken drie krachten. Zie figuur 10.26.

Bereken de grootte en de richting van de resultante van deze krachten. Rond af op gehelen.



figuur 10.26

- 15** Een schip vaart op het kompas een koers van 40° . De snelheid van het schip ten opzichte van het water is 8 knopen. Het water stroomt met een snelheid van 3 knopen naar het noordwesten.
- a** Bereken de werkelijke snelheid en de koers van het schip.
- b** Met hoeveel knopen moet de stuurman van het schip de snelheid ten opzichte van het water verlagen om recht naar het noorden te gaan? Neem aan dat de koers op het kompas hetzelfde blijft.

Bij het tekenen van ruimtelijke figuren ben je beperkt tot het platte vlak. Ook bij computerspellen heb je hiermee te maken: het spel speelt zich af in een ruimtelijke situatie, maar het scherm heeft twee dimensies. Het is dan zaak dat de ruimtelijke situatie wordt omgerekend naar het platte vlak, zodat alles waarheidsgetrouw wordt weergegeven. Bij deze berekeningen wordt lineaire algebra gebruikt.

Wat leer je?

- Wat lineaire afbeeldingen zijn en welke regels daarvoor gelden.
- Werken met lineaire afbeeldingen in verschillende dimensies.
- Wat eigenwaarden en eigenvectoren zijn en hoe je deze berekent.
- Hoe je een matrix diagonaliseert en wat je hiermee kunt doen.
- Hoe je machtreeksen gebruikt bij matrices.
- Hoe je matrices gebruikt om directe formules van differentievergelijkingen op te stellen.



Lineaire algebra

11



Voorkennis Matrices

Theorie A Het vermenigvuldigen van matrices

Een $m \times n$ -matrix heeft m rijen en n kolommen.

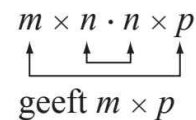
Je kunt een $m \times n$ -matrix vermenigvuldigen met een $n \times p$ -matrix. Je krijgt dan een $m \times p$ -matrix.

Een vierkante matrix heeft evenveel rijen als kolommen.

Je kunt een vierkante matrix daarom met zichzelf vermenigvuldigen. En zo kun je een vierkante matrix ook tot een macht verheffen.

Bij het vermenigvuldigen van matrices gebruik je de GR, tenzij er letters in de matrix voorkomen.

De afmeting van een matrix met m rijen en n kolommen is $m \times n$.

$m \times n \cdot n \times p$

 geeft $m \times p$

Voorbeeld

Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$.

Bereken zo mogelijk.

- a** $A \cdot B$ **c** $A \cdot C$ **e** A^4
b $B \cdot A$ **d** $C \cdot A$ **f** C^2

Uitwerking

a De GR geeft $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & 14 \end{pmatrix}$.

b B is een 2×3 -matrix en A is een 2×2 -matrix, dus $B \cdot A$ kan niet.

c $\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = C$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3a + b & 9 \\ 4a + 2b & 14 \end{pmatrix} = A \cdot C$$

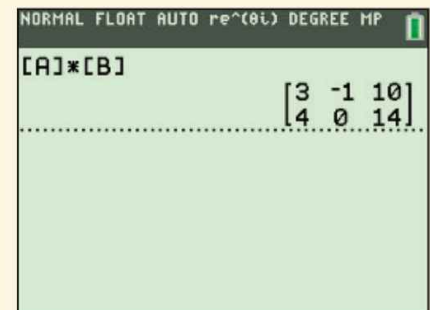
d $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A$

$$C = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3a + 8 & a + 4 \\ 3b + 12 & b + 6 \end{pmatrix} = C \cdot A$$

e De GR geeft $A^4 = \begin{pmatrix} 269 & 105 \\ 420 & 164 \end{pmatrix}$.

f $\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = C$

$$C = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a^2 + 2b & 2a + 6 \\ ab + 3b & 2b + 9 \end{pmatrix} = C^2$$



- 1 Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ en

$$C = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 2b & b \end{pmatrix}.$$

Bereken zo mogelijk.

- a $A \cdot B$ c $B \cdot C$ e A^3
 b $B \cdot A$ d $C \cdot B$ f C^2

- 2 Gegeven is de diagonaalmatrix $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- a Bereken A^2 en A^3 .
 b Geef A^{10} .

Gegeven is de diagonaalmatrix $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

- c Druk c en d uit in a of b als geldt $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Gegeven is de diagonaalmatrix $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- d Geef C^5 .
 e Geef de matrix D waarvoor geldt $C \cdot D = I$.

- 3 Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Bereken a , b , c en d als geldt $A \cdot B = I$.

Een diagonaalmatrix is een vierkante matrix waarvan alle elementen buiten de hoofddiagonaal gelijk zijn aan nul.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is de 2×2 -eenheidsmatrix.

Theorie B Stelsels, inverse matrices en determinanten

De matrix B waarvoor geldt $A \cdot B = I$ is de inverse matrix van A .

Notatie: $B = A^{-1}$.

Er geldt dus $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Je berekent de inverse matrix met de GR. Gebruik de toets x^{-1} .

Bij het stelsel $\begin{cases} 3x - 4y + z = -14 \\ x + y - z = 3 \\ 4x - y + 2z = 5 \end{cases}$ hoort de coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en de kolommatrix } B = \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

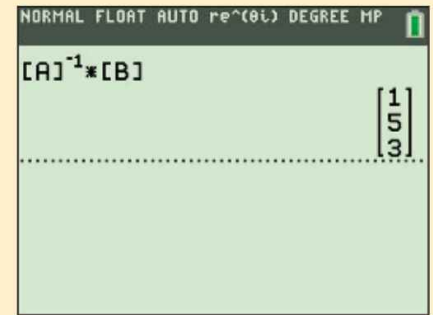
$$\text{We kunnen het stelsel noteren als } A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Omdat $A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

De GR geeft $(x, y, z) = (1, 5, 3)$.

Hierboven is het gegeven stelsel opgelost met de inverse van de coëfficiëntenmatrix. Een andere manier om het stelsel op te lossen is door te vegen in kolommen in de aangevulde matrix

$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -14 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Ook hiervoor kun je de GR gebruiken.



Op de TI gebruik je de optie rref uit het MATRIX-MATH-menu.

Op de Casio gebruik je de optie Rref uit het OPTN-MAT-menu.

De GR geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en hieruit lees je de oplossing

$(x, y, z) = (1, 5, 3)$ af.

Bij elke vierkante matrix hoort een determinant. Heb je te maken

met de matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}$, dan is de determinant $aq - bp$.

Notatie: $\det(A) = aq - bp$, of $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = aq - bp$.

De determinant van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ is

$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$.

Als de elementen van de matrix getallen zijn, kun je de determinant berekenen met de optie det (TI) of Det (Casio).

Ga na dat $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 22$.

Aan deze uitkomst kun je zien dat het stelsel $\begin{cases} 3x - 4y + z = -14 \\ x + y - z = 3 \\ 4x - y + 2z = 5 \end{cases}$

één oplossing heeft. Er geldt namelijk voor de coëfficiëntenmatrix A van een stelsel vergelijkingen

- als $|A| \neq 0$ dan heeft het stelsel één oplossing
- als $|A| = 0$ dan heeft het stelsel geen oplossingen of oneindig veel oplossingen.

4 Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} x - y + 2z = 9 \\ x + y + z = 4 \\ 4x - y + 3z = 18 \end{cases}$$

- a** Bereken de determinant van de coëfficiëntenmatrix.
Wat volgt hieruit voor het aantal oplossingen van het stelsel?
- b** Los het stelsel op met een inverse matrix.
- c** Los het stelsel op met de optie rref.

5 a Toon aan dat
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

- b** Onderzoek met enkele getallenvoorbeelden of geldt

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

11.1 Matrixrekening met GeoGebra

In deze paragraaf ga je met behulp van het computerprogramma GeoGebra rekenen met matrices. In het vervolg van het hoofdstuk is het vaak handiger om voor het rekenwerk GeoGebra te gebruiken in plaats van de GR. Bovendien kun je met GeoGebra goed in beeld brengen welk effect een matrixberekening heeft op een meetkundige figuur.

O 1 In GeoGebra voer je met de opdracht $M = \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9\}\}$

de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ in. Met deze matrix kun je vervolgens

allerlei berekeningen maken, bijvoorbeeld met de opdrachten M^2 en $\text{determinant}[M]$.

a Voer de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ in en bereken M^2 en de

determinant van M .

b Bereken $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$.

c Los het stelsel $\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 4a + 5b = 6 \end{cases}$ op door een geschikte matrix N in te voeren en de opdracht $\text{rref}[N]$ te geven.

d Los het stelsel $\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 4a + 5b = 6 \end{cases}$ op door de inverse van de matrix

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ te vermenigvuldigen met de matrix $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

O 2 Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a Voer de matrix M in en teken een punt A .

b Teken het punt $B = M \cdot A$ en de lijnstukken OA en OB .

Versleep A . Wat valt je op aan de lijnstukken OA en OB ?

c Onderzoek naar welk punt je A moet verslepen om $B(4, 4)$ te krijgen.

d Bereken $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Wat valt je op?

Theorie A Een matrix als functie

Je kunt matrices vermenigvuldigen met punten en vectoren.

Vermenigvuldig je een matrix met een vector (het origineel), dan krijg je een nieuwe vector (het beeld). Door het origineel te verslepen kun je een indruk krijgen van de eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging. Zo heb je bij de matrixvermenigvuldiging in opgave 2 gezien dat de vectoren draaien over een hoek van 45° en dat hun lengte vermenigvuldigd wordt met $\sqrt{2}$. We noemen dit een **draaivermenigvuldiging**. En zo zijn er ook matrices die horen bij de transformaties

- spiegelingen in een lijn door O
- rotaties om O
- vermenigvuldigingen ten opzichte van O .

Een matrix zet een origineel om in een beeld, en is dus een functie.

3 Onderzoek met GeoGebra

- a welke rotatie bij $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hoort
- b welke spiegeling bij $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hoort
- c welke draaivermenigvuldiging bij $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ hoort.

4 a Voer de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ in en teken een punt A .

- b Teken $B = M \cdot A$ en zet voor B het spoor aan.
- c Versleep A . Wat valt je op?
- d Wijzig M in $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ en versleep A . Wat valt je op?

- e Bereken van de matrices M in de vragen a en d de determinant. Wat valt je op?

- f Bereken d in de matrix $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -1 & d \end{pmatrix}$ zo, dat alle punten van het vlak op één lijn worden afgebeeld. Controleer je antwoord met GeoGebra.

- g Gegeven is de matrix $P = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ c & d \end{pmatrix}$.

Bereken c en d zo, dat alle punten van het vlak op de lijn $y = 1\frac{1}{2}x$ worden afgebeeld. Controleer je antwoord met GeoGebra.

- 5 a** Maak een schuifknop α door in het venster Schuifknop voor 'hoek' te kiezen.

b Voer de matrix $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ in.

- c** Teken de punten A, B en C , en de punten $D = M \cdot A, E = M \cdot B$ en $F = M \cdot C$.

- d** Teken met de optie *Veelhoek* de driehoek DEF en zet voor deze driehoek het spoor aan.

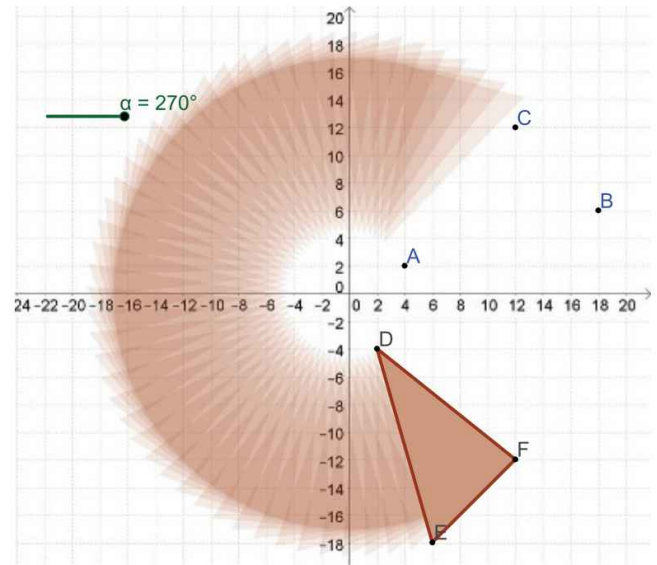
- e** Versleep α , of zet voor α de animatie aan.

Wat voor afbeelding hoort er bij M ?

- f** Bedenk een matrix M die het volgende doet:

rotatie om O over 90° , gevolgd door de vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van O .

Controleer je antwoord met GeoGebra.



- 6 a** Bereken $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wat valt je op?

- b** Geef de matrix M die $(1, 0)$ afbeeldt op $(6, -2)$, en $(0, 1)$ afbeeldt op $(-3, 8)$. Controleer je antwoord met GeoGebra.

- c** De matrix M van vraag b beeldt $(2, 0)$ af op $(12, -4)$. Geef het beeld van $(0, 3)$ en controleer je antwoord.

- d** Bedenk een matrix die $(10, 0)$ afbeeldt op $(60, 20)$, en $(0, 5)$ op $(-35, 15)$. Controleer je antwoord.

- 7 a** Voer de matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ in, maak een schuifknop a

waarvan de waarde varieert van -10 tot 10 met stapgrootte $0,1$ en teken de lijn $k: y = ax$.

- b** Teken een punt A op k , het punt $B = M \cdot A$ en de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$.

- c** Onderzoek voor welke waarden van a geldt dat $\overrightarrow{OB}$ op k ligt.

- d** Voor de waarden van a die je bij vraag c hebt gevonden geldt $\overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$.

Geef voor elke waarde van a de bijbehorende λ .

Theorie B Eigenwaarden en eigenvectoren

In opgave 7 heb je gezien dat de matrix M alle vectoren $\vec{v}$ die op de lijn $y = -x$ liggen, afbeeldt op een vector $\lambda \cdot \vec{v}$ die ook op de lijn $y = -x$ ligt. Hetzelfde heb je gezien bij de vectoren die op de lijn $y = \frac{1}{2}x$ liggen. Voor deze vectoren geldt dus $M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.

Vectoren $\vec{v}$ met de eigenschap $M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ heten **eigenvectoren** van de matrix M . De bijbehorende getallen λ zijn de **eigenwaarden** van de matrix M .

Om met GeoGebra eigenvectoren van een matrix te vinden, versleep je vector $\vec{v}$ zo, dat $\vec{v}$ en het beeld van $\vec{v}$ op dezelfde lijn liggen. De bijbehorende eigenwaarde vind je door te kijken met welke factor $\vec{v}$ is vermenigvuldigd.

- 8 a** Voer de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ in en teken een punt A en

de vector $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.

- b** Een van de eigenwaarden van M is gelijk aan 1.
Dit betekent dat origineel en beeld samenvallen.
Welke eigenvectoren horen hierbij?

- c** Een van de eigenvectoren van M is $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Welke eigenwaarde van M hoort hierbij?

Als $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een eigenvector is, dan is $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ook een eigenvector.

- 9** Bepaal eigenvectoren en de bijbehorende eigenwaarden.

a $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b $M = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

- 10** Licht toe dat de matrix M van opgave 3a geen eigenvectoren heeft.

- 11** De matrix M hoort bij de spiegeling in de lijn $y = x$.
Onderzoek met een schets wat eigenvectoren en de bijbehorende eigenwaarden van M zijn.

11.2 Lineaire afbeeldingen

O12 Gegeven zijn de matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ en de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Teken de vectoren $\vec{a}$ en $M \cdot \vec{a}$.
Wat valt je op?
- Teken de vectoren $\vec{b}$ en $M \cdot \vec{b}$.
Wat valt je op?
- Teken een vector $\vec{c}$ en $M \cdot \vec{c}$.

Theorie A Lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$.

In opgave 12 heb je gezien dat de matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ het punt

$A(2, 3)$ afbeeldt op het punt $A'(-6, 4)$. Het punt A is over 90° om de oorsprong geroteerd en ten opzichte van de oorsprong vermenigvuldigd met 2.

Bij M hoort een **draaivermenigvuldiging**.

De matrix M geeft bij elke vector of elk punt in het Oxy -vlak een beeld dat ook in het Oxy -vlak ligt.

Het Oxy -vlak is een tweedimensionale ruimte en noteren we met het symbool $\mathbb{R}^2$.

De ruimte met een oorsprong O , een x -as, een y -as en een z -as is een driedimensionale ruimte en noteren we met het symbool $\mathbb{R}^3$.

Bij elke 2×2 -matrix hoort een afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$.

Een 2×2 -matrix is dus een functie waarvan de originelen en de beelden punten of vectoren in het platte vlak zijn.

Een afbeelding waar een matrix bij hoort heet een **lineaire afbeelding**. Voor lineaire afbeeldingen gelden de volgende regels die je in opgave 14 gaat bewijzen voor $\mathbb{R}^2$.

- $M \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- $M \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = M \cdot \vec{v} + M \cdot \vec{w}$
- $M \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(M \cdot \vec{v})$

Om de matrix bij een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ te vinden, heb je twee onafhankelijke vectoren en hun beelden nodig. We onderscheiden hierbij twee situaties.

- 1 De beelden van de **eenheidsvectoren** $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn eenvoudig te vinden.

Je gebruikt: als $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ en $M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, dan is

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Deze regel toon je aan in opgave 15 en wordt gebruikt in het voorbeeld hieronder.

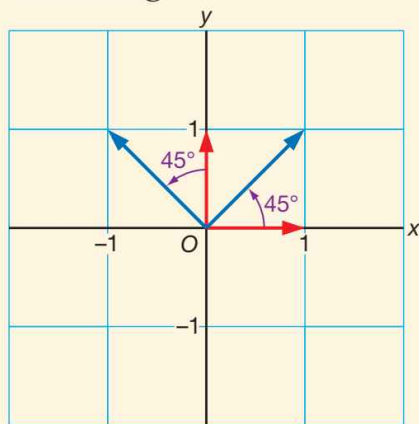
- 2 De beelden van twee willekeurige punten of vectoren zijn bekend.

Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en bereken a , b , c en d . Zie het voorbeeld op bladzijde 90.

Voorbeeld

Het punt $A(7, -4)$ wordt ten opzichte van de oorsprong over 45° geroteerd en vermenigvuldigd met $\sqrt{2}$. Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Uitwerking



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

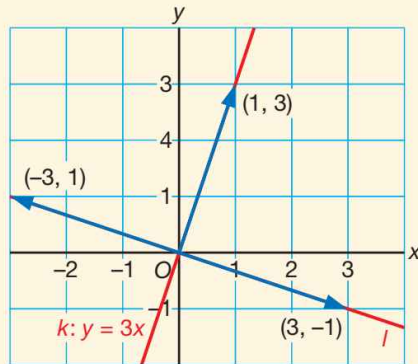
dus $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dit geeft $M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $A'(11, 3)$.

Voorbeeld

Het punt $A(4, 0)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = 3x$.
Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Uitwerking



Het beeld van $(1, 3)$ is $(-3, 1)$.

Neem een punt op de lijn.

Het beeld van $(3, -1)$ is $(-1, 3)$.

Neem een punt op de lijn l door O loodrecht op k .

Stel $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ geeft } a + 3b = 1 \text{ en } c + 3d = 3.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } 3a - b = -3 \text{ en } 3c - d = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} a + 3b = 1 & 1 \\ 3a - b = -3 & 3 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} a + 3b = 1 \\ 9a - 3b = -9 \\ \hline 10a = -8 \\ a = -0,8 \end{array} \right. +$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -0,8 \\ a + 3b = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,8 + 3b = 1 \\ 3b = 1,8 \\ b = 0,6 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} c + 3d = 3 & 3 \\ 3c - d = 1 & 1 \end{array} \right\} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3c + 9d = 9 \\ 3c - d = 1 \\ \hline 10d = 8 \\ d = 0,8 \end{array} \right. -$$

$$\left. \begin{array}{l} d = 0,8 \\ 3c - d = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3c - 0,8 = 1 \\ 3c = 1,8 \\ c = 0,6 \end{array}$$

$$M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,2 \\ 2,4 \end{pmatrix}, \text{ dus } A'(-3,2; 2,4).$$

11

R 13 Zie het voorbeeld hierboven.

Niels berekent de beelden van de punten $(1, 3)$ en $(2, 6)$ om de matrix M op te stellen.

Wat gaat er mis? Hoe komt dat?

14 Gegeven zijn de matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
en $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.

- a Toon aan dat $M \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- b Toon aan dat $M \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = M \cdot \vec{v} + M \cdot \vec{w}$.
- c Toon aan dat $M \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(M \cdot \vec{v})$.

15 Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Er geldt $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ en $M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

Toon aan dat $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- 16** a Het punt $A(3, -5)$ wordt ten opzichte van de oorsprong over -45° geroteerd en vermenigvuldigd met $2\sqrt{2}$.
Bereken de coördinaten van het beeld A' .
- b Het punt $B(4, -1)$ wordt ten opzichte van de oorsprong over 30° geroteerd en vermenigvuldigd met 2.
Bereken de coördinaten van het beeld B' .

- 17** Het punt $A(0, 3)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = -2x$.
Bereken de coördinaten van het beeld A' .

- 18** Stel voor $\mathbb{R}^2$ de matrix M op die hoort bij
- a spiegeling in de x -as
 - b spiegeling in de y -as
 - c spiegeling in de oorsprong
 - d spiegeling in de lijn $y = x$
 - e loodrechte projectie op de lijn $y = x$
 - f een rotatie om de oorsprong over φ graden.

- 19** Licht toe dat de volgende transformaties geen lineaire afbeeldingen zijn.

- a Spiegeling in de lijn $y = 2$.
- b Translatie over $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- A 20** Stel de matrix M op die de punten van $\mathbb{R}^2$ achtereenvolgens om O roteert over -45° , vermenigvuldigt met 3 ten opzichte van de x -as, en spiegelt in de lijn $y = x$.

- 21** Stel de matrix M op die het punt $A(2, 3)$ afbeeldt op $A'(2, -1)$ en het punt $B(0, 2)$ op $B'(1, 1)$.

- 22 a** Er geldt $\vec{v}' = M \cdot \vec{v}$ geeft $\vec{v} = M^{-1} \cdot \vec{v}'$.

Toon dit aan.

- b** De matrix M beeldt $A(2, 3)$ af op $A'(2, -1)$ en $B(-2, 4)$ op $B'(0, 4)$.

Het punt C wordt door M afgebeeld op $C'(5, 5)$.

Bereken de coördinaten van C .

- 23** De matrix M beeldt $A(-2, 1)$ af op $B(6, 6)$, en $B(6, 6)$ op $A(-2, 1)$.

- a** Bereken M en de inverse van M . Wat valt je op?

- b** Gebruik het resultaat van vraag a om M^2 te berekenen.

- c** Geef M^{1000} en M^{1001} .

- A 24 a** Het punt $A(5, 6)$ wordt achtereenvolgens gespiegeld in de lijn $y = -x$, om de oorsprong geroteerd over 60° en vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de x -as.

Bereken de coördinaten van het beeld A' .

- b** Het punt $B(2, -3)$ wordt achtereenvolgens gespiegeld in de lijn $y = 7x$ en om de oorsprong geroteerd over 90° .

Bereken de coördinaten van het beeld B' .

- D 25 a** De matrix M beeldt de punten $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$ af op de lijn $y = 3x$.

Toon aan dat $\det(M) = 0$.

- b** Bewijs de volgende stelling:

Een matrix waarvan beide kolomvectoren op een lijn k door O liggen, beeldt alle punten van $\mathbb{R}^2$ af op k .

- c** De matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ p & p+5 \end{pmatrix}$ beeldt alle punten van $\mathbb{R}^2$ af op

de lijn l .

Stel een vergelijking op van l .

- O 26** Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a** Bereken het beeld van $A(2, -1, 4)$.

- b** Bereken het beeld van $B(x_B, y_B, z_B)$.

Theorie B Lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$

In opgave 26 heb je gezien dat bij de 3×3 -matrix M een lineaire afbeelding hoort die elk punt uit $\mathbb{R}^3$ afbeeldt op een punt uit $\mathbb{R}^3$. Ook bij lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ krijg je te maken met (combinaties van) rotaties, vermenigvuldigingen, spiegelingen en projecties.

Voorbeeld

Het punt $A(10, 2, -5)$ wordt over 45° geroteerd om de z -as. Bereken de coördinaten van het beeld A' .

Uitwerking

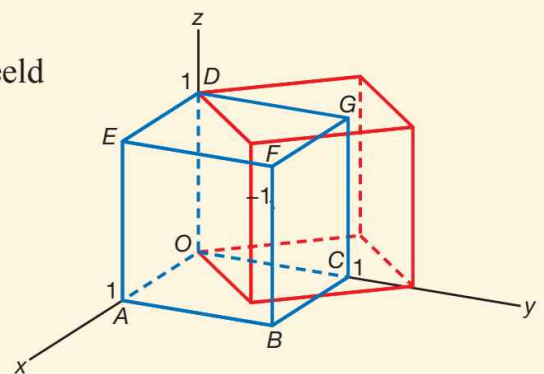
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld

op $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt afgebeeld op $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

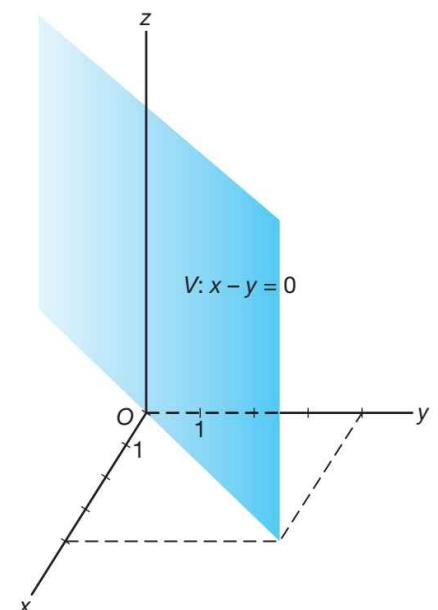
$$\text{Dit geeft } M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Het beeld is $A'(4\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, -5)$.



De kubus $OABC DEFG$ is geroteerd om de z -as over 45° graden.

- 27** De 3×3 -matrix M spiegelt alle punten van $\mathbb{R}^3$ in het vlak $V: x - y = 0$.
- Stel de matrix M op.
 - Waarom is M gelijk aan zijn inverse?
 - Geef M^2 .



figuur 11.1

- 28** Alle punten van $\mathbb{R}^3$ worden achtereenvolgens
- geroteerd over 90° om de z -as
 - vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van het vlak $z = 0$
 - gespiegeld in O .

Verder is gegeven het punt $A(2, 3, 4)$.

- Stel de matrix M op bij deze lineaire afbeelding.
- Bereken het beeld van A .
- Bereken het origineel van A .

- A 29** De lineaire afbeelding A van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ voert achtereenvolgens de volgende transformaties uit:

- rotatie over 45° om de z -as
- vermenigvuldiging met $\sqrt{2}$ ten opzichte van O .

Alle punten van het vlak $V: x + y + z = 1$ worden door A afgebeeld op punten in het vlak W .

Stel een vergelijking op van W .

- D 30** Een lineaire afbeelding projecteert alle punten van $\mathbb{R}^3$ loodrecht op het vlak door de punten $(0, 0, 0)$, $(3, 4, 0)$ en $(3, 4, 1)$.
Stel de matrix M bij deze afbeelding op.

- O 31** Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

- Bereken het beeld van $A(3, -2, 6)$.
- Licht toe dat M alle punten van $\mathbb{R}^3$ afbeeldt op $\mathbb{R}^2$.

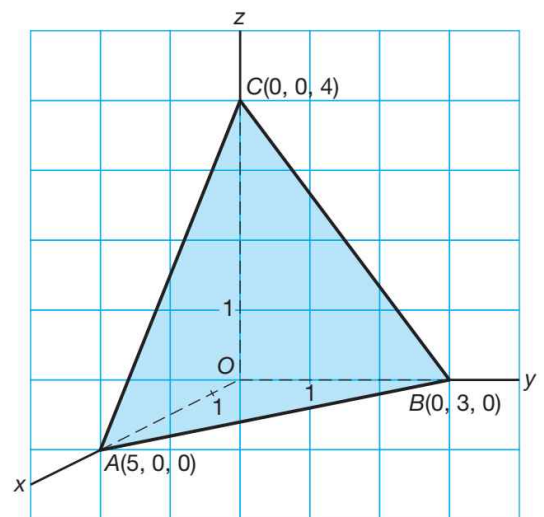
- O 32** In figuur 11.2 is het viervlak $OABC$ met $A(5, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ en $C(0, 0, 4)$ getekend. Je hebt met een ruimtelijke figuur te maken die in het platte vlak is getekend. Als je de figuur opvat als een vlakke figuur in een Oxy -assenstelsel, dan is $A(-2, -1)$, $B(3, 0)$ en $C(0, 4)$. Zo krijg je een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^3$ naar

$\mathbb{R}^2$ met de matrix $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

$$\text{Uit } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ volgt } a = -\frac{2}{5}$$

en $d = -\frac{1}{5}$.

Licht dit toe en bereken b , c , e en f .



figuur 11.2

Theorie C Lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^2$

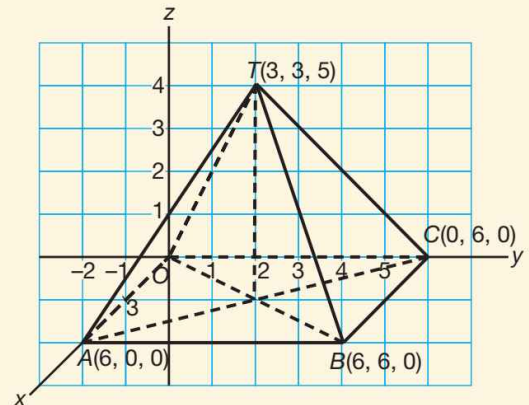
In opgave 32 heb je de elementen van de matrix M berekend die de ruimtelijke figuur $OABC$ afbeeldt op het Oxy -vlak. De matrix kun je vervolgens gebruiken om te berekenen waar in het Oxy -vlak andere punten van $\mathbb{R}^3$ met het gegeven assenstelsel moeten worden getekend. Deze techniek wordt onder andere gebruikt in computerspellen. Daarbij heb je immers vaak te maken met een ruimtelijke voorstelling die op een (vlak) scherm wordt afgebeeld.

Voorbeeld

Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TOABC$ met $A(6, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $T(3, 3, 5)$ in figuur 11.3. Stel de matrix M op die het gegeven ruimtelijk assenstelsel afbeeldt op het Oxy -vlak.

Aanpak

Gebruik dat het beeld van $A(6, 0, 0)$ is $A'(-2, -2)$. Gebruik verder de beelden van de eenheidsvectoren $\vec{e}_y$ en $\vec{e}_z$.



figuur 11.3

Uitwerking

$$\text{Stel } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

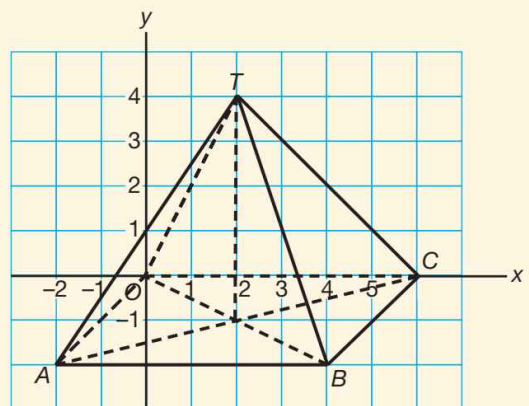
$$M \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ geeft } 6a = -2 \text{ en } 6d = -2,$$

$$\text{dus } a = -\frac{1}{3} \text{ en } d = -\frac{1}{3}.$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft } b = 1 \text{ en } e = 0.$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } c = 0 \text{ en } f = 1.$$

$$\text{Dus } M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



33 Zie het voorbeeld.

Onderzoek met de berekende matrix M of het punt T in figuur 11.3 op de juiste plaats is getekend.

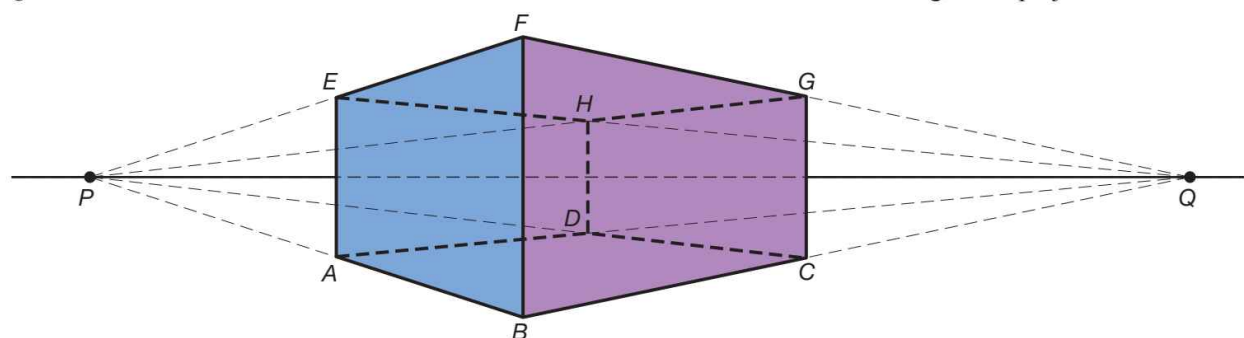
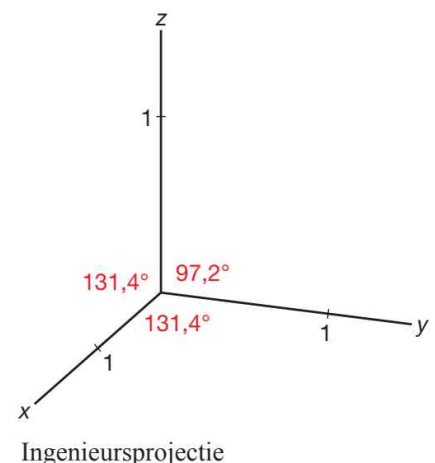
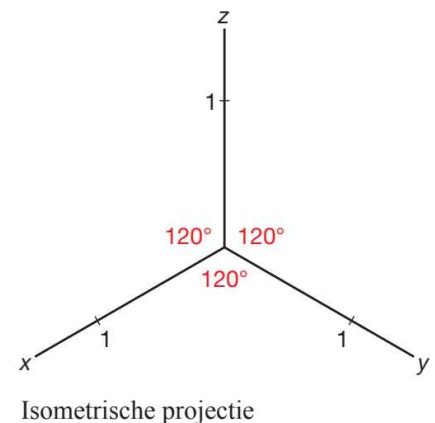
Informatief Parallelprojectie en centrale projectie

De regelmatige vierzijdige piramide in het voorbeeld is getekend in *scheve projectie*. Scheve projectie is een voorbeeld van *parallelprojectie*. Bij parallelprojectie blijft evenwijdigheid behouden. Ook blijven verhoudingen op een lijnstuk behouden. Bij scheve projectie worden twee hoofdrichtingen loodrecht op elkaar getekend; in figuur 11.3 zijn dit de y -as en de z -as. De derde hoofdrichting wordt schuin getekend; in figuur 11.3 is dit de x -as. De ribbe OA is vertekend: de werkelijke lengte is 6, maar in de tekening is de lengte $2\sqrt{2}$. De verhouding $\frac{\text{getekende lengte}}{\text{werkelijke lengte}}$ heet de *verkortingsverhouding* of de *verkorting*. In figuur 11.3 is de verkorting $\frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0,47$. De hoek die de x -as met de negatieve z -as maakt, heet de *wijkhoek* van de scheve projectie. In figuur 11.3 is de wijkhoek 45° .

Een ander voorbeeld van parallelprojectie is de *isometrische projectie*. Bij de isometrische projectie maken de drie hoofdrichtingen in de tekening hoeken van 120° met elkaar. De lengte-eenheden op de drie assen hebben dezelfde verkorting.

Een derde voorbeeld van parallelprojectie dat veel wordt gebruikt is de *ingenieursprojectie*. Bij de ingenieursprojectie maken de drie hoofdrichtingen in de tekening hoeken met elkaar van $131,4^\circ$, $97,2^\circ$ en $131,4^\circ$. De verkortingen in de x -, y - en z -richting verhouden zich als $1 : 2 : 2$.

Bij een *perspectiefafbeelding* heb je te maken met *centrale projectie*. Bij centrale projectie blijft evenwijdigheid niet altijd behouden, en ook verhoudingen op een lijnstuk zijn in de tekening meestal anders dan in werkelijkheid. In de figuur hieronder is de balk $ABCD EFGH$ in perspectief getekend.



Centrale projectie

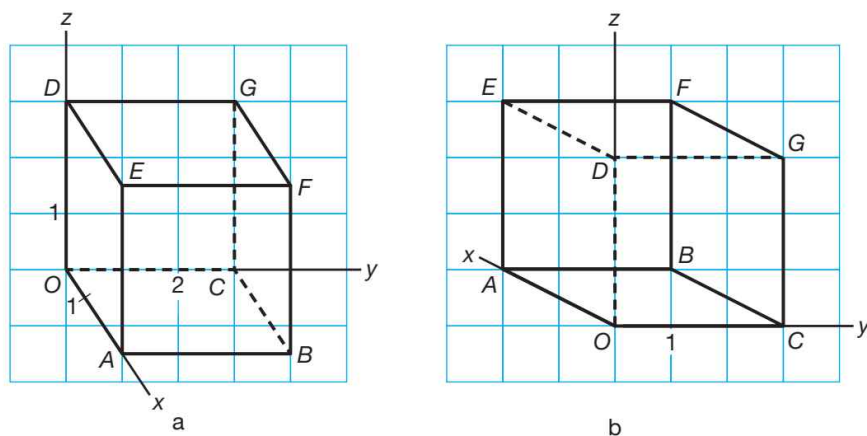
De evenwijdige lijnen AB , CD , EF en GH hebben het *verdwijnpunt* P , en de evenwijdige lijnen AD , BC , EH en FG hebben het verdwijnpunt Q . De lijn PQ heet de *horizon*. Onderzoek eens waar het midden M van AB in de figuur moet worden getekend.

Lees voordat je de opgaven 34, 35 en 36 maakt het informatief Paralleelprojectie en centrale projectie.

- 34** a Stel de matrix M op die bij de isometrische projectie $\mathbb{R}^3$ afbeeldt op $\mathbb{R}^2$.
 b Stel de matrix N op die bij de ingenieursprojectie $\mathbb{R}^3$ afbeeldt op $\mathbb{R}^2$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

R 35 Licht toe waarom je geen matrix op kunt stellen die bij centrale projectie $\mathbb{R}^3$ afbeeldt op $\mathbb{R}^2$.

A 36 In de figuren 11.4a en 11.4b is de kubus $OABC\ DEFG$ met ribbe 3 getekend. Stel bij beide figuren de matrix op die $\mathbb{R}^3$ afbeeldt op $\mathbb{R}^2$.



figuur 11.4

Terugblik

Lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$

Het Oxy -vlak wordt genoteerd met $\mathbb{R}^2$.

Bij elke 2×2 -matrix hoort een afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$. Een afbeelding waar een matrix bij hoort heet een lineaire afbeelding.

Voor lineaire afbeeldingen gelden de regels

- $M \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- $M \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = M \cdot \vec{v} + M \cdot \vec{w}$
- $M \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(M \cdot \vec{v})$

Om de matrix bij een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ te vinden, gebruik je twee onafhankelijke vectoren en hun beelden.

I Gebruik de beelden van de eenheidsvectoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Uit $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ en $M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ volgt $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

II Gebruik de beelden van twee willekeurige punten of vectoren.

Je stelt $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en berekent a , b , c en d door twee stelsels vergelijkingen op te lossen.

Een combinatie van een rotatie om de oorsprong en een vermenigvuldiging ten opzichte van de oorsprong heet een draaivermenigvuldiging. Een draaivermenigvuldiging is een lineaire afbeelding, evenals bijvoorbeeld spiegeling in de x -as, spiegeling in de y -as, spiegeling in de oorsprong, spiegeling in de lijn $y = x$ en loodrechte projectie op de lijn $y = x$.

Je hebt gezien dat een translatie geen lineaire afbeelding is, evenmin als bijvoorbeeld spiegeling in de lijn $x = 3$.

Lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$

Bij een $m \times n$ -matrix hoort een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$.

Zo hoort bij een 3×3 -matrix een lineaire afbeelding die elk punt van $\mathbb{R}^3$ (de ruimte) afbeeldt op een punt in $\mathbb{R}^3$.

En bij een 2×3 -matrix hoort een lineaire afbeelding die elk punt van de ruimte afbeeldt op een plat vlak.

Bij een ruimtelijke figuur die is getekend in een parallelprojectie hoort een lineaire afbeelding waarmee de ruimtelijke coördinaten kunnen worden omgerekend naar coördinaten van het platte vlak waarin de ruimtelijke figuur is getekend.

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

O37 Gegeven is matrix $M = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

- Kies twee punten ongelijk aan O op de lijn k : $2x - 3y = 0$ en bereken van elk van deze punten het beeld.
Wat valt je op?
- Kies twee punten ongelijk aan O op de lijn l : $x - y = 0$ en bereken van elk van deze punten het beeld.
Wat valt je op?

Theorie A Berekenen van eigenwaarden en eigenvectoren

De matrix $M = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ uit opgave 37 beeldt alle punten van de lijnen k : $2x - 3y = 0$ en l : $x - y = 0$ af op de lijn zelf. Bij de lijn k worden alle vectoren die op de lijn liggen vermenigvuldigd met 2. Bij de lijn l worden alle vectoren die op de lijn liggen vermenigvuldigd met -1 . De getallen 2 en -1 heten de **eigenwaarden** van M .

De vectoren die op de lijn k liggen heten de **eigenvectoren** van M die horen bij de eigenwaarde 2. De vectoren die op de lijn l liggen heten de eigenvectoren van M die horen bij de eigenwaarde -1 .

De eigenwaarden van een matrix geven we aan met de Griekse letter λ .
Om eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix M te berekenen bepaal je λ en $\vec{v}$ uit $M \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$.

Bij de matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en de vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ krijg je

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ en dit geeft}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt $\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dit toon je aan in opgave 40.

Het stelsel
 $\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 is ook te noteren als

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Omdat er bij elke waarde van λ oneindig veel eigenvectoren horen,

heeft het stelsel $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oneindig veel

oplossingen. Dit betekent dat de determinant van $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ gelijk is aan 0.

$$\begin{aligned} \text{Omdat } \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \cdot I \end{aligned}$$

I is een eenheidsmatrix.

volgen de eigenwaarden van een matrix M dus uit de vergelijking $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$. De vergelijking $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ heet de **karakteristieke vergelijking** van M .

Nadat de eigenwaarden zijn berekend, volgen de eigenvectoren uit de vergelijking $M \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$.

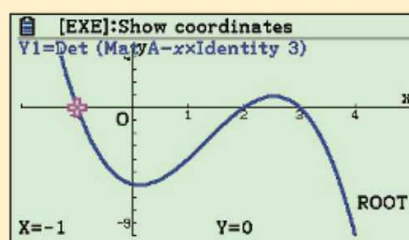
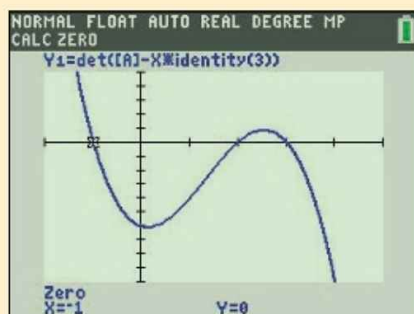
Om bij grotere matrices de eigenwaarden te berekenen kun je handig gebruikmaken van de GR.

Om bij de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -9 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ de eigenwaarden te berekenen

voer je de matrix op de gebruikelijke manier in. Daarna ga je als volgt te werk.

- Op de TI voer je in $y_1 = \det([A] - x \cdot \text{identity}(3))$. De opties det en identity staan in het MATRIX-MATH-menu.
- Op de Casio voer je in $y_1 = \text{Det}(\text{Mat } A - x \cdot \text{Identity}(3))$. De opties Mat, Det en Identity kun je allemaal vinden in de catalogus.

Met identity(3) heb je de 3×3 -eenheidsmatrix ingevoerd. Je vindt de eigenwaarden $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ en $\lambda = 3$ met de optie zero (TI) of ROOT (Casio).



Om vervolgens een eigenvector bij $\lambda = 2$ te berekenen, los je het

$$\text{stelsel } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -9 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ op. Je krijgt } 3x = 2x, \text{ dus } x = 0.$$

Ook krijg je $-5x + 8y - 9z = 2y$. Combineren met $x = 0$ geeft $8y - 9z = 2y$, dus $6y - 9z = 0$ ofwel $2y - 3z = 0$.

$$\text{Dus een bijbehorende eigenvector is } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld

Bereken algebraïsch de eigenwaarden en bijbehorende

$$\text{eigenvectoren van de matrix } M = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Uitwerking

$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 10 \\ 6 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2 - \lambda)(5 - \lambda) - 6 \cdot 10 = 0$$

$$-10 + 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 60 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$$

$$(\lambda + 7)(\lambda - 10) = 0$$

$$\lambda = -7 \vee \lambda = 10$$

$$\text{De eigenvectoren bij } \lambda = -7 \text{ volgen uit } \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -7 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt $-2x + 10y = -7x$ ofwel $5x + 10y = 0$.

$$\text{Dus een eigenvector bij } \lambda_1 = -7 \text{ is } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De eigenvectoren bij } \lambda = 10 \text{ volgen uit } \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt $-2x + 10y = 10x$ ofwel $-12x + 10y = 0$.

$$\text{Dus een eigenvector bij } \lambda_2 = 10 \text{ is } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

R 38 Zie het voorbeeld.

Hoe volgt uit de vergelijking $5x + 10y = 0$ dat $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ een eigenvector is?

- 39** In de theorie staat de volgende zin.

Om eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix M te berekenen bepaal je λ en $\vec{v}$ uit $M \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$.

Hoe volgt uit

Is A een $m \times n$ -matrix en B een $n \times p$ -matrix, dan is $A \cdot B$ een $m \times p$ -matrix.

dat M een vierkante matrix moet zijn?

- 40** Zie de theorie.

Toon aan dat uit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ volgt

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- 41** In de theorie is bij de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -9 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ bij de

eigenwaarde $\lambda = 2$ de eigenvector $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ berekend.

Bereken eigenvectoren bij de eigenwaarden $\lambda = -1$ en $\lambda = 3$.

- 42** Bereken algebraïsch de eigenwaarden en bijbehorende

eigenvectoren van de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

- 43** Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van de

matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

- 44** De matrix M beeldt $A(2, 3)$ op $A'(4, 6)$ en $B(-2, 4)$ op $B'(-1, 2)$ af. Geef de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van M zonder M op te stellen.

- 45** In het voorbeeld is de karakteristieke vergelijking herleid tot $\lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$.

Volgens de stelling van Cayley-Hamilton voldoet elke vierkante matrix aan zijn eigen karakteristieke

vergelijking. Voor de matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ geldt dus

$$M^2 - 3M - 70I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a** Toon aan dat inderdaad geldt $M^2 - 3M - 70I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De stelling van Cayley-Hamilton wordt vaak gebruikt om een inverse matrix te berekenen.

- b** Toon aan dat $M^{-1} = \frac{1}{70}M - \frac{3}{70}I$, en bereken de inverse van M met de stelling van Cayley-Hamilton.
c Bereken M^2 en M^3 met behulp van de stelling van Cayley-Hamilton.

- A 46** **a** Van de matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & p \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ is $\lambda = 2$ een eigenwaarde.

Bereken p en de andere eigenwaarde.

- b** Van de matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ q & 5 \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector.

Bereken q en de eigenwaarden van B .

- D 47** Om de eigenwaarden van een 2×2 -matrix te berekenen moet een tweedegraadsvergelijking worden opgelost. Een 2×2 -matrix heeft dus 0, 1 of 2 eigenwaarden.

Geef bij de volgende afbeeldingen aan of de bijbehorende matrix 0, 1 of 2 eigenwaarden heeft. Licht steeds je antwoord toe.

- a** Vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van O .
b Rotatie om O over 120° .
c Rotatie om O over 180° .
d Spiegeling in een lijn door O .
e Vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x -as en met 3 ten opzichte van de y -as.

O48 Van de matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ zijn de eigenwaarden $\lambda_1 = -7$

en $\lambda_2 = 10$. Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

We definiëren nu de matrices $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ en

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

- a Ga met de GR na dat $P \cdot D \cdot P^{-1} = M$.
- b Ga met de GR na dat $P \cdot D^2 \cdot P^{-1} = M^2$.
- c Er geldt $M^3 = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1}$.
Hoe volgt hieruit dat $M^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$?

Theorie B Een matrix diagonaliseren

In opgave 48 heb je gezien dat de matrix M geschreven kan worden

in de vorm $P \cdot D \cdot P^{-1}$. Hierin is $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ een diagonaalmatrix

met op de hoofddiagonaal de eigenwaarden van M , en is P een matrix waarvan de kolommen bijbehorende eigenvectoren zijn. Het schrijven van een matrix in de vorm $P \cdot D \cdot P^{-1}$ heet het **diagonaliseren van de matrix**. Bij het rekenen met matrices is het soms nodig om matrices eerst te diagonaliseren. De formule $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ kun je ook gebruiken om de matrix M op te stellen waarvan de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren bekend zijn. Diagonaliseren wordt ook gebruikt om stellingen over matrices aan te tonen.

Niet alle vierkante matrices zijn diagonaliseerbaar. In de opgaven krijg je te maken met matrices die diagonaliseerbaar zijn. Voor een 2×2 -matrix betekent dit dat de matrix twee eigenwaarden heeft waarvan de bijbehorende eigenvectoren niet op dezelfde lijn liggen.

Als een $n \times n$ -matrix M diagonaliseerbaar is dan geldt $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Hierin is D een diagonaalmatrix met op de hoofddiagonaal de eigenwaarden en P een matrix die bestaat uit bijbehorende eigenvectoren.

Met behulp van diagonaliseren is het mogelijk om bij een matrix M de elementen van M^n uit te drukken in n , met $n \in \mathbb{Z}$.

Machten van een diagonaliseerbare matrix M bereken je met de regel $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.

Hierin is D^n de diagonaalmatrix met op de hoofddiagonaal de n^e machten van de eigenwaarden van M .

Voorbeeld

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Bereken M^n .

Uitwerking

$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 12 \\ -1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1 - \lambda)(6 - \lambda) - 12 \cdot -1 = 0$$

$$-6 + \lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 2$ volgen uit $\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $-x + 12y = 2x$ ofwel $-3x + 12y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 2$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 3$ volgen uit $\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $-x + 12y = 3x$ ofwel $-4x + 12y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 3$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ geeft } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & -3 \cdot 2^n \\ -3^n & 4 \cdot 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n & -12 \cdot 2^n + 12 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In opgave 53 ga je met behulp van diagonaliseren de stelling van Cauchy-Binet bewijzen.

Stelling van Cauchy-Binet

Voor de $n \times n$ -matrix M met de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ geldt $\det(M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

In opgave 57 ga je met behulp van diagonaliseren de stelling van Cayley-Hamilton bewijzen voor een 2×2 -matrix.

Stelling van Cayley-Hamilton

Elke vierkante matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking.

- 49 Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde.
- Controleer het antwoord door $n = 0$ en $n = 1$ in te vullen.
 - Hoe kun je het antwoord controleren door $n = -1$ in te vullen?

50 Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 10 & -13 \end{pmatrix}$.

Bereken M^n .

- 51 De matrix M heeft de eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 5$.

Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Stel de matrix M op.
- Bereken M^n .

- 52 De matrix M beeldt $A(2, 3, 4)$ af op $A'(4, 6, 8)$, $B(-2, 4, 5)$ op $B'(4, -8, -10)$ en $C(2, 0, 0)$ op $C'(10, 0, 0)$.
Geef de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van M en stel de matrix M op.

- 53 In deze opgave mag je gebruiken dat $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
Uit $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ volgt $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$.
- Bewijs dit.
 - Volgens de stelling van Cauchy-Binet geldt voor een $n \times n$ -matrix M met de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dat $\det(M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.
Bewijs dit.

54 De matrix M beeldt $A(5, 8, -4)$ op $A'(15, 24, -12)$ en $B(-3, 6, 9)$ op $B'(6, -12, -18)$ af. Verder is gegeven dat $\det(M) = 24$.

- Bereken de eigenwaarden van M .
- Licht toe dat je met bovenstaande gegevens niet het beeld van alle punten van $\mathbb{R}^3$ kunt berekenen, maar wel bijvoorbeeld het beeld van het punt C waarvoor geldt $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.
- Alle punten waarvan je het beeld kunt berekenen liggen in het vlak V .
Stel een vergelijking op van V .

A 55 Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} & -3 \\ 1\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

- Schrijf de matrix M in de vorm $P \cdot D \cdot P^{-1}$.
- Bereken M^n .
- Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$.

A 56 Gegeven is de 2×2 -matrix M met de eigenwaarden $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ en $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Licht toe $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} (M + M^2 + M^3 + \dots + M^n)$.

D 57 Volgens de stelling van Cayley-Hamilton voldoet elke vierkante matrix aan zijn eigen karakteristieke vergelijking.
Bewijs deze stelling voor een 2×2 -matrix met behulp van diagonaliseren.

D 58 Bewijs dat voor een 3×3 -matrix M met de eigenwaarden a , b en c geldt

$$M^{-1} = \frac{1}{abc}M^2 - \frac{a+b+c}{abc}M + \frac{ab+ac+bc}{abc}I.$$

Hierin is I de 3×3 -eenheidsmatrix. Gebruik bij je bewijs de stelling van Cayley-Hamilton.

Terugblik

Eigenwaarden en eigenvectoren

Er zijn 2×2 -matrices die alle punten van een lijn door de oorsprong op deze lijn afbeelden. De vectoren die op die lijn liggen, worden door de matrix vermenigvuldigd met een getal. Zo'n getal heet een eigenwaarde van de matrix en de vectoren die op de lijn liggen heten eigenvectoren van de matrix.

Bij de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ vind je de eigenwaarden $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 5$ en bijbehorende

eigenvectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als volgt.

- Los de vergelijking $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ op. Je krijgt $\lambda = -1 \vee \lambda = 5$.
- Uit $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ volgt $2x + y = 0$, dus een eigenvector bij $\lambda_1 = -1$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- Uit $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ volgt $x - y = 0$, dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 5$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De vergelijking $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ wordt ook genoteerd als $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ waarin I

de 2×2 -eenheidsmatrix is. De vergelijking $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ heet de karakteristieke vergelijking van M . Bij grotere matrices dan een 2×2 -matrix los je de karakteristieke vergelijking op met de GR. Je voert dan in $y_1 = \det([A] - x \cdot \text{identity}(n))$ (TI) of $y_1 = \text{Det}(\text{Mat } A - x \cdot \text{Identity}(n))$ (Casio) waarbij n het aantal rijen (en kolommen) is van M . Vervolgens los je de vergelijking $y_1 = 0$ op, waarmee je de eigenwaarden vindt.

Een matrix diagonaliseren

Als een $n \times n$ -matrix M diagonaliseerbaar is dan geldt $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Hierin is D de diagonaalmatrix met op de hoofddiagonaal de eigenwaarden, en is P een matrix die bestaat uit bijbehorende eigenvectoren.

Bij de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ horen dus $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Uit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ volgt $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dus geldt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Met de regel $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ zijn machten van een diagonaliseerbare matrix M te

berekenen. Omdat $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ krijg je bij de matrix M hierboven

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2 \cdot 5^n & -(-1)^n + 5^n \\ -2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 5^n & 2 \cdot (-1)^n + 5^n \end{pmatrix}.$$

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen

O59 Je weet dat $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Omdat je een matrix M kunt opvatten als een functie, geldt ook

$$e^M = I + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$$

Heb je te maken met de matrix $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, dan krijg je

$$e^D = I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots$$

- a** Bereken $I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots + \frac{D^9}{9!}$. Je krijgt een matrix van de vorm $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Geef a in drie decimalen nauwkeurig en b in één decimaal nauwkeurig.

Bewering: $e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$.

- b** Bereken e^2 in drie decimalen nauwkeurig en e^3 in één decimaal nauwkeurig.
Wat denk je, klopt de bewering?

Theorie A De machtreeks van een matrix

Het is mogelijk machten van de vorm a^M te berekenen, waarbij M een matrix is. Voorwaarde hierbij is dat er een machtreeks voor a^x bestaat.

Voor e^x ken je de machtreeks $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Met een $n \times n$ -matrix M als exponent geeft dit dus

$$e^M = I + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$$

Hierin is I de $n \times n$ -eenheidsmatrix, en geldt $M^0 = I$.

Voor de diagonaalmatrix $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ geeft dit

$$\begin{aligned}
 e^D &= I + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots \\
 &= I + \frac{1}{1!}D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \dots \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} + \dots \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Zoals je ziet krijg je bij een e -macht met als exponent een diagonaalmatrix altijd een nieuwe diagonaalmatrix. Hierin staan op de diagonaal e -machten met als exponenten de elementen van de oorspronkelijke matrix. Dit principe kun je gebruiken om e^M te berekenen als M een diagonaliseerbare matrix is.

Je krijgt

$$\begin{aligned}
 e^M &= e^{P \cdot D \cdot P^{-1}} \\
 &= I + \frac{1}{1!} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} + \frac{1}{2!} \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1})^2 + \frac{1}{3!} \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1})^3 + \dots \\
 &= P \cdot I \cdot P^{-1} + P \cdot \left(\frac{1}{1!} D \right) \cdot P^{-1} + P \cdot \left(\frac{1}{2!} D^2 \right) \cdot P^{-1} + P \cdot \left(\frac{1}{3!} D^3 \right) \cdot P^{-1} + \dots \\
 &= P \cdot \left(I + \frac{1}{1!} D + \frac{1}{2!} D^2 + \frac{1}{3!} D^3 + \dots \right) \cdot P^{-1} \\
 &= P \cdot e^D \cdot P^{-1} \\
 &= P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}
 \end{aligned}$$

Door gebruik te maken van de machtreeks van de sinus kun je op deze wijze ook de sinus van een matrix M berekenen. Op de hoofddiagonaal van de diagonaalmatrix is dan elk element de sinus van de bijbehorende eigenwaarde.

Voorbeeld

Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Bereken e^M .

Uitwerking

$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} -6 - \lambda & 12 \\ -6 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-6 - \lambda)(11 - \lambda) - 12 \cdot -6 = 0$$

$$-66 + 6\lambda - 11\lambda + \lambda^2 + 72 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

De eigenvectoren bij $\lambda = 2$ volgen uit $\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $-6x + 12y = 2x$ ofwel $-8x + 12y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 2$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 3$ volgen uit $\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $-6x + 12y = 3x$ ofwel $-9x + 12y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = 3$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dus $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e^2 & -4e^2 \\ -2e^3 & 3e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9e^2 - 8e^3 & -12e^2 + 12e^3 \\ 6e^2 - 6e^3 & -8e^2 + 9e^3 \end{pmatrix}$$

Informatief Eigenwaarde

Het begrip eigenwaarde wordt in het Engels vertaald als *eigenvalue*. Dit is te danken aan de Duitse wiskundige David Hilbert, die de term *eigenwert* in 1904 als eerste gebruikte. Ook in de psychologie komt het begrip eigenwaarde voor. Het verwijst daar naar het beeld dat mensen van zichzelf hebben. Een positieve eigenwaarde is belangrijk voor het psychisch welzijn.

Veel psychologen achten het ook van belang dat de eigenwaarde realistisch is: een te hoge eigenwaarde kan leiden tot zelfoverschatting, terwijl een te lage eigenwaarde gevoelens van minderwaardigheid in de hand kan werken.

60 Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a Bereken e^M .
- b Bereken $\sin(M)$.

61 Gegeven is de 2×2 -matrix M met de eigenwaarden $\lambda_1 = \ln(2)$

en $\lambda_2 = \ln(3)$. Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a Bereken M .
- b Bereken e^M .
- c Geef de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van $2M$.
- d Onderzoek of geldt $e^M \cdot e^M = e^{2M}$.

A62 Gegeven is de 2×2 -matrix M met de eigenwaarden $\lambda_1 = \frac{1}{2}\pi$ en

$\lambda_2 = -\pi$. Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a Bereken M .
- b Bereken $\sin(M)$.
- c Bereken $\cos(M)$.
- d Onderzoek of geldt $\sin^2(M) + \cos^2(M) = I$.
- e Bereken $\sin(2M)$ en onderzoek of geldt $\sin(2M) = 2 \sin(M) \cos(M)$.

O63 Gegeven is de differentievergelijking $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} - 3x_{n-3}$ met $x_0 = 0$ en $x_1 = x_2 = 1$.

- a Bereken x_3 en x_4 .

b Licht toe dat $\begin{pmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en bereken hiermee x_5 .

- c Licht toe dat je x_5 ook kunt berekenen met

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Theorie B Van differentievergelijking naar matrixvermenigvuldiging

De differentievergelijking $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} - 3x_{n-3}$ uit opgave 63

kun je omzetten naar het stelsel $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} - 3x_{n-3} \\ x_{n-1} = x_{n-1} \\ x_{n-2} = x_{n-2} \end{cases}$ en dit

stelsel kun je vervolgens noteren met een matrixvermenigvuldiging.

$$\text{Je krijgt } \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Stel je } \vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} \text{ en } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan is de}$$

differentievergelijking te noteren in de vorm $\vec{v}_n = M \cdot \vec{v}_{n-1}$.

Elke lineaire differentievergelijking van de n^e orde is op deze manier te noteren als een matrixvermenigvuldiging. Om direct x_n te berekenen, vermenigvuldig je de vector waarin de beginwaarden staan met een macht van M .

Zo is bij de differentievergelijking uit opgave 63

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^8 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Dus $x_{10} = -37$.

$$\text{Algemeen is } \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = M^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Het verschil
van de indices.

Door bovendien gebruik te maken van diagonaliseren, kun je zo ook x_n berekenen. Je hebt dan de directe formule van de differentievergelijking gevonden.

Voorbeeld

Gegeven is de differentievergelijking $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ met $x_0 = 0$ en $x_1 = 1$.

Stel de directe formule van x_n op.

Uitwerking

De differentievergelijking is te noteren als $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$.

De eigenwaarden van $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zijn $\lambda = 3$ en $\lambda = -1$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 3$ volgen uit $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $2x + 3y = 3x$ ofwel $-x + 3y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_1 = 3$ is $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De eigenvectoren bij $\lambda = -1$ volgen uit $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Hieruit volgt $2x + 3y = -x$ ofwel $3x + 3y = 0$.

Dus een eigenvector bij $\lambda_2 = -1$ is $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dus $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^{n-1} & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n - (-1)^n \\ 3^{n-1} - (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$.

Dus $x_n = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)$.

Voor de overzichtelijkheid is de berekening van de eigenwaarden niet opgenomen in de uitwerking.

- 64** Gegeven is de differentievergelijking $x_n = x_{n-1} - 2x_{n-2} + 3x_{n-3} - 4x_{n-4}$ met $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ en $x_3 = 3$.
Bereken x_{20} .

- 65** Gegeven is de differentievergelijking $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ met $x_0 = 0$ en $x_1 = 1$.
Stel de directe formule van x_n op.

66 Gegeven is het stelsel differentievergelijkingen
$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1} - z_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n = 3x_{n-1} - 2y_{n-1} + z_{n-1} \end{cases}$$

met $x_0 = 100$, $y_0 = 1500$ en $z_0 = 800$.

Er bestaat een matrix M waarvoor geldt
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Geef M .
- Bereken x_{10} , y_{10} en z_{10} met behulp van M .

A 67 Bij het onderzoek naar het verloop van epidemieën wordt vaak gebruikgemaakt van matrices.

In een populatie is een besmettelijke ziekte uitgebroken.

De populatie wordt in drie klassen verdeeld:

- de nog gezonde, maar wel voor de ziekte vatbare exemplaren V
- de besmettelijke, zieke exemplaren Z
- de immune exemplaren I .

Over het verloop van deze epidemie is het volgende bekend:

- wekelijks wordt 20% van de gezonde, maar wel voor de ziekte vatbare exemplaren ziek
- van de zieken geneest wekelijks 30%, deze exemplaren worden immuun.

Op tijdstip $t = n$ met t in weken zijn er V_n vatbare, Z_n zieke en I_n immune exemplaren. Verder is gegeven $V_0 = 9500$, $Z_0 = 500$ en $I_0 = 0$.

a Stel de matrix M op waarvoor geldt
$$\begin{pmatrix} V_n \\ Z_n \\ I_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} V_{n-1} \\ Z_{n-1} \\ I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van M .
- Gebruik de directe formule van Z_n om het maximale aantal zieken te berekenen.

D 68 Je hebt gezien dat de matrix M in opgave 67 een eigenwaarde heeft die gelijk is aan 1. Dit is een voorbeeld van de regel:

Als van elke kolom van matrix M de som van de getallen gelijk is aan 1, dan is minimaal één van de eigenwaarden gelijk aan 1.

Bewijs deze regel voor de matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$

A 69 Een snelheidscontroleteam van de politie staat afwisselend een hele dag op een van de punten A , B , C of D . Waar het team op een bepaalde dag gaat staan, hangt af van de plaats van de vorige dag. Zo kun je in de tabel zien dat als het team op een bepaalde dag in C heeft gestaan, de kans dat het team de volgende dag in D staat gelijk is aan 0,5.

De kansen voor dag n geven we aan met A_n , B_n , C_n en D_n . In deze opgave gaan we uit van een team dat op dag 0 in A staat, dus $A_0 = 1$ en $B_0 = C_0 = D_0 = 0$.

Er bestaat een matrix M waarvoor geldt

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \\ C_{n-1} \\ D_{n-1} \end{pmatrix}.$$

		van			
naar		A	B	C	D
	A	0	0,5	0,3	0,1
	B	0,1	0	0,2	0,1
	C	0,2	0,3	0	0,8
	D	0,7	0,2	0,5	0

- Geef M .
- Bereken de kans dat het team op dag 2 weer in A staat.
- Bereken de kans dat het team op dag 5 in D staat.

Door op de GR de matrix M tot steeds hogere machten te verheffen, kun je zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ bestaat.

- Geef $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$. Rond af op drie decimalen.
- Geef met behulp van het antwoord van vraag d minimaal één eigenwaarde en een bijbehorende eigenvector van M .
- Het team is 200 dagen per jaar actief.
Hoeveel dagen per jaar verwacht je dat het team in A staat?



Terugblik

De machtreeks van een matrix

Net als van andere functies kun je ook van een matrix een machtreeks

noteren. Zo horen de machtreeksen $e^M = I + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$ en

$\sin(M) = M - \frac{M^3}{3!} + \frac{M^5}{5!} - \frac{M^7}{7!} + \dots$ bij de matrix M .

$$\text{Er geldt } e^M = e^{P \cdot D \cdot P^{-1}} = P \cdot e^D \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Hierin is P een matrix die bestaat uit de n eigenvectoren en D de diagonaalmatrix met op de hoofddiagonaal de bijbehorende eigenwaarden.

Bij de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ horen $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ en

$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, zodat

$$e^M = P \cdot e^D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{e} + 2e^5 & e^5 - \frac{1}{e} \\ 2e^5 - \frac{2}{e} & \frac{2}{e} + e^5 \end{pmatrix}.$$

Differentievergelijkingen en matrixvermenigvuldiging

De differentievergelijking $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + cx_{n-3}$ is te noteren met de volgende matrixvermenigvuldiging.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} \text{ ofwel } \vec{v}_n = M \cdot \vec{v}_{n-1} \text{ met } \vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} \text{ en } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Algemeen is } \vec{v}_n = M^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Bij de differentievergelijking $x_n = 2x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$ met $x_0 = 10$, $x_1 = 6$ en $x_2 = 8$ bereken je x_{15} met de matrixvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix} x_{15} \\ x_{14} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{13} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}. \text{ Je krijgt } \begin{pmatrix} x_{15} \\ x_{14} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 274 \\ 464 \\ 106 \end{pmatrix}, \text{ dus } x_{15} = 274.$$

Diagnostische toets

11.2 Lineaire afbeeldingen

- 1
 - a Het punt $A(6, 3)$ wordt ten opzichte van de x -as met 5 vermenigvuldigd en geroteerd over 135° om de oorsprong. Bereken de coördinaten van het beeld A' .
 - b Het punt $B(6, 8)$ wordt om de oorsprong geroteerd over 60° en vervolgens gespiegeld in de y -as. Bereken de coördinaten van het beeld B' .
 - c Het punt $C(1, 2)$ wordt loodrecht geprojecteerd op de lijn $y = x$ en vervolgens gespiegeld in de x -as. Bereken de coördinaten van het beeld C' .
- 2
 - a Stel de matrix M op die het punt $A(2, 1)$ afbeeldt op $A'(4, 2)$ en het punt $B(1, 3)$ op $B'(-3, 11)$.
 - b Het punt $B(3, -1)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = 1\frac{1}{2}x$. Bereken de coördinaten van het beeld B' .
- 3 Alle punten van $\mathbb{R}^3$ worden achtereenvolgens
 - geroteerd over -90° om de z -as
 - gespiegeld in het vlak $z = 0$
 - vermenigvuldigd met -4 ten opzichte van de oorsprong.
 - a Stel de matrix M op bij deze lineaire afbeelding.
 - b Bereken het beeld van $A(1, 2, 3)$.
 - c Bereken het origineel van $B(-2, -1, 3)$.
- 4 Stel de matrix M op die $A(2, 1, 0)$ afbeeldt op $A'(2, 1)$, $B(-2, 3, 0)$ op $B'(-6, 2)$ en $C(1, 1, 2)$ op $C'(3, 4)$.

11.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

- 5 Bereken algebraïsch de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van de matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
- 6 Van de matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 3 \end{pmatrix}$ zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eigenvectoren. Bereken a en b .
- 7 Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van de matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- 8** De 2×2 -matrix M heeft eigenwaarden $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = -2$.

Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- a Stel de matrix M op.
- b Bereken M^n .

11.4 Machtreeksen en differentievergelijkingen

- 9** De 2×2 -matrix M heeft eigenwaarden $\lambda_1 = \ln(4)$ en $\lambda_2 = \ln(9)$.

Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a Bereken e^M .
- b Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van e^M . Wat valt je op?
- c Waarom had je de antwoorden van vraag b ook zonder berekening kunnen geven?

- 10** Gegeven is de differentievergelijking $x_n = x_{n-2} - 2x_{n-3} + x_{n-4}$ met $x_0 = 4$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ en $x_3 = 1$.
Bereken x_{15} .

- 11** Gegeven is het stelsel differentievergelijkingen

$$\begin{cases} A_n = 0,3A_{n-1} + 0,2B_{n-1} + 0,4C_{n-1} \\ B_n = 0,4A_{n-1} + 0,4B_{n-1} + 0,2C_{n-1} \\ C_n = 0,3A_{n-1} + 0,4B_{n-1} + 0,4C_{n-1} \end{cases} \text{ met}$$

$$A_0 = 400, B_0 = 250 \text{ en } C_0 = 350.$$

Bereken A_{20} , B_{20} en C_{20} . Rond af op gehele.

Wachten duurt lang, en veel mensen denken dat ze altijd in de verkeerde rij staan. Je hebt wachtrijen bij incheckbalies op het vliegveld en bij de kassa's in de supermarkt, maar ook bij de helpdesk van je internetprovider en bij de belastingtelefoon. In de wiskunde is de wachttijdtheorie ontwikkeld, waarmee het wachtproces kan worden beschreven.

Wat leer je?

- Wat continue kansverdelingen zijn.
- De definitie van de kansdichtheid en de verdelingsfunctie.
- Rekenen met normaal verdeelde toevalsvariabelen.
- Combineren van de normale en de binomiale verdeling.
- Wat de centrale limietstelling inhoudt.
- Rekenen met de exponentiële verdeling, wachttijden en de gammaverdeling.



Continue kansverdelingen

12



Voorkennis Discrete stochasten

Theorie A De verwachtingswaarde van een discrete stochast

Een stochast (toevalsvariabele) die alleen losse waarden kan aannemen is een discrete stochast. De kansverdeling van een discrete stochast is een tabel met alle mogelijke waarden van de stochast en de bijbehorende kansen.

Voorbeeld

Experiment: het gooien met vier dobbelstenen.

X = het aantal zessen dat je gooit.

Stel de kansverdeling van X op.

Uitwerking

$$P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{150}{1296}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{1296}$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$$

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

Bij de discrete stochast X met uitkomsten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ hoort de

verwachtingswaarde $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i)$.

Bij de stochast X van het voorbeeld hoort dus

$$E(X) = 0 \cdot \frac{625}{1296} + 1 \cdot \frac{500}{1296} + 2 \cdot \frac{150}{1296} + 3 \cdot \frac{20}{1296} + 4 \cdot \frac{1}{1296} = \frac{864}{1296} = \frac{2}{3}.$$

Heb je te maken met een spel met vier dobbelstenen waarbij de inleg 10 euro is en de uitbetaling

- 2500 euro bij het gooien van 4 zessen
 - 125 euro bij het gooien van 3 zessen
 - 15 euro bij het gooien van 2 zessen
 - 5 euro bij het gooien van 1 zes
 - niets bij het gooien van geen enkele zes,
- dan hoort daarbij de kansverdeling op de volgende bladzijde.

u	0	5	15	125	2500
$P(U = u)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

Hierbij is U de uitbetaling per spel.

Je krijgt

$$E(U) = 0 \cdot \frac{625}{1296} + 5 \cdot \frac{500}{1296} + 15 \cdot \frac{150}{1296} + 125 \cdot \frac{20}{1296} + 2500 \cdot \frac{1}{1296} = \frac{9750}{1296} = 7,52 \text{ euro.}$$

De verwachtingswaarde van de winst van een speler is dus $7,52 - 10 = -2,48$ euro. Per spel kan een speler dus gemiddeld een verlies van €2,48 verwachten.

- 1 Bij een spel met vijf viervlaksdobbelstenen is de inleg 10 euro. De uitbetaling is als volgt.

- 3000 euro bij het gooien van 5 vieren
- 200 euro bij het gooien van 4 vieren
- 30 euro bij het gooien van 3 vieren
- niets bij het gooien van minder dan 3 vieren.

Bereken de winstverwachting per spel van een speler.

Theorie B De binomiale verdeling

Bij een binomiaal kansexperiment voer je hetzelfde Bernoulli-experiment een aantal keren uit. Dit aantal geven we aan met n en de kans op succes geven we aan met p . X is het aantal keer succes dat hierbij optreedt. We noemen X een binomiale toevalsvariabele en zeggen dat X binomiaal verdeeld is.

Een Bernoulli-experiment is een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenissen succes en mislukking let.

Bij een binomiale toevalsvariabele X met parameters n en p is de

kans op k keer succes gelijk aan $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.

Bij een binomiaal kansexperiment gebruiken we de notaties $P(X = k) = \text{binompdf}(n, p, k)$ en $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n, p, k)$.

Werkschema: binomiale kansen berekenen

- 1 Omschrijf de betekenis van de toevalsvariabele X .
- 2 Noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .
- 3 Noteer de gevraagde kans met X en herleid deze kans tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt.
- 4 Bereken de gevraagde kans met de GR.

Voorbeeld

Van de Nederlanders heeft 41,8% bloedgroep A en 8,5% bloedgroep B.

Bereken de kans dat van 50 willekeurig gekozen Nederlanders

- a er minder dan 3 bloedgroep B hebben
- b er meer dan 30 bloedgroep A hebben
- c minstens de helft bloedgroep A of B heeft.

Uitwerking

- a X = het aantal met bloedgroep B.

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,085$.

$$P(X < 3) = P(X \leq 2) = \text{binomcdf}(50, 0.085, 2) \approx 0,191$$

- b Y = het aantal met bloedgroep A.

Y is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,418$.

$$P(Y > 30) = 1 - P(Y \leq 30) = 1 - \text{binomcdf}(50, 0.418, 30) \approx 0,003$$

- c Z = het aantal met bloedgroep A of B.

Z is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,418 + 0,085 = 0,503$.

$$P(Z \geq 25) = 1 - P(Z \leq 24) = 1 - \text{binomcdf}(50, 0.503, 24) \approx 0,573$$

Bij de Casio fx-CG20 kun je vraag b berekenen met `BinomialCD(31, 50, 50, 0.418)`.

- 2 Van de Nederlanders heeft 3,0% bloedgroep AB en 46,7% bloedgroep O.
Bereken de kans dat van 100 willekeurig gekozen Nederlanders
- a niemand bloedgroep AB heeft
 - b er minstens drie bloedgroep AB hebben
 - c meer dan de helft bloedgroep O heeft
 - d er minder dan 40 bloedgroep AB of bloedgroep O hebben.

- 3 Van de volwassen Nederlanders heeft 47% overgewicht (een BMI tussen 25 en 30) en 12% ernstig overgewicht (een BMI van 30 of meer).
Bereken de kans dat
- a in een steekproef van 150 volwassenen er meer dan 80 overgewicht hebben
 - b in een steekproef van 320 volwassenen er minder dan 180 overgewicht of ernstig overgewicht hebben
 - c van 30 willekeurig gekozen volwassenen er niemand ernstig overgewicht heeft.

BMI is de afkorting van Body Mass Index en wordt berekend met de formule

$$BMI = \frac{G}{L^2}. \text{ Hierin is } G \text{ het gewicht in kg en } L \text{ de lengte in meter.}$$

Theorie C De poissonverdeling

Er is sprake van een poissonverdeling als een kansexperiment met een zeer kleine kans op succes een zeer groot aantal keren wordt uitgevoerd. Volgens de poissonverdeling is de kans op k keer succes

$$\text{gelijk aan } P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Hierin is λ het gemiddelde aantal keren succes.

De binomiale verdeling met zeer grote n en zeer kleine p is te benaderen door de poissonverdeling. Je gebruikt de poissonverdeling als alleen het gemiddelde aantal keren succes bekend is.

Met de GR bereken je kansen bij de poissonverdeling

- op de TI met $\text{poissonpdf}(\lambda, k)$ en $\text{poissoncdf}(\lambda, k)$
- op de Casio met $\text{PoissonPD}(k, \lambda)$ en $\text{PoissonCD}(k, \lambda)$.

Let op de volgorde waarin het gemiddelde λ en het aantal keren succes k moet worden ingevoerd.

Voorbeeld

In Nederland stormt het gemiddeld 1,5 keer per jaar zo hard, dat er voor meer dan 5 miljoen euro schade ontstaat.

- Bereken exact de kans dat er volgend jaar twee van deze stormen voorkomen.
- Bereken de kans dat er de komende vijf jaar elk jaar minstens één zo'n storm voorkomt.
- Bereken de kans dat er de komende drie jaar in totaal meer dan vijf van deze stormen voorkomen.

Uitwerking

- X = het aantal stormen in het volgende jaar.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 1,5$.

$$P(X = 2) = e^{-1,5} \cdot \frac{1,5^2}{2!} = \frac{1}{8} e^{-1,5} = \frac{9}{8e\sqrt{e}}$$

- X = het aantal stormen in het komende jaar.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 1,5$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1,5} \cdot \frac{1,5^0}{0!} = 1 - e^{-1,5}$$

$$P(\text{de komende vijf jaar elk jaar minstens één storm}) = (1 - e^{-1,5})^5 \approx 0,283$$

- X = het aantal stormen in de komende drie jaar.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 3 \cdot 1,5 = 4,5$.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \text{poissoncdf}(4,5, 5) \approx 0,297$$

- In een gebied waar aardgas wordt gewonnen zijn jaarlijks gemiddeld acht aardbevingen van meer dan 2,0 op de schaal van Richter.

- Bereken exact de kans dat er in een jaar twee van deze aardbevingen zijn.
- De kans dat er in een jaar n van deze aardbevingen zijn, is groter dan 10%. Bereken de waarden van n .
- Bereken de kans dat er hoogstens 10 van deze aardbevingen in een jaar zijn.
- Bereken de kans dat er in de komende drie jaar elk jaar hoogstens 7 van deze aardbevingen zijn.
- Bereken de kans dat er in de komende vier jaar in totaal hoogstens 30 van deze aardbevingen zijn.



Een gestutte woning in Groningen.

12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie

O 1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Bereken $\int_1^{10} f(x) dx$, $\int_1^{100} f(x) dx$ en $\int_1^{1000} f(x) dx$.

Theorie A Oneigenlijke integralen

In figuur 12.1 zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ voor $x > 0$.

Het vlakdeel V wordt begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 1$.

Aan de rechterkant heeft V geen grens. Daarom noemen we V een **open vlakdeel**. We vragen ons af of de oppervlakte van V oneindig groot is.

We berekenen daartoe $\int_1^t \frac{1}{x^2} dx$ en onderzoeken of

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \text{ bestaat.}$$

$$\text{Je krijgt } \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \int_1^t x^{-2} dx = [-x^{-1}]_1^t = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1 \text{ en}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 0 + 1 = 1.$$

Het open vlakdeel V heeft oppervlakte 1.

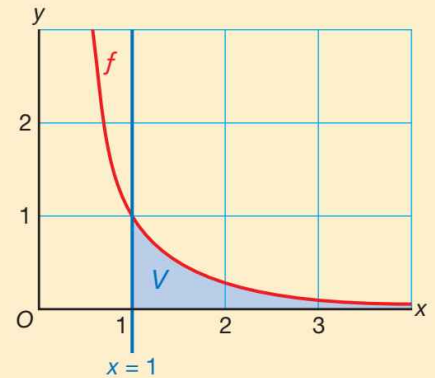
$$\text{Notatie: } O(V) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx \text{ en } \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

De integraal $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ is een voorbeeld van een **oneigenlijke integraal**.

Bij het berekenen van een oneigenlijke integraal gebruik je een limiet. Als deze limiet bestaat heet de integraal **convergent**.

Bestaat de limiet niet, dan is de integraal **divergent**.



figuur 12.1

Voorbeeld

Bereken zo mogelijk de integraal $\int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} dx$.

Uitwerking

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{4}}^t x^{-2\frac{1}{2}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{4}}^t =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-2}{3t\sqrt{t}} \right]_{\frac{1}{4}}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{3t\sqrt{t}} + \frac{2}{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} \right) = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

2 Bereken zo mogelijk de volgende integralen.

a $\int_{\frac{1}{9}}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

d $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-3)^2} dx$

b $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

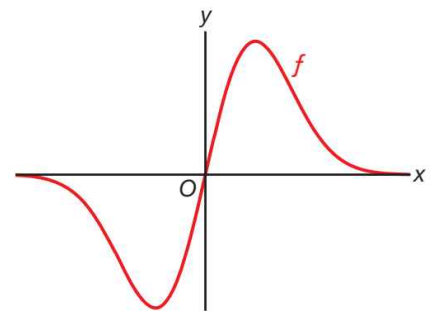
e $\int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3\sqrt{x}} dx$

c $\int_{-\infty}^3 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$

f $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

A 3 Gegeven is de functie $f(x) = xe^{-x^2}$. Zie de figuur hiernaast.

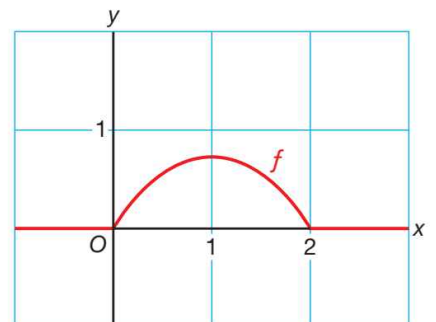
- a** Toon aan dat $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ een primitieve van f is.
b Bereken zo mogelijk de oppervlakte van het vlakdeel V dat begrensd wordt door de grafiek van f en de positieve x -as.



figuur 12.2

O 4 Gegeven is de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ -\frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x & \text{voor } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{voor } x > 2 \end{cases}$

Bereken $\int_0^2 f(x) dx$ en licht toe dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$.



figuur 12.3

Theorie B Kansdichtheid

Bij de functie f in opgave 4 geldt $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Een functie die aan deze twee voorwaarden voldoet is te gebruiken als het kansmodel van een **continue toevalsvariabele** X .

Bereken je bij de functie f van opgave 4 de oppervlakte onder de grafiek tussen de grenzen $x = 1$ en $x = 1,5$, dan krijg je de kans $P(1 < X < 1,5)$.

Omdat bij het berekenen van een oppervlakte het er niet toe doet of grenzen wel of niet worden meegeteld, is dit ook $P(1 \leq X \leq 1,5)$.

$$\text{En zo is } P(X < 1,2) = P(X \leq 1,2) = \int_{-\infty}^{1,2} f(x) dx = \int_0^{1,2} f(x) dx = 0,648.$$

Een continue toevalsvariabele kan elke waarde aannemen. Zo kan bij de functie f van opgave 4 de variabele x elke waarde van $\mathbb{R}$ aannemen. Dit in tegenstelling tot een discrete toevalsvariabele die slechts losse waarden kan aannemen.

De functie f heet de **kansdichtheid** van X . Een kansdichtheid is dus een functie waarmee de kansverdeling van een continue toevalsvariabele wordt beschreven.

Bij een continue toevalsvariabele x wordt de kansverdeling vastgelegd door de kansdichtheid f waarvoor geldt

- $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$

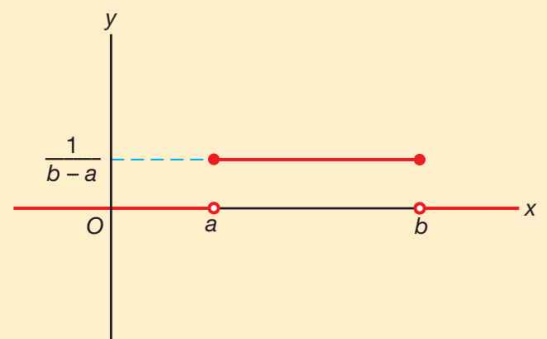
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

Er geldt $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

De eenvoudigste **continue kansverdeling** is de **continue uniforme verdeling**. Het algemene functievoorschrift van de kansdichtheid f van de continue uniforme verdeling is

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{voor } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{voor } x > b \end{cases}$$

Bij de continue uniforme verdeling is de kansdichtheid op het interval $[a, b]$ constant.



figuur 12.4

Om aan te tonen dat de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ e^{-x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$ een

kansdichtheid is, moet je laten zien dat $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ gelijk is aan 1.

Je hebt met een oneigenlijke integraal te maken. Je krijgt

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + e^0) = 0 + 1 = 1.$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x & \text{voor } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{voor } x > 3 \end{cases}$

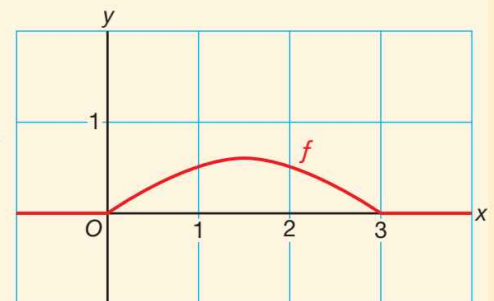
Onderzoek algebraïsch of f een kansdichtheid is.

Uitwerking

Er geldt $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, zie de figuur hiernaast.

$$\int_0^3 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x\right) dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{8}x^2\right]_0^3 = -\frac{1}{12} \cdot 27 + \frac{3}{8} \cdot 9 - 0 = 1\frac{1}{8},$$

dus f is geen kansdichtheid.



5 Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{8}x & \text{voor } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{voor } x > 4 \end{cases}$$

Onderzoek algebraïsch of f een kansdichtheid is.

6 Gegeven is de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin(x) & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{voor } x > \pi \end{cases}$

Onderzoek algebraïsch of f een kansdichtheid is.

Informatief Continue kansverdelingen

Bij een continue toevalsvariabele X is de kans op elke waarde gelijk aan 0. Door de kansdichtheid van X te gebruiken, is met een integraal een oppervlakte onder de bijbehorende grafiek te berekenen en dit levert een kans op die groter is dan 0. Men onderscheidt drie soorten continue kansverdelingen: op een eindig interval zoals $[0, 1]$ (bijvoorbeeld de uniforme continue kansverdeling), op een interval zoals $[0, \rightarrow)$ (bijvoorbeeld bij de exponentiële verdeling, zie paragraaf 12.4) en op $\mathbb{R}$ (bijvoorbeeld bij de normale verdeling, zie paragraaf 12.2).

7 Gegeven is de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$

- a Schets de grafiek van f .
- b Toon aan dat $G(x) = (-x - 1)e^{-x}$ een primitieve is van $g(x) = xe^{-x}$.
- c Toon aan dat f een kansdichtheid is. Gebruik dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

8 Van de continue uniforme toevalsvariabele X is de verdeling

$$\text{gegeven door de kansdichtheid } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{voor } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{voor } x > b \end{cases}$$

- a Neem $a = -2$ en $b = 3$ en bereken $P(X \leq 0)$.
- b Bereken a en b zo, dat $P(X \leq 3) = 0,1 \wedge P(X \geq 10) = 0,2$.

A 9 De kansdichtheid van de toevalsvariabele X is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq p \\ 2e^{-x} & \text{voor } x > p \end{cases}$$

- a Bereken exact de waarde van p .
- b Geef $P(X < \frac{1}{2})$.
- c Bereken exact $P(X < 1)$.

A 10 De kansdichtheid van de toevalsvariabele X is gegeven door

$$f_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq 0 \\ \frac{p}{(x+2)^2} & \text{voor } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{voor } x \geq 2 \end{cases}$$

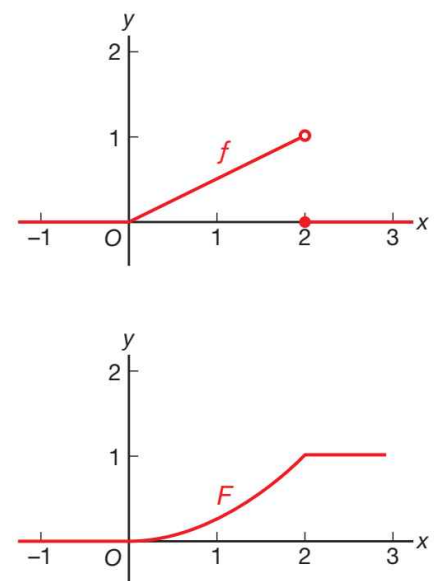
- a Bereken p .
- b Bereken exact $P(X > 1)$.

O 11 De kansdichtheid van de toevalsvariabele X is gegeven

$$\text{door } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{voor } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{voor } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Verder is gegeven } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{voor } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{voor } x \geq 2 \end{cases}$$

- a Licht toe dat $G(x) = \frac{1}{4}x^2$ een primitieve is van $g(x) = \frac{1}{2}x$.
- b Licht toe dat $P(X \leq 1) = F(1)$.
- c Bereken $P(X \geq 0,8)$ met behulp van de functie F .



figuur 12.5 De grafieken van f en F

Theorie C Verdelingsfunctie

De functie F in opgave 11 is de **verdelingsfunctie** van de toevalsvariabele X . In plaats van verdelingsfunctie zegt men ook wel **cumulatieve kansverdelingsfunctie** of **cumulatieve distributiefunctie**. De verdelingsfunctie van een toevalsvariabele heeft als functiewaarden cumulatieve kansen.

De verdelingsfunctie van de toevalsvariabele X is de functie F waarvoor geldt $F(x) = P(X \leq x)$.

De functie F heeft domein $\mathbb{R}$, bereik $[0, 1]$, $[0, 1]$, $\langle 0, 1 \rangle$ of $\langle 0, 1 \rangle$, is niet-dalend en er geldt $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Voor de continu verdeelde toevalsvariabele X met kansdichtheid f

$$\text{geldt } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Voorbeeld

De verdelingsfunctie van de toevalsvariabele X is gegeven door $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{voor } x \geq 1 \end{cases}$

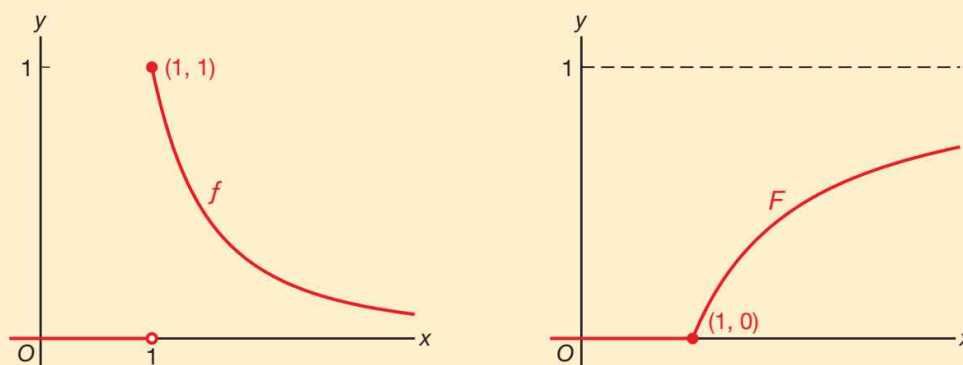
Stel het functievoorschrift op van de kansdichtheid f van X .

Uitwerking

$$G(x) = 1 - \frac{1}{x} = 1 - x^{-1} \text{ geeft } g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{dus de kansdichtheid is } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{voor } x \geq 1 \end{cases}$$

In de figuur hieronder zijn de grafieken van de kansdichtheid f en de verdelingsfunctie F van het voorbeeld getekend.



figuur 12.6 De kansdichtheid f en de verdelingsfunctie F .

Voorbeeld

De kansdichtheid van de toevalsvariabele X is gegeven door $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 4 \\ \frac{32}{x^3} & \text{voor } x \geq 4 \end{cases}$

Stel het functievoorschrift op van de verdelingsfunctie H van X .

Uitwerking

De primitieven van $k(x) = \frac{32}{x^3} = 32x^{-3}$ zijn $K(x) = -16x^{-2} + c = -\frac{16}{x^2} + c$.

Er moet gelden $K(4) = 0$, dus $-\frac{16}{4^2} + c = 0$ en dit geeft $c = 1$.

Dus $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 4 \\ 1 - \frac{16}{x^2} & \text{voor } x \geq 4 \end{cases}$

- R 12** a Zie voorbeeld op de vorige bladzijde.
Licht toe dat F inderdaad een verdelingsfunctie is.

Zie het voorbeeld hierboven.

b Waarom moet gelden $K(4) = 0$?

c Licht toe dat je c ook kunt berekenen met $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 1$.

- 13** De verdelingsfunctie van de toevalsvariabele X is gegeven door

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{4x^2} & \text{voor } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- a Licht toe dat F inderdaad een verdelingsfunctie is.
b Stel het functievoorschrift op van de kansdichtheid f van X .
c Bereken $P(X \geq 1)$.

- 14** De kansdichtheid van de toevalsvariabele X is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{4}x & \text{voor } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{18}(x-5)^2 & \text{voor } 2 \leq x < 5 \\ 0 & \text{voor } x \geq 5 \end{cases}$$

- a Licht toe dat f inderdaad een kansdichtheid is.
b Stel het functievoorschrift op van de verdelingsfunctie F van X .
c Bereken exact $P(X \leq 3)$.

- 15** De kansdichtheid van de toevalsvariabele X is gegeven door

$$f_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ x^2 & \text{voor } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{3}{4}x + b & \text{voor } 1 \leq x < 1\frac{1}{3}b \\ 0 & \text{voor } x \geq 1\frac{1}{3}b \end{cases}$$

- Bereken b .
- Stel het functievoorschrift op van de verdelingsfunctie F van X .
- Bereken exact $P(X \geq \frac{1}{2})$.

- A 16** Van wasmachines van merk A is de levensduur X in jaren gegeven door de verdelingsfunctie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 0,0025x^2 & \text{voor } 0 \leq x \leq 20 \\ 1 & \text{voor } x > 20 \end{cases}$$

- Stel het functievoorschrift op van de kansdichtheid f van X .
- Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat twee van deze wasmachines allebei minstens 15 jaar mee gaan.

- A 17** De levensduur X in jaren van een pasgeborene wordt gegeven

$$\text{door de kansdichtheid } f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ ax^3(100 - x) & \text{voor } 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{voor } x > 100 \end{cases}$$

- Bereken de exacte waarde van a .
- Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat een pasgeborene minstens 80 jaar wordt.
- Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat twee pasgeborenen beiden tussen de 50 en 90 jaar oud jaar worden.
- De kans dat een pasgeborene hoogstens t jaar wordt is 0,5. Bereken t in maanden nauwkeurig.



Terugblik

Oneigenlijke integralen

De integraal $\int_1^{\infty} \frac{6}{x^4} dx$ is een voorbeeld van een oneigenlijke integraal.

Deze integraal bereken je met een limiet.

$$\int_1^{\infty} \frac{6}{x^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t 6x^{-4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-2x^{-3}]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-2}{x^3} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-2}{t^3} + 2 \right) = 2$$

Kansdichtheid

Een continue toevalsvariabele kan elke waarde in een zeker interval aannemen.

De kansverdeling van een continue toevalsvariabele wordt gegeven door een functie die kansdichtheid wordt genoemd. Voor deze functie f moet gelden $f(x) \geq 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$

en $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Voor de continue toevalsvariabele X geldt $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Is de functie f gegeven door $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \sin(2x) & \text{voor } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \\ 0 & \text{voor } x > \frac{1}{2}\pi \end{cases}$

dan kun je als volgt aantonen dat f een kansdichtheid is.

Merk eerst op dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) \geq 0$.

Verder is $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Hiermee is ook aangetoond dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, dus dat f een kansdichtheid is.

Verdelingsfunctie

De verdelingsfunctie (ook wel cumulatieve verdelingsfunctie of cumulatieve distributiefunctie) van een toevalsvariabele X is een functie F waarvoor geldt $F(x) = P(X \leq x)$. Voor een

continue toevalsvariabele X met kansdichtheid f geldt $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. De verdelingsfunctie F

is een primitieve van de kansdichtheid, waarbij geldt dat $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Bij de functie f hierboven is

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ -\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} & \text{voor } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \\ 1 & \text{voor } x > \frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

Met de functie F zijn kansen te berekenen.

Zo is $P(X > \frac{1}{3}\pi) = 1 - P(X \leq \frac{1}{3}\pi) = 1 - F(\frac{1}{3}\pi) =$

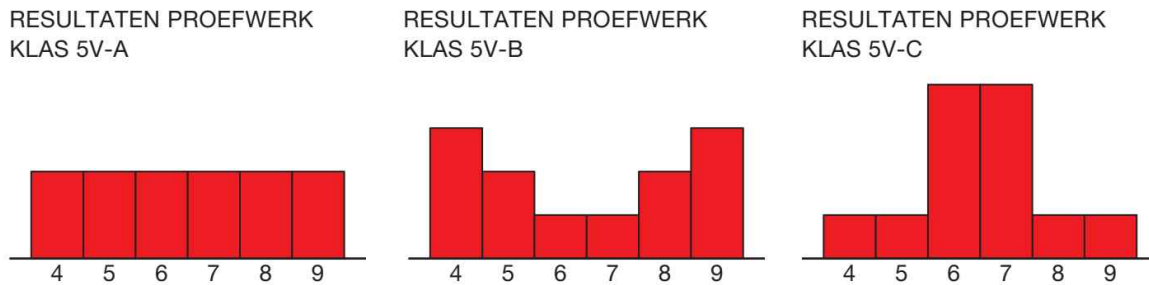
$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(2x) \text{ geeft} \\ G(x) &= -\frac{1}{2} \cos(2x) + c. \\ G(0) &= 0 \text{ geeft} \\ -\frac{1}{2} \cdot 1 + c &= 0, \\ \text{dus } c &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

12.2 De normale verdeling

O18 Drie klassen maken hetzelfde proefwerk. Van elke klas is het gemiddelde 6,5. De proefwerkcijfers zijn verwerkt in de histogrammen in figuur 12.7.

In welke klas is de spreiding van de proefwerkcijfers het grootst, denk je? En in welke het kleinst?



figuur 12.7

Theorie A Standaardafwijking

In opgave 18 is het gemiddelde van de proefwerkcijfers in de drie klassen hetzelfde. Toch is er een duidelijk verschil in de resultaten. Om een goede indruk te krijgen van een serie waarnemingsgetallen heb je daarom behalve het gemiddelde ook nog een getal nodig dat informatie geeft over de spreiding van de getallen. Zo'n getal heet een **spreidingsmaat**. De meest gebruikte spreidingsmaat is de **standaardafwijking**. Deze wordt genoteerd met σ .

[► GR] Neem de module **Centrum- en spreidingsmaten** door.

Bij de TI krijg je σ door na de optie 1-Var Stats bij σx te kijken.
Bij de Casio krijg je σ door na de optie 1VAR bij σx te kijken.

σ spreek je uit als sigma.
 σ is de Griekse letter s.

Informatief De standaardafwijking

Om de standaardafwijking met de hand te berekenen moet je eerst bij elk waarnemingsgetal de **deviatie** $d = x - \bar{x}$ berekenen. Hierin is $\bar{x}$ het gemiddelde van alle waarnemingsgetallen. Hieronder zie je hoe je de standaardafwijking van de getallen 3, 5, 8, 9 en 10 berekent.

- gemiddelde $\bar{x} = \frac{3 + 5 + 8 + 9 + 10}{5} = 7$
- deviaties d : -4, -2, 1, 2 en 3
- kwadraten van de deviaties: 16, 4, 1, 4 en 9
- gemiddelde van de kwadraten: $\frac{16 + 4 + 1 + 4 + 9}{5} = 6,8$
- standaardafwijking $\sigma = \sqrt{6,8} \approx 2,6$

De standaardafwijking is
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} \text{ met } d = x - \bar{x}.$$

Voorbeeld

Op een school is van de leerlingen op 1 september de leeftijd genoteerd. Zie de tabel.

leeftijd	11	12	13	14	15	16	17	18
frequentie	6	87	93	94	140	165	102	43

Bereken de gemiddelde leeftijd en de standaardafwijking.
Rond af op één decimaal.

Uitwerking

Voer in lijst 1 = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18} en

lijst 2 = {6, 87, 93, 94, 140, 165, 102, 43}.

1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft de gemiddelde leeftijd $\bar{x} \approx 14,9$ en de standaardafwijking $\sigma \approx 1,8$.

1-Variable	
$\bar{x}$	=14.9082191
Σx	=10883
Σx^2	=164545
σx	=1.77457333
sx	=1.77579004
n	=730

De standaardafwijking 1,8 jaar in het voorbeeld geeft een goede indruk van de spreiding van de leeftijden rond het gemiddelde 14,9 jaar. Ruwweg kun je zeggen dat de leeftijden gemiddeld 1,8 jaar van de gemiddelde leeftijd van 14,9 jaar af liggen.

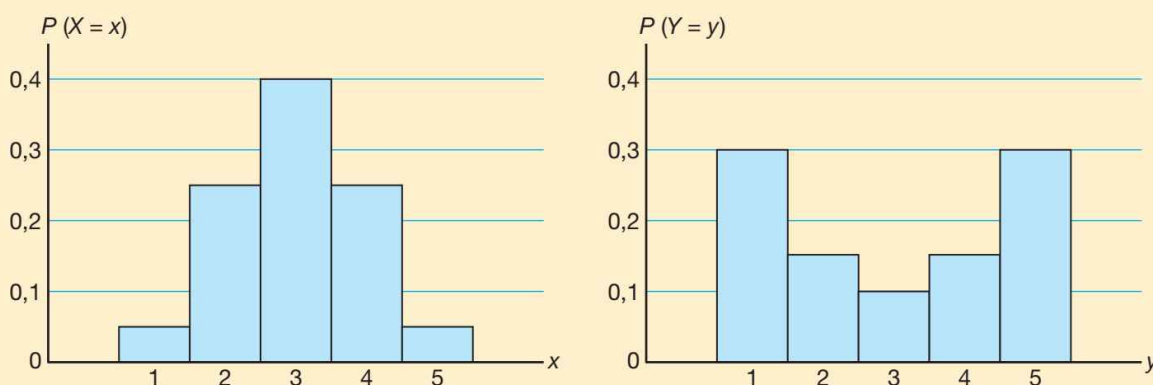
- 19** Een mentor heeft van zijn klas het aantal ziekte-dagen bijgehouden. De resultaten staan in de tabel.

aantal ziekte-dagen	0	1	2	3	5	6	64
frequentie	15	5	3	1	2	1	1

- Bereken in één decimaal nauwkeurig het gemiddelde aantal ziekte-dagen en de standaardafwijking.
- Geef het gemiddelde een goede indruk van de verdeling van de ziekte-dagen? Licht toe.
- Geef de standaardafwijking zinnige informatie? Licht toe.

Theorie B De standaardafwijking van een discrete stochast

De kanshistogrammen in figuur 12.8 horen bij de discrete stochasten X en Y .



figuur 12.8

$E(X)$ is de **verwachtingswaarde van de stochast** X en bereken je als volgt.

$$E(X) = \sum_{x=1}^5 (x \cdot P(X=x)) = 1 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,05 = 3$$

En zo is $E(Y) = \sum_{y=1}^5 (y \cdot P(Y=y)) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,3 = 3$.

Ook uit de symmetrie volgt dat $E(X) = E(Y) = 3$. Toch is er een duidelijk verschil tussen de kanshistogrammen. De uitkomsten van X vertonen minder spreiding dan die van Y .

Ook bij stochasten is de spreiding in een getal uit te drukken, dat is de **standaardafwijking van de stochast**.

Voor de standaardafwijking van X bestaat de notatie σ_X .

Het berekenen van σ_X gaat op dezelfde manier als het berekenen van de standaardafwijking bij een frequentieverdeling. In plaats van de frequenties voer je bij lijst 2 de kansen in.

Voorbeeld

Gegeven is de kansverdeling van de discrete toevalsvariabele X hiernaast.

Bereken in twee decimalen

nauwkeurig $E(X)$ en σ_X .

x	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	0,40	0,12	0,09	0,16	0,15	0,08

Uitwerking

Voer in lijst 1 = {5, 6, 7, 8, 9, 10} en

lijst 2 = {0.40, 0.12, 0.09, 0.16, 0.15, 0.08}.

1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft

$E(X) = \bar{x} = 6,78$ en $\sigma_X \approx 1,78$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP									
1-Var Stats									
$\bar{x}=6.78$									
$\Sigma x=6.78$									
$\Sigma x^2=49.12$									
$Sx=$									
$\sigma x=1.775274627$									
$n=1$									
$\min X=5$									
$\downarrow Q1=5$									

- 20** Gegeven is de kansverdeling van de discrete toevalsvariabele X hiernaast. Bereken zo nodig in twee decimalen nauwkeurig $E(X)$ en σ_X .

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,05	0,15	0,60	0,15	0,05

- 21** Experiment: het vier keer gooien met een muntstuk.
 X = het aantal keer kop.
 a Stel de kansverdeling van X op. Geef daarin exacte kansen.
 b Bereken $E(X)$ en σ_X .

Q22

Experiment: het 180 keer gooien met een zuivere dobbelsteen.

X = het aantal keer zes ogen.

a Bereken $P(X \geq 35)$.

Van de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X met $n = 180$ en $p = \frac{1}{6}$ is $E(X) = 30$ en $\sigma_X = 5$.

In figuur 12.9 zie je een gedeelte van het kanshistogram van de verdeling. In de figuur is tevens een vloeiende kromme getekend die de kansverdeling van X het beste benadert. Bij deze kromme hoort de

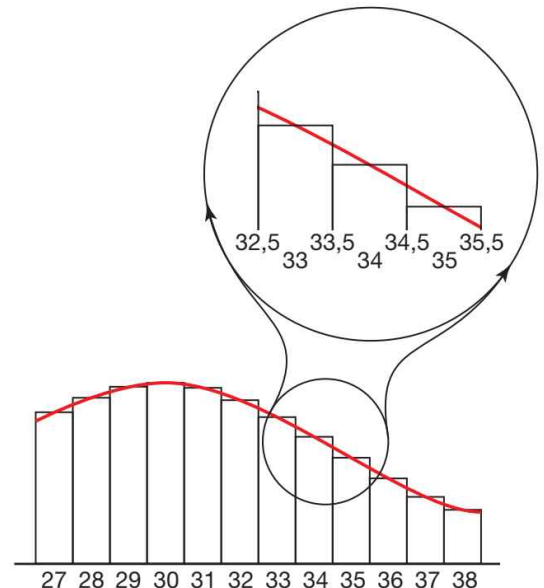
$$\text{functie } f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-30}{5}\right)^2}.$$

b De kans $P(X \geq 35)$ is te benaderen met de

$$\text{integraal } \int_{34,5}^{180} f(x) dx.$$

Licht de ondergrens 34,5 toe en bereken de integraal. Hoeveel verschilt de uitkomst van de werkelijke kans? Rond af op drie decimalen.

c Bereken $\int_0^{180} f(x) dx$ en licht toe dat f een kansdichtheid is.



figuur 12.9

Theorie C De kansdichtheid van de normale verdeling

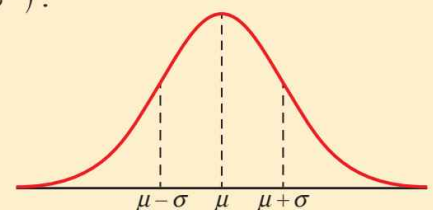
De kansdichtheid van opgave 22 hoort bij de **normaal verdeelde toevalsvariabele** X met gemiddelde 30 en standaardafwijking 5. Bij de **normale verdeling** is het gebruikelijk het gemiddelde aan te geven met de Griekse letter μ .

Bij de normaal verdeelde toevalsvariabele X met gemiddelde μ en

standaardafwijking σ hoort de kansdichtheid $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Deze formule is opgesteld door de wiskundige Gauss en de bijbehorende **normaalkromme** wordt daarom ook **gausskromme** genoemd.

In figuur hiernaast is deze kromme getekend. De grafiek heeft een top bij $x = \mu$, en buigpunten bij $x = \mu - \sigma$ en $x = \mu + \sigma$.



figuur 12.10

De normaal verdeelde toevalsvariabele X heeft kansdichtheid

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Hierin is μ het gemiddelde en σ de standaardafwijking.

De bijbehorende kromme heet de normaalkromme.

Omdat het primitiveren van de kansdichtheid niet lukt, bereken je oppervlakten onder de normaalkromme met de GR.

Bij kansen van de vorm $P(X \leq a)$ neem je als ondergrens van de integraal minstens vijf standaardafwijkingen onder het gemiddelde en bij kansen van de vorm $P(X \geq b)$ neem je als bovengrens van de integraal minstens vijf standaardafwijkingen boven het gemiddelde. Omdat we kansen afronden op drie decimalen is dit nauwkeurig genoeg. Zo is in het voorbeeld bij de berekening van $P(X \leq 51)$ als ondergrens 0 gekozen, en bij de berekening van $P(X \geq 58)$ als bovengrens 100.

Voorbeeld

De toevalsvariabele X is normaal verdeeld met $\mu = 52$ en $\sigma = 4,3$. Bereken $P(50 \leq X \leq 55)$, $P(X \leq 51)$ en $P(X \geq 58)$.

Uitwerking

Voer in $y_1 = \frac{1}{4,3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-52}{4,3}\right)^2}$.

De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft

$$P(50 \leq X \leq 55) = \int_{50}^{55} y_1 dx \approx 0,436,$$

$$P(X \leq 51) \approx \int_0^{51} y_1 dx \approx 0,408$$

$$\text{en } P(X \geq 58) \approx \int_{58}^{100} y_1 dx \approx 0,081.$$

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP	
$\int_{50}^{55} (Y_1) dX$	.4363854907
$\int_0^{51} (Y_1) dX$	.4080522679
$\int_{58}^{100} (Y_1) dX$	.0814553358

Geschiedenis Carl Friedrich Gauss

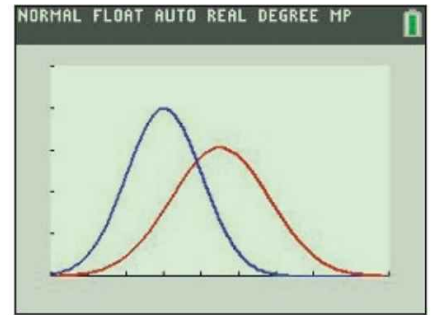
Carl Friedrich Gauss (1777-1855) wordt beschouwd als een van de grootste wiskundigen aller tijden. Zijn naam duikt op bij allerlei uiteenlopende wiskundige onderwerpen. Ook op het gebied van de normale verdeling heeft hij baanbrekend werk verricht. Hij kwam de theorie van de normale verdeling op het spoor toen hij zich bezighield met de astronomie. Toen omstreeks 1800 de Italiaan Piazzi de eerste planetoïde (Ceres) ontdekte, was Gauss directeur van de sterrenwacht in Göttingen. Gauss slaagde erin, uitgaande van een gering aantal gegevens, de baan van Ceres nauwkeurig te berekenen. In de daarbij gebruikte methode van de kleinste kwadraten ontdekte hij de theorie van de normale verdeling.



Carl Friedrich Gauss

- 23** De toevalsvariabele X is normaal verdeeld met $\mu = 180$ en $\sigma = 12$. Bereken $P(170 \leq X \leq 185)$, $P(X \leq 175)$ en $P(X \geq 185)$.

- A 24** De toevalsvariabele X is normaal verdeeld met $\mu_X = 100$ en $\sigma_X = 10$ en de toevalsvariabele Y is normaal verdeeld met $\mu_Y = 115$ en $\sigma_Y = 13$. In de figuur hiernaast zijn de bijbehorende normaalkrommen geplott. De krommen snijden elkaar in het punt A . De x -coördinaat van A noemen we a .
- Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.
 - Bereken $P(X \geq a)$ en $P(Y \leq a)$.



- O 25** De toevalsvariabele X is normaal verdeeld met $\mu = 16$ en $\sigma = 3$

en heeft dus kansdichtheid $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-16}{3}\right)^2}$.

$$P(13 \leq X \leq 17) = \int_{13}^{17} f(x) dx \text{ noteren we ook als}$$

$$P(13 \leq X \leq 17) = \text{normalcdf}(13, 17, 16, 3).$$

Noteer met behulp van normalcdf

$$P(8 \leq X \leq 14), P(X \leq 12) \text{ en } P(X \geq 18).$$

Theorie D De notatie normalcdf

De GR heeft een optie waarmee het berekenen van kansen bij een normale verdeling eenvoudiger gaat dan met een integraal. Deze optie noteren we hier als normalcdf. Met deze optie bereken je dus oppervlakten onder een normaalkromme.

Op de TI staat de optie normalcdf in het DISTR-DISTR-menu. Op de Casio staat de optie Ncd in het OPTN-STAT-DIST-NORM-menu.

In de uitwerkingen gebruiken we de notatie $\text{normalcdf}(l, r, \mu, \sigma)$.

Let erop dat je bij de Casio achtereenvolgens l , r , σ en μ invoert.

Afspraak

Bij de normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ bestaat voor de oppervlakte van het gebied tussen l en r onder de normaalkromme de notatie

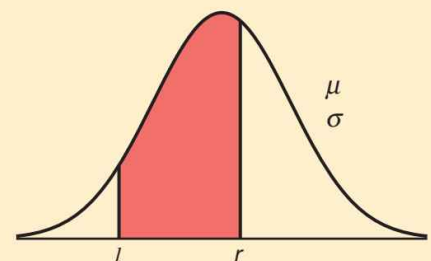
normalcdf(l, r, μ, σ).

l = linkergrens

r = rechtergrens

μ = gemiddelde

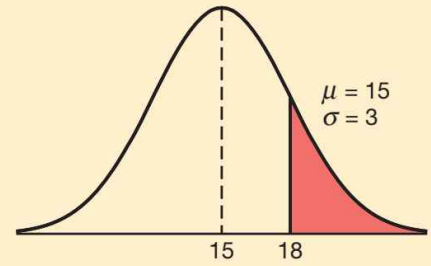
σ = standaardafwijking



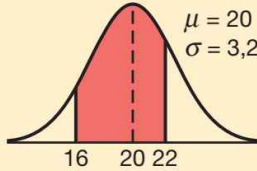
figuur 12.11

Het rode gebied in figuur 12.12 heeft geen rechtergrens.
De oppervlakte van dit gebied geven we aan met $\text{normalcdf}(18, 10^{99}, 15, 3)$.

We nemen in dit geval voor de rechtergrens 10^{99} , want de GR rekt met de optie normalcdf met dit getal net zo snel als met elke andere waarde die minstens 5σ boven μ ligt. In het geval er geen linkergrens is neem je hiervoor -10^{99} . In figuur 12.13 zie je nog enkele voorbeelden van de afspraak hierboven.

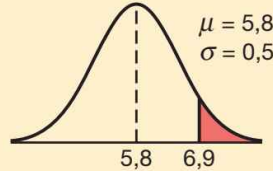


figuur 12.12

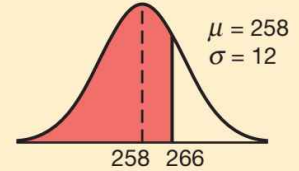


$\text{opp} = \text{normalcdf}(16, 22, 20, 3.2)$

figuur 12.13



$\text{opp} = \text{normalcdf}(6.9, 10^{99}, 5.8, 0.5)$



$\text{opp} = \text{normalcdf}(-10^{99}, 266, 258, 12)$

Voorbeeld

De stochast X is normaal verdeeld met $\mu = 15$ en $\sigma = 3,2$.

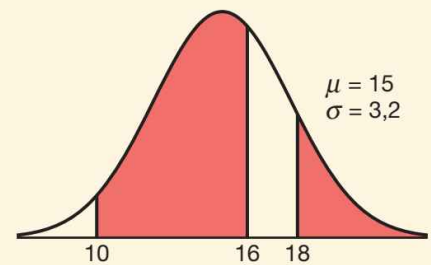
a Bereken $P(10 \leq X \leq 16)$.

b Bereken $P(X > 18)$.

Uitwerking

a $P(10 \leq X \leq 16) = \text{normalcdf}(10, 16, 15, 3.2) \approx 0,564$

b $P(X > 18) = \text{normalcdf}(18, 10^{99}, 15, 3.2) \approx 0,174$



figuur 12.14

- 26** De toevalsvariabele X is normaal verdeeld met $\mu = 5,8$ en $\sigma = 0,4$. Bereken.

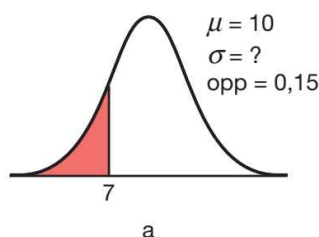
a $P(6,1 \leq X \leq 6,4)$

b $P(X < 5,1)$

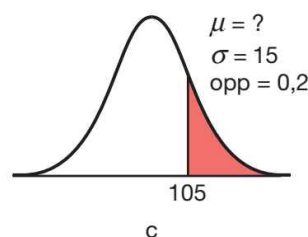
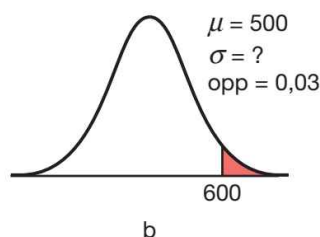
c $P(X > 5,25)$

- 27** a Gegeven is de normaal verdeelde toevalsvariabele X met gemiddelde μ en standaardafwijking σ . Neem enkele waarden voor μ en σ , en bereken telkens $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$. Wat valt je op?

- b Bij de normaalkrommen in figuur 12.15 is telkens μ of σ onbekend. Gebruik het resultaat van vraag a om een schatting van μ of σ te geven.



figuur 12.15

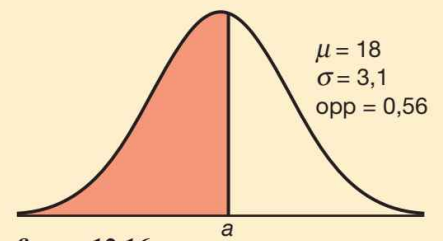


Theorie E Het berekenen van grens, gemiddelde en standaardafwijking

In figuur 12.16 is de oppervlakte van het rode gebied, dus de oppervlakte links van a , gelijk aan 0,56.

Je kunt de bijbehorende grens met de GR berekenen.

Op de TI gebruik je de optie `invNorm` uit het DISTR-DISTR-menu en op de Casio gebruik je de optie `InvN` uit het OPTN-STAT-DIST-NORM-menu.



figuur 12.16

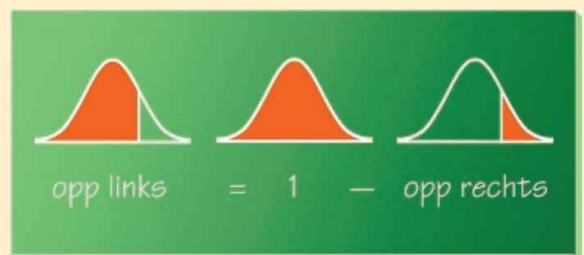
In uitwerkingen gebruiken we de notatie

`invNorm(opp links,  $\mu$ ,  $\sigma$ )`.

Let erop dat je bij de Casio eerst σ en dan μ invoert.

Bij figuur 12.16 krijg je $a = \text{invNorm}(0.56, 18, 3.1) \approx 18,47$.

Bij de opties `invNorm` en `InvN` vul je altijd de oppervlakte links van a in. Maar omdat de totale oppervlakte onder de normaalkromme 1 is, kun je a ook berekenen als je de oppervlakte rechts van a weet.



Afspraak

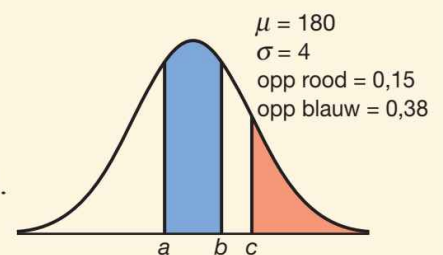
Gebruik bij het berekenen van de grens a de volgende vuistregel.

Rond a op één decimaal meer af dan de gegeven σ .

Voorbeeld

Gegeven is de normale verdeling met $\mu = 180$ en $\sigma = 4$. Zie figuur 12.17.

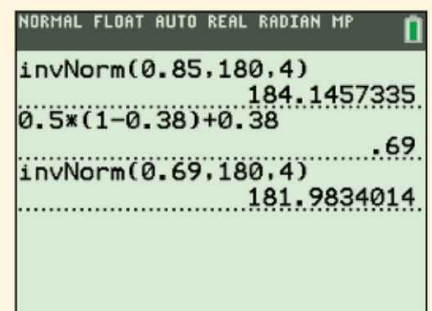
- De oppervlakte van het rode gebied is 0,15. Bereken c .
- De oppervlakte van het symmetrische blauwe gebied is 0,38. Bereken b .



figuur 12.17

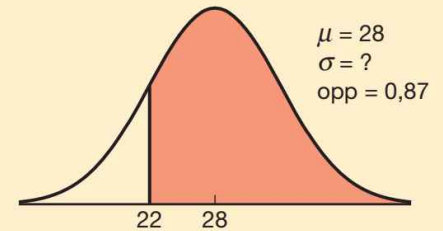
Uitwerking

- opp links van c is $1 - 0,15 = 0,85$.
 $c = \text{invNorm}(0.85, 180, 4) \approx 184,1$
- opp links van b is $0,5(1 - 0,38) + 0,38 = 0,69$.
 $b = \text{invNorm}(0.69, 180, 4) \approx 182,0$



De normaalkromme in de figuur hiernaast hoort bij een normale verdeling waarvan σ onbekend is. Er geldt $\text{normalcdf}(22, 10^{99}, 28, \sigma) = 0,87$. Om deze vergelijking op te lossen gebruik je de optie intersect.

Bij het kiezen van een geschikt venster maak je gebruik van een schatting van σ . We nemen voor Xmax 2 keer de geschatte waarde van σ . Op grond van figuur 12.18 schat je $\sigma = 5$, dus neem $X_{\min} = 0$ en $X_{\max} = 10$.



figuur 12.18

Voorbeeld

Van de normaalkromme hiernaast is $\mu = 28$ en is σ onbekend. De oppervlakte van het rode gebied is 0,87. Bereken σ in één decimaal nauwkeurig.

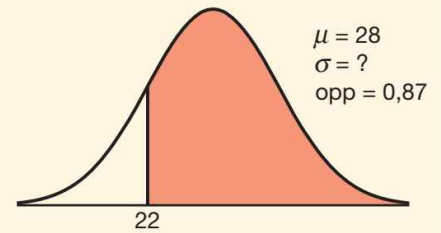
Aanpak

Uit de gegevens volgt dat $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 10$, $Y_{\min} = 0$ en $Y_{\max} = 1$ goede keuzes zijn.

Uitwerking

$$\text{normalcdf}(22, 10^{99}, 28, \sigma) = 0,87$$

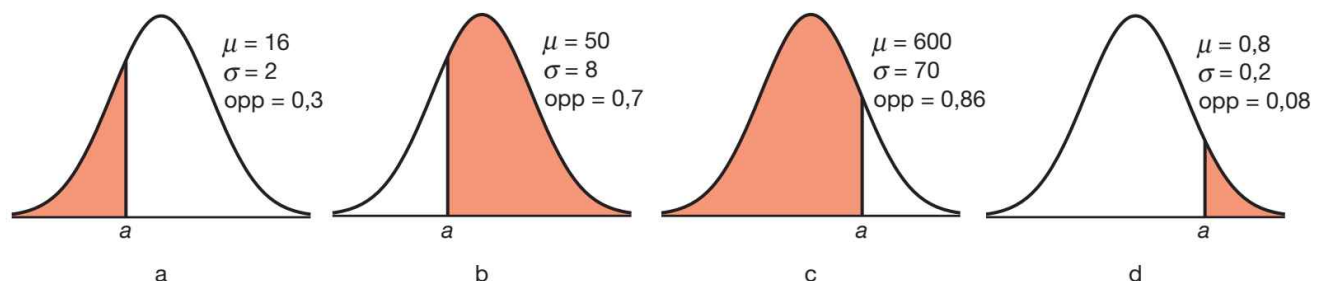
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(22, 10^{99}, 28, x)$ (TI) of $y_1 = \text{NormCD}(22, 10^{99}, x, 28)$ (Casio) en $y_2 = 0,87$. Intersect geeft $x \approx 5,3$, dus $\sigma \approx 5,3$.



figuur 12.19

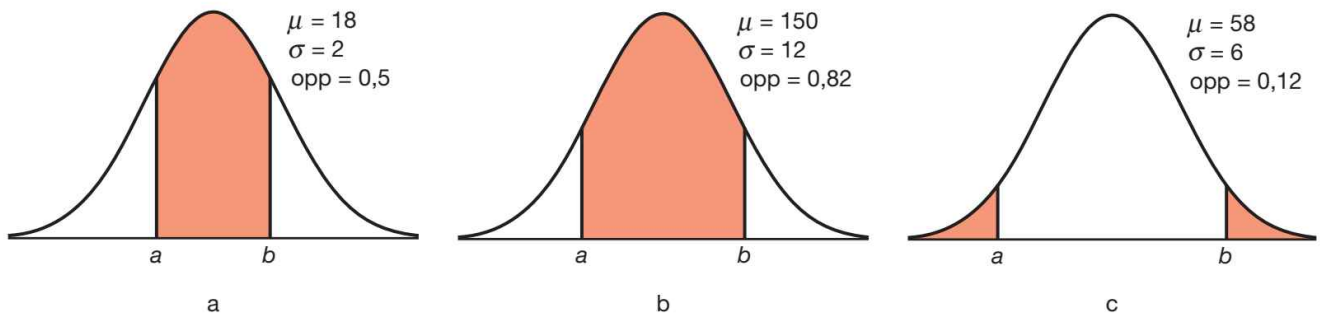


- 28** Bij de normaalkrommen in figuur 12.20 is bij gegeven μ en σ de oppervlakte van het rode gebied vermeld. Bereken telkens a .



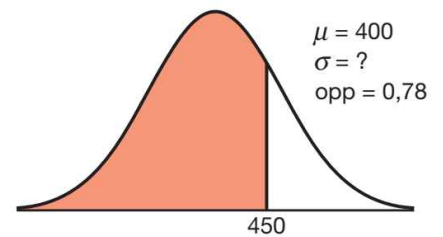
figuur 12.20

- A 29** De rode gebieden onder de normaalkrommen in figuur 12.21 zijn symmetrisch.
Bereken telkens a en b .



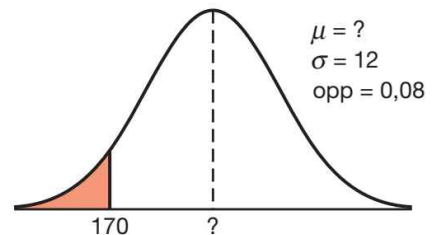
figuur 12.21

- 30** Van de normaalkromme in figuur 12.22 is $\mu = 400$ en is σ onbekend. Gegeven is verder dat de oppervlakte van het gebied links van 450 gelijk is aan 0,78.
- Welke vergelijking moet je oplossen om σ te berekenen?
 - Geef een schatting van σ op grond van figuur 12.22.
 - Bereken de standaardafwijking in één decimaal nauwkeurig.



figuur 12.22

- 31** Van de normaalkromme in figuur 12.23 is $\sigma = 12$ en is μ onbekend. De oppervlakte van het gebied links van 170 is 0,08.
- Om μ te vinden moet de vergelijking $\text{normalcdf}(-10^{99}, 170, \mu, 12) = 0,08$ worden opgelost. Geef een schatting van μ op grond van figuur 12.23.
 - Bereken μ in gehelen nauwkeurig.



figuur 12.23

- 32** a Bij een normale verdeling is $\sigma = 3,8$. De oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme rechts van 17 is 0,28. Bereken μ in één decimaal nauwkeurig.
- b Bij een normale verdeling is $\mu = 2200$. Het gebied onder de normaalkromme tussen 2080 en 2320 heeft een oppervlakte van 0,62. Bereken σ in tientallen nauwkeurig.

- A 33** Van een normale verdeling is het gemiddelde 1050. De verticale lijn bij 980 deelt het gebied onder de normaalkromme links van 1000 in twee stukken met gelijke oppervlakte. Bereken de standaardafwijking in gehelen nauwkeurig.

- A 34** Van een normale verdeling is $\mu = 2,3$ en $\sigma = 0,08$. De verticale lijn bij a deelt het gebied onder de normaalkromme tussen 2,18 en 2,36 in twee stukken met gelijke oppervlakte. Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.

Terugblik

Standaardafwijking van een toevalsvariabele

De standaardafwijking σ is de meest gebruikte spreidingsmaat. Je krijgt de standaardafwijking en de verwachtingswaarde van een toevalsvariabele na het invoeren van de mogelijke waarden van de toevalsvariabele in lijst 1 en de kansen in lijst 2, met

- 1-Var Stats uit het STAT-CALC-menu bij de TI
- 1VAR uit het STAT-CALC-menu bij de Casio.

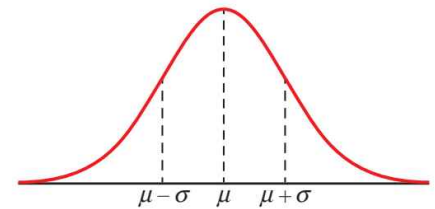
Bij de toevalsvariabele X met de kansverdeling hiernaast geeft de GR de verwachtingswaarde $E(X) = \bar{x} = 29,25$ en de standaardafwijking $\sigma_X \approx 6,94$.

x	20	25	30	40
$P(X=x)$	0,18	0,27	0,31	0,17

De kansdichtheid van de normale verdeling

De kansdichtheid van de normale verdeling is

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Hierin is μ het gemiddelde en σ de standaardafwijking. De bijbehorende kromme heet normaalkromme. De grafiek heeft een top bij $x = \mu$, en buigpunten bij $x = \mu - \sigma$ en $x = \mu + \sigma$.

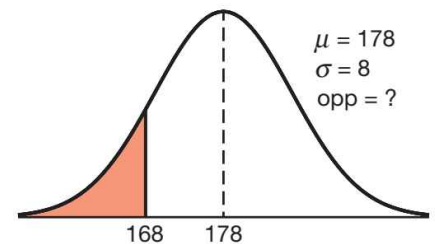


Oppervlakten en grenzen bij normaalkrommen

Bij opgaven over oppervlakten onder een normaalkromme spelen vijf getallen een rol: het gemiddelde μ , de standaardafwijking σ , de linkergrens l van het gebied, de rechtergrens r van het gebied en de oppervlakte van het gebied.

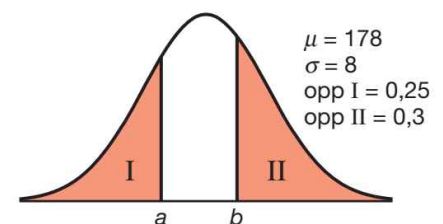
Zijn er vier bekend, dan kun je het vijfde getal berekenen.

Bij de normale verdeling met $\mu = 178$ en $\sigma = 8$ is de oppervlakte van het gebied onder de normaalkromme links van 168 gelijk aan $\text{normalcdf}(-10^{99}, 168, 178, 8) \approx 0,106$.



Weet je de oppervlakte van een gebied onder de normaalkromme links van a , dan is a te berekenen met $a = \text{invNorm}(\text{opp links}, \mu, \sigma)$.

Zo is hiernaast $a = \text{invNorm}(0,25, 178, 8) \approx 172,6$ en $b = \text{invNorm}(0,7, 178, 8) \approx 182,2$.



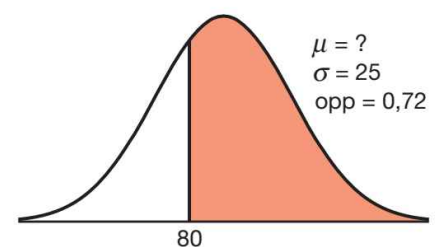
Het berekenen van gemiddelde en standaardafwijking

In de figuur hiernaast is $\sigma = 25$ en is μ onbekend. Er geldt $\text{normalcdf}(80, 10^{99}, \mu, 25) = 0,72$.

Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(80, 10^{99}, x, 25)$ (TI) of $y_1 = \text{NormCD}(80, 10^{99}, 25, x)$ (Casio) en $y_2 = 0,72$.

Op grond van de figuur is 100 een goede schatting voor μ , dus gebruik bijvoorbeeld $X_{\min} = 80$ en $X_{\max} = 120$.

Intersect geeft $x = 94,57\dots$, dus $\mu \approx 94,6$.



12.3 Toepassingen van de normale verdeling

O35

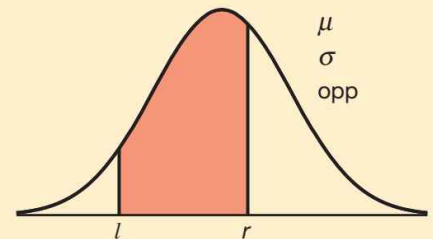
Van een groep jongens is de lengte normaal verdeeld met gemiddelde 178 cm en standaardafwijking 5,4 cm.

- Schets een normaalkromme en geef hierin het gebied aan dat hoort bij de jongens die langer zijn dan 182 cm. Bereken de oppervlakte van dit gebied.
- Hoeveel procent van de jongens is langer dan 182 cm?
- Wat is de kans dat een willekeurig gekozen jongen uit deze groep langer is dan 182 cm?



Theorie A De normale verdeling gebruiken

Bij opgaven over de normale verdeling heb je te maken met de vijf getallen die in figuur 12.24 zijn aangegeven. Van deze getallen zijn er vier gegeven en moet je het vijfde berekenen. Je gebruikt daarbij het volgende werkschema.



figuur 12.24

Werkschema: aanpak bij opgaven over de normale verdeling

- Schets een normaalkromme en verwerk hierin μ , σ , l , r en opp.
- Kleur het gebied dat bij de vraag hoort.
- Bereken met de GR het ontbrekende getal.
- Beantwoord de gestelde vraag.

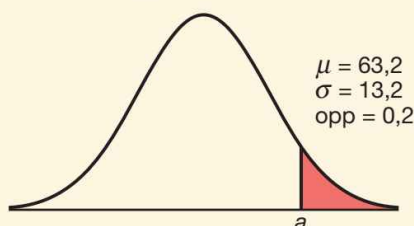
Voorbeeld

Bij een toelatingstest met gehele scores zijn de scores normaal verdeeld met een gemiddelde van 63,2 en een standaardafwijking van 13,2.

Op grond van deze test wil men hoogstens 20% van de deelnemers uitnodigen voor een vervolgttest.

Vanaf welke score mag je aan de vervolgttest meedoen?

Uitwerking



Normale verdeling met $\mu = 63,2$ en $\sigma = 13,2$.

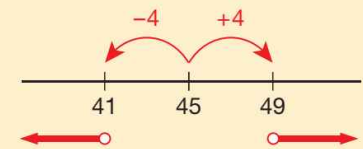
$a = \text{invNorm}(0.80, 63.2, 13.2) \approx 74,31$

Vanaf een score van 75 mag je aan de vervolgttest meedoen.

Let op: naar boven afronden.

- 36** Uit onderzoek blijkt dat de lengte van volwassen forellen in een rivier normaal verdeeld is met $\mu = 45$ cm en $\sigma = 5$ cm.

- Bereken de kans dat een forel een lengte heeft tussen 44 en 52 cm.
- In een week worden 240 forellen gevangen. Hoeveel daarvan, verwacht je, zijn langer dan 53 cm?
- Hoeveel procent van de forellen heeft een lengte die meer dan 4 cm van het gemiddelde afwijkt?



Meer dan 4 van 45 afwijken betekent: kleiner dan 41 of groter dan 49.

- 37** Van de 1600 mannelijke werknemers van een bedrijf is het gewicht normaal verdeeld met $\mu = 78$ kg en $\sigma = 12$ kg.

- Hoeveel van deze mannen zijn naar verwachting zwaarder dan 60 kg?
En hoeveel verwacht je dat er lichter zijn dan 65 kg?
- De 10% zwaarste mannen worden door de bedrijfsarts opgeroepen voor controle.
Vanaf welk gewicht in kg nauwkeurig kun je een oproep verwachten?

- 38** In een fabriek worden pakken koffie van 500 gram gevuld. De inhoud van de pakken koffie is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 3 gram.

De vulmachine kan zo afgesteld worden, dat elke gemiddelde inhoud van 498 gram tot 505 gram kan worden bereikt.

De standaardafwijking verandert daarbij niet.

- Neem aan dat $\mu = 501$ gram.
Hoeveel procent van de pakken koffie bevat minder dan 500 gram?
- Op welk gemiddelde moet de machine worden afgesteld, opdat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 500 gram koffie bevat? Rond af op één decimaal.
- De fabrikant beweert dat slechts 1% van de pakken minder dan 500 gram koffie bevat.
Toon aan dat de fabrikant deze bewering niet kan waarmaken.

- 39** Een machine vult pakken groente met een gemiddelde inhoud van 250 gram. De fabrikant wil dat 90% van de pakken een inhoud heeft die maximaal 5 gram afwijkt van deze 250 gram.

- Welke standaardafwijking zal hij accepteren? Neem aan dat de inhoud normaal verdeeld is en rond af op twee decimalen.

Een andere vulmachine van pakken groente heeft een standaardafwijking van 4 gram. De fabrikant wil het gemiddelde zo instellen dat niet meer dan 10% van de pakken minder dan 250 gram bevat.

- Op welk gemiddelde moet hij de machine instellen? Ga weer uit van een normale verdeling en rond af op gehelen.

A 40 Uit onderzoek is bekend dat het kopergehalte van de messing sierkannetjes van fabrikant Zomerhuis normaal verdeeld is met een gemiddelde van 68%.

In een grote partij van deze kannetjes blijkt er 1 op de 11 te zijn met een kopergehalte van meer dan 70%. Uit deze gegevens volgt dat de standaardafwijking afgerond op één decimaal gelijk is aan 1,5%.

- Bereken de standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.
- De kannetjes met een kopergehalte van minder dan 65,5% worden uit de handel genomen.
Om hoeveel kannetjes verwacht je dat het gaat bij een productie van 500 stuks?

A 41 De productietijd van een zeker artikel bij de firma Driessen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1 uur en 3 minuten.

- Bereken de kans dat de productietijd van zo'n artikel minder dan 4 minuten afwijkt van het gemiddelde als de standaardafwijking 125 seconden is.
- Bereken de standaardafwijking in seconden nauwkeurig als de productietijd van 30% van de artikelen meer dan 2,5 minuut afwijkt van het gemiddelde.
- Op een dag produceert Driessen een flink aantal van deze artikelen. Bij 1 op de 5 is de productietijd meer dan 66 minuten.
Bereken de standaardafwijking in seconden nauwkeurig.

A 42 Bij een onderzoek naar de fysieke gesteldheid van de deelnemers aan de Giro d'Italia en de Tour de France van 2015 kwam een aantal bijzonderheden aan het licht.

- De lengte van de wielrenners is normaal verdeeld met een gemiddelde van 179 cm en een standaardafwijking van 6 cm.
- De BMI van de wielrenners is normaal verdeeld met een gemiddelde van 21,0 en een standaardafwijking van 1,2.

Aan de twee wielerrondes deden in totaal 260 wielrenners mee.

- Hoeveel van deze wielrenners waren naar verwachting langer dan 190 cm?
- Wat weet je van de BMI van de 60 renners met de grootste BMI?

Renner A weegt 60 kg. Het blijkt dat 18% van de renners een BMI heeft die minder is dan de BMI van renner A .

- Bereken de lengte van A in cm nauwkeurig.

Renner B is 185 cm lang. Van de 260 wielrenners hebben er 25 een hogere BMI dan renner B .

- Bereken het gewicht van B in kg. Rond af op één decimaal.



$$BMI = \frac{G}{L^2}. \text{ Hierin is } G \text{ het gewicht in kg en } L \text{ de lengte in meter.}$$

043

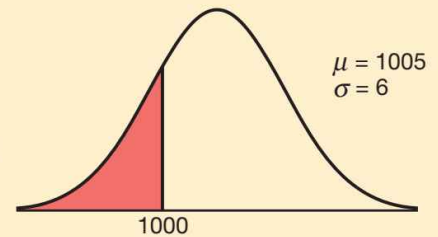
In een tuincentrum is de lengte van de coniferen normaal verdeeld met een gemiddelde van 75 cm en een standaardafwijking van 18 cm.

- Bereken de kans dat een willekeurig gekozen conifeer kleiner is dan 70 cm.
- Ferdi kiest willekeurig drie coniferen.
Bereken de kans dat ze alle drie kleiner dan 70 cm zijn.

Theorie B Normale en binomiale verdeling

Een machine vult pakken koffie waarvan de inhoud normaal verdeeld is met een gemiddelde van 1005 gram en een standaardafwijking van 6 gram.

De kans dat een willekeurig pak koffie minder dan 1000 gram bevat is $\text{normalcdf}(-10^{99}, 1000, 1005, 6) = 0,2023\dots$



figuur 12.25

Tel je bij een steekproef van 20 pakken koffie het aantal pakken dat minder dan 1000 gram bevat dan heb je te maken met de binomiale toevalsvariabele X met $n = 20$ en $p = 0,2023\dots$

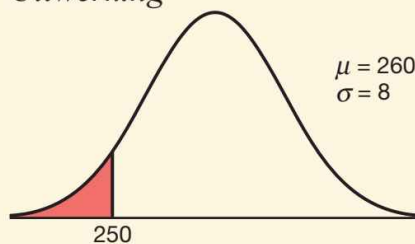
De kans dat minder dan vier pakken minder dan 1000 gram bevatten is $P(X < 4) = P(X \leq 3) = \text{binomcdf}(20, 0.2023\dots, 3) \approx 0,401$.

Voorbeeld

Een machine vult pakken hagelslag waarvan de inhoud normaal verdeeld is met een gemiddelde van 260 gram en een standaardafwijking van 8 gram.

Bereken de kans dat in een steekproef van 25 pakken er minstens vier minder dan 250 gram wegen.

Uitwerking



Normale verdeling met $\mu = 260$ en $\sigma = 8$.

$P(\text{pak weegt minder dan } 250 \text{ g}) =$

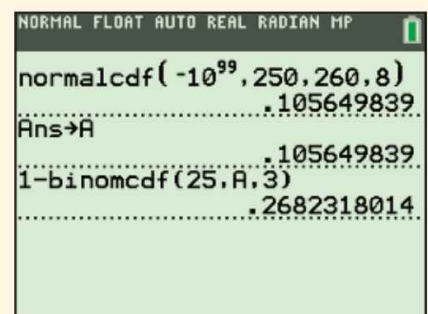
$\text{normalcdf}(-10^{99}, 250, 260, 8) = 0,105\dots$

X = het aantal pakken dat minder dan 250 gram weegt.

X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = 0,105\dots$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) =$

$1 - \text{binomcdf}(25, 0.105\dots, 3) \approx 0,268$



- 44** Een machine vult pakken hagelslag waarvan de inhoud normaal verdeeld is met een gemiddelde van 130 gram en een standaardafwijking van 5 gram.
Bereken de kans dat in een steekproef van 50 pakken hagelslag
- er minstens acht minder dan 128 gram bevatten
 - er precies acht meer dan 132 gram bevatten.

- A 45** In een rijwielfabriek is een van de handelingen tijdens het productieproces het instellen van de remmen. De tijd die met die handeling is gemoeid, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 2 minuten en 40 seconden en een standaardafwijking van 15 seconden.
- Bereken de kans dat van 80 van deze handelingen er minstens 10 langer dan 3 minuten duren.
 - Een werknemer wordt geacht op een dag 180 van deze handelingen te verrichten.
Hoeveel van deze 180 handelingen duren naar verwachting minder dan twee en een halve minuut?
 - Hoeveel van deze handelingen moet een werknemer verrichten opdat de kans dat er minstens vijf meer dan 2 minuten en 45 seconden duren groter is dan 99%?



Terugblik

De normale verdeling gebruiken

Bij opgaven over de normale verdeling heb je te maken met de vijf getallen die in de figuur hiernaast zijn aangegeven. Van deze getallen zijn er vier gegeven en moet je het vijfde berekenen.

Je gaat daarbij als volgt te werk.

- Schets een normaalkromme en verwerk hierin μ , σ , l , r en opp.
- Kleur het gebied dat bij de vraag hoort.
- Bereken met de GR het ontbrekende getal.
- Beantwoord de gestelde vraag.

Van een groep mannen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 178$ cm en $\sigma = 8$ cm. Voor het berekenen van de kans dat de lengte X van een man uit deze groep minder is dan 168 cm, bereken je

$$P(X < 168) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 168, 178, 8) \approx 0,106.$$

Bij de vraag welke lengten bij de 25% langste mannen horen, gebruik je de figuur hiernaast. Hierin is a het te berekenen getal.

$$a = \text{invNorm}(0.75, 178, 8) \approx 183,4.$$

Dus de 25% langste mannen zijn 183,4 cm of langer.

De hierboven genoemde groep omvat 18 760 mannen.

Op de vraag ‘Hoeveel van deze mannen zijn naar verwachting korter dan 173 cm?’ is het antwoord

$$\text{aantal} = \text{normalcdf}(-10^{99}, 173, 178, 8) \cdot 18\,760 \approx 4990.$$

Normale en binomiale verdeling

Van een groep mannen is het gewicht normaal verdeeld met $\mu = 75$ kg en $\sigma = 9$ kg.

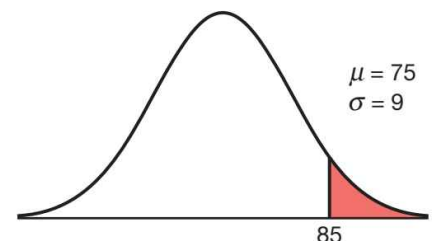
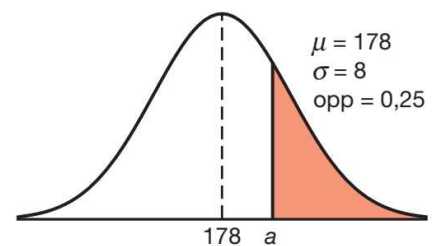
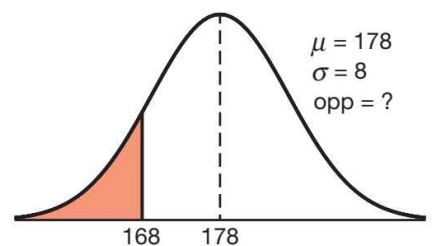
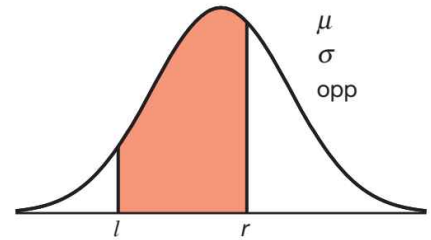
De kans dat een man uit deze groep meer weegt dan 85 kg is $\text{normalcdf}(85, 10^{99}, 75, 9) = 0,133\dots$

We vragen ons af wat de kans is dat in een steekproef van 40 mannen minstens 8 mannen meer dan 85 kg wegen.

X = het aantal mannen dat meer weegt dan 85 kg.

X is binomiaal verdeeld met $n = 40$ en $p = 0,133\dots$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \text{binomcdf}(40, 0,133\dots, 7) \approx 0,156$$



12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen

- O46** Theo gooit met twee dobbelstenen: een rode en een groene.
 X = het aantal ogen dat Theo met de rode dobbelsteen gooit.
 Y = het aantal ogen dat Theo met de groene dobbelsteen gooit.
 Z = het totale aantal ogen dat Theo gooit, dus $Z = X + Y$.
- Bereken $P(Z = 4)$.
 - Maak de kansverdeling van Z en bereken $E(Z)$.
 - Bereken $E(X)$ en $E(Y)$. Is $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$?

Theorie A Somregels voor verwachtingswaarde en standaardafwijking

In opgave 46 heb je gezien dat $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
 Deze regel geldt algemeen.

De somregel voor de verwachtingswaarde

Voor de toevalsvariabelen X en Y geldt $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Er is ook een somregel voor de standaardafwijking.

Het blijkt dat de som van de kwadraten van σ_X en σ_Y gelijk is aan het kwadraat van σ_{X+Y} .

Dus $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ ofwel $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.

De enige voorwaarde bij de regel $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ is dat X en Y onafhankelijke toevalsvariabelen zijn, dat wil zeggen dat de uitkomsten van X en Y elkaar niet beïnvloeden.

De somregel voor de standaardafwijking

Voor elk tweetal onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

- 47** Bij een productieproces zijn twee fasen te onderscheiden die onafhankelijk van elkaar zijn. Van de productietijd X van fase I is gegeven $E(X) = 16$ seconden en $\sigma_X = 2$ seconden. Van de productietijd Y van fase II is gegeven $E(Y) = 30$ seconden en $\sigma_Y = 3$ seconden. De totale productietijd is $T = X + Y$.
- Bereken $E(T)$.
 - Bereken σ_T in één decimaal nauwkeurig.

- R48** Bij een worp met een dobbelsteen is de toevalsvariabele X het aantal ogen dat boven ligt en Y het aantal ogen dat onder ligt.
- Licht toe dat $\sigma_{X+Y} = 0$.
 - Waarom gaat de regel $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ hier niet op?

Informatief Het bewijs dat $\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$ voor de onafhankelijke stochasten X en Y

De variantie is het kwadraat van de standaardafwijking. De variantie van de stochast X kun je dus

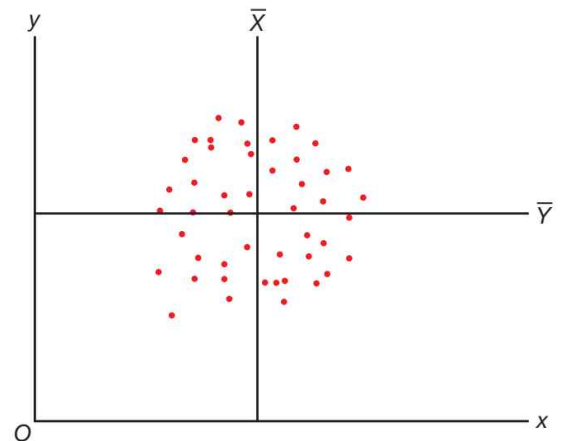
schatten met de formule $\text{VAR}(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$. Hierin zijn de getallen x_i uitkomsten van de

stochast X en is $\bar{X}$ de verwachtingswaarde van X . Voor de variantie van de som van de stochasten

X en Y geeft dit $\text{VAR}(X + Y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n ((x_i + y_i) - (\bar{X} + \bar{Y}))^2$.

Herleiden van deze formule geeft

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X + Y) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n ((x_i + y_i) - (\bar{X} + \bar{Y}))^2 = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{X}) + (y_i - \bar{Y}))^2 = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{X})^2 + 2(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) + (y_i - \bar{Y})^2) = \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 \right) = \\ &= \text{VAR}(X) + \frac{1}{n} \cdot 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) + \text{VAR}(Y). \end{aligned}$$



Voor onafhankelijke stochasten X en Y verwachten we dat de punten (x_i, y_i) regelmatig zijn verdeeld over de vier vlakdelen, zoals in de figuur hierboven. In hoofdstuk 14 van vwo D deel 4

maken we aannemelijk dat geldt $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) = 0$ voor twee onafhankelijke stochasten

X en Y . Dus voor twee onafhankelijke stochasten X en Y geldt $\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$.

O49 Op een kruispunt passeren gemiddeld 36 auto's per uur. Hierbij hoort de poissonverdeelde toevalsvariabele X met $\lambda = 36$.

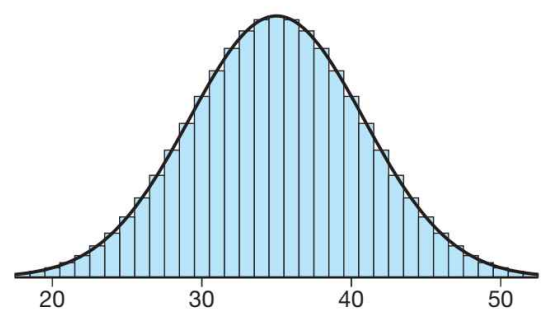
a Bereken $P(X \geq 40)$.

Van de poissonverdeelde toevalsvariabele X met $\lambda = 36$ is $E(X) = 36$ en $\sigma_X = 6$. In figuur 12.26 zie je een kanshistogram van deze verdeling.

In deze figuur is tevens de normaalkromme getekend die deze kansverdeling het best benadert.

b Benader $P(X \geq 40)$ met behulp van de normale verdeling. Neem als linkergrens 39,5.

c Hoeveel verschilt de uitkomst van vraag b van de werkelijke kans? Rond af op drie decimalen.



figuur 12.26

$P(X \leq k)$
TI: Poissoncdf(λ , k)
Casio: PoissonCD(k , λ)

Theorie B De centrale limietstelling

De poissonverdeelde toevalsvariabele X in opgave 49 kan worden benaderd door een normale verdeling.

Ook de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X in opgave 22 kan worden benaderd door een normale verdeling.

Dit zijn voorbeelden van de **centrale limietstelling**.

Deze stelling zegt dat de som van een groot aantal gelijke, onafhankelijke toevalsvariabelen bij benadering een normale verdeling heeft.

In opgave 22 is X de som van 180 keer de toevalsvariabele B met

$$B = \begin{cases} 1 & \text{als er 6 gegooid wordt} \\ 0 & \text{bij elke andere worp} \end{cases}$$

Hierbij is $P(B = 1) = \frac{1}{6}$.

In opgave 49 is X op te vatten als de som van 3600 keer de toevalsvariabele Y met

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{als er in een seconde een auto passeert} \\ 0 & \text{als er in een seconde geen auto passeert} \end{cases}$$

Hierbij is $P(Y = 1) = 0,01$.

Het aantal toevalsvariabelen is in dit hoofdstuk steeds zo gekozen dat je de centrale limietstelling mag gebruiken.

36 auto's per uur, dus per seconde $\frac{36}{3600} = 0,01$ auto.

Centrale limietstelling

De som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van n gelijke, onderling onafhankelijke toevalsvariabelen X met verwachtingswaarde $E(X)$ en standaardafwijking σ_X is voor grote waarden van n bij benadering normaal verdeeld met $\mu_S = n \cdot E(X)$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$.

Uit deze stelling volgt dat ook het gemiddelde van een groot aantal gelijke, onafhankelijke toevalsvariabelen bij benadering een normale verdeling heeft.

Het gemiddelde $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ van n gelijke, onderling onafhankelijke toevalsvariabelen X met verwachtingswaarde $E(X)$ en standaardafwijking σ_X is voor grote waarden van n bij benadering normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = E(X)$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

Voorbeeld

Bakker Postel verkoopt koekjes in pakken van 30 stuks. De koekjes wegen gemiddeld 12 gram met een standaardafwijking van 0,8 gram.

Bereken de kans dat

- een pak minder dan 350 gram koekjes bevat
- het gemiddelde gewicht van de koekjes in een pak meer dan 12,2 gram is.

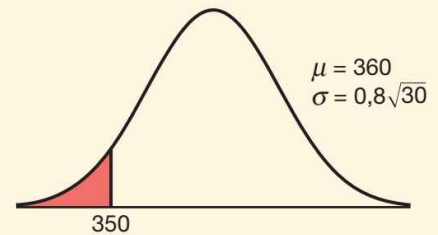
Uitwerking

- S = het gewicht in gram van 30 koekjes in een pak.

S is normaal verdeeld met $\mu_S = 30 \cdot 12 = 360$ en

$$\sigma_S = \sqrt{30} \cdot 0,8 = 0,8\sqrt{30}.$$

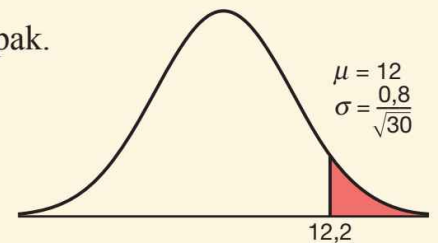
$$P(S < 350) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 350, 360, 0,8\sqrt{30}) \approx 0,011$$



- $\bar{X}$ = het gemiddelde gewicht in gram van de koekjes in een pak.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 12$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,8}{\sqrt{30}}$.

$$P(\bar{X} > 12,2) = \text{normalcdf}(12,2, 10^{99}, 12, \frac{0,8}{\sqrt{30}}) \approx 0,085$$



R50 In de definitie van de centrale limietstelling op de vorige bladzijde staat $\mu_S = n \cdot E(X)$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$.

- Toon met behulp van de somregel voor de verwachtingswaarde aan dat $\mu_S = n \cdot E(X)$.
- Toon met behulp van de somregel voor de standaardafwijking aan dat $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$.

- Toon aan dat voor het gemiddelde $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$ geldt $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

51 In een magazijn worden telkens 20 tegels in een doos geplaatst. De tegels hebben een gemiddelde dikte van 5 mm en een standaardafwijking van 0,5 mm. De hoogte van de doos is 10,5 cm. Bereken de kans dat een stapel van 20 tegels niet in een doos past.

52 Boter wordt verkocht in pakjes van 250 gram. De vulmachine is zo afgesteld dat voor het gewicht X in gram per pakje geldt $\mu_X = 250,4$ en $\sigma_X = 1,6$. De pakjes worden verpakt in dozen van 48 stuks.

- Hoeveel procent van de dozen heeft een gemiddeld gewicht per pakje dat minder is dan 250 gram?
- Hoeveel procent van de dozen bevat minder dan 12 kg boter?

53 Experiment: het gooien met een dobbelsteen. X = het aantal ogen dat je gooit.Er geldt $E(X) = 3,5$ en $\sigma_X \approx 1,71$.**a** Bereken σ_X in drie decimalen nauwkeurig.

Het experiment wordt 100 keer uitgevoerd.

 Y = de som van de gegooide aantallen ogen.Om $P(Y \geq 360)$ te berekenen benader je Y door de normale toevalsvariabele Z en bereken je $P(Z \geq 359,5)$.**b** Bereken $P(Y \geq 360)$.**c** Bereken $P(Y \leq 345)$.

Felix gooit 200 keer met een dobbelsteen.

d Bereken de kans dat Felix in totaal precies 700 ogen gooit.**A 54** Een machine vult flesjes cola. De inhoud X in cL is normaal verdeeld met $\mu_X = 20,1$.

Het blijkt dat 35% van de flesjes minder dan 20 cL bevat.

Uit deze gegevens volgt dat $\sigma_X \approx 0,260$.**a** Bereken σ_X in vier decimalen nauwkeurig.**b** Bereken de kans dat van 24 flesjes de gemiddelde inhoud minder dan 20 cL is.

De flesjes worden in kratten van 24 flesjes vervoerd.

Bij een supermarkt worden 25 kratten afgeleverd.

c Bereken de kans dat in minstens één van deze kratten de gemiddelde inhoud per flesje minder is dan 20 cL.**A 55** Van de bonbons uit een grote partij is het gemiddelde gewicht 37 gram en de standaardafwijking 5 gram.

De bonbons worden verpakt in dozen. Volgens de leverancier is het gemiddelde gewicht van de bonbons in een doos minstens 35 gram. Hij beweert dat meer dan 98% van de dozen aan deze voorwaarde voldoet.

Hoeveel bonbons stopt de leverancier in een doos?

A 56 Een theefabrikant verpakt 40 theezakjes in een pakje. Het gewicht van de theezakjes is normaal verdeeld met $\mu = 5,3$ gram en $\sigma = 0,5$ gram.**a** Bereken de kans dat een theezakje minder dan 5 gram weegt.**b** Bereken de kans dat een pakje minder dan 200 gram bevat.**c** Van hoeveel procent van de pakjes wijkt het gemiddelde gewicht per theezakje meer dan 0,1 gram af van 5,3 gram?**d** Op de verpakking staat: 'gemiddeld gewicht per theezakje minstens 5 gram'.

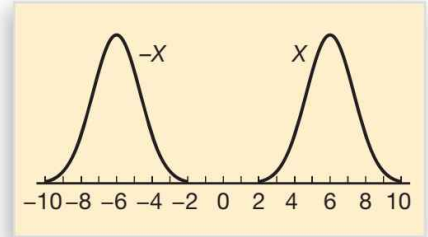
Hoeveel theezakjes zou de fabrikant in een pakje moeten doen als hij wil dat in niet meer dan 2% van de gevallen deze bewering niet wordt waargemaakt?

O57

Bij elke toevalsvariabele X hoort de toevalsvariabele $-X$.

Neem aan dat X normaal verdeeld is.

- Wat denk je, is $-X$ ook normaal verdeeld?
- Wat denk je, is $\mu_{-X} = -\mu_X$? Licht toe.
- Wat denk je, is $\sigma_{-X} = -\sigma_X$? Licht toe.



Theorie C Som en verschil van normaal verdeelde toevalsvariabelen

Bij productieprocessen komt het nogal eens voor dat je te maken hebt met de som van twee of meer verschillende normaal verdeelde toevalsvariabelen.

Volgens een regel uit de mathematische statistiek is in dat geval de som $S = X + Y$ van de normaal verdeelde toevalsvariabelen X en Y ook weer normaal verdeeld. Ook het verschil $V = X - Y$ is normaal verdeeld.

De som en het verschil van normaal verdeelde toevalsvariabelen zijn normaal verdeeld.

Voor het gemiddelde μ_S en de standaardafwijking σ_S van $S = X + Y$

ken je al de formules $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$ en $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$. De enige voorwaarde voor de tweede formule is dat X en Y onafhankelijke toevalsvariabelen zijn.

En ook voor het verschil $V = X - Y$ van de onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt $\sigma_V = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$. Je kunt dit begrijpen door te bedenken dat $\sigma_Y = \sigma_{-Y}$, want Y en $-Y$ hebben dezelfde spreiding.

Voor elk tweetal normaal verdeelde toevalsvariabelen X en Y geldt

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y \text{ en } \mu_{X-Y} = \mu_X - \mu_Y.$$

Voor elk tweetal onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt

$$\sigma_{X+Y} = \sigma_{X-Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

Zoals voor twee onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y \text{ en } \sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}, \text{ zo geldt voor de som } S \text{ van } n$$

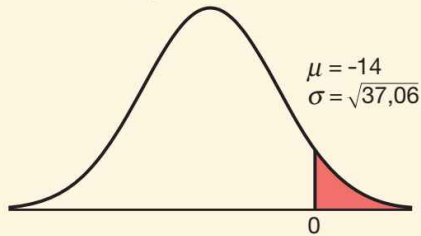
onafhankelijke toevalsvariabelen $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ dat

$$\mu_S = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \dots + \mu_{X_n} \text{ en } \sigma_S = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2}.$$

Voorbeeld

Bij een basketbalvereniging is de lengte H van de heren normaal verdeeld met $\mu_H = 1,86$ m en $\sigma_H = 4,5$ cm. De lengte D van de dames is normaal verdeeld met $\mu_D = 1,72$ m en $\sigma_D = 4,1$ cm. Bereken de kans dat een willekeurig gekozen dame langer is dan een willekeurig gekozen heer.

Uitwerking



De dame is langer dan de heer als $D > H$ ofwel $D - H > 0$, dus $V > 0$ met $V = D - H$. V is normaal verdeeld met $\mu_V = 172 - 186 = -14$ cm en $\sigma_V = \sqrt{4,5^2 + 4,1^2} = \sqrt{37,06}$ cm.
 $P(\text{dame is langer dan heer}) = P(V > 0) = \text{normalcdf}(0, 10^{99}, -14, \sqrt{37,06}) \approx 0,011$

R 58 Zie het voorbeeld.

In plaats van $V = D - H$ kun je ook nemen $V = H - D$. Geef de uitwerking die bij deze keuze hoort.

- 59** Bij pakken rijst is het gewicht X van de verpakking normaal verdeeld met gemiddelde 5 gram en standaardafwijking 0,3 gram. De hoeveelheid rijst Y in een pak is normaal verdeeld met gemiddelde 248 gram en standaardafwijking 12 gram. In hoeveel procent van de gevallen is het brutogewicht meer dan 250 gram?

- 60** Bij de fabricage van een artikel zijn vier fasen te onderscheiden. De tijdsduur van elke fase is normaal verdeeld.
- In hoeveel procent van de gevallen duurt het produceren van een artikel langer dan één minuut?
 - In hoeveel procent van de gevallen duurt het produceren van 10 artikelen langer dan 10 minuten?

fase	μ	σ
I	12 s	0,5 s
II	8 s	0,3 s
III	20 s	0,8 s
IV	18 s	1,6 s

- A 61** Een machine vult flessen met limonade. De inhoud X van de flessen is normaal verdeeld met $\mu_X = 1015$ mL en $\sigma_X = 4$ mL. De door de vulmachine geleverde hoeveelheid limonade Y is normaal verdeeld met $\sigma_Y = 8$ mL.
- Neem $\mu_Y = 1005$ mL en bereken in hoeveel procent van de gevallen er bij het vullen limonade verloren gaat.
 - Op welk gemiddelde moet de vulmachine worden ingesteld opdat in niet meer dan 0,2% van de gevallen limonade bij het vullen verloren gaat? Rond af op één decimaal.

- D 62** Van een grote groep mannen is de lengte normaal verdeeld met een gemiddelde van 178 cm en een standaardafwijking van 6 cm. Er worden willekeurig 12 tweetallen uit de groep aangewezen. Bereken de kans dat bij minstens twee van deze tweetallen het onderlinge lengteverschil meer dan 15 cm is.

Terugblik

De centrale limietstelling

Volgens de centrale limietstelling is de som $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ van n gelijke, onderling onafhankelijke toevalsvariabelen X met verwachtingswaarde $E(X)$ en standaardafwijking σ_X voor grote waarden van n bij benadering normaal verdeeld met $\mu_S = n \cdot E(X)$ en $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$.

Het gemiddelde $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ van n gelijke, onderling onafhankelijke toevalsvariabelen X met verwachtingswaarde $E(X)$ en standaardafwijking σ_X is voor grote waarden van n bij benadering normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = E(X)$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

De appels van fruitteler Bot wegen gemiddeld 182 gram met een standaardafwijking van 7 gram. Bot doet telkens 110 appels in een kist. De kans dat een kist minder dan 20 kg bevat bereken je als volgt.

S = het gewicht van 110 appels in een kist.

S is normaal verdeeld met $\mu_S = 110 \cdot 0,182 = 20,02$ kg en $\sigma_S = 0,007\sqrt{110}$ kg.

$$P(S < 20) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 20, 20,02, 0,007\sqrt{110}) \approx 0,393$$

De kans dat het gemiddelde gewicht van de appels in een kist meer is dan 183 gram bereken je als volgt.

$\bar{X}$ = het gemiddelde gewicht in gram van de appels.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 182$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{7}{\sqrt{110}}$.

$$P(\bar{X} > 183) = \text{normalcdf}\left(183, 10^{99}, 182, \frac{7}{\sqrt{110}}\right) \approx 0,067$$

Som en verschil van normaal verdeelde toevalsvariabelen

De som $S = X + Y$ en het verschil $V = X - Y$ van de normaal verdeelde toevalsvariabelen X en Y zijn normaal verdeeld.

Er geldt $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$ en $\mu_V = \mu_X - \mu_Y$ en $\sigma_S = \sigma_V = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.

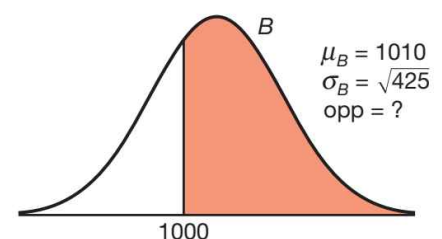
De formules voor σ_S en σ_V geldt alleen als X en Y onafhankelijk zijn.

Bij pakken cornflakes is het gewicht X in gram van de verpakking normaal verdeeld met $\mu_X = 40$ en $\sigma_X = 5$.

Het gewicht Y in gram van de cornflakes in een pak is normaal verdeeld met $\mu_Y = 970$ en $\sigma_Y = 20$.

Voor het brutogewicht $B = X + Y$ geldt $\mu_B = 40 + 970 = 1010$ en $\sigma_B = \sqrt{5^2 + 20^2} = \sqrt{425}$.

$$P(B > 1000) = \text{normalcdf}(1000, 10^{99}, 1010, \sqrt{425}) \approx 0,686$$



12.5 De exponentiële verdeling

63

In een haven arriveren gemiddeld twee schepen per uur. De kans dat er in een willekeurig uur k schepen arriveren kun je berekenen met de poissonverdeelde toevalsvariabele X = het aantal schepen dat in een bepaald uur arriveert.

Dus $P(X = k) = e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}$.

- Bereken exact de kans dat er tussen acht en negen uur één schip arriveert.
- Bereken exact de kans dat er tussen negen en tien uur meer dan één schip arriveert. Gebruik $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.
- Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat er tussen tien en elf uur hoogstens twee schepen arriveren. Gebruik $P(X \leq 2) = \text{poissoncdf}(\lambda, 2)$ (TI) of $P(X \leq 2) = \text{PoissonCD}(2, \lambda)$ (Casio).

Theorie A De poissonverdeling en de exponentiële verdeling

Je hebt te maken met de poissonverdeling als je weet dat er op het tijdsinterval $[0, 1]$ gemiddeld λ keer een succes optreedt. Deze successen moeten volkomen willekeurig zijn verdeeld in de tijd. Voor een toevalsvariabele X die poissonverdeeld is met parameter λ geldt de kansverdeling $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. Hierin is X het aantal successen op $[0, 1]$ en λ het gemiddelde aantal successen op $[0, 1]$.

We kijken nu naar de toevalsvariabele X die het aantal successen op het interval $[0, t]$ geeft, waarbij λ nog steeds het gemiddelde aantal successen is op het interval $[0, 1]$.

Het gemiddelde aantal successen op $[0, t]$ is t keer zo groot als op $[0, 1]$. Daarom vervangen we in de formule λ door $t\lambda$. Dit geeft de

kansverdeling $P(X = k) = e^{-t\lambda} \cdot \frac{(t\lambda)^k}{k!}$. Hierin is X het aantal

successen op het interval $[0, t]$ en λ het gemiddelde aantal successen op $[0, 1]$.

De poissonverdeelde toevalsvariabele X is een discrete toevalsvariabele: X kan 0 zijn, of 1, of 2, enzovoort.

De tijd T die tussen twee poissonsuccessen zit is echter een continue toevalsvariabele. Deze tijd is per definitie **exponentieel verdeeld**.

Om de formule van de verdelingsfunctie van T af te leiden gebruiken we $P(T \leq t) = P(X \geq 1)$. Immers, de tijd tussen twee successen is kleiner dan of gelijk aan t als X op $[0, t]$ minstens één succes heeft.

Zo krijg je

$$P(T \leq t) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

De verdelingsfunctie van de exponentieel verdeelde toevalsvariabele

$$T \text{ is dus } F_{\lambda}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$$

Voor de kansdichtheid f_{λ} moet de afgeleide van F_{λ} worden berekend.

$$\text{Differentiëren geeft } f_{\lambda}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$$

Omdat bij een exponentieel verdeelde toevalsvariabele T het gemiddelde aantal successen op $[0, 1]$ gelijk is aan λ , is de

verwachtingswaarde van T gelijk aan $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

De exponentiële verdeling is vaak van toepassing bij **wachttijd-problemen**, zoals de tijd die er zit tussen twee telefoontjes die binnenkomen bij de belastingtelefoon. De verwachtingswaarde wordt dan de **gemiddelde wachttijd** genoemd en wordt genoteerd met μ . Komen er gemiddeld 10 telefoontjes per minuut binnen, dan is de gemiddelde wachttijd $\frac{1}{10}$ minuut, dus $\lambda = 10$ en $\mu = \frac{1}{10}$.

De exponentiële verdeling modelleert de tijd tussen twee gebeurtenissen bij een poissonverdeling.

De exponentieel verdeelde toevalsvariabele T is gedefinieerd

$$\text{door de kansdichtheid } f_{\lambda}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Voor de verdelingsfunctie van } T \text{ geldt } F_{\lambda}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$$

Hierin is λ de parameter van de exponentiële verdeling.

$$\text{De verwachtingswaarde is } E(T) = \frac{1}{\lambda}.$$

De exponentiële verdeling wordt ook gebruikt bij berekeningen over de levensduur van apparaten. Hierbij is μ de gemiddelde levensduur van het apparaat.

In het voorbeeld is de gemiddelde reparatietijd drie uur, dus $\mu = 3$ en hieruit volgt $\lambda = \frac{1}{3}$.

Voorbeeld

De tijd T in uren die een reparatie van een defecte robot in een autofabriek duurt, is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is drie uur.

- Bereken exact de kans dat een defecte robot binnen drie uur is gerepareerd.
- Bereken exact de kans dat een reparatie langer dan anderhalf uur duurt.
- De kans dat de reparatie korter duurt dan x uur is 0,8. Bereken x in minuten nauwkeurig.

Uitwerking

- a** $\mu = 3$, dus $\lambda = \frac{1}{3}$

$$P(T < 3) = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 3} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

- b** $P(T > 1\frac{1}{2}) = 1 - P(T \leq 1\frac{1}{2}) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}}) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

- c** $P(T < x) = 0,8$ geeft $1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot x} = 0,8$
 $e^{-\frac{1}{3}x} = 0,2$
 $-\frac{1}{3}x = \ln(0,2)$
 $x = -3 \ln(0,2) \approx 4,828$

Dus 4 uur en 50 minuten.

Je kunt bij opgaven die gaan over de exponentiële verdeling altijd gebruik maken van de poissonverdeling. Als de kansen niet exact worden gevraagd kun je de opties poissonpdf en poissoncdf van de GR gebruiken.

De uitwerkingen van voorbeeld a en b gaan dan als volgt.

- a** X = het aantal defecte robots dat binnen drie uur wordt gerepareerd.
 X is poissonverdeeld met $\lambda = 1$.
 $P(T < 3) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \text{poissonpdf}(1, 0) \approx 0,632$
- b** X = het aantal defecte robots dat binnen anderhalf uur wordt gerepareerd.
 X is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{1}{2}$.
 $P(T > 1\frac{1}{2}) = P(X = 0) = \text{poissonpdf}(\frac{1}{2}, 0) \approx 0,607$

R64 Zie het voorbeeld.

- Licht toe dat bij voorbeeld a de toevalsvariabele X poissonverdeeld is met $\lambda = 1$ en dat geldt $P(T < 3) = P(X \geq 1)$.
- Licht toe dat bij voorbeeld b de toevalsvariabele X poissonverdeeld is met $\lambda = \frac{1}{2}$ en dat geldt $P(T > 1\frac{1}{2}) = P(X = 0)$.

- 65** Bij de belastingtelefoon komen tijdens kantooruren gemiddeld 10 telefoontjes per minuut binnen. De tijd T in minuten tussen twee telefoontjes is exponentieel verdeeld.
- Bereken exact de kans dat er tijdens kantooruren minder dan een halve minuut tussen twee opeenvolgende telefoontjes zit.
 - Bereken de kans dat er tijdens kantooruren minder dan vijf seconden tussen twee opeenvolgende telefoontjes zit.
 - Bereken de kans dat er tijdens kantooruren meer dan tien seconden tussen twee opeenvolgende telefoontjes zit.
- 66** De tijd T in minuten dat het duurt voordat je bij de helpdesk van een internetprovider iemand aan de lijn hebt, is exponentieel verdeeld. De gemiddelde wachttijd is twee minuten.
- Bereken exact de kans dat je binnen twee minuten iemand aan de lijn hebt.
 - Bereken de kans dat je langer dan vier minuten moet wachten.
 - De kans dat je binnen x minuten iemand aan de lijn hebt is 0,75. Bereken x in seconden nauwkeurig.

- 67** Bij de helpdesk van een internetprovider komen op een maandagochtend gemiddeld 40 telefoontjes per uur binnen. De tijd T in minuten die tussen twee telefoontjes zit is exponentieel verdeeld.
- Bereken de kans dat er op een maandagochtend gedurende vijf minuten geen enkel telefoontje binnenkomt.
 - Bereken de kans dat er op een maandagochtend gedurende drie minuten precies twee telefoontjes binnenkomen.
 - De kans dat op een maandagochtend het volgende telefoontje na minder dan x minuten binnenkomt is 0,9. Bereken x in seconden nauwkeurig.



- 68** De toevalsvariabele X is exponentieel verdeeld met parameter λ .
- Bewijs dat voor alle positieve a en b geldt $P(X > a + b) = P(X > a) \cdot P(X > b)$.
 - Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt $P(X > n) = (P(X > 1))^n$. Gebruik het resultaat van vraag a.

A 69 De levensduur T in jaren van elektrische tandenborstels is exponentieel verdeeld.

Uit onderzoek blijkt dat 20% van de elektrische tandenborstels van merk A binnen een jaar defect is.

Uit deze gegevens volgt dat, afgerond op twee decimalen, de gemiddelde levensduur van deze tandenborstels 4,48 jaar is.

a Toon dit aan.

De elektrische tandenborstels van merk B gaan gemiddeld twee jaar mee. Daan en Sophie kopen elk een elektrische tandenborstel van merk B.

b Bereken de kans dat deze tandenborstels allebei een levensduur hebben van minstens 500 dagen.

We bekijken 10 000 elektrische tandenborstels van merk B.

c Hoeveel van deze tandenborstels hebben naar verwachting een levensduur langer dan 3 jaar?

d Er zijn 100 van deze 10 000 tandenborstels die een levensduur hebben van minstens x dagen.

Bereken x in gehelen nauwkeurig.

A 70 Een apparaat bevat de onderdelen A en B. Deze onderdelen kunnen op willekeurige momenten onafhankelijk van elkaar defect raken. Bij onderdeel A is dat gemiddeld na één week, en bij onderdeel B is dat gemiddeld na twee weken. Neem aan dat de tijd die tussen twee defecten ligt bij beide onderdelen exponentieel verdeeld is. Bereken de kans dat

a op een willekeurige dag A en B beide één keer defect raken

b de komende twee weken A en B geen van beide defect raakt

c A en B beide binnen één week defect raken.

A 71 In een fabriek staat een machine die zeer nauwkeurig moet werken. De machine moet gemiddeld eens per acht dagen worden bijgesteld. De tijd T in dagen die tussen twee keer bijstellen zit is exponentieel verdeeld.

De kansdichtheid van T is f en de verdelingsfunctie van T is F .

a Stel het functievoorschrift op van f en van F .

b Bereken $\int_2^4 f(t) dt$ en geef de betekenis van de uitkomst.

c Bereken de kans dat de machine langer dan 10 dagen niet bijgesteld hoeft te worden.

d Bereken de kans dat gedurende acht dagen de machine twee keer moet worden bijgesteld.

e De kans dat de machine gedurende een periode van x dagen elke dag moet worden bijgesteld is groter dan 0,0001.

Bereken welke waarden x kan aannemen.

072

De levensduur T in uren van lampen van het type A is exponentieel verdeeld. De gemiddelde levensduur is 2500 uur. We doen het volgende experiment. We laten een lamp branden totdat deze defect raakt en vervangen deze meteen door een tweede lamp. We vragen ons af hoe groot de kans is dat de totale levensduur van deze twee lampen hoogstens 2500 uur is. We moeten dus de kans $P(T + T \leq 2500)$ berekenen. Stel Y = het aantal lampen dat defect raakt binnen 2500 uur, als we de lampen na elkaar laten branden. Y is poissonverdeeld met $\lambda = 1$.

- Licht toe dat $\lambda = 1$ en dat geldt $P(T + T \leq 2500) = P(Y \geq 2)$.
- Reken na dat $P(Y \geq 2) \approx 0,264$ en geef de exacte waarde van deze kans.
- Reken na dat $P(Y \geq 3) \approx 0,080$ en geef de exacte waarde van deze kans.

Theorie B De som van exponentieel verdeelde toevalsvariabelen

De toevalsvariabele $X = T + T$ in opgave 72 is een voorbeeld van de som van twee exponentieel verdeelde toevalsvariabelen. Om de formule van de verdelingsfunctie van $X = T + T$ af te leiden berekenen we $P(X \leq x) = P(T + T \leq x)$. Dit is de kans dat de poissonverdeelde toevalsvariabele Y met gemiddeld λ successen op $[0, 1]$ minstens twee successen op $[0, x]$ heeft.

Zie figuur 12.27 waarin s een succes aangeeft.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq x) &= P(T + T \leq x) = P(Y \geq 2) \\
 &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\
 &= 1 - e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^0}{0!} - e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^1}{1!} \\
 &= 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} \cdot \lambda x = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}
 \end{aligned}$$

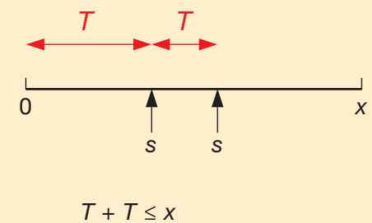
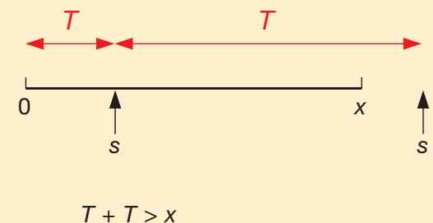
De verdelingsfunctie van de som X van twee exponentieel verdeelde toevalsvariabelen met parameter λ is dus

$$F_{\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

Merk op dat de som van twee exponentieel verdeelde toevalsvariabelen niet exponentieel verdeeld is.

Net zoals je voor de som van twee exponentieel verdeelde toevalsvariabelen de formule van de verdelingsfunctie kunt opstellen, kun je dat ook doen voor de som van n exponentieel verdeelde toevalsvariabelen.

De som van n gelijke, exponentieel verdeelde toevalsvariabelen wordt een **gammaverdeling** genoemd.



figuur 12.27

Voorbeeld

De tijd T in uren die een monteur nodig heeft voor de reparatie van een defecte laptop is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is 45 minuten.

- Bereken exact de kans dat de monteur twee laptops binnen één uur repareert.
- Bereken de kans dat de monteur vijf laptops binnen drie uur repareert.
- De kans dat de monteur binnen a uur drie laptops repareert is 0,8.
Bereken a in minuten nauwkeurig.

Aanpak.

- De gemiddelde reparatietijd is drie kwartier, dus in drie uur verwacht je $\frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$ laptops te repareren.

Uitwerking

- X = het aantal laptops dat binnen één uur wordt gerepareerd.

X is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{4}{3}$, want $\mu = \frac{4}{3}$.

$$P(T + T < 1) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) =$$

$$1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^0}{0!} - e^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^1}{1!} =$$

$$1 - e^{-\frac{4}{3}} - \frac{4}{3}e^{-\frac{4}{3}} = 1 - 2\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$$

- X = het aantal laptops dat binnen drie uur wordt gerepareerd.

X is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$.

$$P(T + T + T + T + T < 3) = P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) =$$

$$1 - \text{poissoncdf}(4, 4) \approx 0,371$$

- X = het aantal laptops dat binnen a uur wordt gerepareerd.

X is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{a}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}a$.

$$P(T + T + T < a) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) =$$

$$1 - \text{poissoncdf}\left(1\frac{1}{3}a, 2\right).$$

$$\text{Los op } 1 - \text{poissoncdf}\left(1\frac{1}{3}a, 2\right) = 0,8.$$

Voer in $y_1 = 1 - \text{poissoncdf}\left(1\frac{1}{3}x, 2\right)$ (TI) of

$$y_1 = 1 - \text{PoissonCD}\left(2, 1\frac{1}{3}x\right) \text{ (Casio) en } y_2 = 0,8.$$

Intersect geeft $x = 3,20\dots$

Dus $a = 3,20\dots$ uur ≈ 3 uur en 13 minuten.

- 73** De tijd T in uren die een monteur nodig heeft voor de reparatie van een defecte televisie is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is 40 minuten.
- Bereken exact de kans dat de monteur twee televisies binnen één uur repareert.
 - Bereken de kans dat de monteur zes televisies binnen vier uur repareert.
 - De kans dat de monteur binnen a uur vier televisies repareert is 0,95.
Bereken a in minuten nauwkeurig.
- 74** De toevalsvariabele T is exponentieel verdeeld met parameter λ .
- Stel de formule op van de kansdichtheid van $X = T + T$.
 - Stel de formules op van de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van $X = T + T + T$.
- 75** De toevalsvariabele T is exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = \frac{1}{4}$.
- Bereken exact $P(2 < T < 5)$.
 - Bereken exact $P(T + T > 6)$.
 - Bereken $P(T + T + T < 10)$.

- A76** Bij supermarkt Doko moet een klant gemiddeld 200 seconden wachten voordat hij aan de beurt is. Daarna heeft de kassamedewerker gemiddeld nog 100 seconden nodig voordat de klant de winkel kan verlaten. Ga ervan uit dat deze twee wachttijden exponentieel verdeeld zijn.
- Bereken exact de kans dat een klant bij twee bezoeken aan de supermarkt in totaal minder dan vijf minuten hoeft te wachten voordat hij aan de beurt is.
 - Bereken de kans dat een klant minder dan 100 seconden moet wachten en dat de kassamedewerker vervolgens meer dan 100 seconden nodig heeft om de klant te helpen.
 - Bereken de kans dat de kassamedewerker in vijf minuten meer dan vijf klanten helpt.
 - De kans dat de kassamedewerker binnen a minuten tien klanten helpt is 0,6.
Bereken a in gehelen nauwkeurig.



D 77 De som X van n exponentieel verdeelde toevalsvariabelen $X_1, X_2, \dots, X_n$ met parameter λ heeft de gammaverdeling met parameters n en λ .

De kansdichtheid van de gammaverdeling is gegeven door

$$f_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

- a Toon aan dat de formule juist is voor $n = 1$, $n = 2$ en $n = 3$.
- b De toevalsvariabelen $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ zijn exponentieel verdeeld met parameter λ .

Licht toe dat $P(a < X_1 + X_2 + \dots + X_{10} < b) = \int_a^b \frac{\lambda^{10}}{9!} \cdot x^9 \cdot e^{-\lambda x} dx$.

De levensduur van lampen van het type A is exponentieel verdeeld met een gemiddelde levensduur van 1200 uur.

De lampen worden gebruikt om een ruimte te verlichten waarin één lamp van dit type brandt. Een defecte lamp wordt onmiddellijk vervangen.

- c Bereken de kans dat 20 lampen samen meer dan 15 000 en minder dan 20 000 uur branden.
- d Bereken de kans dat in de komende 20 000 uur 15 lampen moeten worden vervangen.

Terugblik

De poissonverdeling en de exponentiële verdeling

De poissonverdeling is een discrete kansverdeling die het aantal successen telt die met een zeer kleine kans voorkomen en waarbij het kansexperiment een zeer groot aantal keren wordt uitgevoerd. Je gebruikt de poissonverdeling als je het gemiddelde aantal keren succes λ op een gegeven tijdsinterval weet.

De kans op k keer succes is $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$.

Voor het berekenen van kansen bij de poissonverdeling gebruik je vaak speciale opties van de GR. Notaties: $P(X = k) = \text{poissonpdf}(\lambda, k)$ en $P(X \leq k) = \text{poissoncdf}(\lambda, k)$.

De exponentiële verdeling is een continue kansverdeling die de tijd aangeeft tussen twee successen bij de poissonverdeling. De parameter λ van deze verdeling is het gemiddelde aantal successen op het tijdsinterval $[0, 1]$.

Bij de exponentieel verdeelde toevalsvariabele T hoort

de kansdichtheid $f_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$ en

de verdelingsfunctie $F_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$

Wachttijden

Komen bij een bakker op zaterdagmorgen gemiddeld 90 klanten per uur binnen en is gegeven dat de tijd T die tussen de binnenkomst van twee klanten zit exponentieel verdeeld is, dan bereken je als volgt de kans dat er langer dan een minuut op de volgende klant moet worden gewacht.

Gemiddeld 90 klanten per uur, dus gemiddeld 1,5 klant per minuut, dus $\lambda = 1,5$.

$$P(T > 1) = 1 - P(T \leq 1) = 1 - (1 - e^{-1,5 \cdot 1}) = e^{-1,5} \approx 0,223$$

Bij de vraag 'Bereken de kans dat je minder dan 2 minuten hoeft te wachten op de volgende drie klanten die binnenkomen' heb je te maken met een gammaverdeling.

Stel X = het aantal klanten dat binnen 2 minuten binnenkomt.

X is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{90}{60} \cdot 2 = 3$.

$$P(T + T + T < 2) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \text{poissoncdf}(3, 2) \approx 0,577$$

Je kunt $P(T + T + T < 2)$ ook als volgt berekenen.

$$P(T + T + T < 2) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) =$$

$$1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$$

$$1 - e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} - e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!} - e^{-3} \cdot \frac{3^2}{2!} =$$

$$1 - e^{-3} - 3e^{-3} - 4\frac{1}{2}e^{-3} = 1 - 8\frac{1}{2}e^{-3} \approx 0,577$$

Diagnostische toets

12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie

1 Bereken.

a $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(3x-1)^2} dx$

b $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$

2 Gegeven is de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 e^{-x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$

a Schets de grafiek van f .

b Toon aan dat $G(x) = (-\frac{1}{2}x^2 - x - 1)e^{-x}$ een primitieve is van $g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$.

c Toon aan dat f een kansdichtheid is. Gebruik dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

3 De kansdichtheid van de toevalsvariabele X is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{16}x & \text{voor } 0 \leq x < 4 \\ \frac{1}{36}(x-7)^2 & \text{voor } 4 \leq x < 10 \\ 0 & \text{voor } x \geq 10 \end{cases}$$

a Licht toe dan f inderdaad een kansdichtheid is.

b Stel het functievoorschrift op van de verdelingsfunctie F van X .

c Bereken exact $P(X \geq 6)$.

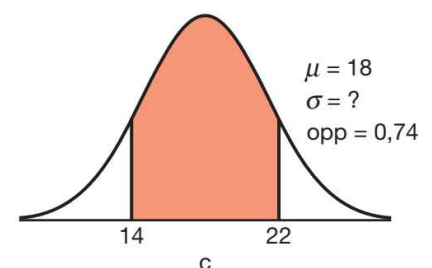
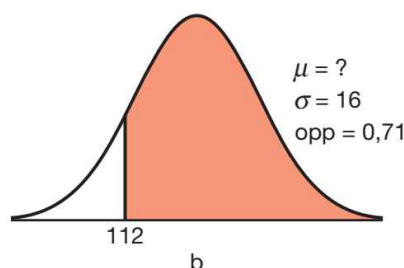
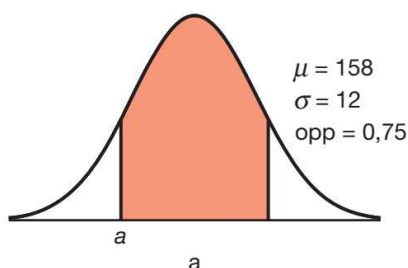
12.2 De normale verdeling

4 Gegeven is de kansverdeling van de discrete toevalsvariabele X hiernaast.

Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X in twee decimalen nauwkeurig.

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,27	0,24	0,16	0,08

5 a Het rode gebied onder de normaalkromme in figuur 12.28a is symmetrisch. Bereken a .



figuur 12.28

b Bereken μ bij de gegeven oppervlakte in figuur 12.28b.

c Bereken σ bij de gegeven oppervlakte in figuur 12.28c.

- 6 Van een normale verdeling is het gemiddelde 220 en de standaardafwijking 35. De oppervlakte van het gebied tussen 230 en 260 wordt door de verticale lijn bij a in twee stukken met gelijke oppervlakte verdeeld.
Bereken a in één decimaal nauwkeurig.

12.3 Toepassingen van de normale verdeling

- 7 Een machine vult dozen drop. De inhoud van de dozen is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 4 gram. De vulmachine kan worden ingesteld op elk gemiddelde tussen 247 en 256 gram. Bij welk instelgemiddelde zal slechts 10% van de dozen een inhoud van minder dan 250 gram hebben? Rond af op één decimaal.
- 8 Van een partij moeren is de diameter normaal verdeeld met een gemiddelde van 14,31 mm en een standaardafwijking van 0,12 mm. Bereken de kans dat in een steekproef van 100 moeren er minstens tien bij zijn met een diameter van meer dan 14,50 mm.

12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen

- 9 Van de inhoud van potten appelmoes van merk A is het gemiddelde gewicht 720 gram en de standaardafwijking 14 gram. De potten worden verpakt in dozen van 24 stuks.
Hoeveel procent van de dozen heeft een gemiddelde inhoud per pot van minder dan 715 gram?
- 10 Bij een productieproces worden drie fasen doorlopen. De duur van elke fase is normaal verdeeld. Fase I duurt gemiddeld 19,3 minuten en de standaardafwijking is 2,5 minuten. Voor fase II is $\mu = 12,5$ minuten en $\sigma = 1,5$ minuten en voor fase III is $\mu = 10,7$ minuten en $\sigma = 1,2$ minuten.
In hoeveel procent van de gevallen duurt het productieproces langer dan drie kwartier?

12.5 De exponentiële verdeling

- 11 De levensduur T in jaren van een laptopaccu van merk A is exponentieel verdeeld met een gemiddelde levensduur van tweeënhalf jaar.
- Bereken exact de kans dat een accu meer dan vier jaar meegaat.
 - Bereken de kans dat een accu minder dan twee jaar meegaat.
 - De kans dat een accu minder dan x jaar meegaat, is 0,1.
Bereken x in maanden nauwkeurig.
- 12 De tijd T in minuten die Tim nodig heeft voor het repareren van een fiets is exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd is 20 minuten.
- Bereken exact de kans dat Tim vier fietsen in een uur repareert.
 - Bereken exact de kans dat Tim twee fietsen binnen een halfuur repareert.
 - Bereken de kans dat Tim tussen de 25 en 30 fietsen op een dag repareert. Een werkdag heeft acht uur.

De Europese Kangoeroe is een internationale reken- en wiskundewedstrijd die jaarlijks wordt gehouden.

Er zijn opgaven voor

- de basisschool (wizFUN, wizKID en wizSMART)
- de klassen 1 en 2 havo/vwo en 3 havo (wizBRAIN)
- de klassen 4 en 5 havo en 3, 4, 5 en 6 vwo (wizPROF).

Er zijn eenvoudige, iets lastiger en moeilijke opgaven.

In dit boek staan de moeilijke wizPROF opgaven van de jaren 2010 tot en met 2013. Je mag geen rekenmachine gebruiken, maar wel kladpapier.



Kangoeroe-opgaven

K



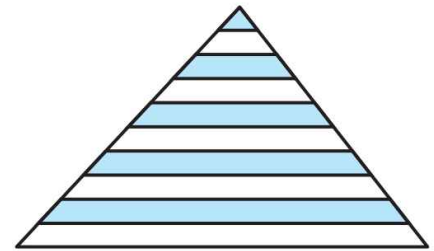
2010

- 1** In deze opgave kijken we naar positieve gehele getallen van drie cijfers waarvan het middelste cijfer het gemiddelde is van de andere twee. Een voorbeeld van zo'n getal is 741. Hoeveel van die getallen zijn er?

A 9 B 12 C 25 D 37 E 45

- 2** In de driehoek hiernaast zie je negen evenwijdige lijnstukken. Die lijnstukken verdelen twee zijden van de driehoek in tien gelijke stukken. Hoeveel procent van de oppervlakte van de driehoek is blauw?

A 42,5% D 47,5%
B 45% E 50%
C 46%



- 3** Hoeveel van de getallen 1^1 , 2^2 , 3^3 tot en met 100^{100} zijn een kwadraat?

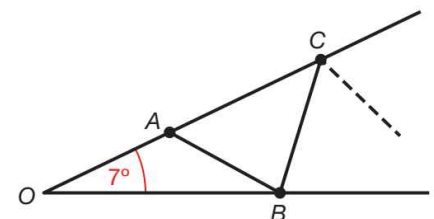
A 5 D 54
B 15 E 55
C 50

- 4** In een meer leven 6-, 7- en 8-armige inktvissen. De 7-armigen liegen altijd, de 6- en 8-armigen spreken altijd de waarheid. Op het strand liggen vier inktvissen bij elkaar: een blauwe, een groene, een gele en een rode. De blauwe inktvis zegt: "Bij elkaar hebben we 28 armen", de groene zegt: "We hebben samen 27 armen", de gele zegt: "We hebben samen 26 armen" en de rode zegt: "We hebben samen 25 armen". Hoeveel armen heeft de rode inktvis?

A 6 D 8
B 6 of 8 E dat kun je niet weten
C 7

- 5** Twee lijnen maken in het punt O een hoek van 7° . Een kangoeroe springt vanuit O om en om op de twee lijnen. Vanuit O naar A , naar B , naar C , enzovoort. Al zijn sprongen zijn even groot. Als hij zo ver mogelijk van O is gekomen, stopt de kangoeroe met springen. Bij welke letter stopt de kangoeroe?

A J B K C L D M E N



- 6 Anton maakt een rij getallen. Hij begint met 1, 2 en 3. Daarna berekent hij elk volgend getal uit de vorige drie als volgt: hij trekt het laatste getal af van de som van de daaraan voorafgaande twee. Zo krijgt hij de rij 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, enzovoort. Wat is het 2010^e getal van deze rij?

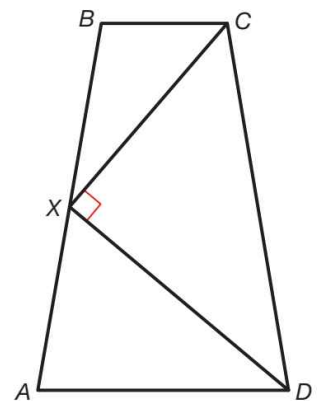
A -2006 B -2004 C -2002 D 2008 E -2008

- 7 De warmwaterkraan van een bad levert water van 64 °C, de koudwaterkraan water van 20 °C. Vol opengedraaid leveren de kranen evenveel water. De warmwaterkraan wordt voor $\frac{2}{3}$ opengedraaid, de koudwaterkraan voor $\frac{4}{5}$. Hoe warm in °C is het water dat in het bad komt?

A 35 B 40 C 45 D 48 E 58

- 8 In een trapezium met $AB = CD = 2$ is X het midden van de zijde AB , en $\angle CXD = 90^\circ$. Wat is de omtrek van het trapezium?

A 5 D 8
B 6 E is niet te bepalen
C 7

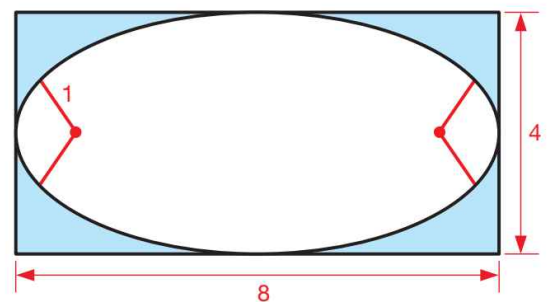


- 9 Een streepjescode als hiernaast bestaat uit een aantal strepen, om en om wit en zwart. De eerste en de laatste streep zijn zwart. Elke streep (wit en zwart) heeft óf breedte 1 óf breedte 2; de totale breedte is 12. Hoeveel verschillende van deze streepjescodes zijn er mogelijk?



A 12 B 24 C 66 D 116 E 132

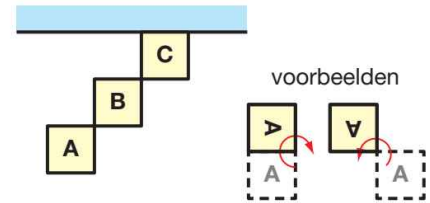
- 10 Een ovaal bestaat uit vier cirkelbogen. De bogen links en rechts zijn gelijk en ook de bogen boven en onder zijn gelijk. Het ovaal heeft een horizontale en een verticale symmetrieas, en geen knikpunten. Het ovaal past precies in een rechthoek van 4 bij 8. De zijden van de rechthoek zijn evenwijdig aan de symmetrieassen van de ovaal. De straal van de kleine cirkelbogen is 1. Wat is de straal van de grote cirkelbogen?



A 6 B 6,5 C 7 D 7,5 E 8

2011

- 11** In het magazijn staan drie grote kisten waar bovenop A, B en C is geschilderd, zoals in het plaatje. De kisten moeten aan de kant worden gezet. Ze zijn zo zwaar dat ze alleen door te draaien om een hoekpunt over 90° kunnen worden verplaatst. Zie de voorbeelden. Welke van de volgende opstellingen is dan mogelijk?



E ze zijn allemaal mogelijk

- 12** Een getal noemen we ‘interessant’ als alle cijfers verschillend zijn en het eerste cijfer de som van de andere cijfers is. Bijvoorbeeld: 62103 is een interessant getal van vijf cijfers. Hoeveel interessante getallen van vijf cijfers zijn er?

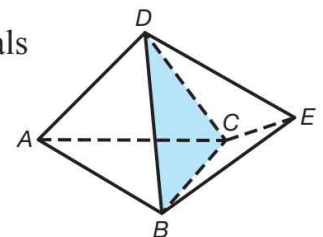
A 72 B 144 C 168 D 216 E 288

- 13** Emmy heeft drie schakelklokken. Iedere schakelklok die stroom krijgt laat gedurende drie uur stroom door, daarna drie uur niet, drie uur weer wel, drie uur weer niet, enzovoort. De klokken draaien alleen als ze stroom krijgen. Emmy zet de schakelklokken in serie voor een lamp en zet ze allemaal gelijk, zodat ze alle drie beginnen aan een periode stroom door te laten. Hoeveel uur zal de lamp de komende week branden?



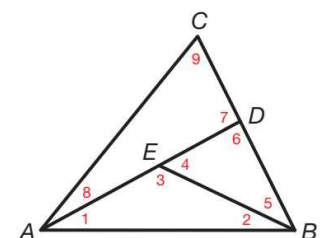
A 0 B 10,5 C 21 D 42 E 84

- 14** Twee regelmatige viervlakken $ABCD$ en $BCDE$ hebben driehoek BCD als gemeenschappelijk zijvlak. $ABCD$ staat met zijvlak ABC op de grond. Waar snijdt de lijn door D en E de grond?



- A Binnen driehoek ABC .
 B Buiten driehoek ABC , maar wel aan dezelfde kant van BC als A .
 C DE snijdt de grond niet.
 D Buiten driehoek ABC en aan de andere kant van BC dan A .
 E Het antwoord hangt af van de lengte van de ribben.

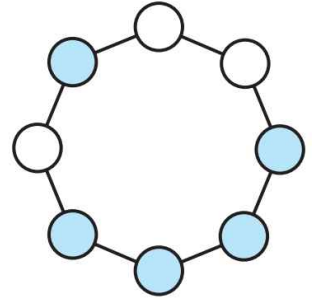
- 15** Iemand kiest een driehoek ABC . Op zijde BC kiest hij een punt D en daarna kiest hij op lijnstuk AD een punt E . Op deze manier krijgt hij een figuur met negen hoeken: 1, 2, 3, ..., 9. Hij wil zo weinig mogelijk hoeken van verschillende grootte. Hoeveel verschillende hoeken zijn er minimaal onder die negen?



A 2 B 3 C 4 D 5 E 6

- 16** Emmy maakt een halsketting met drie witte en vijf blauwe kralen. Hiernaast staat een voorbeeld. Hoeveel verschillende halskettingen kan Emmy maken?

A 4
B 5
C 6
D 7
E 8



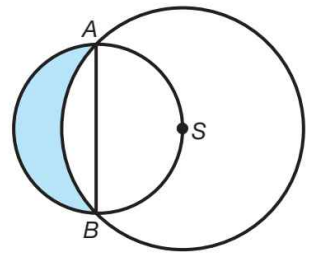
- 17** Meneer Klein, meneer Middel en meneer Groot maken een wandeling. Meneer Groot zegt: “Gek hè, onze namen gaan allemaal over lengtes, maar we hebben allemaal een verkeerde naam.” De kleinste van de drie antwoordt: “Ja, dat is zo.” Hoe heten de heren van klein naar groot?

A Klein, Groot, Middel
B Middel, Klein, Groot
C Middel, Groot, Klein
D Groot, Klein, Middel
E dat kun je niet weten



- 18** AB is een middellijn van de kleine cirkel. Op deze cirkel ligt het middelpunt S van de grote cirkel. De grote cirkel heeft straal r . Wat is de oppervlakte van het blauwe gebied?

A $\frac{1}{4}r^2$
B $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$
C $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}r^2$
D $\frac{1}{2}r^2$
E $\frac{\pi}{6}r^2$

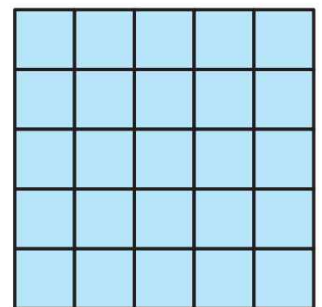


- 19** Emmy wil een viertal ribben van een kubus kiezen met de eigenschap dat geen twee ribben van dat viertal een punt gemeen hebben. Uit hoeveel viertallen kan Emmy kiezen?

A 6
B 8
C 9
D 12
E 18

- 20** Iemand gaat in een 5×5 -tabel wat vakjes aankruisen. Hij doet dit zó dat in ieder vierkant van 3×3 vakjes hetzelfde aantal is aangekruist. Hoeveel kruisjes kunnen er in een 3×3 -vierkant staan? Dat aantal kan natuurlijk 0 en 9 zijn. Welke andere aantallen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) zijn mogelijk?

A alleen 1
B 1 en 2
C 1, 2 en 3
D 1, 2, 7 en 8
E alle aantallen zijn mogelijk



2012

- 21** In elk van de twaalf vakjes wordt een van de getallen 1 tot en met 9 geschreven. De sommen van de rijen moeten hetzelfde zijn en ook de sommen van de kolommen moeten hetzelfde zijn. Welk getal moet er op de plaats van het vraagteken staan?

2	4		2
	3	3	
6		1	?

- A 1
B 4
C 6
D 8
E 9

- 22** Vijf lampjes zijn allemaal uit. Iedere keer als Ismael de schakelaar van een lampje omzet, zet Lisa die van een ander lampje om. Ismael zet tien keer een schakelaar om. Wat kun je zeggen van de lampjes?

- A de lampjes kunnen nooit allemaal tegelijk aan zijn
B alle lampjes moeten aan zijn
C de lampjes kunnen nooit allemaal tegelijk uit zijn
D alle lampjes moeten uit zijn
E geen van de bovenstaande vier antwoorden is juist

- 23** A, B, C, D, E, F, G en H zijn (op volgorde) de hoekpunten van een regelmatige achthoek. Kies willekeurig een van de hoekpunten D, E, F en G en trek het lijnstuk dat dit punt verbindt met A . Kies vervolgens weer willekeurig een van dezelfde vier hoekpunten en verbind dit met B . Wat is de kans dat je de achthoek nu hebt opgedeeld in precies drie gebieden?

- A $\frac{1}{8}$
B $\frac{1}{4}$
C $\frac{3}{8}$
D $\frac{1}{2}$
E $\frac{5}{8}$

- 24** Voor zekere positieve getallen m en k is $2012 = m^m(m^k - k)$. Welk getal is k ?

- A 2
B 3
C 4
D 9
E 11

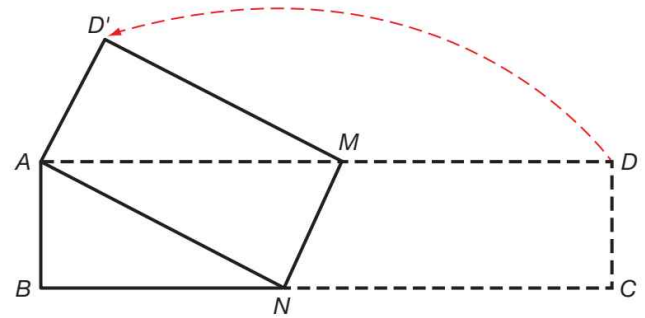
- 25** In een tabel van 15 rijen zijn de getallen 1 tot en met 120 geschreven op de manier van de afbeelding. Tel de getallen per kolom (van boven naar beneden) op. Welke kolom vanaf links geteld heeft de grootste som?

1							
2	3						
4	5	6					
7	8	9	10				
11	12	13	14	15			
106	107	108	109	110	111		120

- A 1^e
B 5^e
C 7^e
D 10^e
E 13^e

- 26** Een rechthoekig stukje papier $ABCD$ van 4 bij 16 cm wordt gevouwen langs de lijn MN zodanig dat punt C op punt A komt te liggen. D gaat naar D' . Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de vijfhoek $ABNMD'$?

A 35
B 37
C 42
D 47
E 57



- 27** Voor elk getal van drie cijfers bereken je het product van de cijfers. Daarna tel je alle producten op. Wat is de uitkomst?

A 45 B 45^2 C 45^3 D 2^{45} E 3^{45}

- 28** Trein G passeert een seinpaal in 8 seconden. Trein H passeert de seinpaal in 12 seconden in tegengestelde richting. De treinen G en H passeren elkaar in 9 seconden. Welke bewering is waar?

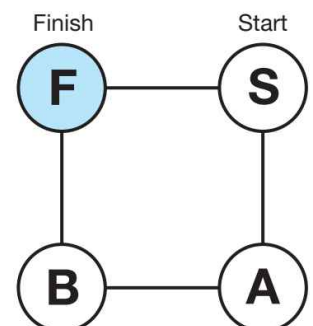
A trein G is twee keer zo lang als trein H
B trein G is anderhalf keer zo lang als trein H
C trein G is even lang als trein H
D trein G is half zo lang als trein H
E je kunt de verhouding van de lengtes van de treinen G en H niet weten

- 29** Van elk getal kun je de *cijfersom* uitrekenen: dat is de som van de cijfers. We noemen een positief geheel getal *leuk* als er geen kleiner getal is met dezelfde cijfersom. Voorbeeld: 29 is leuk, want het is het kleinste getal, waarvan de som van de cijfers 11 is. We tellen alle leuke getallen van drie cijfers op. Wat is de uitkomst?

A 4991 B 5091 C 5191 D 5291 E 5391

- 30** Hiernaast zie je een spelbord. Het spel begint met het plaatsen van een pion op S (Start). Bij elke zet wordt de pion over één lijntje verschoven. Zodra de pion in F (Finish) komt, stopt het spel. De bedoeling is om de pion in precies 13 zetten van S naar F te krijgen. Op hoeveel manieren kan dat?

A 12
B 32
C 64
D 144
E 1024



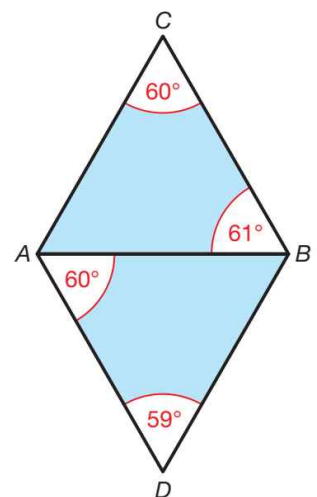
2013

- 31** De procedure ‘verandersom’ maakt van een groep van drie getallen een nieuwe groep: elk getal wordt vervangen door de som van de andere twee. Zo wordt de groep $\{3, 4, 6\}$ door ‘verandersom’ veranderd in de groep $\{10, 9, 7\}$. Deze nieuwe groep wordt door ‘verandersom’ veranderd in weer een nieuwe groep $\{16, 17, 19\}$. We gaan nu de groep $\{1, 2, 3\}$ een aantal keer veranderen met ‘verandersom’.
Hoeveel keer moeten we dat doen om het getal 2013 in de groep te krijgen?

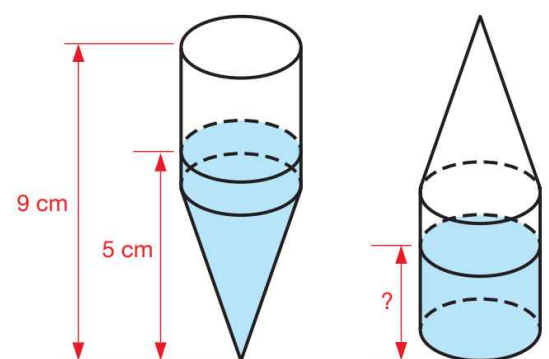
A 8
B 9
C 10
D 2013 komt meer dan één keer in de groep
E 2013 komt nooit in de groep

- 32** Fred heeft een ruit willen tekenen door twee gelijkzijdige driehoeken tegen elkaar aan te leggen. Maar helaas heeft hij niet alle lengtes correct getekend. Het blijkt dat de hoeken zijn zoals ze in de afbeelding staan.
Welk van de volgende vijf lijnstukken in Freds tekening is het langst?

A AB
B AC
C AD
D BC
E BD



- 33** Een container van 9 cm hoog is opgebouwd uit een cilinder en een kegel. De kegel is minder dan 5 cm hoog. De container is voor $\frac{1}{3}$ deel gevuld met water. Als de container met de kegel omlaag wordt gehouden, staat het water 5 cm hoog.
Hoe hoog staat het water als we de container omkeren?



A 1,5 cm
B 2 cm
C 2,5 cm
D 3 cm
E 3,5 cm

- 34** Op een dag in 2013 merken Karel en zijn zoon Fred op: als je onze leeftijden vermenigvuldigt, krijg je 2013.
In welk jaar is Karel geboren?

A 1952
B 1953
C 1980
D 1981
E 1982

- 35** We schrijven het getal $\frac{1}{1024}$ als een eindige decimale breuk.

Je kunt altijd nullen zetten achter een eindige decimale breuk (bijvoorbeeld 0,307 verlengen tot 0,307000), maar overbodige nullen laten we in deze vraag weg.

Hoeveel cijfers staan er achter de komma?

A 7 B 8 C 9 D 10 E 1024

- 36** Fred schrijft elf breuken op. Hij gebruikt elk van de getallen 1 tot en met 22 één keer: óf in een teller óf in een noemer.

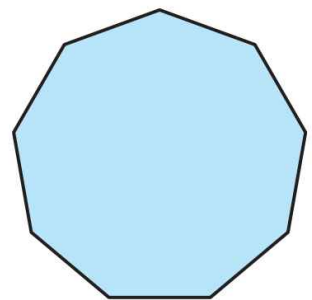
Wat is het grootste aantal breuken dat gelijk is aan een geheel getal?

A 7 B 8 C 9 D 10 E 11

- 37** In een regelmatige negenhoek maken we alle driehoeken met als hoekpunten punten van de negenhoek.

Binnen hoeveel van deze driehoeken ligt het middelpunt van de negenhoek?

A 30 D 36
B 31 E 42
C 32



- 38** In een autorace rijden de auto's elk met constante snelheid. Ze vertrekken om het uur van dezelfde startplaats. De eerste auto rijdt met een snelheid van 50 km/u. De tweede auto vertrekt een uur later met een snelheid van 51 km/u. De derde auto vertrekt weer een uur later met een snelheid van 52 km/u. Zo gaat het door. De laatste auto vertrekt 50 uur na de eerste met een snelheid van 100 km/u.

Wat is de snelheid van de auto die op kop ligt 100 uur na de start van de eerste auto?

A 50 km/u B 66 km/u C 75 km/u D 84 km/u E 100 km/u

- 39** Een tuinman moet 100 bomen langs een pad planten: eiken en linden. Tussen twee eiken mogen niet precies vijf bomen staan. Wat is het grootste aantal eiken dat de tuinman kan planten?

A 15 B 30 C 48 D 50 E 52

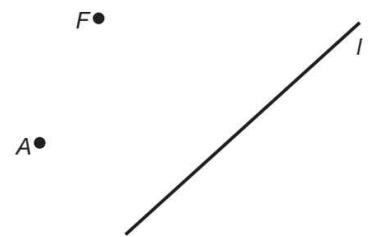
- 40** Daniëlle loopt op straat en ziet een tractor een gerooide boom trekken. Daniëlle besluit de lengte van de boom te meten. Als ze in de rijrichting van de tractor loopt, passeert ze de boom in 140 stappen. Als ze in tegengestelde richting loopt, passeert ze de boom in 20 stappen. Daniëlle maakt stappen van 1 meter. Hoeveel meter is de boom lang?

A 30 B 35 C 40 D 48 E 80

Gemengde opgaven

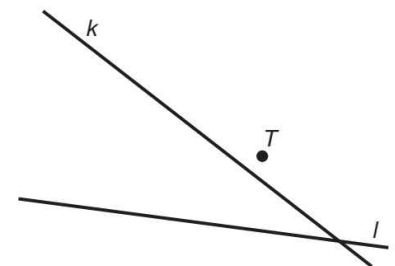
9 Meetkundige plaatsen en raaklijneigenschappen

- 1 a** [►WERKBLAD] In figuur G.1 is A een punt op de parabool p met brandpunt F en richtlijn l . Teken de raaklijn r aan p in A .



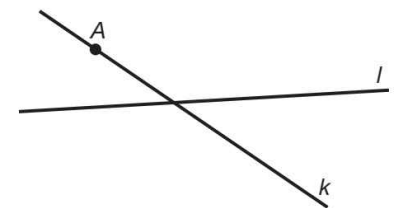
figuur G.1

- b** [►WERKBLAD] In figuur G.2 is T de top van de parabool p met richtlijn l . De lijn k raakt p in het punt A . Teken A .



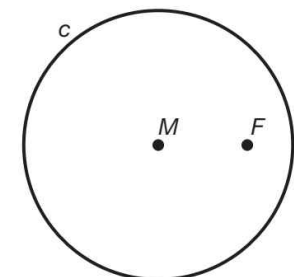
figuur G.2

- c** [►WERKBLAD] In figuur G.3 is A een punt op de parabool p met richtlijn l . De lijn k is de raaklijn van p in A . Teken de top T van p .



figuur G.3

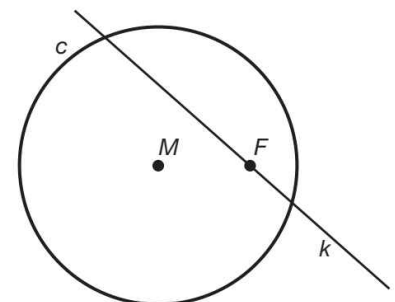
- 2** [►WERKBLAD] Gegeven zijn de cirkel c met middelpunt M en het punt F binnen c .
- a** Teken de punten P waarvoor geldt $d(P, M) = d(P, F) = d(P, c)$.



figuur G.4

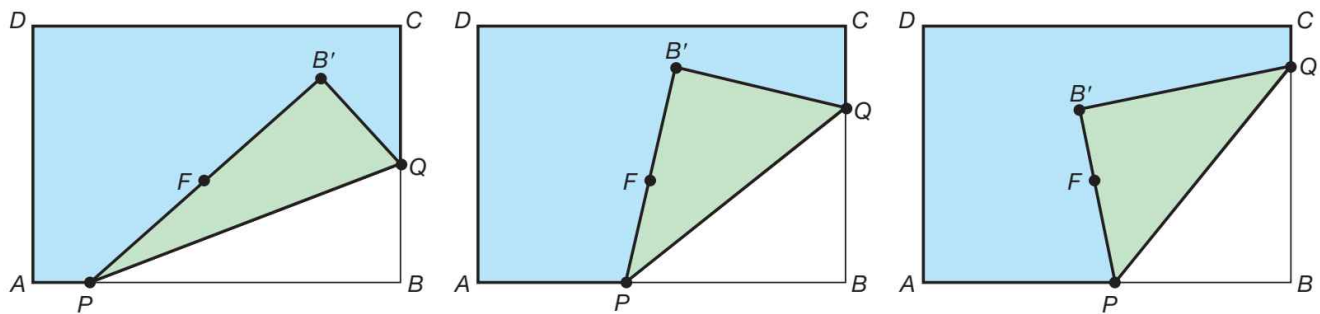
Verder is gegeven de lijn k door F . De ellips e heeft brandpunt F en richtcirkel c .

- b** Teken de snijpunten van e en k .



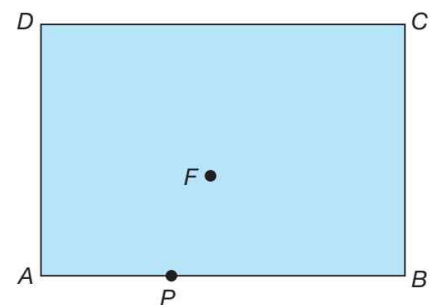
figuur G.5

- 3** [►WERKBLAD] $ABCD$ is een rechthoekig vel papier met daarop een punt F . We vouwen de hoek bij B zo om dat een punt van de rand AB op F komt. Dat kan op allerlei manieren. In figuur G.6 staan drie voorbeelden.



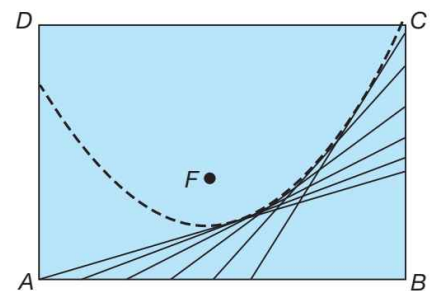
figuur G.6

De vouwlijn noemen we PQ , met P op AB en Q op BC . De plaats van B na het vouwen noemen we B' . In figuur G.7 is op de rand AB een punt P gekozen.
a Teken zonder te vouwen het bijbehorende punt Q .



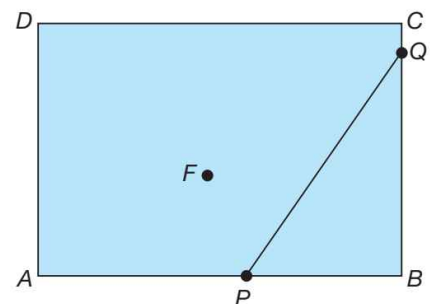
figuur G.7

De vouwlijnen PQ zijn allemaal raaklijn van één parabool. Zie figuur G.8. Deze parabool heeft brandpunt F en richtlijn AB .



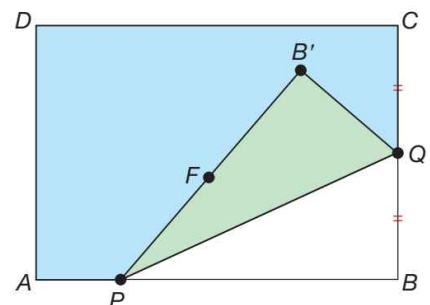
figuur G.8

In figuur G.9 is een van de vouwlijnen PQ getekend. Deze vouwlijn raakt de parabool in een punt R .
b Teken R .



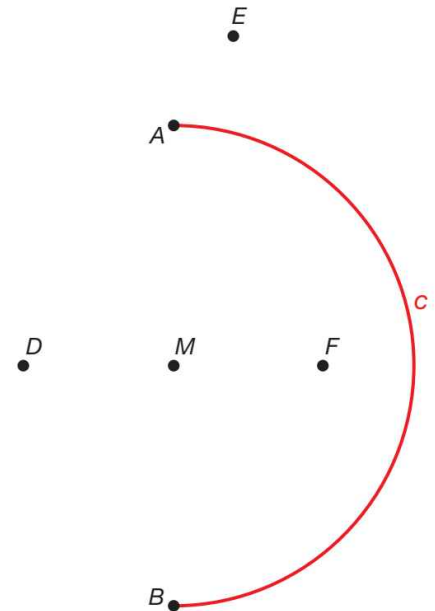
figuur G.9

In figuur G.10 is Q het midden van BC .
c Bewijs dat $\angle BB'C = 90^\circ$.



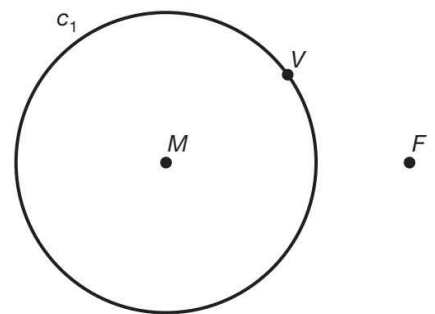
figuur G.10

- 4** [► WERKBLAD] In de figuur hiernaast is c de halve cirkel met middelpunt M en eindpunten A en B . Verder zijn gegeven de punten D , E en F .
- De punten P waarvoor geldt $d(P, D) = d(P, c)$ liggen op twee halve lijnen en een deel van een ellips. Teken de punten waar de halve lijnen overgaan in de ellips.
 - Teken de punten P waarvoor geldt $d(P, D) = d(P, c)$.
 - Teken de punten P waarvoor geldt $d(P, F) = d(P, c)$.
 - Teken de punten P waarvoor geldt $d(P, E) = d(P, c)$.



figuur G.11

- 5** [► WERKBLAD] Van de hyperbooltak h zijn gegeven het brandpunt F en de richtcirkel c_1 met middelpunt M . V is een punt op c_1 . Zie figuur G.12.
- Teken het snijpunt S van MV en h .
 - Teken de asymptoten van h .

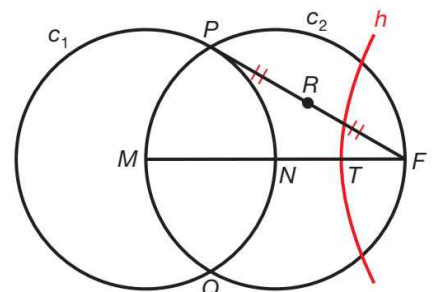


figuur G.12

De cirkel c_2 met middellijn MF en middelpunt N op c_1 , snijdt c_1 in P en Q . Het midden van PF is R .

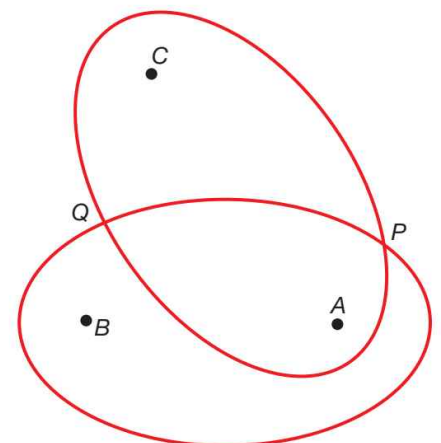
Punt T is de top van de hyperbooltak.

- Bewijs dat $\triangle RNT$ gelijkzijdig is.



figuur G.13

- 6** [► WERKBLAD] Gegeven zijn een ellips met brandpunten A en B en een ellips met brandpunten A en C . De ellipsen snijden elkaar in de punten P en Q .
- Bewijs dat $PB + QC = PC + QB$.
 - Bewijs dat Q op BC ligt als de raaklijnen in Q elkaar loodrecht snijden.

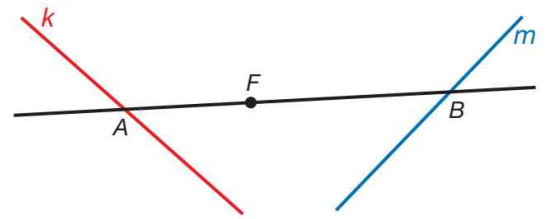


figuur G.14

- 7** [► WERKBLAD] In figuur G.15 zijn A en B punten op de parabool p waarvan het brandpunt F op de lijn AB ligt. De raaklijnen in A en B zijn k en m . Om de richtlijn l van p te tekenen kun je F spiegelen in k en in m . De verbindingslijn van de gespiegelde punten is l .
- a** Licht dit toe en teken l .

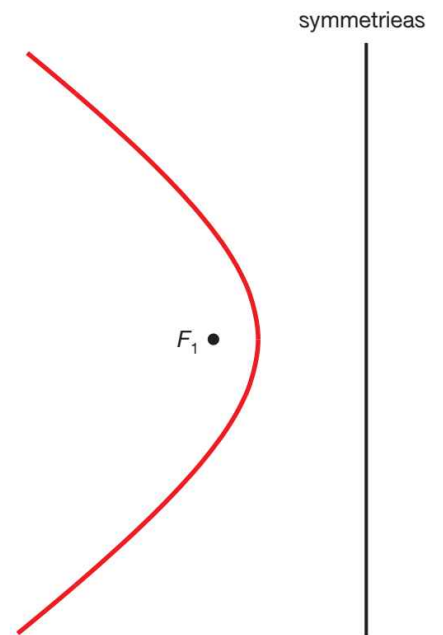
Het lijkt alsof de raaklijnen elkaar snijden op de richtlijn. Zo ontstaat het vermoeden dat de pool P van de poollijn AB op de richtlijn ligt als de lijn AB door het brandpunt F gaat.

b Bewijs dit vermoeden.



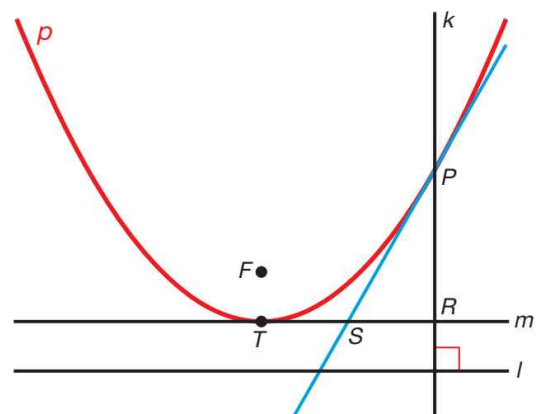
figuur G.15

- 8** [► WERKBLAD] In figuur G.16 is de hyperbooltak met brandpunt F_1 en een symmetrieas getekend. Teken de richtcirkel en de andere hyperbooltak.



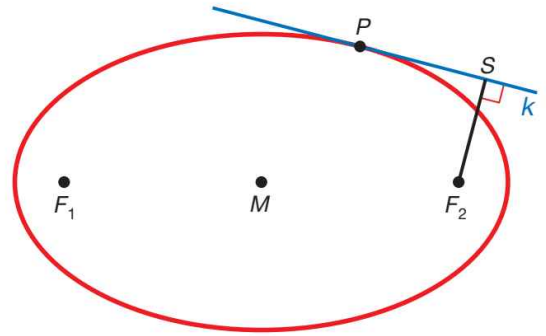
figuur G.16

- 9** [► WERKBLAD] Gegeven is de parabool p met richtlijn l , brandpunt F en top T . De lijn m raakt p in T . De raaklijn in een punt P van de parabool snijdt m in S . De loodlijn k door P op l snijdt m in R . Zie figuur G.17.
- Bewijs dat $ST = SR$.



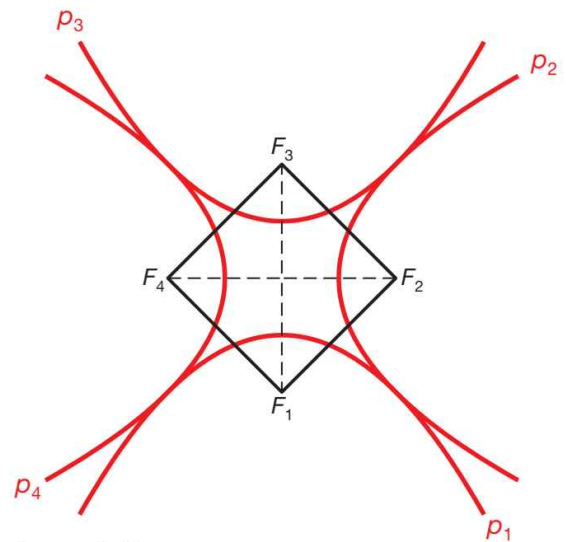
figuur G.17

- 10** [**WERKBLAD**] Gegeven is de ellips met brandpunten F_1 en F_2 en een punt P op de ellips. De lijn k raakt de ellips in P . Het punt S is de loodrechte projectie van F_2 op k . Zie figuur G.18.
- Bewijs dat $MS = \frac{1}{2}(F_1P + F_2P)$.
 - Teken de meetkundige plaats van de punten S .



figuur G.18

- 11** [**WERKBLAD**] Gegeven is het vierkant $F_1F_2F_3F_4$ in figuur G.19. De vier parabolen p_1, p_2, p_3 en p_4 hebben respectievelijk het punt F_1, F_2, F_3 en F_4 als brandpunt, en als richtlijn die diagonaal van het vierkant waar het desbetreffende brandpunt niet op ligt.
- Bewijs dat de parabolen p_1 en p_2 twee gemeenschappelijke raaklijnen hebben.
- Parabool p_1 snijdt de zijde F_1F_2 in een punt S .
- Bewijs dat de raaklijn in S aan p_1 door F_4 gaat.



figuur G.19

10 Complexe getallen

- 12** Bij de volgende formules zijn a en b reële getallen. Maak a vrij en herleid tot een vorm zonder complexe getallen in de noemer.
- $3a + 2b = 6bi - 4ai$
 - $\frac{a + 5i}{b - ai} = 2$
 - $2a - b + (3 - 2a + b)i = 0$
- 13** Schrijf de volgende getallen in de vorm $z = a + bi$. Geef exacte antwoorden.
- $z = \frac{3 + i}{2 + 2i} \cdot \frac{3 - i}{2 + 2i}$
 - $z = (1 - i)^4 \cdot (1 + i)^3$
 - $z = (\cos(\frac{1}{3}\pi) - i\sin(\frac{1}{3}\pi))^2 \cdot (\cos(\frac{1}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\pi))$
 - $z = \overline{(3 + 3i\sqrt{3})^2} \cdot (\sqrt{3} - i)^{-2}$
 - $z = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^4}{-3}$
 - $z = (2 - 2i)^{-2} \cdot (\overline{1 - i\sqrt{3}})^2$

14 Los exact op in $\mathbb{C}$.

- a $(z - 2i)^2 = -4$
- b $z^2 + 2z + 2 = 0$
- c $z^3 = i$
- d $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$
- e $z^4 + 4z^3 + 5z^2 = 0$
- f $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

15 Bereken alle uitkomsten van de volgende wortels. Geef exacte antwoorden in de vorm $re^{i\varphi}$.

- a $\sqrt[3]{\frac{i}{1+i}}$
- b $\sqrt[4]{2\sqrt{3} - 2i}$
- c $\sqrt[3]{6 + 6i\sqrt{3}}$
- d $\sqrt{8\cos(\frac{1}{4}\pi) + 8i\sin(\frac{1}{4}\pi)}$

16 Teken alle getallen z waarvoor geldt

- a $\left| \frac{z-3}{z-3i} \right| = 1$
- b $(\operatorname{Re}(z))^2 = (\operatorname{Im}(z))^2$
- c $(z-2i) \cdot \overline{(z-2i)} = 9 \wedge \frac{1}{4}\pi \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{3}{4}\pi$
- d $(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = 10 \wedge \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = 2$
- e $|z + \bar{z}| < 2$
- f $|z - \bar{z}| < 4 \wedge |z| \geq 1$

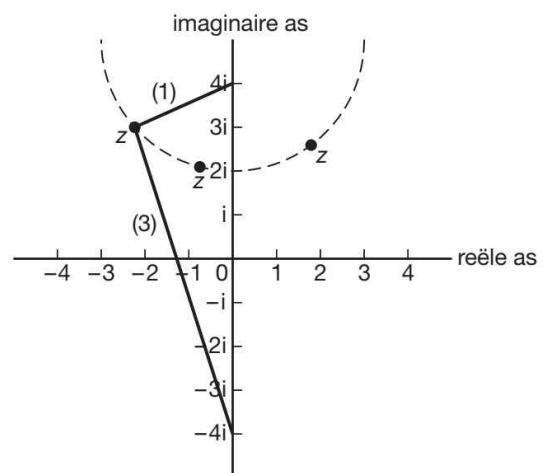
17 Gegeven is het volgende stelsel.

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 5y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{cases} \quad \text{met } x_0 = 1 \text{ en } y_0 = 2$$

Stel van x_n en van y_n de directe formule op.

18 In deze opgave toon je het volgende aan: alle punten z in het complexe vlak waarvoor de afstand tot $-4i$ gelijk is aan drie keer de afstand tot $4i$ liggen op een cirkel. Deze cirkel heet een cirkel van Apollonius.

- a Licht toe dat $|z + 4i| = 3|z - 4i|$.
- b Stel $z = a + bi$ en herleid de vergelijking van vraag a tot $a^2 + (b-5)^2 = 9$. Geef het middelpunt en de straal van de cirkel.
- c Geef de vergelijking van vraag b in de vorm $|z - c| = d$.

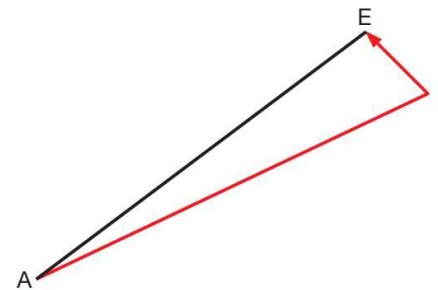


figuur G.20

- 19** Gegeven zijn de complexe getallen
 $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{30}\pi t\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{30}\pi t\right)\right)$ en
 $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{360}\pi t\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{360}\pi t\right)\right)$. Hierin is t een reëel getal.
- Teken z_1 in het complexe vlak voor $t = 0, t = 5, t = 10, \dots, t = 60$.
 - Teken z_2 in de figuur van vraag a voor $t = 0, t = 60, t = 120, \dots, t = 720$.
 - Bereken exact het eerste tijdstip na 12 uur waarop de wijzers van een klok op elkaar staan.
 - Bereken exact het eerste tijdstip na 9 uur waarop de wijzers van een klok op elkaar staan.
 - Bereken exact het laatste tijdstip voor 12 uur waarop de wijzers van een klok in elkaars verlengde staan.



- 20** Een vliegtuig moet in 30 minuten van Amsterdam naar Eelde vliegen over een afstand van 150 km met een koers van 53° . Er staat een zuidoostenwind met een snelheid van 60 km/uur.
 Bereken de snelheid en de koers die de piloot moet aanhouden om zonder omwegen precies op tijd in Eelde aan te komen.



figuur G.21

- 21** Ook voor complexe getallen gelden de rekenregels voor logaritmen.

Zo is $\ln(-1) = \ln(e^{\pi i}) = \pi i$ en

$${}_2\log(1+i) = \frac{\ln(1+i)}{\ln(2)} = \frac{\ln(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i})}{\ln(2)} = \frac{\ln(\sqrt{2}) + \ln(e^{\frac{1}{4}\pi i})}{\ln(2)} = \frac{\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4}\pi i}{\ln(2)}$$

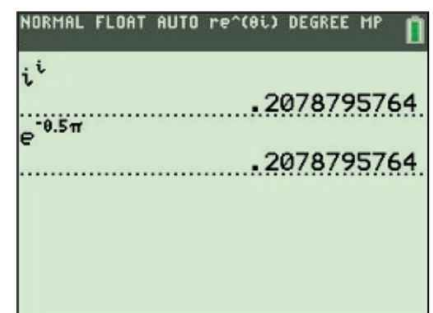
Hierbij is een logaritme een complex getal z met $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$.

Bereken z voor $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$.

- $z = \ln(-i)$
- $z = \log\left(-\frac{1}{100}\right)$
- $z = {}^3\log(-27 + 27i)$
- $z = \ln(-e)$
- $z = \ln(i^i)$

Uit het antwoord van vraag e volgt dat $i^i = e^{-\frac{1}{2}\pi}$.

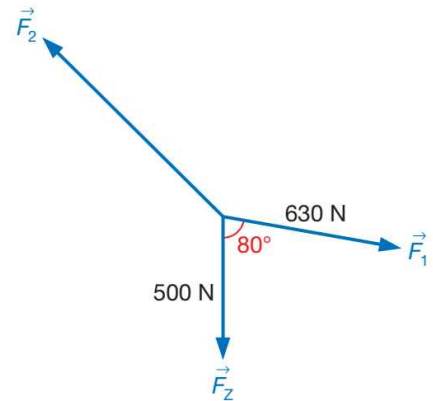
- f Licht dit toe.



- 22** Op een voorwerp werken de zwaartekracht $\vec{F}_Z$ met $F_Z = 500 \text{ N}$ en de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ met $F_1 = 630 \text{ N}$. De hoek tussen $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_Z$ is 80° . Zie de figuur.

Het voorwerp wordt door de drie krachten op zijn plaats gehouden.

Bereken de grootte van $\vec{F}_2$ en de hoek tussen $\vec{F}_2$ en $\vec{F}_Z$. Rond af op gehele.



figuur G.22

- 23 a** Los $z^5 = 1$ op in $\mathbb{C}$ en teken de oplossingen op de eenheidscirkel.

De vijf oplossingen van $z^5 = 1$ vormen een regelmatige vijfhoek met middelpunt 0. Hieruit volgt dat de som van de reële delen en ook de som van de imaginaire delen van de oplossingen gelijk is aan 0.

- b** Bereken op een handige manier $\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{4}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{6}{5}\pi\right) + \sin\left(\frac{8}{5}\pi\right)$ en $\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{6}{5}\pi\right) + \cos\left(\frac{8}{5}\pi\right)$.

- c** Bereken $\sum_{k=1}^{10} \left(\sin\left(\frac{2k\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{2k\pi}{10}\right) \right)$.

11 Lineaire algebra

- 24 a** Het punt $A(-4, 15)$ wordt om de oorsprong geroteerd over 120° , vervolgens vermenigvuldigd met 10 ten opzichte van de y -as en met $\sqrt{3}$ ten opzichte van de x -as. Bereken de coördinaten van het beeld A' .
- b** Het punt $B(3, -1)$ wordt gespiegeld in de lijn $k: y = -2\frac{1}{2}x$ en vervolgens gespiegeld in de lijn $l: y = x$. Bereken de coördinaten van het beeld B' .

- 25** Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- a** Bereken de eigenwaarde en bijbehorende eigenvector van M .

De matrix M beeldt de lijn $k: y = x$ af op de lijn l .

- b** Stel een vergelijking op van l .

De matrix M beeldt de eenheidscirkel af op de kromme K .

- c** Schets K en bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de snijpunten van K met de x -as.

- 26** Van de matrix M zijn de eigenwaarden $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ en $\lambda_3 = 1$.

Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Bereken de determinant van M .
- Bereken het beeld van $A(3, 10, 5)$.
- Bereken het origineel van $B(2, 1, 6)$.

- 27** Een lineaire afbeelding berekent het beeld van de punten van $\mathbb{R}^2$ op de volgende manier:

- Teken door een punt een lijn met richtingscoëfficiënt 2.
- Het snijpunt van deze lijn met de lijn $l: y = 3x$ is het beeld.

- Stel de matrix M op bij deze lineaire afbeelding.
- Bereken de coördinaten van het beeld van $A(5, 9)$.
- Licht toe dat het punt $B(2, 6)$ bij deze afbeelding oneindig veel originelen heeft, en stel een vergelijking op van de lijn waarop deze originelen liggen.

- 28** In deze opgave ga je de matrix A berekenen waarvoor geldt

$$A^2 = M, \text{ met } M = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Stel } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan geldt } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Licht dit toe en stel de vier vergelijkingen op die hieruit volgen.

De vier vergelijkingen van vraag a zijn niet eenvoudig op te lossen. Daarom gaan we als volgt te werk.

- Toon met behulp van diagonaliseren aan dat de kwadraten van de eigenwaarden van A gelijk zijn aan de eigenwaarden van M , en dat A en M dezelfde eigenvectoren hebben.

- Bereken alle oplossingen van de vergelijking $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$.

Gegeven is het stelsel differentievergelijkingen

$$\begin{cases} A_t = \frac{5}{8}A_{t-1} + \frac{3}{8}B_{t-1} \\ B_t = \frac{3}{8}A_{t-1} + \frac{5}{8}B_{t-1} \end{cases} \text{ met de aantallen } A_0 = 1600 \text{ en } B_0 = 2400.$$

- Bereken $A_{\frac{1}{2}}$ en $B_{\frac{1}{2}}$.

29 Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a Wat voor lineaire afbeelding hoort bij M ?
- b Licht zonder berekening toe dat M geen reële eigenwaarden kan hebben.
- c Bereken de complexe eigenwaarden van M .
- d Toon aan dat $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ eigenvectoren van M zijn.

Om de inverse matrix van $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ te berekenen stel je

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ en bereken je } a, b, c \text{ en } d \text{ zo, dat } P \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- e Bereken P^{-1} .
- f Bereken M^n .

30 Om niet-lineaire afbeeldingen toch met matrices te kunnen uitvoeren worden slimme trucs toegepast. Voorbeelden van deze niet-lineaire afbeeldingen zijn translaties en spiegelingen in lijnen die niet door O gaan.

Voor de translatie van het punt $A(x_A, y_A)$ over de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gebruik je het volgende werkschema.

- Voeg als derde coördinaat het getal 1 toe. Je krijgt het punt $(x_A, y_A, 1)$.
- Stel de matrix M op waarvoor geldt $M \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + a \\ y_A + b \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Stel de matrix N op waarvoor geldt $N \cdot \begin{pmatrix} x_A + a \\ y_A + b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + a \\ y_A + b \end{pmatrix}$.

Het beeld van $A(x_A, y_A) = A'(x_A + a, y_A + b)$.

- a Stel de matrix M op.
- b Stel de matrix N op.
- c Stel de matrix P op die de tweede en de derde stap in één keer uitvoert.

Om $\mathbb{R}^2$ te spiegelen in de lijn $y = 2$ kun je op een soortgelijke manier te werk gaan. Je voegt als derde coördinaat het getal 1 toe en stelt de matrix S op die de afbeelding uitvoert.

- d Stel de matrix S op.

- 31** De matrix M beeldt $A(1, 1, 1)$ af op $A'(3, 1, 0)$, en $B(3, 2, 1)$ op $B'(-1, 6, 2)$.
Bereken het beeld van $C(4, 3, 2)$.



- 32** Van de matrix M zijn de eigenwaarden $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$ en $\lambda_3 = c$.

Bijbehorende eigenvectoren zijn $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a Druk M uit in a , b en c .

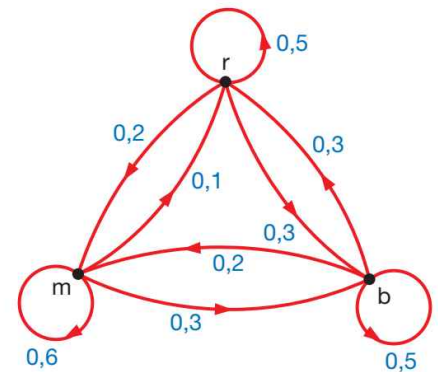
Het beeld van $A(0, 1, 0)$ is $A'(-4, 0, -5)$.

b Bereken het beeld van $B(2, 1, 6)$.

- 33** Een meteoroloog heeft voor de maand mei in Nederland een model opgesteld voor de overgangen tussen mooi (m), bewolkt (b) en regenachtig (r) weer. Zie figuur G.23.

Bij deze figuur hoort het stelsel differentievergelijkingen

$$\begin{cases} m_n = 0,6m_{n-1} + 0,2b_{n-1} + 0,2r_{n-1} \\ b_n = 0,3m_{n-1} + 0,5b_{n-1} + 0,3r_{n-1} \\ r_n = 0,1m_{n-1} + 0,3b_{n-1} + 0,5r_{n-1} \end{cases}$$



figuur G.23

Uit het model volgt dat de kans dat het morgen regent 0,1 is als het vandaag mooi weer is. De kans dat het overmorgen weer mooi weer is, is $0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,44$.

De matrix die bij het model hoort noemen we W .

- a** Bereken de kans 0,44 met een matrixvermenigvuldiging.
b Bereken de kans dat het op 10 mei regent als het op 6 mei regent.
c Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van W .
d Een van de eigenvectoren kun je gebruiken om het percentage mooie dagen in mei te berekenen.
Licht dit toe en geef het percentage mooie dagen in mei.

12 Continue kansverdelingen

- 34** Een bijzondere wijn van Goettelmann is de Gewurtztraminer. Deze is gemaakt volgens het principe van de Grains Nobles. Bij wijnen die volgens dit principe zijn gemaakt laat men de druiven langer hangen dan gebruikelijk, waarmee druiven met een zeer hoog suikergehalte worden verkregen. Het suikergehalte wordt gemeten in graden Oechsle ($^{\circ}\text{Oe}$). Niet elke druif bevat precies evenveel suiker. Het suikergehalte is normaal verdeeld. Op 28 november hebben de druiven een gemiddeld suikergehalte van 131°Oe met een standaardafwijking van $2,7^{\circ}\text{Oe}$.
- Van hoeveel procent van de druiven wijkt het suikergehalte minder dan $3,5^{\circ}\text{Oe}$ af van het gemiddelde?
 - Bereken de kans dat van vijf willekeurig gekozen druiven er minstens één een suikergehalte heeft van meer dan 138°Oe .

Eén van de druiven heeft op 28 november een suikergehalte van $136,5^{\circ}\text{Oe}$. Volgens Goettelmann behoort deze druif tot de twee procent druiven met het hoogste suikergehalte.

- Onderzoek of Goettelmann gelijk heeft.

Wijn met het keurmerk Grains Nobles moet voldoen aan strenge overheidseisen. Minimaal 98,5% van de druiven moet een hoger suikergehalte hebben dan een wettelijk vastgestelde ondergrens. Goettelmann constateert dat hij op 28 november nog niet aan de eis voldoet.

- Wat weet je van de wettelijk vastgestelde ondergrens?

Om aan de overheidseisen te voldoen wacht Goettelmann nog even met plukken. Op 4 december blijken 1 op de 12 geteste druiven een suikergehalte boven $137,2^{\circ}\text{Oe}$ te hebben. De standaardafwijking is onveranderd $2,7^{\circ}\text{Oe}$.

- Hoeveel suiker bevatten de druiven op 4 december gemiddeld? Rond af op één decimaal.



- 35** Fabrikant Pharmas maakt pijnstillers in tabletvorm. De dikte D in cm van een tablet is normaal verdeeld met $\mu_D = 0,81$ en $\sigma_D = 0,05$. De tabletten worden per 20 stuks verpakt in een plastic buisje waarvan de binnenlengte L in cm normaal verdeeld is met $\mu_L = 17,50$ en $\sigma_L = 0,48$. Bereken de kans dat 20 willekeurige tabletten niet in een buisje passen.

- 36** De levensduur van een bepaald type batterij is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 1,2 uur. Bij een grote partij batterijen blijkt er na 10 uur nog 1 op de 25 te werken. Hoeveel procent van de batterijen had een levensduur van meer dan 9 uur?

- 37** Iris woont in Dieren en gaat op de fiets naar school in Zutphen. Haar fietstocht bestaat uit drie trajecten:

I van huis naar haar vriendin in Leuvenheim

II van Leuvenheim naar Brummen

III van Brummen naar school.

De tijdsduur van elk van deze trajecten is normaal verdeeld. Zie de tabel.

traject	gemiddelde	standaardafwijking
I	18 minuten	2 minuten en 30 seconden
II	7 minuten	1 minuut en 15 seconden
III	15 minuten	2 minuten

- a** Bereken de kans dat haar totale fietstijd meer dan drie kwartier is.

Iris vertrekt elke morgen om 7:25 uur. Haar school begint om 8:15 uur. In de periode zomervakantie-herfstvakantie gaat ze 35 keer naar school.

- b** Bereken de kans dat ze in deze periode minstens één keer te laat op school komt.
c Hoe laat moet Iris van huis vertrekken opdat ze in minstens 98% van de gevallen op tijd op school is?

- 38** Simone werkt voor een internationale organisatie. Zij wordt elke maandag na twaalf uur 's middags gebeld door een collega van een buitenlandse vestiging voor een korte werkbespreking. Het tijdstip T in uren waarop zij wordt gebeld is gegeven door de

$$\text{kansdichtheid } f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq 12 \\ \frac{1}{a\sqrt{t-12}} & \text{voor } 12 < t < 16 \\ \frac{8}{5(t-12)^2} & \text{voor } 16 \leq t < 20 \\ 0 & \text{voor } t \geq 20 \end{cases}$$

- a** Stel het functievoorschrift op van de verdelingsfunctie F van T .
b Bereken de kans dat Simone op een maandag tussen drie en vijf uur 's middags wordt gebeld.
c Bereken de kans dat Simone op vier opeenvolgende maandagen minstens twee keer voor één uur 's middags wordt gebeld.
d De kans dat Simone na u uur gebeld wordt is $\frac{1}{10}$. Bereken het tijdstip u exact.

- 39** Experiment: het willekeurig kiezen van een getal tussen 0 en 1.
 X = het willekeurig gekozen getal tussen 0 en 1.

X is continu uniform verdeeld met $E(X) = \frac{1}{2}$ en $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Het experiment wordt 100 keer uitgevoerd.

Bereken de kans dat

- a meer dan 50 keer een getal groter dan $E(X)$ wordt gekozen
- b de som van de getallen groter dan 55 en kleiner dan 60 is
- c de som van de eerste 45 getallen groter is dan de som van de rest van de getallen.

Zowel Roos als Maud voeren het experiment 50 keer uit.

- d Bereken de kans dat het gemiddelde van Roos meer dan $\frac{1}{12}$ afwijkt van het gemiddelde van Maud.

- 40** Machine A bevat twee onderdelen, waarvan de levensduren X_1 en X_2 exponentieel verdeeld zijn met parameter $\lambda = 2$.

Machine A werkt alleen als beide onderdelen werken. Dus de levensduur van A wordt gegeven door de toevalsvariabele X = het minimum van X_1 en X_2 .

- a Licht toe dat $P(X < x) = P(X_1 < x) \cdot P(X_2 < x)$ en stel de verdelingsfunctie van X op.

Machine B bevat twee onderdelen, waarvan de levensduren Y_1 en Y_2 exponentieel verdeeld zijn met parameter $\lambda = 3$.

Machine B gebruikt eerst één onderdeel. Zodra dit onderdeel niet meer werkt wordt de taak automatisch overgenomen door het andere onderdeel. Dus de levensduur van B wordt gegeven door de toevalsvariabele Y = de som van Y_1 en Y_2 .

- b Stel de verdelingsfunctie van Y op.

- 41** Er vinden op aarde gemiddeld 60 vulkaanuitbarstingen per jaar plaats. De tijd T in dagen die tussen twee vulkaanuitbarstingen zit is exponentieel verdeeld.

- a Bereken de kans dat er in vier weken vijf vulkaanuitbarstingen plaatsvinden.
- b Bereken de kans dat er binnen vier weken vijf vulkaanuitbarstingen plaatsvinden.
- c Bereken de kans dat er tussen elk van de volgende vijf vulkaanuitbarstingen telkens meer dan een week zit.
- d De kans dat er binnen x dagen drie vulkaanuitbarstingen plaatsvinden is 0,25.
 Bereken x in één decimaal nauwkeurig.
- e Bereken de kans dat de komende 100 vulkaanuitbarstingen plaatsvinden in een tijdsbestek van meer dan 500 maar minder dan 700 dagen.

- 42** Bij de balie van een uitkeringsinstantie moet 25% van de klanten meer dan tien minuten wachten voordat ze aan de beurt zijn. Vervolgens is de helft van de klanten binnen twee minuten geholpen. Zowel de tijd die een klant moet wachten tot hij aan de beurt is als de tijd die nodig is om een klant te helpen is exponentieel verdeeld. Uit deze gegevens volgt dat, afgerond op één decimaal, de gemiddelde wachttijd 7,2 minuten is en de gemiddelde helptijd 2,9 minuten.
- Toon dit aan.
 - Bereken exact de kans dat een klant meer dan een kwartier moet wachten, maar daarna wel binnen een minuut is geholpen.
 - Bereken de kans dat tien klanten samen meer dan een uur moeten wachten.
 - De kans dat meer dan tien klanten binnen x minuten zijn geholpen is 0,1.
Bereken x in één decimaal nauwkeurig.

- 43** In deze opgave toon je aan dat voor een poissonverdeelde toevalsvariabele X met parameter λ geldt $E(X) = \lambda$.

- Licht toe dat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.
- De verwachtingswaarde van een discrete toevalsvariabele X is gegeven door $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot P(X=k))$.
Toon aan dat voor de poissonverdeelde toevalsvariabele X met parameter λ geldt $E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$.
- Hoe volgt uit vraag a en b dat $E(X) = \lambda$?

- 44** In deze opgave toon je aan dat voor een exponentieel verdeelde toevalsvariabele T met parameter λ geldt $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

$F(x) = -x e^{-ax} - \frac{1}{a} e^{-ax}$ is een primitieve van $f(x) = a x e^{-ax}$.

- Toon dit aan.
- De verwachtingswaarde van een continue toevalsvariabele T is gegeven door $E(T) = \int_0^{\infty} (t \cdot f(t)) dt$.
Toon aan dat voor de exponentieel verdeelde toevalsvariabele T met parameter λ geldt $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Overzicht GR-handleiding

Module

Het rijen-invoerscherm ▪ Het invoeren van een directe formule ▪ Het invoeren van een recursieve formule	vwo D deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 66
Matrices ▪ Rekenen met matrices	vwo D deel 1 hoofdstuk 4 bladzijde 151
Tijdgrafieken ▪ Het plotten van een tijdgrafiek	vwo D deel 2 hoofdstuk 6 bladzijde 56
Webgrafieken ▪ Het plotten van een webgrafiek	vwo D deel 2 hoofdstuk 6 bladzijde 63
Complexe getallen ▪ Het werken met complexe getallen	vwo D deel 3 hoofdstuk 10 bladzijde 52
Centrum- en spreidingsmaten ▪ Het berekenen van centrum- en spreidingsmaten	vwo D deel 3 hoofdstuk 12 bladzijde 135

Trefwoordenregister

- A**
- absolute waarde van een complex getal 50
 - afbeelding, lineaire 88, 93, 95
 - Apollonius van Perga 26
 - arganddiagram 49
 - argument 52
 - argument, hoofdwaaarde van 52
 - as, imaginaire 49
 - as, reële 49
 - asymptoten hyperbool 24
- B**
- binomiale verdeling 123
 - bissectrice 8
 - bissectricepaar 16
 - bissectricestelling 8
 - brandpunt, ellips 12, 20
 - brandpunt, parabool 10, 18
 - brandpunt, hyperbool 12, 24
 - brandpuntsafstand 21
- C**
- cartesische coördinaten 56
 - Cauchy-Binet, stelling van 106
 - Cayley-Hamilton, stelling van 106
 - centrale limietstelling 154
 - centrale projectie 96
 - coëfficiëntenmatrix 81
 - complex getal 43
 - complex getal, absolute waarde van 50
 - complex getal, argument van 52
 - complex getal, modulus van 50
 - complex getal, poolcoördinaten van 56
 - complexe e-machten 64
 - complexe getallen, rekenregels 46
 - complexe vlak 49, 51
 - complexe wortels 69
 - concentrische cirkels 17
 - continue kansverdeling 128, 129
 - continue toevalsvariabele 128
 - continue uniforme verdeling 128
 - convergente integraal 126
 - coördinaten, cartesische 56
 - coördinaten, pool- 56
 - cosinus, machtreeks van 60
 - cumulatieve distributiefunctie 131
 - cumulatieve kansverdelingsfunctie 131
- D**
- deviatie 35
 - diagonaalmatrix 81
 - diagonaliseren van een matrix 104
 - differentievergelijking 66, 113
 - distributiefunctie, cumulatieve 131
 - divergente integraal 126
 - draaivermenigvuldiging 85, 88
- E**
- e^x , machtreeks van 60
 - eenheidsvector 89
 - eigenvector 87, 99
 - eigenwaarde 87, 99, 111
 - ellips 12, 20
 - ellips, brandpunt van 12, 20
 - ellips, korte as van 21
 - ellips, lange as van 21
 - ellips, middelpunt van 21
 - ellips, raaklijneigenschap van 32
 - ellips, richtcirkel van 12, 20
 - ellips, toppen van 21
 - Euler, formule van 60
 - exacte-waarden-cirkel 40
 - exponentiële verdeling 160
- G**
- gammaverdeling 165
 - Gauss, Carl Friedrich 139
 - Gauss, vlak van 49
 - gausskromme 138
 - geconjugeerde 47
 - gehele getallen 42
 - gemiddelde wachttijd 161
 - getallen, complexe 43
 - getallen, gehele 42
 - getallen, imaginaire 43
 - getallen, irrationale 42
 - getallen, natuurlijke 42
 - getallen, rationale 42
 - getallen, reële 42
 - getallenverzamelingen 42
- H**
- Hamilton, William Rowan 45
 - horizon 96
 - hyperbool, asymptoten van 24
 - hyperbool, brandpunten van 12, 24
 - hyperbool, raaklijneigenschap van 33
 - hyperbool, richtcirkels van 12, 24
 - hyperbool, toppen van 24
 - hyperbooltak 12, 24
- I**
- imaginair deel 44
 - imaginair getal 43
 - imaginaire as 49
 - ingenieursprojectie 96
 - integraal, oneigenlijke 126
 - irrationale getallen 42
 - isometrische projectie 96
- K**
- kansdichtheid 128

kansverdeling, continue
128, 129

kansverdelingsfunctie,
cumulatieve 131
karakteristieke vergelijking
100

koers 73
korte as van ellips 21
krachten en complexe
getallen 72

L

lange as van ellips 21
limietstelling, centrale 154
lineaire afbeelding 88, 93, 95

M

machtrees van een
matrix 109
machtreksen 60
matrices 80
matrices, vermenigvuldigen
van 80
matrix, determinant van 82
matrix, diagonaliseren
van 104
matrix, inverse van 81
matrix, machtreks van 109
meerwaardige complexe
wortel 69
meetkundige plaats 16
middelloodlijn 8
middelpunt ellips 21
middelpunt hyperbool 24
middenparallel 16
modulus van complex
getal 50

N

natuurlijke getallen 42
normaal verdeelde
toevalsvariabele 138
normaalkromme 138
normalcdf 140
normale verdeling 138

O

oneigenlijke integraal 126
open vlakdeel 126

P

paraboloïden 30
parabool 18
parabool, brandpunt
van 10, 18
parabool, raaklijneigenschap
van 28
parabool, richtlijn van 10, 18
parallelprojectie 96
perspectiefafbeelding 96
poissonverdeling 124, 160
pool 28
poolcoördinaten 56, 58
poollijn 28
projectie, centrale 96
projectie, ingenieurs- 96
projectie, isometrische 96
projectie, parallel- 96
projectie, scheve 96

R

raaklijneigenschap, ellips 32
raaklijneigenschap,
hyperbool 33
raaklijneigenschap,
parabool 28
rationale getallen 42
reëel deel van complex
getal 44
reële as 49
reële getallen 42
rekenregels voor complexe
getallen 46
resultante 72
richtcirkel ellips 12, 20
richtcirkel hyperbool 12, 24
richtlijn parabool 10, 18

S

scheve projectie 96
sinus, machtreks van 60
snelheden en complexe
getallen 73
somregel voor
standaardafwijking 152
somregel voor
verwachtingswaarde 152
spreidingsmaat 135
standaardafwijking 135

standaardafwijking
stochast 137
standaardafwijking, somregel
voor 152
stelling van Cauchy-Binet
106
stelling van Cayley-
Hamilton 106
stochast, discrete 122
stochast, standaardafwijking
van 137
stochast, verwachtingswaarde
van 137

T

toevalsvariabele, continue
128
toevalsvariabele, normaal
verdeelde 138
toppen ellips 21
toppen hyperbool 24

V

verdeling, binomiale 123
verdeling, continue
uniforme 128
verdeling, exponentiële 160
verdeling, gamma- 165
verdeling, normale 138
verdeling, poisson- 124
verdelingsfunctie 131
verdwijnpunt 96
vergelijking, karakteristieke
100
verkorting 96
verkortingsverhouding 96
verwachtingswaarde
stochast 122, 137
verwachtingswaarde,
somregel voor 152
vlak van Gauss 49
vlakdeel, open 126

W

wachttijd, gemiddelde 161
wachttijdproblemen 161
Wessel, Caspar 51
wijkhoek 96
wortels, complexe 69

Verantwoording

Fotoresearch: B en U International Picture Service,
Amsterdam

Illustratieverwerving: Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: OKS, Delhi (India)

Foto's

Imageselect, Wassenaar: blz. 6-7

Picture-Alliance, Frankfurt: blz. 26

Hollandse Hoogte, Den Haag: blz. 30, 45, 116,
120-121, 125

Corbis: blz. 38-39, 148

Wikimedia Commons: blz. 51, 139

John Romkes, Delft: blz. 62

ANP Foto, Rijswijk: blz. 78-79

Frederik Dam, Groningen: blz. 133

Getty Images: blz. 172-173

www.presenttime.com: blz. 188

Shutterstock: blz. 193

Met betrekking tot sommige teksten en/of
illustratiemateriaal is het de uitgever, ondanks
zorgvuldige inspanningen daartoe, niet gelukt
eventuele rechthebbende(n) te achterhalen.
Mocht u van mening zijn (auteurs-)rechten te
kunnen doen gelden op teksten en/of
illustratiemateriaal in deze uitgave dan verzoeken
wij u contact op te nemen met de
uitgever.

Colofon

Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: OKS, Delhi (India)



3 / 18

© 2016 Noordhoff Uitgevers bv,
Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van
1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze
uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een
geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar
gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij
elektronisch, mechanisch, door fotokopieën,
opnamen of enig andere manier, zonder voorafgaande
schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische
verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan
op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men
de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen
aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB
Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het
overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in
bloemlezingen, readers en andere
compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912)
kan men zich wenden tot Stichting PRO
(Stichting Publicatie- en Reproductierechten
Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp,
www.stichting-pro.nl).

*All rights reserved. No part of this publication
may be reproduced, stored in a retrieval system,
or transmitted, in any form or by any means,
electronic, mechanical, photocopying, recording
or otherwise without prior written permission of
the publisher.*

ISBN 978 90 01 84240 6