

FLEX

VWO
D

DEEL 2

GETAL & RUIMTE 2



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

GETAL & RUIMTE

vwo D deel 2

ELFDE EDITIE, 2015

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers Groningen

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo D deel 2

Samen met de delen 1, 3 en 4 van vwo wiskunde D bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde D, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld.

De totale studielast voor het vak vwo wiskunde D is 440 uur.

Omdat het vak wiskunde D geen Centraal Examen kent, is het mogelijk met name de domeinen F: Wiskunde in wetenschap en G: Keuzeonderwerpen vrij in te vullen.

Van de invulling die *Getal & Ruimte* hierbij heeft gekozen, kan dus worden afgeweken.

In de voorwoorden van dit en de andere delen wordt dit aangegeven.

In hoofdstuk 5 Discrete kansverdelingen worden gedeelten van de subdomeinen B2: Kansrekening, B3: Toevalsvariabelen en B4: Kansverdelingen behandeld. In paragraaf 5.5 komt bovendien de poissonverdeling aan de orde.

In hoofdstuk 6 Discrete dynamische modellen wordt het subdomein C1: Discrete dynamische systemen geheel afgehandeld. Met het aanbieden van stelsels differentievergelijkingen en lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde komt ook het subdomein C3: Toepassingen van discrete en continue dynamische systemen aan bod.

Hoofdstuk 7 is getiteld Bewijzen. In de paragrafen 7.1 en 7.2 komen synthetische bewijzen in de meetkunde aan bod. Hiermee wordt het subdomein D1: Analytische en synthetische methoden gedeeltelijk behandeld. Met de paragrafen 7.3 Volledige inductie en 7.4 Andere bewijsmethoden geeft *Getal & Ruimte* invulling aan een gedeelte van de domeinen F en G.

Vermoedelijk vraagt het doorwerken van het gehele hoofdstuk 7 veel van de leerlingen. Na het doorwerken van paragraaf 7.1 kan er uit de overige paragrafen een keuze worden gemaakt.

In hoofdstuk 8 Vectormeetkunde wordt het subdomein D3: De ruimte afgehandeld.

Bij dit hoofdstuk verdient de Voorkennis extra aandacht, omdat de benodigde kennis over vectoren pas in vwo B deel 3 hoofdstuk 10 aan bod komt. Door de Voorkennis door te nemen, zijn problemen op dit punt te voorkomen.

De delen 1, 2 en 3 van vwo D zijn bedoeld voor de leerjaren 4 en 5. Afhankelijk van de verdeling over deze twee leerjaren kunnen de hoofdstukken 7 en 8 geheel of gedeeltelijk samen met deel 3 in het vijfde leerjaar worden doorgewerkt.

Online materiaal

In het *Docentenpakket online* staat een studiewijzer bij elk hoofdstuk. Verder zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2015

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit wiskunde B of uit voorgaande hoofdstukken die je in het hoofdstuk paraat moet hebben.

O 2 Oriënterende opgave

Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [▶▶6] Testopgave

Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ▶▶ staat.

4 Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 Reflecterende opgave

In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 Afsluitende opgave

De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 Denkopgave

Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[▶ GR]

Verwijzing naar een module in de handleiding bij de grafische rekenmachine.

[▶ WERKBLAD]

Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

5 Discrete kansverdelingen 6

Voorkennis Kansen berekenen 8

- 5.1 Het herhalen van kansexperimenten 10
- 5.2 Trekken met en zonder terugleggen 20
- 5.3 De verwachtingswaarde 26
- 5.4 De binomiale verdeling 35
- 5.5 De poissonverdeling 46
- Diagnostische toets 50

6 Discrete dynamische modellen 52

Voorkennis Recursieve formules 54

- 6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde 56
- 6.2 Logistische groei 69
- 6.3 Stelsels differentievergelijkingen 76
- 6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde 86
- Diagnostische toets 94

7 Bewijzen 96

Voorkennis Definities, vermoedens en stellingen 98

- 7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken 101
- 7.2 Bewijzen in cirkels 107
- 7.3 Volledige inductie 117
- 7.4 Andere bewijsmethoden 123
- Diagnostische toets 134

8 Vectormeetkunde 136

Voorkennis Vectoren in het platte vlak 138

- 8.1 Coördinaten in de ruimte 143
- 8.2 Vergelijkingen van vlakken 152
- 8.3 Hoeken in de ruimte 162
- 8.4 Afstanden in de ruimte 170
- Diagnostische toets 178

Kangoeroe-opgaven 180

Gemengde opgaven 190

Overzicht GR-handleiding 205

Trefwoordenregister 206

Verantwoording 208

Bij een geldautomaat komen in een weekend gemiddeld 850 mensen pinnen.

Voor de bank is het niet alleen van belang te weten hoeveel mensen er gemiddeld in een weekend geld opnemen, maar ook hoe groot de kans is dat het er bijvoorbeeld meer dan 875 zijn, of minder dan 800. Door deze situatie te vertalen in een model waarbij je te maken hebt met een groot aantal kansexperimenten met een zeer kleine kans op succes, zijn de genoemde kansen te berekenen.

Wat leer je?

- Kansen berekenen met de algemene productregel.
- Wat het verschil is tussen trekken met en trekken zonder terugleggen.
- Het berekenen van de verwachtingswaarde van een discrete toevalsvariabele.
- Berekeningen maken bij de binomiale kansverdeling.
- Wat de poissonverdeling is en hoe je hierbij kansen berekent.



Discrete kansverdelingen

5



Voorkennis Kansen berekenen

Theorie A Het vaasmodel

Bij het berekenen van de kans op 3 rode, 2 witte en 4 blauwe knikkers bij het pakken van 9 knikkers uit een vaas met 10 rode, 5 witte en 6 blauwe knikkers gebruik je de kansdefinitie van Laplace. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

In een vaas zitten 10 rode, 5 witte en 6 blauwe knikkers.

Experiment: pak 9 knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op de gebeurtenis

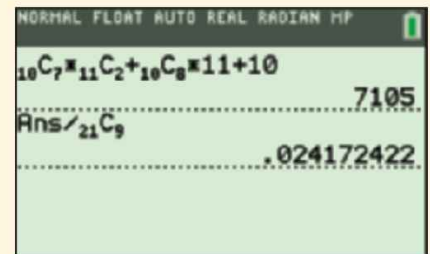
- a 3 rode, 2 witte en 4 blauwe knikkers
- b minstens 7 rode knikkers
- c minstens 2 blauwe knikkers.

Uitwerking

$$a \quad P(3 \text{ rode, 2 witte en 4 blauwe}) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{4}}{\binom{21}{9}} \approx 0,061$$

$$b \quad P(\text{minstens 7 rode}) = P(7 \text{ rode}) + P(8 \text{ rode}) + P(9 \text{ rode}) = \frac{\binom{10}{7} \cdot \binom{11}{2}}{\binom{21}{9}} + \frac{\binom{10}{8} \cdot \binom{11}{1}}{\binom{21}{9}} + \frac{\binom{10}{9}}{\binom{21}{9}} \approx 0,024$$

$$c \quad P(\text{minstens 2 blauwe}) = 1 - P(0 \text{ of } 1 \text{ blauwe}) = 1 - P(0 \text{ blauwe}) - P(1 \text{ blauwe}) = 1 - \frac{\binom{15}{9}}{\binom{21}{9}} - \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{15}{8}}{\binom{21}{9}} \approx 0,852$$



- 1 In een vaas zitten 12 rode, 6 witte en 7 blauwe knikkers.
 Experiment: pak 8 knikkers uit de vaas.
 Bereken de kans op de gebeurtenis
- a 4 rode, 2 witte en 2 blauwe knikkers
 - b minstens 7 rode knikkers
 - c minstens 1 blauwe knikker
 - d hoogstens 2 witte knikkers.

- 2 Bij de lotto 7/42 worden zeven getallen getrokken uit de getallen 1 tot en met 42.
Bereken de kans dat
- alle zeven getallen oneven zijn
 - alle getallen groter dan 10 zijn
 - het kleinste getal 5 is
 - het kleinste getal 7 is en het grootste getal 35.

Theorie B De productregel

Bij het draaien van de drie schijven in het voorbeeld gebruik je de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen om kansen te berekenen.

Twee gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk komt op hetzelfde neer als

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Voorbeeld

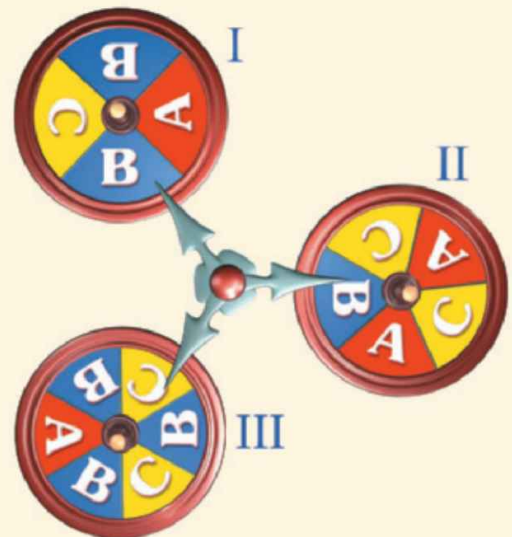
De schijven in figuur 5.1 draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven tot stilstand zijn gekomen, wijst elke pijl een letter aan.

Bereken exact de kans op

- drie A's
- minstens twee B's.

Uitwerking

- $P(AAA) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$
- $P(\text{minstens 2 B's}) = P(2 \text{ B's}) + P(3 \text{ B's}) = P(B\bar{B}\bar{B}) + P(\bar{B}B\bar{B}) + P(\bar{B}\bar{B}B) + P(BBB) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{42}{120} = \frac{7}{20}$



figuur 5.1

- 3 Zie het voorbeeld met de schijven in figuur 5.1.
Bereken exact de kans op
- geen enkele A
 - minstens twee C's
 - meer C's dan B's.
- 4 Experiment: het gooien met vier dobbelstenen.
Bereken de kans op de gebeurtenis
- minstens één zes gooien
 - hoogstens één vijf gooien
 - twee vijven en twee zessen gooien.

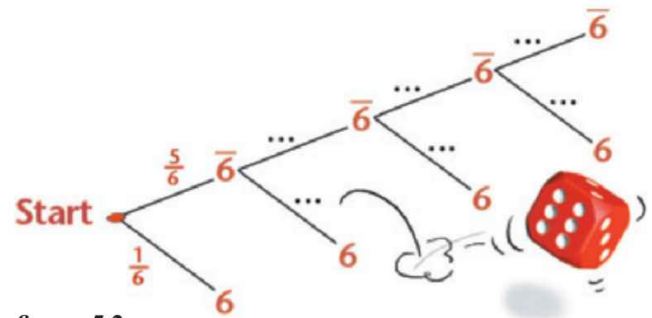
5.1 Het herhalen van kansexperimenten

- 01** Lotte gooit vier keer met een dobbelsteen. Om de kans te berekenen dat ze geen enkele keer 6 gooit, gebruikt ze de kansboom hiernaast.

a Bereken die kans.

Milan gooit met vier dobbelstenen.

- b** Wat kun je zeggen van de kans dat hij geen enkele 6 gooit?



figuur 5.2

Theorie A Een experiment twee of meer keren uitvoeren

Het vier keer gooien met een dobbelsteen is een voorbeeld van het herhaald uitvoeren van hetzelfde experiment. Ook in zo'n situatie gebruik je de productregel om kansen te berekenen.

Bij het vaker uitvoeren van hetzelfde kansexperiment bereken je kansen met de productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen.

Zo is bij het vier keer draaien van de schijf in figuur 5.3 de kans op geen enkele keer kiwi gelijk aan $P(\bar{k} \bar{k} \bar{k} \bar{k}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 0,410$.

De kans op één keer kiwi is

$$P(k \bar{k} \bar{k} \bar{k}) + P(\bar{k} k \bar{k} \bar{k}) + P(\bar{k} \bar{k} k \bar{k}) + P(\bar{k} \bar{k} \bar{k} k) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \approx 0,410.$$

$$\text{Dus } P(\text{één keer kiwi}) = \binom{4}{1} \cdot P(k \bar{k} \bar{k} \bar{k}) = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3.$$



figuur 5.3

De kans op twee keer kiwi is

$$P(k k \bar{k} \bar{k}) + P(k \bar{k} k \bar{k}) + P(\bar{k} k k \bar{k}) + \dots = \binom{4}{2} \cdot P(k k \bar{k} \bar{k}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \approx 0,154.$$

2 van de 4 keer kiwi:

k		k	
---	--	---	--

Het aantal rijtjes met 2 keer k en 2 keer $\bar{k}$ is $\binom{4}{2}$.

Voorbeeld

Experiment: laat de schijf in figuur 5.4 acht keer draaien.

Bereken de kans op

- a minstens één keer 2
- b vijf keer 3 en drie keer 1
- c vijf keer 2
- d minstens twee keer 2.



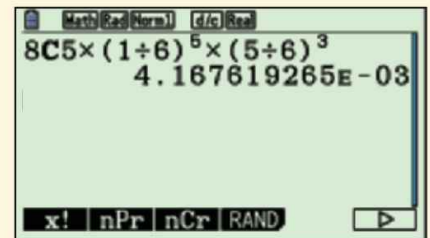
figuur 5.4

Aanpak

- a $P(\text{minstens één keer } 2) = 1 - P(\text{geen } 2) = 1 - P(\overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2})$
- b $P(\text{vijf keer } 3 \text{ en drie keer } 1) = \binom{8}{5} \cdot P(3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1)$
- c $P(\text{vijf keer } 2) = \binom{8}{5} \cdot P(2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2})$
- d $P(\text{minstens twee keer } 2) = 1 - P(\text{geen } 2) - P(\text{één } 2) = 1 - P(\overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2}) - \binom{8}{1} \cdot P(2 \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2} \ \overline{2})$

Uitwerking

- a $P(\text{minstens één keer } 2) = 1 - P(\text{geen } 2) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,767$
- b $P(\text{vijf keer } 3 \text{ en drie keer } 1) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \approx 0,065$
- c $P(\text{vijf keer } 2) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,004$
- d $P(\text{minstens twee keer } 2) = 1 - P(\text{geen } 2) - P(\text{één } 2) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - \binom{8}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,395$



T 2 [▶▶6] Experiment: laat de schijf in figuur 5.5 zes keer draaien.

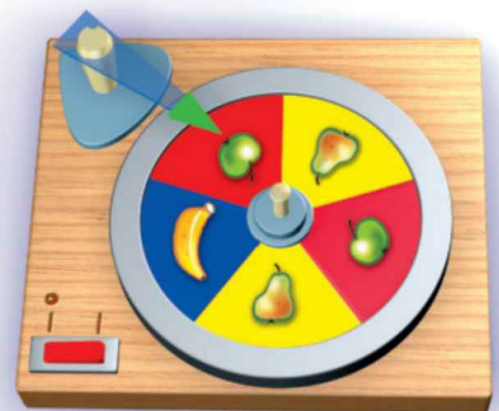
Bereken de kans op

- a drie keer appel en drie keer peer
- b minstens één keer appel
- c drie keer banaan
- d hoogstens zes keer peer.

3 Experiment: laat de schijf in figuur 5.5 twee keer draaien.

Bereken de kans op

- a één keer appel en één keer banaan
- b geen enkele keer banaan
- c twee verschillende vruchten.



figuur 5.5

- 4** Onderzoek wijst uit dat de kans dat een strafschop in de eredivisie voetbal een doelpunt oplevert gelijk is aan 0,76. Bereken de kans dat van de eerstvolgende zeven strafschoppen in de eredivisie
- er geen enkele gemist wordt
 - er twee gemist worden
 - er minstens vijf benut worden.

- 5** Experiment: een worp met zes dobbelstenen. Bereken de kans op
- drie vieren
 - minstens één zes
 - zes verschillende aantallen ogen
 - twee zessen en geen vijf.

- 6** De kans dat een bepaalde scheikundeproef lukt is volgens de ervaring gelijk aan 0,28.
- Bereken de kans dat de proef drie keer achtereen mislukt.
 - De proef wordt vijf keer uitgevoerd. Bereken de kans dat de proef minstens één keer lukt.



Bij het n keer uitvoeren van de proef is de kans dat hij minstens één keer lukt gelijk aan $P(\text{minstens één keer lukken}) = 1 - 0,72^n$.

- Licht dit toe.
- De docent zet voor de les de proef een aantal keer voor gebruik klaar. Hij wil dat de kans dat de proef minstens één keer lukt groter is dan 0,95. Bereken hoeveel opstellingen hij moet maken.

- A 7** Bram gooit met twee dobbelstenen.
- Bereken de kans dat de som van de ogen 6 is.

Timo gooit acht keer met twee dobbelstenen. Bereken de kans dat

- de som van de ogen vier keer 6 is
- de som van de ogen drie keer minder dan 5 is.

Timo wil zo vaak met de twee dobbelstenen gooien, dat de kans op minstens één keer 'som van de ogen is 12' groter is dan 0,75.

- Bereken hoe vaak Timo minstens moet gooien.

- 8** Lees de tekst op de volgende bladzijde.
- Bereken de kans dat je bij een worp met vier dobbelstenen minstens één zes gooit. Vergelijk je antwoord met dat van De Méré. Geef commentaar.
 - Bereken de kans dat je bij 24 keer gooien met twee dobbelstenen ten minste één keer dubbel zes hebt. Waarom was het spel van De Méré verliesgevend?

Geschiedenis Het begin van de kansrekening

Blaise Pascal (1623-1662) is één van de eerste geleerden die de kansrekening een wetenschappelijke basis heeft gegeven.

Omstreeks 1650 vertelde hij zijn vriend Fermat over een ontmoeting met de Franse edelman Chevalier de Méré, die een vurig liefhebber was van het gokspel. De Méré was ervan overtuigd dat het voordelig was om bij het gooien met vier dobbelstenen te wedden op minstens één zes. Zijn redenering was als volgt.

Bij één dobbelsteen is de kans op zes ogen $\frac{1}{6}$, dus bij vier dobbelstenen is de kans op minstens één zes $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Bij een worp met twee dobbelstenen hield hij een soortgelijke redenering. Bij een worp met twee dobbelstenen is de kans op dubbel zes $\frac{1}{36}$, dus, redeneerde hij, bij 24 worpen met twee dobbelstenen is de kans op minstens één keer dubbel zes $24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$. Helaas bleek dit in de praktijk verlies op te leveren. Samen wisten Fermat en Pascal het probleem op te lossen.

In een brief aan Fermat schreef Pascal over De Méré: "Hij is erg intelligent, maar hij is geen wiskundige en dat is zoals je weet een groot gemis."



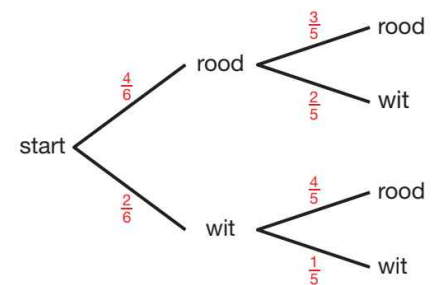
Blaise Pascal

09 In een vaas zitten vier rode en twee witte knikkers.

Experiment: pak twee knikkers uit de vaas.

Bij dit probleem hoort de kansboom hiernaast.

- Licht de kans $\frac{3}{5}$ in de kansboom toe.
- Bereken de kans dat je twee rode knikkers pakt.



figuur 5.6

Theorie B De algemene productregel

In een vaas zitten 4 rode en 6 witte knikkers.

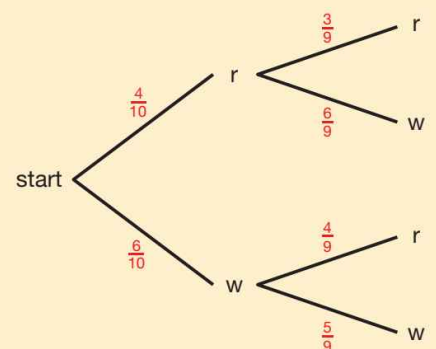
Experiment: pak twee knikkers uit de vaas.

Voor het berekenen van kansen maakt het niet uit of je de knikkers in één greep pakt of één voor één. Daarom hoort bij deze situatie de kansboom hiernaast.

In de kansboom staan de voorwaardelijke kansen $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{4}{9}$ en $\frac{5}{9}$.

Zo is $\frac{3}{9}$ de kans dat de tweede knikker rood is onder de voorwaarde dat de eerste knikker rood is.

Bij het berekenen van $P(2 \text{ rode})$ gebruik je de **algemene productregel**.



figuur 5.7

De algemene productregel

Voor de gebeurtenissen A en B geldt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Zo is bij de vaas met 4 rode en 6 witte knikkers

$$P(2 \text{ witte}) = P(\text{eerste is wit}) \cdot P(\text{tweede is wit} \mid \text{eerste is wit}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

En $P(\text{rode en witte}) =$

$$P(\text{eerste is rood}) \cdot P(\text{tweede is wit} \mid \text{eerste is rood}) + P(\text{eerste is wit}) \cdot P(\text{tweede is rood} \mid \text{eerste is wit}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}.$$

Merk op dat in deze laatste berekening $P(r \ w) = P(w \ r)$.

Je kunt dus ook zeggen dat

$$P(\text{rode en witte}) = 2 \cdot P(r \ w) = 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}.$$

De eerste knikker pak je uit een vaas met 10 knikkers, de tweede uit een vaas met 9 knikkers.

Bij $P(\text{rode en witte})$ horen de takken $r \ w$ en $w \ r$ in de kansboom van figuur 5.7.

Voorbeeld

In een klas zitten 14 jongens en 10 meisjes.

Voor de organisatie van een schoolfeest worden willekeurig drie leerlingen uit deze klas aangewezen.

Bereken de kans op

- a twee jongens
- b drie jongens of drie meisjes.

Er zijn $\binom{3}{2}$ rijtjes bestaande uit 2 j's en 1 m.

Uitwerking

a $P(\text{twee jongens}) = \binom{3}{2} \cdot P(j \ j \ m) = 3 \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{13}{23} \cdot \frac{10}{22} \approx 0,450$

b $P(\text{drie jongens of drie meisjes}) = P(j \ j \ j) + P(m \ m \ m) = \frac{14}{24} \cdot \frac{13}{23} \cdot \frac{12}{22} + \frac{10}{24} \cdot \frac{9}{23} \cdot \frac{8}{22} \approx 0,239$

- R 10** a In voorbeeld a is gebruikt dat $P(j \ j \ m) = P(j \ m \ j) = P(m \ j \ j)$. Licht toe dat dit is toegestaan door $P(j \ m \ j)$ en $P(m \ j \ j)$ uit te schrijven.
- b In het voorbeeld zijn de kansen berekend met de algemene productregel. Je kunt deze kansen ook berekenen met combinaties. Doe dat. Welke methode heeft je voorkeur?

- 11** In een vaas zitten acht witte, vijf zwarte en drie rode knikkers. Experiment: pak drie knikkers uit de vaas. Bereken de kans op
- a drie witte knikkers
 - b twee witte en één rode knikker
 - c één rode knikker
 - d geen enkele zwarte knikker.

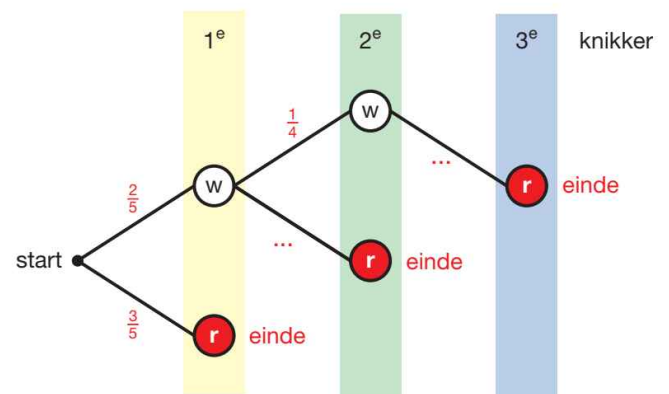
- 12** In vaas I zitten vier rode en zes witte knikkers.
In vaas II zitten drie rode, twee witte en vijf blauwe knikkers.
- Max pakt twee knikkers uit vaas I.
Bereken exact de kans dat hij twee witte knikkers pakt.
 - Tom pakt uit beide vazen één knikker.
Bereken de kans dat hij twee witte knikkers pakt.
 - Jessica pakt twee knikkers uit vaas I en één knikker uit vaas II.
Bereken de kans dat ze drie witte knikkers pakt.

- A 13** In een loterij met 80 loten valt op acht loten een prijs.
Dorien koopt drie loten.
Bereken de kans dat Dorien
- geen prijs wint
 - één prijs wint
 - twee prijzen wint
 - meer dan één prijs wint.

- A 14** In een doos zitten drie boekenbonnen van € 7,50, acht van € 10 en vier van € 12,50.
Jan heeft bij de Kangoeroewedstrijd de schoolprijs gewonnen en mag twee boekenbonnen uit de doos pakken.
Bereken de kans dat
- de boekenbonnen een totale waarde van € 25 hebben
 - hij twee boekenbonnen van dezelfde waarde pakt
 - hij voor € 20 aan boekenbonnen pakt.



- O 15** In een vaas zitten drie rode en twee witte knikkers.
Sophie pakt één voor één knikkers uit de vaas. Ze gaat hiermee door totdat ze een rode pakt.
Bij dit probleem hoort de kansboom hiernaast.
- Licht de kans $\frac{1}{4}$ in de kansboom toe en bereken de ontbrekende kansen.
 - Bereken de kans dat Sophie twee keer een knikker pakt.
 - Bereken de kans dat Sophie drie keer een knikker pakt.

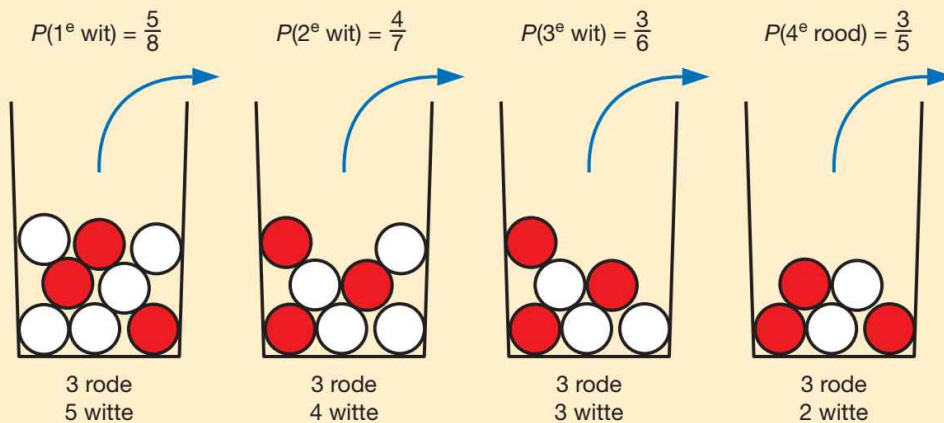


figuur 5.8

Theorie C Experimenten herhalen totdat succes optreedt

In het volgende voorbeeld pak je één voor één knikkers uit een vaas met drie rode en vijf witte knikkers. Je gaat net zo lang door totdat je een rode knikker pakt. Elke keer pak je uit een vaas met een andere samenstelling. De kansen in de kansboom veranderen daardoor per keer.

In figuur 5.9 zie je de situatie waarbij de vierde knikker de eerste rode knikker is.



figuur 5.9

De kans dat je eerst drie keer een witte knikker pakt en dan een rode is $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}$. Merk op dat je alleen met het rijtje w w w r te maken hebt. Vermenigvuldig dus niet met $\binom{4}{1}$.

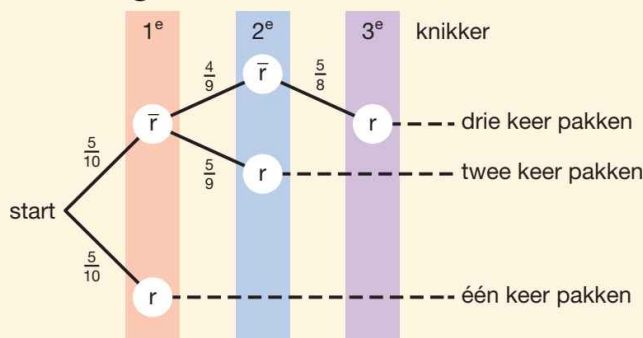
Voorbeeld

Jochem pakt één voor één knikkers uit een vaas met vijf rode, drie witte en twee zwarte knikkers. Hij gaat net zo lang door totdat hij een rode knikker pakt.

Bereken de kans dat Jochem drie keer een knikker pakt.

Aanpak

Maak in gedachten een kansboom.

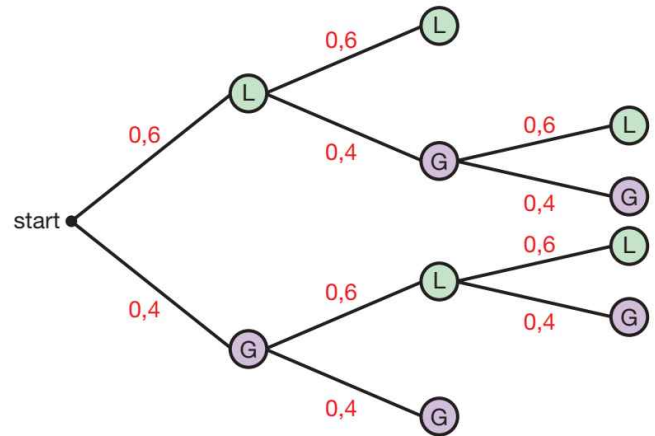


Uitwerking

$$P(\text{drie keer pakken}) = P(\bar{r} \bar{r} r) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \approx 0,139$$

- 16** In een vaas zitten vijf rode en drie witte knikkers. Bram pakt één voor één knikkers uit de vaas. Hij gaat daarmee door totdat hij een witte knikker pakt.
Bereken de kans dat Bram
- twee keer een knikker pakt
 - vier keer een knikker pakt.

- 17** Lotte en Gijs spelen een tennispartij over maximaal drie sets. Degene die als eerste twee sets wint, is winnaar.
De kans dat Lotte een set wint is 0,6, dus voor Gijs is die kans 0,4.
Bij deze situatie hoort de kansboom hiernaast.
Bereken de kans dat
- Lotte de partij in twee sets wint
 - Gijs de eerste set wint en Lotte de volgende twee
 - de partij drie sets duurt.



figuur 5.10

- 18** Fred en Barney spelen een dartswedstrijd over maximaal drie sets. Degene die als eerste twee sets wint, is winnaar.
De kans dat Barney een set wint is 0,65, dus voor Fred is die kans 0,35.
Bereken de kans dat
- Barney de partij in twee sets wint
 - de partij in twee sets is afgelopen
 - Barney de partij wint.

Geschiedenis Christiaan Huygens

Christiaan Huygens (1629-1695) werd in Den Haag geboren als tweede zoon van de beroemde dichter en staatsman Constantijn Huygens. Hij groeide op in een vooraanstaand milieu en kreeg als kind onderwijs van privéleraren. Hij was in alles een uitblinker. Op negenjarige leeftijd sprak hij al Latijn. Grote aanleg had hij ook voor wiskunde en mechanica. In 1645 ging hij in Leiden rechten en wiskunde studeren.

Huygens startte zijn carrière als wiskundige met publicaties over berekeningen met betrekking tot kegelsneden, cirkels en raaklijnen aan grafieken. Ook schreef hij in 1656 als eerste een verhandeling over kansrekening: 'Van rekeningh in spelen van geluck'. Huygens zet hierin uiteen dat de uitkomsten van kansspelen weliswaar onzeker zijn, maar dat de kans op winst of verlies exact te bepalen is.



- A 19** Thomas is zijn fietssleutel kwijt. Hij heeft een doosje met tien op het oog gelijke reservesleutels, waarvan hij weet dat er twee passende sleutels bij zitten. Hij probeert de sleutels één voor één. Bereken de kans dat
- a de vierde sleutel de eerste is die past
 - b de zesde sleutel de eerste is die past
 - c hij na vijf keer proberen beide passende sleutels heeft gevonden.

- A 20** Experiment: net zo lang met een dobbelsteen gooien totdat je 4 ogen gooit. Bereken de kans op
- a vier keer gooien
 - b minder dan drie keer gooien
 - c minstens drie keer gooien.

Experiment: net zo lang met een dobbelsteen gooien totdat je voor de tweede keer 4 ogen gooit.

- Bereken de kans op
- d zes keer gooien
 - e minstens zes keer gooien.

- A 21** Bij dopingcontrole door middel van haaranalyse wordt de volgende procedure gevolgd. Van een sporter worden twee haren onderzocht op verboden middelen. Is van beide haren de uitslag negatief, dan gaat de sporter vrijuit. Is van beide haren de uitslag positief, dan vindt diskwalificatie plaats. Is van één van de haren de uitslag positief, dan wordt een derde haar onderzocht. Op grond van dit aanvullende onderzoek vindt al dan niet diskwalificatie plaats. De kans dat bij dopinggebruik de analyse van één haar een positieve uitslag geeft is 0,85. Bereken de kans dat bij dopinggebruik
- a op grond van de controle van de eerste twee haren geen beslissing genomen wordt
 - b de sporter betraapt wordt.

Informatief Haaranalyse

Naast het verzamelen van urine- en bloedmonsters worden sporters ook op doping gecontroleerd door middel van haaranalyse. Haaranalyse heeft verschillende voordelen. Zo is een haarmonster makkelijk af te nemen en te bewaren. Omdat lichaamsvreemde stoffen lange tijd in het haar blijven zitten, biedt haaranalyse bovendien de mogelijkheid om dopinggebruik uit een ver verleden op te sporen. Verschillende bedrijven in de VS passen bij sollicitaties daarom haaranalyse toe.



Terugblik

Het herhalen van kansexperimenten

Het zes keer gooien met een dobbelsteen en het vier keer draaien van de schijf hiernaast zijn voorbeelden van het herhalen van een kansexperiment. Om hierbij kansen te berekenen gebruik je de productregel.

Bij het vier keer draaien van de schijf is

$$\begin{aligned} & P(\text{geen enkele keer blauw}) = P(\bar{b} \bar{b} \bar{b} \bar{b}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,482 \\ & P(\text{twee keer blauw en twee keer rood}) = \\ & \underbrace{P(b b r r) + P(b r b r) + P(r b b r) + \dots}_{\binom{4}{2} \text{ mogelijkheden}} = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,019 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(\text{minstens twee keer rood}) = 1 - P(\text{geen enkele keer rood}) - P(\text{één keer rood}) = \\ & 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 - \binom{4}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 \approx 0,407. \end{aligned}$$

De algemene productregel

Experiment: pak drie knikkers uit een vaas met acht rode en zes witte knikkers. Voor het berekenen van $P(\text{drie rode})$ kun je de algemene productregel gebruiken: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$.

$P(\text{drie rode}) = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \approx 0,154$. Hierin is $\frac{7}{13}$ de kans dat de tweede knikker rood is onder de voorwaarde dat de eerste knikker rood is.

Verder is $P(\text{één rode}) = \binom{3}{1} \cdot P(r w w) = \binom{3}{1} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12} \approx 0,330$.

Het herhalen van kansexperimenten totdat succes optreedt

Bij sommige kansexperimenten is het verstandig in gedachten een kansboom te maken. Denk bijvoorbeeld aan de volgende experimenten.

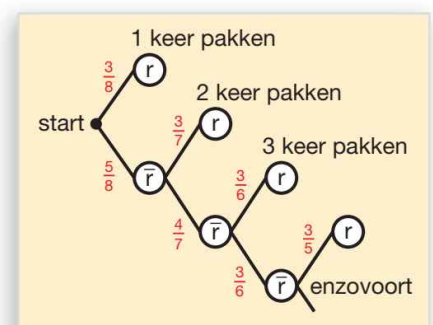
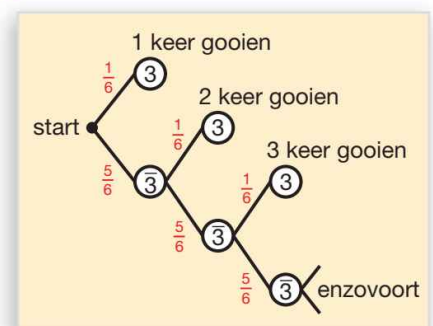
- Experiment: net zo lang met een dobbelsteen gooien totdat je drie ogen gooit.

$$P(\text{twee keer gooien}) = P(\bar{3} 3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,139$$

$$P(\text{vier keer gooien}) = P(\bar{3} \bar{3} \bar{3} 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,096$$

- Experiment: net zo lang knikkers uit een vaas met drie rode en vijf witte knikkers pakken totdat je een rode pakt.

$$\begin{aligned} & P(\text{vier keer een knikker pakken}) = \\ & P(\bar{r} \bar{r} \bar{r} r) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,107 \end{aligned}$$



5.2 Trekken met en zonder terugleggen

Q22 In een vierde klas van 28 leerlingen is 25% lid van een sportvereniging. Er worden willekeurig twee personen uit deze klas gekozen.

- a** Bereken de kans dat deze twee leerlingen lid zijn van een sportvereniging.

Een schijf is verdeeld in 28 even grote sectoren, waarvan 25% rood gekleurd is. De schijf wordt twee keer gedraaid.

- b** Wat denk je, is de kans op twee keer een rode sector gelijk aan de kans in vraag a?

Theorie A Het vaasmodel bij trekken met terugleggen

Experiment: laat de schijf van figuur 5.11 vier keer draaien. Ook dit experiment kun je omzetten naar een vaasmodel.

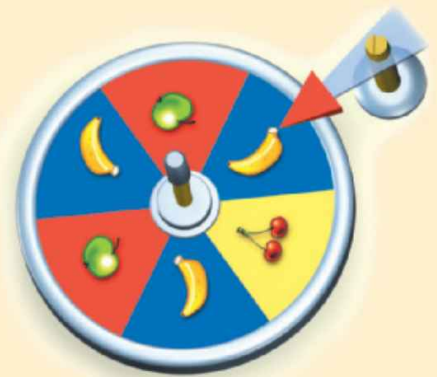
In de vaas stop je

- drie rode knikkers (de bananen)
- twee witte knikkers (de appels)
- één blauwe knikker (de kersen).

Eén keer draaien met de schijf komt overeen met één knikker uit de vaas pakken. Vier keer draaien komt overeen met vier keer een knikker uit de vaas pakken, maar je moet dan wel de getrokken knikker telkens terugleggen. De samenstelling van de vaas moet bij elke trekking immers hetzelfde zijn. We zeggen dat we vier knikkers **met terugleggen** uit de vaas trekken.

Tot nu toe had je bij het vaasmodel slechts te maken met trekken **zonder terugleggen**. Vier personen aanwijzen uit een groep van zes personen simuleer je door vier keer een knikker *zonder terugleggen* uit een vaas te pakken, want je kiest iemand niet twee keer.

In plaats van ‘pak drie knikkers zonder terugleggen’ zeggen we meestal ‘pak drie knikkers’. Staat er niets bij over *met* of *zonder* terugleggen, dan bedoelen we altijd *zonder* terugleggen.



figuur 5.11



Vaas met 6 rode en 5 zwarte knikkers**I TREKKEN MET TERUGLEGGEN**

Pak 4 knikkers met terugleggen.

$$P(\text{één zwarte}) = \binom{4}{1} \cdot P(\text{z r r r}) = \binom{4}{1} \cdot \frac{5}{11} \cdot \left(\frac{6}{11}\right)^3 \approx 0,295$$

II TREKKEN ZONDER TERUGLEGGEN

Pak 4 knikkers zonder terugleggen.

$$P(\text{één zwarte}) = \binom{4}{1} \cdot P(\text{z r r r}) = \binom{4}{1} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \approx 0,303$$

of

$$P(\text{één zwarte}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{11}{4}} \approx 0,303$$

- 23** In een vaas zitten 24 blauwe en 16 groene knikkers.

Matthijs pakt drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op

- a twee groene knikkers
- b minstens één blauwe knikker.

Elsbeth pakt met terugleggen drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op

- c twee groene knikkers
- d minstens één blauwe knikker.

- A 24** In een klas zitten tien jongens en twaalf meisjes.

- a Elk van de secties Frans, Duits, Engels en Nederlands verloot een boek in de klas.

Bereken de kans dat de vier boeken door jongens gewonnen worden.

- b De sectie Verzorging verloot in de klas vier appeltaarten.

Elke leerling kan hoogstens één taart winnen.

Bereken de kans dat de vier taarten door meisjes worden gewonnen.

- O 25** In een voetbalstadion zijn 20 000 toeschouwers aanwezig: 4000 vrouwen en 16 000 mannen. Er worden willekeurig drie toeschouwers uitgeloot die een gratis kaartje voor de bekerfinale ontvangen.

- a Vul in en rond af op vijf decimalen.

De kans dat de drie kaartjes alle drie door vrouwen worden

$$\text{gewonnen, is } P(\text{v v v}) = \frac{4000}{20000} \cdot \frac{3999}{19999} \cdot \dots \approx \dots$$

- b Johan beweert: de kans op een vrouw is $\frac{4000}{20000} = 0,2$, dus de

kans op drie vrouwen is $P(\text{v v v}) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$.

Waarom krijg je met deze berekening vrijwel hetzelfde antwoord als bij vraag a?

Theorie B Vuistregel voor kleine steekproef uit grote populatie

Bij veel kansexperimenten gaat het om trekken zonder terugleggen. Denk bijvoorbeeld maar aan de situatie in opgave 25.

Bij het pakken van drie knikkers uit de vaas hiernaast is

$$P(r r r) = \frac{12\,000}{30\,000} \cdot \frac{11\,999}{29\,999} \cdot \frac{11\,998}{29\,998}. \text{ Omdat } \frac{12\,000}{30\,000} = 0,4 \text{ en}$$

$$\frac{11\,999}{29\,999} \approx 0,400 \text{ en } \frac{11\,998}{29\,998} \approx 0,400 \text{ maakt het vrijwel niet uit}$$

of je de knikkers met of zonder terugleggen pakt.

Bij het berekenen van $P(r r r)$ mag je trekken zonder terugleggen opvatten als trekken met terugleggen.

Het voordeel hiervan is dat je dan krijgt $P(r r r) = 0,4^3 = 0,064$ en dat is veel eenvoudiger dan de berekening

$$P(r r r) = \frac{12\,000}{30\,000} \cdot \frac{11\,999}{29\,999} \cdot \frac{11\,998}{29\,998} = 0,063990...$$

Bij het pakken van drie knikkers uit een vaas met een zeer groot aantal knikkers maakt het voor de kansen weinig uit of de trekking met of zonder terugleggen is.



Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je trekken zonder terugleggen opvatten als trekken met terugleggen.

Uit onderzoek blijkt dat 71% van de internetgebruikers cookies wil kunnen weren. Dus $P(\text{gebruiker wil cookies kunnen weren}) = 0,71$.

Er worden willekeurig vijf internetgebruikers ondervraagd over cookies. Je hebt te maken met trekken zonder terugleggen, want een persoon komt niet twee keer in de steekproef voor.

Omdat een steekproef van vijf internetgebruikers klein is ten opzichte van alle internetgebruikers, mag je dit kansexperiment opvatten als 'trekken met terugleggen'.

Dus

- $P(\text{alle vijf willen cookies kunnen weren}) = P(w w w w w) = 0,71^5 \approx 0,180$
- $P(\text{twee van de vijf willen cookies kunnen weren}) = \binom{5}{2} \cdot P(w w \bar{w} \bar{w} \bar{w}) = \binom{5}{2} \cdot 0,71^2 \cdot 0,29^3 \approx 0,123$.

71% wil cookies weren
dus $P(w) = 0,71$
en $P(\bar{w}) = 0,29$.

In een studentenflat met 13 verdiepingen zijn per verdieping 8 eenheden, met 5 studenten per eenheid. Elke student heeft een internetaansluiting. Naar verwachting zijn er $13 \cdot 8 \cdot 0,71^5 \approx 19$ eenheden waar elke student cookies wil kunnen weren.

Voorbeeld

Dagelijks rijden veel vrachtwagens met gevaarlijke stoffen over de weg. Van deze vrachtwagens bevat 60% brandbare stoffen en 15% bijtende stoffen. Ga ervan uit dat een stof niet zowel brandbaar als bijtend is. Bij een controle worden op een snelweg tien vrachtwagens aangehouden die gevaarlijke stoffen vervoeren.

Bereken de kans dat

- a geen van deze vrachtwagens bijtende stoffen vervoert
- b acht van deze vrachtwagens brandbare stoffen en twee bijtende stoffen vervoeren
- c minstens drie van deze vrachtwagens brandbare stoffen vervoeren.

Uitwerking

- a $P(\text{geen bijtende stoffen}) = 0,85^{10} \approx 0,197$
- b $P(8 \text{ brandbare en } 2 \text{ bijtende}) = \binom{10}{8} \cdot 0,6^8 \cdot 0,15^2 \approx 0,017$
- c $P(\text{minstens } 3 \text{ brandbare}) =$
 $1 - P(\text{geen brandbare}) - P(\text{één brandbare}) - P(\text{twee brandbare}) =$
 $1 - 0,4^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,6 \cdot 0,4^9 - \binom{10}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^8 \approx 0,988$

- 26** In de tabel staat informatie over de kleur van personenauto's die in Nederland rondrijden.

KLEUR VAN PERSONENAUTO'S IN NEDERLAND

kleur	grijs	blauw	zwart	rood	overig
percentage	28%	22%	16%	14%	20%

Bereken de kans dat van zes willekeurig gekozen auto's

- a er geen enkele grijs is
 - b er drie blauw zijn
 - c er vier grijs zijn en twee blauw
 - d er meer dan vier rood zijn.
- 27** Elke werkdag reizen ruim vijf miljoen Nederlanders naar hun werk. Daarvan gebruikt 60% de auto, een kwart de fiets, 10% het openbaar vervoer en de rest loopt naar het werk. Bij een telefonische enquête worden 18 werkende Nederlanders ondervraagd.
- Bereken de kans dat van deze 18 personen
- a er minstens twee naar het werk lopen
 - b er vier of vijf naar het werk fietsen
 - c er twaalf met de auto naar het werk gaan en de rest met de fiets
 - d er vier fietsend of lopend naar het werk gaan
 - e tussen de 40% en 60% met de auto naar het werk gaat.

A 28 Jaarlijks komen veel klachten binnen bij de Commissie Geluidshinder Schiphol (CGS). Van de klagers woont 15% buiten een straal van 20 km rondom Schiphol en 6% buiten een straal van 30 km. Voor een onderzoek worden willekeurig twaalf klagers ondervraagd.

Bereken de kans dat

- a geen van de klagers buiten een straal van 30 km rondom Schiphol woont
- b twee van de klagers tussen 20 en 30 km van Schiphol wonen
- c twee van de klagers buiten een straal van 30 km van Schiphol wonen en de overige tien binnen een straal van 20 km.

A 29 Twaalf procent van de mensheid is linkshandig.

- a Bereken de kans dat van twee willekeurige personen er één linkshandig is.
- b Bereken de kans dat van vijf willekeurige personen er hoogstens één linkshandig is.
- c Hoe groot moet een gezelschap minstens zijn opdat de kans dat hiertoe minstens één linkshandige behoort, groter is dan 99%?

In een gezelschap van 50 personen zijn zes linkshandigen aanwezig.

- d Bereken de kans dat twee willekeurig aangewezen personen uit dit gezelschap beiden linkshandig zijn.

Aan een handbalcompetitie doen twaalf teams mee. Elk team bestaat uit 14 spelers.

- e Van hoeveel van deze teams verwacht je dat minder dan twaalf spelers rechtshandig zijn?



Terugblik

Trekken met en zonder terugleggen

Pak je drie knikkers uit een vaas met 3 rode en 4 witte knikkers, dan kan dat met terugleggen, maar ook zonder terugleggen.

Voor $P(\text{één rode knikker})$ krijg je bij het trekken

- met terugleggen

$$\binom{3}{1} \cdot P(\text{r w w}) = 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \approx 0,420$$

- zonder terugleggen

$$\binom{3}{1} \cdot P(\text{r w w}) = 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \approx 0,514 \text{ of } \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} \approx 0,514.$$

Trekken met terugleggen: noemers veranderen niet.

Trekken zonder terugleggen: noemers telkens één kleiner.

Kleine steekproef uit grote populatie

Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je trekken zonder terugleggen opvatten als trekken met terugleggen. Een toepassing van deze vuistregel zie je hieronder.

Van de Nederlanders gaat jaarlijks 17% op vakantie naar Frankrijk en 15% naar Duitsland.

- De kans dat er van een willekeurige groep van twaalf Nederlanders niemand naar Frankrijk op vakantie gaat, is $0,83^{12} \approx 0,107$.
- De kans dat er twee naar Frankrijk op vakantie gaan, is $\binom{12}{2} \cdot P(\text{F F } \bar{\text{F}} \bar{\text{F}} \dots \bar{\text{F}}) = \binom{12}{2} \cdot 0,17^2 \cdot 0,83^{10} \approx 0,296$.
- De kans dat er zeven naar Frankrijk gaan en niemand naar Duitsland, is

$$\binom{12}{7} \cdot P(\text{F F F F F F F A A A A A}) = \binom{12}{7} \cdot 0,17^7 \cdot 0,83^5 \approx 0,0005.$$

A betekent: andere vakantiebestemming dan Duitsland of Frankrijk.

In een klas krijgen alle 28 leerlingen de opdracht twaalf Nederlanders te ondervragen naar hun vakantiebestemming.

Je verwacht bij $28 \cdot 0,296 = 8,29$, dus bij 8 leerlingen dat er bij hun ondervraagden twee personen zitten die naar Frankrijk op vakantie gaan.

$$P(\text{F}) = 0,17 \text{ dus} \\ P(\bar{\text{F}}) = 0,83.$$

$$\begin{aligned} &12 \text{ nCr } 2 \cdot .17^2 \cdot .83^{10} \\ &3^{10} \cdot .2959529696 \\ &12 \text{ nCr } 7 \cdot .17^7 \cdot .83^5 \\ &68^5 \cdot 4.725112954 \text{E-}4 \end{aligned}$$

5.3 De verwachtingswaarde

O30 In een vaas zitten 3 rode, 4 witte en 5 blauwe knikkers.

Experiment: pak drie knikkers uit de vaas.

We definiëren: X = het aantal rode knikkers dat je pakt.

a Toon aan dat $P(X = 0) = \frac{21}{55}$.

b Bereken exact $P(X = 1)$.

Theorie A Stochasten

In opgave 30 is het aantal rode knikkers dat je uit de vaas pakt aangegeven met de letter X .

Omdat de waarde van X afhangt van het toeval, heet X een **toevalsvariabele** of ook wel **stochastische variabele**, kortweg **stochast**.

stochastikos
(Grieks: στοχαστικοξ)
gissend, leer van de
stochastische
waarneming.

Bij een kansexperiment neemt een stochast bij elke uitkomst een waarde aan.

Zo neemt de stochast X in opgave 30 bij de uitkomst 'één rode en twee witte knikkers' de waarde 1 aan.

In opgave 30 kan X de waarden 0, 1, 2 en 3 aannemen.

Je kunt bij het kansexperiment in opgave 30 ook andere stochasten definiëren, bijvoorbeeld Y = het aantal kleuren dat je pakt.

Merk op dat Y de waarden 1, 2 en 3 kan aannemen. Zo is

$$P(Y = 3) = P(\text{een rode, een witte en een blauwe knikker}) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{\binom{12}{3}} \approx 0,273.$$

Voorbeeld

In een vaas zitten acht rode, vijf witte en twee blauwe knikkers.

Experiment: pak vijf knikkers uit de vaas.

X = het aantal rode knikkers dat je pakt.

Bereken $P(X \leq 4)$.

Uitwerking

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - \frac{\binom{8}{5}}{\binom{15}{5}} \approx 0,981$$

- 31** Vul in voor de stochast X uit het voorbeeld.
- a $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq \dots)$
 - b $P(X \geq 3) = P(X = 3) + \dots + \dots$
 - c $P(X < 2) = P(X = 0) + \dots$
 - d $P(\text{minstens één rode}) = P(X \dots 1)$
 - e $P(\text{hoogstens drie rode}) = P(X \dots 3)$
 - f $P(\text{minder dan twee rode}) = P(X \dots 2)$
- 32** In een vaas zitten vijf rode, drie witte en twee groene knikkers.
 Experiment: pak vier knikkers uit de vaas.
 X = het aantal rode knikkers dat je pakt.
 Y = het aantal kleuren dat je pakt.
 Bereken $P(X = 2)$, $P(X \geq 1)$ en $P(Y = 3)$.

- A 33** In een doos zitten 20 enveloppen.
 In acht van deze enveloppen zit een briefje van 10 euro,
 de overige twaalf enveloppen zijn leeg.
 Arjan pakt twee enveloppen uit de doos.
 X = het totale bedrag in de twee enveloppen.
 Bereken $P(X = 20)$ en $P(X > 0)$.

- O 34** In een vaas zitten 3 rode, 4 witte en 5 blauwe knikkers.
 Experiment: pak drie knikkers uit de vaas.
 X = het aantal rode knikkers dat je pakt.
- a Vul de tabel hiernaast verder in. Geef exacte kansen.
 - b Tel de kansen van de tabel op. Is het antwoord verrassend? Licht toe.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{21}{55}$			

Theorie B Kansverdelingen

De tabel in opgave 34 heet de **kansverdeling** van X .

De letter x geeft de waarde van X aan.

Omdat in de kansverdeling alle mogelijke waarden staan die X kan aannemen, is de som van de kansen gelijk aan 1.

Omdat X in opgave 34 alleen losse waarden kan aannemen, is X een **discrete stochast** en de bijbehorende kansverdeling is een **discrete kansverdeling**.

Een stochast die alleen losse waarden kan aannemen is een discrete stochast. De kansverdeling van een discrete stochast is een tabel met alle mogelijke waarden van de stochast en de bijbehorende kansen.

Een bijzondere discrete kansverdeling is de **discrete uniforme verdeling**.

Bij een discrete uniforme kansverdeling hebben alle n uitkomsten kans $\frac{1}{n}$.

Zo hoort bij het gooien met een dobbelsteen en de stochast

X = het aantal ogen

de uniforme kansverdeling

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

De kansverdeling in opgave 34 is een voorbeeld van een **hypergeometrische verdeling**. Bij de hypergeometrische verdeling heb je te maken met trekken zonder terugleggen. Je kunt hierbij de kansen berekenen met de algemene productregel of via combinaties.

Is bij het trekken met terugleggen de stochast X het aantal trekkingen totdat succes optreedt, dan heeft X een **geometrische verdeling**.

5

Voorbeeld

Een vaas bevat 12 knikkers waaronder 4 rode.

Experiment: pak drie knikkers.

X = het aantal rode knikkers dat je pakt.

Stel de kansverdeling van X op. Geef exacte kansen.

Uitwerking

$$P(X=0) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{55}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} = \frac{12}{55}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{55}$$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

35 Een vaas bevat 15 knikkers waaronder 5 rode.

Experiment: pak vier knikkers.

X = het aantal rode knikkers dat je pakt.

a Stel de kansverdeling van X op. Geef exacte kansen.

b Met wat voor kansverdeling heb je te maken? Kies uit discrete uniforme verdeling, hypergeometrische verdeling en geometrische verdeling.

- 36** Een vaas bevat N knikkers waaronder M rode.

Experiment: pak n knikkers.

X = het aantal rode knikkers dat je pakt.

Druk $P(X = m)$ uit in N , M en n .

- 37** Een vaas bevat 10 knikkers waaronder 6 rode.

Experiment: pak zonder terugleggen één voor één knikkers uit de vaas totdat je een rode hebt.

X = het aantal knikkers dat je pakt.

Stel de kansverdeling van X op. Geef de kansen exact.

- 38** Experiment: het gooien met een dobbelsteen totdat je zes ogen gooit.

X = het aantal worpen.

a Toon aan dat $P(X = 3) = \frac{25}{216}$.

b Vul de tabel verder in. Geef de kansen exact.

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$			$\frac{25}{216}$		

c Met wat voor kansverdeling heb je te maken?

d Druk $P(X = k)$ uit in k .

e Bereken $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots$ met de formule van een sommeerbare meetkundige rij.

Waarom is de uitkomst niet verrassend?

f Bereken $P(X \leq 10)$.

$$S = \frac{u_0}{1 - r}$$

- 39** Bij een kansexperiment is de kans op succes p .

Dit kansexperiment wordt herhaald totdat succes optreedt.

X = het aantal keer dat het experiment wordt uitgevoerd.

Druk $P(X = k)$ uit in p en k .

- A 40** Coen en Niek spelen een tennispartij over maximaal vijf sets.

Wie als eerste drie sets wint, heeft de partij gewonnen.

De kans dat Coen een set wint is 0,6. Voor Niek is die kans dus 0,4.

X = het aantal sets dat de partij duurt.

Stel de kansverdeling van X op. Geef exacte kansen.

- O 41** Sportvereniging Excelsior organiseert wekelijks een loterij.

Elk lot kost € 5. Er is een eerste prijs van € 2000 en er zijn

100 prijzen van € 20. Elke week worden 1000 loten verkocht.

Hoeveel winst maakt Excelsior wekelijks met deze loterij?

Hoeveel is dat gemiddeld per lot?

Theorie C De verwachtingswaarde van een discrete stochast

De sportvereniging uit opgave 41 maakt gemiddeld per lot een winst van 1 euro. Omgekeerd kan dus een deelnemer aan de loterij gemiddeld per lot een verlies van 1 euro verwachten. We zeggen dat de **verwachtingswaarde** van de winst W per lot voor een deelnemer gelijk is aan -1 euro. Notatie: $E(W) = -1$. Om de winstverwachting per lot te berekenen maken we gebruik van de stochast U , de uitbetaling per lot. Deze uitbetaling kan zijn 2000, 20 of 0 euro. Omdat 899 van de 1000 loten geen prijs geven, is $P(U = 0) = \frac{899}{1000} = 0,899$. Zo ontstaat de volgende kansverdeling.

u	2000	20	0
$P(U = u)$	0,001	0,1	0,899

De letter E komt van expectation, het Engelse woord voor verwachting.

Door elke mogelijke waarde van U te vermenigvuldigen met de bijbehorende kans en vervolgens de uitkomsten op te tellen, krijg je $E(U)$.

$$E(U) = 2000 \cdot 0,001 + 20 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,899 = 4.$$

De verwachtingswaarde van de winst per lot is dus

$$E(W) = 4 - 5 = -1.$$

winst =
uitbetaling – inleg

Werkschema: de verwachtingswaarde van een discrete stochast X berekenen

- 1 Stel de kansverdeling van X op.
- 2 Vermenigvuldig elke waarde van X met de bijbehorende kans.
- 3 Tel de uitkomsten op. De som is de verwachtingswaarde $E(X)$.

$$\text{Dus } E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

$$\text{Met de sigmanotatie krijg je } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i).$$

Bij de discrete stochast X met uitkomsten $x_1, x_2, \dots, x_n$ hoort de verwachtingswaarde $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$.

Informatief De verwachtingswaarde

De verwachtingswaarde -0,95 euro in het voorbeeld op de volgende bladzijde suggereert dat een deelnemer per spel 0,95 euro verlies lijdt. Maar dat kan niet, want per spel kun je uitsluitend een geheel aantal euro's winnen of verliezen. De verwachtingswaarde geeft aan *wat je gemiddeld per spel kunt verwachten*. Zou je 100 keer meespelen, dan kun je rekenen op een verlies van $100 \times 0,95 = 95$ euro.

Voorbeeld

Bij het spel in figuur 5.12 mag een deelnemer voor €2 meespelen. Nadat het rad is uitgedraaid, geeft de pijl aan hoeveel euro de uitbetaling is. Bereken voor een deelnemer de verwachtingswaarde van de winst per spel.

Uitwerking

U = uitbetaling

u	0	1	2	3	5
$P(U = u)$	0,50	0,20	0,15	0,10	0,05

$E(U) = 0 \cdot 0,50 + 1 \cdot 0,20 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,05 = 1,05$
De verwachtingswaarde van de winst is $1,05 - 2 = -0,95$ euro.



figuur 5.12

uitbetaling in euro's	frequentie
0	10
1	4
2	3
3	2
5	1
totaal	20

- 42** Bij een loterij zijn 100 loten van €2 verkocht. Er is een eerste prijs van €50 en er zijn drie tweede prijzen van €10. Edwin heeft één lot gekocht.

- Stel de kansverdeling op van de uitbetaling per lot.
- Bereken de winstverwachting van Edwin bij deze loterij.

We noemen een loterij *eerlijk* als de verwachtingswaarde van de uitbetaling gelijk is aan de inleg per lot.

- Wat moet bij deze loterij een lot kosten om van een eerlijke loterij te kunnen spreken?

Eerlijk spel als
 $E(U) = \text{inleg}$.

- 43** Een winkel komt met de volgende openingsstunt. Elke klant mag uit een doos met 20 ballen, waaronder twee rode en vier blauwe, twee ballen pakken. Na vaststelling van de kleuren worden de twee ballen in de doos teruggelegd. Een klant die de twee rode ballen pakt, krijgt een waardebon van 100 euro. Een klant die een rode en een blauwe bal pakt, krijgt een waardebon van 20 euro. De andere mogelijkheden leveren geen prijs op. Bereken de verwachtingswaarde van de uitbetaling per klant.

- 44**
 - Experiment: een worp met een dobbelsteen.
 X = het aantal ogen dat je gooit.
Bereken $E(X)$.
 - Gegeven is de uniforme stochast Y met uitkomstenverzameling $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.
Druk $E(Y)$ uit in n .

- 45** Gegeven is de kansverdeling van het voorbeeld op bladzijde 28.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

- a** Bereken $E(X)$.

Bewering:

Bij een hypergeometrische kansverdeling met stochast X

is $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$. Hierin is N het totale aantal elementen waaruit je kiest, M het aantal elementen met de gewenste eigenschap en n het aantal elementen dat je uit N kiest.

- b** Controleer of deze bewering klopt bij de gegeven tabel.
c Controleer of deze bewering klopt bij de kansverdeling die je in opgave 35 hebt gemaakt.

5

- A 46** *Under and over seven* is een spel met twee dobbelstenen dat afkomstig is uit de VS. Je zet 1 euro in op een van de volgende situaties.

- De som van het aantal ogen is minder dan 7.
Is dit het geval dan krijg je twee euro uitbetaald; anders ben je je euro kwijt.
 - De som van het aantal ogen is meer dan 7.
Is dit het geval dan krijg je twee euro uitbetaald; anders ben je je inzet kwijt.
 - De som van het aantal ogen is 7.
Is dit het geval dan krijg je vijf euro uitbetaald; anders ben je je euro kwijt.
- a** Toon aan dat de verwachtingswaarde voor elk van deze drie spelsituaties gelijk is.
b Wat zou de uitbetaling in situatie 3 moeten zijn om een eerlijk spel te hebben bij deze spelsituatie?

- A 47** Bij een spel met drie dobbelstenen is de inleg € 10. Gooit een deelnemer drie gelijke aantallen ogen, dan krijgt hij € 100. Gooit hij twee gelijke aantallen ogen, dan krijgt hij € 15. In alle andere gevallen krijgt hij niets.

- a** Bereken de winstverwachting per spel voor de organisator.
b Op een avond keert de organisator € 3930 uit.
 Wat is het meest waarschijnlijke aantal prijzen van € 100?

A48

Een groep van 1000 personen moet een bloedonderzoek ondergaan. Het laboratorium dat dit bloed moet onderzoeken weet uit ervaring dat in 99% van de gevallen het testresultaat van het bloed positief is, dat wil zeggen dat het bloed in orde is.

Het bloedonderzoek van een groep van 1000 personen is een vrij kostbare zaak. De hoofdlaborant komt met het volgende voorstel. Neem telkens van 25 personen bloed af en doe dat in één reageerbuisje. Test de inhoud van dat buisje. Is de uitslag positief, dan is het bloed van alle 25 personen in orde. Is de test negatief, dan moet het bloed van elk van de 25 personen alsnog apart onderzocht worden om te weten te komen van wie van deze personen het bloed niet in orde is.

We onderzoeken of het voorstel van de hoofdlaborant inderdaad kostenbesparend is. De stochast X is het aantal tests dat bij dit voorstel nodig is om bij een groep van 25 personen te achterhalen van wie het bloed niet in orde is.



- Bereken in vier decimalen nauwkeurig $P(X = 1)$ en $P(X = 26)$. Bereken vervolgens $E(X)$ in twee decimalen nauwkeurig.
- Hoeveel tests verwacht je dat nodig zijn om bij 1000 personen het bloed te onderzoeken? Hoeveel procent is dan bespaard op het aantal tests van 1000 personen afzonderlijk?
- Neem aan dat je van deze groep van 1000 personen steeds het bloed van 20 personen in één reageerbuisje doet. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal tests dat nodig is om in zo'n groep van 20 personen te achterhalen van wie het bloed niet in orde is. Hoeveel tests verwacht je dan dat nodig zijn om van 1000 personen het bloed te onderzoeken?

Neem aan dat je van de groep van 1000 personen steeds het bloed van n personen in één reageerbuisje doet. De stochast Y is het aantal tests dat nodig is om in zo'n groep van n personen te achterhalen van wie het bloed niet in orde is.

- Welke twee waarden kan Y aannemen? Druk de kansverdeling van Y uit in n .
- Toon aan dat $E(Y) = n + 1 - n \cdot 0,99^n$ en dat het verwachte aantal tests voor de groep van 1000 personen gelijk is aan $1000 + \frac{1000}{n} - 1000 \cdot 0,99^n$.
- Onderzoek van hoeveel personen het bloed in één reageerbuisje gedaan moet worden om een zo groot mogelijke besparing te krijgen. Hoeveel tests zijn dan bespaard op het aantal tests van 1000 personen afzonderlijk?

Terugblik

Stochasten

Bij een kansexperiment neemt een stochast (toevalsvariabele) bij elke uitkomst een waarde aan. Bij het kansexperiment 'gooien met twee dobbelstenen' zijn veel stochasten te definiëren, bijvoorbeeld X = het verschil van de aantallen ogen. Uit de figuur hiernaast volgt $P(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ en $P(X=1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. Stochasten kun je gebruiken om gebeurtenissen kort te noteren. In plaats van het 'het verschil van de aantallen ogen is minstens 1' krijg je $X \geq 1$.

	VERSCHIL					
6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5	6

Kansverdelingen

De kansverdeling van X is een tabel waarin bij elke waarde van X de bijbehorende kans is vermeld. Bij de stochast X hierboven krijg je de kansverdeling hiernaast.

Ter controle heb je de regel: de som van de kansen in een kansverdeling is 1.

Omdat X slechts losse waarden kan aannemen, is X een discrete stochast.

Bekende discrete kansverdelingen zijn:

- De discrete uniforme kansverdeling. Dat is een kansverdeling waarbij bij elke waarde van de stochast een even grote kans hoort.
- De hypergeometrische kansverdeling. Hiermee heb je te maken als je zonder terugleggen knikkers uit een vaas pakt. Zo kun je bij het pakken zonder terugleggen van 3 knikkers uit een vaas met 4 rode en 6 witte knikkers de hypergeometrische stochast ' X = het aantal rode knikkers' definiëren.
- De geometrische kansverdeling. Dat is een kansverdeling die hoort bij het herhalen van hetzelfde kansexperiment totdat succes optreedt.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Verwachtingswaarde

John koopt een lot in een loterij met 100 loten.

Elk lot kost €5. Er is een eerste prijs van €250, een tweede prijs van €100 en er zijn twee derde prijzen van €50.

De kansverdeling van de uitbetaling U per lot staat hieronder.

u	250	100	50	0
$P(U=u)$	0,01	0,01	0,02	0,96

$$E(U) = 250 \cdot 0,01 + 100 \cdot 0,01 + 50 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,96 = 4,50$$

De verwachtingswaarde van de winst per lot is $4,50 - 5 = -0,50$ euro.

Dit betekent dat je gemiddeld per lot €0,50 verlies kunt verwachten.

Na het opstellen van de kansverdeling van X bereken je dus $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i)$.

5.4 De binomiale verdeling

O49 Experiment: het tien keer gooien met een dobbelsteen.

X = het aantal keer 2 ogen.

a Bereken $P(X = 3)$.

b Bereken $P(X = 4)$.

c Licht toe dat $P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$.

Theorie A Het binomiale kansexperiment

Het één keer gooien met een dobbelsteen waarbij je alleen let op het **succes** ‘het gooien van een 2’ en de **mislukking** ‘het gooien van geen 2’ is een voorbeeld van een **Bernoulli-experiment**.

Een Bernoulli-experiment is een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenissen succes en mislukking let.

De kans op succes wordt aangegeven met p .

De kans op succes geven we aan met p , dus de kans op mislukking is $1 - p$.

De kansverdeling bij een Bernoulli-experiment met

B = het aantal keer succes

is dus

b	0	1
$P(B = b)$	$1 - p$	p

Dit geeft $E(B) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$.

Het tien keer gooien met een dobbelsteen waarbij je let op het succes ‘het gooien van een 2’ bestaat uit tien gelijke Bernoulli-experimenten met $p = \frac{1}{6}$ die onafhankelijk van elkaar zijn.

Dit samengestelde kansexperiment is een voorbeeld van een **binomiaal kansexperiment**. Essentieel bij een binomiaal kans-experiment is dat je hetzelfde Bernoulli-experiment een aantal keren uitvoert. Dit aantal geven we aan met n . Hierbij is X het aantal keer succes dat optreedt. We noemen X een **binomiale toevalsvariabele**. Ook zeggen we dat X **binomiaal verdeeld** is.

Een binomiaal kansexperiment is een kansexperiment dat bestaat uit n gelijke Bernoulli-experimenten.

Hierbij hoort de stochast X , die het aantal keer succes aangeeft.

Afspraak

Bij een binomiaal kansexperiment is

- n het aantal keer dat het Bernoulli-experiment wordt uitgevoerd
- p de kans op succes per keer
- X het aantal keer succes.

Bij een binomiale stochast X zijn n en p de **parameters van de stochast**.

In opgave 49 heb je gezien dat bij het binomiale kansexperiment met $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$ de kans op k keer succes gelijk is aan

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}.$$

Algemeen is $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ en de

verwachtingswaarde $E(X) = n \cdot p$.

Bij een binomiale stochast X met parameters n en p is de kans op k keer succes gelijk aan $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ en de verwachtingswaarde $E(X) = n \cdot p$.

Voorbeeld

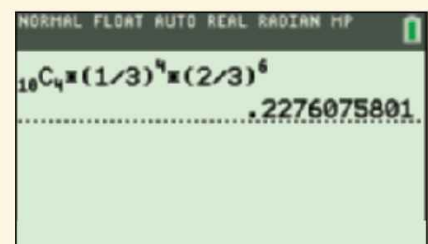
Bereken de kans dat je bij tien worpen met een dobbelsteen vier keer minstens vijf ogen gooit.

Uitwerking

X = het aantal keer dat je minstens vijf ogen gooit.

X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,228$$



- 50** In een vaas zitten acht rode, twee witte en tien groene knikkers.
- Experiment: met terugleggen zes keer een knikker uit de vaas pakken.
 X = het aantal rode knikkers dat je pakt.
 Geef de parameters n en p en bereken $P(X = 4)$.
 - Experiment: met terugleggen twaalf keer een knikker uit de vaas pakken.
 Y = het aantal niet-witte knikkers dat je pakt.
 Geef de parameters n en p en bereken $P(Y = 10)$.
 - Experiment: zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas pakken.
 Z = het aantal groene knikkers dat je pakt.
 Is Z binomiaal verdeeld? Bereken $P(Z = 3)$.

- 51** Een honkbalspeler heeft een slaggemiddelde van 0,3.
- Bereken de kans dat hij in tien achtereenvolgende slagbeurten vijf keer slag heeft.
 - Bereken bij tien achtereenvolgende slagbeurten de kans op de verwachtingswaarde van het aantal keren slag.
 - Bereken de kans dat hij in vijf achtereenvolgende slagbeurten alleen bij de laatste beurt slag heeft.

R 52 Je kent het binomium van Newton: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$.

De term $\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ is op te vatten als de kans op k keer succes bij een binomiaal kansexperiment.

- Welke letter in deze term geeft de kans op succes per keer weer?
- Hoe volgt uit het binomium van Newton dat de som van de kansen van een binomiale kansverdeling gelijk is aan 1?

- O 53** De stochast X is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = 0,2$. Bij X hoort de kansverdeling hieronder.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,512	0,384	0,096	0,008

- Bereken $P(X \leq 2)$
- Waarom kun je direct zeggen dat $P(X \leq 3) = 1$?
- Waarom is $P(X \leq 0) = P(X = 0)$?
- Vul de tabel hieronder in.

x	0	1	2	3
$P(X \leq x)$				

Geschiedenis De Bernoulli's

De familie Bernoulli heeft veel beroemde wiskundigen voortgebracht. Oorspronkelijk woonden de Bernoulli's in Antwerpen, maar in 1622 vestigde de familie zich in Bazel. Tot de familieleden die zich met de kansrekening hebben beziggehouden behoort Jacob Bernoulli (1654-1705). Hij was niet alleen geïnteresseerd in empirische kansen zoals sterftetabellen en juridische statistieken, maar hield zich ook bezig met theoretische kansen gebaseerd op permutaties en combinaties. In 1690 formuleerde hij de wet van de grote aantallen. Het grootste deel van zijn werk op het gebied van de kansrekening is na zijn dood uitgegeven onder de titel 'Ars conjectandi' ofwel 'de kunst van het gissen'.



Theorie B De cumulatieve binomiale verdeling

In opgave 53 staat een tabel met kansen van het type $P(X \leq x)$.

De tabel heet de **cumulatieve kansverdeling** van X .

Een kans als $P(X \leq 2)$ heet een **cumulatieve kans**.

cumuleren = opeenhopen,
opstapelen, samenvoegen

De GR heeft opties waarmee voor elke mogelijke n , p en k binomiale en cumulatieve binomiale kansen kunnen worden berekend. Op de TI staan de opties binompdf en binomcdf in het DISTR-DISTR-menu. Op de Casio staan de opties Bpd en Bcd in het OPTN-STAT-DIST-BINOMIAL-menu.

Afspraak

Bij de binomiale verdeling gebruiken we de notaties

$$P(X = k) = \text{binompdf}(n, p, k)$$

$$P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n, p, k).$$

Let erop dat je bij de Casio achtereenvolgens k , n en p invoert.

Voorbeeld

De schijf in figuur 5.13 is verdeeld in vier even grote sectoren.

Sandra laat de schijf zeven keer draaien.

Bereken de kans dat zij

- drie keer een 1 krijgt
- hoogstens vier keer een 2 krijgt
- vier keer een 1 en drie keer een 3 krijgt.



figuur 5.13

Uitwerking

- a X = het aantal keer 1.

X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = \frac{1}{2}$.

$$P(X = 3) = \text{binompdf}(7, \frac{1}{2}, 3) \approx 0,273$$

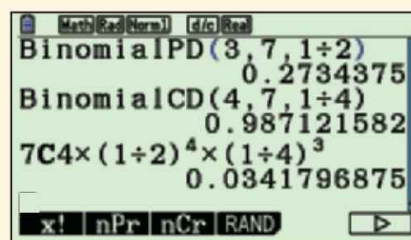
- b X = het aantal keer 2.

X is binomiaal verdeeld met $n = 7$ en $p = \frac{1}{4}$.

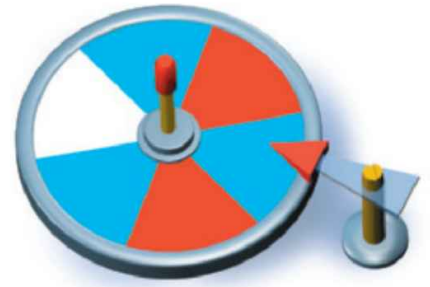
$$P(X \leq 4) = \text{binomcdf}(7, \frac{1}{4}, 4) \approx 0,987$$

- c $P(\text{vier keer een 1 en drie keer een 3}) = \binom{7}{4} \cdot (\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{1}{4})^3 \approx 0,034$

Let op: dit is *geen* binomiale kans.

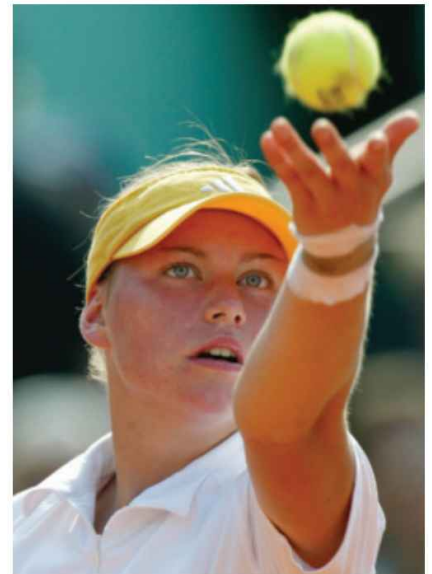


- 54** De schijf in figuur 5.14 is verdeeld in zes even grote sectoren.
- Bereken de kans dat de pijl bij
- 10 keer draaien drie keer wit aanwijst
 - 12 keer draaien hoogstens vijf keer rood aanwijst
 - 9 keer draaien minstens één keer blauw aanwijst
 - 8 keer draaien vijf keer blauw en drie keer rood aanwijst
 - 16 keer draaien acht keer blauw, vijf keer rood en drie keer wit aanwijst.



figuur 5.14

- 55** Van een tennisspeelster is bekend dat van haar eerste opslagen 55% in is.
- Bereken de kans dat bij tien servicebeurten vijf keer de eerste opslag in is.
 - Bereken de kans dat bij zes servicebeurten alleen de laatste vier keer de eerste opslag in is.



- A 56** Beatrice pakt twee knikkers uit een vaas met zes rode en drie witte knikkers. Ze bekijkt de kleur van de knikkers en legt ze daarna terug in de vaas. Beatrice voert dit experiment acht keer uit.
- Bereken de kans dat ze
- drie keer twee rode knikkers pakt
 - hoogstens twee keer twee witte knikkers pakt
 - vier keer verschillend gekleurde knikkers pakt
 - vier keer twee rode en vier keer twee verschillend gekleurde knikkers pakt.

- A 57** Op een autosnelweg houdt 84% van de automobilisten zich aan de toegestane maximumsnelheid van 120 km/uur. Van de snelheidsovertreders rijdt een kwart zelfs 140 km/uur of meer. Bij een radarcontrole wordt van 60 auto's de snelheid gecontroleerd.
- Bereken de kans dat
- tien automobilisten te hard rijden
 - hoogstens twee automobilisten 140 km/uur of meer rijden
 - een kwart van de automobilisten een snelheid heeft tussen 120 en 140 km/uur.

- A 58** Van een zeer grote partij accu's is 20% ondeugdelijk. Een opkoper, die dit percentage niet kent, besluit de partij op te kopen als hij in een steekproef van 54 accu's niet meer dan 3 ondeugdelijke accu's aantreft.
- Bereken de kans dat de opkoper de partij koopt.

- A 59** Bereken de kans dat je
- bij 15 worpen met een dobbelsteen hoogstens tien keer minstens vijf ogen gooit
 - bij 18 worpen met twee dobbelstenen vijf keer in totaal meer dan zeven ogen gooit.

- A 60** X is een binomiale stochast. De kans op meer dan acht keer succes noteer je als $P(X > 8)$.

Noteer met behulp van X

- de kans op minstens vier keer succes
- de kans op minder dan acht keer succes.

Voor $P(X < 6)$ kun je schrijven $P(X \leq 5)$.

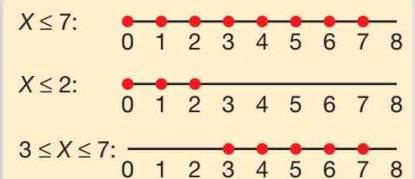
Voor $P(X > 4)$ kun je schrijven $1 - P(X \leq 4)$.

Voor $P(3 \leq X \leq 7)$ kun je schrijven $P(X \leq 7) - P(X \leq 2)$.

Voor $P(3 < X < 7)$ kun je schrijven $P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$.

Herleid tot een vorm met één of meer kansen van het type $P(X \leq \dots)$.

- $P(X > 5)$
- $P(X \geq 10)$
- $P(X < 7)$
- $P(12 \leq X \leq 20)$
- $P(4 < X < 12)$
- $P(2 \leq X < 5)$
- $P(4 < X \leq 8)$
- $P(X \text{ tussen } 8 \text{ en } 20)$



Het verschil van $X \leq 7$ en $X \leq 2$ is juist $3 \leq X \leq 7$.

Bij 'tussen' doen de grenzen niet mee.

Theorie C Binomiale kansen berekenen

Bij een binomiale stochast X moet je kansen kunnen herleiden tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt.

Zo is $P(\text{meer dan vier keer succes}) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$

en $P(\text{tussen drie en tien keer succes}) = P(3 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3)$.

Vervolgens kun je de kansen met de GR berekenen.

Gebruik bij opgaven over binomiale kansexperimenten het volgende werkschema.

Werkschema: binomiale kansen berekenen

- Omschrijf de betekenis van de stochast X .
- Noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .
- Noteer de gevraagde kans met X en herleid deze kans tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt. Bereken deze kans met de GR.

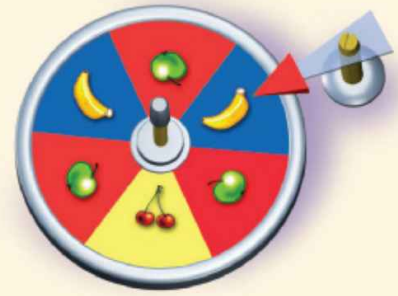
Op de Casio fx-CG20
hoef je binomiale kansen
niet te herleiden tot een
vorm waarin $P(X = k)$ of
 $P(X \leq k)$ voorkomt.
Gebruik
BinomialCD (l, r, n, p)
waarbij l de linkergrens
en r de rechtergrens is.
Bij $n = 20$ en $p = \frac{1}{3}$ is
 $P(X \geq 8) =$
BinomialCD($8, 20, 20, \frac{1}{3}$).

Voorbeeld

De schijf in figuur 5.15 is verdeeld in zes even grote sectoren. Per beurt wijst de pijl één sector aan.

Bereken de kans dat in

- 20 beurten meer dan acht keer een appel wordt aangewezen
- 50 beurten minder dan zes keer kersen wordt aangewezen
- 30 beurten negen of tien keer een banaan wordt aangewezen
- 25 beurten tussen drie en negen keer kersen wordt aangewezen.



figuur 5.15

Uitwerking

- a** X = het aantal keer appel.

X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - \text{binomcdf}(20, \frac{1}{2}, 8) \approx 0,748$$

- b** X = het aantal keer kersen.

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = \frac{1}{6}$.

$$P(X < 6) = P(X \leq 5) = \text{binomcdf}(50, \frac{1}{6}, 5) \approx 0,139$$

- c** X = het aantal keer banaan.

X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(X = 9 \text{ of } X = 10) = P(X = 9) + P(X = 10) = \text{binompdf}(30, \frac{1}{3}, 9) + \text{binompdf}(30, \frac{1}{3}, 10) \approx 0,299$$

- d** X = het aantal keer kersen.

X is binomiaal verdeeld met $n = 25$ en $p = \frac{1}{6}$.

$$P(3 < X < 9) = P(X \leq 8) - P(X \leq 3) = \text{binomcdf}(25, \frac{1}{6}, 8) - \text{binomcdf}(25, \frac{1}{6}, 3) \approx 0,603$$

- 61** Bij een binomiaal kansexperiment met $n = 25$ en $p = 0,42$

is X het aantal keer succes.

Bereken.

- $P(X < 10)$
- $P(X \geq 8)$
- $P(\text{meer dan 12 keer succes})$
- $P(\text{tussen 9 en 16 keer succes})$
- $P(\text{minstens 6 keer succes})$
- $P(9 \text{ of } 10 \text{ keer succes})$

- 62** Zie de schijf van het voorbeeld.

Bereken de kans dat de pijl in

- 10 beurten minstens vijf keer een appel aanwijst
- 25 beurten tussen de 10 en 20 keer een appel aanwijst
- 100 beurten meer dan 60 keer een appel aanwijst
- 35 beurten zeven keer kersen aanwijst.

- 63** In een vaas zitten 12 rode, 8 zwarte en 5 witte knikkers. Mariëlle pakt twee knikkers uit de vaas en kijkt welke kleur deze knikkers hebben. Ze voert dit experiment 15 keer uit. Elke keer legt ze de getrokken knikkers weer in de vaas terug. Bereken de kans dat Mariëlle
- drie keer twee rode knikkers pakt
 - minstens tien keer één zwarte knikker pakt
 - minder dan zes keer twee knikkers van dezelfde kleur pakt
 - minstens acht keer minstens één rode knikker pakt.

- A 64** In de veehouderij heeft men er vaak belang bij dat er vooral runderkalfjes van het vrouwelijke geslacht, zogenaamde vaarskalveren, worden geboren. Deze groeien namelijk op tot melkkoeien. Bij natuurlijke dracht en bij inseminatie met gewoon sperma is de kans op een vaarskalf ongeveer 50%. Bij gesekst sperma zijn in een laboratorium de mannelijke en de vrouwelijke spermacellen gescheiden. Veehouder Woldring gebruikt gesekst sperma waarbij de kans op een vaarskalf 90% is. Bereken de kans dat
- 12 inseminaties allemaal een vaarskalf opleveren
 - bij 20 inseminaties minstens 17 vaarskalveren worden geboren
 - bij 10 inseminaties alleen bij de laatste geboorte een stierkalf ter wereld komt
 - bij 5 inseminaties om en om een stierkalf en een vaarskalf wordt geboren.

- A 65** Bereken de kans dat je
- bij 30 worpen met twee geldstukken hoogstens vijf keer met beide geldstukken munt gooit
 - bij 18 worpen met twee dobbelstenen minstens vijf keer minstens zeven ogen gooit.

- O 66** Marius gooit n keer met een dobbelsteen.
- Neem $n = 40$ en bereken de kans op minstens vier keer zes ogen.
 - Neem $n = 50$ en bereken de kans op minstens vier keer zes ogen.

Theorie D Berekenen van n

Marius vraagt zich af hoe vaak hij met een dobbelsteen moet gooien opdat de kans op minstens vier keer zes ogen groter is dan 95%.

Bij de binomiale stochast

X = het aantal keer zes ogen

is n onbekend en $p = \frac{1}{6}$.

De vraag is dus: voor welke n is $P(X \geq 4)$ groter dan 0,95?

Dit geeft $1 - P(X \leq 3) > 0,95$. In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je dit aanpakt.

Voorbeeld

Hoe vaak moet je met een dobbelsteen gooien opdat de kans op minstens vier keer zes ogen groter is dan 95%?

Uitwerking

X = het aantal keer zes ogen.

X is binomiaal verdeeld met onbekende n en $p = \frac{1}{6}$.

$P(X \geq 4) > 0,95$ ofwel $1 - P(X \leq 3) > 0,95$

Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(x, \frac{1}{6}, 3)$ (TI) of

$y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(3, x, \frac{1}{6})$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 44$ geeft $y_1 \approx 0,9496$

$x = 45$ geeft $y_1 \approx 0,9554$.

Je moet dus minstens 45 keer gooien.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP PRESS ENTER TO EDIT				
X	Y1			
39	.90892			
40	.91887			
41	.92783			
42	.93589			
43	.94313			
44	.9496			
45	.9554			
46	.96057			
47	.96518			
48	.96929			
49	.97294			

$Y1=1-\text{binomcdf}(X,1/6,3)$

Math (Exp) (Norm) d/c (Real)	
$Y1=1-\text{BinomialCD}(3,x,($	
X	Y1
43	0.9431
44	0.9496
45	0.9553
46	0.9605
0.9553983279	
FORMAT	DELETE ROW EDIT SPEC ON GPHS

- 67** a Hoeveel keer moet een geldstuk worden opgegooid opdat de kans op minstens vijf keer munt groter is dan 0,99?
 b Hoeveel keer moeten twee geldstukken worden opgegooid opdat de kans op meer dan twee keer minstens één munt groter dan 0,98 is?
- 68** Een basketbalspeler heeft bij een vrije worp een trefkans van 40%. Hoeveel vrije worpen moet hij nemen om met een kans van meer dan 90% minstens vijf keer te scoren?
- A 69** Uit een vaas met vier rode en zes witte knikkers pakt Hilde twee knikkers. Vervolgens legt zij de twee knikkers terug in de vaas. Hoeveel keer moet Hilde zo'n greep doen opdat de kans op minstens drie keer twee witte knikkers groter is dan 0,95?
- D 70** Een basketbalspeler heeft een kans van meer dan 80% om bij 20 vrije worpen meer dan 12 keer te scoren. Wat weet je van zijn trefkans per vrije worp? Rond je antwoord af op twee decimalen.
- O 71** Experiment: het tien keer gooien met een dobbelsteen. Hoeveel mogelijkheden zijn er om drie keer een 4, drie keer een 5 en vier keer een 6 te gooien?

Theorie E De multinomiale verdeling

Bij het tien keer gooien met een dobbelsteen heb je bij het berekenen van de kans op drie keer een 4, drie keer een 5 en vier keer een 6 te maken met een **multinomiaal kansexperiment**. Bij de berekening van multinomiale kansen komen multinomiaalcoëfficiënten tevoorschijn.

De multinomiale verdeling

Een experiment heeft k verschillende uitkomsten met kansen

$p_1, \dots, p_k$, waarbij $p_1 + \dots + p_k = 1$.

Is X_i het aantal keren dat de uitkomst i verkregen wordt in n onafhankelijke uitvoeringen van het experiment, dan geldt

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \binom{n}{x_1, \dots, x_k} \cdot p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k}.$$

Merk op dat de multinomiale verdeling een uitbreiding is van de binomiale verdeling.

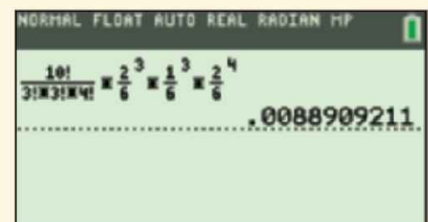
Voorbeeld

Bereken de kans dat je bij tien worpen met een dobbelsteen drie keer 1 of 2 ogen, drie keer 3 ogen en vier keer 5 of 6 ogen gooit.

Uitwerking

$P(\text{drie keer 1 of 2, drie keer 3 en vier keer 5 of 6}) =$

$$\binom{10}{3, 3, 4} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^4 \approx 0,009$$



R 72 In de definitie van de multinomiale verdeling staat $p_1 + \dots + p_k = 1$. In het voorbeeld is de som van de kansen $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{2}{6}$ niet gelijk aan 1. Schrijf de uitwerking van het voorbeeld zo, dat wel geldt dat de som van de kansen gelijk is aan 1.

73 Bereken de kans dat je bij twaalf worpen met een dobbelsteen elk aantal ogen twee keer gooit.

A 74 In een kaartspel zitten 52 kaarten: 13 schoppen, 13 harten, 13 ruiten en 13 klaveren.

Bereken de kans dat je bij het trekken met terugleggen van

- a 10 kaarten 3 schoppen, 2 harten, 2 ruiten en 3 klaveren krijgt
- b 13 kaarten 4 schoppen, 4 harten en 5 klaveren krijgt.

Terugblik

Bernoulli-experiment

Een Bernoulli-experiment is een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenis succes en de complementgebeurtenis mislukking let. Het hangt af van de situatie welke gebeurtenis je succes noemt en welke mislukking.

$P(\text{succes}) = p$ en $P(\text{mislukking}) = 1 - p$.

Het binomiaal en het multinomiaal kansexperiment

Het herhaald uitvoeren van een kansexperiment waarbij je alleen op de gebeurtenissen ‘succes’ en ‘mislukking’ let, heet een binomiaal kansexperiment.

- n is het aantal keer dat het experiment wordt uitgevoerd
- p is de kans op succes per keer
- X is het aantal keer succes

De kans op k keer succes is $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ en de verwachtingswaarde is $E(X) = n \cdot p$.

Zijn er bij het herhaald uitvoeren van een kansexperiment meer dan twee gebeurtenissen, dan heb je te maken met een multinomiaal kansexperiment.

Berekenen van binomiale kansen met de GR

Bij het berekenen van binomiale kansen ga je als volgt te werk.

- 1 Omschrijf de betekenis van de stochast X .
- 2 Noteer dat X binomiaal verdeeld is en vermeld n en p .
- 3 Noteer de gevraagde kans met X en herleid deze kans tot een vorm waarin $P(X = k)$ of $P(X \leq k)$ voorkomt. Bereken deze kans met de GR.

$P(X \text{ tussen } 3 \text{ en } 6) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3)$,
maar ook
 $P(X \text{ tussen } 3 \text{ en } 6) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

Zo krijg je de kans op minstens vijf juiste antwoorden bij het op de gok beantwoorden van 20 vierkeuzevragen als volgt.

X = het aantal juiste antwoorden.

X is binomiaal verdeeld met $n = 20$ en $p = \frac{1}{4}$.

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{binomcdf}(20, \frac{1}{4}, 4) \approx 0,585$

Berekenen van n

Bij de vraag ‘Hoe vaak moet je met een dobbelsteen gooien opdat de kans op minstens drie keer zes ogen groter is dan 80%?’

bedenk je dat je te maken hebt met de binomiale stochast

X = het aantal keer zes ogen, met $p = \frac{1}{6}$ en onbekende n .

Uit $P(X \geq 3) > 0,80$ volgt $1 - P(X \leq 2) > 0,80$.

Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(x, \frac{1}{6}, 2)$ (TI) of

$y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(2, x, \frac{1}{6})$ (Casio).

Daarna maak je een tabel waarin je het antwoord afleest.

5.5 De poissonverdeling

Q75 Bij de helpdesk van een internetprovider komen op maandagochtend tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen. We vragen ons af wat de kans is dat er op een maandagochtend tussen 8 en 9 uur minstens 20 telefoontjes binnenkomen.

We definiëren de toevalsvariabele

X = het aantal telefoontjes dat op maandagochtend tussen 8 en 9 uur bij de provider binnenkomt.

- a** Licht toe dat X een discrete toevalsvariabele is en dat dus geldt $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$.

Om de kans $P(X \geq 20)$ te berekenen, kunnen we als volgt te werk gaan. We nemen aan dat de provider 10 000 klanten heeft. De kans dat een willekeurige klant op maandagmorgen tussen 8 en 9 uur belt is dan gelijk aan $\frac{15}{10\,000}$. Je hebt nu te maken met een binomiale toevalsvariabele met $n = 10\,000$ en $p = \frac{15}{10\,000}$.

- b** Bereken met deze gegevens $P(X \geq 20)$.

De aanname dat de provider 10 000 klanten heeft is vrij willekeurig. Misschien zijn er wel 20 000 klanten.

- c** Bereken $P(X \geq 20)$ voor de situatie dat er 20 000 klanten zijn. Doe dat ook voor de situatie dat er 30 000 klanten zijn.

- d** Vergelijk de antwoorden op de vragen b en c. Wat valt je op?

- e** Neem een ander aantal klanten (groter dan 30 000) en bereken hiermee $P(X \geq 20)$.

- f** Bereken de kans dat op een maandagochtend tussen 8 en 9 uur 20 telefoontjes binnenkomen.

Theorie A De parameter van de poissonverdeling

In opgave 75 heb je op het eerste gezicht te weinig gegevens om de gevraagde kans te berekenen. Door de kunstgreep toe te passen van de aanname van het aantal klanten van de provider is de kans wel te berekenen. Voor de uitkomst maakt het immers vrijwel niet uit of je voor het aantal klanten 10 000 neemt of een half miljoen. Je hebt steeds te maken met een binomiale kans bij een zeer groot aantal experimenten en een zeer kleine kans op succes.

De Franse wiskundige Siméon-Denis Poisson ontdekte dat bij een stochast X die het totale aantal keren succes aangeeft bij een zeer groot aantal keren uitvoeren van een kansexperiment met een zeer kleine kans op succes, het volgende geldt:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \text{ voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

De kansverdeling die zo ontstaat heet de **poissonverdeling**.

Hierin is e het grondtal van de natuurlijke logaritme. Je krijgt daar in de vijfde klas bij wiskunde B mee te maken. Voor nu is het voldoende dat je weet dat $e \approx 2,718$ en dat je bij de berekeningen met e gebruik maakt van de toets e^x op de GR. Verder is λ het gemiddelde aantal keren succes. λ is de parameter van een poissonverdeelde stochast.

In opgave 75 is $\lambda = 15$, want op maandagochtend komen er tussen 8 en 9 uur gemiddeld 15 telefoontjes binnen.

Met de formule krijg je bijvoorbeeld $P(X = 20) = e^{-15} \cdot \frac{15^{20}}{20!} \approx 0,042$.

De poissonverdeling

Er is sprake van een poissonverdeling als een kansexperiment met een zeer kleine kans op succes een zeer groot aantal keren wordt uitgevoerd. Volgens de poissonverdeling is de kans op k keer

succes gelijk aan $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. Hierin is λ het gemiddelde aantal keren succes.

De binomiale verdeling met zeer grote n en zeer kleine p is te benaderen door de poissonverdeling. Je gebruikt de poissonverdeling als alleen het gemiddelde aantal keren succes bekend is.

De GR heeft opties waarmee je kansen bij de poissonverdeling berekent. Er is ook een optie voor de cumulatieve poissonverdeling. Je vindt de opties

- poissonpdf en poissoncdf op de TI in het DISTR-DISTR-menu
- Ppd en Pcd op de Casio bij RUN-MAT in het hoofdmenu in het OPTN-STAT-DIST-POISN-menu.

Let op de volgorde waarin het gemiddelde λ en het aantal keren succes k moet worden ingevoerd

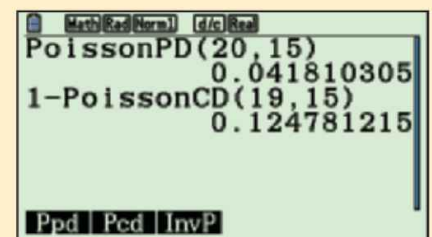
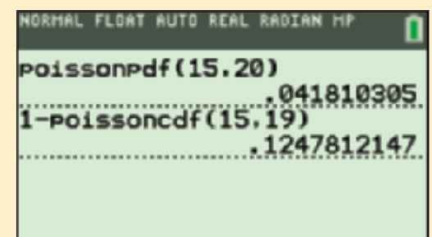
- op de TI poissonpdf(λ, k) en poissoncdf(λ, k)
- op de Casio PoissonPD(k, λ) en PoissonCD(k, λ).

Afspraak

Bij de poissonverdeling gebruiken we de notaties

$$P(X = k) = \text{poissonpdf}(\lambda, k)$$

$$P(X \leq k) = \text{poissoncdf}(\lambda, k).$$



Voorbeeld

Bereken de kans dat in een groep van 600 mensen er minstens drie op 1 april jarig zijn.

Aanpak

Gemiddeld zijn er $\frac{600}{365}$ mensen van deze groep per dag jarig, dus $\lambda = \frac{600}{365}$.

Uitwerking

X = het aantal mensen dat op 1 april jarig is.

X is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{600}{365}$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \text{poissoncdf}\left(\frac{600}{365}, 2\right) \approx 0,228$$

5

- R 76** Licht toe dat je de gevraagde kans van het voorbeeld kunt berekenen met behulp van een binomiale toevalsvariabele. Geef de parameters van deze binomiale toevalsvariabele en bereken hiermee de gevraagde kans. Vanaf welke decimaal verschilt het antwoord met dat van het voorbeeld?
- 77** Bij een tankstation komen zaterdags gemiddeld 450 auto's tanken. Bereken de kans dat op een zaterdag
- a meer dan 480 auto's komen tanken
 - b tussen 440 en 470 auto's komen tanken.
- 78** Bij een verzekering krijg je 200 000 euro uitbetaald als je volledig arbeidsongeschikt wordt. De jaarlijkse premie voor deze verzekering is 60 euro. Gemiddeld zijn er per jaar 180 verzekerden die het bedrag van 200 000 euro krijgen uitbetaald. Bereken de kans dat de verzekeringsmaatschappij volgend jaar meer dan 40 000 000 euro aan volledig arbeidsongeschikten moet uitbetalen.
- A 79** Simon zit op een school met 1400 leerlingen. Bereken de kans dat
- a er minstens vijf leerlingen gelijk met Simon jarig zijn
 - b er 30 leerlingen in dezelfde week jarig zijn als Simon
 - c er niemand op deze school jarig is op 1 april.
- A 80** In een stad zijn de laatste jaren gemiddeld 2,6 moorden per jaar gepleegd. Bereken de kans dat
- a in deze stad komend jaar geen moorden worden gepleegd
 - b in de komende drie jaar elk jaar hoogstens twee moorden worden gepleegd
 - c in de komende drie jaar in totaal hoogstens zes moorden worden gepleegd.
- D 81** De kans dat er bij een pinautomaat op vier achtereenvolgende zaterdagen telkens minstens 70 keer wordt gepind, is gelijk aan 0,005. Hoe vaak wordt er gemiddeld op zaterdag bij deze pinautomaat gepind?

Terugblik

De poissonverdeling

Je hebt te maken met de poissonverdeling als een kansexperiment met een zeer kleine kans op succes een zeer groot aantal keren wordt uitgevoerd. Je gebruikt de poissonverdeling als je alleen het gemiddeld aantal keren succes weet. De kans op k keer succes is $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. Hierin is λ het gemiddelde aantal keren succes en e het grondtal van de natuurlijke logaritme.

Is $\lambda = 2,5$ dan is $P(X = 3) = e^{-2,5} \cdot \frac{2,5^3}{3!} \approx 0,214$.

De poissonverdeling en de GR

Om bij de poissonverdeling kansen te berekenen heb je de formule

$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ niet nodig. Je gebruikt de opties

- poissonpdf en poissoncdf op de TI
- Ppd en Pcd op de Casio.

Hierbij gebruiken we de notaties

$P(X = k) = \text{poissonpdf}(\lambda, k)$ en

$P(X \leq k) = \text{poissoncdf}(\lambda, k)$.

Is $\lambda = 2,5$ dan krijg je

$P(X = 3) = \text{poissonpdf}(2.5, 3) \approx 0,214$ en

$P(X \leq 2) = \text{poissoncdf}(2.5, 2) \approx 0,544$.

De poissonverdeling gebruiken

Op een drukke weg gebeuren jaarlijks gemiddeld 2,5 ongelukken.

Je hebt met de poissonverdeling te maken, want

- de kans op succes is zeer klein; zo is de kans dat er per uur een ongeluk gebeurt $\frac{2,5}{365 \cdot 24} \approx 0,0003$
- het experiment wordt zeer vaak uitgevoerd, er zijn immers $365 \cdot 24 = 8760$ uren in een jaar.

Bovendien weet je alleen het gemiddelde aantal keren succes, namelijk 2,5 per jaar.

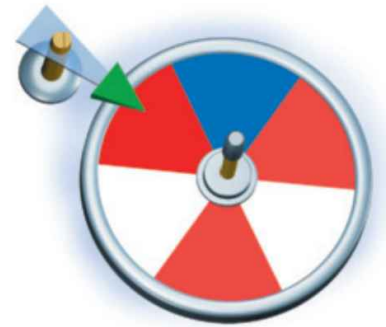
De kans dat er

- 3 ongelukken in een jaar gebeuren is $P(X = 3) = \text{poissonpdf}(2.5, 3) \approx 0,214$
- hoogstens 2 ongelukken in een jaar gebeuren is $P(X \leq 2) = \text{poissoncdf}(2.5, 2) \approx 0,544$
- in de komende vier jaar elk jaar hoogstens 2 ongelukken gebeuren is $0,544^4 \approx 0,087$
- in de komende vier jaar in totaal hoogstens 8 ongelukken gebeuren is $\text{poissoncdf}(10, 8) \approx 0,333$.

Diagnostische toets

5.1 Het herhalen van kansexperimenten

- 1** De schijf in figuur 5.16 bestaat uit zes even grote sectoren.
Experiment: laat de schijf zeven keer draaien.
Bereken de kans op
- twee keer rood
 - vijf keer rood en twee keer wit
 - minstens zes keer geen blauw
 - hoogstens vijf keer rood.



figuur 5.16

- 2** Een vaas bevat vier rode en acht witte knikkers.
Experiment: pak drie knikkers uit de vaas.
Bereken exact de kans op
- drie rode knikkers
 - minstens twee witte knikkers.
- 3** Een vaas bevat zeven groene en vijf blauwe knikkers. Lisette pakt één voor één knikkers uit de vaas. Ze gaat daarmee door totdat ze een groene knikker pakt.
Bereken de kans dat Lisette
- twee knikkers pakt
 - vijf knikkers pakt.

5.2 Trekken met en zonder terugleggen

- 4** De sectie wiskunde van scholengemeenschap LOC bestaat uit negen mannen en zeven vrouwen.
- Voor een bijscholingscursus worden willekeurig vijf sectieleden gekozen.
Bereken de kans dat er drie vrouwen bij zijn.
 - Elk jaar wordt door loting de sectievoorzitter aangewezen.
Bereken de kans dat in vijf opeenvolgende jaren drie keer een vrouwelijke sectievoorzitter uit de bus komt.

- 5** In de tabel hiernaast zie je de bloedgroepverdeling in Nederland. Voor een onderzoek wordt van 15 personen de bloedgroep vastgesteld.
Bereken de kans dat van deze 15 personen
- er minstens twee bloedgroep 0 hebben
 - er hoogstens één bloedgroep AB heeft
 - er tien bloedgroep 0 of bloedgroep A hebben
 - tussen de 60% en 80% niet bloedgroep 0 heeft.

bloedgroep	0	A	B	AB
percentage	47	42	8	3

In een gezelschap van 15 personen heeft 40% bloedgroep 0.

- Bereken de kans dat drie willekeurig aangewezen personen uit dit gezelschap bloedgroep 0 hebben.

5.3 De verwachtingswaarde

- 6** In een vaas zitten 14 knikkers: vier rode en tien blauwe.
- Experiment: pak vijf knikkers uit de vaas.
 X = het aantal rode knikkers dat je pakt.
 Stel de kansverdeling op van X .
 - Experiment: pak net zo lang een knikker uit de vaas totdat je een blauwe pakt.
 Y = het aantal knikkers dat je pakt.
 Stel de kansverdeling op van Y .
- 7** Bij een spel met drie dobbelstenen is de inzet 1 euro.
 Je mag één keer met de drie dobbelstenen gooien. Is de som van de ogen 18, dan krijg je € 100. Bij een som van 17 ogen krijg je € 15 en bij een som van 16 ogen € 5. In alle andere gevallen krijg je niets.
 Bereken de winstverwachting per spel voor een speler.

5.4 De binomiale verdeling

- 8** Een bowler werpt in 78% van zijn worpen alle kegels omver.
 Bereken de kans dat hij in tien worpen
- acht keer alle kegels omver werpt
 - alleen de laatste keer niet alle kegels omver werpt
 - minstens negen keer alle kegels omver werpt.
- 9** Bij een binomiaal kansexperiment met $n = 100$ en $p = 0,65$ is X het aantal keer succes.
 Bereken.
- $P(X > 60)$
 - $P(X \geq 68)$
 - $P(X \text{ tussen } 62 \text{ en } 70)$
- 10** Bereken de kans dat je bij 16 worpen met een dobbelsteen
- meer dan tien keer een even aantal ogen gooit
 - minder dan drie keer 6 ogen gooit
 - vijf keer 5 of 6 ogen gooit
 - tussen vijf en tien keer 1 of 2 ogen gooit
 - acht keer minder dan 3 en acht keer meer dan 3 ogen gooit.
- Carmen wil zo vaak met een dobbelsteen gooien dat de kans op minstens vier keer 6 ogen groter is dan 90%.
- Bereken hoe vaak Carmen minstens moet gooien.

5.5 De poissonverdeling

- 11** Bij een geldautomaat wordt op zaterdagen gemiddeld 65 keer gepind.
 Bereken de kans dat bij deze automaat op vier opeenvolgende zaterdagen
- telkens minstens 70 keer gepind wordt
 - in totaal meer dan 275 keer gepind wordt.

Wereldwijd worden miljoenen vogels geringd. Het ringen van vogels is van nut bij het onderzoek naar vogeltrek en bij onderzoeksvragen van de populatiebiologie. Uit onderzoek blijkt dat het ringen amper schade toebrengt aan de vogels. Ringt men in een populatie elke dag 20% van de vogels die nog niet zijn geringd, dan is te berekenen hoeveel dagen men moet ringen om in totaal 75% van de vogels van een ring te voorzien

Wat leer je?

- Wat een lineaire differentievergelijking van de eerste orde is, hoe je hierbij tijdgrafieken en webgrafieken plot en hoe je de directe formule opstelt.
- Welke differentievergelijking bij logistische groei hoort.
- Werken met stelsels differentievergelijkingen.
- Hoe je bij een lineaire differentievergelijking van de tweede orde een directe formule opstelt.



Discrete dynamische modellen

6



Voorkennis Recursieve formules

Theorie A Recursieve formules en de GR

Een recursieve formule van een rij geeft aan hoe elke term uit een of meer voorafgaande termen volgt.

Bij een recursieve formule vermeld je de startwaarde(n).

De rij $u_n = 1,5u_{n-1} - 10$ met $u_0 = 30$ kun je doorrekenen op het basisscherm van de GR. Zie het GR-scherm hiernaast.

Het is ook mogelijk deze rij in te voeren op het rijen-invoerscherm en daarna een tabel te maken. Zie de GR-schermen hieronder.

30
Ans*1.5-10
30
35
42.5
53.75
70.625

Plot1	Plot2	Plot3
nMin=0		
u(n)=1.5u(n-1)-10		
u(nMin)=30		
v(n)=		
v(nMin)=		
w(n)=		
w(nMin)=		

n	u(n)
0	30
1	35
2	42.5
3	53.75
4	70.625
5	95.938
6	133.91
7	190.86
8	276.29
9	404.43
10	596.65

n	u(n)
0	30
1	35
2	42.5
3	53.75
4	70.625
5	95.938
6	133.91
7	190.86
8	276.29
9	404.43
10	596.65

figuur 6.1 De rij $u_n = 1,5u_{n-1} - 10$ met $u_0 = 30$ is ingevoerd op het rijen-invoerscherm om een tabel te maken.

De rij $u_n = 1,5u_{n-1} - n$ met $u_0 = 30$ kun je niet op de hierboven beschreven manier doorrekenen op het basisscherm. Maak gebruik van het rijen-invoerscherm om een tabel te maken bij deze rij.

n	u(n)
0	30
1	44
2	64
3	93
4	135.5
5	198.25
6	291.38
7	430.06
8	637.09
9	946.64
10	1410

Ook de rij $u_n = 1,5u_{n-1} - 0,5u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 2$ voer je in op het rijen-invoerscherm.

Plot1	Plot2	Plot3
nMin=0		
u(n)=1.5u(n-1)-0.5u(n-2)		
u(nMin)=2,1		
v(n)=		
v(nMin)=		
w(n)=		
w(nMin)=		

n	u(n)
0	1
1	2
2	2.5
3	2.75
4	2.875
5	2.9375
6	2.9688
7	2.9844
8	2.9922
9	2.9961
10	2.998

n	u(n)
0	1
1	2
2	2.5
3	2.75
4	2.875
5	2.9375
6	2.9688
7	2.9844
8	2.9922
9	2.9961
10	2.998

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,6u_{n-1} - 20$ met $u_0 = 40$.
Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 1000$?

Uitwerking

TI

Voer in

$n\text{Min} = 0$

$u(n) = 1.6u(n-1) - 20$

$u(n\text{Min}) = 40$

$u_{10} \approx 766$ en $u_{11} \approx 1206$

Vanaf de 12^e term is $u_n > 1000$.

Casio

Voer in

$a_{n+1} = 1.6a_n - 20$

Start = 0

End = 50

$a_0 = 40$

$u_{10} \approx 766$ en $u_{11} \approx 1206$

Vanaf de 12^e term is $u_n > 1000$.

- 1** Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,75u_{n-1} - 30$ met $u_0 = 50$.
 - a** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de vijfde term van de rij.
 - b** Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 1000$?
- 2** Gegeven is de recursieve formule $u_n = 0,8u_{n-1} + 0,5n^2$ met $u_0 = 60$.
 - a** Welke term is de kleinste term van de rij?
 - b** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de tiende term van de rij.
 - c** Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 500$?
 - d** Welke term is, afgerond op gehelen, gelijk aan 1740?
- 3** Gegeven is de recursieve formule $u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 2$.
 - a** Bereken de vijfde en de vijftiende term van de rij.
 - b** De termen van de rij vertonen op den duur bij benadering exponentiële groei.
Welk getal is de groeifactor van deze groei?

6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde

O 1 Op haar achttiende verjaardag wint Christine een prijs van 10 000 euro in een loterij. Ze zet dat bedrag op een spaarrekening tegen een vaste rente van 1,9% per jaar. Vanaf haar negentiende verjaardag haalt ze jaarlijks 150 euro van deze rekening. Door op elke verjaardag na het opnemen van deze 150 euro het bedrag te noteren dat nog op haar rekening staat, ontstaat de getallenrij K_n .

Welke van de volgende formules horen bij deze situatie?

$$K_n = 1,019 \cdot K_{n-1} - 150 \text{ met } K_0 = 10\,000$$

$$K_n = 10\,000 \cdot 1,019^n - 150$$

$$K_n - K_{n-1} = 0,019K_{n-1} - 150 \text{ met } K_0 = 10\,000$$

Theorie A De formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$

De recursieve formule $u_n = 1,08u_{n-1} - 100$ is ook te noteren als

$$u_n = u_{n-1} + 0,08u_{n-1} - 100 \text{ ofwel } u_n - u_{n-1} = 0,08u_{n-1} - 100.$$

In deze formule komt het verschil (de differentie) $u_n - u_{n-1}$ voor.

Vandaar dat $u_n - u_{n-1} = 0,08u_{n-1} - 100$ een **differentievergelijking** heet. In deze differentievergelijking bestaat er een lineair verband tussen u_n en u_{n-1} .

Omdat de differentievergelijking het verband aangeeft tussen u_n en de direct voorafgaande term u_{n-1} wordt dit een

differentievergelijking van de eerste orde genoemd.

Bij elke recursieve formule hoort een differentievergelijking.

Omgekeerd hoort bij elke differentievergelijking een recursieve formule.

Bij een lineaire differentievergelijking van de eerste orde hoort een recursieve formule van de vorm $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$.

Ook de recursieve formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ wordt differentievergelijking genoemd.

Voor $a = 0,4$ en $b = 140$ ontstaat de differentievergelijking

$u_n = 0,4u_{n-1} + 140$. Neem je startwaarde $u_0 = 50$, dan ontstaat de rij $u_n = 0,4u_{n-1} + 140$ met $u_0 = 50$. Bij deze rij is een **tijdgrafiek** te plotten. Bij een tijdgrafiek is op de horizontale as n en op de verticale as u_n uitgezet.

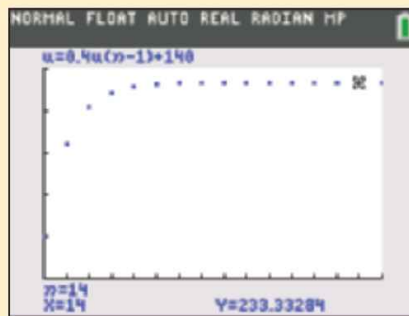
[► GR] In de module **Tijdgrafieken** leer je hoe je de (punten)grafiek bij een rij kunt plotten.

Met behulp van de instellingen in figuur 6.2a ontstaat het scherm van figuur 6.2b (TI) of 6.2c (Casio). Je ziet dat de grafiek een **grenswaarde** nadert.

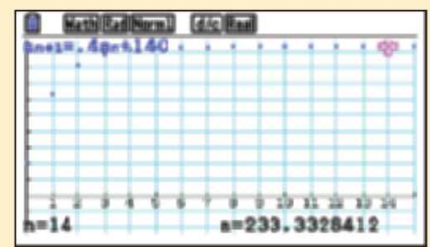
De grafiek heeft een horizontale asymptoot op hoogte $233\frac{1}{3}$.



a



b



c

figuur 6.2

- 2 Welke van de volgende differentievergelijkingen zijn lineair en van de eerste orde?
 - a $u_n = 3u_{n-1} - 8$
 - b $u_n = 3u_{n-1} + 2u_{n-2}$
 - c $u_n = 0,3u_{n-1}$
 - d $u_n = -0,1u_{n-1} + 0,3u_{n-1}^2$
 - e $u_n = u_{n-1} + 100$
 - f $u_n = \frac{u_{n-1}}{1,25} - 8$
- 3 Gegeven is $u_n = 0,7u_{n-1} + 8$ met $u_0 = 2$.
 - a Plot de tijdgrafiek. Ga tot $n = 15$. Nadert u_n tot een grenswaarde?
 - b Onderzoek of de startwaarde van invloed is op de grenswaarde.
- 4 Gegeven is $u_n = 0,6u_{n-1} + b$ met $u_0 = 10$.
 - a Geef de grenswaarde in het geval $b = 2$, $b = 20$ en $b = 4$.
 - b Wat is het verschil tussen de tijdgrafieken in vraag a?
- 5 Gegeven is $u_n = -0,6u_{n-1} + 15$ met $u_0 = 20$.
 - a Plot de tijdgrafiek. Ga tot $n = 12$. Nadert u_n tot een grenswaarde? Zo ja, geef deze grenswaarde in één decimaal nauwkeurig.
 - b In welk opzicht verschilt de tijdgrafiek in opgave 5a van die in de opgaven 3 en 4?
- 6 Gegeven is $u_n = -1,2u_{n-1} + 4$ met $u_0 = 10$.
 - a Plot de tijdgrafiek. Ga tot $n = 12$. Nadert u_n tot een grenswaarde?
 - b Geef enkele bijzonderheden van de tijdgrafiek.

07 Gegeven is de differentievergelijking

$$u_n = 1,5u_{n-1} + 1 \text{ met } u_0 = 2.$$

Hierbij hoort de volgende tabel.

$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = \dots$	$u_4 = \dots$
$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = \dots$	$u_4 = \dots$	$u_5 = \dots$

a Vul de tabel verder in.

In figuur 6.3 zie je een assenstelsel waarbij zowel op de x -as als op de y -as u_n is uitgezet. Uit de eerste kolom van de tabel volgt het punt $(2, 4)$. Uit de tweede kolom volgt het punt $(4, 7)$.

b Welk punt volgt uit de derde kolom? En welk punt uit de vierde kolom?

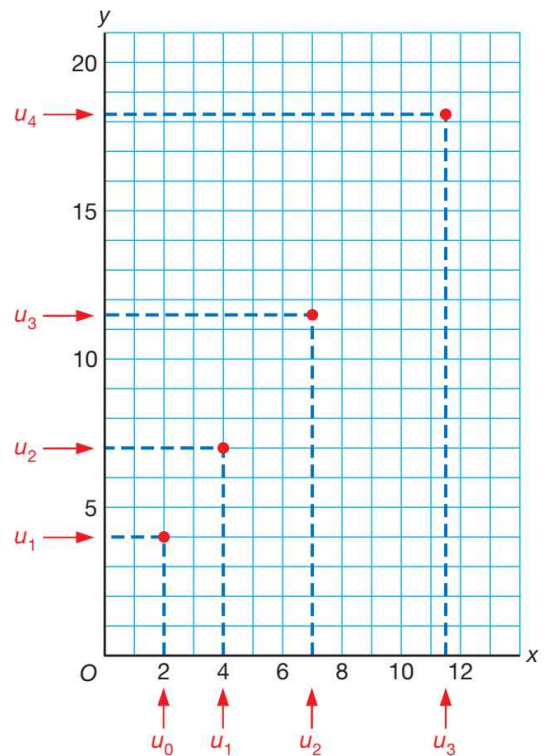
c Zo kun je doorgaan. De punten die je krijgt liggen op een lijn.

Stel de formule op van deze lijn. Gebruik de letters x en y .

d Wat heeft de formule van vraag c met de gegeven differentievergelijking te maken?

e Krijg je bij de differentievergelijking $u_n = 1,5u_{n-1} + 1$ met $u_0 = 0$ dezelfde formule als in vraag c? Licht toe.

En bij $u_n = 1,5u_{n-1} + 1$ met $u_0 = 8$?



figuur 6.3

Theorie B Webgrafieken

In opgave 7 heb je gezien dat er behalve een tijdgrafiek ook nog een andere grafiek is te tekenen bij een differentievergelijking. Daarbij zet je horizontaal en verticaal de waarden van u_n uit.

Bij de differentievergelijking $u_n = 2u_{n-1} + 1$ met $u_0 = 1$ gebruik je de volgende tabel.

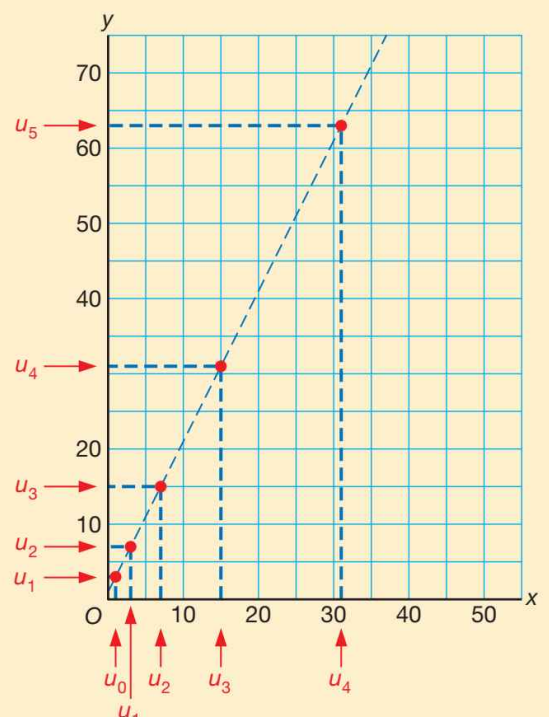
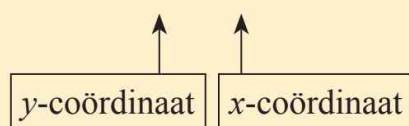
$u_0 = 1$	$u_1 = 3$	$u_2 = 7$	$u_3 = 15$	$u_4 = 31$	...
$u_1 = 3$	$u_2 = 7$	$u_3 = 15$	$u_4 = 31$	$u_5 = 63$	...

Zo ontstaat de puntenrij

$(1, 3), (3, 7), (7, 15), (15, 31), (31, 63), \dots$
 $(u_0, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_5), \dots$

Zie figuur 6.4. De punten van de rij (u_{n-1}, u_n) liggen op een lijn. Je kunt dat als volgt verklaren.

Telkens is $u_n = 2u_{n-1} + 1$.



figuur 6.4

Dus de y -coördinaat is gelijk aan 2 keer de x -coördinaat plus 1.

Elk punt (x, y) van de rij voldoet dus aan $y = 2x + 1$.

De punten liggen op de lijn $y = 2x + 1$.

Bij de differentievergelijking $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ liggen de punten (u_{n-1}, u_n) op de lijn $y = ax + b$.

Bij $u_n = 1,5u_{n-1} + 1$ liggen de punten (u_{n-1}, u_n) op de lijn $y = 1,5x + 1$. Welke punten je krijgt, hangt af van de startwaarde u_0 .

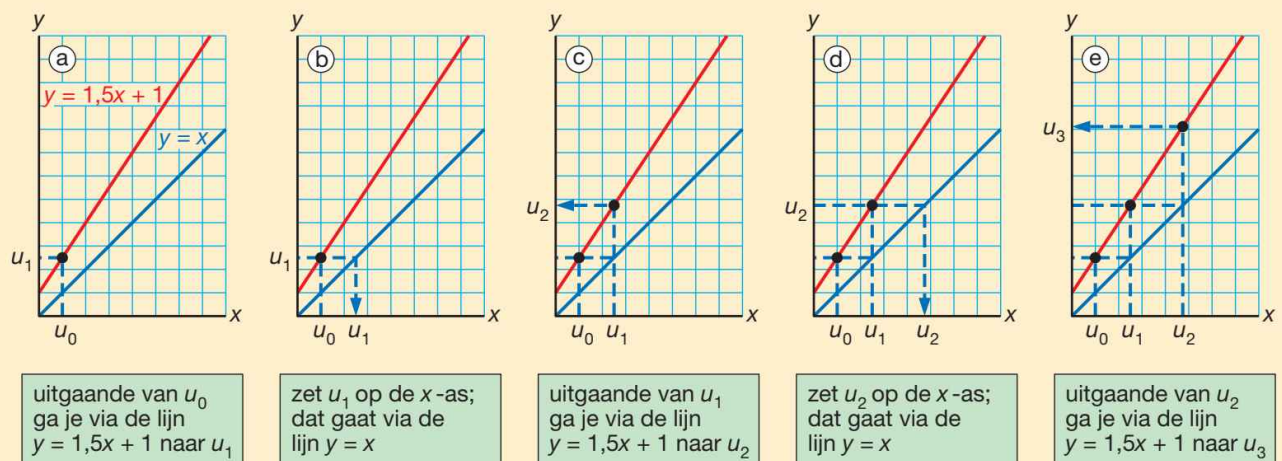
Er bestaat een methode om zonder te rekenen bij een gegeven startwaarde u_0 de punten (u_{n-1}, u_n) snel te tekenen. Daarbij gebruik je behalve de lijn $y = 1,5x + 1$ ook de lijn $y = x$. Hieronder zie je hoe je te werk gaat.

Je begint met de lijnen $y = 1,5x + 1$ en $y = x$. Zie figuur 6.5.

Teken u_0 op de x -as en ga via $y = 1,5x + 1$ naar u_1 op de y -as.

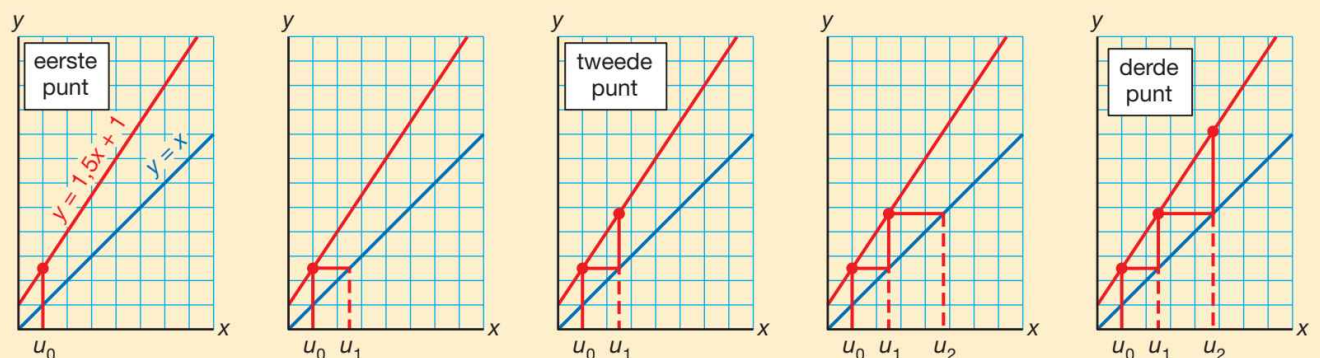
Zet vervolgens u_1 op de x -as. Dat gaat handig via de lijn $y = x$.

Enzovoort.



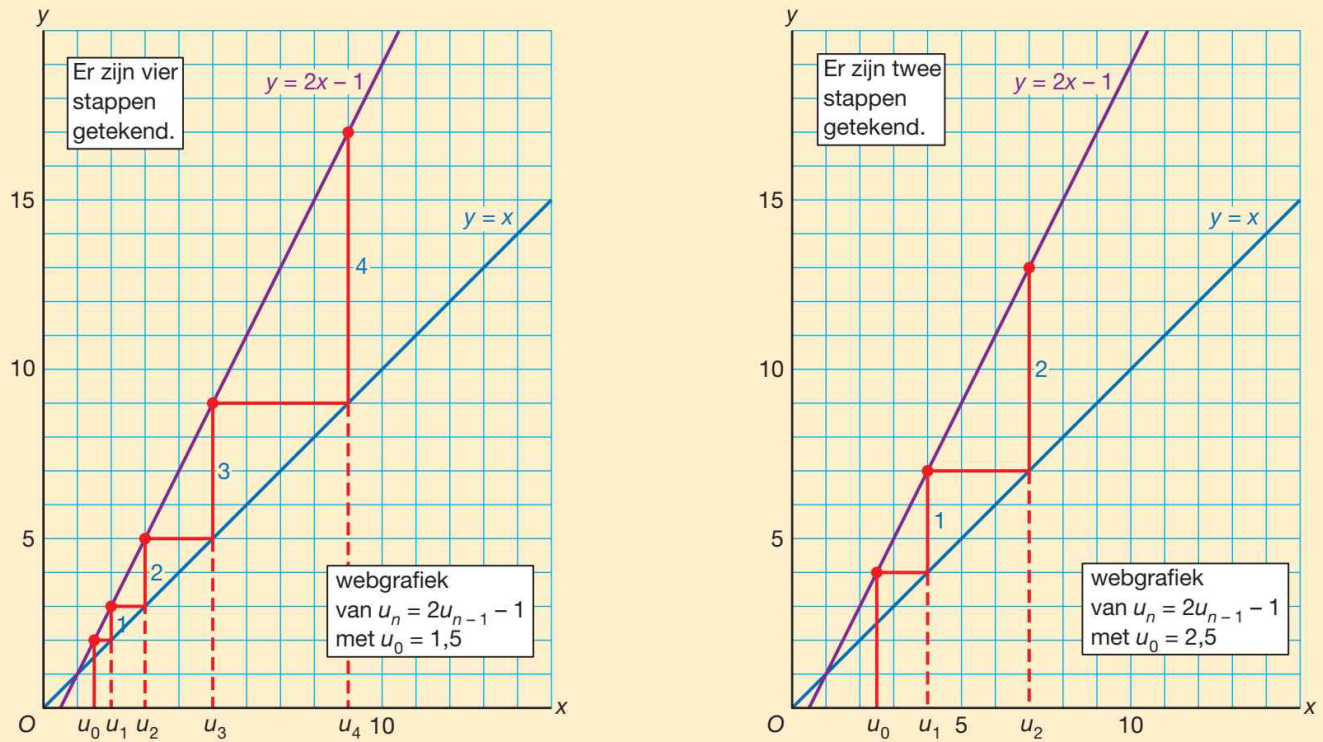
figuur 6.5

In de volgende figuur is het proces van figuur 6.5 vereenvoudigd weergegeven.



figuur 6.6 Het tekenen van de punten (u_{n-1}, u_n) gaat, beginnend bij u_0 op de x -as, afwisselend via de lijnen $y = ax + b$ en $y = x$.

Het is gebruikelijk het gehele proces in één figuur te tekenen.
 Hieronder is dat twee keer uitgevoerd bij de differentievergelijking
 $u_n = 2u_{n-1} - 1$.
 Links is als startwaarde $u_0 = 1,5$ genomen, rechts $u_0 = 2,5$.
 De ontstane figuren heten **webgrafieken** van de differentievergelijking $u_n = 2u_{n-1} - 1$.
 Je ziet in beide figuren dat de termen u_n steeds sterker toenemen.



figuur 6.7

Een webgrafiek van $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ is een diagram dat bestaat uit aaneengesloten horizontale en verticale lijnstukken waarvan de eindpunten op de lijnen $y = ax + b$ en $y = x$ liggen.
 De webgrafiek begint in het punt $(u_0, 0)$. Het eerste lijnstuk is het verticale lijnstuk met eindpunt op de grafiek van $y = ax + b$.

Afspraak

Bij het tekenen van een webgrafiek geef je op de horizontale as de termen $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ aan.

- 8 Gegeven is de differentievergelijking $u_n = 1,5u_{n-1} - 1$.
- Neem $u_0 = 4$ en teken vier stappen van de webgrafiek.
 - Neem $u_0 = 1$ en teken vijf stappen van de webgrafiek.
 - Neem $u_0 = 2$. Wat kun je zeggen over de webgrafiek?
Wat betekent dat voor de rij u_n ?

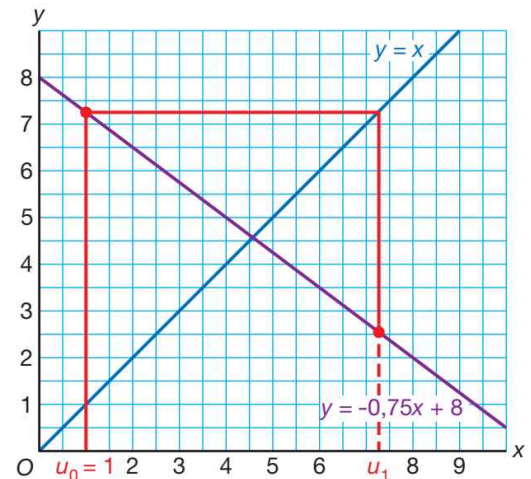
Bij vier stappen van een webgrafiek geef je op de horizontale as u_0, u_1, u_2, u_3 en u_4 aan.

- 9** Gegeven is de differentievergelijking $u_n = 0,4 u_{n-1} + 6$.
- Neem $u_0 = 2$ en teken drie stappen van de webgrafiek.
 - Hoe kun je aan de figuur zien dat er een grenswaarde is?
 - Welke vergelijking moet je oplossen om de grenswaarde te berekenen? Bereken de grenswaarde.
 - Neem $u_0 = 5$ en teken drie stappen van de webgrafiek. Is er een grenswaarde? Licht toe.
 - Neem $u_0 = 14$ en teken twee stappen van de webgrafiek. Is er een grenswaarde? Licht toe.
 - Licht toe dat u_n onafhankelijk van u_0 telkens dezelfde grenswaarde zal hebben.

A 10 [► WERKBLAD] Zie de eerste stap van de webgrafiek in figuur 6.8.

- Welke differentievergelijking hoort hierbij?
- Teken zes stappen van de webgrafiek.
- Bereken de grenswaarde.

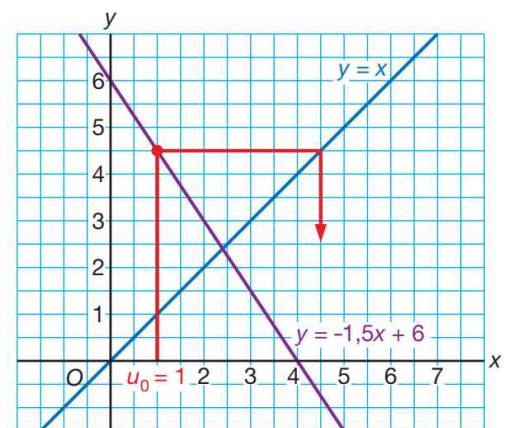
De figuur lijkt op een spinnenweb, vandaar de naam webgrafiek.



figuur 6.8

A 11 [► WERKBLAD] Zie figuur 6.9.

- Welke differentievergelijking hoort hierbij?
- Teken drie stappen van de webgrafiek.
- Is er een grenswaarde?
- Neem $u_0 = 2,4$ en bekijk de bijbehorende webgrafiek. Geef commentaar.



figuur 6.9

Theorie C Convergeren en divergeren

De webgrafiek van de differentievergelijking $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ heeft te maken met de lijnen $y = ax + b$ en $y = x$.

De x -coördinaat van het snijpunt van deze lijnen heet het **dekpunt** van de differentievergelijking $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$.

Je berekent het dekpunt $\bar{u}$ (spreek uit als u -streep) door de vergelijking $\bar{u} = a \cdot \bar{u} + b$ op te lossen.

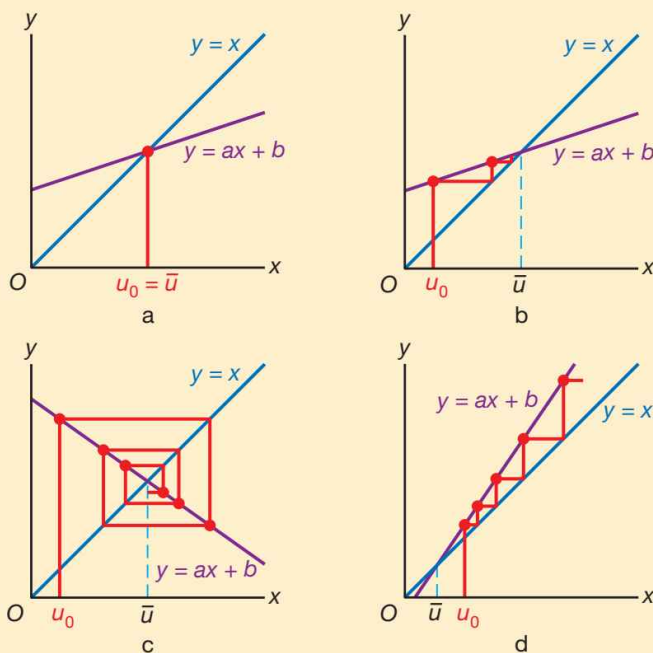
Neem je $u_0 = \bar{u}$, dan bestaat de webgrafiek uitsluitend uit dit snijpunt. De rij u_n is dan de **constante rij** $u_n = \bar{u}$. Zie figuur 6.10a.

Voor elke andere startwaarde u_0 hangt het af van a , dus van de steilheid van de lijn $y = ax + b$, of er een grenswaarde is.

Let op.

Een dekpunt is geen punt, maar een getal.

Vul je dit getal in bij de differentievergelijking, dan is de volgende term gelijk aan dit getal, dus ook elk van de daaropvolgende termen.



figuur 6.10

In de figuren 6.10b en 6.10c is er een grenswaarde. De webgrafiek nadert het snijpunt van de lijnen $y = ax + b$ en $y = x$. Je ziet dat het dekpunt in de figuren 6.10b en 6.10c juist de grenswaarde is.

We zeggen dat de rij u_n **convergeert** naar de grenswaarde $\bar{u}$. Bij een convergente rij is er **stabiel evenwicht** en is het dekpunt de grenswaarde.

In figuur 6.10d is er geen grenswaarde. De termen van de rij nemen steeds sterker toe. De rij **divergeert**.

Bij een divergente rij is er wel een dekpunt, maar geen grenswaarde.

convergeren =
op één punt richten

divergeren =
uiteenwijken

[► GR] In de module **Webgrafieken** leer je hoe je op de GR een webgrafiek kunt plotten.

Het scherm hiernaast hoort bij de rij $u_n = -0,6u_{n-1} + 16$ met $u_0 = 1$.

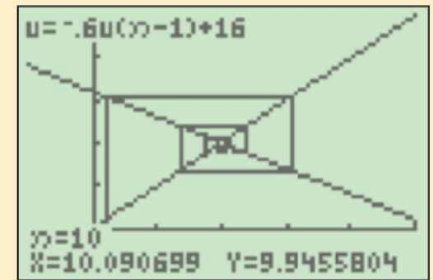
Met de GR vind je $n = 10$ geeft $x \approx 10,09$ en $y \approx 9,95$

$n = 11$ geeft $x \approx 9,95$ en $y \approx 10,03$

$n = 12$ geeft $x \approx 10,03$ en $y \approx 9,98$.

Je ziet dat de rij convergeert. De grenswaarde is het dekpunt.

Deze bereken je door de vergelijking $\bar{u} = -0,6\bar{u} + 16$ op te lossen. Je krijgt $1,6\bar{u} = 16$, dus $\bar{u} = 10$.



- 12** Maak met de GR een webgrafiek bij de volgende rijen. Onderzoek of er convergentie optreedt. Zo ja, bereken de grenswaarde.

- a $u_n = 1,5u_{n-1} - 2$ met $u_0 = 5$
- b $u_n = 1,5u_{n-1} - 2$ met $u_0 = 2$
- c $u_n = 1,5u_{n-1} - 2$ met $u_0 = 4$
- d $u_n = 0,2u_{n-1} + 200$ met $u_0 = 10$
- e $u_n = 0,2u_{n-1} + 200$ met $u_0 = 500$
- f $u_n = -0,86u_{n-1} + 744$ met $u_0 = 20$

- A 13** In november 2015 heeft een boomkweker 2500 dennenbomen op zijn terrein staan. In de loop van een jaar verkoopt hij 20% van zijn bomen. Om de voorraad aan te vullen, plant hij elk jaar in november 300 nieuwe bomen.

Na n jaar is het aantal bomen A_n .

- a Stel bij deze situatie de recursieve formule van A_n op.
- b Plot de webgrafiek. Converteert de rij A_n ? Licht je antwoord toe met een schets.
- c Wat kun je zeggen van het aantal dennenbomen op het terrein van de kweker na verloop van vele jaren?

- D 14** Gegeven is de differentievergelijking $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met beginterm u_0 .

- a Er zijn waarden van a en b zo, dat een rekenkundige rij ontstaat.
Welke waarden van a en b zijn dat?
- b Er zijn waarden van a en b zo, dat een meetkundige rij ontstaat.
Welke waarden van a en b zijn dat?

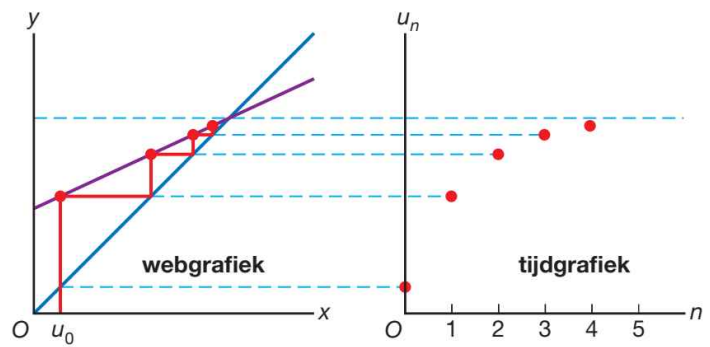
R 15 [**WERKBLAD**] Bij $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met beginwaarde u_0 kun je de rij visualiseren in een webgrafiek, maar ook in een tijdgrafiek.

a In figuur 6.11 zie je bij een gegeven differentievergelijking zowel de webgrafiek als de tijdgrafiek.

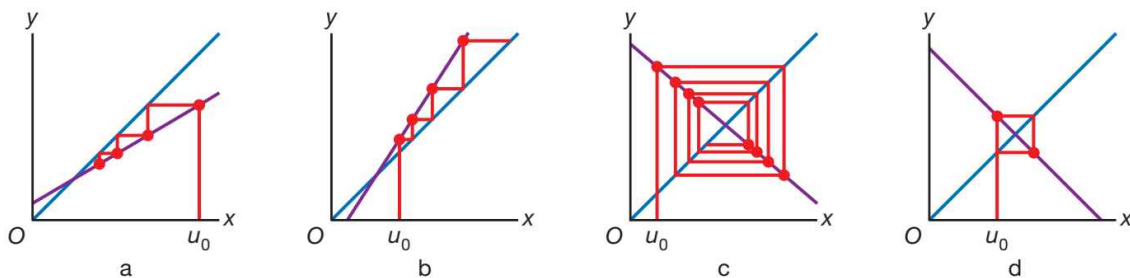
Hoe hangen deze grafieken samen?

b Hieronder zie je nog vier webgrafieken.

Schets de bijbehorende tijdgrafieken. Laat daarin de samenhang tussen web- en tijdgrafiek goed uitkomen.



figuur 6.11



figuur 6.12

6

O 16 Floris stort op 1 januari 2015 een bedrag van 750 euro op een spaarrekening. Elk volgend jaar stort hij op 1 januari 500 euro op deze rekening. Hij krijgt 2,5% rente per jaar. Het bedrag in euro's dat na n jaar op 1 januari op zijn rekening staat is u_n .

a Stel bij deze situatie de recursieve formule van u_n op.

b Laat met tabellen zien dat de directe formule

$$u_n = 20\,750 \cdot 1,025^n - 20\,000$$

ook bij deze situatie hoort.

O 17 Gegeven is de differentievergelijking $u_n = 1,05u_{n-1} + 500$.

a Licht toe dat $-10\,000$ het dekpunt van de differentievergelijking is.

b Licht toe dat bij de recursieve formule $u_n = 1,05u_{n-1}$ de directe formule $u_n = a \cdot 1,05^n$ hoort.

c Neem aan dat $u_n = a \cdot 1,05^n - 10\,000$ de directe formule is van de gegeven differentievergelijking en laat zien dat voor $u_0 = 750$ geldt $a = 10\,750$.

Theorie D De directe formule van de rij $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met startwaarde u_0

In de opgaven 16 en 17 heb je voorbeelden gezien van de volgende regel

De directe formule van $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ is $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$ waarbij $\bar{u}$ het dekpunt is en A een constante.

Je gaat dit in opgave 18 bewijzen.

Om de directe formule van de rij $u_n = 3u_{n-1} - 60$ met $u_0 = 5$ op te stellen ga je als volgt te werk.

- 1 Bereken het dekpunt $\bar{u}$. Dit is de oplossing van de vergelijking $\bar{u} = 3\bar{u} - 60$, dus $\bar{u} = 30$.
- 2 Stel de directe formule is $u_n = A \cdot 3^n + 30$ en bereken A door te gebruiken dat $u_0 = 5$.
Dit geeft $A \cdot 3^0 + 30 = 5$ ofwel $A + 30 = 5$, dus $A = -25$.
Zo krijg je $u_n = -25 \cdot 3^n + 30$.

Werkschema: het opstellen van de directe formule van de rij

$u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met startwaarde u_0

- 1 Bereken het dekpunt $\bar{u}$.
- 2 Gebruik de startwaarde om A te berekenen in $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$.

Voorbeeld

Op 1 maart 2015 leven in een natuurgebied 1250 herten. Per jaar neemt het aantal herten met 20% af. Om de hertenstand op peil te houden, zet Natuurbeheer vanaf 2016 elk jaar op 1 maart 100 herten uit. Het aantal herten n jaar na 1 maart 2015 geven we aan met P_n .

- a Stel bij de hertenstand de recursieve formule van P_n op.
- b Stel de directe formule van P_n op.
- c Hoeveel herten zijn er op 1 maart 2021?
- d Convergeert het aantal herten naar een grenswaarde? Licht toe.

Uitwerking

- a Per jaar gaat er 20% af en komen er 100 bij, dus

$$P_n = 0,80P_{n-1} + 100 \text{ met } P_0 = 1250.$$

- b Voor het dekpunt $\bar{P}$ geldt $\bar{P} = 0,80\bar{P} + 100$

$$\begin{aligned} 0,2\bar{P} &= 100 \\ \bar{P} &= 500 \end{aligned}$$

$$\text{Stel } P_n = A \cdot 0,8^n + 500.$$

$$P_0 = 1250 \text{ geeft } A \cdot 0,8^0 + 500 = 1250$$

$$A = 750$$

$$\text{Dus } P_n = 750 \cdot 0,8^n + 500.$$

- c Bij 1 maart 2021 hoort $n = 6$.

$$P_6 = 750 \cdot 0,8^6 + 500 \approx 697.$$

Er zijn dus 697 herten op 1 maart 2021.

- d $\lim_{n \rightarrow \infty} (750 \cdot 0,8^n + 500) = 750 \cdot 0 + 500 = 500$,

dus P_n convergeert naar $\bar{P} = 500$.

In het voorbeeld werken we met een **discreet model**. We bekijken namelijk het aantal herten uitsluitend steeds op 1 maart van een jaar. Met de differentievergelijking is niet te berekenen hoeveel herten er op andere data zijn.

Discreet geeft aan dat je alleen naar een aantal ‘losse’ tijdstippen kijkt, bijvoorbeeld per jaar, per dag, per uur of zelfs per minuut.

Omdat je met een tijdafhankelijk proces te maken hebt, spreken we van een **discreet dynamisch model**.

- 18** Gegeven is de recursieve formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$.
In deze opgave ga je bewijzen dat $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$ waarin $\bar{u}$ het dekpunt is en A een constante.
- Licht toe dat uit $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$ volgt dat $u_{n-1} = A \cdot a^{n-1} + \bar{u}$.
 - Substitueer $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$ en $u_{n-1} = A \cdot a^{n-1} + \bar{u}$ in $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ en laat zien dat hieruit volgt $A \cdot a^n + \bar{u} = A \cdot a^n + a \cdot \bar{u} + b$.
 - Maak het bewijs verder af.
- 19** Stel de directe formule op.
- $u_n = 1,5u_{n-1} - 5$ met $u_0 = 30$
 - $x_n = 0,75x_{n-1} + 20$ met $x_0 = 100$
 - $K_n = 1,05K_{n-1} - 200$ met $K_0 = 1000$
- 20** Christine zet op 1 januari 2015 een bedrag van 2500 euro op een spaarrekening tegen een rente van 2% per jaar. Vanaf 2016 neemt ze elk jaar op 1 januari 150 euro van haar rekening op.
- Stel een differentievergelijking op. Gebruik K_n voor het kapitaal na n jaar.
 - Stel de directe formule op van K_n .
 - In welk jaar kan ze op 1 januari voor het eerst geen 150 euro opnemen? Hoeveel kan ze dan nog wel opnemen?
- A21** Frits neemt 's morgens om 8 uur een aspirine van 100 mg in en vervolgens om de vier uur nog eens 50 mg. Elke vier uur wordt 25% van de aspirine afgebroken. Na n keer vier uur is er nog H_n mg aspirine in zijn lichaam.
- Stel een differentievergelijking op.
 - Stel de directe formule op van H_n .
 - Hoeveel aspirine is er 32 uur na de eerste inname in het lichaam van Frits?
 - Is er sprake van convergentie? Zo ja, geef de grenswaarde.

- 22** Een televisiezender verzorgt elk half uur een korte nieuws-uitzending gevolgd door een reclameblok. De adverteerders gaan ervan uit dat ze maximaal 40 000 mensen met het reclameblok bereiken. De eerste uitzending is 's morgens om 7:00 uur. Op dat tijdstip kijken 10 000 van de 40 000 mensen uit de doelgroep naar het reclameblok. Elk volgend reclameblok wordt bekeken door 40% van de doelgroep die de reclame nog niet gezien heeft. P_n is het totale aantal personen uit de doelgroep dat het reclameblok heeft gezien na n keer een half uur.
- Hoeveel mensen in totaal hebben het reclameblok gezien nadat het blok bij het nieuws van acht uur is geweest?
 - Toon aan dat bij deze situatie de rij $P_n = 0,6P_{n-1} + 16\,000$ met $P_0 = 10\,000$ hoort.
 - Stel de directe formule op van P_n .
 - Voor welke n is P_n voor het eerst meer dan 39 000?

- A 23** In een gebied leven 800 lepelaars. Voor een onderzoek naar de trek van deze dieren wil men zoveel mogelijk exemplaren ringen. Daartoe vangt men elke dag een aantal van de lepelaars. Op de eerste dag lukt het om 150 vogels te vangen. Op elke volgende dag vangt men 20% van de lepelaars die nog niet geringd zijn. L_n is het totale aantal lepelaars dat n dagen na de eerste dag is geringd.
- Toon aan dat $L_2 = 384$.
 - Stel bij deze situatie een differentievergelijking op.
 - Stel de directe formule op van L_n .
 - De onderzoekers stoppen met het ringen als 90% van de vogels is geringd. Hoeveel dagen moeten ze in totaal ringen?



Terugblik

Differentievergelijking

Elke recursieve formule is te herleiden tot een vorm met $u_n - u_{n-1}$.

Zo krijg je bij $u_n = 0,8 u_{n-1} + 20$

$$u_n = u_{n-1} - 0,2u_{n-1} + 20$$

$$u_n - u_{n-1} = -0,2u_{n-1} + 20$$

Omdat in deze vorm $u_n - u_{n-1}$ voorkomt heet dit een differentievergelijking, maar ook de vorm $u_n = 0,8 u_{n-1} + 20$ is een differentievergelijking.

Lineaire differentievergelijking van de eerste orde

Een lineaire differentievergelijking van de eerste orde is van de vorm $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$.

Je kunt de termen van de bijbehorende rij u_n doorrekenen

- met Ans op het basisscherm
- door de formule in te voeren op het rijen-invoerscherm en de tabel op te vragen
- door de bijbehorende tijdgrafiek te plotten en deze met de trace-cursor te doorlopen.

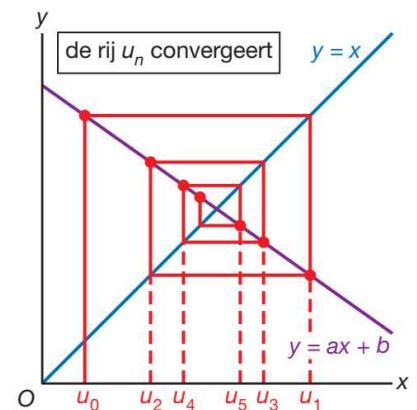
Webgrafiek en dekpunt

Bij de differentievergelijking $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ kun je de puntenrij $(u_0, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{n-1}, u_n)$ in een Oxy -assenstelsel tekenen.

De punten (u_{n-1}, u_n) liggen op de lijn $y = ax + b$.

Met behulp van de webgrafiek zijn de termen $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ op de horizontale as aan te geven.

Uitgaande van de startwaarde u_0 bestaat de webgrafiek uit aaneengesloten verticale en horizontale lijnstukken waarvan de eindpunten afwisselend op de lijnen $y = ax + b$ en $y = x$ liggen.

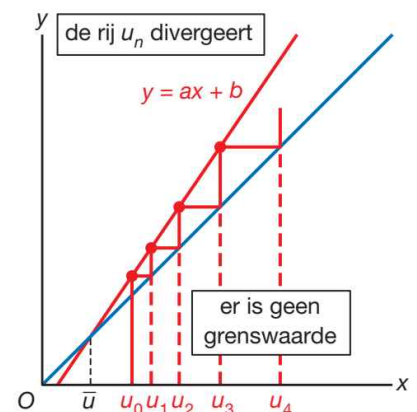


De x -coördinaat van het snijpunt van de lijnen $y = ax + b$ en $y = x$ heet het dekpunt van de differentievergelijking

$$u_n = a \cdot u_{n-1} + b.$$

Kies je het dekpunt als startwaarde dan krijg je een constante rij.

Neem je een andere startwaarde dan hangt het van de waarde van a af of er een grenswaarde is. Bij een grenswaarde is er stabiel evenwicht en convergeert de rij naar het dekpunt. Is er geen grenswaarde dan divergeert de rij.



Directe formule van $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met startwaarde u_0

De directe formule van $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ is $u_n = A \cdot a^n + \bar{u}$.

Hierin is $\bar{u}$ het dekpunt en A een constante.

Je krijgt $\bar{u}$ door de vergelijking $\bar{u} = a \cdot \bar{u} + b$ op te lossen.

Daarna gebruik je de startwaarde u_0 om A te berekenen.

Bij $u_n = 0,4u_{n-1} + 12$ met $u_0 = 30$ krijg je $\bar{u} = 0,4\bar{u} + 12$ en dit geeft $\bar{u} = 20$.

Invullen van $u_0 = 30$ in $u_n = A \cdot 0,4^n + 20$ geeft $A = 10$.

De directe formule is dus $u_n = 10 \cdot 0,4^n + 20$.

6.2 Logistische groei

Q24 In een vijver worden 5000 vissen uitgezet. Biologen gaan uit van een toename van 10% per jaar.

De populatie P_t na t jaar kan worden beschreven door de differentievergelijking $P_t = 1,10P_{t-1}$ met $P_0 = 5000$.

a Licht deze differentievergelijking toe.

De differentievergelijking is ook te schrijven in de vorm

$$P_t = P_{t-1} + a \cdot P_{t-1}.$$

b Welk waarde heeft a ?

Theorie A Differentievergelijking bij logistische groei

We gaan uit van een populatie van 4000 exemplaren die bij onbelemmerde groei jaarlijks met 5% zou toenemen. Hierbij hoort de differentievergelijking $P_t = 1,05P_{t-1}$ met $P_0 = 4000$.

Je kunt ook schrijven $P_t = P_{t-1} + 0,05P_{t-1}$.

De jaarlijkse toename is $0,05P_{t-1}$.

Het getal 0,05 heet de **groeivoet** k .

Onder invloed van de omgeving zal de groei geremd worden.

Om een differentievergelijking op te stellen die deze geremde groei beschrijft, moet de differentievergelijking $P_t = P_{t-1} + 0,05P_{t-1}$ worden aangepast. We moeten ervoor zorgen dat de jaarlijkse toename $0,05P_{t-1}$ minder wordt naarmate P_{t-1} dichterbij de grenswaarde G ligt. Daarom nemen we in de formule van P_t een

remfactor op: $P_t = P_{t-1} + 0,05P_{t-1} \cdot \text{remfactor}$.

Deze remfactor moet aan twee eisen voldoen.

- De remfactor ligt tussen 0 en 1.
- De remfactor wordt kleiner naarmate P_{t-1} dichterbij de grenswaarde G ligt.

In de tabel hieronder zie je dat de remfactor waarvoor geldt

$\text{remfactor} = \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20000}\right)$ aan de eisen voldoet. Hierbij is de grenswaarde $G = 20000$ genomen.

P_{t-1}	8000	12000	15000	18000	19000
$1 - \frac{P_{t-1}}{20000}$	0,6	0,4	0,25	0,1	0,05

Hoe dichterbij P_{t-1} bij 20000 ligt, des te dichterbij ligt de remfactor bij 0.

De differentievergelijking gaat over in

$$P_t = P_{t-1} + 0,05 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20000}\right) \text{ met } P_0 = 4000.$$

Deze differentievergelijking heeft een **lineaire remfactor**.

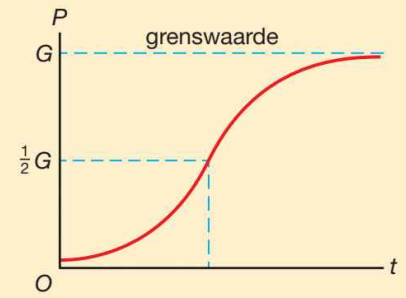
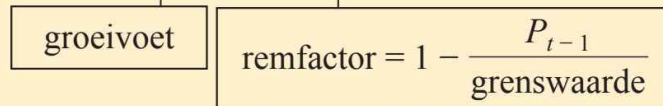
Exponentiële groei die geremd wordt door een lineaire remfactor heet **logistische groei**.

$$\text{groeivoet} = \text{groeifactor} - 1$$

Bij logistische groei hoort een S-vormige kromme zoals in de figuur hiernaast. De grenswaarde is G .

De toenemende stijging gaat over in afnemende stijging in het buigpunt. Dit is op het tijdstip dat hoort bij $P = \frac{1}{2}G$.

In het algemeen is de differentievergelijking bij het logistische groeimodel te noteren als $P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{G}\right)$.

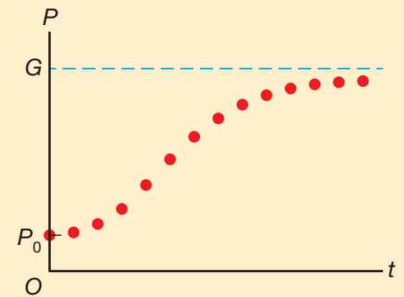


Het rekenen aan deze differentievergelijking gaat met de GR. Nadat je de rij hebt ingevoerd kun je een tabel maken en de tijdgrafiek of de webgrafiek plotten.

Bij logistische groei hoort de differentievergelijking

$$P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{G}\right).$$

Hierin is k de groeivoet en G de grenswaarde.



6

25 Gegeven is de differentievergelijking

$$P_t = P_{t-1} + 0,08 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{12000}\right) \text{ met}$$

$$P_0 = 2000.$$

- Deze differentievergelijking hoort bij logistische groei. Geef de grenswaarde.
- Plot de tijdgrafiek. Geef P_{13} en P_{20} . Gebruik trace.
- Vanaf welke t ligt P_t minder dan 1000 van de grenswaarde af?
- Verander de groeivoet 0,08 in 0,20 en plot de grafiek. Geef P_{13} en P_{20} . Vanaf welke t ligt P_t minder dan 1000 van de grenswaarde af?
- Verander de groeivoet in 0,04 en ga na vanaf welke t de waarde van P_t minder dan 1000 van de grenswaarde aflight.
- Omschrijf de invloed van de groeivoet op de grafiek.



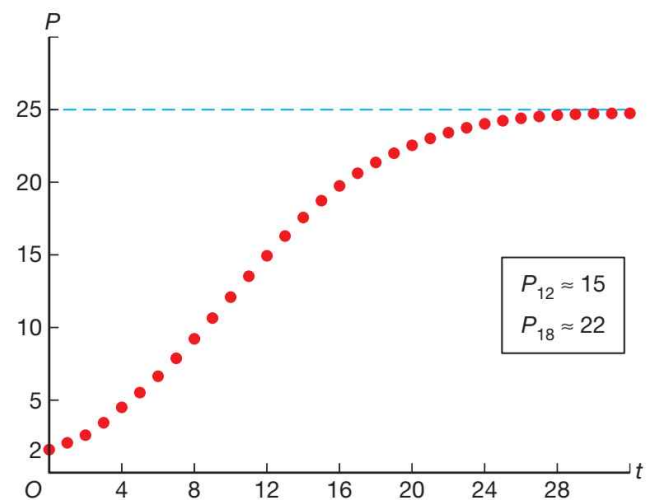
26 Gegeven is de differentievergelijking

$$P_t = P_{t-1} + 0,3 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{2000}\right) \text{ met } P_0 = 2.$$

- Vanaf welke t ligt P_t minder dan 5 van de grenswaarde af?
- Verander de differentievergelijking zo, dat je logistische groei met grenswaarde 50 krijgt.
- Verander de differentievergelijking zo, dat je logistische groei met grenswaarde 50 krijgt die langzamer dan in vraag b de grenswaarde nadert.

27 Hiernaast zie je een grafiek bij logistische groei.

Stel door te proberen met de GR een differentievergelijking op die goed past bij deze grafiek.

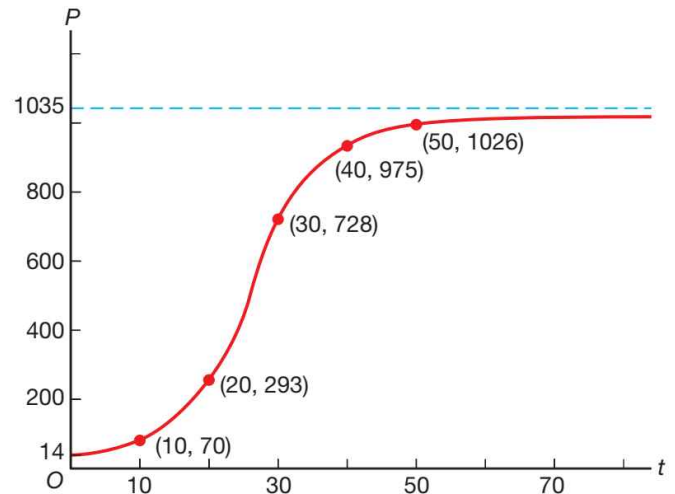


figuur 6.13

A 28 In figuur 6.14 zie je in een grafiek het aantal fruitvliegjes in een afgesloten ruimte uitgezet tegen de tijd t .

Het aantal fruitvliegjes na t dagen is P_t .

- Stel door te proberen met de GR een differentievergelijking op bij deze situatie.
- Hoeveel procent wijkt het aantal op $t = 40$ in jouw model af van de werkelijkheid?



figuur 6.14

A 29 Bij een logistische groei is de grenswaarde 2000. De startwaarde is 150 en de groeivoet 0,5 per maand.

- Stel de differentievergelijking op. Gebruik P_t voor het aantal na t maanden.
- Vanaf welke t is P_t meer dan 1800?
- Vanaf welke t verschilt P_t minder dan 20 van de grenswaarde?
- Verander de differentievergelijking zo, dat de grenswaarde 5000 is.
Vanaf welke t verschilt P_t minder dan 20 van de grenswaarde?

- D30** Het aantal personen N_t in een stad van 20 000 inwoners dat t dagen na 1 maart van een nieuwsfeit op de hoogte is, groeit logistisch. Op 1 maart hebben 1500 mensen het nieuws gehoord. De groeivoet is 0,4 per dag. Ga ervan uit dat het nieuwsfeit op den duur 80% van de inwoners bereikt. Op welke datum hebben voor het eerst in totaal meer dan 15 000 mensen van het nieuws gehoord?

- O31** Gegeven is de differentievergelijking

$$P_t = P_{t-1} + 0,4 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right) \text{ met } P_0 = 8.$$

- a Deze differentievergelijking is te herleiden tot de vorm $P_t = a \cdot P_{t-1} - b \cdot P_{t-1}^2$. Welke waarden hebben a en b ?
- b Je hebt hier te maken met een kwadratische differentievergelijking van de eerste orde. Licht deze naam toe.

Geschiedenis Pierre François Verhulst

Het logistische groeimodel heet ook wel het groeimodel van Verhulst. Pierre François Verhulst werd in 1804 in Brussel geboren.

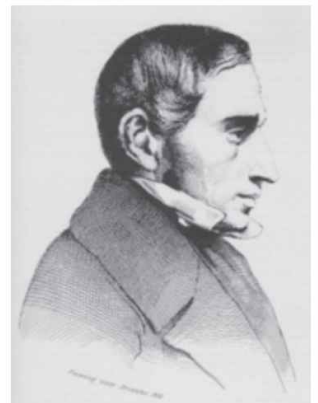
Na zijn studie in Gent keerde hij terug naar Brussel waar hij nauw ging samenwerken met Quetelet. Beiden interesseerden zich voor de statistiek.

In die tijd kende Vlaanderen een zware economische crisis. De heersende armoede werd onder invloed van de theorie van Malthus toegeschreven aan de overbevolking. De theorie van Malthus houdt in dat de bevolking exponentieel groeit en dat de groei van de beschikbare hoeveelheid grondstoffen lineair is. Volgens Verhulst waren er remmende factoren aanwezig die een exponentiële groei van de bevolking tegengingen. Dit leverde hem het logistische groeimodel op, dat hij in 1838 publiceerde. Een enorme prestatie, die echter in de 19e eeuw niet op waarde werd geschat.

Het werk van Verhulst raakte in de vergetelheid. In 1925 werd het model herontdekt door de Amerikaanse demografen R. Pearl en L.J. Reed. Maar het lukte hen niet het grote belang hiervan te doorgronden. Dit kwam vooral doordat het model heel wat rekenwerk vereiste. Pas met de komst van de computer kon het model snel doorgerekend worden.

Tegenwoordig komt het groeimodel van Verhulst in veel vakgebieden voor. Het is grappig dat meerdere auteurs bij hun verwijzing 1938 als publicatiejaar noemen met het idee dat 1838 een drukfout moet zijn. Verhulst was zijn tijd ver vooruit!

Het grote belang van het model komt vooral naar voren in de chaostheorie. Verhulst zal zeker nooit vermoed hebben dat er zoveel in zijn formule verborgen zit.



O 32 Gegeven is de differentievergelijking

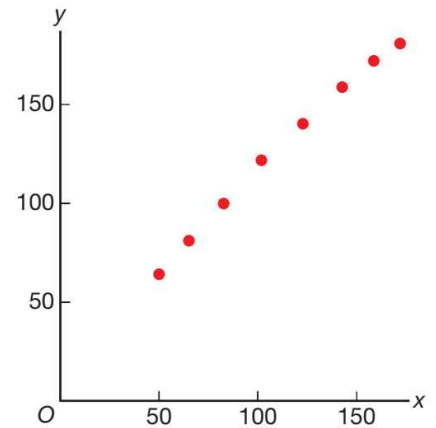
$$P_t = P_{t-1} + 0,4 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{200}\right) \text{ met } P_0 = 50.$$

Bekijk de rij $(P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_2, P_3), \dots$

De punten zijn in een Oxy -assenstelsel getekend.

Zie figuur 6.15.

Toon aan dat de punten van deze rij op de parabool $y = -0,002x^2 + 1,4x$ liggen.



figuur 6.15

Theorie B Webgrafiek bij logistische groei

Bij de differentievergelijking $P_t = P_{t-1} + 0,5 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right)$ kun je de puntenrij $(P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_2, P_3), \dots$ in een Oxy -assenstelsel tekenen.

Elk punt (x, y) van deze rij voldoet aan $P_t = P_{t-1} + 0,5 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right)$,

$$\text{dus telkens is } y = x + 0,5x \left(1 - \frac{x}{20}\right) = x + 0,5x - \frac{0,5}{20}x^2 = 1,5x - 0,025x^2.$$

De punten liggen dus op de bergparabool $y = -0,025x^2 + 1,5x$.

Uitgaande van $P_0 = 5$ is in figuur 6.16 de bijbehorende webgrafiek getekend. Je ziet dat er een grenswaarde is.

De webgrafiek nadert het snijpunt van de parabool $y = -0,025x^2 + 1,5x$ en de lijn $y = x$.

De x -coördinaat van dit snijpunt kun je algebraïsch berekenen.

$$-0,025x^2 + 1,5x = x$$

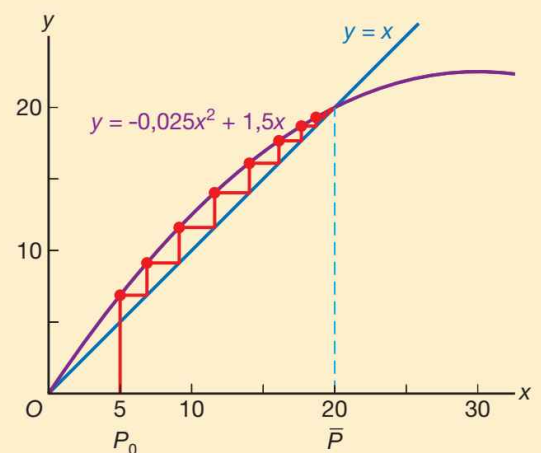
$$-0,025x^2 + 0,5x = 0$$

$$x(-0,025x + 0,5) = 0$$

$$x = 0 \vee -0,025x = -0,5$$

$$x = 0 \vee x = \frac{-0,5}{-0,025} = 20$$

De grenswaarde $\bar{P}$ is dus 20.



figuur 6.16

R 33 In de theorie is berekend dat de grenswaarde $\bar{P} = 20$ is.

Dit resultaat is niet verrassend.

Licht toe dat je dat direct uit de gegeven differentievergelijking kunt afleiden.

34 Gegeven is de rij $P_t = P_{t-1} + 0,8 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{40}\right)$

met $P_0 = 10$.

- Stel de formule op van de parabool waarop de punten $(P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_2, P_3), \dots$ liggen.
- Teken de parabool en teken vijf stappen van de webgrafiek.

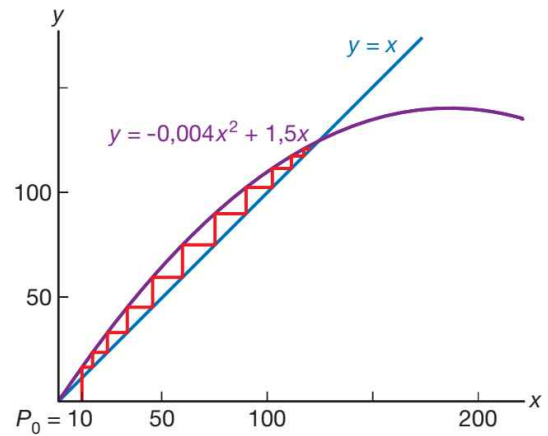
35 Uit $P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{G}\right)$ volgt

$$P_t = (1 + k)P_{t-1} - \frac{k}{G} \cdot P_{t-1}^2.$$

- Toon dit aan.
- Hoe volgt uit vraag a dat de puntenrij $(P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_2, P_3), \dots$ op de parabool $y = (1 + k)x - \frac{k}{G} \cdot x^2$ ligt?

36 In figuur 6.17 zie je een webgrafiek bij een differentievergelijking met P_t en P_{t-1} .

- Bereken algebraïsch de grenswaarde $\bar{P}$.
- Schrijf de bijbehorende differentievergelijking op.
- Plot de tijdgrafiek. Vanaf welke t verschilt P_t minder dan 1 van de grenswaarde $\bar{P}$?



figuur 6.17

A 37 Een stad wordt getroffen door een griepepidemie. De epidemie breekt uit op 1 maart, er zijn dan 800 griepgevallen. Het aantal mensen N_t dat na t dagen griep heeft (gehad) neemt logistisch toe met groeivoet 0,2 per dag. In totaal krijgen uiteindelijk 12 000 mensen griep.

- Stel een differentievergelijking op van het aantal griepgevallen N_t .
- Hoeveel mensen hebben op 29 maart griep (gehad)?
- Op welke datum hebben voor het eerst meer dan 10 000 mensen griep (gehad)?
- Stel de formule op van de parabool die bij de webgrafiek hoort.

Terugblik

Differentievergelijking bij logistische groei

Exponentiële groei die geremd wordt door een lineaire remfactor heet logistische groei.

Bij logistische groei hoort de differentievergelijking

$$P_t = P_{t-1} + k \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{G}\right).$$

Hierin is k de groeivoet, G de grenswaarde en $1 - \frac{P_{t-1}}{G}$

de remfactor.

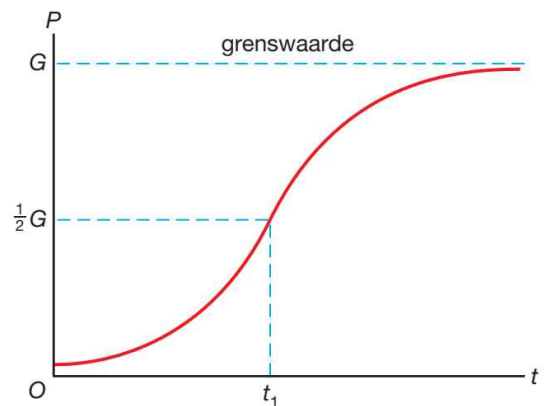
De remfactor ligt tussen 0 en 1 en is kleiner naarmate P_{t-1} dichterbij G ligt.

Zo hoort $P_t = P_{t-1} + 0,3 \cdot P_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{P_{t-1}}{200}\right)$ met

$P_0 = 20$ bij logistische groei met groeivoet 0,3, beginwaarde 20 en grenswaarde 200.

Bij logistische groei hoort een S-vormige kromme zoals hiernaast.

De toenemende stijging eindigt in het buigpunt, op het tijdstip waarop de helft van de grenswaarde bereikt wordt.

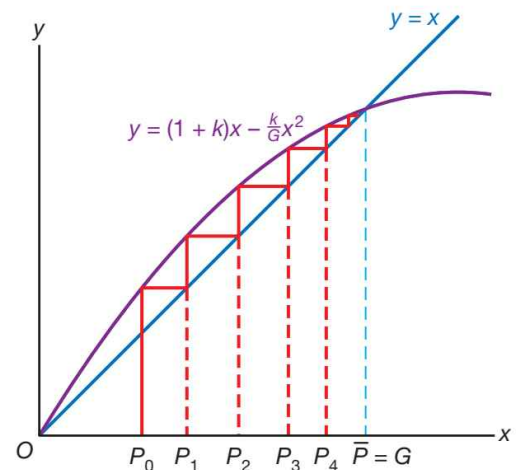


Webgrafieken

Door een recursieve formule zoals hierboven op de GR in te voeren kun je bijzonderheden van de logistische groei te weten komen. Je kunt daarbij de tabel bekijken. Ook kun je de tijdgrafiek en de webgrafiek plotten.

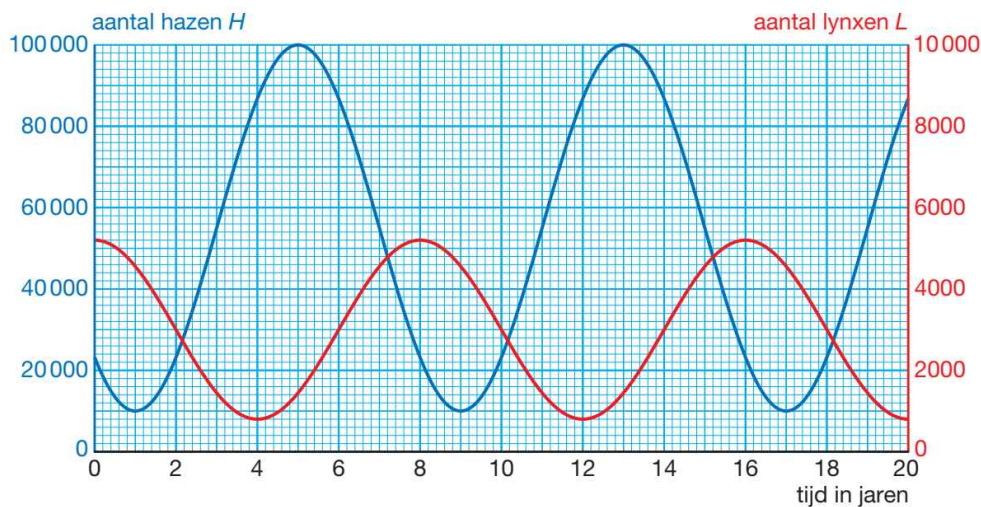
De puntenrij $(P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_2, P_3), \dots$ ligt op de bergparabool $y = (1 + k)x - \frac{k}{G}x^2$.

Met behulp van deze parabool en de lijn $y = x$ kun je bij startwaarde P_0 de webgrafiek tekenen. De grenswaarde $\bar{P} = G$.



6.3 Stelsels differentievergelijkingen

Q38 Pelsdierjagers in de omgeving van de Canadese Mackenzierivier maken al tientallen jaren jacht op lynxen. In de loop der jaren bleek er een periodieke schommeling op te treden in de door de pelsdierjagers aangevoerde pelzen van lynxen en hazen. Op grond hiervan concludeerde men dat zowel de hazen- als de lynxenpopulatie periodiek in aantal verandert. In figuur 6.18 zijn de schattingen van de aantallen hazen en lynxen verwerkt in een model.



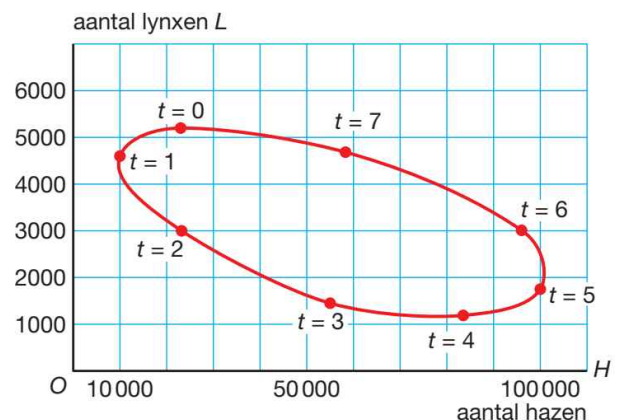
figuur 6.18

Op $t = 4$ is het aantal lynxen minimaal. Hierdoor neemt het aantal hazen toe. Daardoor zijn er veel prooidieren voor de lynxen aanwezig, waardoor de populatie lynxen weer toeneemt.

- Wat is het gevolg van de hierboven beschreven toename van het aantal lynxen?
- Hoe is uit het voorgaande een periodieke verandering van de hazen- en lynxenpopulaties te verklaren?
- Lees uit de figuur de periode af van de hazenpopulatie en van de lynxenpopulatie.

Je kunt de twee grafieken in figuur 6.18 combineren tot een zogenaamd prooi-roofdierdiagram. Zie figuur 6.19. Op deze grafiek ligt het punt (23 000, 5200) want op $t = 0$ is $H = 23\,000$ en $L = 5200$.

- Licht toe dat het punt (10 000, 4600) op het prooi-roofdierdiagram ligt.
- De figuren 6.18 en 6.19 hangen nauw samen. Zo bepalen de hoogste punten in de lynxengrafiek het hoogste punt in het prooi-roofdierdiagram. Noem nog enkele voorbeelden waaruit de samenhang blijkt.



figuur 6.19

Theorie A Prooi-roofdiermodellen

In opgave 38 heb je een voorbeeld gezien van de wisselwerking tussen roofdieren en hun prooi: de **prooi-roofdiercyclus**. Het cyclische karakter komt goed tot uiting door het **prooi-roofdierdiagram** te tekenen.

In deze paragraaf leer je hoe je een wiskundig model maakt bij een prooi-roofdiercyclus.

Ga uit van een afgesloten gebied waarin 700 prooidieren en 200 roofdieren leven. Neem eerst aan dat de dieren elkaar niet beïnvloeden en dat de populatie prooidieren maandelijks met 25% toeneemt en de populatie roofdieren maandelijks met 3% afneemt.

Hierbij horen de differentievergelijkingen

$$P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = 0,25P_{t-1} \text{ en } P_0 = 700$$

$$R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = -0,03R_{t-1} \text{ en } R_0 = 200.$$

De factor 0,25 in ΔP is de groeivoet, evenals de factor -0,03 in ΔR .

Vervolgens gaan we de wisselwerking tussen roof- en prooidier in het model verwerken.

P = aantal prooidieren

R = aantal roofdieren

Voorlopige aanname

De diersoorten beïnvloeden elkaar niet, dus het aantal prooidieren neemt toe. Ze worden immers niet opgegeten. Het aantal roofdieren neemt af, want ze hebben geen voedsel.

Prooidieren

Door de aanwezigheid van roofdieren neemt de groeivoet van 0,25 af. Hoe meer roofdieren, des te kleiner is de groeivoet. Dit effect wordt bereikt door de groeivoet 0,25 te veranderen in bijvoorbeeld $0,25 - 0,0015R_{t-1}$. Zie de tabel.

Het getal 0,0015 wordt bepaald door de situatie. In een gebied met één prooidier en één roofdier is dit getal de kans dat dit ene prooidier in een maand tijd door het roofdier wordt verslonden.

R_{t-1}	100	150	200	250
groeivoet $0,25 - 0,0015R_{t-1}$	0,1	0,025	-0,05	-0,125

Bij 100 roofdieren is de groeivoet 0,1 en bij 200 roofdieren is de groeivoet zelfs negatief. De populatie prooidieren neemt dan af.

De differentievergelijking gaat over in

$$P_t = P_{t-1} + (0,25 - 0,0015R_{t-1})P_{t-1} \text{ ofwel}$$

$$P_t = 1,25P_{t-1} - 0,0015R_{t-1}P_{t-1}.$$

Roofdieren

Door de aanwezigheid van prooidieren neemt de groeivoet van -0,03 toe. Hoe meer prooidieren, des te groter is de groeivoet.

Dit effect wordt bereikt door de groeivoet -0,03 te veranderen in bijvoorbeeld $-0,03 + 0,00004P_{t-1}$. Zie de tabel.

P_{t-1}	500	1000	2000	5000
groeivoet $-0,03 + 0,00004P_{t-1}$	-0,01	0,01	0,05	0,17

Bij 500 prooidieren is de groeivoet -0,01 en bij 1000 prooidieren is de groeivoet zelfs positief. De populatie roofdieren neemt dan toe.

De aangepaste differentievergelijking voor de roofdieren wordt dus

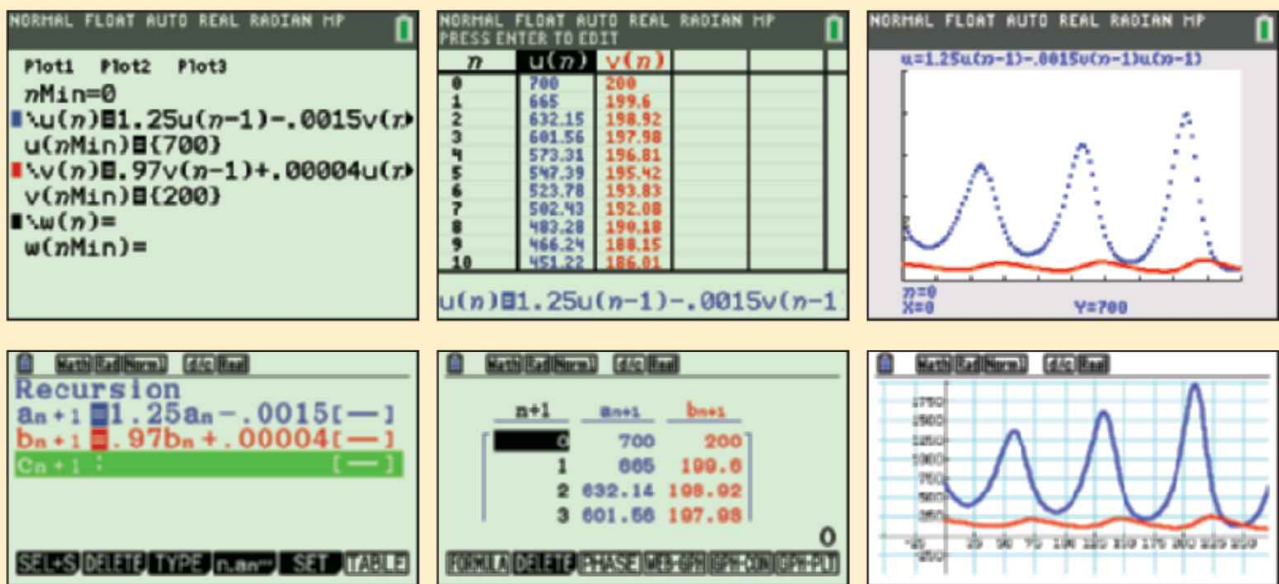
$$R_t = R_{t-1} + (-0,03 + 0,00004P_{t-1})R_{t-1} \text{ ofwel}$$

$$R_t = 0,97R_{t-1} + 0,00004P_{t-1}R_{t-1}.$$

Zo ontstaat een wiskundig model bestaande uit een **stelsel differentievergelijkingen**.

$$\begin{aligned} P_t &= 1,25P_{t-1} - 0,0015R_{t-1}P_{t-1} \\ R_t &= 0,97R_{t-1} + 0,00004P_{t-1}R_{t-1} \\ \text{met } P_0 &= 700 \text{ en } R_0 = 200. \end{aligned}$$

Door dit model in te voeren op het rijen-invoerscherm kun je het op de GR doorrekenen. Je kunt een tabel maken of tijdgrafieken plotten. In de tijdgrafieken herken je het periodieke karakter van de prooi-roofdiercyclus.



Door in het FORMAT-menu van de TI de instelling uv te kiezen, is het prooi-roofdierdiagram te plotten.

- 39** Ga uit van het model hierboven, maar nu met $P_0 = 1000$ en $R_0 = 150$. De tijd t is in maanden.
- Hoeveel prooidieren en roofdieren zijn er op $t = 1$? En hoeveel op $t = 5$?
 - Na hoeveel maanden is het aantal roofdieren voor het eerst maximaal? Hoeveel roofdieren zijn er dan?
 - Hoeveel keer bereikt de populatie in de eerste 25 jaar een maximum?

- 40** Ga uit van het prooi-roofdiermodel van opgave 39, dus met $P_0 = 1000$ en $R_0 = 150$.

Neem aan dat de vruchtbaarheid van de prooidieren is afgenomen, waardoor de groeivoet 0,15 is geworden.

- a** Hoeveel prooi- en roofdieren zijn er op $t = 5$? En hoeveel op $t = 15$?
- b** Na hoeveel maanden is de populatie prooidieren voor de tweede keer maximaal? Hoeveel is dat maximum?

Neem aan dat de vruchtbaarheid van de prooidieren verder afneemt tot een groeivoet van 0,12.

- c** Onderzoek welke van de volgende beweringen waar is.
- Door afname van de vruchtbaarheid van de prooidieren nemen de maximale waarden van de populatie prooidieren af.
 - Door afname van de vruchtbaarheid wordt de cyclus sneller doorlopen.

Neem verder aan dat de natuurlijke sterfte van de roofdieren zo toeneemt dat de groeivoet -0,05 wordt.

- d** Onderzoek of de volgende bewering waar is.
- Door toename van het sterftecijfer van de roofdieren laat de maximale waarde van de populatie roofdieren een dalende trend zien.

- 41** Bij een prooi-roofdiermodel noteren we de evenwichtswaarden met $\bar{P}$ en $\bar{R}$.
Om $\bar{R}$ bij het prooi-roofdiermodel van opgave 39 te berekenen ga je uit van $\bar{P} = 1,25\bar{P} - 0,0015\bar{R} \cdot \bar{P}$.

- a** Bereken $\bar{R}$. Rond af op gehelen.
- b** Bereken $\bar{P}$.
- c** Onderzoek hoe de populaties zich ontwikkelen als je de beginpopulaties gelijk kiest aan $\bar{P}$ en $\bar{R}$.

$\bar{P}$ en $\bar{R}$ zijn de evenwichtswaarden.

- 42** Gegeven is het prooi-roofdiermodel hiernaast.
De tijd t is in weken.

- a** Bereken de evenwichtswaarden $\bar{P}$ en $\bar{R}$.
- b** Neem aan dat de vruchtbaarheid van de prooidieren zo toeneemt, dat de groeivoet 0,25 wordt.
Onderzoek welk effect dat heeft op de evenwichtswaarden.
- c** Neem aan dat de natuurlijke sterfte van de roofdieren toeneemt.
Onderzoek welk effect dat heeft op de evenwichtswaarden.

$$\begin{aligned} P_t &= 1,15P_{t-1} - 0,006R_{t-1}P_{t-1} \\ R_t &= 0,94R_{t-1} + 0,00006P_{t-1}R_{t-1} \\ \text{met } P_0 &= 800 \text{ en } R_0 = 20. \end{aligned}$$

A 43 Een prooi-roofdiercyclus wordt beschreven door het model hiernaast. Gegeven is dat $P_1 = 539$ en $R_1 = 202$. De tijd t is in maanden. Uit de gegevens volgt dat $a = 0,002$ en $b = 0,0002$.

- Toon dit aan.
- Na hoeveel maanden is het aantal roofdieren voor het eerst maximaal?
- Bereken de evenwichtswaarden $\bar{P}$ en $\bar{R}$.
- Welk effect heeft een toename van de vruchtbaarheid van de prooidieren op de evenwichtswaarden? Licht toe.

$$\begin{aligned} P_t &= 1,38P_{t-1} - a \cdot R_{t-1}P_{t-1} \\ R_t &= 0,90R_{t-1} + b \cdot P_{t-1}R_{t-1} \\ \text{met } P_0 &= 550 \text{ en } R_0 = 200. \end{aligned}$$

A 44 Gegeven is het prooi-roofdiermodel hiernaast. Verder is gegeven dat $\bar{P} = 5000$ en $\bar{R} = 800$. Bereken a en b .

$$\begin{aligned} P_t &= 1,18P_{t-1} - a \cdot R_{t-1}P_{t-1} \\ R_t &= 0,92R_{t-1} + b \cdot P_{t-1}R_{t-1} \\ \text{met beginwaarden } P_0 \text{ en } R_0. \end{aligned}$$

R 45 Gegeven is het prooi-roofdiermodel hiernaast.

- Binnen dit model kiest men c zo, dat $0 < c < 1$. Licht dit toe.
- Wat kun je zeggen van de getallen a , b en d ?
- Druk de evenwichtswaarden $\bar{P}$ en $\bar{R}$ uit in a , b , c en/of d .
- Verandering van de vruchtbaarheid van de prooidieren heeft geen invloed op $\bar{P}$ maar wel op $\bar{R}$. Licht dit toe.

$$\begin{aligned} P_t &= a \cdot P_{t-1} - b \cdot R_{t-1}P_{t-1} \\ R_t &= c \cdot R_{t-1} + d \cdot P_{t-1}R_{t-1} \end{aligned}$$

Geschiedenis Vito Volterra

Vito Volterra werd op 3 mei 1860 geboren in het Italiaanse Ancona. Tijdens zijn moeilijke jeugd, waarin hij al op tweejarige leeftijd zijn vader verloor, vond hij troost in de wiskunde. Zo bestudeerde hij al op 13-jarige leeftijd het drielichamenprobleem, een bekend probleem uit de mechanica.

In 1878 studeerde Volterra af en hij werd benoemd tot professor aan de universiteit van Pisa. Van zijn hand verschenen vele publicaties, eerst vooral op natuurkundig gebied, later verschoof zijn aandacht naar de mathematische biologie. Hij werd bekend door het prooi-roofdiermodel, dat overigens gelijktijdig werd ontwikkeld door de Amerikaan Lotka.

Als parlamentslid in het Italië van de jaren twintig van de vorige eeuw zag Volterra al vroeg de gevaren van het opkomende fascisme. Toen de fascistische regering in 1930 een verklaring van trouw eiste, weigerde hij vastbesloten. Dat kostte hem zijn baan aan de universiteit.

De laatste jaren van zijn leven bracht hij vooral in het buitenland door, hoofdzakelijk in Parijs.



Vito Volterra (1860-1940)

O46 Om inzicht te krijgen in het verloop van een griepepidemie wordt een wiskundig model met differentievergelijkingen gebruikt.

We gaan uit van een dorp met 2000 inwoners waarbij we drie groepen onderscheiden:

G de inwoners die gezond zijn, maar vatbaar zijn voor griep

Z de inwoners die griep hebben

I de inwoners die immuun zijn voor griep.

Ben je hersteld van de griep, dan ben je immuun.

Met G_t , Z_t en I_t geven we van elke groep het aantal personen aan op het tijdstip t , met t in dagen.

Een model bij deze situatie bestaat uit de volgende drie differentievergelijkingen.

$$G_t = G_{t-1} + \Delta G$$

$$Z_t = Z_{t-1} + \Delta Z$$

$$I_t = I_{t-1} + \Delta I$$

Licht toe:

$$\Delta G < 0, \Delta I > 0 \text{ en } \Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0.$$

Theorie B Een model van een griepepidemie

Met behulp van differentievergelijkingen is het verloop van een griepepidemie te beschrijven. Ga uit van de gegevens van opgave 46.

De kans dat een inwoner uit groep G griep krijgt is groter naarmate groep Z groter is. Dus ΔG hangt niet alleen af van G_{t-1} , maar ook van Z_{t-1} .

Daarom nemen we bijvoorbeeld $\Delta G = -0,00018G_{t-1}Z_{t-1}$.

Verder is ΔI het aantal inwoners dat geneest van de griep.

Dit aantal is groter naarmate er meer mensen griep hebben.

We nemen bijvoorbeeld $\Delta I = 0,15Z_{t-1}$.

Zo ontstaat het stelsel

$$G_t = G_{t-1} - 0,00018G_{t-1}Z_{t-1}$$

$$Z_t = Z_{t-1} + 0,00018G_{t-1}Z_{t-1} - 0,15Z_{t-1}$$

$$I_t = I_{t-1} + 0,15Z_{t-1}$$

Als beginaantallen nemen we $G_0 = 1900$, $Z_0 = 100$ en $I_0 = 0$.

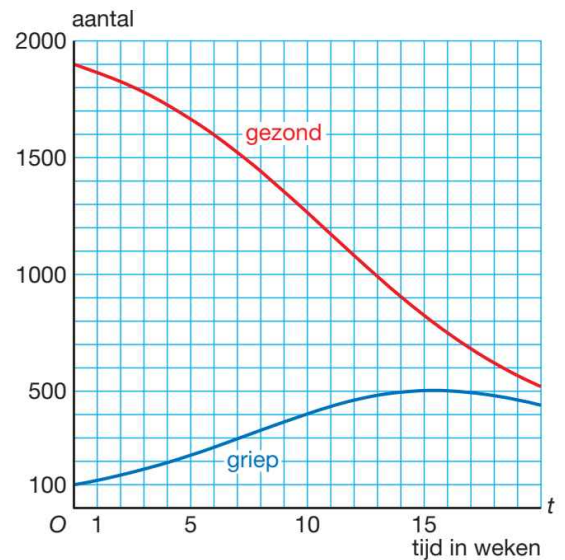
Omdat voor elke t geldt: $G_t + Z_t + I_t = 2000$, hebben we met een **gesloten systeem** te maken.

Zie verder de volgende opgaven.

ΔG is evenredig met G_{t-1}
en ook met Z_{t-1} .

ΔI is evenredig met Z_{t-1} .

- 47** [▶ WERKBLAD] Zie het stelsel differentievergelijkingen op de vorige bladzijde.
- Licht de tweede differentievergelijking toe.
 - Geef een interpretatie van het getal 0,00018 in de eerste differentievergelijking.
 - Reken algebraïsch na dat $G_1 = 1866$ en $Z_1 = 119$.
Gebruik deze informatie om I_1 , G_2 , Z_2 en I_2 algebraïsch te berekenen.
 - Gegeven is $G_{10} = 1265$ en $Z_{10} = 404$.
Bereken algebraïsch G_{11} en Z_{11} .
 - In figuur 6.20 zie je de grafieken van G_t en Z_t .
Schets de grafiek van I_t .



figuur 6.20

- A 48** Een griep epidemie wordt beschreven door het model hiernaast.
- Gegeven is $G_0 = 9600$, $Z_0 = 400$, $I_0 = 0$, $G_1 = 9408$ en $Z_1 = 560$. De tijd t is in dagen.
- Toon aan dat uit de gegevens volgt dat $a = 0,00005$ en $b = 0,08$.
 - Hoeveel mensen hebben op de tweede dag griep gekregen?

$$\begin{aligned} G_t &= G_{t-1} - a \cdot G_{t-1} Z_{t-1} \\ Z_t &= Z_{t-1} + a \cdot G_{t-1} Z_{t-1} - b \cdot Z_{t-1} \\ I_t &= I_{t-1} + b \cdot Z_{t-1} \end{aligned}$$

- A 49** In een stad met 10 000 inwoners breekt een griep epidemie uit. Op $t = 0$ is niemand immuun voor de griep. Het model hiernaast beschrijft het verloop van de epidemie.
- Stel de tweede differentievergelijking op.
- Neem aan dat $G_1 = 9216$ en $Z_1 = 704$.
- Bereken met deze gegevens G_0 en Z_0 .
- Neem aan dat $Z_1 = 1,65 \cdot Z_0$.
- Bereken met dit gegeven G_0 en Z_0 .

$$\begin{aligned} G_t &= G_{t-1} - 0,0001 G_{t-1} Z_{t-1} \\ Z_t &= \dots \\ I_t &= I_{t-1} + 0,20 Z_{t-1} \end{aligned}$$

- O 50** In veel landen vindt een sterke trek plaats van het platteland P naar de stad S , terwijl de omgekeerde beweging minder voorkomt. Onderzoekers hebben dit verschijnsel ook waargenomen in Schotland. Hierbij hoort het stelsel differentievergelijkingen hiernaast. Hierin is P_t het aantal inwoners op het platteland in miljoenen en S_t het aantal inwoners in de stad in miljoenen. De tijd t is in jaren met $t = 0$ in 1999.
- Geef een interpretatie van de getallen 0,8, 0,04, 0,2 en 0,96.
 - Uit $0,8 + 0,2 = 1$ en $0,04 + 0,96 = 1$ volgt dat je met een gesloten systeem te maken hebt.
Licht dit toe.

$$\begin{aligned} P_t &= 0,8P_{t-1} + 0,04S_{t-1} \\ S_t &= 0,2P_{t-1} + 0,96S_{t-1} \\ \text{met } P_0 &= 1,2 \text{ en } S_0 = 3,9. \end{aligned}$$

Theorie C Directe formules bij een stelsel differentievergelijkingen

Uit het stelsel van opgave 50 is een differentievergelijking voor P_t af te leiden waarin S_{t-1} niet meer voorkomt. Je gebruikt dat je met een gesloten systeem te maken hebt: voor elke t is $P_t + S_t = 5,1$.

Uit $P_{t-1} + S_{t-1} = 5,1$ volgt $S_{t-1} = 5,1 - P_{t-1}$.

Invullen in de differentievergelijking $P_t = 0,8P_{t-1} + 0,04S_{t-1}$ geeft

$$P_t = 0,8P_{t-1} + 0,04(5,1 - P_{t-1})$$

$$P_t = 0,8P_{t-1} + 0,204 - 0,04P_{t-1}$$

$$P_t = 0,76P_{t-1} + 0,204$$

Bij deze lineaire differentievergelijking van de eerste orde stellen we de directe formule op.

$$\bar{P} = 0,76\bar{P} + 0,204 \text{ geeft } 0,24\bar{P} = 0,204 \text{ ofwel } \bar{P} = 0,85.$$

$$\text{Dus } P_t = A \cdot 0,76^t + 0,85.$$

$$P_0 = 1,2 \text{ geeft } A + 0,85 = 1,2 \text{ ofwel } A = 0,35.$$

$$\text{Dus } P_t = 0,35 \cdot 0,76^t + 0,85.$$

Omdat $\lim_{t \rightarrow \infty} (0,35 \cdot 0,76^t + 0,85) = 0,35 \cdot 0 + 0,85 = 0,85$ convergeert P_t

naar $\bar{P} = 0,85$. Op den duur wonen er 0,85 miljoen Schotten op het platteland.

De formule van S_t volgt uit $S_t = 5,1 - P_t$.

$$\left. \begin{array}{l} S_t = 5,1 - P_t \\ P_t = 0,35 \cdot 0,76^t + 0,85 \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_t = 5,1 - (0,35 \cdot 0,76^t + 0,85) \\ S_t = -0,35 \cdot 0,76^t + 4,25 \end{array}$$

Voorbeeld

Gegeven is het stelsel hiernaast.

- Stel de directe formules van x_t en y_t op.
- Convergeren x_t en y_t ?

$$\begin{array}{l} x_t = 0,2x_{t-1} + 0,7y_{t-1} \\ y_t = 0,8x_{t-1} + 0,3y_{t-1} \\ \text{met } x_0 = 10 \text{ en } y_0 = 20. \end{array}$$

Uitwerking

- Gesloten systeem, dus voor elke t is $x_{t-1} + y_{t-1} = 30$ ofwel

$$\left. \begin{array}{l} y_{t-1} = 30 - x_{t-1} \\ x_t = 0,2x_{t-1} + 0,7y_{t-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_t = 0,2x_{t-1} + 0,7(30 - x_{t-1}) \\ x_t = 0,2x_{t-1} + 21 - 0,7x_{t-1} \\ x_t = -0,5x_{t-1} + 21 \end{array}$$

$$\bar{x} = -0,5\bar{x} + 21 \text{ geeft } 1,5\bar{x} = 21, \text{ dus } \bar{x} = 14.$$

$$\text{Stel } x_t = A \cdot (-0,5)^t + 14.$$

$$x_0 = 10 \text{ geeft } A + 14 = 10, \text{ dus } A = -4.$$

$$\text{Dus } x_t = -4 \cdot (-0,5)^t + 14.$$

$$\left. \begin{array}{l} y_t = 30 - x_t \\ x_t = -4 \cdot (-0,5)^t + 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_t = 30 - (-4 \cdot (-0,5)^t + 14) \\ y_t = 4 \cdot (-0,5)^t + 16 \end{array}$$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} (-4 \cdot (-0,5)^t + 14) = -4 \cdot 0 + 14 = 14$, dus x_t convergeert naar $\bar{x} = 14$ en y_t convergeert naar $\bar{y} = 30 - \bar{x} = 16$.

- R 51** a Hoe volgt uit het stelsel in het voorbeeld dat er sprake is van een gesloten systeem?
 b Bij welke van de volgende stelsels is er sprake van een gesloten systeem? Licht toe.

$$\begin{aligned} a_t &= 0,4a_{t-1} + 0,6b_{t-1} \\ b_t &= 0,8a_{t-1} + 0,2b_{t-1} \\ \text{met } a_0 &= 20 \text{ en } b_0 = 30. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= 0,1p(t-1) + 0,3q(t-1) \\ q(t) &= 0,9p(t-1) + 0,7q(t-1) \\ \text{met } p(0) &= 20 \text{ en } q(0) = 30. \end{aligned}$$

- c Waarom kan de hiervoor behandelde theorie niet toegepast worden op een niet-gesloten systeem?
 d Een stelsel dat bij een niet-gesloten systeem hoort, kun je toch doorrekenen op de GR. Doe dat voor het stelsel met a_t en b_t en onderzoek of er convergentie optreedt.

Naast de index-notatie u_t komt ook de haakjesnotatie $u(t)$ voor.

- 52** Gegeven is het stelsel hiernaast.
 a Stel de directe formules van A_t en B_t op.
 b Convergeren A_t en B_t ?

$$\begin{aligned} A_t &= 0,9A_{t-1} + 0,3B_{t-1} \\ B_t &= 0,1A_{t-1} + 0,7B_{t-1} \\ \text{met } A_0 &= 350 \text{ en } B_0 = 250. \end{aligned}$$

- 53** Gegeven is het stelsel hiernaast.
 a Stel de directe formules van x_t en y_t op.
 b Vanaf welke t verschilt x_t minder dan 0,01 van $\bar{x}$?

$$\begin{aligned} x_t &= 0,25x_{t-1} + 0,5y_{t-1} \\ y_t &= 0,75x_{t-1} + 0,5y_{t-1} \\ \text{met } x_0 &= 4 \text{ en } y_0 = 16. \end{aligned}$$

- A 54** Elke avond kijken twee miljoen mensen om 18:00 uur naar een nieuwsuitzending op de tv. Er worden op dat tijdstip twee nieuwsuitzendingen verzorgd, namelijk op NPO 1 (N) en op RTL 4 (R).

Een onderzoek naar de kijkgewoonten wijst uit dat van de kijkers naar het nieuws op N de volgende avond 60% weer naar N kijkt en de rest naar het nieuws op R.

Van de kijkers naar het nieuws op R kijkt de volgende avond 80% weer naar R en de rest naar N.

$N(t)$ is het aantal kijkers in miljoenen naar het nieuws op N en $R(t)$ is het aantal mensen in miljoenen dat naar het nieuws op R kijkt. Ga uit van de beginsituatie $N(0) = 0,8$ en $R(0) = 1,2$.

- a Stel de directe formules op van $N(t)$ en $R(t)$.
 b Hoeveel personen kijken op den duur naar het nieuws op N?

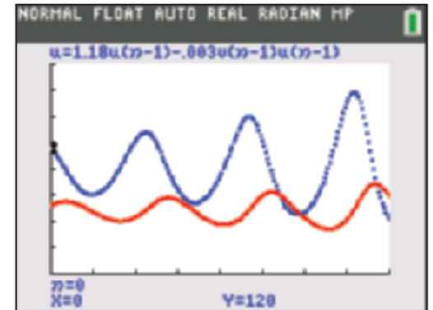
Terugblik

Prooi-roofdiermodel

Bij een prooi-roofdiercyclus kan een tijdgrafiek en een prooi-roofdierdiagram worden getekend.

Bij een prooi-roofdiermodel hoort een stelsel van twee differentievergelijkingen. In het model hieronder is P_t het aantal prooidieren op tijdstip t en R_t het aantal roofdieren op tijdstip t .

$$\begin{aligned} P_t &= 1,18P_{t-1} - 0,003R_{t-1}P_{t-1} \\ R_t &= 0,94R_{t-1} + 0,0006P_{t-1}R_{t-1} \\ \text{met } P_0 &= 120 \text{ en } R_0 = 65. \end{aligned}$$



Je kunt het model met de GR doorrekenen en tijdgrafieken plotten.

De evenwichtswaarden $\bar{P}$ en $\bar{R}$

Bij het model hierboven bereken je $\bar{P}$ met $\bar{R} = 0,94\bar{R} + 0,0006\bar{P} \cdot \bar{R}$.

Dit geeft $1 = 0,94 + 0,0006\bar{P}$ en hieruit volgt $\bar{P} = 100$.

Uit $\bar{P} = 1,18\bar{P} - 0,003\bar{R} \cdot \bar{P}$ volgt $\bar{R} = 60$.

Een model van een griep epidemie

Het verloop van een griep epidemie kan beschreven worden met het model hiernaast. Hierin is G_t het aantal mensen dat op tijdstip t nog geen griep heeft gehad, Z_t het aantal mensen dat ziek is op tijdstip t en I_t het aantal mensen dat op tijdstip t immuun is.

$$\begin{aligned} G_t &= G_{t-1} - a \cdot G_{t-1}Z_{t-1} \\ Z_t &= Z_{t-1} + a \cdot G_{t-1}Z_{t-1} - b \cdot Z_{t-1} \\ I_t &= I_{t-1} + b \cdot Z_{t-1} \end{aligned}$$

Directe formules bij een stelsel differentievergelijkingen

Bij het stelsel differentievergelijkingen hiernaast is sprake van een gesloten systeem.

Omdat $A_{t-1} + B_{t-1} = 100$, is $B_{t-1} = 100 - A_{t-1}$.

Invullen in de eerste vergelijking van het stelsel geeft

$$A_t = 0,4A_{t-1} + 0,2(100 - A_{t-1})$$

$$A_t = 0,2A_{t-1} + 20 \text{ met } A_0 = 70.$$

Hierbij hoort de directe formule $A_t = 45 \cdot 0,2^t + 25$.

Omdat $\lim_{t \rightarrow \infty} (45 \cdot 0,2^t + 25) = 45 \cdot 0 + 25 = 25$ convergeert A_t naar $\bar{A} = 25$.

Uit $B_t = 100 - A_t$ volgt $B_t = -45 \cdot 0,2^t + 75$, dus B_t convergeert naar $\bar{B} = 75$.

$$\begin{aligned} A_t &= 0,4A_{t-1} + 0,2B_{t-1} \\ B_t &= 0,6A_{t-1} + 0,8B_{t-1} \\ \text{met } A_0 &= 70 \text{ en } B_0 = 30. \end{aligned}$$

Niet-gesloten systemen

Hoort een stelsel van twee differentievergelijkingen bij een niet-gesloten systeem, dan zal er in het algemeen geen evenwicht ontstaan.

Maar ook dan kun je na invoeren op het rijen-invoerscherm onderzoeken hoe de deelpopulaties zich ontwikkelen.

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde

O55 Gegeven is de rij $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 5$.

- a Bereken u_2 , u_3 en u_4 .
 b Bereken $\frac{u_4}{u_3}$, $\frac{u_5}{u_4}$, $\frac{u_6}{u_5}$ en $\frac{u_7}{u_6}$ in twee decimalen nauwkeurig.
 Wat valt je op?

O56 Gegeven is de rij $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 5$.

Stel $u_n = g^n$. Substitutie geeft $g^n = 2g^{n-1} + 3g^{n-2}$.

- a Licht dit toe en licht toe dat uit $g^n = 2g^{n-1} + 3g^{n-2}$ volgt $g^2 = 2g + 3$.

- b Bereken de oplossingen van $g^2 = 2g + 3$.

In vraag b heb je gevonden $g = -1 \vee g = 3$.

Stel nu $u_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 3^n$.

- c Uit $u_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 3^n$ en $u_0 = 1$ volgt $A + B = 1$.

Licht dit toe.

- d Uit $u_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 3^n$ en $u_1 = 5$ volgt $-A + 3B = 5$.

Licht dit toe.

- e Uit $A + B = 1$ en $-A + 3B = 5$ volgt $A = -\frac{1}{2}$ en $B = 1\frac{1}{2}$.

Licht dit toe.

Je hebt nu gevonden $u_n = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n$.

- f Substitueer $u_n = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n$ in $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ om aan te tonen dat $u_n = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n$ de directe formule is die bij de recursieve formule $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 5$ hoort.

$$\begin{aligned} \text{Uit } u_n &= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n \\ \text{volgt} \\ u_{n-1} &= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^{n-1} + 1\frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{-1} + 1\frac{1}{2} \cdot 3^n \cdot 3^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n \\ \text{en } u_{n-2} &= \dots \end{aligned}$$

Theorie A De directe formule bij $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$

Bij een recursieve formule van de vorm $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ heb je te maken met een **lineaire differentievergelijking van de tweede orde**.

Deze differentievergelijking is van de tweede orde omdat er een verband bestaat tussen u_n en de twee voorafgaande termen u_{n-1} en u_{n-2} .

Een recursieve formule van de vorm $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met $b \neq 0$ is een lineaire differentievergelijking van de tweede orde.

Om de rij $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ vast te leggen heb je twee startwaarden nodig.

In opgave 56 heb je de directe formule gevonden van de rij $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 5$.

Je ging daarbij als volgt te werk.

- Substitueer $u_n = g^n$ en herleid de vergelijking tot de vorm $g^2 - ag - b = 0$.
- Los de vergelijking $g^2 - ag - b = 0$ op. De oplossingen zijn g_1 en g_2 .
- Stel nu $u_n = A \cdot (g_1)^n + B \cdot (g_2)^n$ en bereken A en B door de startwaarden u_0 en u_1 te gebruiken.

In opgave 58 bewijs je dat elke u_n die een **lineaire combinatie** is van g_1^n en g_2^n , dus $u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$, voldoet aan de recursieve formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$.

Voorbeeld

Stel de directe formule op van de rij $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 4$.

Uitwerking

Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ geeft

$$g^n = g^{n-1} + 2g^{n-2}$$

$$g^2 = g + 2$$

$$g^2 - g - 2 = 0$$

$$(g+1)(g-2) = 0$$

$$g = -1 \vee g = 2$$

$$\text{Stel } u_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n.$$

$$u_0 = 5 \text{ geeft } A \cdot (-1)^0 + B \cdot 2^0 = 5, \text{ dus } A + B = 5$$

$$u_1 = 4 \text{ geeft } A \cdot (-1)^1 + B \cdot 2^1 = 4, \text{ dus } -A + 2B = 4$$

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -A + 2B = 4 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{l} 3B = 9 \\ B = 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + 3 = 5 \\ A = 2 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } u_n = 2 \cdot (-1)^n + 3 \cdot 2^n.$$

Deel door g^{n-2} .

6

57 Stel de directe formule op.

a $u_n = 2u_{n-1} + 8u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 2$

b $x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ met $x_0 = 2$ en $x_1 = 6$

c $v_n = 5v_{n-1} - 6v_{n-2}$ met $v_0 = 1$ en $v_1 = 3$

58 In deze opgave ga je bewijzen dat $u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$ voldoet aan $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$. Hierbij zijn g_1 en g_2 oplossingen van de vergelijking $g^2 - ag - b = 0$.

a Substitueer $u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$ in $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ en laat zien dat hieruit volgt

$$A(g_1^2 - ag_1 - b) + B(g_2^2 - ag_2 - b) = 0.$$

b Maak het bewijs af.

D 59 Je kent de rij van Fibonacci

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 ...

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_1 = 1$ en $u_2 = 1$.

Om een directe formule op te stellen gaan we uit van

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_0 = 0$ en $u_1 = 1$.

a Licht toe dat dit (afgezien van de eerste term) dezelfde rij oplevert.

Stellen van $u_n = g^n$ geeft de vergelijking $g^2 - g - 1 = 0$ en zo

kom je op $u_n = A \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$.

b Toon dit aan.

c Gebruik de startwaarden om aan te tonen dat

$$u_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}.$$

O 60 Gegeven is de lineaire differentievergelijking $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$.

Welke problemen krijg je als je hierbij een directe formule wilt opstellen?

6

Informatief De formule van Binet

In opgave 59 heb je de directe formule opgesteld bij de rij van Fibonacci.

Deze formule is $u_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$ en werd voor het eerst gepubliceerd in 1730 door

Abraham de Moivre. De formule is echter vernoemd naar Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) die de formule bewees in 1843.

Door voor steeds grotere n de quotiënten $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ te berekenen kom

je op het spoor van exponentiële groei, dus op de substitutie $u_n = g^n$. Omdat de groei niet zuiver exponentieel is, ligt het voor de hand om te denken aan de som van twee exponentiële

functies, dus aan $u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$. De quotiënten $\frac{u_n}{u_{n-1}}$

bij de rij van Fibonacci naderen voor n naar oneindig naar het beroemde getal Φ (phi) van de gulden snede.

Dit getal is $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{13}{8} &= 1,625 \\ \frac{21}{13} &= 1,6153... \\ \frac{34}{21} &= 1,6190... \\ \frac{55}{34} &= 1,6176... \\ \frac{89}{55} &= 1,6181... \\ \frac{144}{89} &= 1,6179... \\ \frac{233}{144} &= 1,6180... \\ \frac{377}{233} &= 1,6180... \\ \frac{610}{377} &= 1,6180... \end{aligned}$$

Theorie B De karakteristieke vergelijking

Bij het opstellen van de directe formule van de rij $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$ in opgave 60 krijg je te maken met de vergelijking $g^2 - 4g + 4 = 0$. Van deze vergelijking is de discriminant D gelijk aan nul. Je krijgt dan één oplossing, namelijk $g = 2$. In opgave 60 heb je ontdekt dat je dan niet te werk kunt gaan zoals in theorie A is uitgelegd.

Stel je echter $u_n = (A + Bn) \cdot 2^n$ dan krijg je

$u_0 = 1$ geeft $(A + B \cdot 0) \cdot 2^0 = 1$, dus $A = 1$

$u_1 = 3$ geeft $(A + B \cdot 1) \cdot 2^1 = 3$, dus $2(A + B) = 3$ ofwel $A + B = 1\frac{1}{2}$.

Dus $A = 1$ en $B = \frac{1}{2}$. Dit geeft $u_n = (1 + \frac{1}{2}n) \cdot 2^n$.

Ga met de GR na dat dit dezelfde rij oplevert als $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$.

Bij de rij $v_n = 2v_{n-1} - 4v_{n-2}$ krijg je te maken met de vergelijking $g^2 - 2g + 4 = 0$ en hiervan is de discriminant $D < 0$.

Dus deze vergelijking heeft geen (reële) oplossingen.

Uit het bovenstaande volgt dat je kunt zien welke vorm de directe formule heeft als je de discriminant van de vergelijking $g^2 - ag - b = 0$ berekent. Daarom heet $g^2 - ag - b = 0$ de

karakteristieke vergelijking van de lineaire differentievergelijking $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$.

Werkschema: het opstellen van de directe formule van de rij

$u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met startwaarden u_0 en u_1

- 1 Substitueren van $u_n = g^n$ geeft de karakteristieke vergelijking $g^2 - ag - b = 0$ met $D = a^2 + 4b$.
- 2a Is $D > 0$ dan zijn er twee reële oplossingen g_1 en g_2 en is de directe formule van de vorm $u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$.
- 2b Is $D = 0$ dan is er één reële oplossing g en is de directe formule van de vorm $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$.
- 2c Is $D < 0$ dan zijn er geen reële oplossingen.
- 3 Je berekent A en B met behulp van de startwaarden u_0 en u_1 .

Informatief De karakteristieke vergelijking

Stel je bij de lineaire differentievergelijking van de tweede orde $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ dat $u_n = g^n$, dan krijg je $g^n = a \cdot g^{n-1} + b \cdot g^{n-2}$. Deel je beide leden door g^{n-2} , dan krijg je $g^2 = ag + b$ en dus is $g^2 - ag - b = 0$.

De discriminant van deze vergelijking is $D = a^2 + 4b$. Afhankelijk van de waarde van D heeft de karakteristieke vergelijking $g^2 - ag - b = 0$ twee, één of geen reële oplossingen g .

In het geval $D < 0$ zijn de oplossingen complex. In vwo D deel 3 leer je wat dit betekent en hoe je in dat geval de directe formule opstelt.

In opgave 61 bewijs je dat in het geval $D = 0$ de formule $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$ voldoet aan de recursieve formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$.

Voorbeeld

Stel de directe formule op van de rij $x_n = 5x_{n-1} - 6\frac{1}{4}x_{n-2}$ met $x_0 = 2$ en $x_1 = 3$.

Uitwerking

Substitutie van $x_n = g^n$ in $x_n = 5x_{n-1} - 6\frac{1}{4}x_{n-2}$ geeft

$$g^2 = 5g - 6\frac{1}{4}$$

$$g^2 - 5g + 6\frac{1}{4} = 0$$

$$(g - 2\frac{1}{2})^2 = 0$$

$$g = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Stel } x_n = (A + Bn) \cdot (2\frac{1}{2})^n.$$

$$x_0 = 2 \text{ geeft } A \cdot (2\frac{1}{2})^0 = 2, \text{ dus } A = 2 \text{ en } x_n = (2 + Bn) \cdot (2\frac{1}{2})^n.$$

$$x_1 = 3 \text{ geeft } (2 + B) \cdot 2\frac{1}{2} = 3 \text{ en hieruit volgt } 2 + B = \frac{6}{5}, \text{ dus } B = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Dus } x_n = (2 - \frac{4}{5}n) \cdot (2\frac{1}{2})^n.$$

6

- 61** Gegeven is de recursieve formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ waarbij de discriminant van de karakteristieke vergelijking $g^2 - ag - b = 0$ gelijk is aan nul. In deze opgave ga je bewijzen dat in dit geval $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$ voldoet aan $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$.
- Substitueer $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$ in $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ en laat zien dat hieruit volgt $A(g^2 - ag - b) + B(n(g^2 - ag - b) + ag + 2b) = 0$.
 - Licht toe dat $g = \frac{1}{2}a$ en maak het bewijs af.

- 62** Stel de directe formule op.
- $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ met $x_0 = 3$ en $x_1 = 5$
 - $y_n = -6y_{n-1} - 9y_{n-2}$ met $y_0 = 1$ en $y_1 = 2$

- A63** Stel de directe formule op.
- $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 3$
 - $v_n = 3v_{n-1} - 2\frac{1}{4}v_{n-2}$ met $v_0 = 2$ en $v_1 = 4$

- O64** Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen.

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} \dots (1) \\ y_n = 4x_{n-1} + 5y_{n-1} \dots (2) \end{cases}$$

$$\dots$$

$$\text{a Licht toe dat uit (1) volgt } x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \dots (3)$$

$$\text{Substitutie van (2) in (3) geeft } x_{n+1} = 2x_n + 12x_{n-1} + 15y_{n-1} \dots (4)$$

b Licht dit toe.

$$\text{c (4) is te schrijven als } x_{n+1} = 2x_n + 12x_{n-1} + 5 \cdot 3y_{n-1}.$$

Gebruik deze vorm en (1) om aan te tonen dat

$$x_{n+1} = 7x_n + 2x_{n-1} \dots (5)$$

- d** Licht toe dat uit (5) volgt $x_n = 7x_{n-1} + 2x_{n-2}$ en dat je te maken hebt met een lineaire differentievergelijking van de tweede orde waarvan de karakteristieke vergelijking $g^2 - 7g - 2 = 0$ is.

Theorie C Stelsels differentievergelijkingen

In opgave 64 heb je te maken met een stelsel

differentievergelijkingen van de vorm $\begin{cases} x_n = a \cdot x_{n-1} + b \cdot y_{n-1} \\ y_n = c \cdot x_{n-1} + d \cdot y_{n-1} \end{cases}$.

Je hebt gezien dat uit dit stelsel een lineaire differentievergelijking van de tweede orde is af te leiden.

Met behulp van de startwaarden x_0 en y_0 is de directe formule op te stellen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen.

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = -x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases} \quad \text{met } x_0 = 10 \text{ en } y_0 = 20$$

Stel de directe formule op van x_n .

Uitwerking

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = -x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ x_{n+1} = x_n + 2(-x_{n-1} + 4y_{n-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 4 \cdot 2y_{n-1} \\ x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \text{ geeft } 2y_{n-1} = x_n - x_{n-1} \end{cases} \begin{cases} x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 4(x_n - x_{n-1}) \\ x_{n+1} = x_n - 2x_{n-1} + 4x_n - 4x_{n-1} \\ x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} \\ x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{De karakteristieke vergelijking is } g^2 - 5g + 6 &= 0 \\ (g-2)(g-3) &= 0 \\ g &= 2 \vee g = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n.$$

$$x_0 = 10 \text{ en } y_0 = 20 \text{ geeft } x_1 = 10 + 2 \cdot 20 = 50$$

$$x_0 = 10 \text{ geeft } A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 = 10, \text{ dus } A + B = 10$$

$$x_1 = 50 \text{ geeft } A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 50, \text{ dus } 2A + 3B = 50$$

$$\begin{cases} A + B = 10 \\ 2A + 3B = 50 \end{cases} \left| \begin{array}{r} 3 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 3A + 3B = 30 \\ 2A + 3B = 50 \\ \hline A = -20 \\ A + B = 10 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 3A + 3B = 30 \\ 2A + 3B = 50 \\ \hline A = -20 \\ A + B = 10 \end{cases}} \right\} B = 30$$

$$\text{Dus } x_n = -20 \cdot 2^n + 30 \cdot 3^n.$$

65 Zie het voorbeeld.

Substitutie van $x_n = -20 \cdot 2^n + 30 \cdot 3^n$ in $2y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$ geeft

$$y_n = -10 \cdot 2^n + 30 \cdot 3^n.$$

Toon dit aan.

66 Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen.

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} - 2y_{n-1} \end{cases} \text{ met } x_0 = 5 \text{ en } y_0 = 4$$

Stel van x_n en van y_n de directe formule op.

67 Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen.

$$\begin{cases} P_n = 2P_{n-1} - 4Q_{n-1} \\ Q_n = P_{n-1} + 6Q_{n-1} \end{cases} \text{ met } P_0 = 100 \text{ en } Q_0 = 10$$

Stel van P_n en van Q_n de directe formule op.

A 68 Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen.

$$\begin{cases} K_t = K_{t-1} + 2L_{t-1} \\ L_t = K_{t-1} + 3L_{t-1} \end{cases} \text{ met } K_0 = 40 \text{ en } L_0 = 5$$

Stel van K_t en van L_t de directe formule op.

Terugblik

Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde

Een recursieve formule van de vorm $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ met $b \neq 0$ is een lineaire differentievergelijking van de tweede orde.

De differentievergelijking is van de tweede orde omdat de term u_n is uitgedrukt in de twee voorafgaande termen.

Een voorbeeld van zo'n rij is $u_n = 2u_{n-1} + 8u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 2$. Aan de quotiënten van opeenvolgende termen is te zien dat de rij met exponentiële groei te maken heeft.

Daarom substitueer je $u_n = g^n$ in de differentievergelijking bij het opstellen van de directe formule van de rij.

De karakteristieke vergelijking

Substitutie van $u_n = g^n$ in $u_n = a \cdot u_{n-1} + b \cdot u_{n-2}$ geeft de karakteristieke vergelijking $g^2 - ag - b = 0$. De discriminant van deze vergelijking is $D = a^2 + 4b$.

- Is $D > 0$ dan zijn er twee reële oplossingen g_1 en g_2 en is de directe formule van de vorm $u_n = A \cdot g_1^n + B \cdot g_2^n$.
- Is $D = 0$ dan is er één reële oplossing g en is de directe formule van de vorm $u_n = (A + Bn) \cdot g^n$.
- Is $D < 0$ dan zijn er geen reële oplossingen.

De constanten A en B bereken je met behulp van de startwaarden. Zo hoort bij de rij $u_n = 2u_{n-1} + 8u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 2$ de karakteristieke vergelijking $g^2 - 2g - 8 = 0$. De oplossingen hiervan zijn $g = -2$ en $g = 4$, dus $u_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 4^n$. $u_0 = 1$ geeft $A + B = 1$ en $u_1 = 2$ geeft $-2A + 4B = 2$, zodat $A = \frac{1}{3}$ en $B = \frac{2}{3}$.

Stelsels differentievergelijkingen

Bij het stelsel differentievergelijkingen $\begin{cases} x_n = x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} - 3y_{n-1} \end{cases}$ met $x_0 = 3$ en $y_0 = 2$ is

het mogelijk een lineaire differentievergelijking van de tweede orde op te stellen.

Uit $x_n = x_{n-1} - 2y_{n-1}$ volgt $x_{n+1} = x_n - 2y_n$ en samen met $y_n = 2x_{n-1} - 3y_{n-1}$ geeft dit $x_{n+1} = x_n - 2(2x_{n-1} - 3y_{n-1}) = x_n - 4x_{n-1} + 6y_{n-1}$.

Uit $x_n = x_{n-1} - 2y_{n-1}$ volgt ook $2y_{n-1} = x_{n-1} - x_n$, zodat

$x_{n+1} = x_n - 4x_{n-1} + 3(x_{n-1} - x_n) = -2x_n - x_{n-1}$ en dit geeft $x_n = -2x_{n-1} - x_{n-2}$.

De bijbehorende karakteristieke vergelijking is $g^2 + 2g + 1 = 0$ en dit geeft $g = -1$.

Dus $x_n = (A + Bn) \cdot (-1)^n$.

$x_0 = 3$ geeft $A = 3$, dus $x_n = (3 + Bn) \cdot (-1)^n$.

$x_0 = 3$ en $y_0 = 2$ geeft $x_1 = 3 - 4 = -1$ en dit geeft $(3 + B) \cdot (-1) = -1$, dus $B = -2$.

Dus $x_n = (3 - 2n) \cdot (-1)^n$.

Substitutie in $2y_n = x_n - x_{n+1}$ geeft $2y_n = (3 - 2n) \cdot (-1)^n - (3 - 2(n+1)) \cdot (-1)^{n+1}$ en hieruit volgt $y_n = (2 - 2n) \cdot (-1)^n$.

Diagnostische toets

6.1 Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde

- 1 Gegeven is $u_n = 0,75u_{n-1} + 100$ met $u_0 = 10$.
Plot de tijdgrafiek bij u_n . Ga tot $n = 10$. Nadert u_n tot een grenswaarde? Zo ja, bereken deze grenswaarde.
- 2 Gegeven is $u_n = -0,8u_{n-1} + 9$.
 - a Neem $u_0 = 2$ en teken vier stappen van de webgrafiek.
 - b Hoe kun je aan de figuur zien dat er een grenswaarde is? Bereken de grenswaarde.
- 3 Stel de directe formule op.
 - a $u_n = 1,25u_{n-1} - 10$ met $u_0 = 20$
 - b $P_n = 0,95P_{n-1} + 1000$ met $P_0 = 25\,000$
- 4 In een tank is 100 kg zout opgelost in water. De tank wordt doorgespoeld met schoon water zo, dat per uur 20% van het zout wordt afgevoerd. Elk uur voegt men 16 kg nieuw zout toe. Na t uur is de hoeveelheid zout in de tank gelijk aan Z_t kg.
 - a Stel een differentievergelijking op die bij deze situatie hoort.
 - b Stel de directe formule van Z_t op.
 - c Hoeveel kg zout is er na 5 uur in de tank aanwezig? Rond af op één decimaal.
 - d Na hoeveel uur verschilt de hoeveelheid zout in de tank minder dan 0,5 kg van de grenswaarde?

6.2 Logistische groei

- 5 Bij een logistische groei is de grenswaarde 5000. De startwaarde is 100 en de groeivoet is 0,2 per jaar.
 - a Stel een differentievergelijking op. Gebruik P_t voor het aantal na t jaar.
 - b Vanaf welke t is P_t meer dan 4500?
 - c Vanaf welke t verschilt P_t minder dan 10 van de grenswaarde?
 - d Verander de groeivoet zo, dat P_t vanaf $t = 40$ voor het eerst minder dan 10 van de grenswaarde verschilt. Welke groeivoet heb je genomen?
- 6 Gegeven is de differentievergelijking

$$N_t = N_{t-1} + 0,4N_{t-1} \left(1 - \frac{N_{t-1}}{100}\right) \text{ met } N_0 = 30.$$

Teken vijf stappen van de webgrafiek.

6.3 Stelsels differentievergelijkingen

- 7** Gegeven is een prooi-roofdiermodel dat beschreven wordt door het stelsel differentievergelijkingen hiernaast. De tijd t is in maanden.

$$\begin{aligned} P_t &= 1,15P_{t-1} - 0,001R_{t-1}P_{t-1} \\ R_t &= 0,92R_{t-1} + 0,00005P_{t-1}R_{t-1} \\ \text{met } P_0 &= 1500 \text{ en } R_0 = 180. \end{aligned}$$

- Hoeveel prooidieren zijn er op $t = 1$?
En hoeveel op $t = 5$?
- Na hoeveel maanden is het aantal prooidieren voor het eerst maximaal? Hoeveel prooidieren zijn er dan?
- Bereken de evenwichtswaarden $\bar{P}$ en $\bar{R}$.

- 8** Een griep epidemie kan worden beschreven door het model hiernaast. Hierin is G het aantal inwoners dat gezond is, maar vatbaar voor griep, Z het aantal inwoners dat griep heeft en I het aantal inwoners dat immuun is voor griep. De tijd t is in dagen.

$$\begin{aligned} G_t &= G_{t-1} - 0,00001G_{t-1}Z_{t-1} \\ Z_t &= Z_{t-1} + 0,00001G_{t-1}Z_{t-1} - 0,05Z_{t-1} \\ I_t &= I_{t-1} + 0,05Z_{t-1} \\ \text{met } G_0 &= 14\,500, Z_0 = 500 \text{ en } I_0 = 0. \end{aligned}$$

- Bereken voor $t = 1$ en voor $t = 2$ het aantal inwoners dat nog gezond is, het aantal inwoners dat griep heeft en het aantal inwoners dat immuun is voor griep.
- Bereken hoeveel mensen op de derde dag griep hebben gekregen.

- 9** Gegeven is het stelsel differentievergelijkingen hiernaast. Stel de directe formules op van x_t en y_t .

$$\begin{aligned} x_t &= 0,15x_{t-1} + 0,65y_{t-1} \\ y_t &= 0,85x_{t-1} + 0,35y_{t-1} \\ \text{met } x_0 &= 20 \text{ en } y_0 = 40. \end{aligned}$$

6.4 Lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde

- 10** Stel de directe formule op.

- $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$ met $u_0 = 3$ en $u_1 = -1$
- $u_n = 9u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = -3$
- $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 18$

- 11** Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen.

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_n = 9x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{cases} \text{ met } x_0 = 6 \text{ en } y_0 = 6$$

Stel van x_n en van y_n de directe formule op.

Het domino-effect treedt op wanneer de voorste in een rij rechtopstaande en dicht bij elkaar geplaatste domino-stenen omvalt tegen de volgende steen en zo een kettingreactie teweegbrengt. Het begrip wordt ook gebruikt voor een uitbreiding van een politieke ontwikkeling naar andere landen. In de wiskunde komt het begrip tevoorschijn bij de bewijsvoering met volledige inductie.

Wat leer je?

- Bewijzen in de vlakke meetkunde met bijvoorbeeld gelijkvormige en congruente driehoeken, koorden-vierhoeken en de stelling van de constante hoek.
- Bewijzen met behulp van volledige inductie, bewijzen uit het ongerijmde, het ladenprincipe, en bewijzen in de getaltheorie.



Bewijzen

7



Voorkennis Definities, vermoedens en stellingen

Theorie A Definities en stellingen

Een **definitie** is een afspraak.

Hieronder staat een aantal definities over meetkundige figuren. Je ziet dat telkens een begrip wordt vastgelegd.

- Een **gestrekte hoek** is een hoek waarvan de benen in het verlengde van elkaar liggen. De grootte van een gestrekte hoek is 180° .
- Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek. De grootte van een rechte hoek is 90° .
- Een **parallellogram** is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden.
- Een **ruit** is een vierhoek met vier even lange zijden.
- Een **rechthoek** is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- Een **vierkant** is een ruit die tevens een rechthoek is.

Een **stelling** is een eigenschap of bewering die je kunt bewijzen.

Hieronder staan enkele stellingen over meetkundige figuren.

- Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de **F-hoeken** even groot en de **Z-hoeken** even groot.
- Als er bij twee lijnen die gesneden worden door een derde lijn een paar even grote **F-hoeken** of **Z-hoeken** optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.
- Bij twee snijdende lijnen zijn de **overstaande hoeken** even groot.
- De som van de hoeken van een driehoek is 180° (**hoekensom driehoek**).
- Een **buitenhoek van een driehoek** is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.
- De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (**hoekensom vierhoek**).
- In een **parallellogram** zijn de overstaande hoeken even groot.
- Als in een vierhoek twee paar overstaande hoeken even groot zijn, dan is de vierhoek een **parallellogram**.
- Een **rechthoek** is tevens een parallellogram.
- Als in een parallellogram een hoek recht is, dan is het parallellogram een **rechthoek**.

Bij het geven van een bewijs maak je gebruik van definities en eerder bewezen stellingen. In de opgaven 1 tot en met 7 ga je een aantal van bovenstaande stellingen bewijzen. Daarbij mag je de stellingen over de F-hoeken en de Z-hoeken gebruiken. Vermeld de gebruikte definities of stellingen in je uitwerking.

Noteer de gebruikte definities of stellingen in je uitwerking.

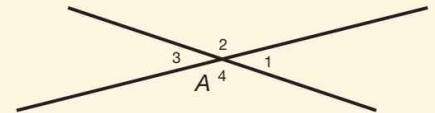
Voorbeeld

Bewijs de stelling van de overstaande hoeken.
Gebruik figuur 7.1.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \\ \angle A_3 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle A_1 = \angle A_3$$

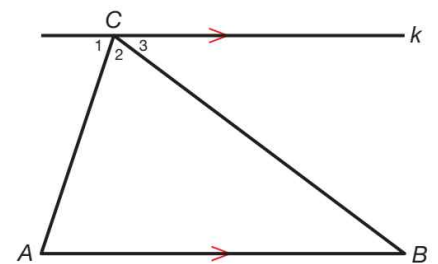
Dus de overstaande hoeken $\angle A_1$ en $\angle A_3$ zijn gelijk.
Op dezelfde manier is te bewijzen dat $\angle A_2 = \angle A_4$.



figuur 7.1

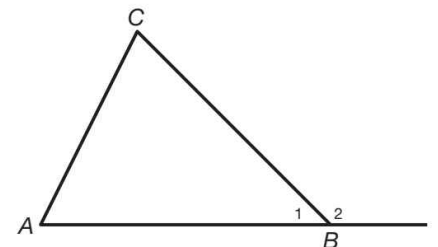
Noteer van de definitie of stelling het vetgedrukte begrip van de vorige bladzijde.

- 1 Bewijs de stelling van de hoekensom driehoek.
Gebruik figuur 7.2 en gelijke Z-hoeken.



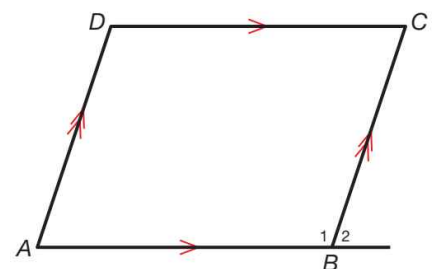
figuur 7.2

- 2 Bewijs de stelling van de hoekensom vierhoek.
- 3 Bewijs de stelling van de buitenhoek van een driehoek. Gebruik figuur 7.3.



figuur 7.3

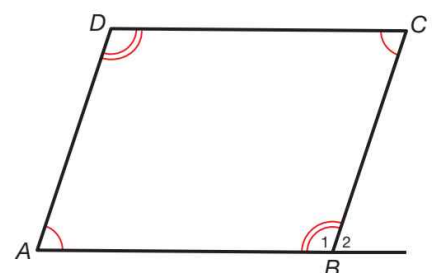
- 4 Bewijs de stelling dat de overstaande hoeken in een parallellogram even groot zijn. Verleng daartoe een zijde van het parallellogram. Zie figuur 7.4.



figuur 7.4

- 5 [►WERKBLAD] Gegeven is vierhoek ABCD met $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$. Om te bewijzen dat hieruit volgt dat $AD \parallel BC$ gebruik je figuur 7.5.

- a Geef dit bewijs.
b Bewijs op dezelfde manier dat $AB \parallel CD$.
c Welke van de stellingen op bladzijde 98 heb je nu bewezen?

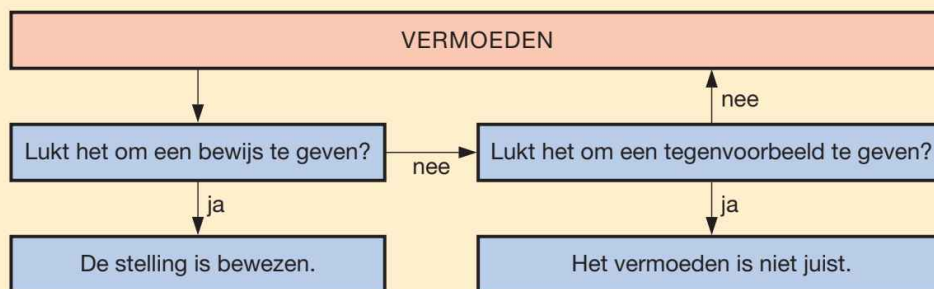


figuur 7.5

- 6 Bewijs de volgende stellingen.
- Een rechthoek is tevens parallellogram.
 - Als in een parallellogram een hoek recht is, dan is het parallellogram een rechthoek.

Theorie B Vermoedens en stellingen

Door een tekening te maken kun je een vermoeden krijgen over een meetkundige eigenschap. Maar een vermoeden wordt pas een stelling als er een bewijs is geleverd. Lukt het niet om een vermoeden te bewijzen, dan kun je je afvragen of het vermoeden klopt. Het geven van slechts één **tegenvoorbeeld** is voldoende om aan te tonen dat het vermoeden niet juist is.



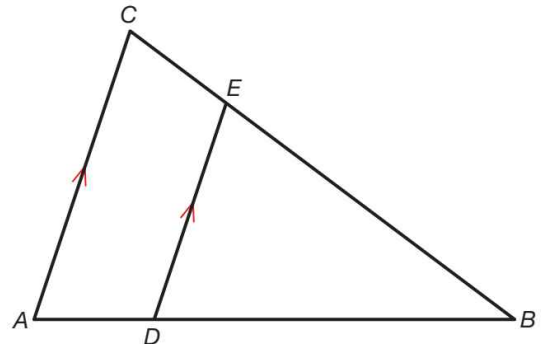
figuur 7.6

De stellingen over de gelijke F-hoeken en gelijke Z-hoeken zijn geformuleerd als een **als-dan-bewering**. Hierbij is de ene stelling de omkering van de andere stelling. Een stelling waarvan de omkering ook waar is, heet een **omkeerbare stelling**.

- 7 Geef bij elk van de volgende vermoedens een tegenvoorbeeld.
- Een vierhoek waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan is een ruit.
 - In een vierhoek is een buitenhoek gelijk aan een derde deel van de som van de niet-aanliggende binnenhoeken.
- 8 Welke van de volgende stellingen zijn omkeerbaar? Formuleer de omkering van de stelling in het geval de stelling omkeerbaar is, geef in het andere geval een tegenvoorbeeld.
- Als een vierhoek een rechthoek is, dan zijn de diagonalen even lang.
 - Als een vierhoek een parallellogram is, dan delen de diagonalen elkaar middendoor.
 - Als een vierhoek een ruit is, dan is de vierhoek lijnsymmetrisch.

7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken

- O 1** Zie figuur 7.7.
- Licht toe dat $\angle ABC = \angle DBE$.
 - Licht toe dat $\angle BAC = \angle BDE$.
 - Licht toe dat uit a en b volgt dat driehoek ABC gelijkvormig is met driehoek DBE .



figuur 7.7

- O 2** In deze opgave zijn van $\triangle ABC$ telkens drie zijden en/of hoeken gegeven. Geef aan of met deze gegevens één, twee of meer verschillende driehoeken zijn te tekenen. Teken in de gevallen dat er twee of meer verschillende driehoeken mogelijk zijn twee van deze driehoeken. Gebruik hierbij ook een passer.
- $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$ en $BC = 7 \text{ cm}$
 - $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$ en $\angle A = 90^\circ$
 - $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ en $\angle A = 50^\circ$
 - $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$ en $\angle A = 50^\circ$
 - $AB = 5 \text{ cm}$, $\angle B = 70^\circ$ en $\angle C = 60^\circ$
 - $AB = 5 \text{ cm}$, $\angle A = 50^\circ$ en $\angle B = 70^\circ$
 - $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ en $\angle C = 60^\circ$

Theorie A Gelijkvormige en congruente driehoeken

In opgave 1 heb je te maken met de **gelijkvormige driehoeken** ABC en DBE .

Notatie: $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.

In figuur 7.8 geldt

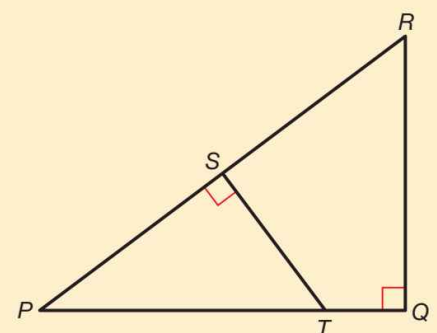
$\angle P$ in $\triangle PQR$ en $\angle P$ in $\triangle PST$ zijn gelijk

$\angle Q$ in $\triangle PQR$ en $\angle S$ in $\triangle PST$ zijn gelijk (beide 90°)

en hieruit volgt $\triangle PQR \sim \triangle PST$.

Je hebt hier te maken met het **gelijkvormigheidskenmerk** hh, dat wil zeggen dat de driehoeken twee paar hoeken gelijk hebben.

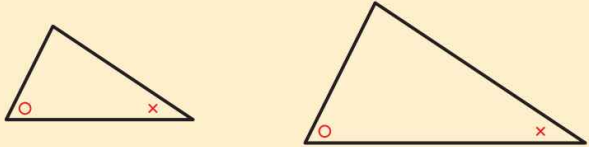
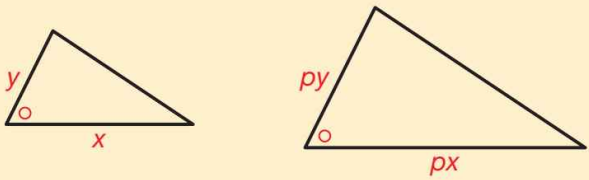
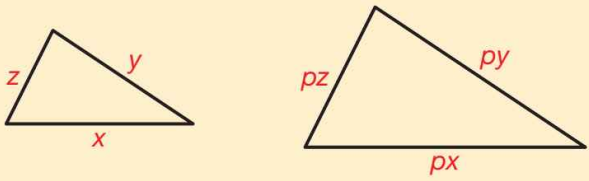
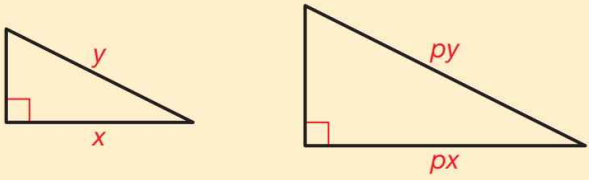
Bij het aantonen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn, noteer je het gelijkvormigheidskenmerk. Er zijn vier gelijkvormigheidskenmerken.



figuur 7.8

Gelijkvormigheidskenmerken noteer je met kleine letters.

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben

twee hoeken (<i>hh</i>)	
een hoek en de verhouding van de omliggende zijden (<i>zhz</i>)	
de verhouding van de zijden (<i>zzz</i>)	
een rechte hoek en de verhouding van twee niet-omliggende zijden (<i>zzr</i>)	

Zijn van een driehoek drie zijden en/of hoeken gegeven, dan ligt in een aantal gevallen de driehoek vast. In opgave 2 heb je hiervan enkele voorbeelden gezien.

De driehoek ABC met $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ en $\angle C = 60^\circ$ en de driehoek PQR met $\angle P = 50^\circ$, $\angle Q = 70^\circ$ en $\angle R = 60^\circ$ zijn gelijkvormig maar hoeven niet even groot te zijn.

De driehoek ABC met $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm en $\angle B = 75^\circ$ en de driehoek PQR met $PQ = 4$ cm, $QR = 3$ cm en $\angle Q = 75^\circ$ zijn niet alleen gelijkvormig maar ook even groot.

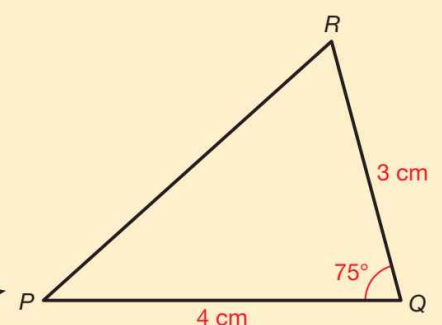
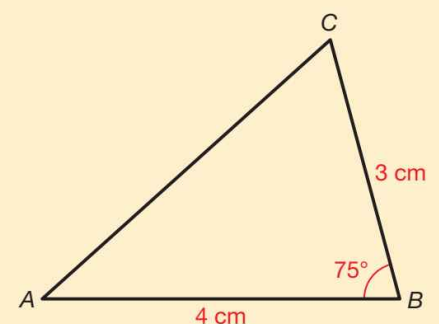
Je hebt te maken met **congruente driehoeken**.

Ook de naam **gelijke driehoeken** wordt gebruikt.

Notatie: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

Van de driehoeken ABC en PQR zijn twee zijden en de ingesloten hoek gelijk. Dit **congruentiekenmerk** wordt met ZHZ aangegeven. Let hierbij op de volgorde van de letters.

Bij ZHZ wordt een Hoek ingesloten door twee Zijden.



figuur 7.9 De driehoeken ABC en PQR zijn congruent.

Uit de congruentie van twee driehoeken volgt dat ook de overige overeenkomstige zijden en hoeken aan elkaar gelijk zijn.

Bij het aantonen dat twee driehoeken congruent zijn, noteer je het congruentiekenmerk. Er zijn vijf congruentiekenmerken.

Congruentiekenmerken
noteer je met hoofdletters.

Twee driehoeken zijn congruent (gelijk) als ze gelijk hebben

een zijde en twee aanliggende hoeken (HZH)	
een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek (ZHH)	
twee zijden en de ingesloten hoek (ZHZ)	
alle zijden (ZZZ)	
twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden (ZZR)	

Definities van een gelijkbenige driehoek en van een gelijkzijdige driehoek.

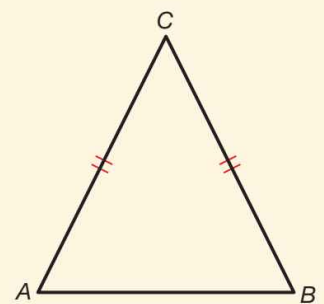
- Een **gelijkbenige driehoek** is een driehoek met (minstens) twee even lange zijden.
- Een **gelijkzijdige driehoek** is een driehoek met drie even lange zijden.

Uitgaande van deze definities en de definities van de voorkennis bewijs je met behulp van een gelijkvormigheidskenmerk of een congruentiekenmerk enkele stellingen over driehoeken, parallellogrammen, ruiten en rechthoeken. Zie het voorbeeld en de opgaven 3 tot en met 7.

Voorbeeld

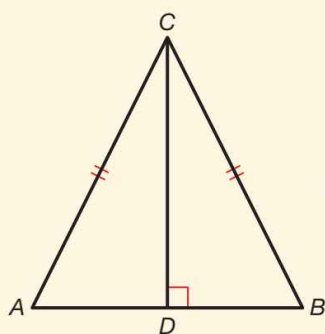
Bewijs de volgende stelling.

In een gelijkbenige driehoek zijn de hoeken tegenover de even lange zijden even groot. Ga uit van driehoek ABC in figuur 7.10.



figuur 7.10

Uitwerking



Teken CD loodrecht op AB .

$AC = BC$ (gegeven)

$CD = CD$

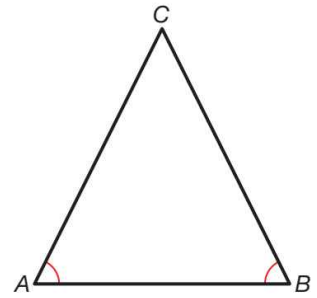
$\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$

$\left. \begin{array}{l} AC = BC \text{ (gegeven)} \\ CD = CD \\ \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ADC \cong \triangle BDC \text{ (ZZR)}$

Uit $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ volgt $\angle A = \angle B$.

3 [► WERKBLAD] Bewijs de volgende stelling.

Als in een driehoek twee hoeken even groot zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden even lang. Ga uit van driehoek ABC in figuur 7.11.



figuur 7.11

4 Bewijs de volgende stellingen over gelijkzijdige driehoeken.

- a In een gelijkzijdige driehoek zijn alle drie de hoeken even groot.
- b Als een driehoek drie even grote hoeken heeft, dan is de driehoek gelijkzijdig.

5 Bewijs de volgende stellingen over parallellogrammen. Ga telkens uit van de definitie van een parallellogram.

- a In een parallellogram zijn de overstaande zijden even lang.
- b Als een vierhoek twee paar even lange overstaande zijden heeft, dan is de vierhoek een parallellogram.
- c Als een vierhoek twee overstaande zijden heeft die even lang en evenwijdig zijn, dan is de vierhoek een parallellogram.
- d In een parallellogram zijn de overstaande hoeken even groot.
- e Als in een vierhoek de twee paar overstaande hoeken even groot zijn, dan is de vierhoek een parallellogram.
- f In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.
- g Als in een vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, dan is de vierhoek een parallellogram.

Definitie

Een parallellogram is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden.

6 Bewijs de volgende stellingen over ruiten.

- a Een ruit is tevens parallellogram.
- b In een ruit delen de diagonalen de hoeken middendoor. Gebruik de stelling van vraag a.
- c Als in een parallellogram een diagonaal een hoek middendoor deelt, dan is het parallellogram een ruit.
- d In een ruit snijden de diagonalen elkaar loodrecht. Gebruik de stelling van vraag a.
- e Als in een parallellogram de diagonalen elkaar loodrecht snijden, dan is het parallellogram een ruit.

Definitie

Een ruit is een vierhoek met vier even lange zijden.

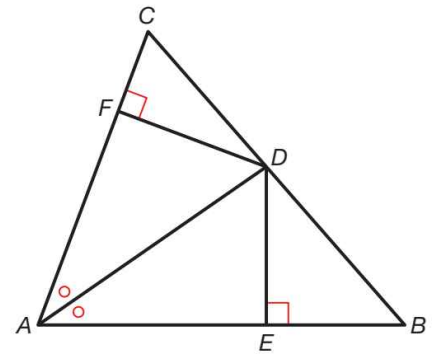
7 Bewijs de volgende stellingen over rechthoeken.

- a In een rechthoek zijn de diagonalen even lang.
- b Als in een parallellogram de diagonalen even lang zijn, dan is het parallellogram een rechthoek.

Definitie

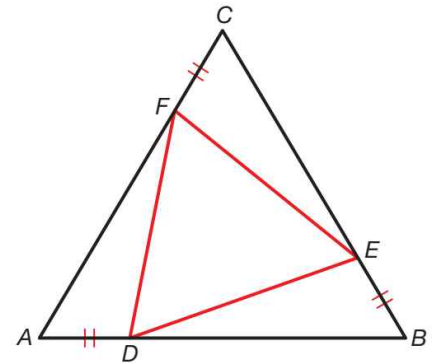
Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken.

- 8** [▶ WERKBLAD] Gegeven is driehoek ABC . Het punt D ligt op BC zo, dat $\angle BAD = \angle CAD$. Het punt E ligt op AB zo, dat $\angle AED = 90^\circ$ en het punt F ligt op AC zo, dat $\angle AFD = 90^\circ$. Zie figuur 7.12. Bewijs dat $DE = DF$.



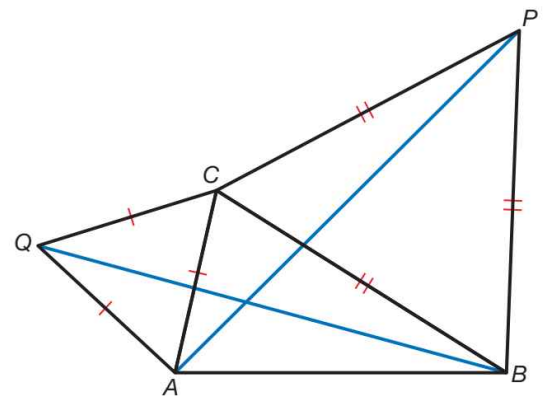
figuur 7.12

- A 9** [▶ WERKBLAD] Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC . Punt D ligt op AB , punt E ligt op BC en punt F ligt op AC zo, dat $AD = BE = CF$. Zie figuur 7.13. Bewijs dat driehoek DEF gelijkzijdig is.



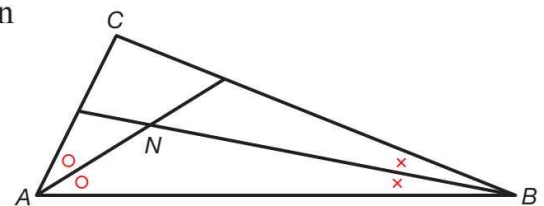
figuur 7.13

- A 10** [▶ WERKBLAD] Gegeven is driehoek ABC met de gelijkzijdige driehoeken BCP en ACQ . Zie figuur 7.14. Bewijs dat $AP = BQ$.



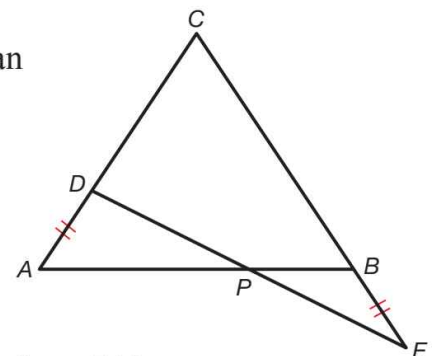
figuur 7.14

- A 11** [▶ WERKBLAD] De bissectrices (deellijnen) van de hoeken A en B in driehoek ABC snijden elkaar in het punt N . Zie figuur 7.15. Bewijs dat $\angle ANB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$.



figuur 7.15

- D 12** [▶ WERKBLAD] Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$. Op de zijde AC ligt het punt D en op het verlengde van de zijde CB ligt het punt E zo, dat $AD = BE$. Zie figuur 7.16. Bewijs dat $DP = EP$. Gebruik een hulplijn door D evenwijdig met AB of een hulplijn door E evenwijdig met AC .



figuur 7.16

Terugblik

Gelijkvormige en congruente driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben

- twee hoeken (hh)
- een hoek en de verhouding van de omliggende zijden (zhz)
- de verhouding van de zijden (zzz)
- een rechte hoek en de verhouding van twee niet-omliggende zijden (zzr).

De vier gelijkvormigheidskenmerken zijn dus hh, zhz, zzz en zzr.

Twee driehoeken zijn congruent (gelijk) als ze gelijk hebben

- een zijde en twee aanliggende hoeken (HZH)
- een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek (ZHH)
- twee zijden en de ingesloten hoek (ZHZ)
- alle zijden (ZZZ)
- twee zijden en de rechte hoek tegenover een van die zijden (ZZR).

De vijf congruentiekenmerken zijn dus HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ en ZZR.

Met de gelijkvormigheidskenmerken en de congruentiekenmerken zijn veel eigenschappen van de gelijkbenige driehoek, de gelijkzijdige driehoek, het parallellogram, de ruit en de rechthoek bewezen.

Een stelling bewijzen

Om de stelling

Elk punt met gelijke afstanden tot de benen van een hoek ligt op de bissectrice van die hoek.

te bewijzen, gebruiken we de figuur hiernaast.

Omdat

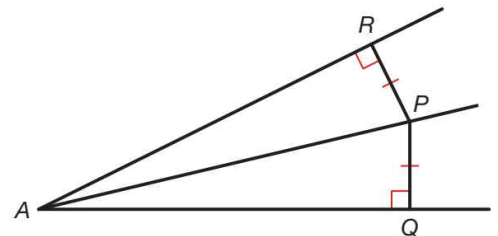
$$AP = AP$$

$$PQ = PR \text{ (gegeven)}$$

$$\angle Q = \angle R = 90^\circ$$

is $\triangle APQ \cong \triangle APR$ (ZZR), en hieruit volgt dat $\angle PAQ = \angle PAR$.

Dus P ligt op de bissectrice van $\angle A$.



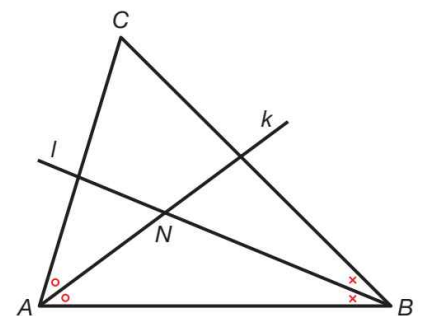
We gebruiken de omkering van deze stelling om te bewijzen dat de bissectrices van een driehoek elkaar in één punt snijden.

Zie de figuur hiernaast met driehoek ABC en de bissectrices k en l , die elkaar snijden in het punt N .

$$\left. \begin{array}{l} N \text{ op } k, \text{ dus } d(N, AB) = d(N, AC) \\ N \text{ op } l, \text{ dus } d(N, AB) = d(N, BC) \end{array} \right\} d(N, AC) = d(N, BC)$$

Dus N ligt op de bissectrice van $\angle C$.

Conclusie: de drie bissectrices gaan door één punt.

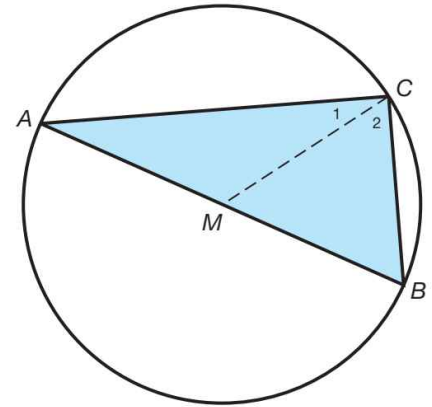


7.2 Bewijzen in cirkels

O13 Zie de cirkel met middelpunt M en middellijn AB in figuur 7.17.

Vul in.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = \dots \\ AM = CM, \text{ dus } \angle A = \dots \\ BM = CM, \text{ dus } \angle B = \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = \dots \\ \text{dus } 2 \cdot \angle C_{12} = \dots \\ \text{dus } \angle C_{12} = \dots \end{array}$$



figuur 7.17

Theorie A De stelling van Thales

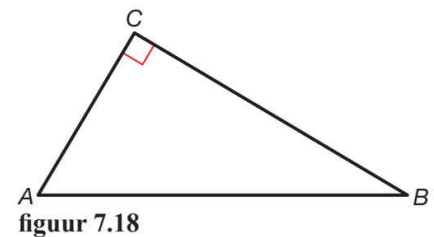
In opgave 13 heb je de **stelling van Thales** bewezen.

- Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht (**Thales**).

In opgave 14 ga je de omgekeerde stelling van Thales bewijzen.

- Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB (**Thales**).

14 Bij het bewijs van de omgekeerde stelling van Thales gaan we uit van figuur 7.18. Hierin is driehoek ABC getekend met $\angle C = 90^\circ$.



figuur 7.18

a Neem het volgende bewijs over en vul het verder in. Teken het midden M van AB en $MN \perp BC$. Zie figuur 7.19.

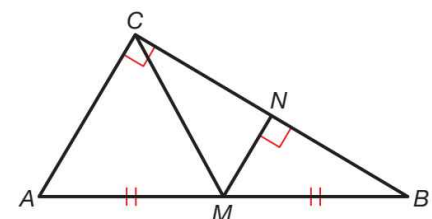
$$\left. \begin{array}{l} \angle ABC = \angle MBN \\ \angle ACB = \angle MNB = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \dots$$

Uit $\triangle ABC \sim \dots$ en M is het midden van AB volgt dat N het midden is van BC , dus $BN = CN$.

$$\left. \begin{array}{l} BN = CN \\ MN = MN \\ \angle MNB = \angle MNC = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle BMN \cong \dots$$

Uit $\triangle BMN \cong \dots$ volgt dat $BM = CM$, dus ...

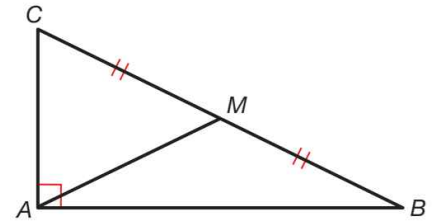
b Er is ook een bewijs van de omgekeerde stelling van Thales dat gebruik maakt van de rechthoek $ADBC$. Geef dit bewijs.



figuur 7.19

15 [► WERKBLAD] Bewijs de volgende stelling.

In een rechthoekige driehoek is het lijnstuk dat het hoekpunt van de rechte hoek verbindt met het midden van de tegenoverliggende zijde gelijk aan de helft van die zijde. Gebruik figuur 7.20.

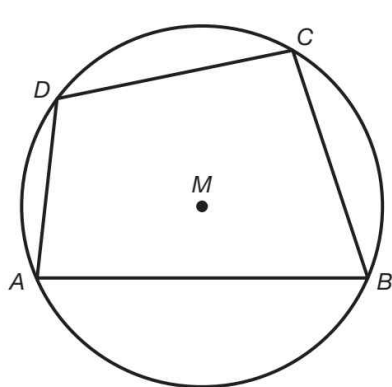
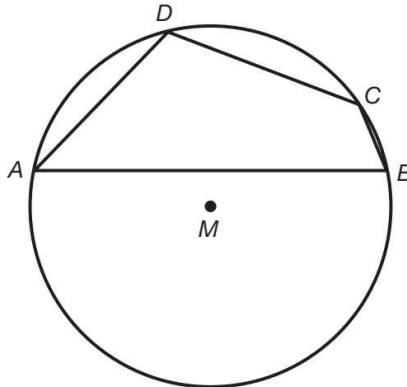
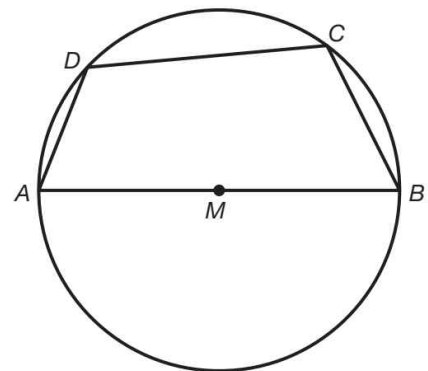


figuur 7.20

16 [► WERKBLAD] Gegeven is vierhoek $ABCD$ waarvan de vier hoekpunten op één cirkel liggen. Je gaat bewijzen dat in zo'n vierhoek overstaande hoeken samen 180° zijn.

We beginnen met het geval dat het middelpunt M van de cirkel *binnen* de vierhoek ligt. Zie figuur 7.21.

- Bewijs dat $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Gebruik vier gelijkbenige driehoeken en de hoekensom vierhoek.
- Neem het middelpunt M van de cirkel *buiten* de vierhoek en bewijs dat overstaande hoeken samen 180° zijn.
- Neem het middelpunt M van de cirkel *op een zijde* van de vierhoek en bewijs dat overstaande hoeken samen 180° zijn.

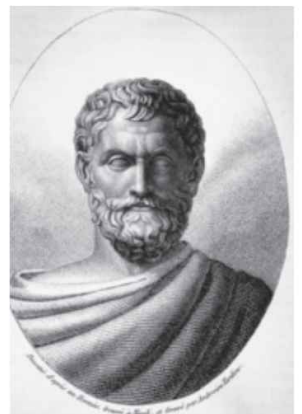
figuur 7.21 M ligt binnen de vierhoek.figuur 7.22 M ligt buiten de vierhoek.figuur 7.23 M ligt op een zijde van de vierhoek.

Geschiedenis Thales van Milete

Thales van Milete (ca. 624-547 v.Chr.) leefde in Milete, een plaats in het huidige Turkije. Men veronderstelt dat Thales de grondlegger is van een logische opbouw in de meetkunde en dat hij, naast de naar hem vernoemde stelling, de volgende stellingen bewees.

- Een cirkel wordt in twee gelijke delen verdeeld door elke middellijn.
- Een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken.
- Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.
- Twee driehoeken zijn congruent als ze twee hoeken en een zijde gelijk hebben.

Verder is hij waarschijnlijk de eerste die gebruik maakte van gelijkvormige driehoeken.



Theorie B Koordenvierhoeken

Van de vierhoeken in opgave 16 liggen de vier hoekpunten op één cirkel. Zo'n vierhoek heet een **koordenvierhoek**.

Definitie koordenvierhoek.

- Een **koordenvierhoek** is een vierhoek waarbij een cirkel bestaat die door de hoekpunten van de vierhoek gaat.

In opgave 16 heb je voor alle denkbare koordenvierhoeken $ABCD$ de volgende stelling bewezen.

- De som van een paar overstaande hoeken van een **koordenvierhoek** is 180° .

Het bekijken van de verschillende situaties was nodig omdat je bij het bewijs gebruik hebt gemaakt van de ligging van het punt M ten opzichte van de andere punten. Dit leidde tot verschillende bewijzen.

Je hebt hier te maken met **gevals onderscheiding**.

We gaan nu de omkering van de koordenvierhoekstelling bewijzen.

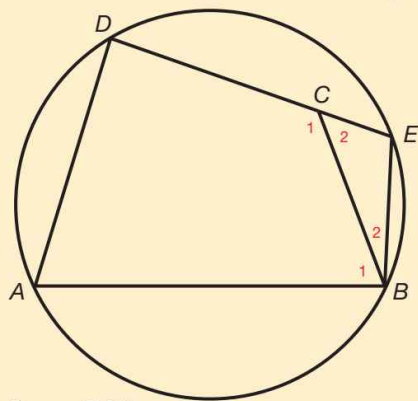
- Als de som van een paar overstaande hoeken van een vierhoek 180° is, dan is de vierhoek een **koordenvierhoek**.

We gaan als volgt te werk.

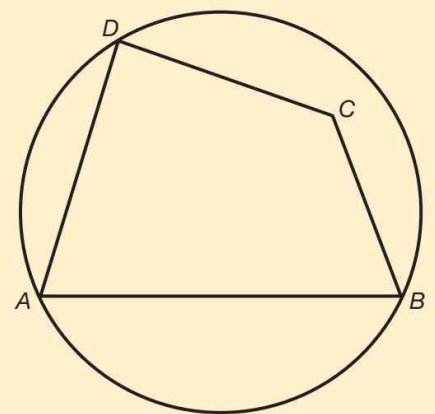
In figuur 7.24 ligt het punt C binnen de cirkel door A , B en D .

We bewijzen in deze situatie dat $\angle A + \angle C > 180^\circ$ is.

Verleng DC . Omdat C binnen de cirkel ligt, snijdt het verlengde van DC de cirkel. Noem het snijpunt met de cirkel E en teken BE . Zie figuur 7.25.



figuur 7.25



figuur 7.24

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle E = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle B_2 + \angle C_2 + \angle E = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array} \right\} \angle A = \angle B_2 + \angle C_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B_2 + \angle C_2 \\ \angle C_2 = 180^\circ - \angle C_1 \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle A = \angle B_2 + 180^\circ - \angle C_1 \\ \angle A + \angle C_1 = \angle B_2 + 180^\circ > 180^\circ \end{array}$$

Dus in vierhoek $ABCD$ in figuur 7.24 is $\angle A + \angle C > 180^\circ$.

In opgave 17 ga je bewijzen dat in het geval het punt C buiten de cirkel door A , B en D ligt, geldt $\angle A + \angle C < 180^\circ$.

Uit

als C binnen de cirkel door A , B en D ligt, geldt $\angle A + \angle C > 180^\circ$

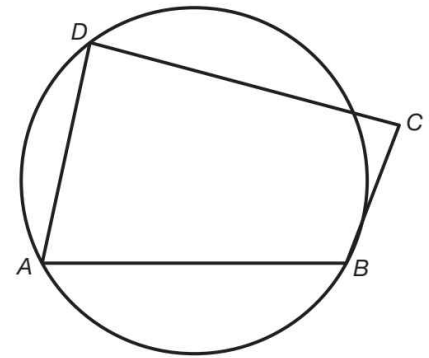
en

als C buiten de cirkel door A , B en D ligt, geldt $\angle A + \angle C < 180^\circ$

volgt dat C op de cirkel ligt als $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

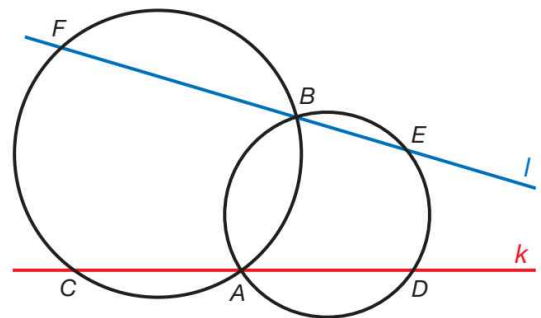
Hiermee is de omgekeerde koordenvierhoekstelling bewezen.

- 17** [► WERKBLAD] Gegeven zijn de punten A , B en D en de cirkel door deze punten. Van vierhoek $ABCD$ ligt het punt C buiten deze cirkel. Zie figuur 7.26. Bewijs dat in vierhoek $ABCD$ geldt $\angle A + \angle C < 180^\circ$.



figuur 7.26

- 18** [► WERKBLAD] Gegeven zijn twee cirkels die elkaar snijden in de punten A en B . De lijn k gaat door A en de lijn l gaat door B . De punten C , D , E en F zijn snijpunten van k en l met de cirkels. Zie figuur 7.27. Bewijs dat $CF \parallel DE$.



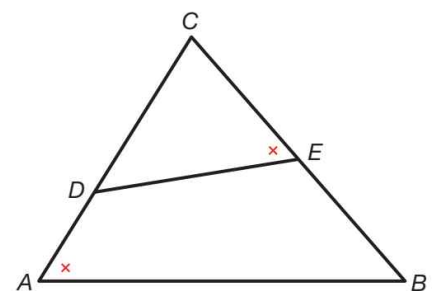
figuur 7.27

- 19** [► WERKBLAD] In opgave 18 heb je voor de situatie in figuur 7.27 bewezen dat $CF \parallel DE$ is. Door de lijn l zo om B te draaien dat E tussen A en D komt, ontstaat een andere situatie. Wat denk je, geldt in deze situatie $CF \parallel DE$? Bewijs je vermoeden of geef een tegenvoorbeeld.

- A20** [► WERKBLAD] In figuur 7.28 is in $\triangle ABC$ een lijnstuk DE getekend zo, dat $\angle CED = \angle A$.

a Bewijs dat $ABED$ een koordenvierhoek is.

b Teken een driehoek PQR met de hoogtelijnen PS en QT en bewijs dat $\angle PQR = \angle STR$.

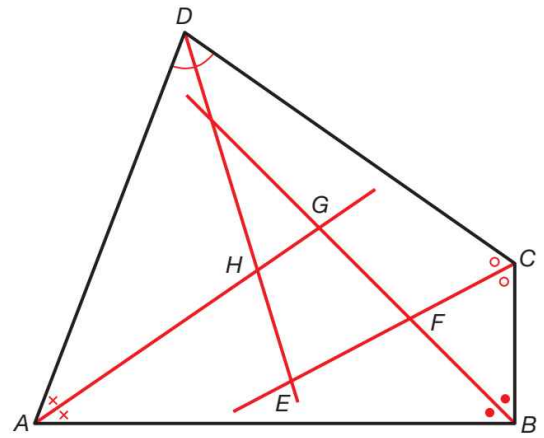


figuur 7.28

- A21** Gegeven is $\triangle ABC$ met punt P op zijde AB , punt Q op zijde BC en punt R op zijde AC . De cirkel c_1 gaat door A , P en R , de cirkel c_2 door B , P en Q en de cirkel c_3 door C , Q en R .

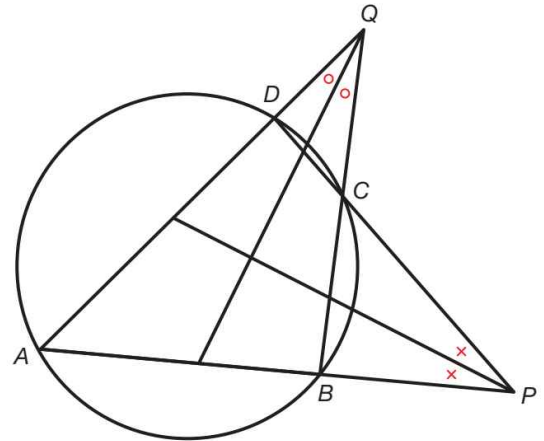
Bewijs dat c_1 , c_2 en c_3 door één punt gaan. Beperk je bij het bewijs tot het geval dat dit punt binnen de driehoek ligt.

- A 22** [► WERKBLAD] Gegeven is vierhoek $ABCD$ met de bissectrices van de hoeken. Deze bissectrices sluiten vierhoek $EFGH$ in. Zie figuur 7.29. Bewijs dat $EFGH$ een koordenvierhoek is.



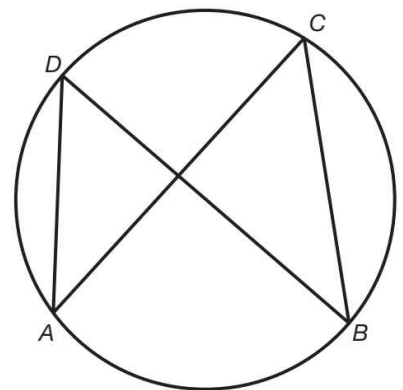
figuur 7.29

- A 23** [► WERKBLAD] Gegeven is de koordenvierhoek $ABCD$. De lijnen AB en CD snijden elkaar in P en de lijnen AD en BC snijden elkaar in Q . Zie figuur 7.30. Bewijs dat de bissectrices van de hoeken P en Q elkaar loodrecht snijden.



figuur 7.30

- O 24** [► WERKBLAD] Gegeven is een cirkel met daarop de punten A, B, C en D zoals in figuur 7.31. In deze opgave ga je bewijzen dat $\angle ACB = \angle ADB$.
- Teken een punt E op de cirkelboog AB onder koorde AB .
 - Licht toe dat $\angle ACB + \angle AEB = 180^\circ$ en ook dat $\angle ADB + \angle AEB = 180^\circ$.
 - Licht toe dat uit b volgt dat $\angle ACB = \angle ADB$.



figuur 7.31

Theorie C Stelling van de constante hoek

In opgave 24 heb je de stelling van de **constante hoek** bewezen.

- Als punt C over een cirkelboog AB tussen de punten A en B beweegt, dan verandert de grootte van de omtrekshoek ACB niet (**constante hoek**).

De stelling van de constante hoek is omkeerbaar.

- Als punt D aan dezelfde kant van AB ligt als punt C en de hoeken ADB en ACB zijn even groot, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB (**constante hoek**).

De omgekeerde stelling van de constante hoek bewijs je in opgave 25.

Voor het vervolg is het nodig precies af te spreken wat we bedoelen met een **koorde van een cirkel**, een **middelpuntshoek van een cirkel** en een **omtrekshoek van een cirkel**.

- Een **koorde** van een cirkel is een lijnstuk waarvan de eindpunten op de cirkel liggen.
- Een **middelpuntshoek** van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt het middelpunt van de cirkel is.
- Een **omtrekshoek** van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en de benen de cirkel snijden.

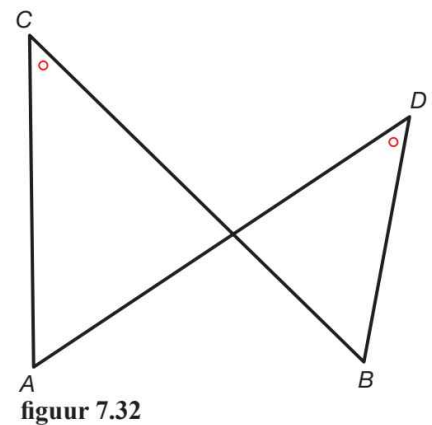
In opgave 26 ga je de stelling van de omtrekshoek bewijzen.

- Een **omtrekshoek** is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die dezelfde koorde insluit als die omtrekshoek (**omtrekshoek**).

In opgave 27 ga je de stelling van boog en koorde bewijzen. Daarbij gebruik je dat bij gelijke middelpuntshoeken gelijke bogen horen.

- In een cirkel behoren gelijke bogen bij gelijke koorden (**boog en koorde**).

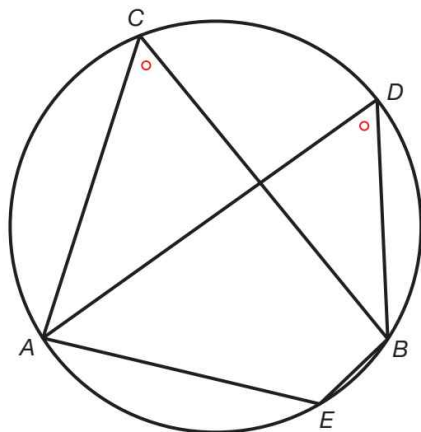
25 [► WERKBLAD] In deze opgave ga je de omgekeerde stelling van de constante hoek bewijzen. Ga uit van figuur 7.32 en bewijs dat C en D op dezelfde cirkelboog liggen.



Het bewijs begint als volgt.

Teken de cirkel door de punten A , B en C .

Teken een punt E op de boog AB waar C niet op ligt.



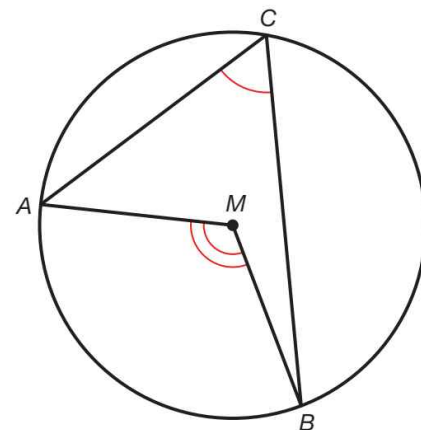
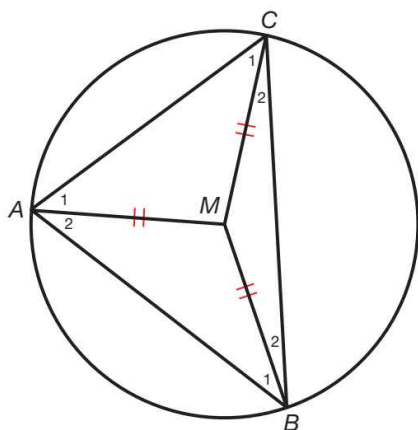
- Maak het bewijs af.
- De omgekeerde stelling van de constante hoek wordt ook wel als volgt geformuleerd.

Als in vierhoek $ABCD$ geldt $\angle ACB = \angle ADB$, dan is $ABCD$ een koordenvierhoek.

Licht toe dat dit inderdaad op hetzelfde neerkomt.

- 26** [►WERKBLAD] In deze opgave ga je de stelling van de omtrekshoek bewijzen. Gebruik hierbij figuur 7.33.

a Teken AB en CM .



figuur 7.33

Druk eerst $\angle AMC$ uit in $\angle C_1$ en $\angle BMC$ uit in $\angle C_2$.

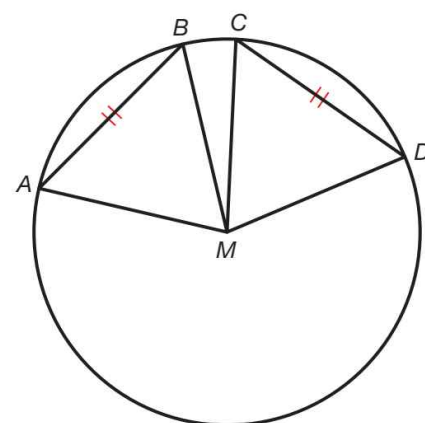
Maak vervolgens het bewijs af.

- b In het geval AB middellijn is van de cirkel lukt het bewijs op de manier van vraag a niet.

Geef het bewijs in deze situatie.

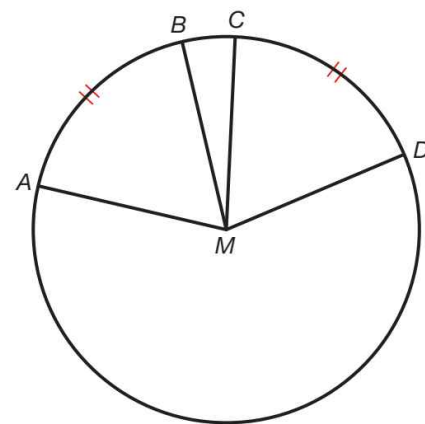
- 27** [►WERKBLAD] In deze opgave ga je de stelling van boog en koorde bewijzen.

- a Bewijs dat in een cirkel bij gelijke koorden gelijke bogen horen. Gebruik figuur 7.34a.



a

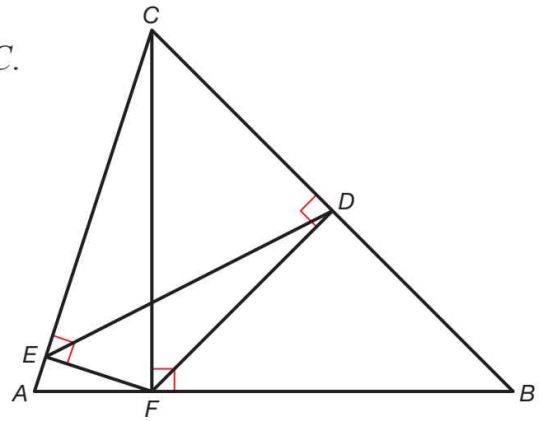
- b Bewijs dat bij gelijke bogen gelijke koorden horen. Gebruik figuur 7.34b.



b

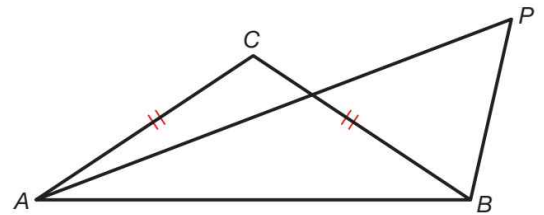
figuur 7.34

- 28** [► WERKBLAD] In figuur 7.35 is in driehoek ABC de hoogtelijn CF getekend. Verder is $FD \perp BC$ en $FE \perp AC$. Bewijs dat $\angle CDE = \angle A$.



figuur 7.35

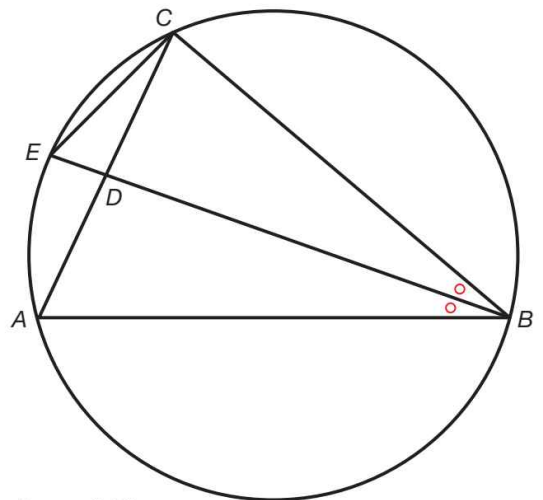
- 29** [► WERKBLAD] Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$. Het punt P met $\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB$ ligt aan dezelfde kant van AB als C . Zie figuur 7.36. Bewijs dat $BC = CP$.



figuur 7.36

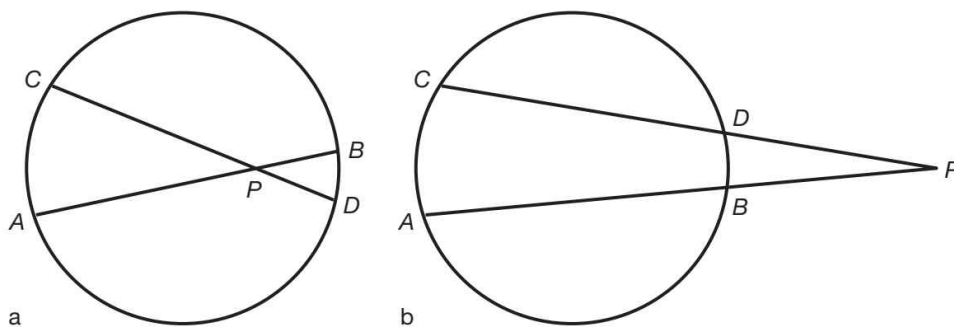
- 30** [► WERKBLAD] Gegeven is driehoek ABC met zijn omschreven cirkel. De bissectrice van hoek B snijdt AC in D en de cirkel in E . Zie figuur 7.37. Bewijs dat $CE^2 = BE \cdot DE$. Gebruik gelijkvormige driehoeken.

Bij het bewijzen van de gelijkheid van producten van lijnstukken gebruik je gelijkvormige driehoeken en het gelijkvormigheidskenmerk hh.



figuur 7.37

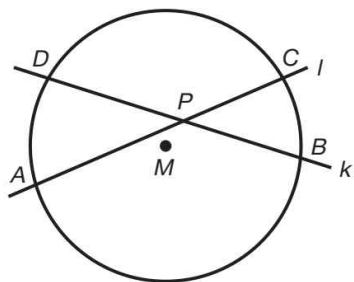
- A31** [► WERKBLAD] Gegeven is een cirkel met daarop de punten A, B, C en D . De lijnen AB en CD snijden elkaar in punt P .



figuur 7.38

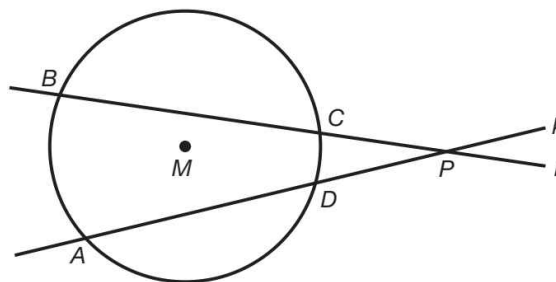
- a** Bewijs $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ in het geval P binnen de cirkel ligt.
b Bewijs $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ in het geval P buiten de cirkel ligt.

- A 32** a [▶WERKBLAD] Bewijs dat in figuur 7.39a geldt $\angle APB = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$.



a

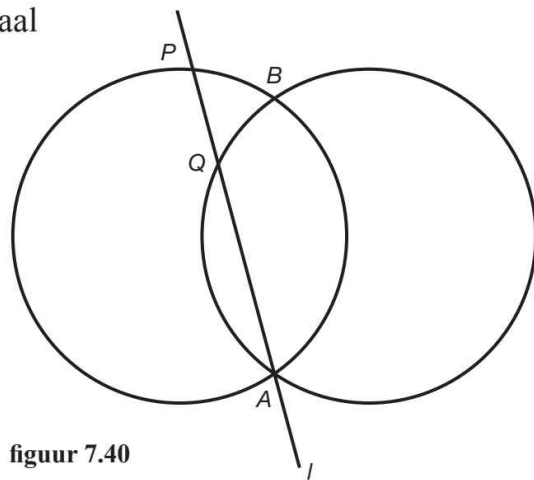
figuur 7.39



b

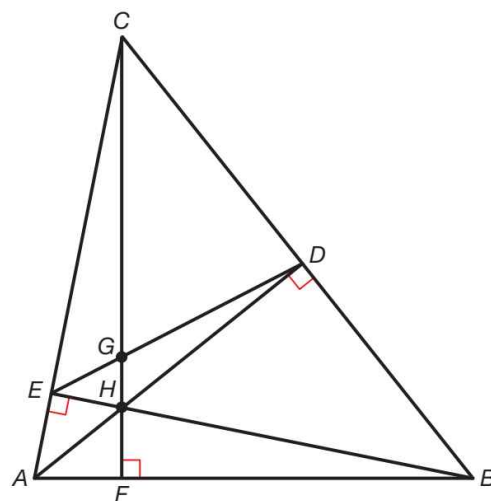
- b [▶WERKBLAD] Bewijs dat in figuur 7.39b geldt $\angle APB = \frac{1}{2}(\angle AMB - \angle CMD)$.

- A 33** [▶WERKBLAD] Gegeven zijn twee cirkels met gelijke straal die elkaar snijden in A en B. De lijn l gaat door A en snijdt de cirkels in P en Q. Zie figuur 7.40. Bewijs dat driehoek BPQ gelijkbenig is.



figuur 7.40

- D 34** [▶WERKBLAD] Gegeven is de scherphoekige driehoek ABC met de hoogtelijnen AD, BE en CF. De hoogtelijnen snijden elkaar in het punt H. De hoogtelijn CF snijdt het lijnstuk DE in het punt G. Zie figuur 7.41. Bewijs dat $CG \cdot GH = DG \cdot GE$.



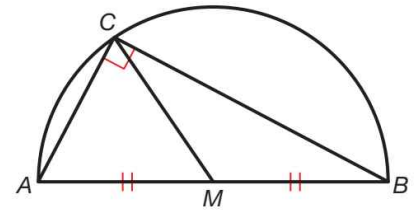
figuur 7.41

Terugblik

De stelling van Thales

Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht (stelling van Thales).

Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB (omgekeerde stelling van Thales).



Koordenvierhoeken

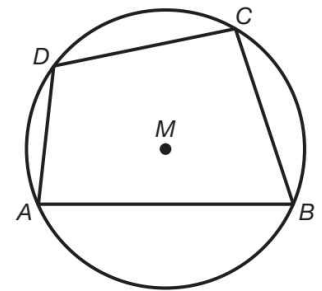
Een koordenvierhoek is een vierhoek waarbij een cirkel bestaat die door de hoekpunten van de vierhoek gaat.

Koordenvierhoekstelling:

De som van een paar overstaande hoeken van een koordenvierhoek is 180° .

Omgekeerde koordenvierhoekstelling:

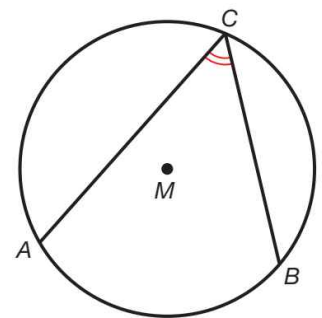
Als de som van een paar overstaande hoeken van een vierhoek 180° is, dan is de vierhoek een koordenvierhoek.



De stelling van de constante hoek

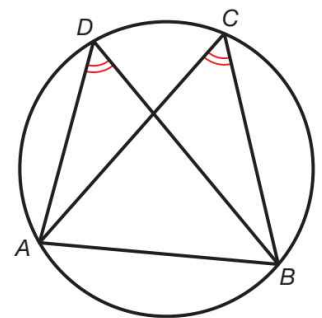
Stelling van de constante hoek:

Als punt C over een cirkelboog AB tussen de punten A en B beweegt, dan verandert de grootte van de omtrekshoek ACB niet.



Omgekeerde stelling van de constante hoek:

Als punt D aan dezelfde kant van AB ligt als punt C en de hoeken ADB en ACB zijn even groot, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB .



Uit deze laatste stelling volgt:

Als in vierhoek $ABCD$ geldt $\angle ADB = \angle ACB$, dan is $ABCD$ een koordenvierhoek.

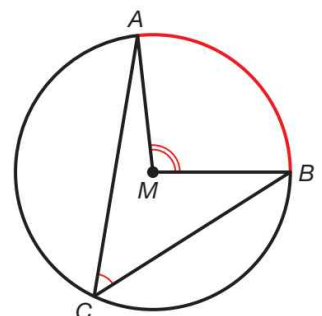
De stelling van de omtrekshoek

In de figuur hiernaast is $\angle ACB$ een omtrekshoek op (cirkel)boog AB .

Verder is de bijbehorende middelpuntshoek AMB aangegeven.

Volgens de stelling van de omtrekshoek is elke omtrekshoek half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.

In de figuur hiernaast is dus $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB$.



7.3 Volledige inductie

O35

Gegeven is de formule $A = 7^n + 3^{n+1}$.

Bewering: A is deelbaar door 4 voor elk natuurlijk getal n .

a Onderzoek voor enkele waarden van n of A deelbaar is door 4.

Gegeven is dat $7^{200} + 3^{201}$ deelbaar is door 4. Hiermee ga je aantonen dat $7^{201} + 3^{202}$ ook deelbaar is door 4.

Er geldt $7^{201} + 3^{202} = 7 \cdot 7^{200} + 3 \cdot 3^{201}$.

b Licht dit toe.

c Licht toe dat $7 \cdot 7^{200} + 3 \cdot 3^{201} = 7 \cdot (7^{200} + 3^{201}) - 4 \cdot 3^{201}$.

d Hoe volgt uit c en het gegeven dat $7^{200} + 3^{201}$ deelbaar is door 4, dat $7^{201} + 3^{202}$ deelbaar is door 4?

e Toon aan dat $7^{202} + 3^{203}$ ook deelbaar is door 4.

Theorie A Het domino-effect

In opgave 35 heb je gezien dat je kunt aantonen dat

$7^{201} + 3^{202}$ deelbaar is door 4 als gegeven is dat

$7^{200} + 3^{201}$ deelbaar is door 4. Je kunt zelfs bewijzen dat

$7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4 voor elk natuurlijk getal n .

Hiervoor wordt een **bewijs met volledige inductie** gebruikt.

Bewijs met volledige inductie

- 1 Bewijs dat de bewering waar is voor $n = 0$.
- 2 Neem aan dat de bewering waar is voor een natuurlijk getal p en bewijs dat de bewering dan ook waar is voor het getal $p + 1$.
- 3 Trek de conclusie dat de bewering waar is voor alle natuurlijke getallen.

Punt 1 heet de **inductiebasis**. In het schema is als inductiebasis $n = 0$ gekozen. Afhankelijk van het probleem kan het ook nodig zijn om een andere waarde voor n te kiezen.

Punt 2 bestaat uit de **inductiehypothese** en de **inductiestap**.

De inductiehypothese is de aanname dat de bewering waar is voor een natuurlijk getal p . De inductiestap is het bewijs dat de bewering dan ook waar is voor het getal $p + 1$.

Men zegt wel eens dat bij het tweede punt het **domino-effect** wordt aangetoond. Bij punt 1 gooi je de eerste steen om. Het domino-effect garandeert dat, als de bewering waar is voor $n = 0$, de bewering ook waar is voor $n = 1$, als de bewering waar is voor $n = 1$, de bewering ook waar is voor $n = 2$, enzovoort.

Als bij de inductiebasis de bewering niet is bewezen voor $n = 0$ maar voor bijvoorbeeld $n = 4$, dan is na stap 2 bewezen dat de bewering waar is voor $n = 5, 6, 7, 8, \dots$ Er is dan niet bewezen dat de bewering waar is voor $n < 4$.

Om te bewijzen dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4 voor elk natuurlijk getal n gaan we als volgt te werk.

- 1 Voor $n = 0$ krijg je $7^0 + 3^1$ ofwel $1 + 3 = 4$ en dit is deelbaar door 4.
- 2 Neem aan dat de bewering waar is voor $n = p$, dus dat $7^p + 3^{p+1}$ deelbaar is door 4 en bewijs dat de bewering ook waar is voor $p + 1$, dus dat $7^{p+1} + 3^{p+2}$ deelbaar is door 4.
Er geldt

$$7^{p+1} + 3^{p+2} = 7 \cdot 7^p + 3 \cdot 3^{p+1} = 7 \cdot 7^p + 7 \cdot 3^{p+1} - 4 \cdot 3^{p+1} = 7 \cdot (7^p + 3^{p+1}) - 4 \cdot 3^{p+1}.$$
Vanwege de inductiehypothese is $7 \cdot (7^p + 3^{p+1})$ deelbaar door 4. Ook $4 \cdot 3^{p+1}$ is deelbaar door 4. Dus $7^{p+1} + 3^{p+2}$ is deelbaar door 4.
- 3 Hiermee is bewezen dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4 voor elk natuurlijk getal n .

Voorbeeld

Bewijs dat $3 \cdot 2^n > 5n + 1$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

Uitwerking

- 1 $n = 2$ geeft $3 \cdot 2^2 > 5 \cdot 2 + 1$ ofwel $12 > 11$ en dit klopt.
- 2 Neem aan dat $3 \cdot 2^p > 5p + 1$ en bewijs dat $3 \cdot 2^{p+1} > 5(p + 1) + 1$ voor $p \geq 2$.

$$3 \cdot 2^{p+1} = 3 \cdot 2^p \cdot 2^1 = 2 \cdot 3 \cdot 2^p$$
Volgens de inductiehypothese geldt $2 \cdot 3 \cdot 2^p > 2 \cdot (5p + 1)$.
Onderzoek voor welke p geldt $2(5p + 1) > 5(p + 1) + 1$

$$10p + 2 > 5p + 6$$

$$5p > 4$$

$$p > \frac{4}{5}$$
De ongelijkheid geldt dus voor $p > \frac{4}{5}$, en dus zeker voor $p \geq 2$.
- 3 Hiermee is bewezen dat $3 \cdot 2^n > 5n + 1$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

36 Bewijs dat $n! > 2^n$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 4$.

37 Bewijs dat $9^n - 1$ deelbaar is door 8 voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

A 38 Bewijs dat $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ deelbaar is door 7 voor elk natuurlijk getal n .

A 39 Bewijs dat $n^5 - n$ deelbaar is door 10 voor elk natuurlijk getal n .

A40 Bewijs de volgende differentieerregel met volledige inductie.
 $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

O41 Zoals je weet is $\sum_{k=1}^n k^3$ de sigmanotatie voor $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

a Laat met een berekening zien dat $\sum_{k=1}^5 k^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$.

De uitdrukking van vraag a is te noteren als $\sum_{k=1}^5 k^3 = \left(\sum_{k=1}^5 k\right)^2$.

b Licht dit toe.

c Licht toe dat $\sum_{k=1}^5 k = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (1 + 5)$.

d Licht toe dat $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

e Laat met een berekening zien dat $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ voor $n = 6$.

Theorie B Somformules bewijzen met volledige inductie

In opgave 41 heb je laten zien dat

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2.$$

Algemeen is $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$.

Dit wordt in het voorbeeld op de volgende bladzijde bewezen met volledige inductie.

Het linkerlid is met de sigmanotatie te noteren:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

Omdat 1, 2, 3, ... een rekenkundige rij is, is

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(1 + n) = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Hierbij is gebruikt dat voor een rekenkundige rij geldt

$$\text{som} = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term}).$$

$$\text{Dus } (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left(\frac{1}{2}n(n + 1)\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2.$$

Dit betekent dat $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

te noteren is als $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$.

Voorbeeld

Bewijs dat $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

Uitwerking

1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 k^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2$ ofwel $1 = 1$ en dit klopt.

2 Neem aan dat $\sum_{k=1}^p k^3 = \frac{1}{4}p^2(p+1)^2$ en bewijs dat $\sum_{k=1}^{p+1} k^3 = \frac{1}{4}(p+1)^2(p+2)^2$.

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^3 = \sum_{k=1}^p k^3 + (p+1)^3 = \frac{1}{4}p^2(p+1)^2 + (p+1)^3$$

Volgens de inductiehypothese.

$$= \frac{1}{4}p^2(p+1)^2 + \frac{1}{4}(4p+4)(p+1)^2$$

$$= \frac{1}{4}(p+1)^2 p^2 + \frac{1}{4}(p+1)^2(4p+4)$$

$$= \frac{1}{4}(p+1)^2(p^2 + 4p + 4) \leftarrow \text{Breng } \frac{1}{4}(p+1)^2 \text{ buiten haakjes.}$$

$$= \frac{1}{4}(p+1)^2(p+2)^2$$

3 Hiermee is het bewijs geleverd dat $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

7

42 Bewijs dat $\sum_{k=1}^n (5k-4) = \frac{1}{2}n(5n-3)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

43 Bewijs dat $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

44 Bewijs dat $\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

A 45 Bewijs dat $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

A 46 Bewijs dat $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

A 47 Bewijs met volledige inductie dat voor een meetkundige rij u_n

$$\text{geldt } \sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1-r^{n+1})}{1-r}.$$

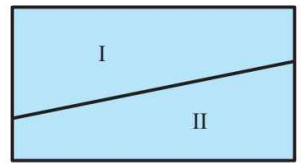
- A 48** De rij van Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... heeft allerlei verrassende eigenschappen. Zo is bijvoorbeeld $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$ en ook $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \cdot 13$. Noem je de termen van de rij f_n met $f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2$, enzovoort, dan geldt $f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ ofwel
- $$\sum_{k=0}^n f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

Bewijs deze eigenschap met volledige inductie.

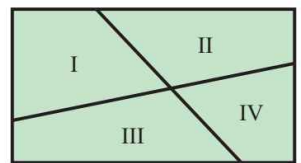
- A 49** Deze opgave gaat over lijnen in het platte vlak. De lijnen zijn niet evenwijdig en gaan niet door het snijpunt van twee andere lijnen. Omdat één lijn het vlak in twee delen verdeelt zeggen we dat $L_1 = 2$. Twee lijnen verdelen het vlak in 4 delen, dus $L_2 = 4$.
- Geef L_3, L_4 en L_5 .
 - Stel er zijn p lijnen getekend. Beredeneer dat er door het tekenen van een extra lijn $p + 1$ vlakdelen bijkomen.

Omdat de verschilrij van L_n een rekenkundige rij is, kun je vermoeden dat L_n een kwadratische rij is, dus dat L_n van de vorm $L_n = an^2 + bn + c$ is.

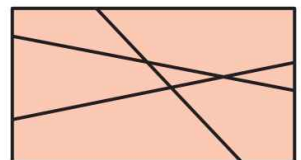
- Bereken a, b en c met behulp van de gevonden waarden van L .
- Bewijs dat de formule van L_n klopt voor elke waarde van n .



$L_1 = 2$



$L_2 = 4$



$L_3 = \dots$

figuur 7.42

- D 50** Bewijs met volledige inductie dat voor een rekenkundige rij u_n

geldt $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n).$

Terugblik

Volledige inductie

Een bewijs met volledige inductie heeft de volgende structuur.

- 1 Bewijs dat de bewering waar is voor $n = 0$ of een andere waarde van n (de inductiebasis).
- 2 Neem aan dat de bewering waar is voor een natuurlijk getal p (de inductiehypothese) en bewijs dat de bewering dan ook waar is voor het getal $p + 1$ (de inductiestap).
- 3 Trek de conclusie dat de bewering waar is voor alle natuurlijke getallen die groter zijn dan of gelijk zijn aan het getal waarvoor je bij 1 de waarheid van de bewering hebt aangetoond.

Het bewijs dat $5^n - 4n - 1$ deelbaar is door 16 voor elk natuurlijk getal n

- 1 $n = 0$ geeft $5^0 - 4 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$ en dit is deelbaar door 16.
- 2 Neem aan dat $5^p - 4p - 1$ deelbaar is door 16.
Bewijs dat $5^{p+1} - 4(p+1) - 1$ deelbaar is door 16.

$$5^{p+1} - 4(p+1) - 1 = 5^p \cdot 5 - 4p - 4 - 1 = 5 \cdot 5^p - 4p - 5 =$$

$$5 \cdot 5^p - 20p - 5 + 16p = 5(5^p - 4p - 1) + 16p$$
Wegens de inductiehypothese is $5^p - 4p - 1$ deelbaar door 16.
Ook $16p$ is deelbaar door 16, dus $5(5^p - 4p - 1) + 16p$ is deelbaar door 16.
- 3 Hiermee is bewezen dat $5^n - 4n - 1$ deelbaar is door 16 voor elk natuurlijk getal n .

Het bewijs dat $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$

- 1 $n = 1$ geeft $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1^2$ ofwel $1 = 1$ en dit klopt.
- 2 Neem aan de formule waar is voor $n = p$, dus dat $\sum_{k=1}^p (2k-1) = p^2$
 waar is en bewijs dat de formule dan ook waar is voor $n = p + 1$, dus dat

$$\sum_{k=1}^{p+1} (2k-1) = (p+1)^2.$$

$$\sum_{k=1}^{p+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^p (2k-1) + 2(p+1) - 1 = p^2 + 2p + 2 - 1 = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

Volgens de inductiehypothese.

- 3 Hiermee is bewezen dat $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

7.4 Andere bewijsmethoden

O51 De filosoof Aristoteles wordt beschouwd als een van de meest invloedrijke wetenschappers in de geschiedenis. Hij sloeg de plank echter ook wel eens mis. Zo meende hij dat zware voorwerpen sneller vallen dan lichte voorwerpen.

We gaan aantonen dat dit idee niet klopt, maar nemen voorlopig aan dat Aristoteles juist wél gelijk heeft. Vervolgens tonen we aan dat dit uitgangspunt onjuist moet zijn.

We nemen twee ballen in gedachten, een zware bal Z van 2 kg en een lichte bal L van 1 kg. Volgens Aristoteles valt Z sneller dan L. We maken de twee ballen aan elkaar vast met een draadje.

a Wat voor invloed heeft L volgens Aristoteles op Z?

De twee ballen met het draadje ertussen kunnen we ook als één nieuw voorwerp N zien.

b Zou N volgens Aristoteles sneller of langzamer moeten vallen dan Z? Licht toe.

c Vergelijk de antwoorden van a en b. Wat is je conclusie? Licht toe.



Theorie A Bewijs uit het ongerijmde

In opgave 51 heb je een voorbeeld gezien van een **bewijs uit het ongerijmde**. Bij een bewijs uit het ongerijmde neem je eerst aan dat hetgeen je wilt bewijzen niet juist is. Deze aanname heet de **negatie** (ontkenning). Vervolgens laat je zien dat de negatie leidt tot een tegenspraak of tot een conclusie die niet klopt.

Werkschema: bewijs uit het ongerijmde

- 1 Formuleer wat je wilt bewijzen.
- 2 Veronderstel dat wat je wilt bewijzen *niet* juist is (de negatie).
- 3 Toon aan dat de negatie leidt tot een tegenspraak.
- 4 Concludeer uit deze tegenspraak dat wat je wilt bewijzen juist is.

Voorbeeld

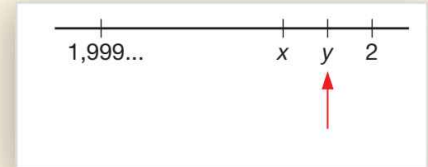
Bewijs dat er geen grootste getal in $\mathbb{R}$ bestaat dat kleiner is dan 2.

Uitwerking

- 1 Stelling: er bestaat geen grootste getal $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt $x < 2$.
- 2 Negatie: er is wel een grootste getal x waarvoor geldt $x < 2$.
- 3 Stel y is het gemiddelde van x en 2, dus $y = \frac{x+2}{2}$.

Omdat $x < 2$ geldt $x < y < 2$, en dit is in tegenspraak met de negatie.

- 4 Uit de tegenspraak volgt dat er geen grootste getal $x \in \mathbb{R}$ is waarvoor geldt $x < 2$. Hiermee is het bewijs geleverd.



figuur 7.43

- 52 Bewijs dat er geen kleinste getal in $\mathbb{R}$ bestaat dat groter is dan 0.
- 53 Bewijs dat er oneindig veel natuurlijke getallen zijn.

Informatief De hoofdstelling van de rekenkunde

Zoals je weet is een priemgetal een natuurlijk getal groter dan 1 met slechts twee delers: het getal 1 en zichzelf. De priemgetallen hebben een bijzondere plaats in de getaltheorie: het zijn de bouwstenen waarmee alle andere getallen worden gevormd. Getallen die niet priem zijn, worden samengestelde getallen genoemd. Volgens de hoofdstelling van de rekenkunde is elk samengesteld getal op precies één manier te schrijven als een product van priemgetallen.

Om aan te tonen dat dit inderdaad juist is, moeten we twee dingen bewijzen. Ten eerste moeten we aantonen dat elk samengesteld getal in priemgetallen te ontbinden is (*existentie*). Bovendien moeten we laten zien dat deze ontbinding in priemfactoren maar op één manier kan (*uniciteit*).

We beginnen met existentie.

Stel dat er samengestelde getallen zijn die geen ontbinding in priemfactoren hebben. In dat geval is er ook een kleinste samengesteld getal K waarvoor dit geldt, met $K = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$.

De factoren $k_1, k_2, \dots, k_n$ zijn kleiner dan K . Deze getallen kunnen dus wel in priemfactoren worden ontbonden of zijn zelf priem. Dit is in tegenspraak met de aanname dat K geen ontbinding in priemfactoren heeft.

Nu moeten we nog uniciteit bewijzen.

Stel, er bestaan meerdere priemontbindingen van een samengesteld getal S . Als we in beide ontbindingen eventuele gelijke factoren wegdelen, houden we over $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$.

Omdat p_1 een deler is van het getal in het linkerlid, moet p_1 ook een deler zijn van het getal in het rechterlid. Dan is p_1 gelijk aan een van de factoren $q_1, \dots, q_n$, of p_1 is een deler van een van deze factoren. Beide gevolgen zijn echter in tegenspraak met onze aannames: we hadden gelijke factoren immers uitgedeeld, en een priemgetal heeft geen andere delers dan 1 en zichzelf.

Door twee keer gebruik te maken van een bewijs uit het ongerijmde, hebben we zo de hoofdstelling van de rekenkunde bewezen.

- 54** In het informatief op de bladzijde hiernaast heb je kunnen lezen dat elk samengesteld getal op precies één manier is te schrijven als een product van priemgetallen. Zo is $33 = 3 \cdot 11$ en $490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Vermenigvuldig je de eerste zeven priemgetallen en tel je er vervolgens 1 bij op, dan krijg je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510511$. Je kunt 510511 niet door 2, 3, 5, 7, 11, 13 of 17 delen; je krijgt steeds een rest.

a Welke rest krijg je?

Omdat je 510511 niet door 2, 3, 5, 7, 11, 13 of 17 kunt delen zou het een priemgetal kunnen zijn.

b Onderzoek of 510511 een priemgetal is.

Met de principes van de vragen a en b ga je bewijzen dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

Stel dat het aantal priemgetallen eindig is. Er is dan een grootste priemgetal P . Door alle priemgetallen met elkaar te vermenigvuldigen en er vervolgens 1 bij op te tellen, krijg je het getal $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot P + 1$.

c Maak het bewijs af.

De volgorde van de factoren doet er niet toe.
Dus $33 = 3 \cdot 11 = 11 \cdot 3$.

Bewijzen

Een bolleboos riep laatst met zwier gewapend met een vel A-vijf:
‘Er is geen allergrootst getal, dat is wat ik bewijzen ga.
Stel, dat ik u nu zou bedriegen en hier een potje stond te jokken, dan zou ik zonder overdrijven het grootste kunnen op gaan noemen. Maar ben ik klaar, roept u gemeen: “Vermeerder dat getal met twee!”
Dan zien we zeker en gewis dat dit toch niet het grootste was. En gaan we zo nog door een poos, dan merkt u: dit is onbegrensd. En daarmee heb ik q.e.d.
Ik ben hier diep gelukkig door. Zo gaan,’ zei hij voor hij bezwijmde, ‘bewijzen uit het ongedichte.’

Marjolein Kool

Geschiedenis Bewijzen door de eeuwen heen

Tellen en rekenen zijn activiteiten die we sinds de prehistorie in alle culturen terugvinden. De oude Grieken zorgden echter voor een revolutie door de stap van berekenen naar bewijzen te maken. Deze ontwikkeling kwam tot een hoogtepunt in De Elementen van Euclides, waarin de meetkunde systematisch werd opgebouwd. Euclides bewees ook tal van stellingen over perspectief, kegelsneden en uit de getaltheorie, waaronder de stelling dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

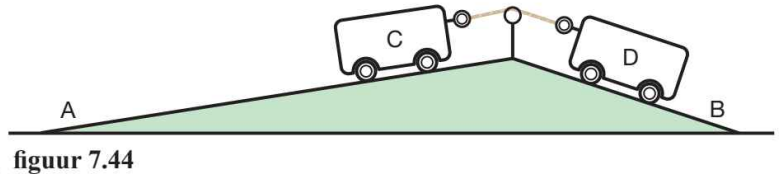
In de 19^e eeuw ging de Franse wiskundige Cauchy een stap verder. Zijn ‘formele bewijzen’ vereisten veel meer wiskundige precisie dan voorheen gebruikelijk was.

In de jaren zeventig van de vorige eeuw werd het bewijzen met de computer geïntroduceerd. Wiskundigen stonden aanvankelijk sceptisch tegenover deze ontwikkeling, maar in 1976 volgde een doorbraak toen met de computer het vierkleurenprobleem werd opgelost. Het vierkleurenprobleem draait om de vraag of je genoeg hebt aan vier kleuren als je een willekeurige landkaart wilt inkleuren zonder dat twee landen die aan elkaar grenzen dezelfde kleur hebben. Wiskundigen hadden sinds 1852 hun tanden stuk gebeten op dit probleem, maar met de computer bleek het mogelijk alle varianten systematisch door te rekenen.

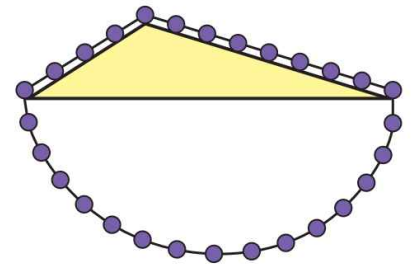
Tegenwoordig gebruiken veel wiskundigen de computer als hulpmiddel. Topwiskundige Andrew Wiles, die in 1995 de laatste stelling van Fermat bewees, gaat echter klassiek te werk: ‘Ik gebruik alleen pen en papier’.



- 55** In figuur 7.44 zie je de hellingen A en B met de karretjes C en D die verbonden zijn door een touw dat over een katrol loopt. Simon Stevin bewees in de 16^e eeuw dat de karretjes elkaar in evenwicht houden als hun gewichten zich verhouden als de lengten van de hellingen waarop ze staan. Dus als helling A twee keer zo lang is als helling B moet voor evenwicht karretje C twee keer zo zwaar zijn als karretje D.



In een gedachte-experiment hing Stevin een kralensnoer om een driehoek, waarbij zowel de kralen als de afstanden tussen de kralen gelijk zijn. Zie figuur 7.45. Hierbij nam hij aan dat het snoer dat de kralen verbindt gewichtsloos is en dat de kralen wrijvingsloos over de driehoek kunnen bewegen. Bewijs met dit gedachte-experiment dat de karretjes elkaar in evenwicht houden als hun gewichten zich verhouden als de lengten van de hellingen waarop ze staan.



figuur 7.45 Stevin's driehoek met kralensnoer ('cloodcrans').

Geschiedenis Simon Stevin

De veelzijdige Simon Stevin (1548-1620) leverde belangrijke bijdragen aan de wis- en natuurkunde, maar werkte ook als ingenieur, uitvinder en als militair adviseur van Prins Maurits.

Stevin werd geboren in Brugge en woonde later in Leiden en Den Haag. In zijn Leidse periode publiceerde hij in 1582 *Tafelen van Interest*, een standaardwerk over handelsrekenen. Vervolgens kwam in 1585 *De Thiende* uit, waarin hij laat zien hoe je breuken als decimale getallen kunt schrijven, iets wat in de tijd van Stevin een noviteit was. In 1586 volgde *De Beghinselen der Weeghconst* met het beroemde 'cloodcransbewijs' uit opgave 55. Bovendien publiceerde Stevin in datzelfde jaar *De Beghinselen des Waterwichts*. De principes uit dit werk gebruikte hij ondermeer bij het bouwen van windmolens om polders droog te leggen, waarmee hij zijn tijd ver vooruit was. Met een andere uitvinding, de zeilwagen, werd Stevin een nationale bekendheid nadat een gezelschap van 28 notabelen met deze wagen in razende vaart over het strand van Scheveningen naar Petten reed.

Op verzoek van Prins Maurits startte Stevin een opleiding voor ingenieurs aan de universiteit van Leiden om tegemoet te komen aan de groeiende behoefte aan landmeters, navigators en andere technici. Voor deze opleiding schreef Stevin een aantal leerboeken in het Nederlands in plaats van in het destijds gebruikelijke Latijn. In de Nederlandse taal is zijn invloed hierdoor nog steeds duidelijk merkbaar: waar in veel andere talen leenwoorden uit het Grieks of Latijn worden gebruikt, bedacht Stevin liever Nederlandse varianten. De woorden wiskunde, meetkunde, rede, evenredig, evenwijdig, evenaar, loodrecht, middellijn, raaklijn, scheikunde en wijsbegeerte hebben we allemaal aan Stevin te danken.



De zeilwagen van Stevin.

- 56** In een bedrijf met 73 personeelsleden heeft elke werknemer een zakelijk e-mailaccount. De systeembeheerder constateert op 1 juni dat er die dag in totaal 439 mails zijn binnengekomen. Gebruik een bewijs uit het ongerijmde om aan te tonen dat er minstens één werknemer is die 7 of meer mails heeft ontvangen.

Theorie B Het ladenprincipe

Als je 11 knikkers in 10 laden legt, weet je zeker dat er minstens één lade is met meer dan één knikker. Dit kun je met een bewijs uit het ongerijmde aantonen: als er geen enkele lade met meer dan één knikker zou zijn, kun je maximaal $10 \cdot 1 = 10$ knikkers opbergen en dit is in tegenspraak met het feit dat je 11 knikkers hebt opgeborgen. Dit idee wordt het **ladenprincipe** of **duiventilprincipe** (pigeonhole principle) genoemd. Met het ladenprincipe kun je verrassend veel bewijzen.

Merk op dat je bij de 11 knikkers en de 10 laden niet kunt zeggen in welke lade er meer dan één knikker ligt. Dit kunnen bovendien meerdere laden zijn.



Voorbeeld

In klas 5Va zitten 16 meisjes en 11 jongens. Bewijs dat er minstens drie leerlingen uit 5Va in dezelfde maand jarig zijn.

Uitwerking

De 27 leerlingen zijn de knikkers en de 12 maanden de laden.
Leg in elk van de laden 2 knikkers.
Er blijven dan 3 knikkers over die ook verdeeld moeten worden.
Er is dus altijd een lade met minstens 3 knikkers.
Er zijn dus minstens drie leerlingen in dezelfde maand jarig.

Ga uit van het ongunstigste geval, dus verdeel de eerste 24 knikkers over de 12 laden.

- 57** In de week voor Pasen zijn er bij kinderopvang De Zeilwagen 60 geverfde eieren in de tuin verstopt: 10 rode, 20 gele en 30 blauwe. De kinderen hebben als opdracht zoveel mogelijk eieren te vinden.
Hoeveel eieren moeten de kinderen minstens vinden om er zeker van te zijn dat er
- a twee gele eieren bij zijn
 - b twee rode en drie blauwe eieren bij zijn
 - c drie eieren met dezelfde kleur bij zijn?

- 58** Het aantal haren dat een mens op zijn hoofd heeft, is afhankelijk van de haarkleur. Het gemiddelde aantal haren varieert van ongeveer 90 000 voor mensen met rood haar tot 140 000 voor mensen met blond haar. In deze opgave gaan we ervan uit dat het maximale aantal hoofdharen dat een mens kan hebben 250 000 is.

- a** Rotterdam heeft 618 000 inwoners. Hoeveel inwoners met precies hetzelfde aantal haren op het hoofd zijn er minimaal in Rotterdam?
- b** Elise woont in Rotterdam en heeft blond haar. Kan zij er zeker van zijn dat er iemand anders in Rotterdam woont met precies evenveel hoofdharen als zij?



De Erasmusbrug in Rotterdam.

- 59** Richard tekent de punten A , B , C , D en E in een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 cm. Bewijs dat minstens twee van deze punten op minder dan 1 cm van elkaar af liggen.

- A 60** Elk natuurlijk getal kan geschreven worden in de vorm $3p + q$, met $p \in \mathbb{N}$ en $q \in \{0, 1, 2\}$. Voor elk paar natuurlijke getallen met dezelfde waarde van q geldt dat het verschil van deze getallen een drievoud is.

- a** Licht dit toe.
- b** Gegeven zijn de natuurlijke getallen a , b , c en d . Bewijs dat er bij deze getallen minstens één paar is waarvan het verschil een drievoud is.

- A 61** Kies vijf verschillende getallen uit de gehele getallen 1 tot en met 8. Bewijs dat hier altijd een tweetal bij is met een verschil van 4.

- A 62** In een klas met 22 leerlingen maakt elke leerling een ‘nieuwjaarselftal’. Dit houdt in dat elke leerling aan 11 verschillende klasgenoten een nieuwjaarskaart stuurt. Bewijs dat er altijd minstens twee leerlingen zijn die elkaar een kaart sturen.

- D 63** Het Stevincollege bestaat 25 jaar. Bij een reünie van de school zijn n oud-leerlingen aanwezig. Bewijs dat er minstens twee oud-leerlingen zijn die hetzelfde aantal kennissen hebben onder de aanwezigen.

- D 64** Tijdens een bruiloftsdiner heeft elke gast zijn eigen plaats. Acht van de gasten gaan aan een ronde tafel zitten die voor hen gereserveerd is. Als ze naar de naamkaartjes kijken die achter de borden bij hun plaatsen staan, blijkt echter dat niemand op de goede plek zit. Bewijs dat de tafel altijd zo gedraaid kan worden dat minstens twee van de acht gasten op de juiste plek zitten.



- O 65** In deze opgave ga je enkele eigenschappen van natuurlijke getallen bewijzen. Hierbij gebruik je dat je elk even getal kunt schrijven als $2n$ en elk oneven getal als $2n + 1$, met in beide gevallen $n \in \mathbb{N}$.
- Bewijs dat de som van de twee oneven getallen $a = 2n + 1$ en $b = 2p + 1$ even is.
 - Bewijs dat de som van twee opeenvolgende natuurlijke getallen oneven is.

Theorie C Bewijzen in de getaltheorie

Je kunt bewijzen dat het kwadraat van een oneven getal o altijd oneven is door uit te gaan van $o = 2n + 1$.

Dit geeft $o^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.

Als we substitueren $q = 2n^2 + 2n$ krijgen we $o^2 = 2q + 1$, waarvan we weten dat het oneven is omdat $q \in \mathbb{N}$. Hiermee is bewezen dat het kwadraat van een oneven getal altijd oneven is.

In de opgaven ga je een aantal stellingen uit de getaltheorie bewijzen. Soms kun je hierbij gebruik maken van een bewijs uit het ongerijmde.

In het overzicht hieronder noemen we enkele belangrijke eigenschappen van getallen waarvan je gebruik kunt maken, waaronder de eigenschappen die je gebruikt hebt in opgave 65.

Elk even getal e kan worden geschreven als $e = 2n$, met $n \in \mathbb{N}$.

Elk oneven getal o kan worden geschreven als $o = 2n + 1$, met $n \in \mathbb{N}$.

Elk drievoud d kan worden geschreven als $d = 3n$, elk viervoud v als $v = 4n$, enzovoort, met $n \in \mathbb{N}$.

Elk rationaal getal r kan worden geschreven als $r = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$.

Voorbeeld

- a** Bewijs dat het product van twee even getallen deelbaar is door 4.
b Bewijs dat de som van twee rationale getallen een rationaal getal is.

Uitwerking

- a** Stel $x = 2n$ en $y = 2p$, met $n, p \in \mathbb{N}$, dan is $x \cdot y = 2n \cdot 2p = 4np$.

Delen door 4 levert het natuurlijke getal np op.

Het product van twee even getallen is dus deelbaar door 4.

- b** Stel $a = \frac{p}{q}$ en $b = \frac{r}{s}$, met $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Dan is } a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs} = \frac{ps + qr}{qs}.$$

Omdat zowel in de teller als in de noemer een geheel getal staat, is hiermee bewezen dat $a + b$ een rationaal getal is.

In het volgende voorbeeld wordt gebruikt dat als a^2 even is, a zelf ook even is. Als a namelijk oneven is, dan is a^2 ook oneven. Zie de theorie op de vorige bladzijde.

Voorbeeld

Gebruik een bewijs uit het ongerijmde om aan te tonen dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is.

Uitwerking

- 1 Stelling: $\sqrt{2}$ is een irrationaal getal.
- 2 Negatie: $\sqrt{2}$ is een rationaal getal.
- 3 Stel $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{Z}$, waarbij a en b geen gemeenschappelijke delers hebben. Dus a en b kunnen niet beide even zijn.

$$\text{Nu geldt } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$a^2 = 2b^2$$

Het rechterlid is even, dus a^2 is even en dus is a ook even.

Neem $a = 2n$. Je krijgt $(2n)^2 = 2b^2$

$$4n^2 = 2b^2$$

$$2n^2 = b^2$$

Hieruit volgt dat ook b even moet zijn.

Als a en b echter beide even zijn, kan de breuk $\frac{a}{b}$ vereenvoudigd worden. Dit is in tegenspraak met de aanname dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben.

- 4 Hiermee is bewezen dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is.

Een rationaal getal is te schrijven als een breuk van twee gehele getallen. Een irrationaal getal is niet te schrijven als een breuk van twee gehele getallen.

- 66** Bewijs de volgende stellingen over natuurlijke getallen.
- Het product van twee oneven getallen is oneven.
 - Als a even is en b oneven, is $\frac{a^2 + b^2 + 1}{2}$ oneven.
- 67** Stelling: Als $p^2 - 1$ geen drievoud is, dan is p wel een drievoud (dus $p = 3n$, met $n \in \mathbb{N}$).
Je gaat dit bewijzen met een bewijs uit het ongerijmde.
- Formuleer de negatie.
 - Als p geen drievoud is, welke twee uitdrukkingen zijn er dan mogelijk voor p ?
 - Toon aan dat beide mogelijkheden die je bij vraag b hebt gevonden leiden tot een tegenspraak en maak het bewijs af.
- 68** Je gaat met een bewijs uit het ongerijmde aantonen dat er geen natuurlijke getallen x en y bestaan waarvoor geldt $x^2 - y^2 = 10$.
- Formuleer de negatie.
 - Herleid de uitdrukking tot de vorm $x + y = \dots$
 - Welke twee mogelijke waarden kan de som $x + y$ aannemen?
Licht toe waarom alleen deze waarden mogelijk zijn.
 - Maak twee stelsels met behulp van het antwoord van vraag c.
 - Los de stelsels uit vraag d op en maak het bewijs af.

Informatief Irrationaal, transcendent, normaal

Een deel van de irrationale getallen heeft een bijzondere eigenschap: ze zijn transcendent. Het bekendste transcendente getal is π . De oude Grieken hebben de aanzet gegeven tot de ontdekking van transcendente getallen, met het beroemde probleem van de kwadratuur van de cirkel. Hierbij draait het om de vraag of het mogelijk is een vierkant te construeren met exact dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel. Als we dit proberen voor een cirkel met straal r en een vierkant met zijde z , moet gelden $O(\text{cirkel}) = O(\text{vierkant})$, dus $\pi r^2 = z^2$ ofwel $z = r\sqrt{\pi}$.

Een zijde met als lengte een gewoon irrationaal getal is zonder problemen te tekenen. Een gelijkbenige rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden lengte 1 hebben, heeft immers een schuine zijde met lengte $\sqrt{2}$. Een transcendent getal kun je echter niet construeren met passer en liniaal. Je kunt dus geen rechte lijn tekenen met lengte π .

De Duits-Zwitserse wetenschapper en cartograaf Johann Lambert bewees in 1761 dat π irrationaal is. Ruim honderd jaar later, in 1882, bewees de Duitse wiskundige Ferdinand Lindemann de transcendentie van π . Hiermee kwam de eeuwenlange zoektocht naar de kwadratuur van de cirkel ten einde: het is onmogelijk om een cirkel en een vierkant te construeren met gelijke oppervlakte.

Een deel van de transcendente getallen heeft de bijzondere eigenschap dat ze 'normaal' zijn. Dit betekent dat de kans om in de decimale ontwikkeling van het getal een specifieke cijfercombinatie te vinden, altijd even groot is als de kans op een willekeurige andere cijfercombinatie van dezelfde lengte. Een normaal getal is dus een soort toevalsgenerator. Het is niet bewezen dat π normaal is, maar alle statistische analyses wijzen hierop. Op <http://www.angio.net/pi/> kun je controleren op welke plek in de decimale ontwikkeling van π je geboortedatum voor het eerst terug te vinden is.

- 69** In deze opgave ga je bewijzen dat de vergelijking $x^3 + x + 1 = 0$ geen rationale oplossingen heeft.
- Stel $x = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{Z}$. Neem aan dat de getallen a en b geen gemeenschappelijke delers hebben en formuleer de negatie.
 - Herleid de vergelijking zo, dat dat er geen breuken in staan.
 - Licht toe dat a en b niet beide even kunnen zijn.
 - Welke gevallen kun je onderscheiden als a en b niet beide even zijn?
 - Bekijk de som van de termen in het linkerlid van de vergelijking van vraag b. Combineer dit met het antwoord van vraag d en maak het bewijs af.

- A 70** In deze opgave ga je bewijzen dat $\sqrt{5}$ een irrationaal getal is.
- Licht toe dat een kwadraat van een natuurlijk getal een even aantal priemfactoren heeft.
 - Geef het bewijs. Gebruik hierbij het gegeven van vraag a.

- A 71** Je gaat met een bewijs uit het ongerijmde aantonen dat er geen natuurlijke getallen x en y bestaan zodat geldt $x^2 - 4y = 2$.
- Formuleer de negatie.
 - Toon aan dat x^2 even is.
 - Maak het bewijs af.

- A 72** Toon met een bewijs uit het ongerijmde aan dat $\sqrt{10}$ een irrationaal getal is.

- A 73** Toon met een bewijs uit het ongerijmde aan dat de vergelijking $2^x = 3$ geen rationale oplossingen heeft. Gebruik hierbij dat $(a^p)^q = a^{pq}$.

Terugblik

Bewijs uit het ongerijmde

Bij het geven van een bewijs uit het ongerijmde ga je als volgt te werk.

- 1 Formuleer wat je wilt bewijzen.
- 2 Veronderstel dat wat je wilt bewijzen *niet* juist is (de negatie).
- 3 Toon aan dat de negatie leidt tot een tegenspraak.
- 4 Concludeer uit deze tegenspraak dat wat je wilt bewijzen juist is.

Met een bewijs uit het ongerijmde kun je aantonen dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

- 1 Stelling: er is geen grootste priemgetal.
- 2 Negatie: er is een grootste priemgetal P .
- 3 Bekijk het getal $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot P + 1$.
Als N een priemgetal is, dan is er een priemgetal groter dan P , omdat $N > P$.
Als N geen priemgetal is, dan is N dus deelbaar door een priemgetal Q . Maar omdat N bij deling door 2, 3, 5, 7, 11, ..., P steeds rest 1 geeft, is Q groter dan P .
- 4 Tegenspraak, dus P is niet het grootste priemgetal, en hiermee is het bewijs geleverd.

Het ladenprincipe

Een bewijs met het ladenprincipe is een speciaal geval van een bewijs uit het ongerijmde. Je brengt het probleem terug tot een probleem met knikkers en laden. Daarbij ga je vaak uit van het ongunstigste geval en laat je zien dat er meer knikkers dan laden zijn.

Bekijk de volgende situatie.

Kies zes verschillende getallen uit de gehele getallen 1 tot en met 10. Bewering: welke zes getallen je ook kiest, er is altijd een tweetal bij waarvan de som 11 is.

- De zes getallen die je kiest zijn de knikkers.
- Er zijn vijf paren met als som 11, namelijk 1 en 10, 2 en 9, 3 en 8, 4 en 7, 5 en 6.
Kies daarom vijf laden, voor elk paar één lade.
- Stop elke knikker in de juiste lade. Er is dan minstens één lade met twee knikkers.
- Dus bij de zes getallen die je kiest is altijd een tweetal waarvan de som 11 is.

Bewijzen in de getaltheorie

Bij bewijzen in de getaltheorie gebruik je vaak basiseigenschappen zoals

- elk even getal e kan worden geschreven als $e = 2n$, met $n \in \mathbb{N}$
- elk oneven getal o kan worden geschreven als $o = 2n + 1$, met $n \in \mathbb{N}$
- elk drievoud d kan worden geschreven als $d = 3n$, met $n \in \mathbb{N}$
- elk rationaal getal r kan worden geschreven als $r = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$.

Om te bewijzen dat er geen gehele getallen x en y zijn die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$, gebruiken we een basiseigenschap en een bewijs uit het ongerijmde.

Stel dat er wel gehele getallen x en y zijn die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$.

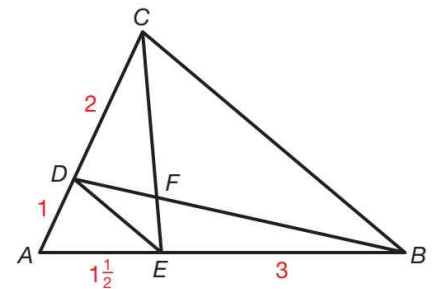
Dan moet y^3 deelbaar zijn door 3, dus y ook. We schrijven daarom $y = 3k$, zodat de vergelijking overgaat in $3x^2 = 9 + 27k^3$ ofwel $x^2 = 3 + 9k^3$. Maar dan moet x^2 en dus ook x deelbaar zijn door 3. We schrijven daarom $x = 3l$ en komen uit op $9l^2 = 3 + 9k^3$ ofwel $3l^2 = 1 + 3k^3$. Dit is echter onmogelijk, want 1 is geen drievoud.

We concluderen dat er geen gehele getallen x en y zijn waarvoor geldt $3x^2 = 9 + y^3$.

Diagnostische toets

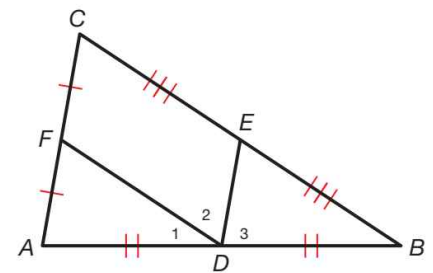
7.1 Bewijzen in driehoeken en vierhoeken

- 1 [► WERKBLAD] Gegeven is driehoek ABC in figuur 7.46. Bewijs dat $BF = \frac{3}{4}BD$.



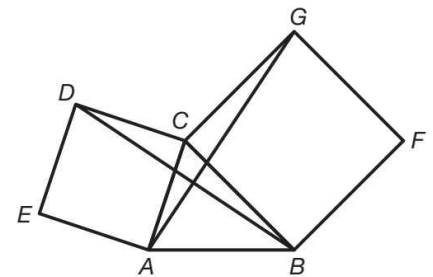
figuur 7.46

- 2 [► WERKBLAD] Gegeven is driehoek ABC met de middens D , E en F van de zijden. Zie figuur 7.47. Bewijs dat $\angle D_2 = \angle C$.



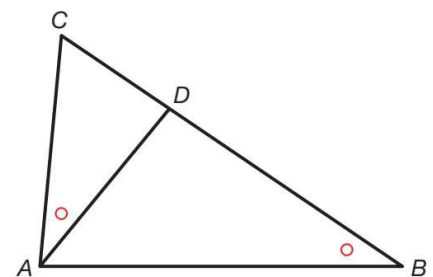
figuur 7.47

- 3 [► WERKBLAD] Gegeven is driehoek ABC met de vierkanten $ACDE$ en $BFGC$. Zie figuur 7.48. Bewijs dat $AG = BD$.



figuur 7.48

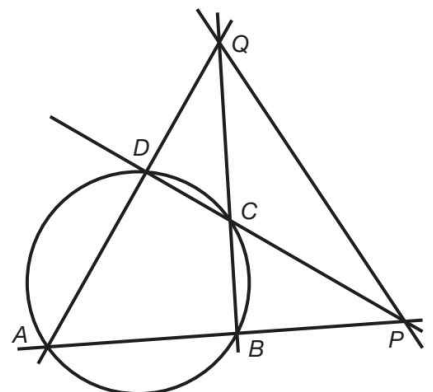
- 4 [► WERKBLAD] Gegeven is driehoek ABC . Op de zijde BC ligt het punt D zo, dat $\angle CAD = \angle ABC$. Zie figuur 7.49. Bewijs dat $AC^2 = BC \cdot CD$.



figuur 7.49

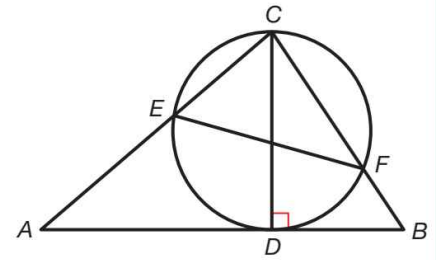
7.2 Bewijzen in cirkels

- 5 [► WERKBLAD] Gegeven is een cirkel met daarop de punten A , B , C en D . De lijnen AB en CD snijden elkaar in P , de lijnen AD en BC snijden elkaar in Q . Zie figuur 7.50. Bewijs dat $\angle CPQ + \angle CQP = \angle A$.



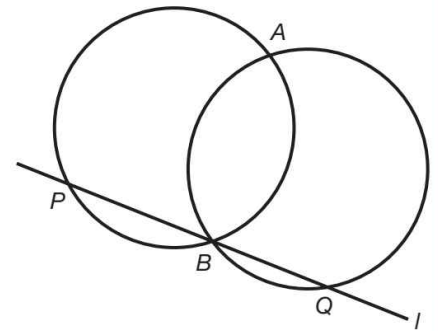
figuur 7.50

- 6** [► WERKBLAD] Gegeven is driehoek ABC met de hoogtelijn CD . De cirkel met middellijn CD snijdt AC in E en BC in F . Zie figuur 7.51.
- Bewijs dat $\angle ECD + \angle EFC = 90^\circ$.
 - Bewijs dat $ABFE$ een koordenvierhoek is.



figuur 7.51

- 7** [► WERKBLAD] Gegeven zijn twee cirkels met gelijke straal die elkaar snijden in A en B . De lijn l gaat door B en snijdt de cirkels in P en Q . Zie figuur 7.52. Bewijs dat $AP = AQ$.



figuur 7.52

7.3 Volledige inductie

- 8** Bewijs met volledige inductie.
- $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ is deelbaar door 7 voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$
 - $\sum_{k=1}^n (4k-1) = 2n^2 + n$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$
 - $\sum_{k=0}^n 3 \cdot 2^k = 6 \cdot 2^n - 3$ voor elk natuurlijk getal n

7.4 Andere bewijsmethoden

- 9**
- Kies elf verschillende getallen uit de gehele getallen 1 tot en met 20 en bewijs dat er altijd een tweetal bij zit waarvan het verschil 10 is.
 - Kies zeven verschillende getallen uit de gehele getallen 1 tot en met 10 en bewijs dat er altijd een tweetal bij zit waarvan de som 12 is.
- 10** Bewijs dat er geen positieve gehele getallen x en y bestaan waarvoor geldt $4x^2 - y^2 = 5$.
- 11** Bewijs dat de som van een rationaal getal $\frac{a}{b}$ en een irrationaal getal p irrationaal is.

De luchtverkeersleiding op Schiphol zorgt er met koers-, snelheids- en hoogte-instructies voor dat het vliegverkeer veilig verloopt. Vliegtuigen die in verschillende richtingen vliegen houden ook verschillende hoogtes aan zodat de banen elkaar kruisen, ook al lijkt het vanaf de grond bekeken wel eens anders.

Wat leer je?

- Werken met coördinaten in de ruimte en het berekenen van coördinaten van snijpunten in de ruimte.
- Hoe je een vergelijking van een vlak opstelt en hoe je een normaalvector van een vlak berekent.
- Hoeken in de ruimte berekenen met vectoren.
- Hoe je met vectoren afstanden in de ruimte berekent.



Vectormeetkunde

8



Voorkennis Vectoren in het platte vlak

Theorie A Vectoren optellen en aftrekken

Een **vector** is een lijnstuk met een richting. In figuur 8.1 zijn de vectoren van O naar A en van A naar B getekend.

Notatie: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De getallen 3 en 2 zijn de **kentallen** van $\overrightarrow{OA}$.

Een vector die in O begint, noteren we met een kleine letter.

Zo noteren we vector $\overrightarrow{OA}$ als $\vec{a}$. Dus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De lengte van $\vec{a}$ is $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Notatie: $|\vec{a}| = \sqrt{13}$.

De lengte van de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is $\left| \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right| = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Gelijke vectoren hebben dezelfde richting en dezelfde lengte.

Je kunt vectoren optellen. Voor het tekenen van de **somvector** zijn twee manieren.

- **De parallellogramconstructie**

In figuur 8.2 is deze constructie uitgevoerd met de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Je ziet dat $\vec{a} + \vec{b}$ de diagonaal is van het parallellogram waarvan $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijden zijn.

Ga na dat $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

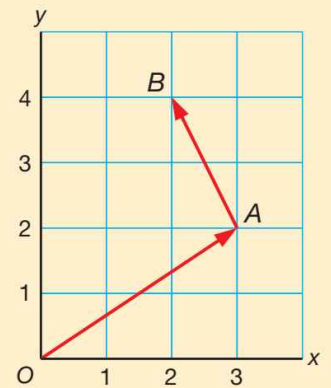
- **De kop-staartconstructie**

Deze constructie is in figuur 8.3 uitgevoerd met

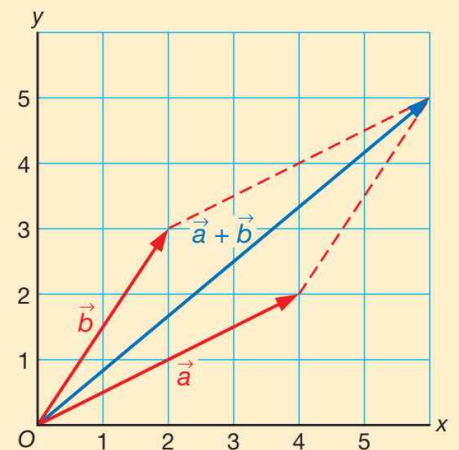
de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vector $\vec{b}$ wordt verschoven zo, dat zijn 'staart' aansluit bij de 'kop' van $\vec{a}$.

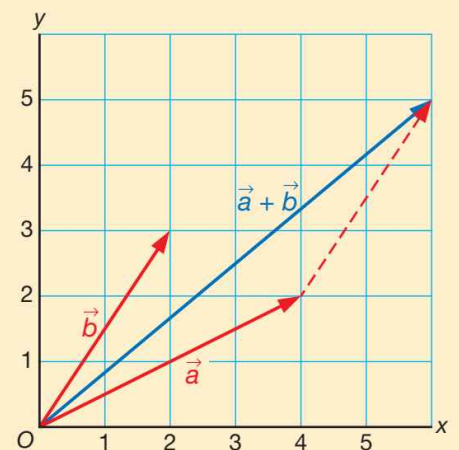
Ga na dat je $\vec{a} + \vec{b}$ ook kunt krijgen door $\vec{a}$ met zijn staart aan te sluiten bij de kop van $\vec{b}$.



figuur 8.1



figuur 8.2 De parallellogramconstructie.



figuur 8.3 De kop-staartconstructie.

Je kunt een vector ook met een getal vermenigvuldigen.

In figuur 8.4 zie je de vectoren $\vec{a}$ en $1\frac{1}{2}\vec{a}$. Omdat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

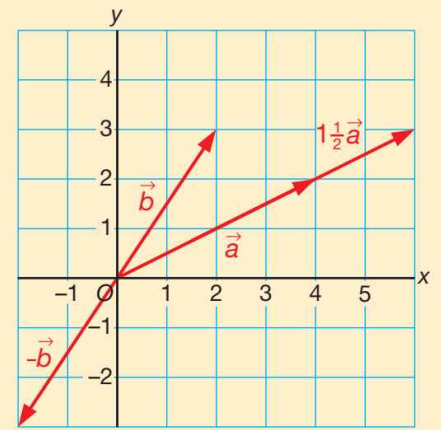
$$\text{is } 1\frac{1}{2}\vec{a} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ook zie je de vectoren $\vec{b}$ en $-1 \cdot \vec{b}$ ofwel $-\vec{b}$.

$$\text{Omdat } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ is } -\vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

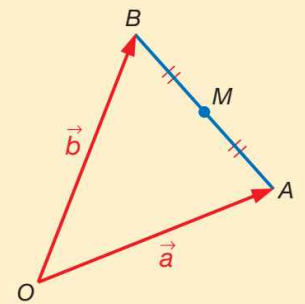
De vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ heten **tegengestelde vectoren**.

Tegengestelde vectoren hebben dezelfde lengte en tegengestelde richting.



figuur 8.4

In figuur 8.5 zijn de punten A en B en de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend. Met de parallellogramconstructie kun je nagaan dat voor het midden M van het lijnstuk AB geldt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Ook kun je nagaan dat geldt $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. De afstand tussen de punten A en B is dus gelijk aan de lengte van de vector $\vec{b} - \vec{a}$.



figuur 8.5

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

- 1 Bereken de lengte van de volgende vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$

c $\vec{c} = 0,8 \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \end{pmatrix}$

- 2 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bereken de kentallen van de volgende vectoren.

a $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

b $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

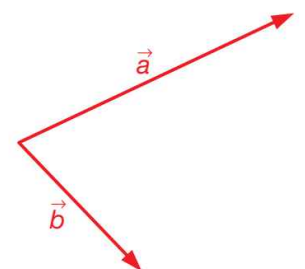
c $\vec{e} = 1\frac{1}{2}\vec{a} + 2\frac{1}{2}\vec{b}$

- 3 [▶ WERKBLAD] Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in figuur 8.6. Teken de volgende vectoren.

a $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$

b $\vec{d} = \vec{b} - 1\frac{1}{2}\vec{a}$

c $\vec{e} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$



figuur 8.6

- 4 Gegeven zijn de punten $A(5, 0)$, $B(2, 3)$ en $C(0, 5)$. Bereken exact de omtrek van driehoek ABC met behulp van vectoren.

Theorie B Hoeken en vectoren

Hiervoor heb je gezien dat je vectoren kunt optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een getal. Je kunt vectoren ook met elkaar vermenigvuldigen. Dit geeft het **inproduct** van de vectoren.

Het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Zo is $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot -4 + 2 \cdot 8 = -12 + 16 = 4.$

Voor de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

Deze formule bewijst je in hoofdstuk 10 van vwo B deel 3.

Voorbeeld

Bereken de hoek tussen de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Uitwerking

a $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot -2 + 1 \cdot 3 = -6 + 3 = -3$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ en } |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{-3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-3}{\sqrt{130}}$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 105,3^\circ$$

b $\vec{c} \cdot \vec{d} = 9 \cdot 1 + -3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$

$$\cos(\angle(\vec{c}, \vec{d})) = 0, \text{ dus } \angle(\vec{c}, \vec{d}) = 90^\circ.$$

5 Bereken de hoek tussen de vectoren.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

6 Gegeven zijn de punten $A(3, 2)$, $B(5, 3)$ en $C(1, 8)$.

a Bereken $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

b Bereken $\angle BAC$.

- 7 In voorbeeld b heb je gezien dat hoek tussen de vectoren

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ gelijk is aan } 90^\circ.$$

- a Licht toe dat twee vectoren loodrecht op elkaar staan als hun inproduct nul is.
- b Bereken voor welke waarde van p de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.
- c Gegeven zijn de punten $A(3, -2)$, $B(p, 1)$ en $C(1, 12)$. Bereken voor welke waarde van p driehoek ABC rechthoekig is in A .

Theorie C De vectorvoorstelling van een lijn

De parametervoorstelling $x = 5 + 2\lambda$ en $y = -2 + \lambda$ hoort bij de lijn door de punten $A(5, -2)$ en $B(7, -1)$. Je ziet $\lambda = 0$ geeft punt A , en $\lambda = 1$ geeft punt B . Andere waarden voor λ geven andere punten van de lijn AB .

Een lijn door de punten A en B is te geven met de parametervoorstelling $x = x_A + \lambda(x_B - x_A)$ en $y = y_A + \lambda(y_B - y_A)$. Je kunt nagaan dat je voor $\lambda = 0$ en $\lambda = 1$ de punten A en B krijgt.

Deze parametervoorstelling is ook te schrijven met vectoren.

Je krijgt dan een **vectorvoorstelling** van de lijn.

Een vectorvoorstelling van de lijn AB is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \right) = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}).$$

Ook nu kun je door $\lambda = 0$ en $\lambda = 1$ te nemen zien dat A en B op deze lijn liggen.

In de figuur hiernaast zie je dat $\vec{b} - \vec{a}$ evenwijdig is met de lijn AB . Daarom heet $\vec{b} - \vec{a}$ een **richtingsvector** van de lijn AB .

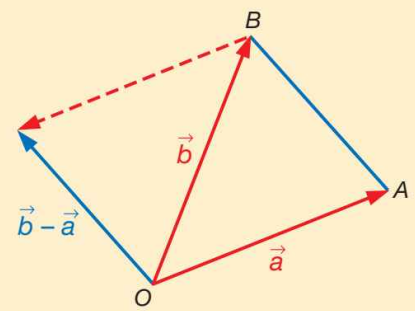
Notatie: $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Om een lijn vast te leggen, heb je naast een richting ook een punt van de lijn nodig. In de vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \text{ is hiervoor het punt } A \text{ gekozen.}$$

De vector $\vec{a}$ heet een **steunvector** van AB .

Notatie: $\vec{s}_{AB} = \vec{a}$.



figuur 8.7

Een vectorvoorstelling van de lijn door de punten A en B is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}).$$

Hierin is $\vec{a}$ een steunvector en $\vec{b} - \vec{a}$ een richtingsvector.

Voorbeeld

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door de punten $C(2, -1)$ en $D(-3, 4)$.

Uitwerking

$$\left. \begin{aligned} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{c} + \lambda(\vec{d} - \vec{c}) \\ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{d} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- 8** Stel een vectorvoorstelling op van
- a de lijn k door de punten $A(4, -1)$ en $B(1, 2)$
 - b de lijn l door de punten $C(0, 5)$ en $D(-3, 0)$.
- 9** Teken in één figuur de lijnstukken met vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge -1 \leq \lambda \leq 2 \text{ en}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge -1 \leq \mu \leq 1.$$

- 10** Om te onderzoeken of het punt $A(-2, 6)$ op de lijn

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ligt, los je de vergelijking } 3 - \lambda = -2 \text{ op}$$

en controleer je of de gevonden waarde van λ het punt A geeft. Onderzoek of $A(-2, 6)$, $B(0, -7)$ en $C(13, -19)$ op k liggen.

8.1 Coördinaten in de ruimte

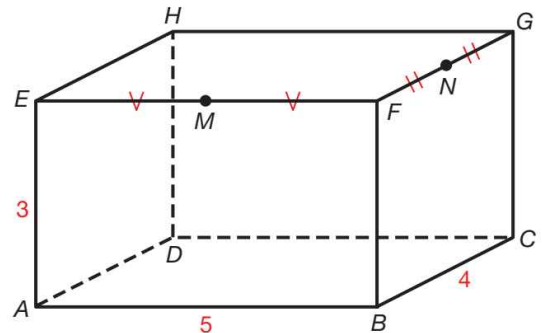
01 Gegeven is de balk $ABCD EFGH$ met ribben 5, 4 en 3. Zie figuur 8.8.

Om van D naar F te gaan moet je 4 naar voren, 5 naar rechts en 3 omhoog. Door de getallen 4, 5 en 3 is de plaats van F ten opzichte van D vastgelegd.

Op dezelfde manier, dus door achtereenvolgens te noteren hoeveel je naar voren, naar rechts en omhoog moet, kun je de plaats van andere punten ten opzichte van D vastleggen.

Noteer de drie getallen waarmee je de volgende punten ten opzichte van D vastlegt.

- | | | |
|-------|-------|-------|
| a M | c B | e E |
| b N | d G | f C |



figuur 8.8 Het punt M is het midden van ribbe EF en het punt N is het midden van ribbe FG .

Theorie A Het Oxyz-assenstelsel

Een punt in de ruimte wordt vastgelegd door drie coördinaten. Behalve een x -coördinaat en een y -coördinaat is er een derde coördinaat, een z -coördinaat, nodig. De bijbehorende as is de z -as. Deze staat loodrecht op de x -as en de y -as. Zo ontstaat een **Oxyz-assenstelsel**. Het horizontale vlak waarin de x -as en de y -as liggen, heet het **Oxy-vlak**.

Oxy -, Oxz - en Oyz -vlak heten **coördinaatvlakken**.

In figuur 8.9 is in een $Oxyz$ -assenstelsel een balk getekend. In de figuur is de positieve x -as naar voren getekend en de positieve y -as naar rechts.

Om vanuit O in F te komen, ga je

- eerst 4 eenheden in de positieve x -richting
- dan 6 eenheden in de positieve y -richting
- ten slotte 5 eenheden in de positieve z -richting.

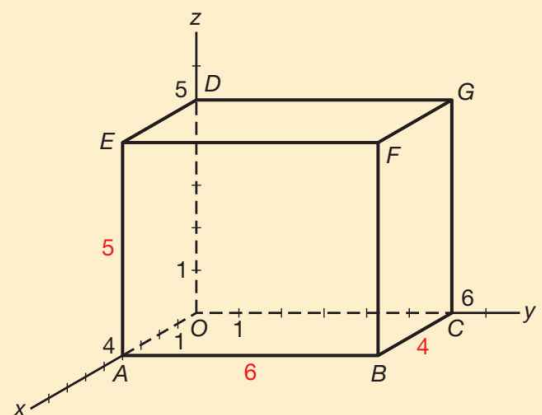
Daarom heeft F de coördinaten $(4, 6, 5)$.

Verder is $B(4, 6, 0)$, $E(4, 0, 5)$ en $G(0, 6, 5)$.

Net als in het platte vlak, kun je in de ruimte werken met vectoren.

Zo is $\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt $|\vec{f}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{77}$.

Dus $d(O, F) = \sqrt{77}$.



figuur 8.9 De eenheden op de x -as zijn ongeveer half zo lang getekend als op de y -as en de z -as.

De lengte van de vector

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ is } \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

En zo is

$$d(A, G) = |\overrightarrow{AG}| = |\vec{g} - \vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{77}.$$

Om de coördinaten van het midden M van CE te berekenen, gebruik

$$\text{je } \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{e}), \text{ dus } \vec{m} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dus $M(2, 3, 2\frac{1}{2})$.

Voor de punten A en B geldt $d(A, B) = |\vec{b} - \vec{a}|$.

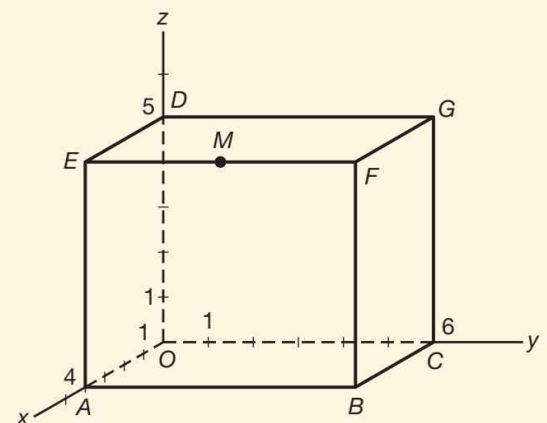
Voor het midden M van het lijnstuk AB geldt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

Voorbeeld

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 5)$.

Het punt M is het midden van de ribbe EF .

- Bereken de coördinaten van het midden N van het lijnstuk CM .
- Bereken $d(C, M)$.



figuur 8.10

Uitwerking

$$\text{a } \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{m}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dus $N(2, 4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$$\text{b } d(C, M) = |\overrightarrow{CM}| = |\vec{m} - \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

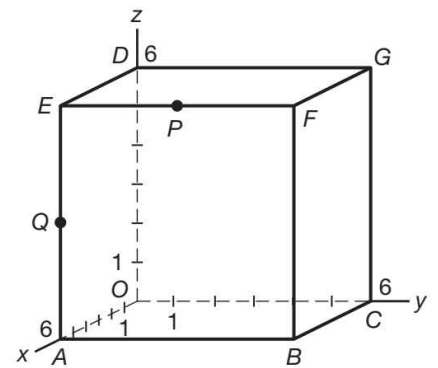
Omdat M het midden van een ribbe is, mag je $\vec{m}$ ook in één keer opschrijven.

- 2** Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 3)$.

- Teken deze balk in een $Oxyz$ -assenstelsel.
- Geef de coördinaten van de overige hoekpunten van de balk.
- Teken de punten $P(4, 2, 3)$ en $Q(4, 6, 2)$ in de figuur van vraag a.
- Bereken de coördinaten van het midden M van het lijnstuk PQ .

- 3** Zie figuur 8.11 met de kubus $OABCDEFG$ met ribbe 6. Het punt P is het midden van de ribbe EF en het punt Q is het midden van de ribbe AE .

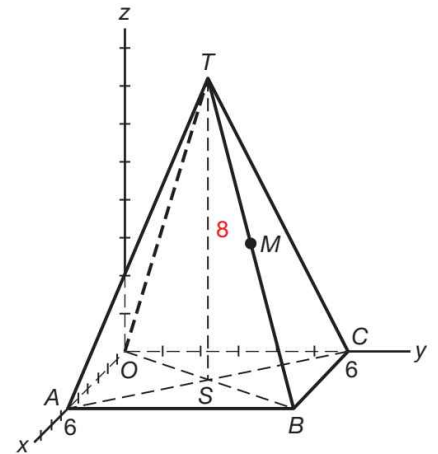
- Bereken de coördinaten van het midden M van het lijnstuk CF .
- Bereken de coördinaten van het midden R van het lijnstuk PQ .
- Bereken $d(C, Q)$.



figuur 8.11

- A 4** Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TOABC$ met $A(6, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en hoogte $TS = 8$. Het punt M is het midden van de ribbe BT . Zie figuur 8.12.

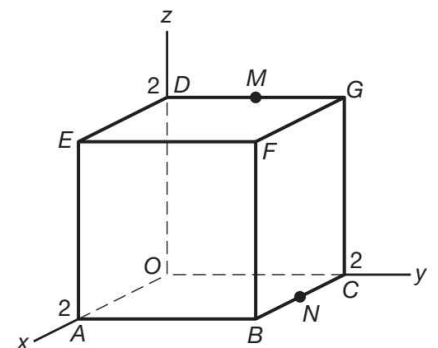
- Bereken de coördinaten van M .
- Bereken de coördinaten van het midden P van het lijnstuk CM .
- Bereken $d(M, S)$.



figuur 8.12

- O 5** Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ en $D(0, 0, 2)$. Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt N is het midden van de ribbe BC . Zie figuur 8.13.

- Licht toe dat $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- Bereken $|\overrightarrow{MA}|$ en $|\overrightarrow{MN}|$.



figuur 8.13

Theorie B De hoek tussen twee vectoren

Je weet dat voor de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in het platte vlak geldt

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

De formule geldt ook voor twee vectoren in de ruimte. Dit ga je in opgave 7 aantonen.

Voor de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ geldt

- inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$
- $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

In opgave 5 heb je gezien dat bij de vectoren $\overrightarrow{MA}$ en $\overrightarrow{MN}$

van figuur 8.13 geldt $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dus } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - 1 + 4 = 5,$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3 \text{ en } |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$

Dus $\cos(\angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})) = \frac{5}{3\sqrt{6}}$ en dit geeft $\angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) \approx 47,1^\circ$.

Hiermee is ook $\angle AMN$ in figuur 8.13 berekend.

Voorbeeld

Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. Het punt N is het midden van de ribbe BC .

Bereken $\angle ANG$.

Uitwerking

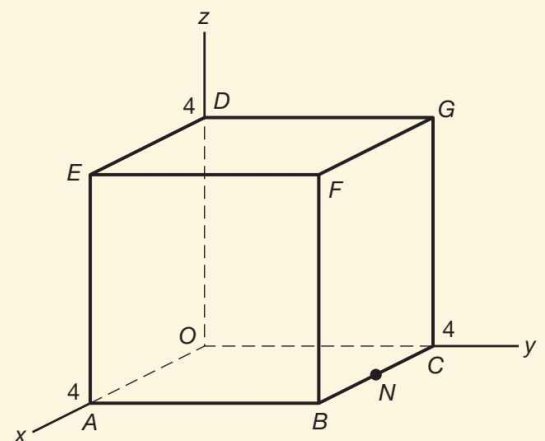
$$\angle ANG = \angle(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NG})$$

$$\overrightarrow{NA} = \vec{a} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NG} = \vec{g} - \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NG})) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{-4 + 0 + 0}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-4}{20} = -0,2$$

$$\angle ANG = \angle(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NG}) \approx 101,5^\circ$$



figuur 8.14

R 6 In het voorbeeld is $\angle ANG$ berekend met behulp van de vectoren

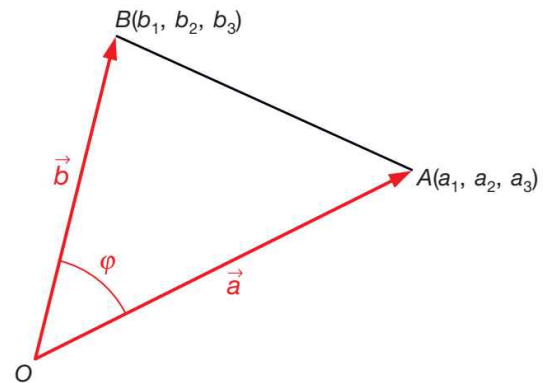
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Licht toe dat je $\angle ANG$ ook krijgt met de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ maar niet met de vectoren } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7 Zie de figuur hiernaast.
Toon met behulp van de cosinusregel aan dat

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



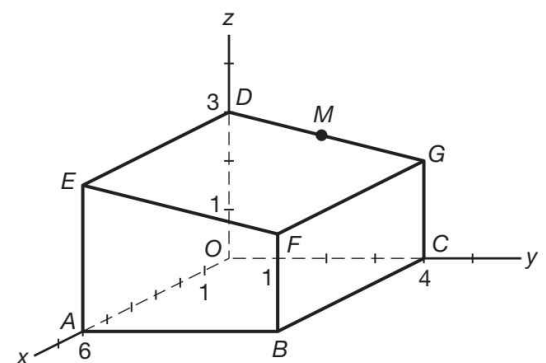
figuur 8.15

8 Gegeven is de kubus van het voorbeeld op de vorige bladzijde.
Bereken $\angle ENG$.

A 9 Gegeven is het prisma $OCGD ABFE$ met $A(6, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 3)$ en $G(0, 4, 2)$.
Bereken.

a $\angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE})$

b $\angle BGD$



figuur 8.16



Het bouwwerk in figuur 8.17 bestaat uit een kubus met ribbe 6 en een regelmatige vierzijdige piramide met hoogte 4. Er is een $Oxyz$ -assenstelsel aangebracht. Hierbij is de oorsprong het middelpunt van het grondvlak, gaat de x -as door het midden van AD , de y -as door het midden van AB en de z -as door T .

- a Geef de coördinaten van de hoekpunten van het bouwwerk.

Een vectorvoorstelling van de lijn HT is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

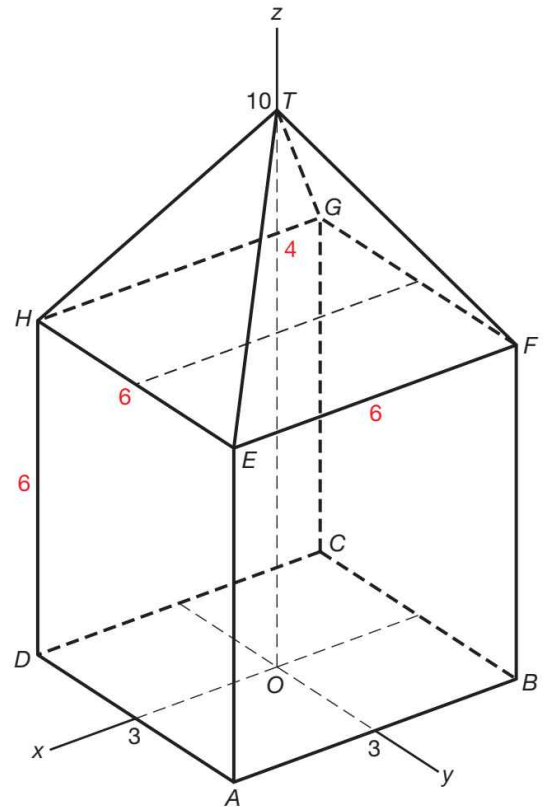
- b Licht dit toe.

De lijn HT snijdt het Oxy -vlak in het punt P .

- c Licht toe dat $z_P = 0$.

- d Hoe volgt uit $z_P = 0$ dat $\lambda = 2\frac{1}{2}$?

- e Bereken de coördinaten van P .



figuur 8.17 Het bouwwerk bestaat uit een kubus en een regelmatige vierzijdige piramide.

Theorie C Coördinaten van snijpunten in een ruimtelijk assenstelsel berekenen

In figuur 8.18 is in een $Oxyz$ -assenstelsel de balk $OABCDEFG$ getekend met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 3)$.

Het punt $M(0, 2, 3)$ is het midden van de ribbe DG en het punt $N(5, 0, 2)$ ligt op de ribbe AE .

De coördinaten van het snijpunt P van de lijn MN en het Oxy -vlak bereken je met behulp van een vectorvoorstelling van MN .

Je stelt een vectorvoorstelling van een lijn in de ruimte op dezelfde manier op als in het platte vlak.

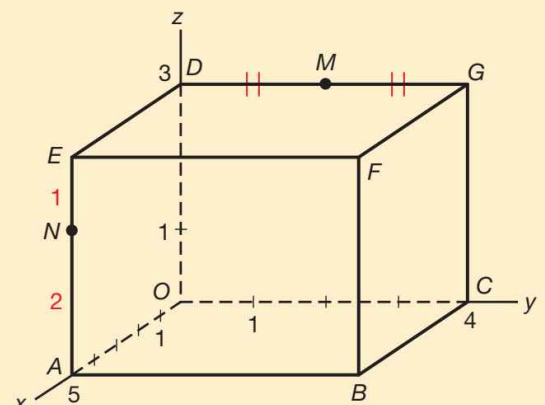
Uit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{n} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

volgt dat $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling

van de lijn MN is.

Om de coördinaten van P te vinden gebruik je vervolgens dat P in het Oxy -vlak ligt, en dat P op de lijn MN ligt. Dan geldt zowel $z_P = 0$ als $z_P = 3 - \lambda$.

Hieruit volgt $3 - \lambda = 0$ ofwel $\lambda = 3$ en dit geeft $P(15, -4, 0)$.



figuur 8.18

$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van de lijn MN .

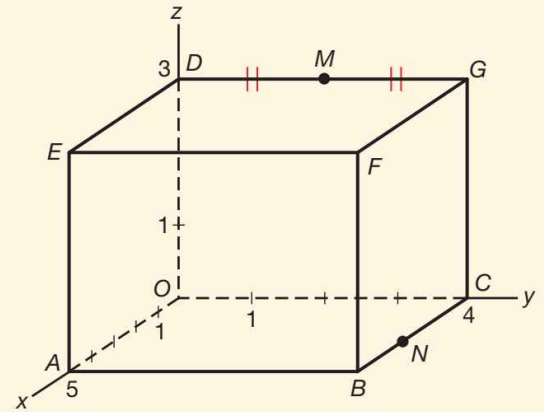
Notatie: $\vec{r}_{MN} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Voorbeeld

Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 3)$. Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt $N(3, 4, 0)$ ligt op de ribbe BC .

De lijn MN snijdt het Oxz -vlak in het punt Q .

Bereken de coördinaten van Q .



figuur 8.19

Uitwerking

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{n} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{dus } MN: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$y_Q = 0$ geeft $2 + 2\lambda = 0$, dus $\lambda = -1$.

$$\lambda = -1 \text{ geeft } \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

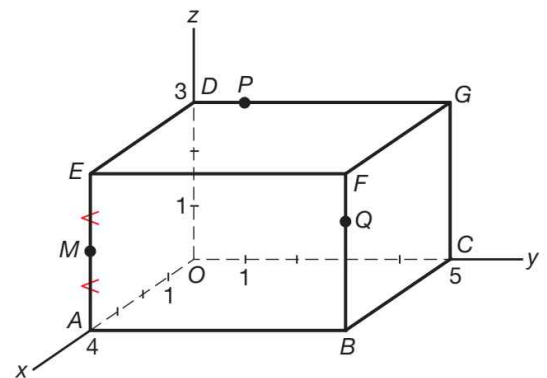
Dus $Q(-3, 0, 6)$.

- R 11** a In de uitwerking van het voorbeeld staat dat $y_Q = 0$. Licht dit toe.
b Wat kun je zeggen van de x -coördinaat van alle punten in het Oyz -vlak?

- 12** Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 5, 0)$ en $D(0, 0, 3)$. Het punt M is het midden van de ribbe AE . Verder zijn gegeven de punten $P(0, 1, 3)$ en $Q(4, 5, 2)$.

De lijn MP snijdt het Oxy -vlak in het punt T en de lijn PQ snijdt het Oxz -vlak in het punt U .

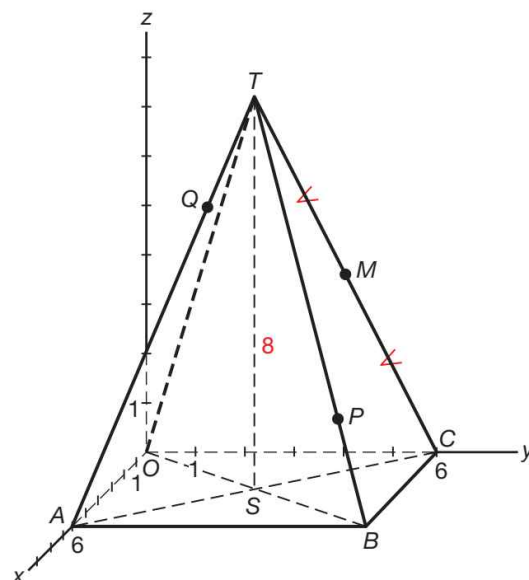
- a Bereken de coördinaten van T .
b Bereken de coördinaten van U .



figuur 8.20

A 13 Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TOABC$ met $A(6, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en hoogte $TS = 8$. Het punt M is het midden van de ribbe CT . Verder ligt het punt P op de ribbe BT zo, dat $BP = \frac{1}{4}BT$, en ligt het punt Q op de ribbe AT zo, dat $AQ = \frac{3}{4}AT$.

- De lijn MP snijdt het Oxy -vlak in het punt D . Bereken de coördinaten van D .
- De lijn QP snijdt het Oyz -vlak in het punt E . Bereken de coördinaten van E .
- De lijn QM snijdt het Oxz -vlak in het punt F . Bereken de coördinaten van F .



figuur 8.21



Terugblik

Het Oxyz-assenstelsel

De plaats van een punt in de ruimte is vast te leggen met drie coördinaten.

Je gebruikt daarbij een ruimtelijk assenstelsel, het *Oxyz*-assenstelsel.

De vlakken *Oxy*, *Oxz* en *Oyz* heten coördinaatvlakken.

Punten en afstanden

Voor de punten *A* en *B* geldt $d(A, B) = |\vec{b} - \vec{a}|$.

Voor het midden *M* van het lijnstuk *AB* geldt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

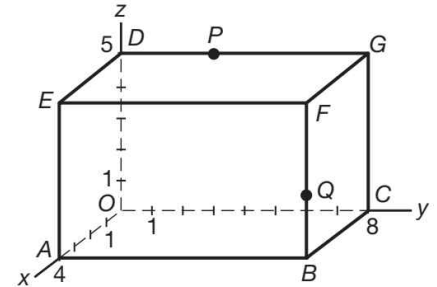
Zo geldt in de figuur hiernaast met $P(0, 3, 5)$ en $Q(4, 8, 2)$

voor het midden *M* van *PQ* dat

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dus $M = (2, 5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

$$\text{En } d(P, Q) = |\vec{q} - \vec{p}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$



De hoek tussen twee vectoren

Voor het berekenen van de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gebruik je de formule

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \text{ Hierin is } \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ het inproduct van de vectoren } \vec{a} \text{ en } \vec{b}.$$

$$\text{Er geldt } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

$$\text{Bij de berekening van de hoek tussen de vectoren } \vec{PA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

in de balk hierboven krijg je

$$\cos(\angle(\vec{PA}, \vec{PQ})) = \frac{16 - 15 + 15}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = \frac{16}{50}, \text{ dus } \angle(\vec{PA}, \vec{PQ}) \approx 71,3^\circ.$$

Hiermee is $\angle APQ$ berekend.

Snijpunt van lijn en vlak

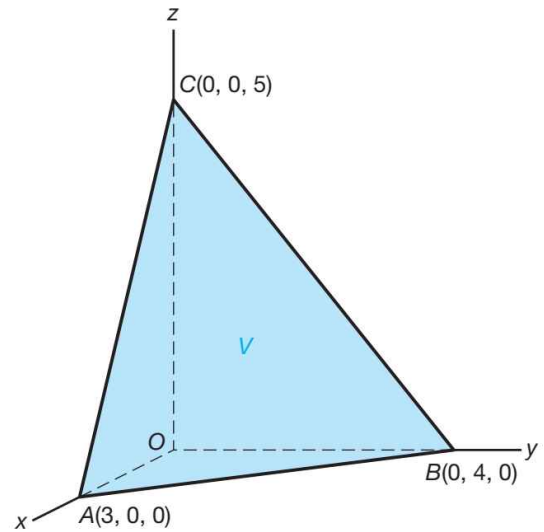
De coördinaten van het snijpunt *T* van de lijn *PQ* en het *Oxy*-vlak bereken je

met een vectorvoorstelling van de lijn *PQ*. Verder gebruik je dat *T* in het

Oxy-vlak ligt en dat dus geldt $z_T = 0$.

8.2 Vergelijkingen van vlakken

- O14** In figuur 8.22 is het vlak V door de punten $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ en $C(0, 0, 5)$ getekend.
- Controleer dat de coördinaten van A , B en C voldoen aan de vergelijking $20x + 15y + 12z = 60$.
 - De vergelijking $20x + 15y + 12z = 60$ is te schrijven in de vorm $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$.
Licht dit toe.
 - Hoe kun je in de vorm $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ de coördinaten van de snijpunten van V met de assen herkennen?



figuur 8.22

Theorie A Vergelijking en normaalvector van een vlak

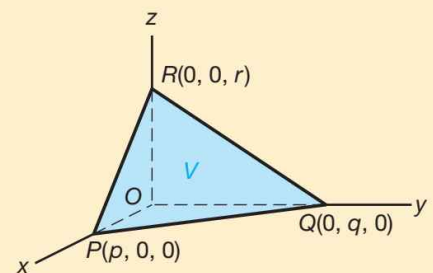
Net zoals je in het platte vlak een assenvergelijking van een lijn hebt, heb je in de ruimte een **assenvergelijking van een vlak**.

Het vlak V uit opgave 14 door de punten $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ en

$C(0, 0, 5)$ heeft de assenvergelijking $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$.

Een vergelijking van het vlak V door de punten $P(p, 0, 0)$, $Q(0, q, 0)$ en $R(0, 0, r)$ is

$$V: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$



De vergelijking $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ is te herleiden tot de vorm $ax + by + cz = d$.

In opgave 15 bewijs je dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ loodrecht staat op het vlak

$V: ax + by + cz = d$, tenzij de coëfficiënten a , b en c alle nul zijn.

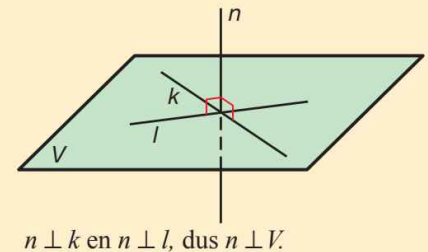
De vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ is een **normaalvector van het vlak** $V: ax + by + cz = d$

en wordt genoteerd als $\vec{n}_V$.

Bij het bewijs dat $\vec{n}_V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ loodrecht op het vlak V staat gebruik je

dat een lijn n loodrecht op een vlak V staat als n loodrecht staat op twee snijdende lijnen in V .

Een lijn staat loodrecht op een vlak als hij loodrecht staat op twee snijdende lijnen in dat vlak.



Merk op dat in opgave 14 de vector $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$ loodrecht staat op de

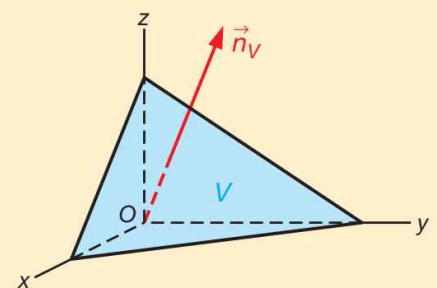
vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$. Immers, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ en er geldt

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} = -60 + 60 + 0 = 0 \text{ en } \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} = -60 + 0 + 60 = 0.$$

Dus $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$ is een normaalvector van het vlak V : $20x + 15y + 12z = 60$.

Een normaalvector van een vlak V is een vector die loodrecht op V staat.

De vector $\vec{n}_V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ is normaalvector van het vlak V : $ax + by + cz = d$.



Voorbeeld

Gegeven is de balk $OAB CDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. De lijn l gaat door D en staat loodrecht op het vlak ACF .

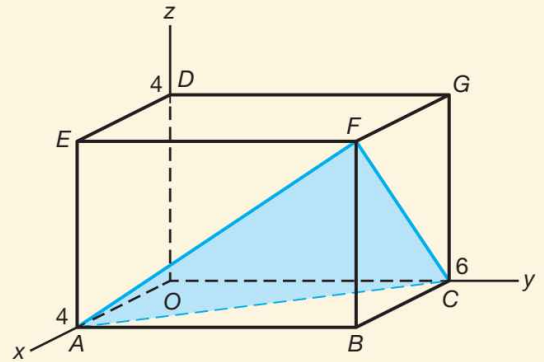
Bereken de coördinaten van het snijpunt P van de lijn l en het vlak ACF .

Aanpak

Stel de assenvergelijking van ACF op.

Herleid deze tot de vorm $ax + by + cz = d$ en lees hieruit een normaalvector af.

Gebruik verder dat $\vec{r}_l = \vec{n}_{ACF}$.



figuur 8.23

Uitwerking

ACF snijdt de x -as in $A(4, 0, 0)$ en de y -as in $C(0, 6, 0)$, dus ACF : $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{r} = 1$.

$F(4, 6, 4)$ invullen in $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{r} = 1$ geeft $\frac{4}{4} + \frac{6}{6} + \frac{4}{r} = 1$ ofwel $\frac{4}{r} = -1$, dus $r = -4$.

ACF : $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-4} = 1$ ofwel $3x + 2y - 3z = 12$, dus $\vec{n}_{ACF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_l = \vec{n}_{ACF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus l : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Substitutie van $x = 3\lambda$, $y = 2\lambda$ en $z = 4 - 3\lambda$ in $3x + 2y - 3z = 12$ geeft

$$3 \cdot 3\lambda + 2 \cdot 2\lambda - 3(4 - 3\lambda) = 12$$

$$9\lambda + 4\lambda - 12 + 9\lambda = 12$$

$$22\lambda = 24$$

$$\lambda = 1\frac{1}{11}$$

$$\text{Dus } P\left(3\frac{3}{11}, 2\frac{2}{11}, \frac{8}{11}\right).$$

- 15** Gegeven is het vlak V : $ax + by + cz = d$. Het vlak V snijdt de x -as in het punt A , de y -as in het punt B en de z -as in het punt C .

a Bereken de coördinaten van A , van B en van C .

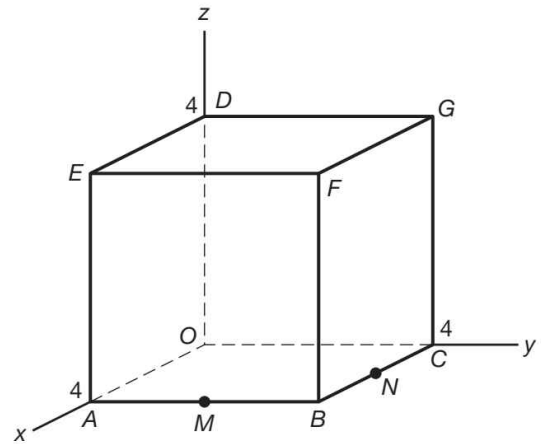
b Toon aan dat $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB}$ en dat $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AC}$.

c Hoe volgt uit b dat de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ een normaalvector van V is?

- 16** Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe AB en het punt N is het midden van de ribbe BC .

- Bereken een normaalvector van het vlak ACD .
- Licht toe dat het vlak CMD de x -as snijdt in het punt $(8, 0, 0)$ en gebruik dit om een normaalvector van het vlak CMD te berekenen.
- Teken het grondvlak apart en gebruik dit om de coördinaten van de snijpunten van de lijn MN met de x -as en de y -as te berekenen. Bereken vervolgens een normaalvector van het vlak MND .
- Bereken een normaalvector van het vlak MNF .
- De lijn l gaat door D en staat loodrecht op het vlak MNF . Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en het vlak MNF .

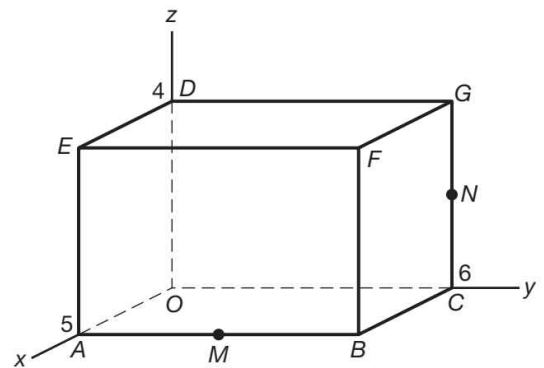


figuur 8.24

- 17** Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe AB en het punt N is het midden van de ribbe CG .

- Stel een vergelijking op van het vlak ACD .
- Bereken een normaalvector van het vlak CMD .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn BD en het vlak ACF .



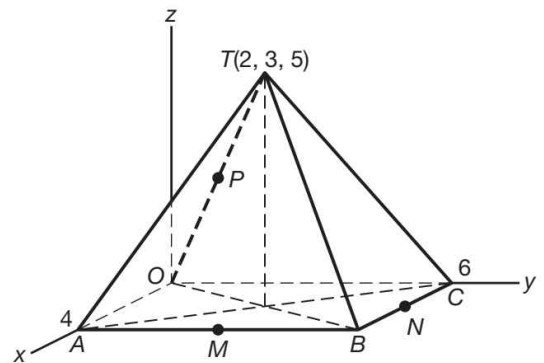
figuur 8.25

- A 18** Gegeven is de piramide $TOABC$ met $A(4, 0, 0)$, $B(4, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $T(2, 3, 5)$.

Het punt M is het midden van de ribbe AB , het punt N is het midden van de ribbe BC en het punt P is het midden van de ribbe OT .

- Stel een vergelijking op van het vlak ACP .
- Bereken een normaalvector van het vlak MNP .
- De lijn l gaat door P en staat loodrecht op het vlak ANT .

Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en het vlak ANT .



figuur 8.26

- O 19** Gegeven zijn de vectoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

a Toon aan dat $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = 0$.

b Toon aan dat $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = 0$.

Theorie B Het uitproduct van twee vectoren

In opgave 19 heb je gewerkt met de vector $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

Deze vector heet het **uitwendig product** of kortweg het **uitproduct**

van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Dit uitproduct noteren we als $\vec{a} \times \vec{b}$.

Het uitproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ is $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

Ook heb je in opgave 19 aangetoond dat het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{a} \times \vec{b}$ gelijk aan 0 is. Dat wil zeggen dat $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$.

Ook is $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.

De vector $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en loodrecht op $\vec{b}$.

Je kunt het uitproduct gebruiken om een normaalvector van een vlak te vinden.

Bij de berekening van het uitproduct van de

vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ kan het schema

hiernaast gebruikt worden. Schrijf de vectoren twee keer onder elkaar en noteer drie verschillen van kruisproducten.

Dus $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Omdat bij het berekenen van $\vec{a} \times \vec{b}$ een rekenfout snel is gemaakt, is het verstandig om met inproducten te controleren of de berekende vector loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$ staat.

1	2
3	4
5	7
1	2
3	4
5	7

$$\begin{aligned} a_2b_3 - a_3b_2 &= \\ 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 &= 1 \\ \text{eerste kental} \end{aligned}$$

1	2
3	4
5	7
1	2
3	4
5	7

$$\begin{aligned} a_3b_1 - a_1b_3 &= \\ 5 \cdot 2 - 1 \cdot 7 &= 3 \\ \text{tweede kental} \end{aligned}$$

1	2
3	4
5	7
1	2
3	4
5	7

$$\begin{aligned} a_1b_2 - a_2b_1 &= \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 &= -2 \\ \text{derde kental} \end{aligned}$$

Je krijgt $\vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 + 9 - 10 = 0$ en

$\vec{b} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 12 - 14 = 0.$

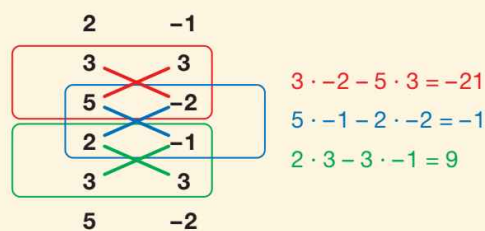
Omdat beide inproducten 0 zijn staat $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bereken $\vec{a} \times \vec{b}$.

Uitwerking



$3 \cdot -2 - 5 \cdot 3 = -21$
 $5 \cdot -1 - 2 \cdot -2 = -1$
 $2 \cdot 3 - 3 \cdot -1 = 9$

Dus $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Controle:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = -42 - 3 + 45 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = 21 - 3 - 18 = 0$$

20 Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bereken.

a $\vec{a} \times \vec{b}$ **c** $\vec{b} \times \vec{d}$ **e** $\vec{b} \times \vec{a}$
b $\vec{a} \times \vec{c}$ **d** $\vec{b} \times \vec{e}$ **f** $\vec{d} \times \vec{b}$

R 21 **a** Is $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ waar voor elk tweetal vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$? Licht toe.

b Is $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ waar voor elk tweetal vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$? Licht toe.

22 Bereken een vector die loodrecht staat op

a $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

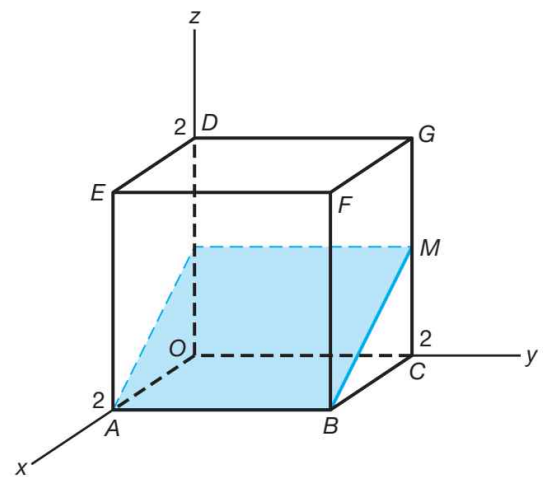
d $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A 23 Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l die gaat door het punt $A(2, 2, -1)$ en die loodrecht staat op de lijnen

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O 24 Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ en $D(0, 0, 2)$. Het punt M is het midden van de ribbe CG .

- a** Bereken $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BM}$ en licht toe dat $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ een normaalvector van het vlak ABM is.
- b** Stel een vergelijking van het vlak ABM op.



figuur 8.27

Theorie C Het uitproduct en een vergelijking van een vlak

In opgave 24 heb je de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BM}$ gebruikt om een normaalvector van het vlak ABM te berekenen.

De vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BM}$ zijn **richtingsvectoren van het vlak** ABM .

Een vector die evenwijdig is met het vlak V , is een richtingsvector van V .

Door gebruik te maken van de eigenschap dat de vector $\vec{a} \times \vec{b}$ loodrecht staat op de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is een normaalvector te berekenen van een vlak waarvan je twee richtingsvectoren weet. Voorwaarde hierbij is dat deze richtingsvectoren niet evenwijdig zijn.

In het voorbeeld is $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van het vlak OBM .

Omdat $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ evenwijdig is aan $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ook een richtingsvector van OBM .

We noteren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Voorbeeld

Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ en $D(0, 0, 2)$.

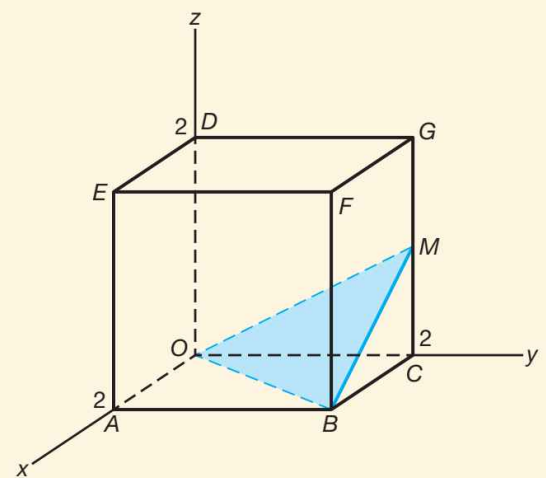
Het punt M is het midden van de ribbe CG .
Stel een vergelijking op van het vlak OBM .

Uitwerking

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{OBM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$OBM: x - y + 2z = d \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } O(0, 0, 0) \end{array} \right\} d = 0$
Dus $OBM: x - y + 2z = 0$



figuur 8.28

	1	0	
1° kental	1	2	
	0	1	
3° kental	1	0	2° kental
	1	2	
	0	1	

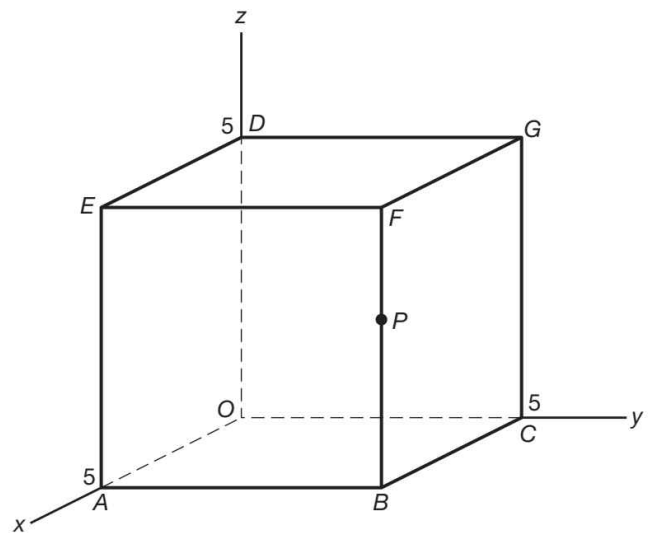
Bij het opstellen van een vergelijking van een vlak is het soms mogelijk een normaalvector uit de figuur af te lezen.

Zo is in de kubus van het voorbeeld $\vec{n}_{ACG} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

dus $ACG: x + y = 2$.

- 25** Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 5, 0)$ en $D(0, 0, 5)$. Het punt $P(5, 5, 3)$ ligt op de ribbe BF . Stel een vergelijking op van het vlak.

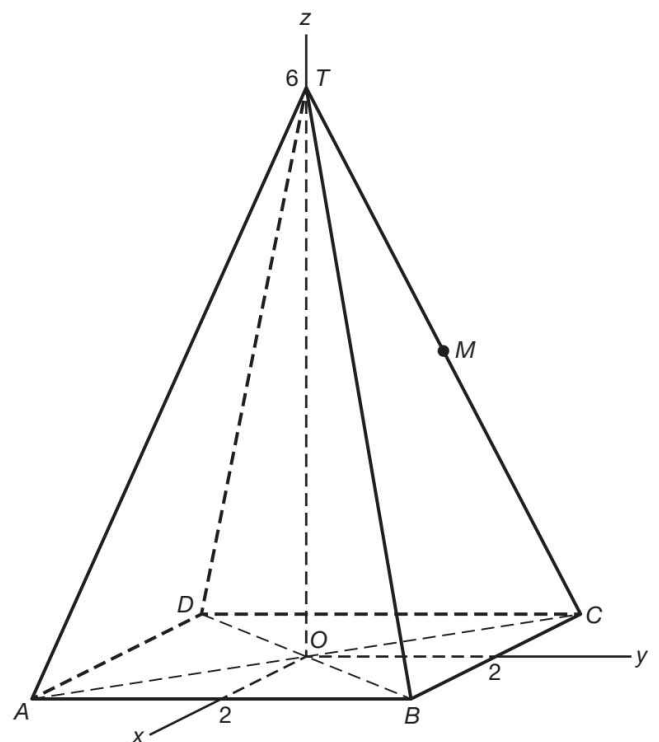
- a EGP
- b OEF
- c DEP



figuur 8.29

- 26** Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TABCD$ met $A(2, -2, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(-2, 2, 0)$ en $T(0, 0, 6)$. M is het midden van de ribbe CT . Stel een vergelijking op van het vlak.

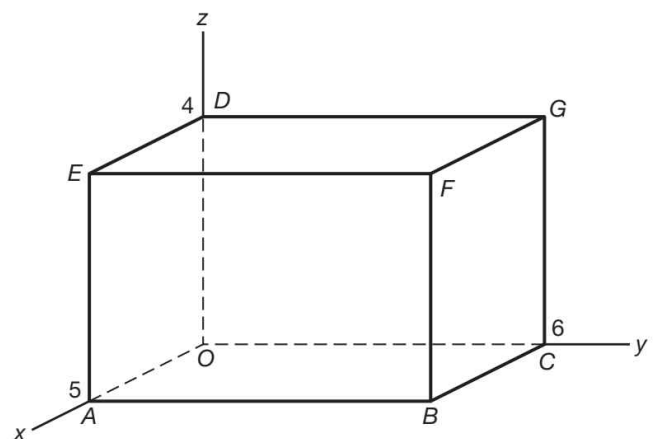
- a ACT
- b ABM
- c BDM



figuur 8.30

- A27** Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

- a Stel een vergelijking op van het vlak ACG .
- b Bereken een normaalvector van het vlak BEG .



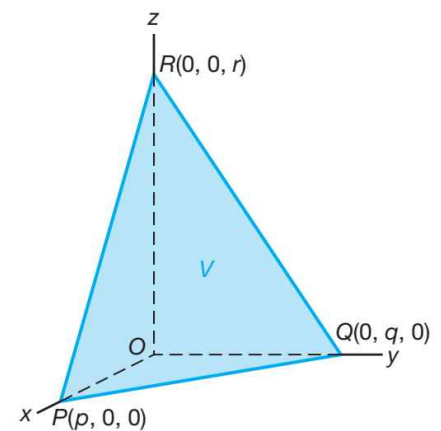
figuur 8.31

Terugblik

De assenvergelijking van een vlak

Een vlak V dat de assen snijdt in de punten $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$ en $(0, 0, r)$ heeft de assenvergelijking $V: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$.

Zo heeft het vlak W dat de assen snijdt in de punten $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ en $C(0, 0, 5)$ de vergelijking $W: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ ofwel $W: 20x + 15y + 12z = 60$.



Een normaalvector van een vlak

Een normaalvector van een vlak V is een vector die loodrecht op V staat.

De vector $\vec{n}_V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ is normaalvector van het vlak $V: ax + by + cz = d$.

Het uitproduct en een normaalvector van een vlak

Het uitproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ is $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

De vector $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Je gebruikt dit om een normaalvector te berekenen van een vlak waarvan je twee richtingsvectoren weet.

Zo krijg je als volgt met behulp van het uitproduct een vergelijking van het vlak BEG in de balk hiernaast.

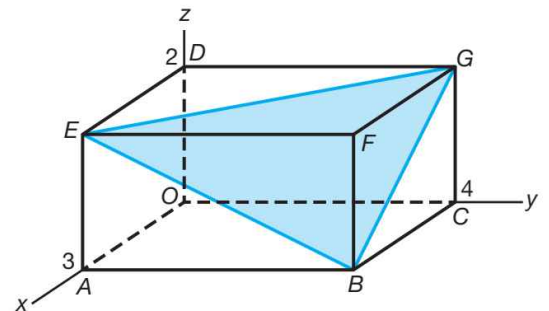
$$\overrightarrow{BE} = \vec{e} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BG} = \vec{g} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{BEG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$BEG: 4x + 3y + 6z = d.$$

Invullen van $B(3, 4, 0)$ geeft $BEG: 4x + 3y + 6z = 24$.



0	-3	
2	0	$2 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 = 4$
-1	2	$-1 \cdot (-3) - 0 \cdot 2 = 3$
0	-3	$0 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) = 6$
2	0	
-1	2	

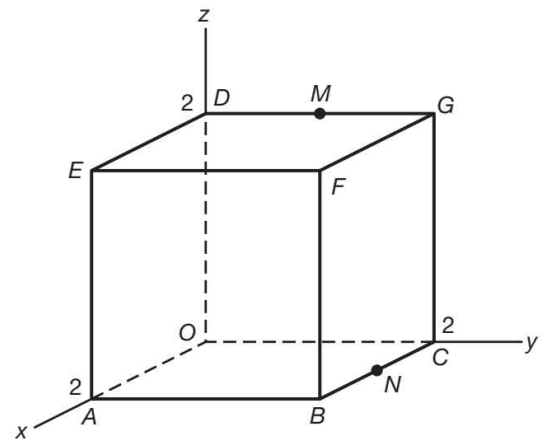
8.3 Hoeken in de ruimte

28 Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met

$A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ en $D(0, 0, 2)$.

Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt N is het midden van de ribbe BC . Zie figuur 8.32.

- Bereken de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{MA}$ en $\overrightarrow{MN}$.
- Licht toe dat je in vraag a de hoek tussen de lijnen AM en MN hebt berekend.



figuur 8.32

Theorie A De hoek tussen twee lijnen

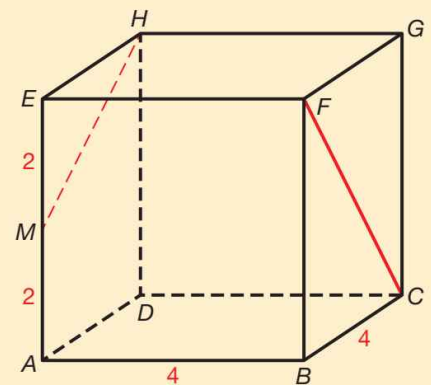
Je weet dat voor de hoek φ tussen twee snijdende lijnen in het platte vlak geldt $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$.

In de ruimte maken we een soortgelijke afspraak.

De hoek tussen twee snijdende lijnen in de ruimte is de niet-stompe hoek tussen de lijnen.

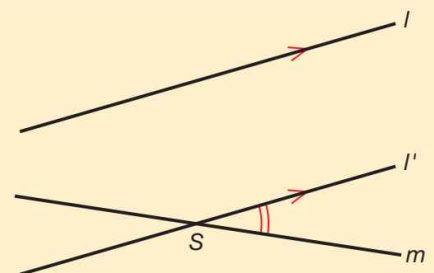
In de kubus hiernaast zijn de kruisende lijnen CF en HM getekend. De hoek tussen deze lijnen vind je door één van de lijnen evenwijdig te verplaatsen tot hij de andere lijn snijdt.

Verplaats CF over $\overrightarrow{FE}$. Je krijgt DE .
Nu is $\angle(CF, HM) = \angle(DE, HM)$.



figuur 8.33

De hoek tussen de kruisende lijnen l en m is de hoek tussen de snijdende lijnen l' en m , waarbij $l' \parallel l$ is.



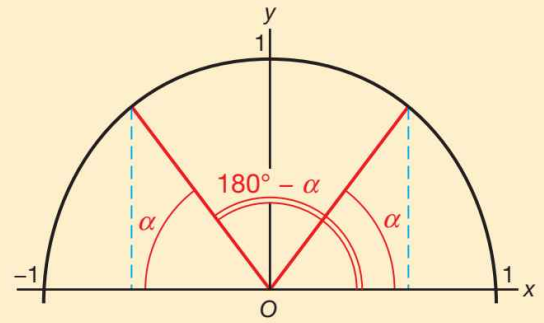
Je kunt vectoren gebruiken om de hoek tussen lijnen in de ruimte te berekenen. Voor de berekening van de hoek tussen de lijnen k en l met richtingsvectoren $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ bereken je de hoek tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$.

Omdat de hoek tussen $\vec{r}_k$ en $\vec{r}_l$ stomp kan zijn en de hoek tussen k en l niet, is echter niet altijd $\cos(\angle(k, l)) = \cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))$.

Omdat $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$, geldt altijd

$$\cos(\angle(k, l)) = |\cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))|.$$

Dit geldt ook voor de kruisende lijnen k en l .



Voor de hoek tussen de lijnen k en l geldt

$$\cos(\angle(k, l)) = |\cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))| = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}.$$

Voorbeeld

Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt N is het midden van de ribbe BC .

Bereken $\angle(AM, DN)$.

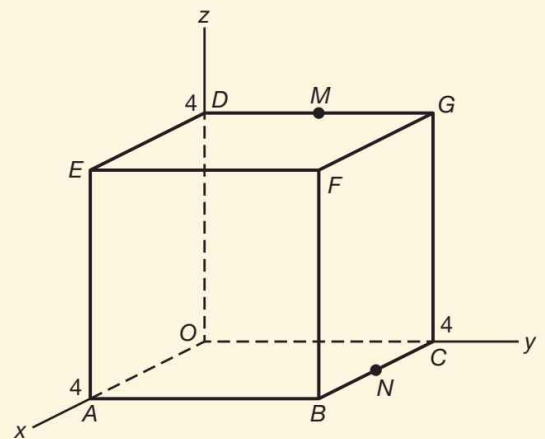
Uitwerking

$$\vec{r}_{AM} = \vec{m} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{DN} = \vec{n} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(AM, DN)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-2 + 2 - 4|}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Dus $\angle(AM, DN) \approx 63,6^\circ$.



figuur 8.34

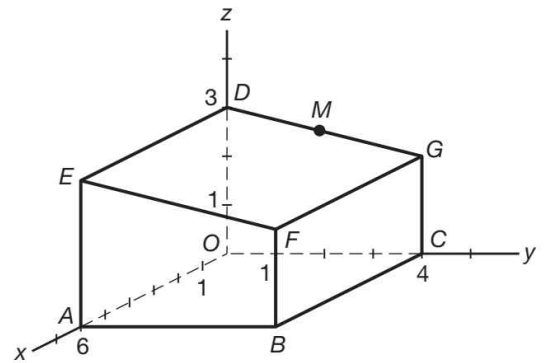
29 Gegeven is de kubus van het voorbeeld.

Bereken.

- a $\angle(CE, MN)$
- b $\angle(AG, BM)$
- c $\angle AMC$

- 30** Gegeven is het prisma $OCGD ABFE$ met $A(6, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 3)$ en $G(0, 4, 2)$. Het punt M is het midden van de ribbe DG . Bereken.

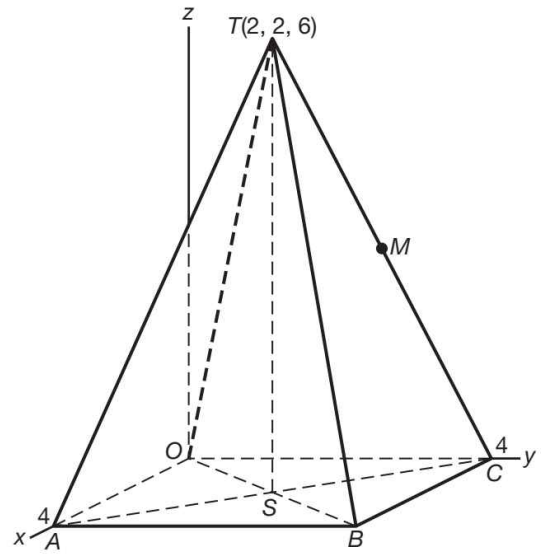
- $\angle(AM, CE)$
- $\angle(AF, EG)$
- $\angle EMC$



figuur 8.35

- A 31** Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TOABC$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $T(2, 2, 6)$. Het punt M is het midden van de ribbe CT . Bereken.

- $\angle(AM, BM)$
- $\angle(AM, BT)$
- $\angle OMB$



figuur 8.36

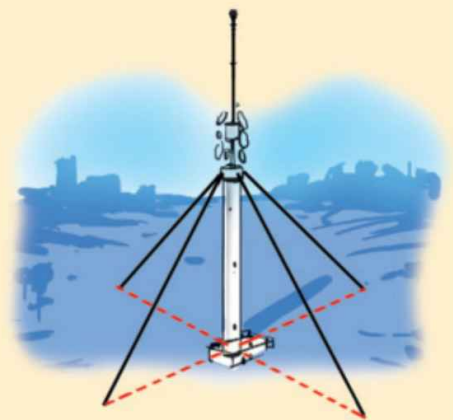
- D 32** Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide van opgave 31.

Voor een willekeurig punt P op de ribbe OT geldt $P(\lambda, \lambda, 3\lambda)$, met $0 \leq \lambda \leq 2$.

- Licht dit toe.
- Bereken exact de coördinaten van P in het geval $BP \perp OT$.
- Bereken welke waarden $\angle(BP, OT)$ kan aannemen.
- Bereken in één decimaal nauwkeurig de coördinaten van P in het geval $\angle(BP, OT) = 55^\circ$.

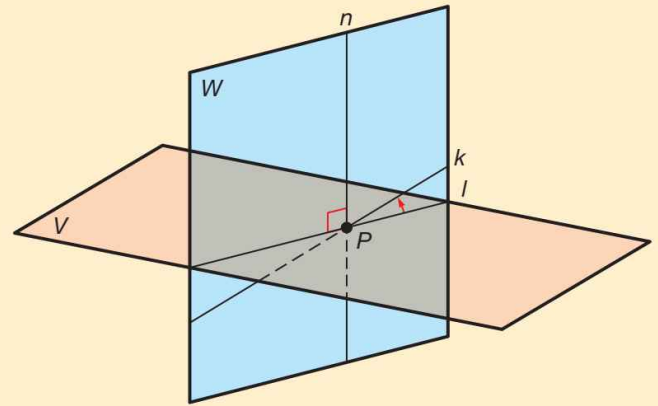
Theorie B Hoek tussen lijn en vlak

De zendmast in figuur 8.37 staat verticaal. De hoek die de mast met de grond maakt is dus 90° . Dit wil zeggen dat de mast loodrecht staat op elke lijn op de grond. Een lijn die loodrecht staat op elke lijn in een vlak is een **normaal van dat vlak**. Een richtingsvector van een normaal van een vlak is een normaalvector van het vlak.



figuur 8.37

In de figuur hiernaast snijdt de lijn k het vlak V in het punt P . De lijn n door P is een normaal van V . Door de lijnen k en n is het vlak W aangebracht. De snijlijn van V en W is l . Nu is $\angle(k, V) = \angle(k, l) = 90^\circ - \angle(k, n)$.



figuur 8.38

Snijdt de lijn k het vlak V in het punt P en is n een normaal van V door P , dan is $\angle(k, V) = 90^\circ - \angle(k, n)$.

Om de hoek tussen een lijn en een vlak te berekenen, gebruik je het volgende werkschema.

Werkschema: het berekenen van de hoek tussen een lijn k en een vlak V

- 1 Bereken een richtingsvector $\vec{r}_k$ van k en een normaalvector $\vec{n}_V$ van V .
- 2 Bereken $\angle(k, n)$ waarbij n een normaal van V is.
- 3 Bereken $\angle(k, V) = 90^\circ - \angle(k, n)$.

Voorbeeld

Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ en $D(0, 0, 2)$. Bereken $\angle(BD, ACD)$.

Uitwerking

$$\vec{r}_{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

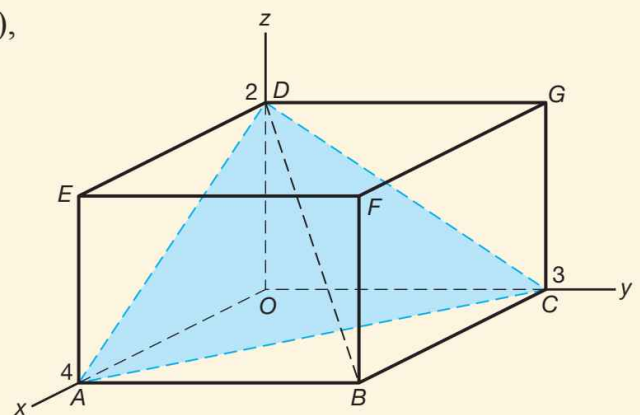
Lijn n is een normaal van ACD .

$$ACD: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1 \text{ ofwel } 3x + 4y + 6z = 12,$$

$$\text{dus } \vec{r}_n = \vec{n}_{ACD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\cos(\angle(BD, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-12 - 12 + 12|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{61}} = \frac{12}{\sqrt{1769}}$$

Dus $\angle(BD, n) \approx 73,4^\circ$ en $\angle(BD, ACD) \approx 90^\circ - 73,4^\circ = 16,6^\circ$.

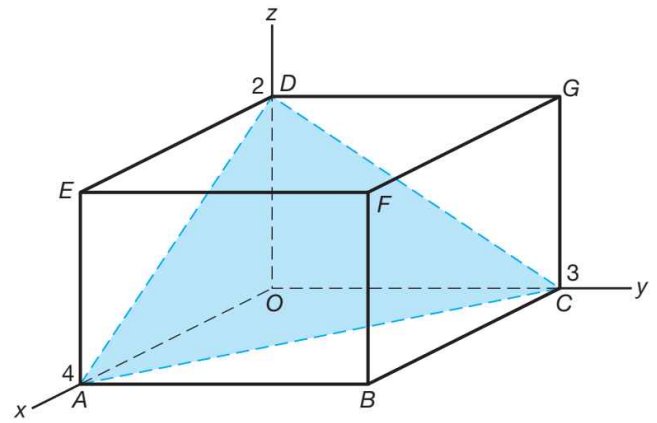


figuur 8.39

- 33** In de figuur hiernaast zie je nogmaals de balk $OABCDEFG$ van het voorbeeld.

Bereken.

- a** $\angle(OF, ACD)$
b $\angle(CE, OBG)$

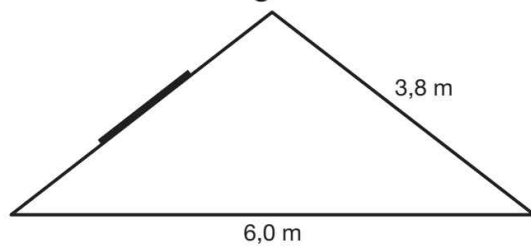


figuur 8.40

- A 34** Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met ribbe 4. Het punt M is het midden van de ribbe AB . Bereken.

- a** $\angle(AG, EBG)$ **b** $\angle(DM, ACD)$ **c** $\angle(GM, CDM)$

- O 35** Op de foto hiernaast zie je een dak met zonnepanelen. In figuur 8.41 zie je een schets van de situatie. Bereken de hellingshoek van het dak.

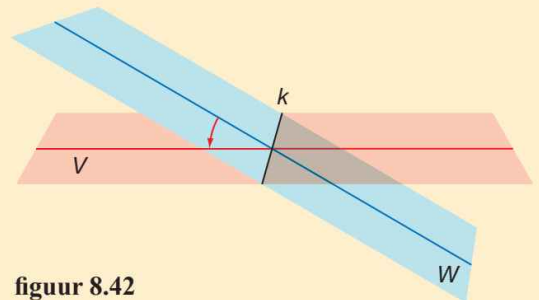


figuur 8.41



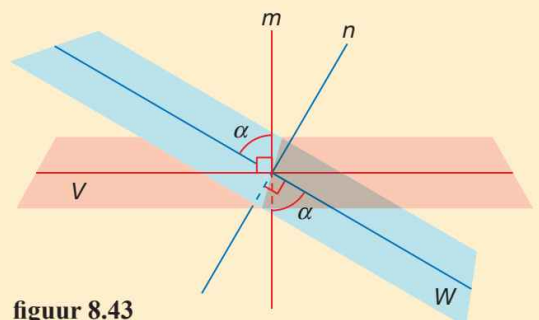
Theorie C Hoek tussen vlakken

In de figuur hiernaast zijn de vlakken V en W met de snijlijn k getekend. De hoek tussen V en W is de kleinste hoek waarover je een van de vlakken om k moet draaien om het te laten samenvallen met het andere vlak.



figuur 8.42

In figuur 8.43 zijn de vlakken V en W getekend, met de normalen m en n . Omdat $\angle(V, W) = 90^\circ - \alpha$ en $\angle(m, n) = 90^\circ - \alpha$ geldt $\angle(V, W) = \angle(m, n)$.



figuur 8.43

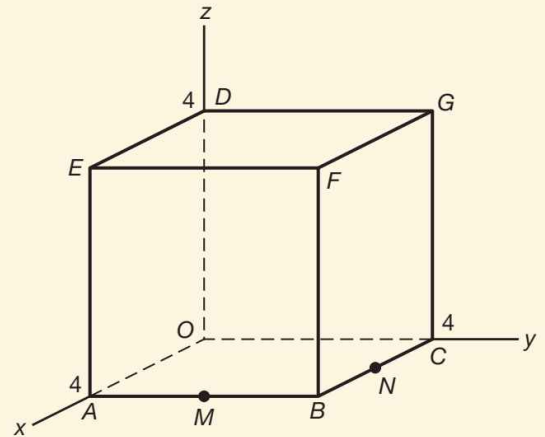
De hoek tussen de vlakken V en W is de hoek tussen een normaal van V en een normaal van W .

Voorbeeld

Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe AB en het punt N is het midden van de ribbe BC .

Bereken $\angle(MND, OND)$.



figuur 8.44

Uitwerking

Lijn m is een normaal van MND en lijn n is een normaal van OND .

$$\vec{r}_m = \vec{n}_{MND} = \overrightarrow{DM} \times \overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_n = \vec{n}_{OND} = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(m, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|4 - 2 + 0|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{85}}$$

Dus $\angle(MND, OND) = \angle(m, n) \approx 77,5^\circ$.

R 36 In het voorbeeld is $\vec{r}_m$ berekend met een uitproduct. Bereken $\vec{r}_m$ met behulp van de assenvergelijking van het vlak MND .

37 Zie het voorbeeld met de kubus in figuur 8.44. Bereken.

a $\angle(MNF, OND)$

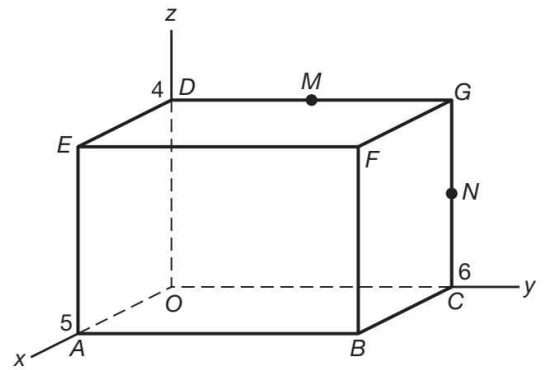
b $\angle(MND, OMD)$

- 38** Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(5, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt N is het midden van de ribbe CG .

Bereken.

- a** $\angle(AMN, OAM)$
b $\angle(EMN, BCD)$



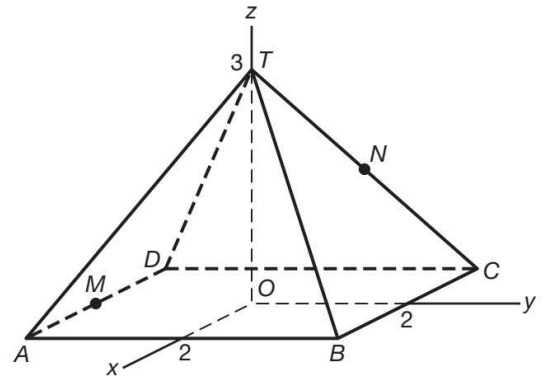
figuur 8.45

- A 39** Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TABCD$ met $A(2, -2, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(-2, 2, 0)$ en $T(0, 0, 3)$.

Het punt M is het midden van de ribbe AD en het punt N is het midden van de ribbe CT .

Bereken.

- a** $\angle(DT, ABN)$
b $\angle(MN, CT)$
c $\angle(ABN, ACT)$
d $\angle MBN$



figuur 8.46

Informatief Coördinaten op een bol

Elk punt op aarde is met twee coördinaten aan te geven.

Er wordt gewerkt met meridianen (lengtecirkels) en parallellen (breedtecirkels).

De nulmeridiaan gaat door de polen en door het Royal Greenwich Observatory in Greenwich, vlakbij Londen.

De bekendste breedtecirkel is de evenaar.

Het snijpunt van de nulmeridiaan en de evenaar levert het punt $(0, 0)$ op.

Ga je vanaf de evenaar naar het noorden, dan krijg je een positie op noorderbreedte. Ga je vanaf de nulmeridiaan naar het oosten, dan kom je op een positie op oosterlengte. De Noordpool ligt op 90 graden

noorderbreedte en de meridianen lopen tot 180 graden

oosterlengte en 180 graden westerlengte. Voor een

precieze plaatsbepaling moet je de graden nog weer

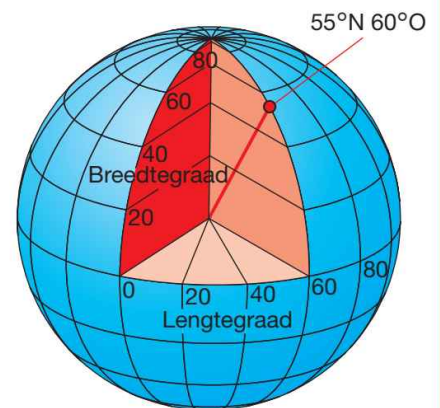
verdelen in minuten (1 graad is 60 minuten) en de

minuten in seconden (1 minuut is 60 seconden). Zo ligt

het monument op de Dam in Amsterdam op 52 graden,

22 minuten en 23 seconden noorderbreedte en 4 graden,

53 minuten en 34 seconden oosterlengte.



De Dam in Amsterdam.

Terugblik

De hoek tussen twee lijnen

Voor de berekening van de hoek φ tussen de lijnen k en l met richtingsvectoren

$$\vec{r}_k \text{ en } \vec{r}_l \text{ gebruik je dat } \cos(\varphi) = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}.$$

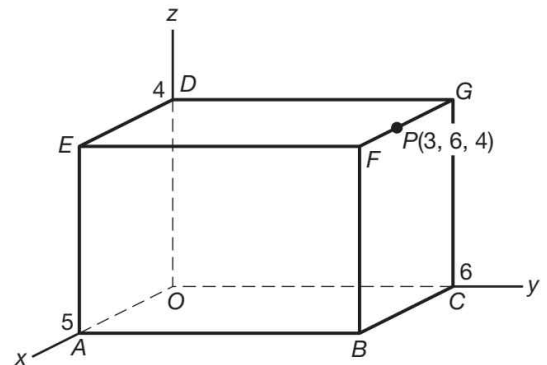
Voor de berekening van de hoek tussen de lijnen AP en BD in de figuur

$$\text{hieronder gebruik je } \vec{r}_{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$\vec{r}_{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\cos(\angle(AP, BD)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{5}{\sqrt{1078}}$$

Dus $\angle(AP, BD) \approx 81,2^\circ$.



De hoek tussen een lijn en een vlak

Voor de berekening van de hoek φ tussen een lijn l en een vlak V bereken je eerst de hoek α tussen l en een normaal n van V . Daarna bereken je $\varphi = 90^\circ - \alpha$.

Bij de berekening van de hoek tussen de lijn BP en het vlak ACD : $12x + 10y + 15z = 60$ in de balk hierboven krijg je

$$\cos(\angle(BP, n)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \right|} = \frac{18}{\sqrt{2345}}$$

$$\angle(BP, n) \approx 68,2^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(BP, ACD) \approx 90^\circ - 68,2^\circ = 21,8^\circ.$$

De hoek tussen twee vlakken

De hoek tussen de vlakken V en W met normalen m en n is de hoek tussen m en n .

Bij de berekening van de hoek tussen de vlakken ACD en OBP : $6x - 5y + 3z = 0$ in de balk hierboven krijg je

$$\cos(\angle(m, n)) = \frac{67}{\sqrt{32830}}$$

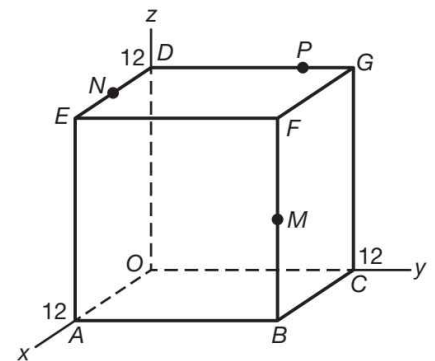
$$\angle(m, n) \approx 68,3^\circ, \text{ dus } \angle(ACD, OBP) \approx 68,3^\circ.$$

8.4 Afstanden in de ruimte

O40 Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(12, 0, 0)$, $C(0, 12, 0)$ en $D(0, 0, 12)$. Het punt M is het midden van BF , het punt N is het midden van DE en het punt $P(0, 9, 12)$ ligt op de ribbe DG .

In deze opgave ga je met behulp van vectoren $d(P, MN)$ berekenen. Daarbij gebruik je het vlak V door P loodrecht op MN en het snijpunt Q van de lijn MN en V .

- Toon aan dat $x + 2y - z = 6$ een vergelijking van V is.
- Het snijpunt van de lijn MN en het vlak V is het punt $Q(8, 4, 10)$. Toon dit aan.
- Bereken $d(P, Q)$ en licht toe dat je hiermee $d(P, MN)$ hebt berekend.



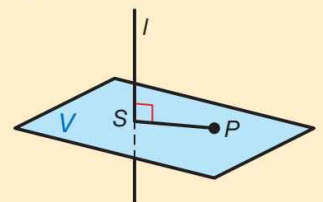
figuur 8.47

Theorie A De afstand van een punt tot een lijn

In opgave 40 heb je gezien hoe je met behulp van een vergelijking van een vlak en een vectorvoorstelling van een lijn de afstand van een punt tot een lijn kunt berekenen. Hierbij is het volgende werkschema gebruikt.

Werkschema: het berekenen van de afstand van een punt P tot een lijn l

- 1 Breng door P het vlak V aan dat loodrecht op l staat.
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van V en l .
- 3 Bereken $d(P, l) = d(P, S)$.



Voorbeeld

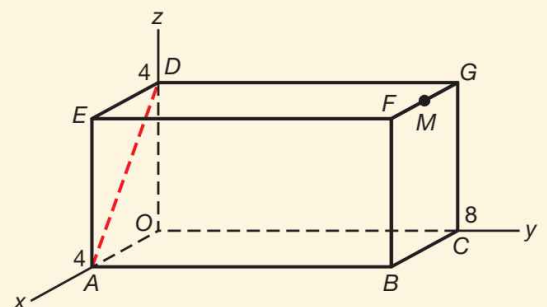
Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 8, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Het punt M is het midden van de ribbe FG .

Bereken $d(M, AD)$.

Uitwerking

$$\vec{r}_{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



figuur 8.48

Het vlak V door M loodrecht op AD .

$$\left. \begin{array}{l} V: -x + z = d \\ \text{door } M(2, 8, 4) \end{array} \right\} d = -2 + 4 = 2$$

Dus $V: -x + z = 2$.

$$AD: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ snijden met } V \text{ geeft } \begin{array}{l} -(4 - \lambda) + \lambda = 2 \\ -4 + \lambda + \lambda = 2 \\ 2\lambda = 6 \\ \lambda = 3 \end{array}$$

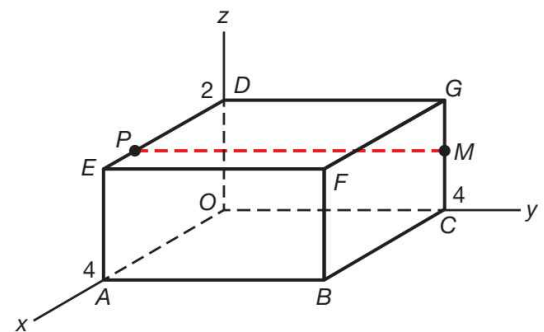
Het snijpunt is $S(1, 0, 3)$.

$$d(M, AD) = d(M, S) = |\overrightarrow{MS}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{66}$$

- 41** Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 2)$. Het punt M is het midden van de ribbe CG en het punt $P(3, 0, 2)$ ligt op de ribbe DE .

Bereken.

- $d(M, P)$
- $d(B, DG)$
- $d(F, MP)$



figuur 8.49

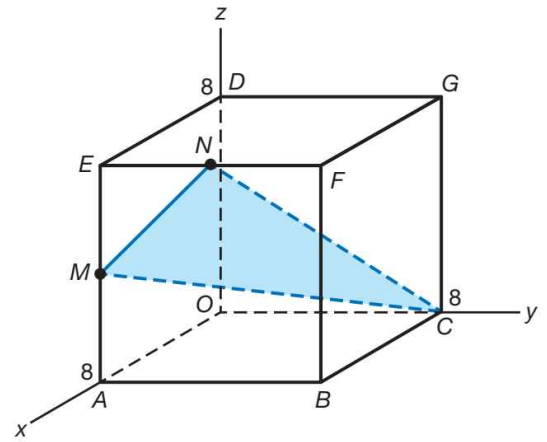
- 42** Bereken de afstand

- van $P(8, 10, 0)$ tot $k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- van $Q(1, 5, 6)$ tot $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- van $R(5, 4, 9)$ tot $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 43** Van driehoek ABC is $A(-3, 0, 3)$, $B(3, 1, -1)$ en $C(0, 1, 1)$.

- Bereken $d(A, BC)$.
- Bereken $O(\triangle ABC)$.

- A44** Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met ribbe 8. Het punt M is het midden van de ribbe AE en het punt N is het midden van de ribbe EF . Bereken de oppervlakte van $\triangle CMN$.



figuur 8.50

- O45** Gegeven is de kubus $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$. Het punt M is het midden van de ribbe DE en het punt P is het midden van de ribbe BF . We willen $d(P, AMG)$ berekenen.

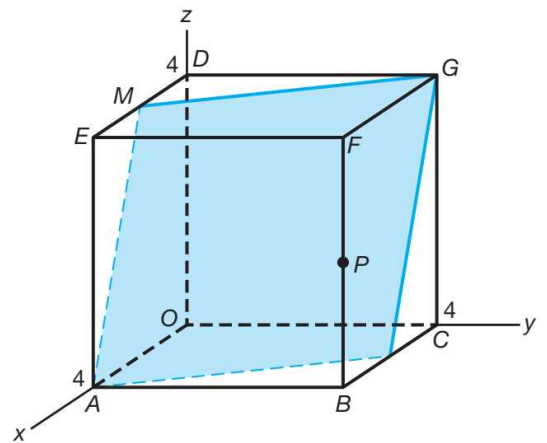
a Licht toe dat AMG : $2x + y + z = 8$.

b Licht toe dat $k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de lijn

door P loodrecht op AMG is.

c Het snijpunt van k met AMG is het punt $Q(2, 3, 1)$. Toon dit aan met een berekening.

d Bereken $d(P, Q)$ en licht toe dat je hiermee $d(P, AMG)$ hebt berekend.



figuur 8.51

Theorie B De afstand van een punt tot een vlak

Door te werk te gaan op de manier van opgave 45 is de afstand van een punt P tot een vlak V te berekenen.

Dus

- Stel een vergelijking op van V .
- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn k door P loodrecht op V . Gebruik $\vec{r}_k = \vec{n}_v$.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt Q van k met V .
- Bereken $d(P, Q)$, dit is $d(P, V)$.

Door bovenstaande aanpak te gebruiken bij het punt $P(x_p, y_p, z_p)$ en het vlak $V: ax + by + cz = d$ is een algemene formule af te leiden voor $d(P, V)$.

Deze formule leid je af in opgave 46.

De afstand van het punt $P(x_p, y_p, z_p)$ tot het vlak $V: ax + by + cz = d$ is

$$d(P, V) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

In woorden: vul de coördinaten van P in de op nul herleide vergelijking van V in, neem hiervan de absolute waarde en deel door de lengte van de normaalvector van V .

Voorbeeld

Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 3)$. Het punt M is het midden van de ribbe DG .

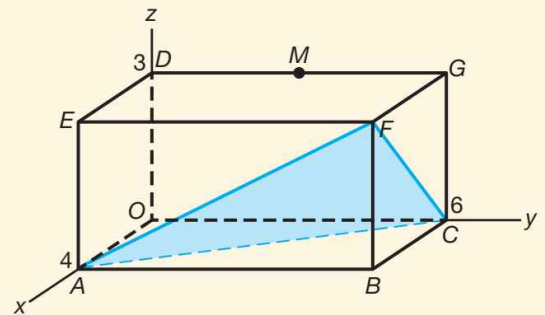
Bereken $d(M, ACF)$ in twee decimalen nauwkeurig.

Uitwerking

$$\left. \begin{array}{l} ACF: \frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{r} = 1 \\ F(4, 6, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + 1 + \frac{3}{r} = 1 \\ \frac{3}{r} = -1 \\ r = -3 \end{array}$$

$$ACF: \frac{x}{4} + \frac{y}{6} - \frac{z}{3} = 1 \text{ ofwel } ACF: 6x + 4y - 8z = 24.$$

$$M(0, 3, 3), \text{ dus } d(M, ACF) = \frac{|0 + 12 - 24 - 24|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-8)^2}} = \frac{36}{\sqrt{116}} \approx 3,34.$$



figuur 8.52

- 46** Gegeven is het punt $P(x_P, y_P, z_P)$ en het vlak $V: ax + by + cz = d$.
De lijn k gaat door P en staat loodrecht op V .
De lijn k snijdt V in het punt Q .

a Licht toe dat $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van k is.

b Bij het punt Q hoort $\lambda = \frac{d - ax_P - by_P - cz_P}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Toon dit aan.

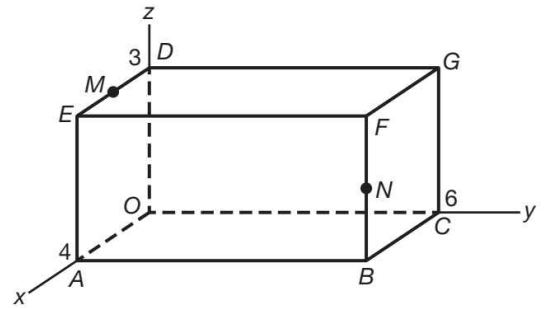
c Uit $P(x_P, y_P, z_P)$ en $Q(x_P + a\lambda, y_P + b\lambda, z_P + c\lambda)$ volgt

$$d(P, Q) = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Toon dit aan.

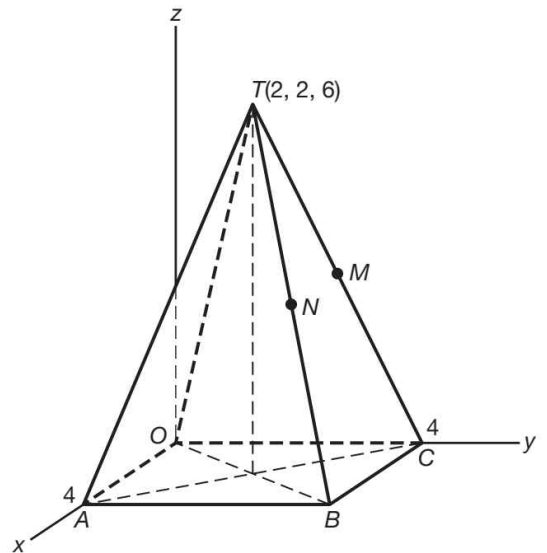
d Toon aan dat uit b en c volgt $d(P, V) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

- 47** Gegeven is de balk $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 3)$. Het punt M is het midden van de ribbe DE en het punt N is het midden van de ribbe BF . Bereken $d(N, AMG)$ in twee decimalen nauwkeurig.



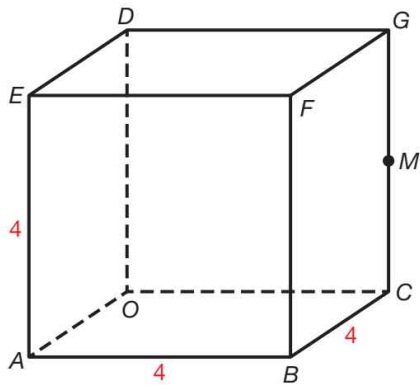
figuur 8.53

- 48** Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TOABC$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $T(2, 2, 6)$. Het punt M is het midden van de ribbe CT en het punt N is het midden van de ribbe BT . Bereken exact $d(N, ABM)$.



figuur 8.54

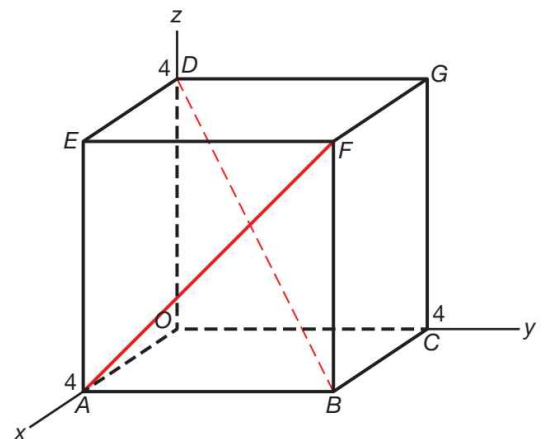
- A 49** Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met ribbe 4. Het punt M is het midden van CG . Bereken exact $d(F, BMD)$.



figuur 8.55

- O 50** Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met ribbe 4 en de kruisende lijnen AF en BD . Zie figuur 8.56.

Licht toe dat $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ een normaalvector is van het vlak V door BD evenwijdig met AF .



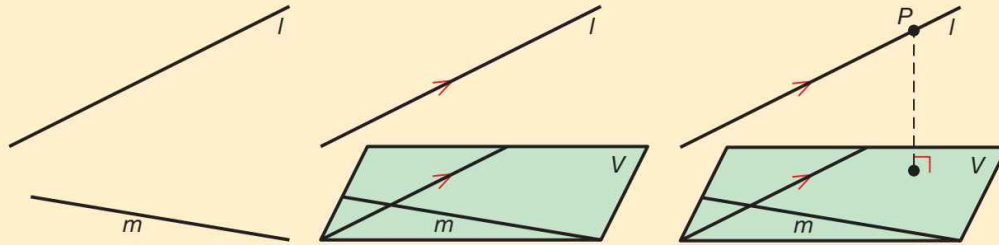
figuur 8.56

Theorie C De afstand tussen twee kruisende lijnen

Om de afstand tussen twee kruisende lijnen l en m te berekenen, gebruik je een vlak V door m evenwijdig met l .

Om een vergelijking van het vlak V te vinden gebruik je dat

$\vec{n}_V = \vec{r}_l \times \vec{r}_m$. Immers $\vec{n}_V \perp \vec{r}_l$ en $\vec{n}_V \perp \vec{r}_m$.



figuur 8.57

Werkschema: het berekenen van de afstand tussen de kruisende lijnen l en m

- 1 Stel een vergelijking op van het vlak V door m dat evenwijdig is met l . Gebruik $\vec{n}_V = \vec{r}_l \times \vec{r}_m$ en een punt op m .
- 2 Neem een punt P op l en bereken $d(P, V)$ met de afstandsformule. Er geldt $d(l, m) = d(P, V)$.

Voorbeeld

Gegeven is de kubus $OABC DEFG$ met $A(4, 0, 0)$,

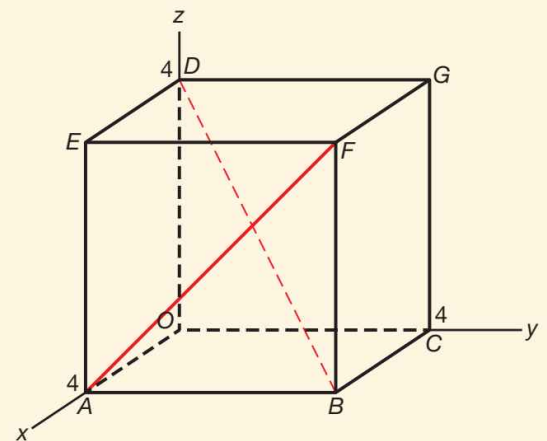
$C(0, 4, 0)$ en $D(0, 0, 4)$.

Bereken exact $d(AF, BD)$.

Uitwerking

$$\vec{r}_{AF} = \overrightarrow{AF} = \vec{f} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{BD} = \overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



figuur 8.58

Vlak V door BD en evenwijdig met AF .

$$\vec{n}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V: \begin{cases} -2x + y - z = d \\ \text{door } B(4, 4, 0) \end{cases} \quad d = -8 + 4 - 0 = -4$$

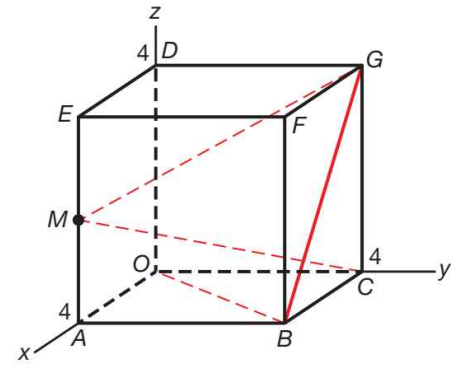
Dus $V: -2x + y - z = -4$.

$$d(AF, BD) = d(A, V) = \frac{|-2 \cdot 4 + 0 - 0 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

- 51** Gegeven is de kubus in de figuur hiernaast met M het midden van de ribbe AE .

Bereken exact.

- a** $d(OB, GM)$
b $d(BG, CM)$



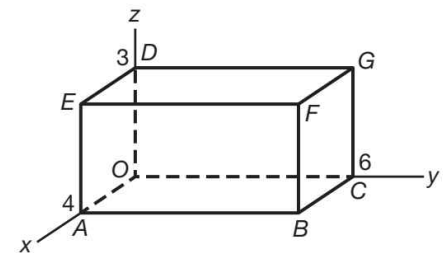
figuur 8.59

- 52** Bereken de afstand tussen de lijnen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- 53** Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 3)$.

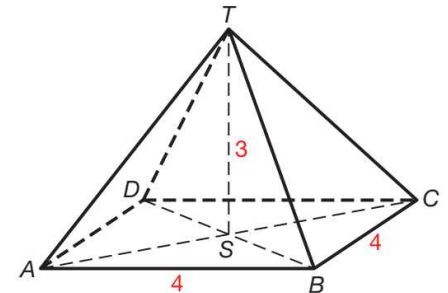
- a** Bereken exact $d(BD, EG)$.
b Het punt P is een variabel punt op de lijn BD .
 Bereken exact de kleinste waarde die $O(\triangle AFP)$ kan aannemen.



figuur 8.60

- A 54** Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $TABCD$ met $AB = 4$ en hoogte $TS = 3$.

- a** Bereken exact $d(AT, BD)$.
b Het punt P is een variabel punt op de lijn AT .
 Bereken exact de kleinste waarde die $O(\triangle BCP)$ kan aannemen.



figuur 8.61

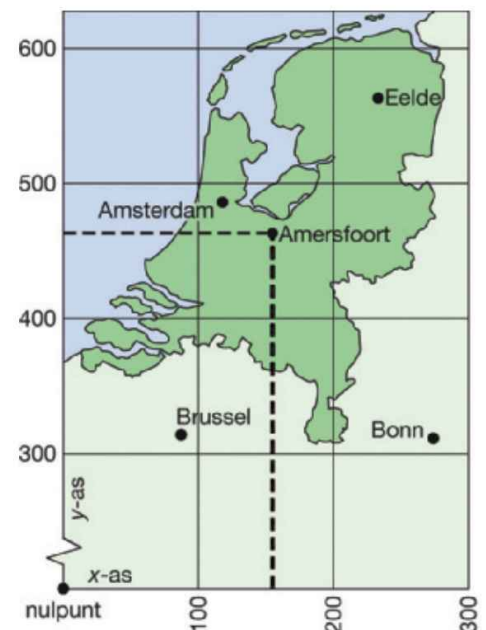
- A 55** In figuur 8.62 zie je hoe in het stelsel van de Rijksdriehoeksmeting de coördinaten van plaatsen worden gedefinieerd (in kilometer). Als voorbeeld is Amersfoort (155, 463) aangegeven.

In deze opgave gaat het over twee vliegtuigen waarvan de banen elkaar kruisen.

Vliegtuig 1 vliegt in een rechte lijn over Bonn (270, 313) naar Schiphol (120, 487). Op het moment dat het vliegtuig boven Bonn vliegt is de hoogte 9588 m en het landt op Schiphol op een hoogte van -12 m.

Vliegtuig 2 is in rechte lijn onderweg van Brussel (87, 313) naar Eelde (230, 560). Op het moment dat het vliegtuig boven Brussel vliegt is de hoogte 10 202 m en het landt op Eelde op een hoogte van 2 m.

Bereken in meter nauwkeurig de kortst mogelijke afstand tussen deze twee vliegtuigen.



figuur 8.62

Terugblik

De afstand van een punt tot een lijn

Bij de berekening van de afstand van een punt P tot een lijn l ga je als volgt te werk.

- 1 Breng door P het vlak V aan dat loodrecht op l staat.
- 2 Bereken de coördinaten van het snijpunt S van V en l .
- 3 Bereken $d(P, l) = d(P, S)$.

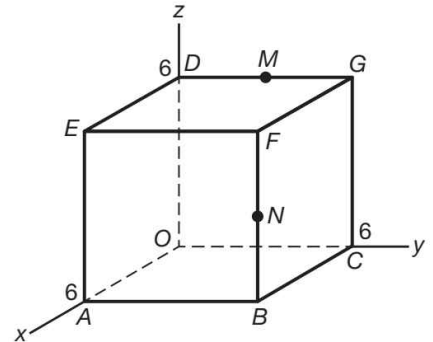
Bij $d(M, AG)$ in de kubus hiernaast krijg je

$$\vec{r}_{AG} = \vec{g} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vlak V door M loodrecht op AG heeft vergelijking $V: -x + y + z = 9$.

$$AG: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ snijden met } V \text{ geeft } -6 + \lambda + \lambda + \lambda = 9.$$

Dit geeft $\lambda = 5$ en het snijpunt $S(1, 5, 5)$, dus $d(M, AG) = d(M, S) = |\overrightarrow{MS}| = \sqrt{6}$.



De afstand van een punt tot een vlak

Voor de afstand van het punt $P(x_p, y_p, z_p)$ tot het vlak

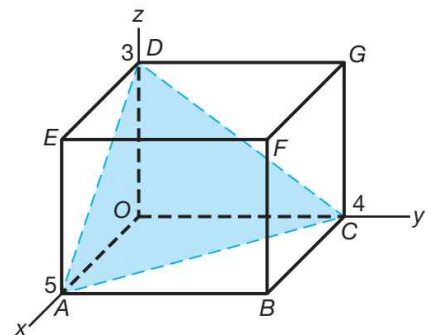
$$V: ax + by + cz = d \text{ geldt } d(P, V) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Bij $d(F, ACD)$ in de balk hiernaast krijg je

$$ACD: \frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \text{ ofwel } 12x + 15y + 20z = 60.$$

$F(5, 4, 3)$, dus

$$d(F, ACD) = \frac{|12 \cdot 5 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 3 - 60|}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 20^2}} = \frac{120}{\sqrt{769}} \approx 4,33.$$



De afstand tussen twee kruisende lijnen

Bij de berekening van de afstand tussen de kruisende lijnen l en m ga je als volgt te werk.

- 1 Stel een vergelijking op van het vlak V door m dat evenwijdig is met l .
- 2 Neem een punt P op l en bereken $d(P, V)$. Nu is $d(l, m) = d(P, V)$.

$$\text{Bij } d(AD, OF) \text{ in de balk hierboven krijg je } \vec{r}_{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{r}_{OF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vlak } V \text{ door } AD \text{ en evenwijdig met } OF \text{ heeft } \vec{n}_V = \vec{r}_{AD} \times \vec{r}_{OF} = \begin{pmatrix} -12 \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

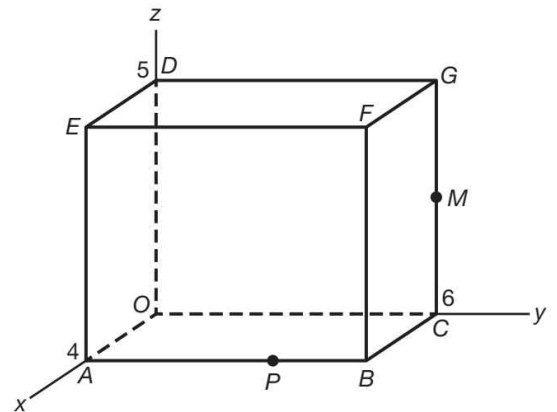
$$V: 6x - 15y + 10z = 30$$

$$d(AD, OF) = d(O, V) = \frac{|0 - 0 + 0 - 30|}{\sqrt{6^2 + (-15)^2 + 10^2}} = \frac{30}{\sqrt{361}} = \frac{30}{19} = 1\frac{11}{19}$$

Diagnostische toets

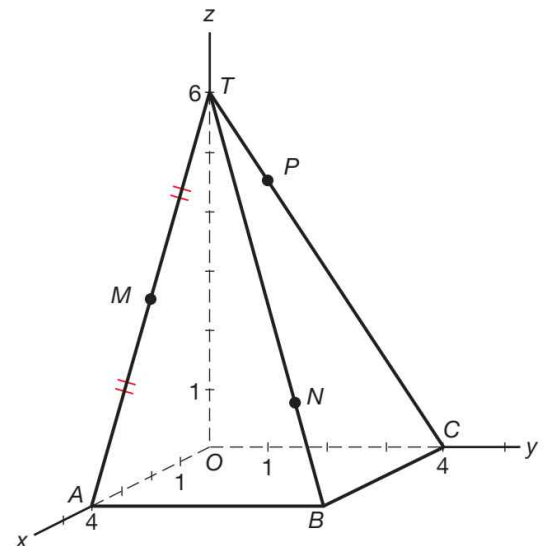
8.1 Coördinaten in de ruimte

- 1** Gegeven is de balk $OABCDEFG$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 5)$. Het punt M is het midden van de ribbe CG en het punt $P(4, 4, 0)$ ligt op AB .
- Bereken de coördinaten van het midden N van MP .
 - Bereken $d(M, P)$.
 - Bereken $\angle DPG$.



figuur 8.63

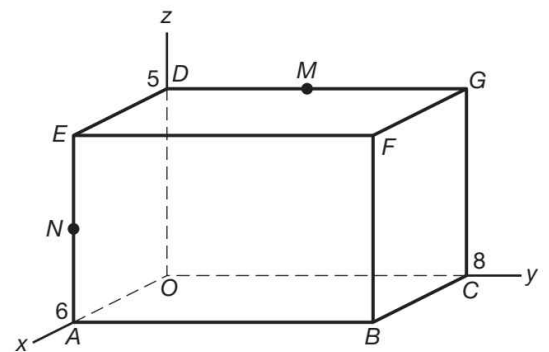
- 2** Gegeven is de vierzijdige piramide $TOABC$ met $A(4, 0, 0)$, $B(4, 4, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $T(0, 0, 6)$. Het punt M is het midden van de ribbe AT , het punt N ligt op de ribbe BT zo, dat $BN = \frac{1}{4}BT$ en het punt P ligt op de ribbe CT zo, dat $CP = \frac{3}{4}CT$.
- Bereken de coördinaten van M , N en P .
 - De lijn MN snijdt het Oyz -vlak in het punt D . Bereken de coördinaten van D .
 - De lijn MP snijdt het Oxy -vlak in het punt E . Bereken de coördinaten van E .



figuur 8.64

8.2 Vergelijkingen van vlakken

- 3** Gegeven is de balk in figuur 8.65. Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt N is het midden van de ribbe AE .
- Stel een vergelijking op van het vlak ACD .
 - Bereken een normaalvector van het vlak CDF .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijn OF en het vlak CMN .
- 4** Zie de balk in figuur 8.65. Stel een vergelijking op van het vlak.
- BCN
 - BFD
 - OMN



figuur 8.65

- 5 Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l die gaat door het punt $A(-3, 0, 1)$ en die loodrecht staat op de lijnen

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.3 Hoeken in de ruimte

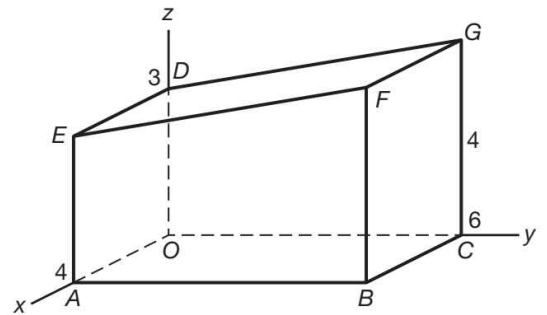
- 6 Gegeven is het prisma $OCGD ABFE$ met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$, $D(0, 0, 3)$ en $G(0, 6, 4)$. Zie figuur 8.66.

Bereken.

- a $\angle(OF, AG)$
- b $\angle(DF, AG)$
- c $\angle ADG$

- 7 Zie het prisma in figuur 8.66. Bereken.

- a $\angle(CE, BDF)$
- b $\angle(DEF, AFC)$
- c $\angle(BGD, OBE)$



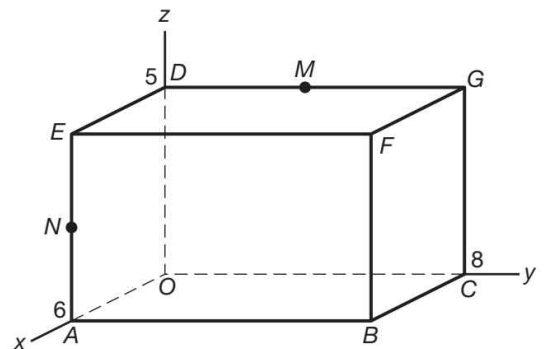
figuur 8.66

8.4 Afstanden in de ruimte

- 8 Van driehoek ABC is $A(-4, 0, 1)$, $B(5, 1, 3)$ en $C(9, 6, 3)$.
- a Bereken $d(A, BC)$.
 - b Bereken $O(\triangle ABC)$.

- 9 Zie de balk in figuur 8.67. Het punt M is het midden van de ribbe DG en het punt N is het midden van de ribbe AE . Bereken in twee decimalen nauwkeurig.

- a $d(B, M)$
- b $d(MN, OF)$
- c $d(D, AC)$
- d $d(A, BMN)$



figuur 8.67

De Europese Kangoeroe is een internationale reken- en wiskundewedstrijd die jaarlijks wordt gehouden.

Er zijn opgaven voor

- de basisschool (wizFUN, wizKID en wizSMART)
- de klassen 1 en 2 havo/vwo en 3 havo (wizBRAIN)
- de klassen 4 en 5 havo en 3, 4, 5 en 6 vwo (wizPROF).

Er zijn eenvoudige, iets lastiger en moeilijke opgaven.

In dit boek staan de iets lastiger wizPROF opgaven van de jaren 2010 tot en met 2013. Je mag geen rekenmachine gebruiken, maar wel kladpapier.



Kangoeroe-opgaven

K



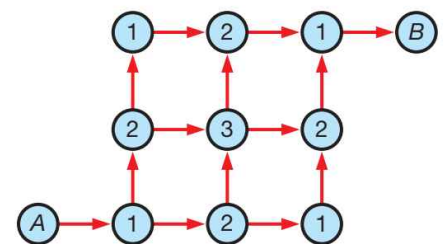
2010

- 1** Lise is op vakantie in Verona. Daar zijn vijf beroemde bruggen over een rivier. Lise maakt een rondwandeling door de stad. Ze begint en eindigt bij haar hotel op de noordoever van de rivier. Lise komt over elke beroemde brug en steekt dus een aantal keren de rivier over. Hoe vaak minstens?



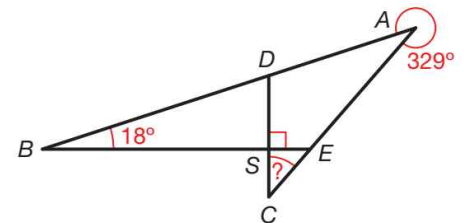
- A 3
B 4
C 5
D 6
E 7

- 2** Je volgt een route van A naar B via de pijlen. Je telt de getallen op die je tegenkomt. Hoeveel verschillende antwoorden kun je krijgen?



- A 1
B 2
C 3
D 4
E 6

- 3** DC staat loodrecht op EB , de buitenhoek bij A is 329° , $\angle B = 18^\circ$. Hoe groot is $\angle C$, de hoek met het vraagteken?



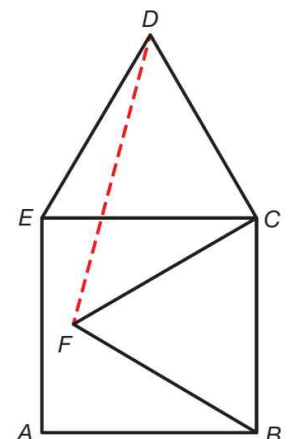
- A 39°
B 40°
C 41°
D 42°
E 43°

- 4** Lise en haar oma zijn beiden op 18 maart jarig. Als je op 18 maart 2010 de leeftijden van haar oma en haar moeder vermenigvuldigt, krijg je 2010. In welk jaar is de oma van Lise geboren?

- A 1933
B 1934
C 1943
D 1944
E 1953

- 5** $ABCE$ is een vierkant met zijde 1. BCF en CDE zijn gelijkzijdige driehoeken. Hoe lang is FD ?

- A $\frac{\sqrt{3}}{2}$
B $\sqrt{5} - 1$
C $\sqrt{2}$
D $\sqrt{6} - 1$
E $\sqrt{3}$



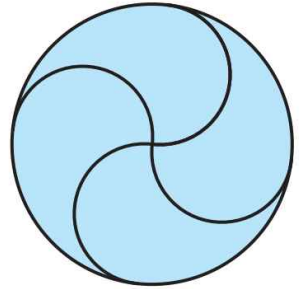
- 6** We kijken naar positieve gehele getallen met de volgende twee eigenschappen:
- als je de cijfers van het getal optelt, krijg je 2010
 - als je de cijfers van het getal vermenigvuldigt, krijg je 2.

Hoeveel van die getallen zijn er?

A 1004 B 1005 C 2008 D 2009 E 2010

- 7** Een cirkel met straal 4 is opgedeeld in vier gelijke gebieden met stukjes cirkel van straal 2.
Wat is de omtrek van zo'n gebied?

A 2π D 8π
B 4π E 12π
C 6π

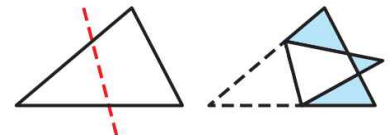


- 8** Bij een supermarkt staan twee rijen in elkaar geschoven winkelwagentjes.
De eerste rij van 10 winkelwagentjes is 2,9 meter lang.
De tweede rij van 20 winkelwagentjes is 4,9 meter lang.
Hoe lang is een winkelwagentje?

A 0,9 m D 1,2 m
B 1 m E 1,4 m
C 1,1 m



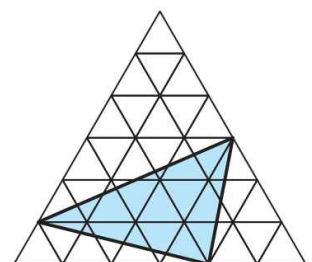
- 9** De linker driehoek is gevouwen langs de stippellijn.
Daardoor krijg je de rechter figuur.
De oppervlakte van de linker driehoek is 1,5 keer de oppervlakte van de rechter figuur.
De gekleurde gebieden hebben samen oppervlakte 1 dm^2 .
Hoeveel dm^2 is de oppervlakte van de linker driehoek?



A 2
B 3
C 4
D 5
E kun je niet weten

- 10** De grote gelijkzijdige driehoek bestaat uit 36 kleine gelijkzijdige driehoekjes met elk een oppervlakte van 1 cm^2 .
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de gekleurde driehoek?

A 9
B 10
C 11
D 12
E 15



2011

- 11** Direct na de start van een race is Daan 1^e, Karel 2^e en Omar 3^e. Tijdens de race halen Daan en Karel elkaar 9 keer in (dat wil zeggen Daan haalt Karel in of omgekeerd); Karel en Omar halen elkaar 10 keer in en Daan en Omar 11 keer. In welke volgorde komen ze over de finish?

A Daan, Karel, Omar
 B Karel, Omar, Daan
 C Karel, Daan, Omar
 D Omar, Karel, Daan
 E Omar, Daan, Karel

- 12** Van een getal n is bekend dat $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$. Wat is n ?

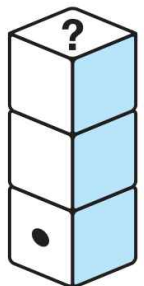
A 1005 B 1006 C 2008 D 2010 E 2011

- 13** Emma schrijft in elk vakje een geheel getal. In ieder vierkantje van 2×2 vakjes moet de som van de getallen 10 zijn. Vijf van de getallen staan er al in. Wat wordt de som van de getallen in de nu nog lege vakjes?

1		0
	2	
4		3

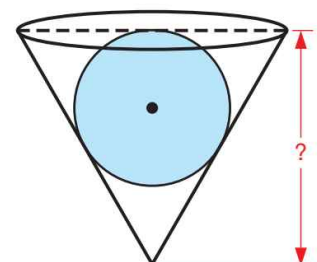
A 9 D 12
 B 10 E 13
 C 11

- 14** Bij een dobbelsteen hebben twee kanten tegenover elkaar samen altijd zeven ogen. Drie dobbelstenen staan op elkaar. In deze stapel hebben de kanten die tegen elkaar liggen op beide plaatsen samen vijf ogen. Op de onderste dobbelsteen kun je de kant zien die één oog heeft. Hoeveel ogen heeft de bovenkant van de stapel?



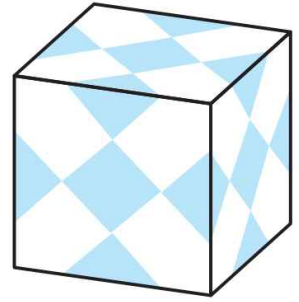
A 2 D 5
 B 3 E 6
 C 4

- 15** Een knikker met straal 15 rolt in een kegelvormig gat. Vanaf de zijkant bekeken heeft het gat de vorm van een gelijkzijdige driehoek. De knikker past er precies in. Hoe diep is het gat?



A $30\sqrt{2}$ B $25\sqrt{3}$ C $60(\sqrt{3} - 1)$ D 45 E 60

- 16** Daan heeft een glazen kubus met ribben van 10 cm. Hij plakt er blauwe vierkantjes op zoals in het plaatje. De zes kanten van de kubus zien er nu hetzelfde uit. Hoeveel cm^2 van het kubusoppervlak is nu blauw gekleurd?



A 75
B 150
C 225
D 300
E 375

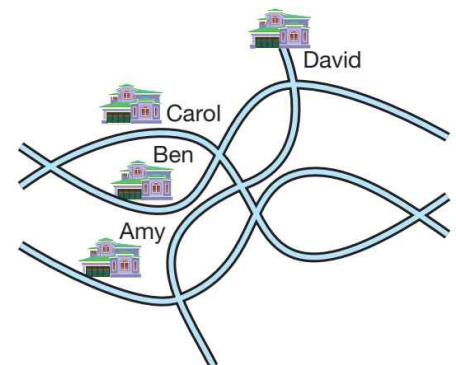
- 17** Emma maakt lijsten van getallen van drie cijfers. De getallen in zo'n lijst moeten opeenvolgend zijn, bijvoorbeeld 204, 205, 206. Elk getal moet minstens één oneven cijfer hebben, dus 204 mag bijvoorbeeld niet. Hoeveel getallen staan er in de langste lijst die Emma kan maken?

A 10 B 100 C 101 D 110 E 111

- 18** Sonia heeft twee kubusvormige bakken. De ribben van de grootste kubus zijn 1 dm groter dan die van de kleinste. Beide bakken zijn gevuld met water. De grootste bak heeft 217 liter meer. Hoeveel liter water zit er in de kleinste bak?

A 125 B 243 C 512 D 729 E 1331

- 19** Tijdens een busreis tekende Omar een plattegrond van zijn dorp. De bus schudde nogal, waardoor de tekening niet goed lukte. Wel lukte het Omar om de vier straten, hun zeven kruispunten en de huizen van zijn vrienden te tekenen. Maar in werkelijkheid zijn drie van de straten recht; slechts één straat maakt bochten. Wie woont er aan deze bochtige straat?



A Amy
B Ben
C Carol
D David
E dat kun je niet bepalen

- 20** Iemand zoekt tweetallen positieve gehele getallen x en y , met $x \leq y$, waarvoor geldt: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$. Hoeveel van die tweetallen zijn er?

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

2012

- 21** Als Lucas op een tafel staat en Daan staat op de grond, dan komt Lucas 80 cm boven Daan uit.
Als Daan op dezelfde tafel staat en Lucas op de grond, dan komt Daan een meter boven Lucas uit.
Hoeveel cm is de tafel hoog?
- A 20 B 80 C 90 D 100 E 120
- 22** Julia en Emma spelen een spelletje. Elk spelletje kent een winnaar.
Als Emma wint, dan moet Julia haar twee euro betalen.
Wint Julia, dan moet Emma haar drie euro betalen.
Nadat er dertig spelletjes zijn gespeeld hebben beide meisjes evenveel geld als bij het begin.
Hoeveel keer heeft Julia gewonnen?
- A 6 B 12 C 18 D 24 E 30
- 23** Een getal van vier cijfers heeft een 3 op de plaats van de honderdtallen.
De som van de andere cijfers is ook 3.
Hoeveel van deze getallen zijn er?
- A 2 B 3 C 4 D 5 E 6
- 24** Drie meisjes houden een hardloophwedstrijd. Vier toeschouwers doen elk een voorspelling.
De eerste: 'Lisa of Sofie gaat winnen.'
De tweede: 'Rachida eindigt achter Sofie.'
De derde: 'Sofie eindigt vóór Lisa of ze wordt laatste.'
De vierde: 'Sofie of Rachida wordt tweede.'
Na afloop van de race blijken alle voorspellingen goed te zijn.
In welke volgorde kwamen de meisjes over de finish?
- A Lisa, Sofie, Rachida
B Lisa, Rachida, Sofie
C Rachida, Sofie, Lisa
D Sofie, Lisa, Rachida
E Sofie, Rachida, Lisa
- 25** Het getal $2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$ eindigt op een aantal nullen.
Wat is het laatste cijfer vóór al deze nullen?
- A 1 B 2 C 4 D 6 E 9

- 26** We hebben een lijst opeenvolgende positieve gehele getallen. De lijst begint met 1. Dus 1, 2, 3, enzovoort. In totaal heeft de lijst 231 cijfers. Wat is het laatste getal van de lijst?

A 111 B 113 C 115 D 116 E 117

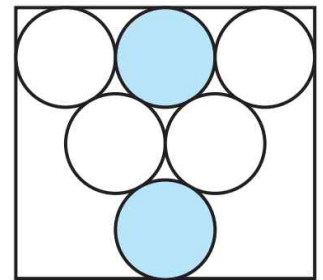
- 27** Een juwelier heeft 12 stukjes ketting van twee schakels. Hij wil er één grote ketting van maken. Daarvoor moet hij een aantal schakels openen (en later weer sluiten). Wat is het kleinste aantal schakels dat hij moet openen?

A 8 B 9 C 10 D 11 E 12



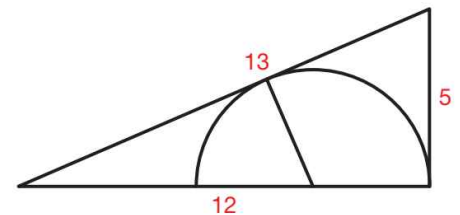
- 28** In een rechthoek is een ‘gelijkzijdige driehoek’ van rakende cirkels getekend. De lange zijde van de rechthoek is 6 cm. Hoeveel cm is de afstand tussen de gekleurde cirkels?

A 1 B $\sqrt{2}$ C $2\sqrt{3} - 2$ D $\frac{\pi}{2}$ E 2



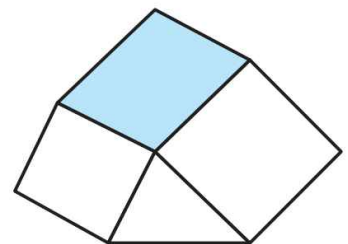
- 29** Hiernaast zie je twee rechthoekige driehoeken en een halve cirkel. De grote rechthoekige driehoek heeft zijden 5, 12 en 13. Wat is de straal van deze halve cirkel?

A $\frac{7}{3}$ B $\frac{10}{3}$ C 4 D $\frac{13}{3}$ E $\frac{17}{3}$



- 30** De figuur hiernaast bestaat uit een vierkant met zijde 4 cm, een vierkant met zijde 5 cm, een driehoek met een oppervlakte van 8 cm^2 en een blauw parallellogram. Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het blauwe parallellogram?

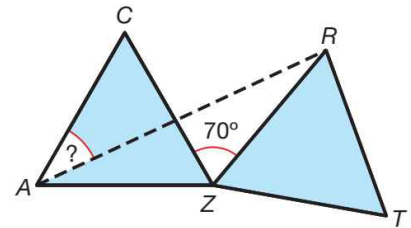
A 15 B 16 C 18 D 20 E 21



2013

- 31** De gelijkzijdige driehoek AZC wordt om Z gedraaid naar driehoek RZT . Hierbij is $\angle CZR = 70^\circ$.
Hoe groot is hoek $\angle CAR$?

A 20° D 35°
B 25° E 40°
C 30°

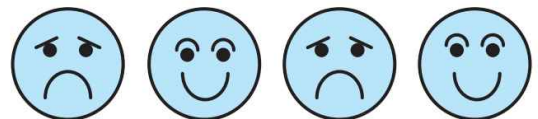


- 32** Vier knoppen staan in een rij, zoals in het plaatje hiernaast.

Als je op een knop drukt, verandert het gezicht van die knop en ook van de knoppen er direct naast: een vrolijk gezicht wordt verdrietig en een verdrietig gezicht wordt vrolijk.

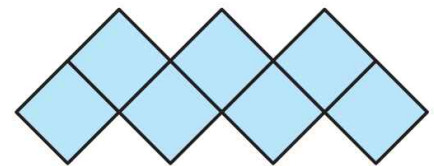
Je wilt alle gezichten vrolijk krijgen.
Hoe vaak moet je daarvoor drukken?

A 2 B 3 C 4 D 5 E 6



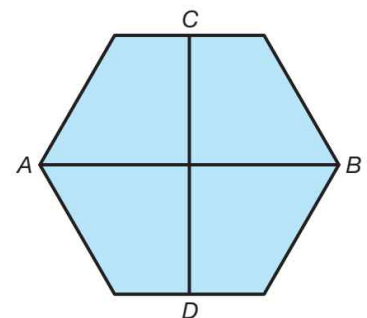
- 33** De figuur hiernaast bestaat uit een 'zigzag' van zeven vierkanten van 1×1 cm. Zijn omtrek is 16 cm.
Hoeveel cm is de omtrek van een 'zigzag' die op dezelfde manier is gemaakt van 2013 vierkanten?

A 2022 B 4028 C 4032 D 6038 E 8050



- 34** Het lijnstuk AB verbindt twee tegenover elkaar gelegen hoekpunten van een regelmatige zeshoek. Het lijnstuk CD verbindt de middens van twee tegenover elkaar gelegen zijden. De oppervlakte van de zeshoek is 60.
Wat is het product van de lengtes van AB en CD ?

A 40 D 80
B 50 E 100
C 60



- 35** Na afloop van een test bleek dat de gemiddelde score 1,2 hoger zou zijn geweest als iedere jongen van de klas 3 punten meer had gehaald.
Hoeveel procent van de klas was meisje?

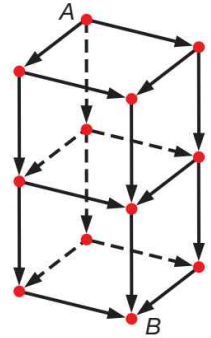
A 20% B 30% C 40% D 50% E 60%

- 36** Karel maakt rijtjes van vijf opeenvolgende positieve gehele getallen met de eigenschap: de som van drie van deze getallen is gelijk aan de som van de andere twee. Hoeveel van deze rijtjes bestaan er?

A 0
B 1
C 2
D 3
E meer dan 3

- 37** Hoeveel verschillende kortste routes zijn er van A naar B ?

A 6
B 8
C 9
D 12
E 15



- 38** Van een getal van zes cijfers is het volgende bekend: de som van de cijfers is even en het product is oneven. Welke van de volgende beweringen is waar?

A twee of vier van de cijfers zijn even
B het aantal oneven cijfers is oneven
C zo'n getal bestaat niet
D de cijfers kunnen allemaal verschillend zijn
E A, B, C en D zijn alle vier fout

- 39** Op een eiland wonen 2013 mensen. Sommigen zijn ridders, die spreken altijd de waarheid. De anderen liegen altijd. Iedere dag zegt een van de mensen: 'Na mijn vertrek zal het aantal ridders gelijk zijn aan het aantal leugenaars.' Daarna verlaat hij het eiland. Na 2013 dagen is het eiland onbewoond. Hoeveel leugenaars waren er aan het begin?

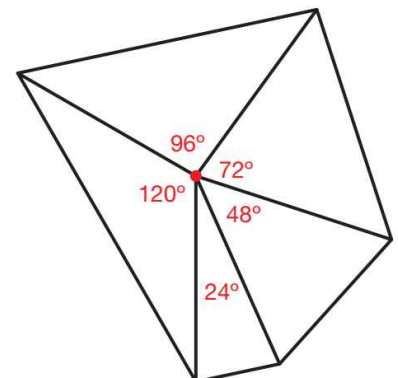
A 0
B 1006
C 1007
D 2013
E kun je niet weten

- 40** We willen een gesloten kring van gelijkbenige driehoeken leggen, waarvoor
- de toppen hetzelfde punt zijn
 - de kleinste tophoek een geheel aantal graden is
 - de andere tophoeken opvolgende veelvouden van die kleinste tophoek zijn.

In het plaatje zie je een voorbeeld.

We willen een kring met zoveel mogelijk gelijkbenige driehoeken.

Wat is in dat geval de kleinste tophoek?



A 1°
B 2°
C 3°
D 6°
E 8°

Gemengde opgaven

5 Discrete kansverdelingen

- 1** In 2015 had 68% van de nieuwe studenten aan de Nederlandse universiteiten een vwo-diploma en 19% een hbo-diploma. De rest had een andere vooropleiding. Van de nieuwe studenten in 2015 worden er dertien gekozen voor een onderzoek. Bereken de kans dat
- a tien studenten een vwo-diploma hebben
 - b minstens drie studenten een hbo-diploma hebben
 - c er negen studenten een vwo-diploma hebben en vier een hbo-diploma
 - d er zeven studenten een vwo-diploma hebben en vier een hbo-diploma
 - e er minstens zes een vwo-diploma hebben en minstens zes een hbo-diploma.
- 2** Een klas maakt een proefwerk bestaande uit 18 vierkeuzevragen.
- a Bereken de kans dat Martijn, die elk antwoord moet raden, twee of drie juiste antwoorden heeft.
 - b Alfred weet op vijf vragen met zekerheid het juiste antwoord. De andere antwoorden moet hij gokken. Bereken de kans dat hij in totaal minder dan acht vragen goed beantwoordt.
 - c Patricia weet op tien vragen het juiste antwoord. Bij de andere vragen moet ze het antwoord raden. Bereken de kans dat ze in totaal toch maar hoogstens twaalf goede antwoorden heeft.
- 3** In een vaas zitten vijf rode, vier witte en drie blauwe knikkers.
- a Bas pakt met terugleggen zes keer een knikker uit de vaas. Bereken de kans dat hij drie keer een rode en drie keer een blauwe knikker pakt.
 - b Suzan pakt in één greep drie knikkers uit de vaas en legt ze vervolgens weer terug. Ze doet dit in totaal zes keer. Bereken de kans dat ze daarbij twee keer geen enkele rode knikker pakt.
 - c Rob pakt zonder terugleggen vier knikkers uit de vaas. Bereken de kans dat er evenveel witte als blauwe knikkers in de vaas achterblijven.
 - d Klaas pakt zonder terugleggen zes knikkers uit de vaas. Bereken de kans dat hij minstens twee rode en minstens twee witte knikkers pakt.

- 4** In een vaas zitten vier rode en zes blauwe knikkers. Mark pakt net zolang knikkers uit de vaas totdat hij drie rode heeft. Bereken de kans dat hij
- a** bij de vijfde keer pakken de tweede rode knikker pakt
 - b** bij de zesde keer pakken stopt
 - c** minstens zeven knikkers pakt.

Job pakt met terugleggen knikkers uit de vaas. Hij stopt zodra hij voor de derde keer een rode pakt.

- Bereken de kans dat hij
- d** hoogstens vijf keer een knikker pakt
 - e** minstens tien keer een knikker pakt.

- 5** In de figuur hiernaast zie je een gedeelte van het speelveld van een Amerikaanse roulette. De draaischijf is verdeeld in 38 sectoren, die genummerd zijn van 1 tot en met 36 en verder met 0 en 00. De sectoren 0 en 00 zijn groen, van de overige sectoren is de helft rood en de helft zwart. Alle sectoren zijn even groot. Marloes speelt 20 keer Amerikaanse roulette. Bereken de kans dat het balletje
- a** zes keer op zwart komt
 - b** minstens twee keer op groen komt
 - c** tien keer op rood en acht keer op zwart komt.



Sabine zet elk spel € 10 in op rood. Komt het balletje op rood, dan krijgt ze € 20 uitbetaald, anders is ze haar inzet kwijt.

- Bereken de kans dat Sabine
- d** na vier keer spelen quitte speelt
 - e** na tien keer spelen winst heeft.

Sam heeft de volgende strategie bedacht.

Hij zet € 10 in op rood. Als het balletje niet op rood komt, verdubbelt hij bij het volgende spel zijn inzet op rood. Hij stopt met spelen zodra het balletje op rood komt of als hij zijn inzet niet meer kan verdubbelen. Als het balletje op rood komt, krijgt Sam twee keer zijn inzet uitbetaald.

Sam heeft € 2600 bij zich, waarmee hij met zijn strategie hooguit acht keer kan spelen. Het lijkt hem onwaarschijnlijk dat het balletje acht keer achter elkaar niet op rood komt, dus hij verwacht met zijn strategie winst te maken.

- f** Bereken de kans dat Sam minder dan vier keer speelt.
- g** Bereken de kans dat Sam winst maakt.
- h** Hoeveel winst maakt Sam als het balletje bij de eerste keer spelen op rood komt? En hoeveel winst maakt hij als het balletje voor het eerst bij de tweede keer spelen op rood komt? En voor het eerst bij de derde keer spelen?
- i** Bereken de winstverwachting van Sam.

- 6** In figuur G.1 zie je drie schijven die onafhankelijk van elkaar draaien. Nadat de schijven zijn uitgedraaid wijst elke pijl één cijfer aan.

Je winst de hoofdprijs van €100 als elk van de pijlen het cijfer 3 aanwijst.

Bij drie keer het cijfer 4 win je €20 en bij drie keer het cijfer 5 win je €5.

Mariska speelt het spel één keer.

X = het bedrag dat Mariska wint.

Y = de som van de drie aangewezen getallen.

- Bereken $P(X = 100)$.
- Stel de kansverdeling van X op. Schrijf de kansen als breuken met noemer 120.
- Bereken $P(Y = 10)$.
- Coby speelt het spel vier keer. Bij elk spel heeft ze twee keer het cijfer 3.
Bereken de kans op deze situatie.
- Anne speelt het spel net zolang totdat ze de hoofdprijs wint.
Bereken de kans dat ze acht of negen keer moet spelen.
- Hoe vaak moet Jantine het spel spelen opdat de kans dat ze de hoofdprijs minstens één keer wint groter is dan 0,3?



figuur G.1

- 7** Experiment: het gooien met een viervlaksdobbelsteen totdat je vier ogen gooit.

X = het aantal worpen.

- Bereken $P(X = k)$ voor $k = 1, 2, 3$ en 4 .
- De kansen van vraag a vormen een meetkundige rij.
Geef de beginwaarde en de factor van deze meetkundige rij en stel de directe en de recursieve formule op.
- Gebruik de formule voor de som van de meetkundige rij om aan te tonen dat $P(X \leq k) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k$.
- Bereken de kans op minstens zes worpen.

De stochast Y is geometrisch verdeeld met parameter p .

- Druk $P(Y \leq k)$ en $P(Y > k)$ uit in k en p .

Bij de vragen f en g gaat het over worpen met twee (gewone) dobbelstenen.

- Experiment: het gooien met twee dobbelstenen totdat de som van de ogen meer dan 9 is.
Bereken de kans dat je hoogstens zeven keer gooit.
- Experiment: het gooien met twee dobbelstenen totdat je dubbel zes gooit.
Bereken de kleinste waarde van k waarvoor geldt dat de kans op hoogstens k worpen groter is dan 75%.

8 In een laboratorium test men flesjes met het medicijn A op de aanwezigheid van een virus. Bekend is namelijk dat 1 op de 20 flesjes zo'n virus bevat. Bij deze controle neemt men uit elk flesje een monster. Met de beschikbare apparatuur is het mogelijk maximaal tien monsters tegelijk te testen. Het nemen van een monster uit een flesje kost € 2 en elke test kost € 8. Zo kost het gecombineerd testen van drie monsters € 14. Valt deze test positief uit (dat wil zeggen dat het virus aanwezig is) dan moeten de drie monsters afzonderlijk getest worden, hetgeen nog eens $3 \times € 8 = € 24$ kost.

a We bekijken de situatie waarbij vier flesjes op het virus worden onderzocht.

- Men combineert de vier monsters en de test valt negatief uit. Wat zijn de kosten? Bereken de kans dat een gecombineerde test van vier monsters negatief uitvalt.
- Men combineert de vier monsters en de test valt positief uit, dus de vier monsters moeten elk afzonderlijk getest worden. Geef de kans op deze situatie en bereken de totale kosten.
- Bereken de verwachtingswaarde van de kosten en vervolgens de verwachtingswaarde van de kosten per monster.

b We bekijken de situatie waarbij vijf flesjes op het virus worden onderzocht.

Bereken in centen nauwkeurig de verwachtingswaarde van de kosten per monster als men besluit de vijf monsters te combineren.

c Ga uit van de situatie waarbij n flesjes op het virus worden onderzocht. Hierbij is $n > 1$.

Toon aan dat de verwachtingswaarde E van de kosten per monster in het geval men besluit de n monsters te combineren,

gelijk is aan $E = 10 - 8 \cdot 0,95^n + \frac{8}{n}$.

d Onderzoek voor welke n de verwachtingswaarde E van de kosten minimaal is.



- 9** Bij een drukkerij is op 10 000 bladzijden het aantal drukfouten geteld. Zie de tabel hiernaast.
- a** Bereken het gemiddelde aantal fouten per bladzijde.

Stel X = het aantal fouten per bladzijde.

- b** Stel de kansverdeling van X op.

Als we aannemen dat X een poissonverdeling heeft, dan

geldt $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ met $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Uit deze formule volgt $\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{\lambda}{k + 1}$.

- c** Toon dit aan en licht toe dat $\lambda = (k + 1) \cdot \frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)}$.

- d** Bereken λ voor $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

- e** Licht toe dat uit het bovenstaande volgt dat X bij benadering poissonverdeeld is met $\lambda \approx 0,90$.

Ga bij de volgende vragen uit van de poissonverdeling van vraag e.

Bereken de kans dat er

- f** in een boek van 100 bladzijden tussen de 50 en 100 drukfouten zitten
- g** minstens 850 drukfouten zitten in een steekproef van 10 boeken van elk 100 bladzijden
- h** in een steekproef van 10 boeken van elk 100 bladzijden in elk boek minstens 85 drukfouten zitten.

De drukkerij wil het drukproces veranderen zodat de kans op minstens 85 drukfouten per boek in een steekproef van 10 boeken van elk 100 bladzijden kleiner is dan 1%.

- i** Bereken het gemiddelde aantal drukfouten per bladzijde waarmee dit streven gerealiseerd wordt. Rond af op twee decimalen.

Aantal fouten per bladzijde	Aantal bladzijden
0	4066
1	3659
2	1647
3	494
4	111
5	20
6	3
7	0

6 Discrete dynamische modellen

- 10** Tijdens een lange droogteperiode verdampt dagelijks 10% van het water in een vijver. Om het waterpeil niet te ver te laten zakken, voert men elke dag 500 m³ water toe. Aan het begin van de droogteperiode zit er 10 000 m³ water in de vijver. Na n dagen zit er W_n m³ water in de vijver.
- a** Stel de recursieve formule van W_n op.
- b** Stel de directe formule van W_n op.
- c** Na hoeveel dagen zit er voor het eerst minder dan 7000 m³ water in de vijver?

- 11** Op 1 januari 2015 heeft een pottenbakster 1800 schalen in haar winkel staan. Elk jaar verkoopt zij 40% van de aanwezige voorraad. Telkens in januari vult zij haar voorraad aan met 1000 nieuwe schalen. Na n jaar is het aantal schalen in haar winkel gelijk aan S_n .
- Stel bij deze situatie een differentievergelijking op.
 - Teken de webgrafiek.
Convergeert de rij S_n ?
 - Stel de directe formule op van S_n .



- 12** Bij een reclamecampagne op de radio wordt elk uur van 9 uur 's morgens tot en met 8 uur 's avonds een reclameboodschap uitgezonden. De eerste keer is op 1 februari om 9:00 uur. De doelgroep van deze reclame omvat 1 000 000 personen. De eerste keer horen 80 000 personen van de doelgroep de boodschap. Elke volgende uitzending bereikt 5% van de personen uit de doelgroep die de boodschap nog niet gehoord heeft. R_n is het aantal personen van de doelgroep dat n uitzendingen na de eerste uitzending de reclameboodschap heeft gehoord.
- Hoeveel personen hebben op 1 februari om 12:00 uur de boodschap gehoord?
 - Stel bij deze situatie een differentievergelijking op.
 - Stel de directe formule op van R_n .
 - Hoeveel personen hebben op 2 februari om 12:00 uur de boodschap gehoord?
 - De reclamecampagne wordt stopgezet als per uitzending minder dan 10 000 personen van de doelgroep voor het eerst worden bereikt.
Na hoeveel uitzendingen wordt de reclamecampagne beëindigd? Hoeveel personen uit de doelgroep zijn dan bereikt?

- 13** Een griep epidemie wordt beschreven door het model hiernaast.
Tellingen wijzen uit dat $G_0 = 6000$, $Z_0 = 100$, $I_0 = 0$, $G_1 = 5982$ en $Z_1 = 112$. De tijd t is in dagen.

- Toon aan dat uit de gegevens volgt dat $a = 0,00003$ en $b = 0,06$.
- Bereken hoeveel mensen op de derde dag griep hebben gekregen en hoeveel mensen er op die dag beter zijn geworden.
- Gegeven is $G_{14} = 5456$ en $Z_{14} = 455$.
Bereken hiermee hoeveel mensen op de vijftiende dag griep hebben gekregen en hoeveel mensen er op die dag beter zijn geworden.

$$\begin{aligned} G_t &= G_{t-1} - a \cdot G_{t-1} Z_{t-1} \\ Z_t &= Z_{t-1} + a \cdot G_{t-1} Z_{t-1} - b \cdot Z_{t-1} \\ I_t &= I_{t-1} + b \cdot Z_{t-1} \end{aligned}$$

- 14** In een tank wordt afvalwater biologisch gezuiverd. Op 1 juni om 18:00 uur is 20 kg verontreiniging in de tank aanwezig. Dagelijks wordt 27% van de verontreiniging afgebroken. Verder wordt elke dag om 18:00 uur 12 kg verontreiniging aangevoerd. De hoeveelheid verontreiniging in de tank n dagen na 1 juni is H_n .
- Stel de differentievergelijking op die bij deze situatie hoort.
 - Stel de directe formule op van H_n .

In plaats van elke dag om 18:00 uur 12 kg verontreiniging aan te voeren, voert men elk uur 0,5 kg verontreiniging aan. Hierbij hoort de differentievergelijking $H_t = 0,987H_{t-1} + 0,5$ met $H_0 = 20$ en t in uren.

- Licht deze differentievergelijking toe en stel de directe formule op van H_t voor deze nieuwe situatie.
- In beide genoemde situaties wordt per dag evenveel verontreiniging aangevoerd.

Welke zuiveringsmethode heeft de voorkeur? Waarom?

- 15** De vakantiebestemmingen van de inwoners van Middelburg zijn uitgebreid onderzocht. Uit dit onderzoek onder de vakantiegangers kwam onder andere het volgende naar voren. 24% van de inwoners die in Nederland (N) op vakantie gaan, gaat een jaar later naar het buitenland. De overige 76% gaat weer in Nederland op vakantie. Van degenen die naar het buitenland (B) op vakantie gaan, gaat een jaar later 82% weer naar het buitenland en gaat 18% in Nederland op vakantie.



Op $t = 0$, met t in jaren, gaan 20 000 inwoners van Middelburg in Nederland op vakantie en gaan er 10 000 naar het buitenland.

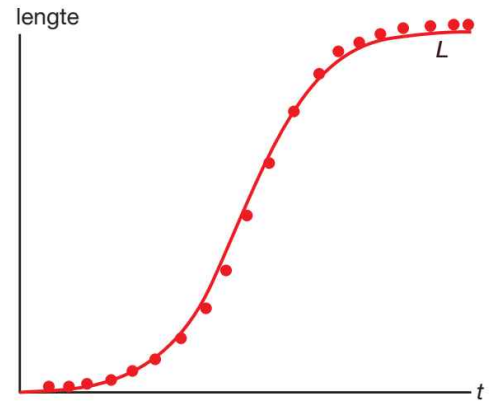
- Stel bij de gegevens een stelsel differentievergelijkingen op. Gebruik N_t en B_t .
- Stel de directe formules op van N_t en B_t .
- Convergeren N_t en B_t naar een evenwichtswaarde?

Op $t = 0$ zijn er 5000 inwoners van Middelburg die niet op vakantie gaan (G). In de tabel hiernaast zie je een overzicht van de vakantiebestemmingen van de inwoners van Middelburg met deze groep erbij. Zo gaat 70% van de inwoners van Middelburg die niet op vakantie gaan, een jaar later opnieuw niet op vakantie. En van degenen die niet op vakantie gaan, gaat 10% een jaar later naar het buitenland op vakantie.

- Stel bij deze situatie een stelsel differentievergelijkingen op.
- Bereken hoeveel inwoners van Middelburg op $t = 3$ niet op vakantie gaan.

		van		
		N	B	G
naar	N	0,74	0,15	0,20
	B	0,22	0,80	0,10
	G	0,04	0,05	0,70

- 16** [**WERKBLAD**] Zonnebloemen zijn snelgroeïende planten die vaak worden gebruikt voor de productie van olie. Om zicht te krijgen op het groeiproces van zonnebloemen, worden regelmatig metingen gedaan. Bij een experiment is van een zonnebloem gedurende twintig weken elke week de lengte gemeten. Het resultaat van deze metingen is hiernaast in figuur G.2 met stippen weergegeven. In figuur G.2 zie je ook een globale grafiek die de groei van de zonnebloem goed benadert. Bij



figuur G.2

die grafiek hoort de formule $L = \frac{300}{1 + 299 \cdot 0,55^t}$.

In deze formule is L de lengte van de zonnebloem in cm en t de tijd in weken vanaf het begin van de metingen.

In figuur G.2 kun je zien dat de grafiek van L nadert naar een grenswaarde. Verder verloopt de groei volgens de formule van L in het begin bij benadering exponentieel. Dit noemen we de exponentiële fase. Deze exponentiële fase duurt tot L de helft van zijn grenswaarde bereikt heeft.

- Bereken de groeifactor per week voor de eerste week.
- Bereken tot welke waarde van t de exponentiële fase duurt.

De lengte van een zonnebloem kan ook goed beschreven worden met een differentievergelijking. De differentievergelijking voor de lengte

$$H_t \text{ in cm van de zonnebloem is } H_t = H_{t-1} + 0,64 \cdot H_{t-1} \left(1 - \frac{H_{t-1}}{300}\right),$$

met $H_0 = 2$ en t de tijd in weken.

De formule van L en de vergelijking voor H_t geven niet precies dezelfde uitkomsten.

- Bereken hoe groot het verschil is tussen beide uitkomsten voor $t = 9$.

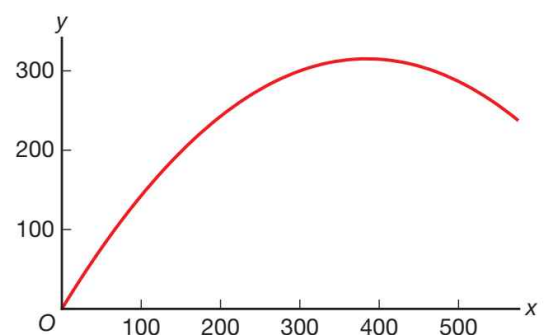
Bij de differentievergelijking is een webgrafiek te tekenen. De grafiek die je daarvoor nodig hebt staat in figuur G.3.

De formule die bij deze grafiek hoort, is van de vorm $y = ax^2 + bx$. De waarden van a en b kunnen worden berekend met behulp van de differentievergelijking.

- Bereken de waarden van a en b .

Na 7 weken is de zonnebloem 54 cm lang.

- Teken op het werkblad een webgrafiek vanaf $t = 7$. Gebruik deze webgrafiek om te bepalen hoeveel weken later de lengte van de zonnebloem voor het eerst meer dan 2 meter is.



figuur G.3

- 17** Een bureau heeft onderzoek gedaan naar het aantal exemplaren S_t van een nieuwe smartphone in een stad. De tijd t is in weken, waarbij $t = 0$ de eerste week van 2015 is. Uit het onderzoek blijkt dat $S_0 = 5000$, $S_{17} = 27\,100$ en $S_{26} = 51\,900$. De onderzoekers gaan uit van het logistische groeimodel met grenswaarde 100 000.
- Stel al probeerende een differentievergelijking op.
 - In welke week zijn er voor het eerst meer dan 90 000 exemplaren van de smartphone in de stad?
 - Stel de formule op van de parabool die bij de webgrafiek hoort.

Nadere studie wijst uit dat de grenswaarde niet 100 000 maar 150 000 is. De onderzoekers gaan uit van logistische groei met groeivoet 0,114 per week.

- d** Welke differentievergelijking hoort bij dit aangepaste model?

Het nieuwe model komt niet geheel overeen met de tellingen op $t = 0$, $t = 17$ en $t = 26$.

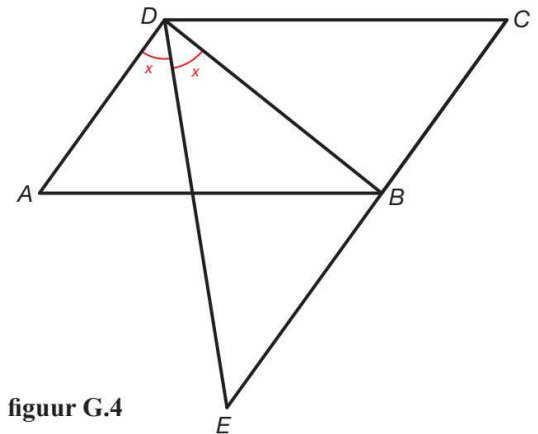
- Voor welke t is de afwijking het grootst? Hoeveel procent scheelt het?
 - In welke week wordt binnen het nieuwe model de oude grenswaarde van 100 000 voor het eerst overschreden?
- 18** Gegeven is het prooi-roofdiermodel hiernaast. Hierin is t de tijd in maanden en $t = 0$ op 1 januari 2015. Tellingen wijzen uit dat $P_0 = 5500$, $R_0 = 300$, $P_1 = 5775$ en $R_1 = 303$.
- Toon aan dat uit de gegevens volgt $a = 0,0005$ en $b = 0,00002$.
 - Bereken de evenwichtswaarden $\bar{P}$ en $\bar{R}$.
 - Wat is het maximale aantal prooidieren in de periode van 1 januari 2015 tot 1 januari 2021? Geef het aantal roofdieren op het tijdstip dat het aantal prooidieren maximaal is.

$$\begin{aligned} P_t &= 1,20P_{t-1} - a \cdot R_{t-1}P_{t-1} \\ R_t &= 0,90R_{t-1} + b \cdot P_{t-1}R_{t-1} \end{aligned}$$

- 19** Stel de directe formule op.
- $u_n = -4u_{n-1} + 5u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 5$
 - $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$ met $u_0 = 6$ en $u_1 = 8$
- 20** Gegeven is het volgende stelsel differentievergelijkingen.
- $$\begin{cases} A_t = A_{t-1} + 6B_{t-1} \\ B_t = 2A_{t-1} - 3B_{t-1} \end{cases} \text{ met } A_0 = 10 \text{ en } B_0 = 5.$$
- Stel van A_t en van B_t de directe formule op.

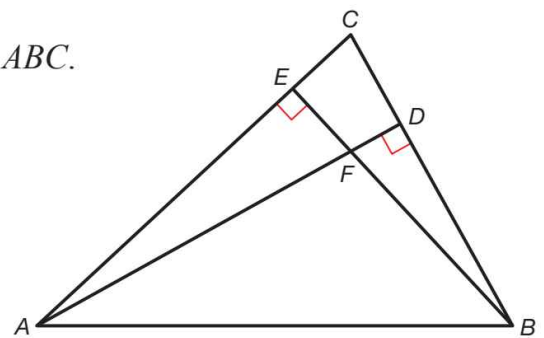
7 Bewijzen

- 21** [► WERKBLAD] Gegeven is het parallellogram $ABCD$. De bissectrice van $\angle ADB$ snijdt het verlengde van CB in E . Zie figuur G.4. Bewijs dat $BD = BE$.



figuur G.4

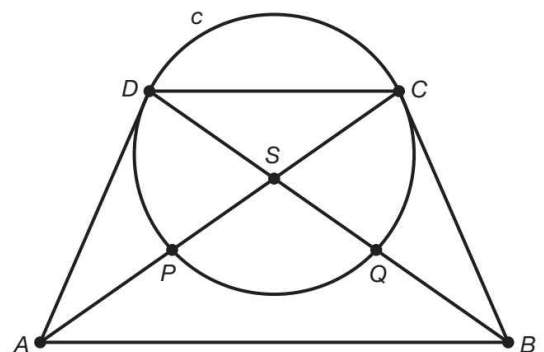
- 22** [► WERKBLAD] De hoogtelijnen AD en BE van driehoek ABC snijden elkaar in F . Hierbij ligt F binnen driehoek ABC . Zie figuur G.5. Er geldt $AC \cdot EC = BC \cdot DC$.
a Bewijs dit.
b Bewijs dat $AF \cdot DF = BF \cdot EF$.



figuur G.5

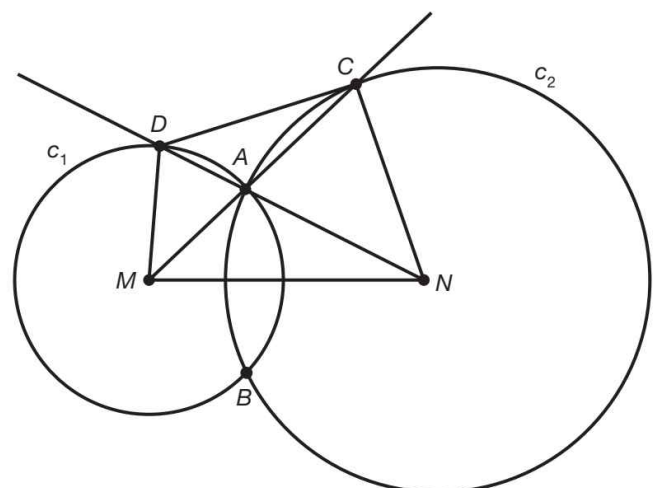
- 23** [► WERKBLAD] Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $AB \parallel CD$. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in het punt S . De cirkel c gaat door C en D en snijdt AS in P en BS in Q . Zie figuur G.6.

Bewijs dat $ABQP$ een koordenvierhoek is.



figuur G.6

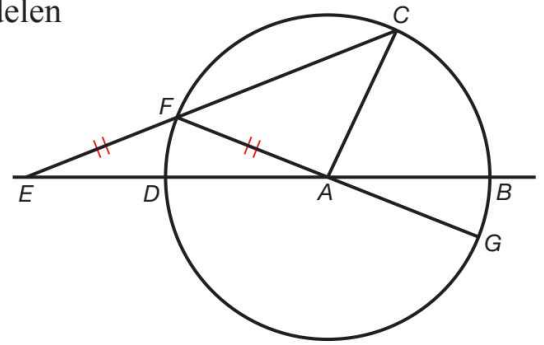
- 24** [► WERKBLAD] De cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B . Het verlengde van lijnstuk MA snijdt c_2 in het punt C en het verlengde van lijnstuk NA snijdt c_1 in D . Zie figuur G.7. Bewijs dat $MNCD$ een koordenvierhoek is.



figuur G.7

25 [► WERKBLAD] Om hoek $\angle A$ in drie gelijke delen te verdelen heeft Archimedes de volgende constructie bedacht:

- Teken een cirkel met middelpunt A . Deze cirkel snijdt de benen van $\angle A$ in de punten B en C , en het verlengde van BA in het punt D .
 - Teken de lijn CE met E op het verlengde van AD zo, dat voor het snijpunt F van CE met de cirkel geldt $EF = AF$. Zie figuur G.8.
- a Bewijs dat $\angle CAG = 4\angle E$. Hierbij ligt G op het verlengde van FA .
- b Bewijs dat $\angle E = \frac{1}{3}\angle BAC$.



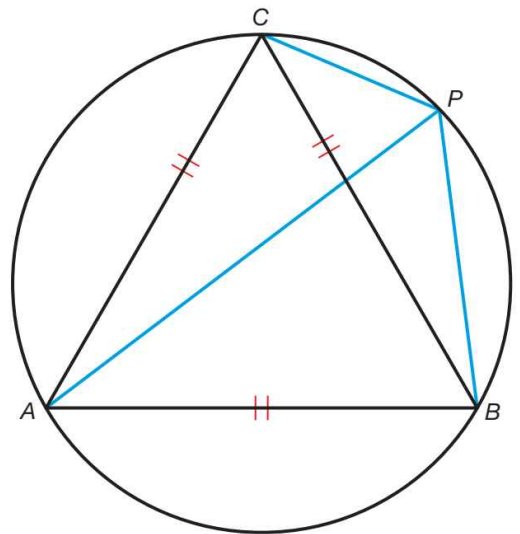
figuur G.8

26 [► WERKBLAD] Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel. Het punt P is een punt van de kortste boog BC . Zie figuur G.9. In deze opgave ga je bewijzen dat $AP = BP + CP$.

a Teken B' op het verlengde van CP zo, dat $PB' = PB$.

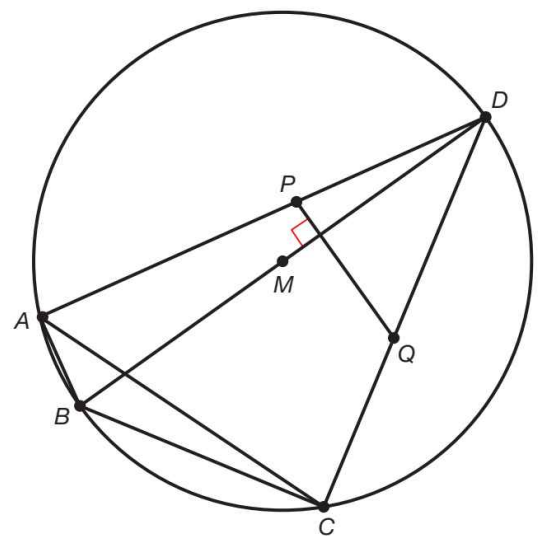
b Bewijs dat $\triangle BB'P$ gelijkzijdig is.

c Bewijs dat $AP = BP + CP$.



figuur G.9

27 [► WERKBLAD] In figuur G.10 is een cirkel met koordenvierhoek $ABCD$ getekend waarbij BD een middellijn van de cirkel is. Punt P ligt op de zijde AD en punt Q op zijde CD zo, dat PQ loodrecht staat op BD . Bewijs dat $PACQ$ een koordenvierhoek is.



figuur G.10

28 Gegeven is de recursieve formule $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$ met startwaarde a_0 .
Bewijs met volledige inductie dat $a_n = \frac{a_0}{n \cdot a_0 + 1}$.

29 Bewijs met volledige inductie.

a $5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$ is deelbaar door 7 voor elk natuurlijk getal n .

b $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

c $\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{2(n+1)}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

d $\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \frac{n! - 1}{n!}$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

30 Een belangrijk werk uit de getaltheorie is het *Liber quadratorum*, rond 1225 geschreven door Leonardo Pisano (Fibonacci).

In dit boek behandelt hij een aantal stellingen en bijbehorende bewijzen uit de getaltheorie. In deze opgave ga je stelling 18 uit dit boek bewijzen.

De stelling luidt:

Als de som van een willekeurig paar getallen even is, dan is de verhouding van hun som en hun verschil niet gelijk aan de verhouding van het grootste tot het kleinste getal.

De stelling komt erop neer dat voor elk tweetal positieve natuurlijke getallen m en n , met $m+n$ even en $m > n$, geldt

$$\frac{m+n}{m-n} \neq \frac{m}{n}.$$

Om de stelling te bewijzen nemen we aan dat $\frac{m+n}{m-n} = \frac{m}{n}$

en tonen aan dat uit deze aanname een tegenspraak volgt.

a Herleid $\frac{m+n}{m-n} = \frac{m}{n}$ tot $2mn = m^2 - n^2$.

b Herleid $2mn = m^2 - n^2$ met behulp van $\frac{m+n}{m-n} = \frac{m}{n}$ tot $2 = \left(\frac{m-n}{n}\right)^2$ en maak het bewijs af.

31 Bewijs dat bij twaalf verschillende willekeurig gekozen getallen van twee cijfers er altijd een paar getallen zit waarvan het verschil deelbaar is door 11.**32** Gegeven zijn de natuurlijke getallen a, b, c en d met $a > b > c > d$.

a Bewijs dat $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ deelbaar is door 3.

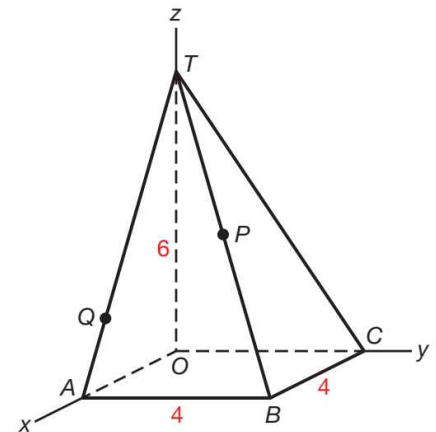
b Bewijs dat $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ deelbaar is door 12.

8 Vectormeetkunde

- 33** Gegeven is de piramide $TOABC$ met $T(0, 0, 6)$, $A(4, 0, 0)$ en $C(0, 4, 0)$. Het punt P is het midden van de ribbe BT en het punt Q ligt op de ribbe AT zo, dat $AQ = \frac{1}{4}AT$.

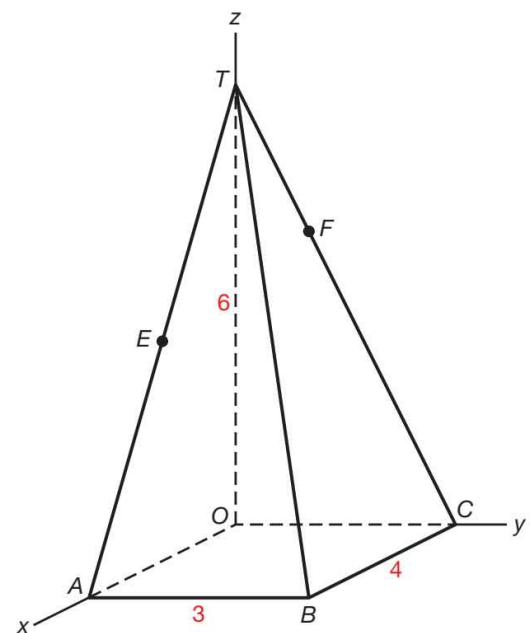
Bereken de coördinaten van

- het midden M van het lijnstuk PQ
- het snijpunt S van de lijn CQ en het vlak OBT
- het snijpunt U van de lijn PQ en het vlak ABC
- het snijpunt V van de lijn CP en het vlak OAT
- het snijpunt W van de lijn BQ en het vlak OCT .



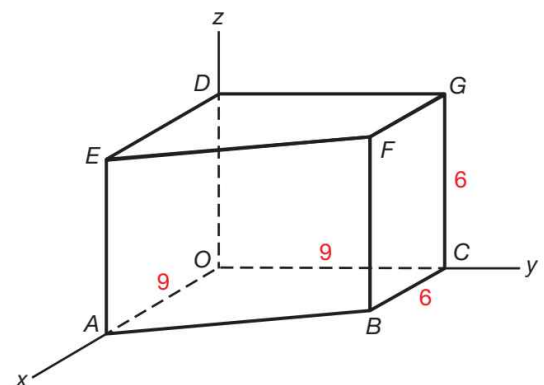
figuur G.11

- 34** Gegeven is de piramide $TOABC$ met $A(4, 0, 0)$, $B(4, 3, 0)$, $C(0, 3, 0)$ en $T(0, 0, 6)$. Het punt E is het midden van de ribbe AT en het punt F ligt op de ribbe CT zo, dat $CF = \frac{2}{3}CT$.
- Stel een vergelijking op van het vlak BEF .
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn EF en het vlak OBT .
 - Bereken $\angle(ABT, BCT)$.
 - Bereken $d(B, EF)$.



figuur G.12

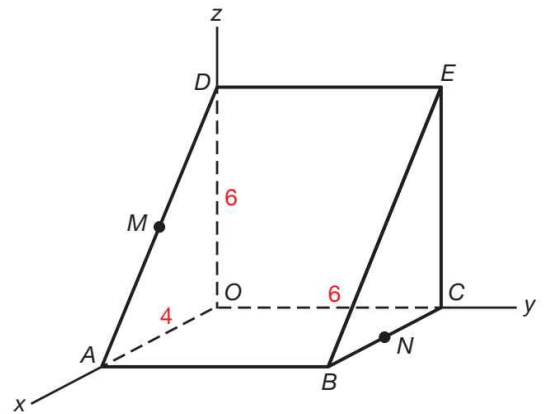
- 35** Gegeven is het prisma $OABC DEFG$ met $A(9, 0, 0)$, $B(6, 9, 0)$, $C(0, 9, 0)$ en $D(0, 0, 6)$.
- Bereken $\angle(AG, CE)$.
 - Bereken $\angle(BD, ACF)$.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van het vlak BEG met de z -as.
 - Bereken $d(D, ACF)$.



figuur G.13

- 36** Gegeven is het prisma $OAD CBE$ met $A(4, 0, 0)$, $B(4, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 6)$. Het punt M is het midden van de ribbe AD en het punt N is het midden van de ribbe BC .

- Bereken $d(M, N)$.
- Bereken $\angle MNC$.
- Bereken $\angle(EMN, OBE)$.
- Bereken $\angle(EM, ACD)$.



figuur G.14

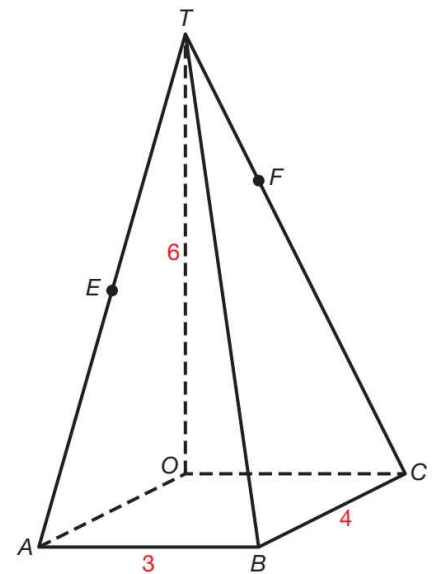
- 37** Gegeven is de piramide $TOABC$ met hoogte $TO = 6$. Het grondvlak is een rechthoek met $AB = 3$ en $BC = 4$. Zie figuur G.15.

Het punt E is het midden van de ribbe AT en het punt F ligt op de ribbe CT zo, dat $CF = \frac{2}{3}CT$. Bereken in één decimaal nauwkeurig.

- $\angle(EF, BT)$
- $\angle(OBF, BCE)$
- $d(B, CEF)$
- $d(T, EF)$

Het punt P is een variabel punt op BT .

- Bereken exact de kleinste waarde die $O(\triangle EFP)$ kan aannemen.



figuur G.15

- 38** Gegeven zijn de punten $A(-1, 0, 3)$, $B(2, 2, 2)$, $C(4, 1, -2)$ en $D(6, 3, 0)$. Bereken exact de inhoud van het lichaam $ABCD$.

- 39** Gegeven zijn de punten $A(1, 0, 3)$, $B(3, -1, 2)$ en $C(0, 4, 2)$. Het punt $P(1 + 2\lambda, -\lambda, 3 - \lambda)$ is een variabel punt op de lijn AB .

- Licht dit toe.
- Toon aan dat $CP = \sqrt{6\lambda^2 + 10\lambda + 18}$.
- Bereken met behulp van differentiëren voor welke λ de lengte van CP minimaal is.
- Bereken exact $O(\triangle ABC)$.

Het punt $Q(0, \mu, 0)$ is een variabel punt op de y -as.

- Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarden van μ geldt $d(Q, AB) < 16$.

40 Gegeven zijn de lijnen l : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ en } n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

In deze opgave zoek je het kortste verbindingslijnstuk tussen de kruisende lijnen l en m en tussen de kruisende lijnen m en n .

Het punt P is een variabel punt op l , het punt Q is een variabel punt op m en het punt R is een variabel punt op n .

a Licht toe: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 \\ -\lambda + \mu + 3 \\ -2\lambda - 2\mu + 3 \end{pmatrix}$.

Uit $\overrightarrow{PQ} \perp l$ en $\overrightarrow{PQ} \perp m$ volgt het stelsel $\begin{cases} -9\lambda - 3\mu = -11 \\ 3\lambda + 5\mu = 3 \end{cases}$.

b Toon dit aan en los het stelsel op.

c Bereken exact de coördinaten van P en Q .

d Licht toe dat $d(l, m) = d(P, Q)$ en bereken $d(l, m)$ exact.

e Bereken exact de coördinaten van Q en R waarvoor geldt $d(m, n) = d(Q, R)$.

f Bereken $d(l, n)$.

41 In deze opgave ga je enkele eigenschappen van in- en uitproducten bewijzen.

a Bewijs $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

b Bewijs $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

c Bewijs $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

d Bewijs $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

e Bewijs $\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

f Bewijs $O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$.

Overzicht GR-handleiding

Module

Het rijen-invoerscherm ▪ Het invoeren van een directe formule ▪ Het invoeren van een recursieve formule	vwo D deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 66
Matrices ▪ Rekenen met matrices	vwo D deel 1 hoofdstuk 4 bladzijde 151
Tijdgrafieken ▪ Het plotten van een tijdgrafiek	vwo D deel 2 hoofdstuk 6 bladzijde 56
Webgrafieken ▪ Het plotten van een webgrafiek	vwo D deel 2 hoofdstuk 6 bladzijde 63

Trefwoordenregister

- A**
- afstand tussen kruisende lijnen 175
 - afstand van punt tot lijn 170
 - afstand van punt tot vlak 172
 - algemene productregel 13
 - als-dan-bewering 100
 - assenvergelijking van een vlak 152
- B**
- Bernoulli, Jacob 37
 - Bernoulli-experiment 35
 - bewijs met volledige inductie 117
 - bewijs uit het ongerijmde 123
 - Binet, de formule van 88
 - binomiaal
 - kansexperiment 35
 - binomiale
 - toevalsvariabele 35
 - binomiale verdeling 35
- C**
- cirkel, koorde van een 112
 - cirkel, middelpuntshoek van een 112
 - cirkel, omtrekshoek van een 112
 - combinatie, lineaire 87
 - congruente driehoeken 102
 - congruentiekenmerk 102
 - constante hoek, stelling van de 111
 - constante rij 62
 - convergeren 62
 - coördinaatvlakken 143
 - cumulatieve kans 38
 - cumulatieve
 - kansverdeling 38
- D**
- definitie 98
 - dekpunt 62
 - differentievergelijking 56
 - differentievergelijking, eerste orde lineaire 56
 - differentievergelijking, tweede orde lineaire 86
 - differentievergelijkingen, stelsel 78, 91
 - discreet model 66
 - discrete kansverdeling 27
 - discrete stochast 27
 - discrete uniforme verdeling 28
 - divergeren 62
 - domino-effect 117
 - driehoeken, congruente 102
 - driehoeken, gelijke 102
 - driehoeken,
 - gelijkvormige 101
 - duiventilprincipe 127
- E**
- evenwicht, stabiel 62
- F**
- formule van Binet 88
- G**
- gelijke driehoeken 102
 - gelijkvormige
 - driehoeken 101
 - gelijkvormigheidskenmerk 101
 - geometrische verdeling 28
 - gesloten systeem 81
 - gevalsonderscheiding 109
 - grenswaarde 57
 - groei, logistische 70
 - groeivoet 69
- H**
- herhalen van
 - kansexperimenten 10
 - hoek tussen lijnen 163
 - hoek tussen vlakken 166
 - hoofdstelling van de rekenkunde 124
 - Huygens, Christiaan 17
 - hypergeometrische verdeling 28
- I**
- inductiebasis 117
 - inductiebewijs 117
 - inductiehypothese 117
 - inductiestap 117
 - inproduct 140
 - irrationaal getal 130, 131
- K**
- kansexperiment,
 - binomiaal 35
 - kansexperiment,
 - multinomiaal 44
 - kansexperimenten, herhalen van 17
 - kansverdeling 27
 - kansverdeling,
 - cumulatieve 38
 - kansverdeling, discrete 27
 - karakteristieke
 - vergelijking 89
 - kental 138
 - kleine steekproef uit grote populatie 22
 - koorde 112
 - koordenvierhoek 109
 - kop-staartconstructie 138

L

ladenprincipe 127
 lijnen, hoek tussen 163
 lineaire combinatie 87
 lineaire
 differentievergelijking,
 eerste orde 56
 lineaire
 differentievergelijking,
 tweede orde 86
 lineaire remfactor 69
 logistische groei 70

M

middelpuntshoek 112
 mislukking 35
 model, discreet
 dynamisch 66
 multinomiaal
 kansexperiment 44

N

negatie 123
 normaal getal 131
 normaal van een vlak 164
 normaalvector van een
 vlak 152

O

omkeerbare stelling 100
 omtrekshoek 112
 ongerijmde, bewijs uit
 het 123
 Oxyz-assenstelsel 143

P

parallellogramconstructie
 138
 parameters van een
 stochast 36
 Pascal, Blaise 13
 poissonverdeling 46
 productregel 9
 productregel, algemene 13
 prooi-roofdiercyclus 77
 prooi-roofdierdiagram 77
 prooi-roofdiermodel 77

R

rekenkunde, hoofdstelling
 van de 124
 remfactor 69
 remfactor, lineaire 69
 richtingsvector
 141, 158

S

somvector 138
 stabiel evenwicht 62
 stelling van de constante
 hoek 111
 stelling van Thales 107
 stelling 98
 stelling, omkeerbare 100
 stelsel differentie-
 vergelijkingen 78, 91
 steunvector 141
 Stevin, Simon 126
 stochast 26
 stochast, binomiale 36
 stochast, discrete 27
 stochast, parameters van
 een 36
 stochastische variabele 26
 succes 35
 systeem, gesloten 81

T

tegengestelde vectoren 139
 tegenvoorbeeld 100
 Thales van Milete 108
 Thales, stelling van 107
 tijdgrafiek 56
 toevalsvariabele 26
 toevalsvariabele,
 binomiale 35
 transcendent getal 131
 trekken met terugleggen 20
 trekken zonder
 terugleggen 20

U

uitproduct 156
 uitwendig product 156
 uniforme verdeling,
 discrete 28

V

vaasmodel 8
 vector 138
 vector, kentallen van
 een 138
 vectoren, inproduct
 van 140
 vectoren, som van 138
 vectoren, tegengestelde 139
 vectoren, uitproduct
 van 156
 vectorvoorstelling 141
 verdeling,
 hypergeometrische 28
 verdeling, binomiale 35
 verdeling, geometrische 28
 verdeling, multinomiale 44
 verdeling, uniforme 28
 vergelijking,
 karakteristieke 89
 Verhulst, Pierre François 72
 verwachtingswaarde 30
 vlak, assenvergelijking
 van een 152
 vlak, normaal van een 164
 vlak, normaalvector
 van een 152
 vlakken, hoek tussen 166
 volledige inductie 117
 Volterra, Vito 80

W

webgrafiek 60

Verantwoording

Fotoresearch: B en U International Picture Service,
Amsterdam
Illustratieverwerving: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: OKS, Delhi (India)

Foto's

Hollandse Hoogte, Amsterdam; p. 6-7, 136-137
Corbis: p. 18, 52-53, 108, 128, 195
Picture-Alliance, Frankfurt: p. 80
ANP Photo, Rijswijk: p. 96-97
Wikimedia Commons: p. 126 b, 126 o
Shutterstock: p. 150
Nationale Beeldbank, Amsterdam: p. 196

Colofon

Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: OKS, Delhi (India)

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.



Met betrekking tot sommige teksten en/of illustratiemateriaal is het de uitgever, ondanks zorgvuldige inspanningen daartoe, niet gelukt eventuele rechthebbende(n) te achterhalen. Mocht u van mening zijn (auteurs-)rechten te kunnen doen gelden op teksten en/of illustratiemateriaal in deze uitgave dan verzoeken wij u contact op te nemen met de uitgever.

0 / 19

© 2015 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijse auteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-59296-7