

GETAL & RUIMTE

1

GETAL & RUIMTE

vwo D deel 1

ELFDE EDITIE, 2014

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo D deel 1

Samen met de delen 2, 3 en 4 van vwo wiskunde D bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde D, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld. De totale studielast voor het vak vwo wiskunde D is 440 uur.

Omdat het vak wiskunde D geen Centraal Examen kent, is het mogelijk met name de domeinen Wiskunde in wetenschap en Keuzeonderwerpen vrij in te vullen. Van de invulling die *Getal & Ruimte* hierbij heeft gekozen, kan dus worden afgeweken. In de voorwoorden van dit deel en de andere delen wordt dat aangegeven.

In hoofdstuk 1 Combinatoriek wordt subdomein B1 Combinatoriek geheel afgehandeld.

Met hoofdstuk 2 Discrete wiskunde is een gedeelte van subdomein C1 Discrete dynamische systemen ingevuld. Verder bevat het hoofdstuk door *Getal & Ruimte* gekozen onderwerpen in het kader van de domeinen F en G.

In hoofdstuk 3 Kansrekening wordt een groot gedeelte van het subdomein B2 Kansrekening behandeld.

Hoofdstuk 4 Matrices is een door *Getal & Ruimte* ingevuld onderwerp in het kader van de domeinen F en G. Naast de behandeling van rekenen met matrices en overgangsmatrices wordt een begin gemaakt met lineaire algebra, onder andere door het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen met het gauss-jordanalgoritme. Verder komen in dit hoofdstuk inverse matrices en determinanten aan de orde.

Opbouw

Ook in de elfde editie is gekozen voor een paragraaf voorkennis waarmee elk hoofdstuk begint. In deze paragraaf wordt de voor het hoofdstuk vereiste voorkennis aangeboden. Elke paragraaf wordt afgesloten met een terugblik. In de terugblik worden alle aspecten van de paragraaf op een rijtje gezet, vaak toegelicht met enkele voorbeelden. Aan het eind van elk hoofdstuk staat de diagnostische toets, die per paragraaf de basisvaardigheden toetst. Achter in het boek staan de gemengde opgaven, Kangoeroe-opgaven en het trefwoordenregister.

Testopgaven en denkopgaven

Nieuw in deze editie zijn de denkopgaven en de testopgaven.

De denkopgaven bieden een probleem aan dat bij de behandelde theorie hoort, maar dat door de vaak iets andere invalshoek een extra beroep doet op het denkvermogen van de leerling. Met de testopgaven wordt een vorm van differentiatie aangeboden. Leerlingen kunnen na het foutloos maken van een testopgave enkele opgaven overslaan.

Online materiaal

Het docentenpakket online bevat een studiewijzer bij elk hoofdstuk. Verder is onder meer het presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen.

Nieuw in online is een oefenproefwerk bij elk hoofdstuk.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2014

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw, uit vwo wiskunde B of uit voorgaande hoofdstukken die je in het hoofdstuk paraat moet hebben.

O 2 Oriënterende opgave

Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [▶▶6] Testopgave

Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ▶▶ staat.

4 Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 Reflecterende opgave

In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 Afsluitende opgave

De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 Denkopgave

Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[▶ GR]

Verwijzing naar een module in de handleiding bij de grafische rekenmachine.

[▶ WERKBLAD]

Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

1 Combinatoriek 6

Voorkennis Verzamelingen 8

- 1.1 De somregel en de productregel 12
- 1.2 Variaties en herhalingsvarianties 21
- 1.3 Combinaties en herhalingscombinaties 29
- 1.4 Variaties en combinaties toepassen 40
- Diagnostische toets 48

2 Discrete wiskunde 50

Voorkennis Haakjes wegwerken en a^0 52

- 2.1 Het binomium van Newton 53
- 2.2 Recursieve formules 63
- 2.3 Rekenkundige rijen 73
- 2.4 Meetkundige rijen 79
- Diagnostische toets 88

3 Kansrekening 90

Voorkennis Verzamelingen en combinatoriek 92

- 3.1 Het kansbegrip 94
- 3.2 Empirische kansen 101
- 3.3 Het vaasmodel en de productregel 114
- 3.4 De somregel en de complementregel 122
- 3.5 Voorwaardelijke kansen 131
- Diagnostische toets 138

4 Matrices 140

Voorkennis Stelsels vergelijkingen 142

- 4.1 Rekenen met matrices 144
- 4.2 Matrices en kansen 154
- 4.3 Stelsels en matrices 167
- 4.4 Inverse matrices en determinanten 179
- Diagnostische toets 188

Kangoeroe-opgaven 190

Gemengde opgaven 200

Overzicht GR-handleiding 212

Trefwoordenregister 213

Verantwoording 215

Bij deze ijscokraam kun je een ijsje met vier bolletjes samenstellen waarbij je maar liefst uit 20 verschillende soorten ijs kunt kiezen. En je hoeft niet vier verschillende soorten ijs te kiezen. Vier bolletjes van dezelfde smaak mag ook, of drie bolletjes van de ene smaak en nog één andere smaak, enzovoort. Zo zijn er al met al heel wat mogelijkheden om met de 20 soorten een ijsje met vier bolletjes samen te stellen.

Wat leer je?

- Hoe je de productregel en de somregel gebruikt om telproblemen op te lossen.
- Wat variaties, herhalingsvariaties, permutaties, combinaties en herhalingscombinaties zijn.
- Hoe je combinaties en herhalingscombinaties kunt voorstellen door routes in een rooster.
- Hoe je het aantal rangschikkingen berekent van n dingen waarvan er enkele gelijk zijn.



Combinatoriek

1



Voorkennis Verzamelingen

Theorie A Getallenverzamelingen

Een **getallenverzameling** is een verzameling van getallen die een bepaalde eigenschap hebben.

Zo is $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ de verzameling van de **natuurlijke getallen**.

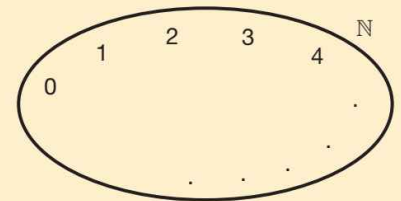
Notatie: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Hiernaast is deze verzameling in beeld gebracht in een zogenaamd **venndiagram**.

De getallen $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ zijn de **elementen** van de verzameling $\mathbb{N}$.

Dat 0 een element van $\mathbb{N}$ is wordt genoteerd als $0 \in \mathbb{N}$.

Dat -1 geen element van $\mathbb{N}$ is wordt genoteerd als $-1 \notin \mathbb{N}$.



figuur 1.1

De verzameling die geen enkel element bevat, heet de **lege verzameling**. Notatie: $\emptyset$.

Hieronder zie je vier manieren om een getallenverzameling te noteren.

- 1 Door de elementen van de verzameling *op te sommen* tussen accolades.

Zo is $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ de verzameling van de even natuurlijke getallen die kleiner zijn dan 10. Deze verzameling is bijvoorbeeld ook te noteren als $\{2, 4, 8, 6, 0\}$ want de volgorde van de elementen doet er niet toe.

- 2 Door met behulp van stippen een opsomming tussen accolades te *suggereren*.

Zo is $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ de verzameling van de positieve even getallen.

- 3 Door een *voorwaarde* te vermelden waaraan de elementen van de verzameling moeten voldoen.

Zo is $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\}$ de verzameling van de even natuurlijke getallen.

Spreek $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\}$ uit als: de verzameling van alle natuurlijke getallen x waarvoor geldt dat x gedeeld door 2 een natuurlijk getal is.

- 4 Door middel van een *interval*.

Zo is $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Hierin is $\mathbb{R}$ de verzameling van de **reële getallen**.

De **doorsnede** $V \cap W$ van de verzamelingen V en W bestaat uit de gemeenschappelijke elementen van V en W .
Dus $V \cap W = \{x \mid x \in V \wedge x \in W\}$.

$\wedge$ betekent en

De verzamelingen V en W heten **disjunct** als $V \cap W = \emptyset$.

De **vereniging** $V \cup W$ van de verzamelingen V en W bestaat uit de elementen die tot V , tot W , of tot beide behoren.

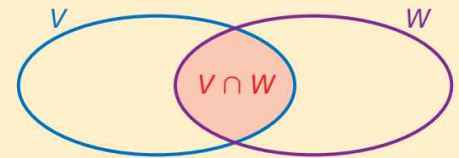
Dus $V \cup W = \{x \mid x \in V \vee x \in W\}$.

Het **verschil** $V \setminus W$ van de verzamelingen V en W bestaat uit de elementen die wel tot V , maar niet tot W behoren.

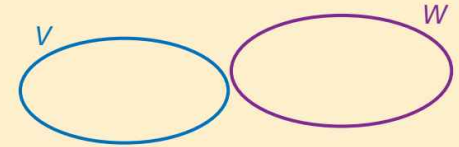
Dus $V \setminus W = \{x \mid x \in V \wedge x \notin W\}$.

Het **product** $V \times W$ van de verzamelingen V en W is $V \times W = \{(x, y) \mid x \in V \wedge y \in W\}$.

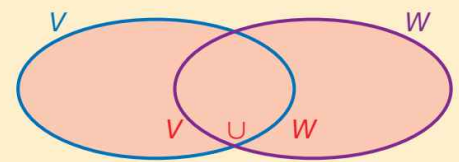
V is een **deelverzameling** van W als elk element van V ook element van W is. Notatie: $V \subset W$.



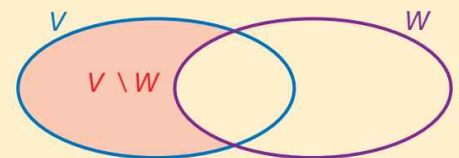
figuur 1.2



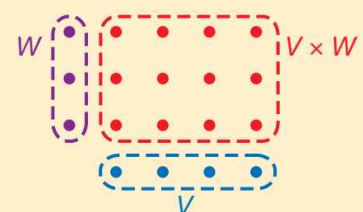
figuur 1.3 $V \cap W = \emptyset$



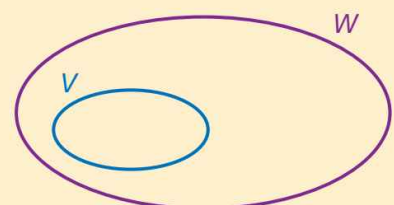
figuur 1.4



figuur 1.5



figuur 1.6



figuur 1.7 $V \subset W$

Voorbeeld

Gegeven zijn de verzamelingen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ en $C = \{2, 7\}$.

Geef $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ en $B \times C$.

Uitwerking

$$A \cap B = \{5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B \times C = \{(5, 2), (5, 7), (6, 2), (6, 7), (7, 2), (7, 7)\}$$

Voorbeeld

Welke van de volgende beweringen zijn waar? Licht toe.

- a $0 \in \emptyset$
- b $10 \in \mathbb{N}$
- c $12 \subset \mathbb{N}$
- d $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 15\} \subset \langle -4, 4 \rangle$
- e $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

Uitwerking

- a $0 \in \emptyset$ is niet waar, want de lege verzameling bevat geen enkel element.
- b $10 \in \mathbb{N}$ is waar, want 10 behoort tot de natuurlijke getallen.
- c $12 \subset \mathbb{N}$ is niet waar, want 12 is geen verzameling. Wel waar is $\{12\} \subset \mathbb{N}$.
- d $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 15\} \subset \langle -4, 4 \rangle$ is waar, want $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 15\} = \langle -\sqrt{15}, \sqrt{15} \rangle$.
- e $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$ is waar, want beide verzamelingen hebben dezelfde elementen. De volgorde doet er niet toe.

- 1 Gegeven zijn de verzamelingen $V = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ en $W = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4\}$.
Geef $V \cap W$, $V \cup W$ en $V \setminus W$.
- 2 Gegeven zijn de verzamelingen $V = \langle \leftarrow, 5 \rangle$ en $W = \langle 3, \rightarrow \rangle$.
Geef $V \cap W$, $V \cup W$ en $V \setminus W$.
- 3 Gegeven zijn de verzamelingen $A = \langle 1, \rightarrow \rangle$, $B = \{1, 2, 3\}$ en $C = \{11, 12\}$.
Geef $A \cap B$, $A \cup B$, $B \times C$ en $C \times C$.

4 Welke van de volgende beweringen zijn waar? Licht toe.

a $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$

b $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N}$

c $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4\} = \{3, 2, 1\}$

d $\langle -1, 1 \rangle \subset \mathbb{N}$

e $\emptyset \subset \mathbb{N}$

f $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

g $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$

h $[-3, 3] \subset \langle -3, 3 \rangle$

i $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{3}x \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$

j $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{N}\}$

k $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 8\} \subset \langle 0, 3 \rangle$

l $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 20\} \subset \langle \leftarrow, -4 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$

m $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ heeft tien elementen

n $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Informatief Combinatoriek

In de combinatoriek of combinatieleer bestudeert men verzamelingen waarvan de elementen aan bepaalde eigenschappen voldoen.

In het bijzonder houdt men zich bezig met het 'tellen' van elementen van verzamelingen.

Daarom wordt de combinatoriek ook wel de studie van telproblemen genoemd.

1.1 De somregel en de productregel

O 1 Frits gooit met een rode en een blauwe dobbelsteen. In het rooster hiernaast staat een overzicht van de mogelijke resultaten.

- Zet in elk hokje de som van de aantallen ogen.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er om minstens 9 ogen te gooien?

Je kunt het aantal mogelijkheden om minstens 9 ogen te gooien ook vinden door de mogelijkheden systematisch te noteren.

- Doe dat.

SOM VAN DE OGEN

6	7					
5	6					
4	5					
3	4	5				
2	3	4				
1	2	3				
	1	2	3	4	5	6

rode dobbelsteen

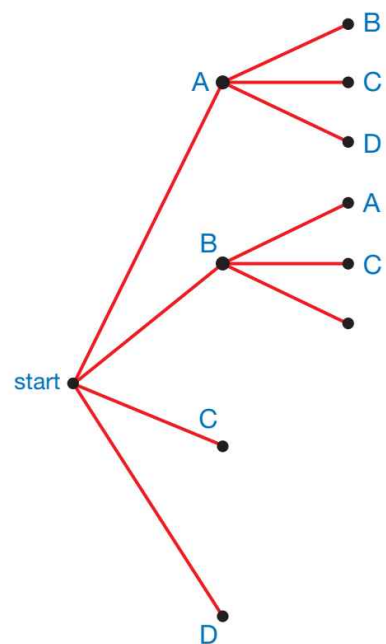
figuur 1.8

O 2 Gegeven is de verzameling $V = \{A, B, C, D\}$.

In figuur 1.9 is een begin gemaakt met het tekenen van het boomdiagram bij de volgende situatie.

Kies een element uit V en kies daarna een ander element uit V .

- Maak het boomdiagram af.
- Hoeveel mogelijke tweetallen volgen uit het boomdiagram?
Hoe kun je dit aantal berekenen zonder het boomdiagram te tekenen?

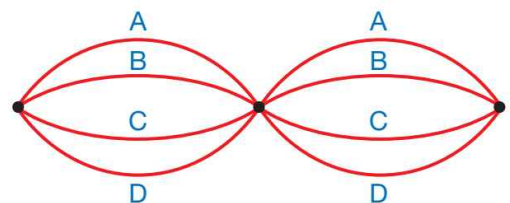


figuur 1.9

O 3 Gegeven is de verzameling $V = \{A, B, C, D\}$.

Het wegendiagram in figuur 1.10 hoort bij $V \times V$.

- Hoeveel mogelijkheden volgen uit het wegendiagram?
- Teken bij deze situatie een boomdiagram.
- Onderzoek of het mogelijk is een wegendiagram te tekenen bij de situatie van opgave 2.



figuur 1.10

Theorie A Telproblemen visualiseren

Bij een worp met een dobbelsteen heb je zes mogelijke **uitkomsten**.

De verzameling uitkomsten geven we vaak aan met de letter U , dus

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

De **uitkomstenverzameling** van het experiment 'het werpen met twee dobbelstenen' heeft 36 elementen. Je kunt de uitkomsten als getallenparen weergeven.

$$U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}.$$

Een **gebeurtenis** is een deelverzameling van de uitkomstenverzameling U .

Gooi je met twee dobbelstenen, dan horen bij de gebeurtenis G : 'de som van de ogen is 9' de uitkomsten $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$ en $(6, 3)$. Je kunt de gebeurtenis G dus ook noteren als $G = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$.

Je ziet dat G vier elementen heeft. Notatie: $\#(G) = 4$.

Een gebeurtenis kun je op twee manieren aangeven.

- 1 Met een omschrijving in woorden, bijvoorbeeld 'de som van de ogen is 9'.
- 2 Als een deelverzameling van U , bijvoorbeeld $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$.

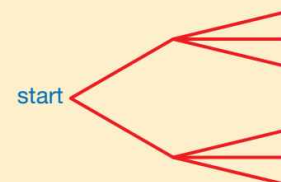
Een gebeurtenis G bij een experiment met uitkomstenverzameling U is een deelverzameling van U .

$\#(G)$ is het aantal elementen van G .

In opgave 1 heb je een telprobleem opgelost door een **rooster** te maken en door het **systematisch noteren** van de mogelijkheden. In opgave 2 gebruikte je een **boomdiagram** en in opgave 3 een **wegendiagram**.

Telproblemen visualiseren

1 Boomdiagram



2 Wegendiagram



3 Rooster

Het aantal uitkomsten bij het gooien met twee geldstukken is uit het rooster af te lezen. Dit aantal is 4.

	k	m
k		
m		

4 Systematisch noteren

Er zijn 6 manieren om bij een worp met drie dobbelstenen in totaal 5 ogen te gooien.

113	131	311
221	212	122

Voorbeeld

Zes voetbalteams spelen een hele competitie. In een hele competitie speelt elk team twee keer tegen elk ander team. Hoeveel wedstrijden zijn er in totaal?

Aanpak

Maak een rooster waarin je de wedstrijden aangeeft.

Uitwerking

Zie het rooster hiernaast.

Er zijn 6 rijen met elk 5 wedstrijden, dus er zijn $6 \cdot 5 = 30$ wedstrijden.

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

R 4 Zie het voorbeeld.

- Welke berekening hoort bij een hele competitie met 10 teams?
- N is het aantal wedstrijden in een hele competitie met n teams. Stel de formule op van N .

5 De basketballers van de klassen 4h1, 4h2, 4h3, 4v1 en 4v2 spelen een halve competitie.

- Wat wordt bedoeld met een halve competitie?
- Welke vorm van visualisatie gebruik je het liefst om een overzicht van alle wedstrijden te krijgen?
- Hoeveel wedstrijden zijn er in totaal in een halve competitie met vijf teams?
- Hoeveel wedstrijden worden gespeeld in een halve competitie met n teams?
- In een halve competitie worden in totaal 45 wedstrijden gespeeld. Hoeveel teams zitten in deze competitie?

6 Aan een voetbalkampioenschap doen 40 teams mee. Deze worden ingedeeld in acht groepen van vijf teams die een hele competitie spelen. De groepswinnaars spelen volgens het afvalsysteem in een uit- en thuiswedstrijd om het kampioenschap.

- Hoeveel wedstrijden worden in totaal gespeeld?
- Hoeveel wedstrijden heeft de kampioen gespeeld?

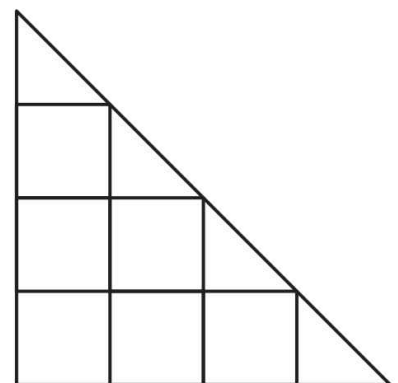
7 Van de leerlingen Arnold, Bart, Cor, Dorothé, Esmée en Femke zijn Arnold en Dorothé verliefd op elkaar. Ook Bart en Esmée en Cor en Femke zijn verliefd op elkaar.

De docent koppelt willekeurig een jongen en een meisje van deze zes leerlingen aan elkaar om met z'n tweeën een dag voor een project op stap te gaan.

- Op hoeveel manieren kan de docent deze koppels samenstellen?
- Op hoeveel van deze manieren wordt geen enkele van de verliefde stelletjes aan elkaar gekoppeld?



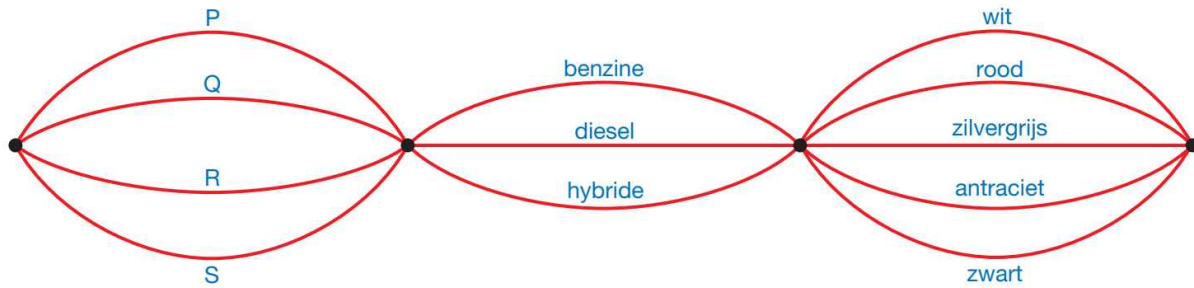
- 8** Tijdens de finale van een tennistoernooi spelen de tennissers A en B net zo lang door totdat een van beiden drie sets gewonnen heeft. Dit principe heet *best of five*.
Met de serie ABAA geven we aan dat B de tweede set gewonnen heeft en A de andere sets. Bij deze serie heeft A dus in vier sets gewonnen.
- Noteer alle series waarbij er na vier sets een winnaar is.
 - Op hoeveel manieren kan de partij verlopen?
- 9** Gegeven zijn de verzamelingen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ en $U = A \times B$.
Hoeveel elementen heeft
- $G = \{(a, b) \in U \mid a + b = 8\}$
 - $G = \{(a, b) \in U \mid a + b < 8\}$
 - $G = \{(a, b) \in U \mid ab = 8\}$?
- A 10** Gegeven zijn de verzamelingen $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en $U = V \times V \times V$.
- Noteer alle elementen van $G = \{(a, b, c) \in U \mid a + b + c = 16\}$.
 - Hoeveel elementen heeft $G = \{(a, b, c) \in U \mid a + b + c > 15\}$?
 - Hoeveel elementen heeft $G = \{(a, b, c) \in U \mid a + b + c = 15\}$?
- A 11** Experiment: een worp met drie dobbelstenen.
Hoeveel uitkomsten heeft de gebeurtenis
- in totaal 5 ogen gooien
 - hoogstens 6 ogen gooien?
- A 12** Een geldautomaat kan biljetten leveren van 10 euro, 20 euro en 50 euro. Daarbij sorteert de automaat de biljetten altijd van klein naar groot. Bij het pinnen van 70 euro levert dit zes mogelijkheden voor uitbetaling op.
- Noteer deze zes mogelijkheden.
 - Hoeveel mogelijkheden voor uitbetaling zijn er bij het pinnen van 110 euro?
- D 13** Hoeveel driehoeken zijn in de figuur hiernaast te ontdekken?



figuur 1.11

1

- O 14** Een automerk is verkrijgbaar in de types P, Q, R en S. Elk type is leverbaar in een benzine-, diesel- of hybride-uitvoering. Verder kan de klant kiezen uit de kleuren wit, rood, zilvergrijs, antraciet en zwart. Zie het wegendiagram hieronder.



figuur 1.12

- a Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
 b Karlijn wil niet de types R en S, geen diesel en per se wel een rode auto.
 Hoeveel mogelijkheden zijn er voor haar?

- O 15** Experiment: een worp met twee dobbelstenen.

Bekijk de gebeurtenissen

V : de som van de ogen is minder dan 6

W : het product van de ogen is 4.

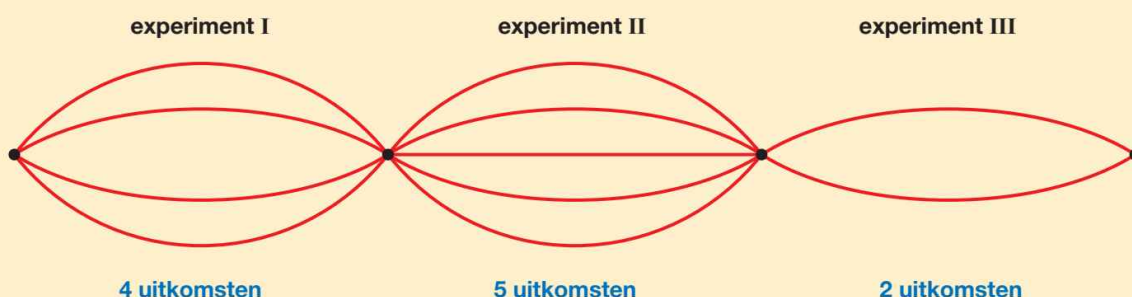
- a Hoeveel elementen heeft V ? En W ?
 b Is $\#(V \cup W) = \#(V) + \#(W)$? Licht toe.

- O 16** Gegeven zijn de verzamelingen V en W met $\#(V) = 8$, $\#(W) = 7$ en $\#(V \cap W) = 3$.

Hoeveel elementen heeft $V \cup W$? Licht toe.

Theorie B De productregel en de somregel

Een wegendiagram geeft een goed overzicht van alle uitkomsten als je twee of meer experimenten uitvoert. Het wegendiagram hieronder hoort bij een gecombineerd experiment dat bestaat uit drie experimenten.



figuur 1.13

Experiment I heeft vier uitkomsten, experiment II heeft vijf uitkomsten en experiment III heeft twee uitkomsten.

Het gecombineerde experiment heeft $4 \cdot 5 \cdot 2$ uitkomsten.

Het wegendiagram brengt de **productregel** in beeld.

De productregel

Een experiment dat bestaat uit
 experiment 1 met n_1 uitkomsten en
 experiment 2 met n_2 uitkomsten en
 experiment 3 met n_3 uitkomsten en ...
 heeft $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots$ uitkomsten.

Bij sommige telproblemen moet je aantallen niet alleen vermenigvuldigen, maar ook optellen.

Ga je in de figuur hiernaast van A naar B , dan moet je via P of via Q .

Het aantal routes van A via P naar B is $3 \cdot 4$.

Het aantal routes van A via Q naar B is $3 \cdot 2$.

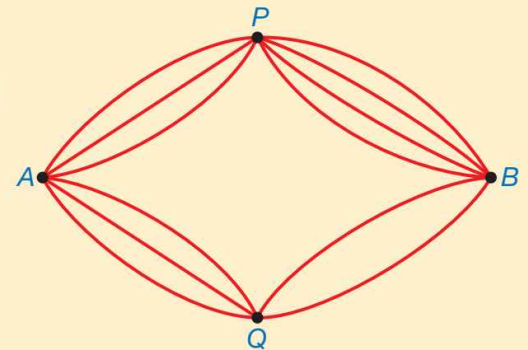
Het totale aantal routes van A naar B is $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$.

Merk op dat de gebeurtenis 'je gaat via P ' en de gebeurtenis 'je gaat via Q ' elkaar uitsluiten: je gaat óf via P , óf via Q , maar niet via beide. Je hebt hier te maken met een speciaal geval van de **somregel**.

In opgave 16 heb je gezien dat voor de verzamelingen V en W die elkaar niet uitsluiten geldt $\#(V \cup W) = \#(V) + \#(W) - \#(V \cap W)$.

In de opgaven heb je meestal te maken met het speciale geval van de somregel. De gebeurtenissen G_1 en G_2 sluiten elkaar dan uit, dat wil zeggen dat de verzamelingen G_1 en G_2 disjunct zijn.

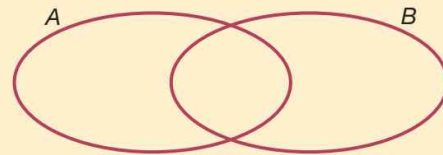
Bij de **algemene somregel** hoeven de gebeurtenissen G_1 en G_2 elkaar niet uit te sluiten.



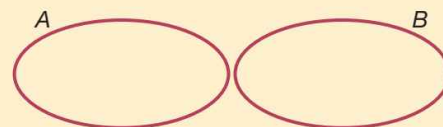
figuur 1.14

De somregel

Voor de verzamelingen A en B geldt
 $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.



Voor de disjuncte verzamelingen A en B geldt
 $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

**Vuistregel**

Is een opgave te formuleren met **en**, dan moet je **vermenigvuldigen**.

Is een opgave te formuleren met **of**, dan moet je **optellen**.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt het aantal uitkomsten aangegeven met N en niet met $\#$, omdat er tussen de haakjes een omschrijving van een gebeurtenis staat en geen verzameling.

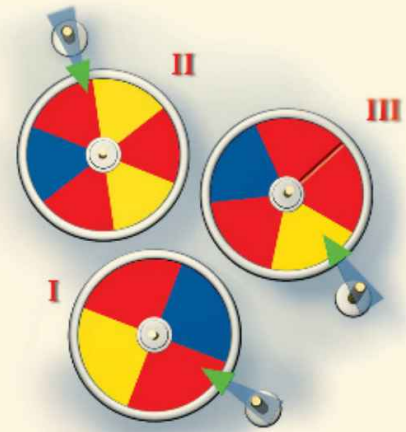
Voorbeeld

Robert laat de schijven hiernaast elk één keer draaien.
Hoeveel uitkomsten zijn er met

- drie keer rood
- drie gelijke kleuren
- twee keer geel en één keer blauw?

Uitwerking

- $N(3 \text{ keer rood}) = N(r r r) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
- $N(3 \text{ gelijke}) = N(r r r \text{ of } b b b \text{ of } g g g)$
 $= N(r r r) + N(b b b) + N(g g g)$
 $= 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 21$
- $N(2 \text{ geel en } 1 \text{ blauw}) = N(g g b \text{ of } g b g \text{ of } b g g)$
 $= N(g g b) + N(g b g) + N(b g g)$
 $= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 5$



figuur 1.15

Opgave 17 is een testopgave.

Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld begrijpt, maak dan de T-opgave.

Gaat dit foutloos, dan kun je verder gaan met de opgave die achter ►► staat.

Lukt opgave 17 niet, ga dan verder met opgave 18. Je kunt de testopgave ook overslaan en meteen met opgave 18 verdergaan.

T 17 [►► 21] In de tabel zie je welke auto's Euro-lease aanbiedt. Je ziet dat er 8 Opels in benzine-uitvoering zijn.

De firma Dijkerman wil drie auto's leasen: één in benzine-uitvoering, een diesel en een hybride.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk als Dijkerman

- drie Opels wil hebben
- een Volkswagen in benzine-uitvoering wil hebben en twee BMW's
- twee Opels wil hebben en een Renault
- drie auto's van hetzelfde merk wil hebben?

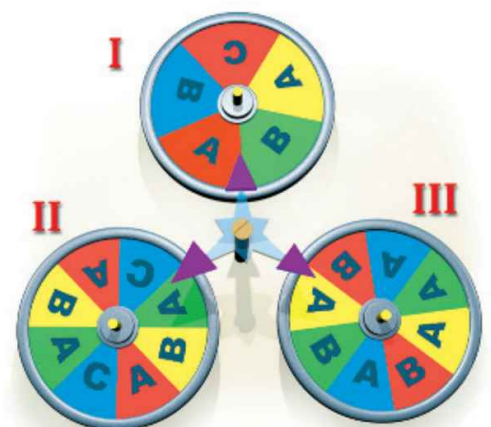
AUTO'S BIJ EURO-LEASE

	benzine	diesel	hybride
Opel	8	6	2
Volkswagen	12	15	3
Renault	5	7	1
Mercedes	6	14	0
BMW	5	16	2

18 Elsemiek laat de schijven hiernaast elk één keer draaien.

Hoeveel uitkomsten zijn er

- met drie keer een A
- met drie keer dezelfde letter
- met twee keer een A en één keer een C
- zonder B
- met drie dezelfde kleuren
- met twee keer groen en één keer rood?



figuur 1.16

- 19** Op een boekenplank staan elf Engelse, acht Duitse en vijf Franse boeken.
- a** Carla leest van deze boeken eerst een Engels, dan een Duits en ten slotte een Frans boek. Hoeveel mogelijke drietallen zijn er?
- b** Hoeveel mogelijke tweetallen zijn er voor Carla als ze twee boeken leest: eerst een Engels boek en daarna een Frans of Duits boek?



- 20** Woonwarenhuis Comfi verkoopt houten kasten van het type KD. Deze zijn er in de breedtematen 40 cm, 60 cm en 80 cm, die elk in de kleuren wit, zwart, rood en bruin verkrijgbaar zijn. Elke kast heeft een deur van hout, matglas of helder glas, waarbij de houten deuren leverbaar zijn in de kleuren wit, zwart, rood en groen.
- Hoeveel kasten van het type KD kun je samenstellen?

- A 21** In de tabel hiernaast zie je de rapportcijfers voor wiskunde B en wiskunde D van klas V4D. Je ziet dat er drie leerlingen zowel voor wiskunde B als voor wiskunde D een 7 hebben.

- a** Hoeveel leerlingen zijn er met minstens een 7 voor wiskunde B en minstens een 7 voor wiskunde D?
- b** Hoeveel leerlingen zijn er met minstens een 7 voor wiskunde B of minstens een 7 voor wiskunde D?

RAPPORTCIJFERS

	wiskunde B					
wiskunde D		5	6	7	8	
	6	2	1	2	0	5
	7	1	5	3	1	10
	8	0	1	4	4	9
		3	7	9	5	24

- D 22** Voor het cijferslot van zijn kluis gebruikt meneer Jansma twee blokken cijfers. De cijfers van het eerste blok kiest hij uit 1, 3, 5, 7 en 9, de cijfers van het tweede blok kiest hij uit de cijfers 2, 4, 6 en 8. In een blok mogen de cijfers vaker dan één keer worden gebruikt.
- Het eerste blok bestaat uit twee cijfers meer dan het tweede blok. Zo heeft meneer Jansma 1,6 miljard mogelijkheden om een code te maken.
- Onderzoek uit hoeveel cijfers het eerste blok bestaat.

Terugblik

1

Gebeurtenis en uitkomstenverzameling

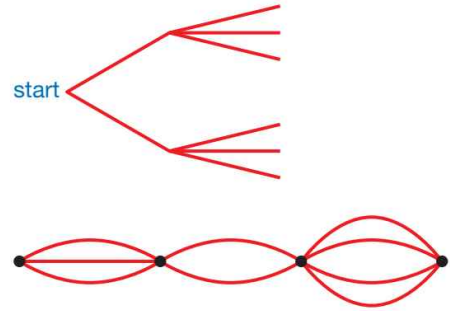
Bij het gooien met een achthoeksdobbelsteen is de uitkomstenverzameling $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Bij de gebeurtenis G : 'het aantal ogen is minder dan 3' hoort de deelverzameling $G = \{1, 2\}$.

Het aantal elementen van G is $\#(G) = 2$.

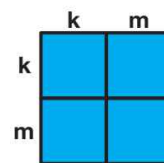
Telproblemen visualiseren

Om een overzicht te krijgen van alle uitkomsten bij een telprobleem kun je gebruik maken van een boomdiagram, een wegendiagram of een rooster. Je kunt ook alle mogelijkheden systematisch noteren.



De productregel en de somregel

Een experiment dat bestaat uit
 experiment 1 met n_1 uitkomsten en
 experiment 2 met n_2 uitkomsten en
 experiment 3 met n_3 uitkomsten en ...
 heeft $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots$ uitkomsten (de productregel).



Voor de verzamelingen A en B geldt
 $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$ (de somregel).

Voor de disjuncte verzamelingen A en B geldt
 $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

Je gebruikt de productregel als de opgave te formuleren is met EN.

Je gebruikt de somregel als de opgave te formuleren is met OF.

113	131	311
221	212	122

Kies je uit klas 4 vwo D een leerling waarvoor geldt 'leerling is meisje (M) of is 16 jaar (Z)', dan zijn er $17 + 11 - 7 = 21$ mogelijkheden, immers $\#(M \cup Z) = \#(M) + \#(Z) - \#(M \cap Z)$.

SAMENSTELLING KLAS 4 VWO D

	15 jaar	16 jaar	
jongen	8	4	12
meisje	10	7	17
	18	11	29

Kies je uit klas 4 vwo D twee leerlingen waarbij de eerste plaatsneemt in de leerlingenraad en de tweede reserve is, dan geldt:

- Het aantal tweetallen waarbij de eerste leerling 15 jaar is EN de tweede 16 jaar, is gelijk aan $8 \cdot 7 = 56$.
- Het aantal tweetallen met een jongen en een meisje, dus het aantal tweetallen waarbij de eerste leerling een jongen is en de tweede een meisje OF waarbij de eerste leerling een meisje is en de tweede een jongen, is gelijk aan $12 \cdot 17 + 17 \cdot 12 = 408$.

1.2 Variaties en herhalingsvariaties

O 23 De firma Motorola voorziet zijn artikelen van een code die bestaat uit twee letters. Gekozen kan worden uit de letters A, B, C, D en E. Hoeveel codes zijn mogelijk? Onderscheid de volgende situaties.

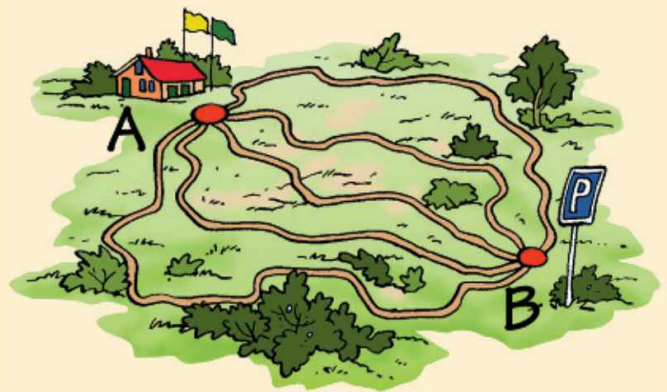
- De tweede letter moet anders zijn dan de eerste.
- De letters mogen gelijk zijn.

Theorie A Met en zonder herhaling

Het aantal rondwandelingen in figuur 1.17 van A naar B en terug naar A is $5 \cdot 5 = 25$. Je gaat er dan vanuit dat je terug dezelfde weg mag kiezen als heen.

Wil je terug niet dezelfde weg nemen als heen, dan is het aantal rondwandelingen $5 \cdot 4 = 20$.

Het is bij telproblemen belangrijk je af te vragen of **herhalingen** zijn toegestaan.



figuur 1.17

• Zonder herhalingen

Een bestuur van acht personen kiest uit hun midden eerst de voorzitter, dan de secretaris en ten slotte de penningmeester. Het aantal manieren om deze functies te verdelen is

$$N(v \ s \ p) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

eerst de voorzitter:
keuze uit 8 personen

dan de secretaris:
keuze uit 7 personen

ten slotte de penningmeester:
keuze uit 6 personen

Je hebt hier te maken met een **variatie** van 3 uit 8. Bij een variatie is de volgorde van belang en zijn herhalingen niet toegestaan.

• Met herhalingen

Een bedrijf codeert zijn artikelen met codes bestaande uit eerst drie letters, waarbij de keuze is uit a, b, c, d en e, en vervolgens twee cijfers. Het aantal mogelijke codes is

$$N(l \ l \ l \ c \ c) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 = 12\ 500$$

5 letters voor
de eerste plaats

ook 5 letters voor
de tweede plaats

10 cijfers voor
de vierde plaats

Een telprobleem waarbij herhalingen zijn toegestaan en de volgorde van belang is heet een **herhalingsvariatie**.

Voorbeeld

Een bedrijf codeert zijn artikelen met getallen van vijf cijfers.

Alleen de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 worden gebruikt.

Hoeveel van die getallen zijn er als

- a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b elk cijfer vaker gebruikt mag worden en het getal groter dan 60000 moet zijn
- c elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 65000 moet zijn?

Aanpak

- c Is het eerste cijfer 5 of lager, dan maken de volgende cijfers niets uit.
Is het eerste cijfer 6, dan moet het tweede cijfer lager dan 5 zijn.

Uitwerking

a $N(\text{totaal}) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Voor de eerste plaats 7 mogelijkheden, dan nog 6 voor de tweede plaats, ...

Je hebt met een variatie van 5 uit 7 te maken.

b $N(\text{getal} > 60000) = N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 6, 7 \text{ of } 8) = 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7203$

Herhalingen zijn toegestaan.

c $N(\text{getal} < 65000)$

$= N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2, 3, 4 \text{ of } 5) + N(1^{\text{e}} \text{ cijfer is } 6 \text{ en } 2^{\text{e}} \text{ cijfer is } 2, 3 \text{ of } 4)$

$= 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1620$

T 24 [►► 29] Een bedrijf codeert zijn artikelen met vijf letters waarbij gekozen wordt uit a, b, c, d, e, f, g en h.

Hoeveel codes zijn er mogelijk als

- a elke letter maar één keer gebruikt mag worden
- b elke letter vaker gebruikt mag worden en de code met een a, b of c moet beginnen
- c elke letter maar één keer gebruikt mag worden en de eerste twee letters moeten worden gekozen uit a, b en c
- d elke letter vaker gebruikt mag worden, maar de letter a maximaal één keer mag worden gebruikt?

25 In deze opgave gaat het over getallen van vier cijfers, waarin alleen maar de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.

Hoeveel van die getallen zijn er als

- a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 6000 moet zijn
- c elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal tussen 6000 en 6500 moet liggen
- d elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter moet zijn dan 6500?

- 26** Een bedrijf codeert zijn artikelen door gebruik te maken van de symbolen ♥, ♦, ♣ en ♠. Elke code bestaat uit een rijtje van vijf symbolen.
- Toon aan dat er 1024 codes mogelijk zijn.
 - Hoeveel van deze codes beginnen met het symbool ♥?
 - Bij hoeveel van deze codes staan er geen gelijke symbolen naast elkaar?
 - Hoeveel van deze codes zijn er met vier keer het symbool ♣?

- 27** De IATA (International Air Transport Association) gebruikt een drielettercode om een vliegveld aan te geven. Zo hoort AMS bij Schiphol en UUD bij Ulan Ude (Rusland).
- Hoeveel van die codes zijn in totaal mogelijk?
 - Hoeveel codes zijn mogelijk waarbij geen twee gelijke letters naast elkaar staan?
 - Hoeveel codes zijn mogelijk die met een L beginnen?



- 28** Een vierkeuzetoets bestaat uit tien vragen.
- Een mogelijk rijtje antwoorden is B C D D A A C B B B. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
 - Maud weet met zekerheid de antwoorden op de vragen 1, 2, 7, 8 en 10. Bij de andere vragen moet ze gokken. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor Maud om de toets in te vullen?

- A 29** In een bedrijf krijgt elk artikel een code. Bij het coderen gebruikt men de letters o, p, q, r, s en t.
- Hoeveel drielettercodes zijn mogelijk als
 - elke letter maar één keer gebruikt mag worden in een code
 - elke letter vaker gebruikt mag worden?
 - Het bedrijf gebruikt éénlettercodes, tweelettercodes, ..., zeslettercodes. Hoeveel codes zijn er in totaal als
 - in een code geen gelijke letters mogen voorkomen
 - in een code letters vaker mogen voorkomen?

- R 30** Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een lettercode. Bij het coderen gebruikt men de letters a, b, c, d en e. Bedenk een vraag waarbij er
- 5^4 codes mogelijk zijn
 - $5 \cdot 4 \cdot 3$ codes mogelijk zijn
 - $5 \cdot 4 + 5^3$ codes mogelijk zijn
 - $5 \cdot 4 \cdot 4$ codes mogelijk zijn.

1

A 31 De firma RDV&W codeert zijn artikelen met getallen die bestaan uit vijf cijfers. Voor de eerste drie cijfers wordt gekozen uit 2, 3, 4, 5, 6 en 7. Voor de laatste twee cijfers wordt gekozen uit 5, 8 en 9. Hoeveel codes zijn mogelijk als

- a elk cijfer vaker gebruikt mag worden en het getal kleiner is dan 50 000
- b de eerste drie cijfers verschillend en de laatste twee gelijk moeten zijn
- c elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal groter is dan 56 000
- d er in het getal geen gelijke cijfers mogen voorkomen?



D 32 Een bedrijf codeert zijn artikelen met getallen van vier cijfers. Alleen de cijfers 2, 3, 4, 5, 7 en 8 worden gebruikt.

- a Hoeveel van die getallen zijn er als elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en de getallen tussen 2400 en 3800 liggen?
- b Hoeveel van die getallen zijn er als elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en de getallen tussen 5500 en 7500 liggen?
- c De cijfers mogen meer dan één keer gebruikt worden en de getallen liggen tussen x en 3700. Er zijn in totaal 216 getallen. Onderzoek welke waarde x heeft.

O 33 Een verzameling V heeft 7 elementen.

- a Je kiest 3 elementen van V waarbij herhalingen zijn toegestaan en de volgorde van belang is. Hoeveel uitkomsten zijn er?
- b Je kiest 3 elementen van V waarbij herhalingen niet zijn toegestaan en de volgorde van belang is.

Licht toe dat er $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ uitkomsten zijn.

Theorie B Permutaties en faculteiten

Bij telproblemen waarbij de volgorde van belang is zijn twee situaties te onderscheiden.

I Herhalingen zijn toegestaan

Kies je k elementen uit een verzameling V met n elementen, dan is het aantal uitkomsten n^k . Dit is een herhalingsvariatie van k uit n .

II Herhalingen zijn niet toegestaan

Kies je 3 elementen uit een verzameling met 7 elementen, dan is het aantal uitkomsten $7 \cdot 6 \cdot 5$. Dit is een variatie van 3 uit 7 en wordt genoteerd als $7P3$.

Kies je 7 elementen uit een verzameling met 7 elementen, dan heb je te maken met een variatie van 7 uit 7. We noemen dit een **permutatie** of **rangschikking**. Bij een permutatie worden alle elementen van een verzameling gekozen. Het aantal uitkomsten is $7P7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dit wordt genoteerd als $7!$. Uitspraak: zeven **faculteit**.

In het algemeen is $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

De variatie van 3 uit 7 wordt ook 3-permutatie uit 7 genoemd. Het is mogelijk $7P3$ met behulp van faculteiten te noteren.

$$\text{Bedenk dat } 7P3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{4!}.$$

$$\text{In het algemeen is } nPk = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Je berekent faculteiten en aantallen variaties met de opties ! en nPr op de GR.

Bij de TI vind je deze opties in het MATH-PRB-menu, bij de Casio in het OPTN-PROB-menu.

Hierbij staan PRB en PROB voor het Engelse woord *probability*, dat *waarschijnlijkheid* betekent.

Bereken je nPn met de formule $nPk = \frac{n!}{(n-k)!}$, dan krijg

je $nPn = \frac{n!}{0!}$. Omdat $nPn = n!$ volgt hieruit dat $0! = 1$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP	
$7P3$	210
$7!$	5040

$$0! = 1$$

Kies je k elementen uit een verzameling van n elementen waarbij de volgorde van belang is en

- **waarbij herhalingen zijn toegestaan, dan is er sprake van een herhalingsvariatie van k uit n en zijn er n^k uitkomsten**
- **waarbij herhalingen niet zijn toegestaan, dan is er sprake van een variatie van k uit n en zijn er $nPk = \frac{n!}{(n-k)!}$ uitkomsten**
- **waarbij herhalingen niet zijn toegestaan en $k = n$, dan is er sprake van een permutatie en zijn er $nPn = n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ uitkomsten.**

Voorbeeld

- Bereken het aantal variaties van 5 uit 12.
- Bereken het aantal herhalingsvariates van 5 uit 12.
- Vanaf welke n is het aantal variaties van 5 uit n meer dan de helft van het aantal herhalingsvariates van 5 uit n ?

Uitwerking

- $N(\text{variates van 5 uit 12}) = 12P5 = 95\,040$
- $N(\text{herhalingsvariates van 5 uit 12}) = 12^5 = 248\,832$
- Voer in $y_1 = xP5$ en $y_2 = \frac{1}{2}x^5$ en maak een tabel.
Lees af $16P5 = 524\,160$ en $\frac{1}{2} \cdot 16^5 = 524\,288$ en
 $17P5 = 742\,560$ en $\frac{1}{2} \cdot 17^5 = 709\,928,5$.
Dus vanaf $n = 17$.

X	Y_1	Y_2
13	154440	185647
14	240240	268912
15	360360	375688
16	524160	524288
17	742560	709929
18	1.03E6	944784
19	1.4E6	1.24E6
X=17		

- Bereken het aantal variates van 4 uit 15.
 - Bereken het aantal herhalingsvariates van 4 uit 15.
 - Vanaf welke n is het aantal variates van 4 uit n meer dan driekwart van het aantal herhalingsvariates van 4 uit n ?
- Carlijn heeft twaalf R&B cd's. Ze stelt een top vijf samen. Op hoeveel manieren kan dat?
 - Een kantoorgebouw heeft zes verdiepingen. Op de begane grond stappen 12 personen in de lift. Op hoeveel manieren kunnen ze op de zes verdiepingen uitstappen?
 - Een fotograaf heeft van het zeehondencentrum in Pieterburen 14 foto's gemaakt. In een brochure van tien pagina's wordt op elke pagina één foto afgedrukt. Op hoeveel manieren kunnen de foto's geplaatst worden?



- Martin is de pincode van zijn bankpas vergeten, maar hij weet nog wel dat daarin de cijfers 2, 5, 8 en 9 voorkomen.
 - Hoeveel pincodes zijn er met deze cijfers?
 - Hoeveel van die pincodes beginnen met een 5?

- A 37** Veel winkeliers hebben te maken met winkeldiefstal. Bij een aangifte vindt de politie het prettig om een compositietekening van de verdachte te maken. De politie gebruikt een computerprogramma waarbij er voor mannen keuze is uit 17 soorten haardracht (inclusief kaal), 9 vormen van het hoofd, 12 wenkbrauwen, 15 brillen, 22 paar ogen, 9 neuzen, 5 snorren, 18 monden en 14 baarden. Hoeveel compositietekeningen zijn er in totaal mogelijk?



- A 38** De selectie van het eerste team van korfbalvereniging Avanti bestaat uit zes heren en zes dames. De trainer wijst een aanvoerder en een reserve-aanvoerder aan.
- a** Op hoeveel manieren kan dit?
- Aan het begin van de competitie wordt een foto van de selectie gemaakt. De fotograaf zet de twaalf spelers op een rij.
- b** Hoeveel rijen zijn mogelijk?
- c** Hoeveel rijen zijn mogelijk waarbij geen twee heren naast elkaar staan?

- R 39** Een bedrijf gebruikt codes met de letters a, b, c, d, e en f. Bedenk een vraag waarbij er
- a** $6!$ codes zijn
- b** $6 \cdot 5 \cdot 4$ codes zijn
- c** 6^4 codes zijn
- d** $2 \cdot 4^3$ codes zijn.

Terugblik

1

Variaties, herhalingsvariaties en permutaties

Bij telproblemen waarbij de volgorde van belang is, zijn twee situaties te onderscheiden.

1 Herhalingsvariaties

Herhalingen zijn toegestaan.

Bij het vier keer gooien met een dobbelsteen zijn er 6^4 uitkomsten.

2 Variaties

Herhalingen zijn niet toegestaan.

Er zijn $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ codes van vier verschillende letters te maken van de letters A, B, C, D, E en F.

Maak je met de zes letters een code van zes verschillende letters, dan heb je met een permutatie te maken. Er zijn $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutaties.

Notaties bij variaties en permutaties

Bij een variatie van 4 uit 6 hoort de berekening $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Notatie $6P4$.

Bij een permutatie van 6 hoort de berekening $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Notatie $6!$.

$6!$ spreek je uit als 6 faculteit.

Je kunt $6P4$ en $6!$ op de GR berekenen met de opties nPr en $!$.

$$nPk = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ en } n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Kies je nul elementen uit een verzameling van n elementen, dan kan dat op één manier. Dus $0! = 1$.

Voorbeelden van variaties en herhalingsvariaties

• Getallen maken met de cijfers 4, 5, 6, 7, 8 en 9

Het aantal getallen van vier cijfers waarbij

- herhalingen zijn toegestaan is $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$
- herhalingen niet zijn toegestaan is $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Het aantal getallen van drie of vier cijfers waarbij herhalingen zijn toegestaan, is $N(\text{totaal}) = N(3 \text{ cijfers}) + N(4 \text{ cijfers}) = 6^3 + 6^4 = 1512$.

• Een meerkeuzetoets

Op hoeveel manieren kun je een vierkeuzetoets met twaalf vragen invullen?

Je hebt met een herhalingsvariatie te maken. Het aantal manieren is 4^{12} , want bij elk van de twaalf vragen zijn vier antwoorden mogelijk.

• Een team samenstellen

De twaalf leden van een schaakclub kiezen voor een wedstrijd om het provinciaal kampioenschap uit hun midden een team van vier spelers.

De eerstgekozen speler speelt aan bord 1, de tweede aan bord 2, enzovoort.

Hoeveel teams kunnen gekozen worden?

Je hebt met een variatie van 4 uit 12 te maken, want herhalingen zijn niet toegestaan. Het aantal teams is $12P4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$.

1.3 Combinaties en herhalingscombinaties

- O40** a Hoeveel variaties van 2 uit 4 zijn er?
 b Een klas kiest een afvaardiging van twee leerlingen voor het schoolparlement. Vier leerlingen van de klas tonen belangstelling, namelijk Anne, Bas, Christine en Daphne.
 Hoeveel afvaardigingen kan de klas leveren? Denk eraan dat de afvaardiging Anne-Daphne dezelfde is als de afvaardiging Daphne-Anne.

Theorie A Het aantal combinaties van k uit n

We vragen ons af hoeveel deelverzamelingen van 3 elementen de verzameling $\{A, B, C, D, E\}$ heeft.

Een eerste gedachte zou de volgende kunnen zijn.

Voor de keuze van het eerste element zijn er vijf mogelijkheden, voor het tweede vier en voor het derde zijn er nog drie mogelijkheden.

Toch is het antwoord $5 \cdot 4 \cdot 3$ niet juist. Je moet er namelijk rekening mee houden dat de deelverzameling $\{A, B, D\}$ hetzelfde is als de deelverzamelingen $\{A, D, B\}$, $\{B, A, D\}$, $\{B, D, A\}$, $\{D, A, B\}$ en $\{D, B, A\}$.

De volgorde waarin de elementen worden genoteerd, doet er bij een verzameling immers niet toe. Dus de $3! = 6$ gelijke deelverzamelingen tellen maar voor één.

Steeds zijn er $3!$ gelijke deelverzamelingen, dus je moet $5 \cdot 4 \cdot 3$ door $3!$ delen.

Het aantal deelverzamelingen is $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$.

Bij het kiezen van 3 elementen uit een verzameling van 5 elementen is de volgorde *niet* van belang en zijn herhalingen niet toegestaan.

Je hebt te maken met het aantal **combinaties** van 3 uit 5.

Het aantal combinaties van 3 uit 5 noteren we als $\binom{5}{3}$.

Spreek uit: vijf boven drie.

Het aantal combinaties van 4 uit 10 is $\binom{10}{4}$.

Je begrijpt dat $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}$.

Dit kun je ook noteren als $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} \cdot \frac{6!}{6!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$.

In het algemeen is $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Het aantal combinaties van k uit n , ofwel het aantal manieren om k elementen te kiezen uit n elementen zonder op de volgorde te letten en waarbij herhalingen niet zijn toegestaan, is

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Je berekent aantallen combinaties met de optie nCr op de GR.
Bij de TI vind je de optie in het MATH-PRB-menu, bij de Casio in het OPTN-PROB-menu.

Voorbeeld

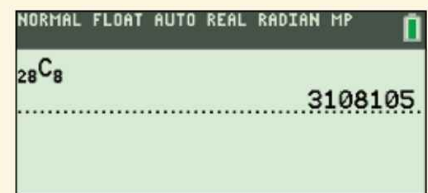
Van de 28 leerlingen van een klas worden er acht uitgekozen om een enquête in te vullen.
Hoeveel achttallen zijn mogelijk?

Aanpak

De volgorde is niet van belang, dus het gaat om combinaties.

Uitwerking

$$N(\text{achttallen}) = \binom{28}{8} = 3\,108\,105$$



- R 41** Gaat het bij de volgende situaties om combinaties of om variaties?
- Uit een klas worden zes leerlingen gekozen om een volleybalteam te vormen.
 - Bij een verloting zijn drie prijzen te winnen: een fiets, een grafische rekenmachine en een taart.
 - In een klas worden vijf kaartjes verloot voor een toneelvoorstelling.
 - Op een schoolfeest komen vijf leraren.
 - Uit de top tien van 3FM van vorige week stel je een eigen top drie samen.

- T 42** [▶▶ 45] Op een boekenplank staan twaalf thrillers, tien romans en zeven gedichtenbundels.
- Sanne kiest drie thrillers.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk?
 - Ruben kiest vijf romans.
Hoeveel vijftallen zijn mogelijk?
 - Judith kiest één thriller, één roman en één gedichtenbundel.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk?
 - Op hoeveel manieren kan Rob uit de 29 boeken een top vijf samenstellen?

43 Op een sportdag zijn er 15 jongenteams gevormd voor de 4×400 meter estafette. De teams zijn genummerd van 1 tot en met 15. Door loting worden vijf teams aangewezen voor de eerste serie.

- a Op hoeveel manieren kan dat?
- b Met hoeveel vermindert het aantal keuzemogelijkheden als de teams met de nummers 10 en 11 niet meedoen aan deze loting?

44 a Uit een selectie van 18 spelers wordt een spelersraad van vier spelers samengesteld.

Hoeveel spelersraden zijn mogelijk?

b Bij de lotto kruist een deelnemer zes getallen aan uit de nummers 1 tot en met 45.

Hoeveel zestallen zijn mogelijk?

c Een vierkeuzetoets bestaat uit 20 vragen.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om 15 juiste antwoorden aan te kruisen?

d Hoeveel wedstrijden zijn er in een halve competitie van 18 clubs?

e Hoeveel wedstrijden zijn er in een hele competitie van 16 clubs?

45 a Hoeveel deelverzamelingen van 12 elementen zijn er te maken uit een verzameling van 20 elementen?

b Hoeveel deelverzamelingen zijn er te maken uit een verzameling van 5 elementen?

$$\emptyset \subset V$$

$$V \subset V$$

A 46 Uit een klas van 28 leerlingen wordt een basketbalteam van acht spelers (vijf basis- en drie wisselers) samengesteld.

a Hoeveel selecties van acht spelers zijn mogelijk?

b Op hoeveel manieren kunnen de acht spelers op een rij gaan staan?

c Hoeveel basisvijftallen kunnen er uit het gekozen team gevormd worden?

d Nadat het basketbalteam gekozen is, wordt uit de overgebleven leerlingen van de klas een volleybalteam van zes spelers samengesteld.

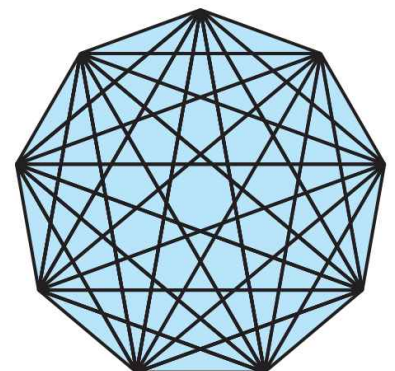
Hoeveel volleybalteams zijn mogelijk?

A 47 In figuur 1.18 zie je een regelmatige negenhoek met zijn diagonalen.

a Hoeveel diagonalen heeft de negenhoek?

b Bereken het aantal driehoeken in figuur 1.18 waarvan de drie hoekpunten ook hoekpunten van de negenhoek zijn.

c N is het aantal diagonalen in een regelmatige n -hoek. Stel de formule op van N .



figuur 1.18

1

R 48 Bedenk een telprobleem waarbij het aantal mogelijkheden is

- a $7!$ c $7 \cdot 3$ e 3^7
 b $\binom{7}{3}$ d 7^3 f $7 \cdot 6 \cdot 5$.

R 49 a Hoeveel is $\binom{17}{0}$, $\binom{17}{1}$, $\binom{17}{16}$ en $\binom{17}{17}$?

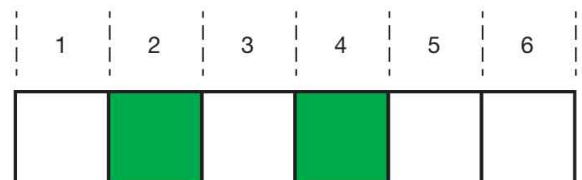
b Beredeneer hoe je zonder de GR aan de antwoorden van vraag a kunt komen.

c Geef $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ en $\binom{n}{n}$.**D 50** a Bij een hele competitie met x teams zijn er 74 wedstrijden meer dan bij een hele competitie met $x - 2$ teams.Bereken x .b Kies je uit x spelers een team van 6 spelers, dan zijn er bijna 60 000 mogelijkheden meer dan wanneer je 6 spelers kiest uit $x - 2$ spelers.Zoek uit welke waarde x heeft.c Kies je uit 36 spelers een team van x spelers, dan zijn er ruim 92 miljoen mogelijkheden meer dan wanneer je een team van $x - 3$ spelers kiest.Zoek uit welke waarde x heeft.d Een regelmatige n -hoek heeft 175 diagonalen meer dan een regelmatige $n - 5$ hoek.Zoek uit welke waarde n heeft.**O 51** Een bedrijf voorziet zijn artikelen van een code door in een rijtje van zes vierkantjes er twee groen te maken. Het maken van een code komt neer op het kiezen van twee van de zes vierkantjes.

a Gaat het hierbij om combinaties of variaties?

Licht toe.

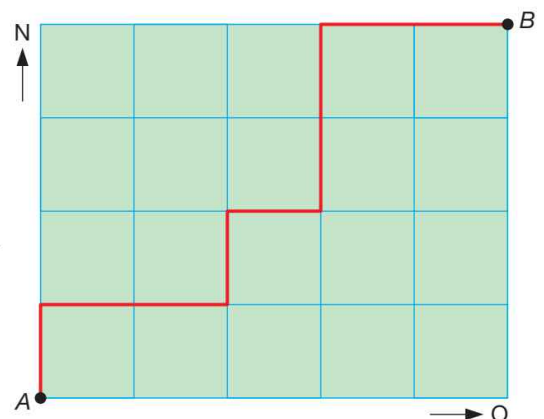
b Hoeveel codes kan het bedrijf maken?



figuur 1.19

O 52 Zie het rooster hiernaast. We bekijken in dit rooster routes van A naar B . Hierbij gaat het om routes zonder omwegen over de roosterlijnen. De rode route in het rooster geven we aan met NOONONNOO.a Schrijf nog twee mogelijke routes van A naar B op.b Hoeveel letters staan er in een route van A naar B ?

Hoe vaak staat de letter N daarbij?

c Hoeveel routes zijn er van A naar B ?

figuur 1.20

Theorie B Rijtjes bestaande uit A's en B's en routes in een rooster

De rijtjes ABBAABBB en BABABBAB zijn voorbeelden van rijtjes met drie A's en vijf B's. Het totale aantal rijtjes met drie A's en vijf B's vind je als volgt.
Zet in drie van de acht hokjes een A.

Dat kan op $\binom{8}{3}$ manieren.

Daarmee liggen de hokjes waarin B's moeten komen vast.

Er zijn dus $\binom{8}{3} = 56$ rijtjes met drie A's en vijf B's.

Je had ook eerst in vijf van de acht hokjes een B kunnen zetten en vervolgens de drie A's in de resterende drie hokjes.

Dat kan op $\binom{8}{5} = 56$ manieren. Het aantal rijtjes

bestaande uit drie A's en vijf B's is dus $\binom{8}{3}$ en ook $\binom{8}{5}$.

Het totale aantal rijtjes van lengte 8 die je kunt maken met A's en B's is 2^8 . Immers er zijn 2 manieren om het eerste hokje te vullen, er zijn 2 manieren om het tweede hokje te vullen, enzovoort.



figuur 1.21

3 kiezen uit 8
is hetzelfde als
5 overhouden uit 8
en dit is hetzelfde als
5 kiezen uit 8.

$$\text{Dus } \binom{8}{3} = \binom{8}{5}.$$

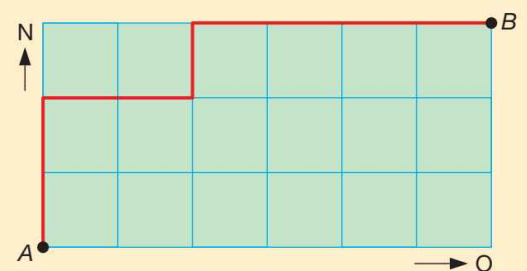
Het aantal rijtjes bestaande uit p keer een A en q keer een B

is $\binom{p+q}{p}$ en ook $\binom{p+q}{q}$.

Het totale aantal rijtjes van lengte n met A's en/of B's is 2^n .

Een mogelijke route zonder omwegen van A naar B in het 3×6 -rooster in figuur 1.22 is NNOONOOO. Bij elke kortste route van A naar B hoort een rijtje bestaande uit drie N's en zes O's.

Het aantal kortste routes van A naar B is dus $\binom{9}{3} = 84$.



figuur 1.22

Het aantal kortste routes in een $p \times q$ -rooster van een

hoekpunt naar het overstaande hoekpunt is $\binom{p+q}{p}$.

Voorbeeld

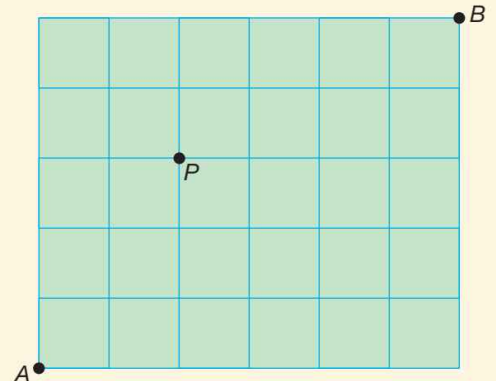
Bereken het aantal kortste routes

- a van A naar B
- b van A naar B via P .

Uitwerking

a $N(A \rightarrow B) = \binom{11}{5} = 462$

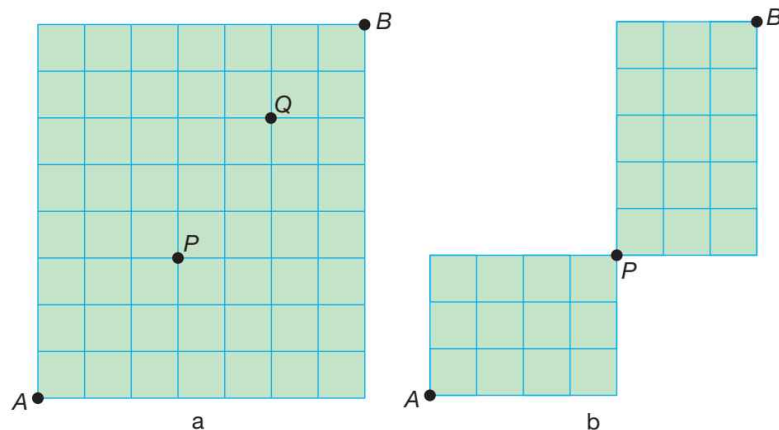
b $N(A \rightarrow P \rightarrow B) = N(A \rightarrow P) \cdot N(P \rightarrow B) =$
 $\binom{5}{3} \cdot \binom{6}{2} = 150$



figuur 1.23

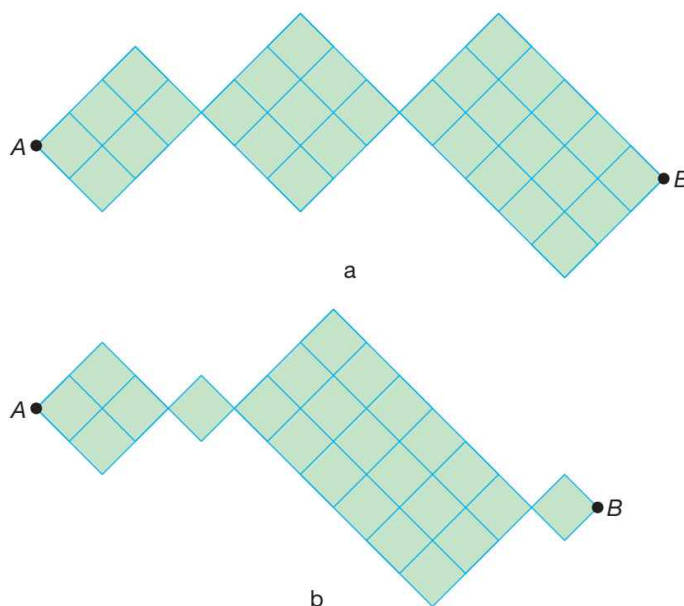
- 53** Willem gooit tien keer met een geldstuk. Telkens noteert hij K (kop) of M (munt).
 Een mogelijke serie is K K M M K M M M K K.
 Hoeveel series zijn er
- a in totaal mogelijk
 - b met acht keer kop
 - c met vijf keer kop
 - d die met K K beginnen
 - e die met een K beginnen, met een K eindigen en met vijf K's in totaal?
- 54** Voor een toelatingsexamen moeten 20 tweekeuzevragen worden beantwoord.
- a Hoeveel mogelijkheden zijn er om het formulier in te vullen?
 - b Hoeveel mogelijkheden zijn er met 15 juiste antwoorden?
 - c Een kandidaat wordt toegelaten als hij minstens 80% van de vragen juist beantwoordt.
 Op hoeveel manieren kun je het formulier invullen om toegelaten te worden? Hoeveel procent is dat van het totale aantal manieren om het formulier in te vullen?
- A 55** Winkelier Timmer heeft zijn etalage versierd met feestverlichting. Deze verlichting bestaat uit 19 lampjes die onafhankelijk van elkaar voortdurend aan- en uitgaan. Een mogelijke situatie is: alleen de lampjes 2, 5, 7, 10 en 18 branden.
- a Hoeveel situaties zijn er in totaal mogelijk?
- In hoeveel situaties branden
- b er vijf lampjes
 - c er minder dan drie lampjes
 - d in elk geval het eerste, het middelste en het laatste lampje?

- 56** Zie figuur 1.24a.
Bereken het aantal kortste routes
a van A naar B via P
b van A naar B via Q
c van A naar B via P en Q .
- Zie figuur 1.24b.
d Bereken het aantal kortste routes van A naar B .



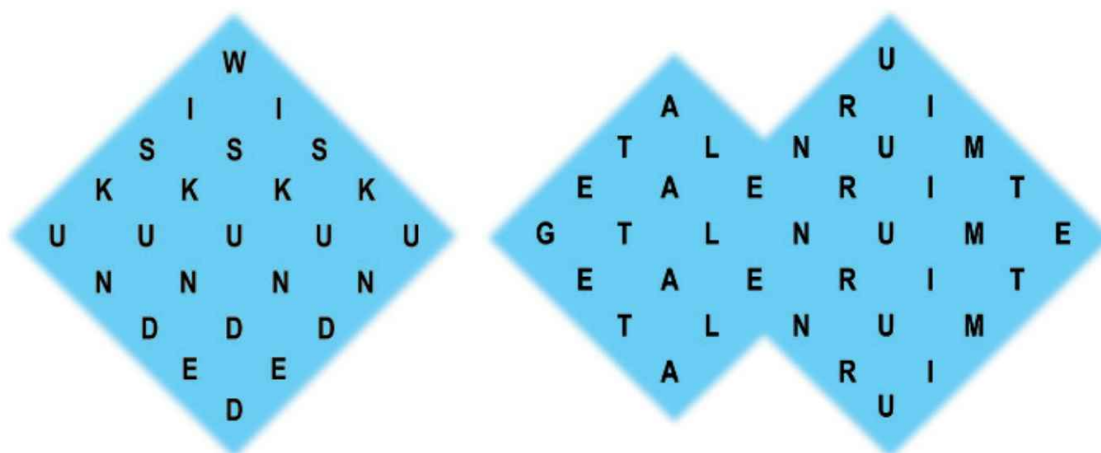
figuur 1.24

- 57** Hoeveel kortste routes zijn er van A naar B
a in figuur 1.25a
b in figuur 1.25b?



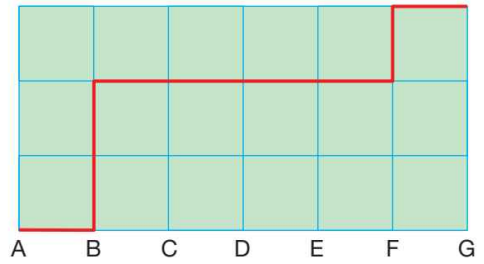
figuur 1.25

- A 58** a Op hoeveel manieren kun je in figuur 1.26a WISKUNDE D lezen?
b Op hoeveel manieren kun je in figuur 1.26b GETAL EN RUIMTE lezen?



figuur 1.26

- O 59** Voor het carnaval maakt een carnavalsvereniging drie maskers. De vrijwilligers voor deze klus komen uit de zeven leden van het bestuur van de vereniging. Het is toegestaan dat een bestuurslid ook meer dan één masker maakt. We noemen de bestuursleden A, B, C, D, E, F en G. Hiernaast is een rooster getekend met de route die hoort bij de situatie dat B twee maskers maakt en F het derde masker.



figuur 1.27

- a Licht toe dat er in totaal $\binom{9}{3}$ mogelijkheden zijn om deze klus te verdelen over de zeven bestuursleden.
- b Maak een rooster dat gebruikt kan worden als er vier maskers door de zeven bestuursleden moeten worden gemaakt en teken hierin de route die hoort bij de situatie: C maakt drie maskers en E maakt één masker.
- c Hoeveel mogelijkheden zijn er als het bestuur uit 10 leden bestaat en er 5 maskers moeten worden gemaakt?
- d Hoeveel mogelijkheden zijn er als het bestuur uit 5 leden bestaat en er 10 maskers moeten worden gemaakt?

Theorie C Herhalingscombinaties

Bij het aanwijzen van bestuursleden in opgave 59 die de maskers gaan maken, is de volgorde niet van belang en zijn herhalingen toegestaan. We spreken dan van een **herhalingscombinatie**. Ook bij het verdelen van 6 gelijke knikkers over 11 verschillende vazen heb je met een herhalingscombinatie te maken.

Het aantal herhalingscombinaties van 6 uit 11 is $\binom{16}{6}$.

Je kunt dit als volgt verklaren. Zie het rooster hieronder.

Het rooster bestaat uit 11 verticale lijnen (de vazen), die hiernaast zijn genummerd van 1 tot en met 11. Zo ontstaan $11 - 1 = 10$ kolommen. Verder zijn er 6 rijen (de knikkers), voor elke knikker één rij. Je moet dus een route kiezen in

een 6×10 -rooster. Dit kan op $\binom{16}{6}$ manieren.

In figuur 1.28 is aangegeven dat er één knikker in vaas 1, drie knikkers in vaas 4 en twee knikkers in vaas 9 terecht zijn gekomen.

En zo is er bij een herhalingscombinatie van 8 uit 20 een

$8 \times (20 - 1)$ -rooster te maken, dus zijn er $\binom{20 - 1 + 8}{8} = \binom{27}{8}$ herhalingscombinaties van 8 uit 20.



figuur 1.28

Het aantal herhalingscombinaties van k uit n , ofwel het aantal manieren om k elementen te kiezen uit n elementen zonder op de volgorde te letten en

waarbij herhalingen zijn toegestaan, is $\binom{n-1+k}{k}$.

Voorbeeld

Op hoeveel manieren kun je 10 repen chocola verdelen

- a over vier personen
- b over vier personen als elk van de vier personen minstens één reep krijgt?

Uitwerking

- a Herhalingscombinatie van 10 uit 4, dus

$$N = \binom{4-1+10}{10} = \binom{13}{10} = 286.$$

- b Geef eerst ieder één reep, dat kan op één manier.
Verdeel daarna 6 repen over vier personen, dit is een herhalingscombinatie van 6 uit 4.

$$N = 1 \cdot \binom{4-1+6}{6} = \binom{9}{6} = 84$$

- 60 a Bereken het aantal herhalingscombinaties van 8 uit 13.
 - b Bereken het aantal herhalingscombinaties van 13 uit 8.
 - c Hoeveel procent van de herhalingscombinaties van 5 uit 10 is een combinatie?
- 61 a Op hoeveel manieren kun je 20 muntstukken van 1 euro verdelen over zes personen?
 - b Op hoeveel manieren kun je 20 muntstukken van 1 euro verdelen over zes personen als elk van de zes personen minstens 2 euro krijgt?



62 Voor het lustrumfeest van de studentenvereniging Amigo moeten zes levensgrote bierflessen worden gemaakt. De feestcommissie, die bestaat uit 16 leden, neemt deze taak op zich.

- a Op hoeveel manieren kan deze taak worden verdeeld als elk lid maximaal een van de bierflessen maakt?
- b Op hoeveel manieren kan deze taak worden verdeeld als elk lid ook meer dan één bierfles mag maken?

A 63 Bij ijssalon Venetia koop je voor €3,00 een ijsje van drie bolletjes. Je kunt bij Venetia elk bolletje kiezen uit acht verschillende smaken.

- a Hoeveel mogelijkheden zijn er als je drie verschillende smaken kiest?
- b Hoeveel mogelijkheden zijn er als je ook twee of zelfs drie bolletjes van dezelfde smaak kan kiezen?

Voor €3,50 koop je een ijsje van vier bolletjes.

- c Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn.



Terugblik

Combinaties

Kies je 5 elementen uit een verzameling van 11 elementen zonder op de volgorde te letten en zijn herhalingen niet toegestaan, dan heb je te maken met een combinatie van 5 uit 11.

Het aantal combinaties van 5 uit 11 is $\binom{11}{5} = 462$.

Op de GR bereken je dit met 11 nCr 5.

Bij het aantal afvaardigingen van vier personen uit een klas van 25 leerlingen heb je met combinaties te maken.

Het aantal afvaardigingen is $\binom{25}{4} = 12\,650$.

$$N(\text{combinaties van } k \text{ uit } n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Herhalingscombinaties

Kies je 5 elementen uit een verzameling van 11 elementen zonder op de volgorde te letten en zijn herhalingen toegestaan, dan heb je te maken met een herhalingscombinatie van 5 uit 11.

Het aantal herhalingscombinaties van 5 uit 11 is

$$\binom{11-1+5}{5} = \binom{15}{5} = 3003.$$

Bij het kiezen van 4 bolletjes ijs uit 10 smaken heb je met herhalingscombinaties te maken, want je mag eenzelfde smaak vaker kiezen.

Het aantal keuzemogelijkheden is $\binom{10-1+4}{4} = \binom{13}{4} = 715$.

$$N(\text{herhalingscombinaties van } k \text{ uit } n) = \binom{n-1+k}{k}$$

Om te berekenen op hoeveel manieren je 32 rode rozen over de vazen I, II en III kunt verdelen, waarbij in elke vaas minstens 5 rozen komen, ga je als volgt te werk.

- Zet eerst in elke vaas 5 rozen. Dat kan op één manier.
- Verdeel de overgebleven 17 rozen over de drie vazen. Je hebt met een herhalingscombinatie van 17 uit 3 te maken. Het aantal

manieren is $\binom{3-1+17}{17} = \binom{19}{17}$.

- In totaal zijn er dus $1 \cdot \binom{19}{17} = 171$ manieren.

1.4 Variaties en combinaties toepassen

- O 64** Bij telproblemen heb je te maken met de vier begrippen
- 1 variaties
 - 2 herhalingsvariaties
 - 3 combinaties
 - 4 herhalingscombinaties.
- Vul elk begrip in de tabel hiernaast in en geef de formule.

Kies k elementen uit een verzameling van n elementen			
		volgorde van belang?	
		ja	nee
herhalingen toegestaan?	ja		
	nee		

- O 65** Eline moet voor haar examendossier vijf Engelse en vier Duitse boeken lezen. De Engelse boeken kiest ze uit een lijst van 60 boeken en de Duitse uit een lijst van 40 boeken.
- Op hoeveel manieren kan Eline
- a de vijf Engelse boeken kiezen
 - b de vier Duitse boeken kiezen
 - c de vijf Engelse én de vier Duitse boeken kiezen?

Theorie A De somregel en de productregel

In deze paragraaf gebruik je de productregel en de somregel in situaties waarbij je te maken hebt met variaties en combinaties.

Voorbeeld

Op een school bestaat de feestcommissie uit zes jongens en negen meisjes. Na elk feest maken zes leden van de feestcommissie de zaal schoon. Hoeveel schoonmaakploegen zijn mogelijk met

- a twee jongens
- b minstens vijf meisjes?

Aanpak

- a De volgorde is niet van belang en herhalingen zijn niet toegestaan, dus het gaat om combinaties. In een schoonmaakploeg met twee jongens zitten ook vier meisjes. Kies dus twee van de zes jongens EN vier van de negen meisjes. Gebruik de productregel.
- b Minstens vijf meisjes wil zeggen: vijf meisjes en één jongen OF zes meisjes. Gebruik de somregel.

Uitwerking

$$\text{a } N(\text{met 2 jongens}) = \binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4} = 1890$$

$$\text{b } N(\text{minstens 5 meisjes}) = N(5 \text{ meisjes}) + N(6 \text{ meisjes}) = \binom{9}{5} \cdot \binom{6}{1} + \binom{9}{6} = 840$$

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP	
${}^6C_2 \cdot {}^9C_4$	1890
${}^9C_5 \cdot {}^6C_1 + {}^9C_6$	840

Voorbeeld

In een fietsenrek is plaats voor acht fietsen. Drie jongens en vijf meisjes zetten hun fiets in het rek.

Op hoeveel manieren kan dat als

- de jongensfietsen naast elkaar komen
- de jongensfietsen en de meisjesfietsen naast elkaar komen
- de jongensfietsen of de meisjesfietsen naast elkaar komen?

Aanpak

- De volgorde is van belang, herhalingen zijn niet toegestaan en alle fietsen worden geplaatst, dus het gaat om permutaties.
De jongensfietsen naast elkaar:
 - beschouw de 3 jongensfietsen als één groep
je hebt dan 6 elementen (5 meisjesfietsen en 1 groep jongensfietsen), dus $6!$ manieren
 - binnen de groep van de jongensfietsen zijn er telkens $3!$ permutaties.
- Beschouw eerst de jongensfietsen en de meisjesfietsen als één groep.
Je hebt dan 2 elementen die je op $2!$ manieren kunt rangschikken.
Binnen de groep van jongensfietsen zijn er $3!$ permutaties en binnen de groep van meisjesfietsen zijn er $5!$ permutaties.
- Gebruik de somregel: $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Uitwerking

- $N(\text{jongensfietsen naast elkaar}) = 6! \cdot 3! = 4320$
- $N(\text{jongensfietsen naast elkaar en meisjesfietsen naast elkaar}) = 2! \cdot 3! \cdot 5! = 1440$
- $N(\text{jongensfietsen naast elkaar of meisjesfietsen naast elkaar}) = N(\text{jongensfietsen naast elkaar}) + N(\text{meisjesfietsen naast elkaar}) - N(\text{jongensfietsen naast elkaar en meisjesfietsen naast elkaar}) = 4320 + 4! \cdot 5! - 1440 = 5760$

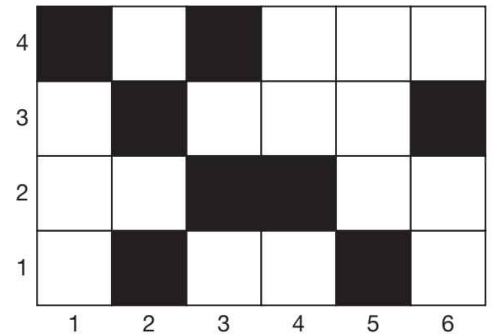
NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP	
$6! \cdot 3!$	4320
$2! \cdot 3! \cdot 5!$	1440
$4320 + 4! \cdot 5! - 1440$	5760

- 66 Op een school bestaat de feestcommissie uit zes jongens en negen meisjes. Na elk feest maken zes leden van de feestcommissie de zaal schoon. Hoeveel schoonmaakploegen zijn mogelijk met
 - drie jongens
 - alleen maar jongens
 - hoogstens één meisje
 - meer dan vier jongens?
- 67 Marieke heeft zes verschillende wiskundeboeken en vier verschillende scheikundeboeken. Ze zet ze op een lege boekenplank.
 - Op hoeveel manieren kan ze de tien boeken rangschikken?
 - Op hoeveel manieren kan ze de boeken rangschikken als de wiskundeboeken naast elkaar moeten staan?
 - Op hoeveel manieren kan ze de boeken rangschikken als zowel de wiskunde- als de scheikundeboeken naast elkaar moeten staan?

1

- A 68** Een pianist bereidt een recital voor dat zal bestaan uit drie klassieke, vier romantische en twee hedendaagse stukken. Op hoeveel manieren kan hij deze pianostukken rangschikken als hij
- met een klassiek stuk begint en met een hedendaags stuk eindigt
 - de romantische stukken direct achter elkaar wil spelen
 - de romantische stukken om en om wil spelen
 - de stukken van elk genre achter elkaar wil spelen?

- D 69** Een bedrijf gebruikt een code, waarbij in een rooster van vier rijen en zes kolommen de hokjes al dan niet zwart zijn. De rijen en kolommen zijn genummerd. In figuur 1.29 staan in elke rij twee zwarte hokjes.
- Hoeveel codes zijn er



figuur 1.29

- met in elke rij twee zwarte hokjes
- met in de eerste kolom en de zesde kolom één zwart hokje, in de tweede en de vijfde kolom twee zwarte hokjes en in de derde en de vierde kolom drie zwarte hokjes
- met in twee rijen twee zwarte hokjes en in twee rijen vijf zwarte hokjes
- met in vijf kolommen twee zwarte hokjes en in één kolom hoogstens één zwart hokje
- met in één rij geen zwarte hokjes?

Theorie B Rangschikkingen van n dingen waarvan er enkele gelijk zijn

Het aantal rangschikkingen van het woord VERZETJE is niet gelijk aan $8!$. Dat komt doordat de letter E drie keer voorkomt. Door te werken met E_1 , E_2 en E_3 zie je dat de volgende $3!$ rangschikkingen voor één tellen.

$VE_1RZE_2TJE_3$ $VE_2RZE_1TJE_3$ $VE_3RZE_1TJE_2$
 $VE_1RZE_3TJE_2$ $VE_2RZE_3TJE_1$ $VE_3RZE_2TJE_1$

Van de in totaal $8!$ rangschikkingen zijn er telkens $3!$ gelijk. Het totale aantal rangschikkingen van de letters van het woord VERZETJE

$$\text{is dus } \frac{8!}{3!} = \frac{40320}{6} = 6720.$$

Het aantal rangschikkingen van n dingen waarvan er p gelijk zijn en de rest verschillend is $\frac{n!}{p!}$.

Voorbeeld

Bereken het aantal manieren waarop je de letters van het woord ANNABELLA kunt rangschikken.

Aanpak

Er zijn 9 letters, dit geeft $9!$ rangschikkingen als alle letters verschillend zouden zijn.

Er zijn drie letters A, dus deel door $3!$.

Er zijn twee letters N, dus deel door $2!$.

Er zijn twee letters L, dus deel door $2!$.

Uitwerking

$$N(\text{rangschikkingen}) = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 15\,120$$

- R 70** Zie het voorbeeld. Emmy noteert het aantal rangschikkingen als

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$$

Welke redenering volgt Emmy?

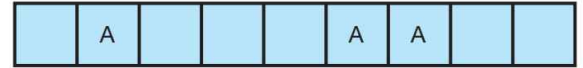
- 71** Bereken het aantal rangschikkingen van de letters van het woord

- a HOOIKOORTS
- b VORSTVERLET
- c TELEVISIETOESTEL
- d MISSISSIPPI



- 72** Een bedrijf codeert zijn artikelen met de letters A en B. Een code van vijf letters is bijvoorbeeld B A A B A.
- a Hoeveel codes van zeven letters zijn er met minstens vijf A's?
 - b Hoeveel codes van zes letters zijn er die meer A's dan B's bevatten?
 - c Hoeveel codes van negen letters zijn er in totaal?
- 73** Bereken het aantal getallen
- a van 6 cijfers die bestaan uit drie tweeën, twee vieren en een vijf
 - b van 8 cijfers die bestaan uit twee enen, vier tweeën, een drie en een vier.
- 74** André gooit met vier dobbelstenen. Hoeveel mogelijkheden zijn er om
- a in totaal 6 ogen te gooien
 - b in totaal hoogstens 7 ogen te gooien?

1

R 75 Hiernaast zie je negen hokjes.

figuur 1.30

- a Zet in drie van de hokjes een A.
Op hoeveel manieren kan dat?
- b Zet in twee van de overgebleven zes hokjes een N.
Op hoeveel manieren kan dat?
- c Zie het voorbeeld op bladzijde 43.
Licht toe dat het aantal manieren waarop je de letters van het woord ANNABELLA kunt rangschikken gelijk is aan

$$N(\text{rangschikkingen}) = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1}.$$

- d Gebruik $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ om $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1}$

te herleiden tot $\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}.$

- e Toon aan: $\frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$ met $a + b + c = n$ is gelijk aan $\binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b}.$

A 76 Bij een spel met een dobbelsteen gooi je net zo lang totdat je een van tevoren afgesproken aantal zessen hebt gegooid.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om

- a bij de vijfde beurt de tweede zes te gooien
- b bij de achtste beurt de derde zes te gooien?

A 77 In de tabel zie je de verdeling naar leeftijd van de volwassen mannen en vrouwen die in een flatgebouw wonen. Voor een onderzoek worden acht van deze mensen geënquêteerd.

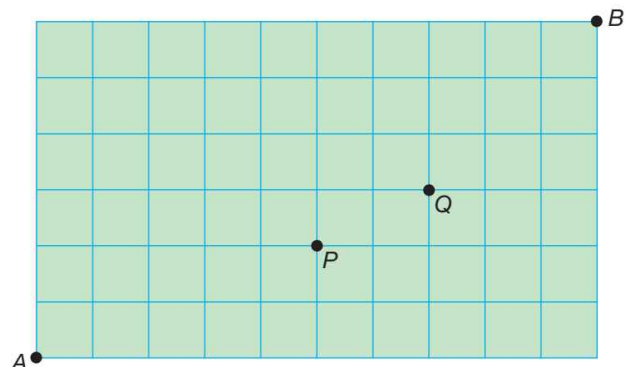
	18 – < 25	25 – < 40	40 en ouder	
man	8	20	8	36
vrouw	12	16	5	33
	20	36	13	69

Hoeveel achttallen zijn er met

- a uitsluitend mannen
- b vier mannen
- c twee personen uit de jongste leeftijdsgroep en één uit de oudste leeftijdsgroep
- d meer dan zes personen uit de middelste leeftijdsgroep
- e twee vrouwen uit de middelste leeftijdsgroep?

A 78 Hoeveel kortste routes zijn er in de figuur hiernaast

- a van A naar B die niet via P gaan
- b van A naar B die niet via P, maar wel via Q gaan?



figuur 1.31

A 79 In een fabriek rollen per uur 60 artikelen van de lopende band. Voordat een uurproductie de fabriek verlaat, vindt een eindcontrole plaats door middel van een steekproef van vier exemplaren.

a Hoeveel steekproeven zijn er elke keer mogelijk?

Zijn er in de steekproef twee of meer defecte exemplaren, dan wordt de gehele uurproductie afgekeurd.

Neem aan dat een uurproductie zes defecte exemplaren bevat.

b Hoeveel van de mogelijke steekproeven bevatten geen defecte exemplaren?

c Hoeveel van de mogelijke steekproeven bevatten twee of meer defecte exemplaren?

A 80 a Vroeger gaven schepen signalen met vlaggen. Neem aan dat een signaal uit tien vlaggen bestaat en dat er vier rode, drie blauwe en drie witte vlaggen zijn.

Hoeveel signalen zijn mogelijk?

b Hoeveel banknummers zijn mogelijk die bestaan uit drie vieren, vier vijven en twee negens?

c Hoeveel rangschikkingen kun je maken met de letters van het woord SINAASAPPELS als de drie A's naast elkaar moeten staan?



A 81 Gegeven zijn de vazen I, II en III.

Bereken het aantal mogelijkheden om

a 10 rode knikkers te verdelen over de drie vazen

b 10 verschillend gekleurde knikkers te verdelen over de drie vazen

c 20 witte knikkers te verdelen over de drie vazen waarbij in elke vaas minstens vier knikkers komen

d 10 rode en 10 witte knikkers te verdelen over de drie vazen.

A 82 Bereken het aantal drietallen (a, b, c) met $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ en $c \in \mathbb{N}$

a waarbij $a < 10$, $b < 10$ en $c < 10$

b waarbij $a < 5$, $b < 5$ en $c < 5$ en $a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c$

c waarbij $a < 5$, $b < 5$ en $c < 5$ en $a < b < c$

d waarbij $a + b + c = 10$.

A 83 Bij de finale van de Welsh Open, een snookerwedstrijd, gaat het om 'best of 17'. Dat wil zeggen dat degene die het eerst 9 frames heeft gewonnen, de finale wint.

Bingham en Maguire spelen de finale van de Welsh Open.

Hoeveel mogelijkheden zijn er

- a** voor Bingham om in 14 frames te winnen
- b** waarbij de finale 17 frames duurt
- c** voor Maguire om in hoogstens 13 frames te winnen?

Informatief Het snookerspel

Snooker is een biljartspel voor twee spelers waarbij alle ballen behalve de witte weggespeeld moeten worden. Er zijn in totaal 22 ballen: vijftien rode, zes andere kleuren (geel, groen, bruin, blauw, roze en zwart) en een witte bal. Op de foto zie je hoe de ballen bij de start van het spel op de tafel worden geplaatst. De witte bal is de cue ball. De vijftien rode ballen zijn elk 1 punt waard. De overige gekleurde ballen hebben elk hun eigen waarde, en een vaste plek (spot) op de tafel. De spelers stoten de witte bal en moeten zo steeds proberen een rode bal in een van de zes gaten (pockets) te laten verdwijnen (te 'potten'); als hen dit lukt, spelen ze daarna met de witte bal op een overige kleur naar keuze. Wordt die bal ook gepot, dan wordt deze gekleurde bal teruggelegd op zijn vaste plaats en moet de speler weer een rode bal spelen. Als de kleur niet wordt gepot of als de speler een fout maakt, gaat de beurt naar de tegenstander, die weer met een rode bal moet beginnen. Als alle rode ballen weggespeeld zijn, worden de overige gekleurde ballen weggespeeld in de volgorde van hun waarde, maar nu worden ze niet meer teruggelegd.

De speler die na het potten van de laatste bal de meeste punten heeft, heeft het frame (een enkel spelletje) gewonnen. Een wedstrijd bestaat uit een vooraf vastgesteld aantal frames. De wedstrijd is beslist als een van de spelers het merendeel van de frames weet te winnen. Als een wedstrijd wordt gespeeld over 17 frames (best of 17), betekent dit dat de wedstrijd afgelopen is wanneer een van de spelers 9 frames heeft gewonnen.



Terugblik

1

Overzicht telproblemen

Kies k elementen uit een verzameling van n elementen			
		volgorde van belang?	
		ja	nee
herhalingen toegestaan?	nee	$N(\text{variates}) = nPk = \frac{n!}{(n-k)!}$ $k = n$ geeft $N(\text{permutaties}) = n!$	$N(\text{combinaties}) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
	ja	$N(\text{herhalingsvariates}) = n^k$	$N(\text{herhalingscombinaties}) = \binom{n-1+k}{k}$

Combinaties vermenigvuldigen en optellen

Uit klas 4 vwo D wordt een comité van vijf leerlingen gevormd.

Het aantal comités met

- drie jongens is $\binom{12}{3} \cdot \binom{17}{2} = 29\,920$
- minstens vier jongens is $\binom{12}{4} \cdot \binom{17}{1} + \binom{12}{5} = 9207$.

SAMENSTELLING KLAS 4 VWO D

	15 jaar	16 jaar	
jongen	8	4	12
meisje	10	7	17
	18	11	29

Permutaties vermenigvuldigen

Je kunt vijf stripboeken en drie romans op

- $4! \cdot 5!$ manieren rangschikken als de stripboeken naast elkaar moeten staan
- $2! \cdot 5! \cdot 3!$ manieren rangschikken als de stripboeken en ook de romans naast elkaar moeten staan.

Rangschikkingen van n dingen waarvan enkele gelijk zijn

Het aantal rangschikkingen van n dingen waarvan er p gelijk zijn

en de rest verschillend is $\frac{n!}{p!}$.

Zo kun je de letters van het woord AARDAPPELPUREE op

$\frac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3!}$ manieren rangschikken.

Immers je hebt in totaal 14 letters: de letter A komt 3 keer voor, de letter R komt 2 keer voor, de letter P komt 3 keer voor en de letter E komt 3 keer voor.

Diagnostische toets

1.1 De somregel en de productregel

- 1 Gegeven zijn de verzamelingen $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en $U = V \times V$.

Hoeveel elementen heeft

- a $G = \{(a, b) \in U \mid a + b = 8\}$
- b $G = \{(a, b) \in U \mid a + b > 8\}$
- c $G = \{(a, b) \in U \mid ab < 10\}$?

- 2 Experiment: een worp met drie achthoeksdobbelstenen.

Hoeveel uitkomsten heeft de gebeurtenis

- a minder dan 6 ogen gooien
- b minstens 21 ogen gooien?

- 3 In de tabel zie je informatie over de keuze voor de vier profielen NT, NG, EM en CM van de 4 vwo leerlingen van het Noorderlicht College. Uit deze groep worden twee leerlingen gekozen. De eerste leerling neemt plaats in de MR, de tweede leerling in de leerlingenraad.

Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als

- a de eerste leerling een jongen met NT is en de tweede leerling een meisje
- b beide leerlingen jongens zijn die hetzelfde profiel hebben
- c er minstens één leerling met een natuurprofiel bij zit
- d de eerste leerling een meisje met EM is en de tweede leerling een jongen is of een leerling met EM?

	jongen	meisje	
NT	12	7	19
NG	16	20	36
EM	22	15	37
CM	3	12	15
	53	54	107

1.2 Variaties en herhalingsvariaties

- 4 In deze opgave gaat het over getallen van vijf cijfers, waarin alleen de cijfers 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.

Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 50 000 moet zijn
- c elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden
- d elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter dan 54 000 moet zijn?

- 5 Van de letters van het woord WISKUNDE ga je codes van vijf letters vormen.

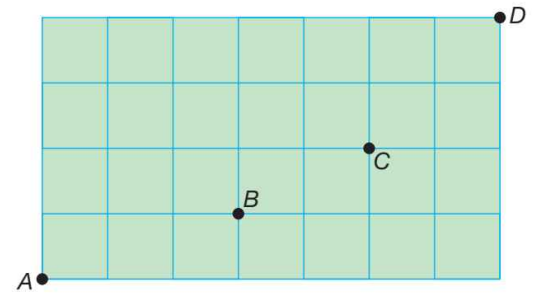
Op hoeveel manieren kan dit als

- a elke letter maar één keer mag voorkomen
- b elke letter meer dan één keer mag voorkomen
- c elke letter meer dan één keer mag voorkomen en de eerste en de laatste letter verschillend moeten zijn?

1.3 Combinaties en herhalingscombinaties

- 6** In de afspeellijst van PCU On Demand is er bij de nieuwste films keuze uit elf actiefilms, negen romantische films en vijf thrillers.
- Erben kiest drie actiefilms.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk?
 - Esmeralda wil van elk genre een film streamen.
Hoeveel drietallen zijn mogelijk?
 - Iwan gaat voor de weekaanbieding en streamt zeven films.
Hij wil geen romantische film.
Hoeveel zeventallen zijn mogelijk?

- 7** Zie figuur 1.32.
Bereken het aantal kortste routes
- van A naar D
 - van A naar D via B en C .



figuur 1.32

- 8** Onder de 28 leerlingen van klas 4 vwo D van het Hinkelhorst College worden vijf vrijkaartjes voor het schoolfeest verloot.
- Op hoeveel manieren kunnen de vrijkaartjes worden verloot als
- een leerling maar één kaartje kan winnen
 - een leerling meerdere kaartjes kan winnen?

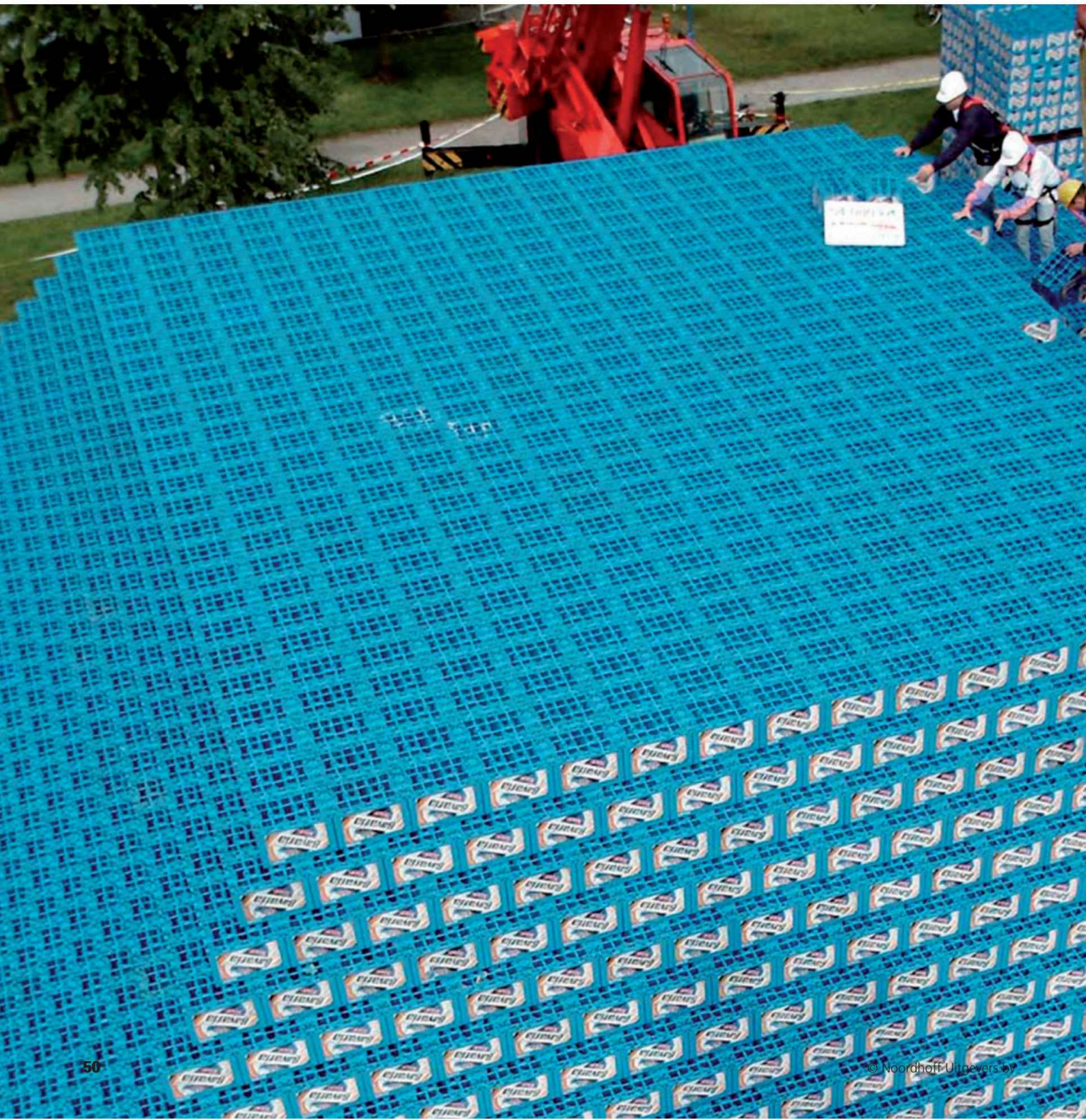
1.4 Variaties en combinaties toepassen

- 9** Zie opgave 6.
- Op hoeveel manieren kan Arthur uit de 25 films een top 3 samenstellen?
 - Op hoeveel volgorden kun je de 25 films bekijken als je de romantische films achter elkaar bekijkt?
 - Op hoeveel volgorden kun je de 25 films bekijken als van elk genre de films achter elkaar bekeken worden?
- 10** Hoeveel mogelijkheden zijn er om met vijf viervlaksdobbelstenen in totaal
- 18 ogen te gooien
 - minstens 17 ogen te gooien?
- 11** Een bedrijf maakt codes met drie A's, drie B's, drie C's en drie D's. Hoeveel codes kun je met deze letters maken als
- er geen beperkingen zijn
 - de A's naast elkaar moeten staan
 - de A's en de B's om en om staan zonder C's en D's ertussen?

In juni 2011 is in het Noord-Duitse plaatsje Satow het wereldrecord bierkratten stapelen verbeterd. Het oude record stond op naam van het Noord-Hollandse dorp Limmen met 63365 kratten. Bij het nieuwe record werden 105995 kratten gestapeld en was de stapel bijna 13 meter hoog.

Wat leer je?

- Wat de driehoek van Pascal is en welke eigenschappen deze heeft.
- Wat het binomium van Newton is en wat multinomiaalcoëfficiënten zijn.
- Hoe je getallenrijen kunt voorstellen door recursieve en directe formules.
- Wat rekenkundige en meetkundige rijen zijn en welke somformules hierbij horen.
- Wat een sommeerbare meetkundige rij is.



Discrete wiskunde

2



Voorkennis Haakjes wegwerken en a^0

2

Theorie A De vorm $(a + b)^n$

Je kent het merkwaardig product $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Om bij $(a + b)^3$ de haakjes weg te werken kun je gebruiken dat $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Je krijgt } (a + b)^3 &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Om bij $(a + b)^4$ de haakjes weg te werken, kun je gebruiken dat $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3$, dus dat $(a + b)^4 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$.

- 1 Werk bij $(a + b)^4$ de haakjes weg door te gebruiken dat

a $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3$

b $(a + b)^4 = (a + b)^2(a + b)^2$

- 2 Werk de haakjes weg bij $(a + b)^5$.

- 3 Werk de haakjes weg.

a $(a - b)^5$

b $(2a + b)^3$

Theorie B Macht met exponent nul

Je kent de rekenregel voor machten $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

Voor $q = p$ krijg je $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$. Ook is $\frac{a^p}{a^p} = 1$.

$$a^0 = 1$$

Conclusie: $a^0 = 1$. Hierbij is $a \neq 0$. Zo is $2^0 = 1$ en $3^0 = 1$.

- 4 Bereken.

a $3^0 + 3^2 + 3^4$

b $\frac{2^0}{4^0 + 8^0}$

c $f(0)$ bij $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}$

d $g(3)$ bij $g(x) = \frac{5^{x-3}}{x + 1}$

2.1 Het binomium van Newton

- 1** a Licht toe dat er $\binom{6}{2}$ kortste routes van T naar A zijn

in het rooster in figuur 2.1.

- b Bij elk roosterpunt kun je het aantal kortste routes van T naar het roosterpunt berekenen. Licht toe dat je in de zesde rij de

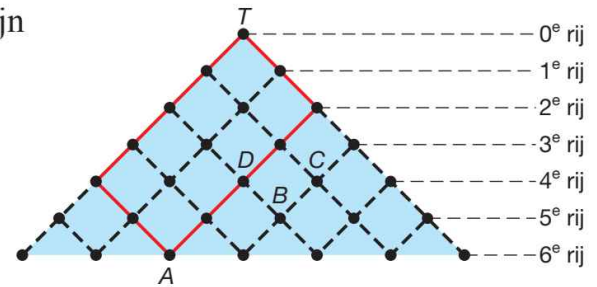
getallen $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}$ en $\binom{6}{6}$ krijgt.

Geef de som van de getallen in de zesde rij.

- c Neem de figuur over en zet bij elk roosterpunt het aantal kortste routes om er vanuit T te komen.

Het getal bij B kun je krijgen door de getallen bij C en D op te tellen. Immers, je kunt zonder omwegen alleen maar in B komen via C of via D .

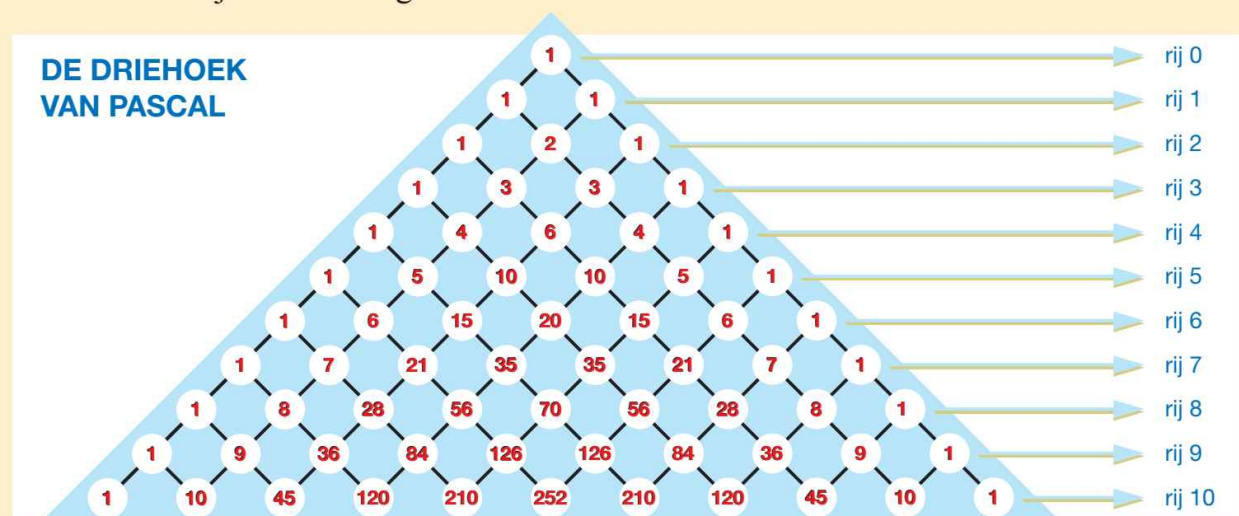
- d Gebruik deze eigenschap om de getallen in de zevende en achtste rij te berekenen.
e Geef de som van de getallen in de tiende rij.



figuur 2.1

Theorie A De driehoek van Pascal

Het driehoekige getallenschema uit opgave 1 heet de **driehoek van Pascal**. De driehoek is genoemd naar Blaise Pascal (1623-1662). De driehoek was al omstreeks 1300 bekend in China. Pascal is dus niet de ontdekker van de driehoek die zijn naam draagt.



figuur 2.2

Elk getal in de driehoek van Pascal geeft het aantal kortste routes om vanuit de top op die plaats te komen.

De getallen in de n -de rij zijn $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$.

De som van de getallen in de n -de rij is 2^n .

In de driehoek van Pascal krijg je elk getal door de twee getallen die er schuin boven staan bij elkaar op te tellen.

Zo is bijvoorbeeld $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4}$.

In het algemeen is $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Dit is de **regel van Pascal**.

Deze regel ga je in opgave 5 bewijzen.

De regel van Pascal

In de driehoek van Pascal is elk getal de som van de twee getallen die er schuin boven staan.

In formulevorm: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

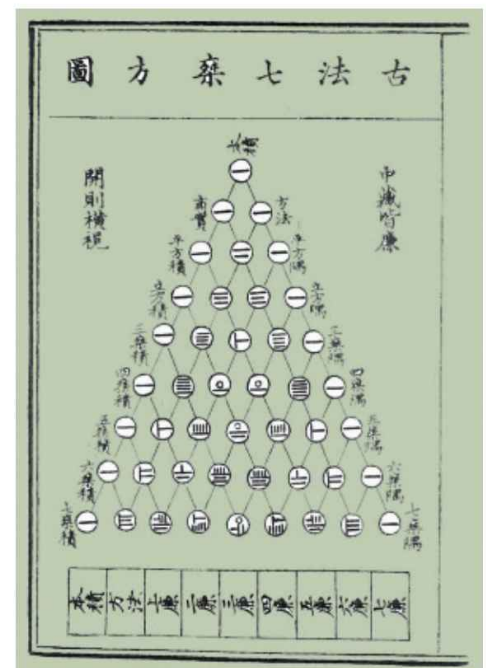
Geschiedenis Blaise Pascal

Blaise Pascal werd in 1623 te Clermont (Frankrijk) geboren. Toen hij vier jaar oud was overleed zijn moeder. In 1631 verhuisde Blaise samen met zijn vader en zijn zussen naar Parijs. Daar werd hij op zijn veertiende jaar toegelaten tot de wekelijkse bijeenkomsten van de Franse Academie der Wetenschappen. Zijn wetenschappelijke werk is indrukwekkend. Op zestienjarige leeftijd ontdekte hij een stelling over een ingeschreven zeshoek in een cirkel, hij hield zich bezig met kegelsneden en de projectieve meetkunde, bouwde in 1642 de eerste mechanische rekenmachine en legde het fundament van de waarschijnlijkheidsrekening.

Behalve wiskundige was hij ook natuurkundige en filosoof. Bekend is de wet van Pascal die stelt dat de druk die op een vloeistof wordt uitgeoefend zich in alle richtingen met dezelfde grootte voortplant.

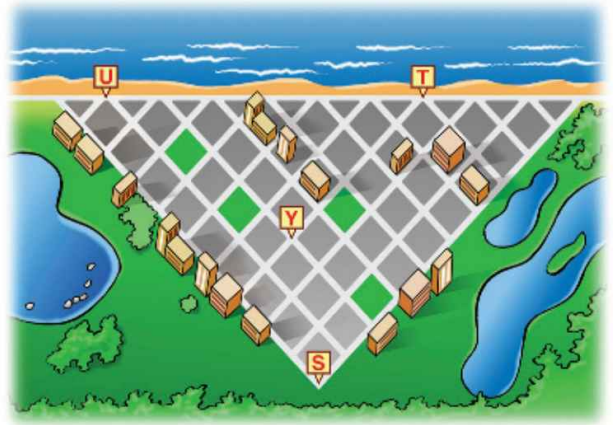
Het in 1670 verschenen boek 'Pensées' is een verzameling losse notities waarin hij zijn inzichten over allerlei aspecten van het menselijk leven en het christelijk geloof verwoordt.

De naar hem genoemde driehoek stond in 1303 al in een Chinees boek, geschreven door Chu Shī-kié. Ook de door Niklaus Wirth ontworpen programmeertaal Pascal is naar hem genoemd.



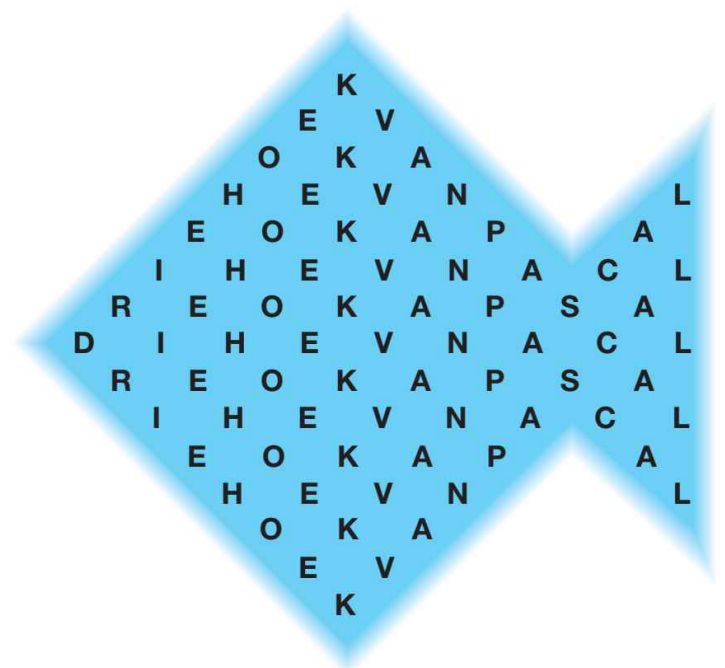
- 2** Hiernaast zie je een gedeelte van de plattegrond van een badplaats. Aangekomen op het station S kun je naar links of naar rechts. Na enige tijd kom je op een kruising met weer de keuze uit links of rechts. Enzovoort.

- Op hoeveel manieren kun je zonder omwegen van S naar T lopen?
- Op hoeveel manieren kun je zonder omwegen van S naar U lopen?
- Hoeveel kortste routes zijn er van S naar het strand?
- Hoeveel kortste routes van S naar het strand gaan via kruising Y ?



figuur 2.3

- 3** Op hoeveel manieren kun je hiernaast DRIEHOEK VAN PASCAL lezen?



figuur 2.4

- 4** Elk positief geheel getal is te ontbinden in priemfactoren, dat wil zeggen te schrijven als een product van priemgetallen. De hoofdstelling van de rekenkunde zegt dat dit slechts op één manier kan. Zo is $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$ en $2750 = 2 \cdot 5^3 \cdot 11$.

In de driehoek van Pascal zijn de getallen 7, 21 en 35 op rij 7 veelvouden van 7.

Dat $\binom{7}{2}$ een zevenvoud is, kun je als volgt inzien.

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6!}{2! \cdot 5!}$$

Omdat 7 een priemgetal is, kun je $2!$ en $5!$ niet delen door 7, want $2! = 2 \cdot 1$ en $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ bevatten geen factor 7.

Beredeneer dat $\binom{p}{k}$ met $k \neq 0$, $k \neq p$ en p een priemgetal deelbaar is door p .

A 5 In deze opgave ga je de regel van Pascal bewijzen.

a Je weet $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Herleid deze som door de breuken gelijknamig te maken en daarna op te tellen. Vermenigvuldig daartoe de teller en noemer in de eerste breuk met k en in de tweede breuk met $(n-k+1)$.

b Toon aan dat uit a volgt dat

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k+1)!} \cdot (n+1).$$

c Maak het bewijs af.

Theorie B De sigmanotatie

De **sigmanotatie** wordt gebruikt om de som van een aantal getallen die een bepaalde eigenschap hebben kort te noteren. Er wordt gebruik gemaakt van de Griekse letter $\sum$ (sigma), dat is de hoofdletter S.

Zo is $\sum_{k=1}^5 k^2$ een korte notatie voor $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.

Spreek $\sum_{k=1}^5 k^2$ uit als 'de som van k^2 voor $k = 1$ tot en met 5'.

Voorbeeld

Bereken.

a $\sum_{k=1}^5 (3k+1)$

b $\sum_{k=0}^4 \frac{k+1}{k+2}$

Uitwerking

a $\sum_{k=1}^5 (3k+1) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 50$

b $\sum_{k=0}^4 \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = 3\frac{11}{20}$

6 Bereken.

a $\sum_{k=1}^5 k$

d $\sum_{k=1}^4 k^3$

b $\sum_{k=0}^4 (2k+1)$

e $\sum_{k=0}^5 (k^2+1)$

c $\sum_{k=0}^3 2^k$

f $\sum_{k=0}^4 \frac{k-1}{k+1}$

7 Schrijf met de sigmanotatie.

a $5 + 8 + 11 + 14 + 17$

b $3 + 9 + 27 + 81 + 243$

c $100 + 50 + 25 + 12\frac{1}{2}$

d $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{1}{2} + \frac{5}{9}$

8 Je weet dat

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2.$$

En zo krijg je

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$

$$a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.$$

a Bereken op dezelfde manier $(a + b)^4$. Begin met

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$$

b Vul het schema hieronder in. Wat valt je op?

$$(a + b)^1 = \text{-----} \boxed{1} a + \boxed{1} b$$

$$(a + b)^2 = \text{-----} \boxed{1} a^2 + \boxed{2} ab + \boxed{1} b^2$$

$$(a + b)^3 = \text{-----} \boxed{\dots} a^3 + \boxed{\dots} a^2b + \boxed{\dots} ab^2 + \boxed{\dots} b^3$$

$$(a + b)^4 = \text{-----} \boxed{\dots} a^4 + \boxed{\dots} a^3b + \boxed{\dots} a^2b^2 + \boxed{\dots} ab^3 + \boxed{\dots} b^4$$

$$(a + b)^5 = \text{---} \boxed{\dots} a^5 + \boxed{\dots} a^4b + \boxed{\dots} a^3b^2 + \boxed{\dots} a^2b^3 + \boxed{\dots} ab^4 + \boxed{\dots} b^5$$

figuur 2.5

Theorie C Binomiaalcoëfficiënten

In opgave 8 heb je gezien dat bij het herleiden van $(a + b)^n$ de getallen in de n -de rij van de driehoek van Pascal tevoorschijn komen.

De Engelse wis- en natuurkundige Sir Isaac Newton (1642-1729) was de eerste die een verband ontdekte tussen de uitkomsten van

$(a + b)^n$ en de getallen $\binom{n}{k}$.

Dat het getal $\binom{5}{2} = 10$ de coëfficiënt van a^3b^2 in de herleiding van

$(a + b)^5$ is, kun je als volgt begrijpen.

Termen met a^3b^2 krijg je door het product van 3 a 's en 2 b 's te berekenen.

Hieronder zijn twee van deze tien producten aangegeven, namelijk $a a b a b$ en $b a a a b$.

$$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$$

$$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$$

Het totale aantal rijtjes met 3 a 's en 2 b 's is $\binom{5}{2}$. En zo is de

coëfficiënt van a^5b^3 in de herleiding van $(a + b)^8$ gelijk aan $\binom{8}{3}$.

Algemeen is

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Met de sigmanotatie krijg je

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Deze formule heet het **binomium van Newton**.

De getallen $\binom{n}{k}$ in deze formule heten **binomiaalcoëfficiënten**.

Voorbeeld

Herleid met behulp van het binomium van Newton.

a $(a + 3)^4$

b $(3a - 4)^5$

Uitwerking

a $(a + 3)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot 3 + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3} \cdot a \cdot 3^3 + \binom{4}{4} \cdot 3^4 =$

$$1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot 3 + 6 \cdot a^2 \cdot 9 + 4 \cdot a \cdot 27 + 81 = a^4 + 12a^3 + 54a^2 + 108a + 81$$

b $(3a - 4)^5 = \binom{5}{0} \cdot (3a)^5 + \binom{5}{1} \cdot (3a)^4 \cdot (-4) + \binom{5}{2} \cdot (3a)^3 \cdot (-4)^2 +$

$$\binom{5}{3} \cdot (3a)^2 \cdot (-4)^3 + \binom{5}{4} \cdot 3a \cdot (-4)^4 + \binom{5}{5} \cdot (-4)^5 =$$

$$1 \cdot 243a^5 + 5 \cdot 81a^4 \cdot (-4) + 10 \cdot 27a^3 \cdot 16 + 10 \cdot 9a^2 \cdot (-64) + 5 \cdot 3a \cdot 256 + 1 \cdot (-1024) = 243a^5 - 1620a^4 + 4320a^3 - 5760a^2 + 3840a - 1024$$

9 Herleid met behulp van het binomium van Newton.

a $(a + 1)^5$

b $(a - 2)^4$

c $(2a + 3)^5$

d $(3a - 1)^6$

10 Bekijk de herleiding van $(p + q)^{15}$.

a Hoeveel termen heeft de herleiding?

b Bereken de derde en de dertiende term van de herleiding.

eerste term a_0p^{15}

tweede term $a_1p^{14}q$

derde term $a_2p^{13}q^2$

- 11** Bereken de coëfficiënt van
- de vierde term van de herleiding van $(p + q)^{20}$
 - de zevende term van de herleiding van $(2p - q)^9$.

- A 12** Bereken de coëfficiënt van x^8 in de herleiding van
- $(x^2 + 1)^8$
 - $(\frac{1}{2}x - 2)^{11}$.

- R 13** a Herleid $(1 + 1)^6$ met het binomium van Newton.

b Licht toe dat uit vraag a volgt $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = 2^6$.

- D 14** Hiernaast zie je nog eens het bovenste gedeelte van de driehoek van Pascal. Als je de getallen in een rij opvat als één getal, dan valt het volgende op.

rij 0 $1 = 11^0$

rij 1 $11 = 11^1$

rij 2 $121 = 11^2$

rij 3 $1331 = 11^3$

a Ga na dat $14641 = 11^4$.

- b Licht toe dat

$$14641 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

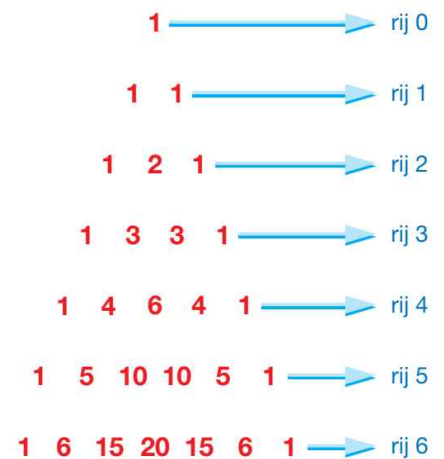
- c Op rij 5 krijg je

$$1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

Bereken dit getal en laat zien dat dit gelijk is aan 11^5 .

- d Onderzoek of de regelmaat ook opgaat voor rij 6.

- e Gebruik dat $11 = 10 + 1$ en het binomium van Newton om aan te tonen dat deze regelmaat opgaat voor elke rij n .



figuur 2.6

Geschiedenis Het binomium van Newton

Newton kwam op het spoor van het naar hem genoemde binomium tijdens zijn studie naar zogenaamde machtreeksen. Deze reeksen gebruikte hij om de oppervlakten onder krommen te bepalen. In zijn berekeningen zag hij de getallen uit de driehoek van Pascal tevoorschijn komen, en herontdekte hij rond 1665 de formule van het binomium die ook Pascal enkele jaren eerder al had gevonden.

Om de formule van het binomium te controleren, deed Newton alternatieve berekeningen die inderdaad exact dezelfde resultaten opleverden. Hierdoor was hij er zo van overtuigd dat de formule correct was, dat hij geen poging deed om een formeel bewijs te vinden. Ongeveer 25 jaar later werd dat bewijs alsnog geleverd door de Zwitserse wis- en natuurkundige Jakob Bernoulli.

O 15 $(p + q + r)^7 = a_0 p^7 + a_1 p^6 q + a_2 p^6 r + a_3 p^5 q^2 + a_4 p^5 q r + a_5 p^5 r^2 + a_6 p^4 q^3 + \dots$

a Licht toe dat $a_0 = 1$.

Om de coëfficiënt a_1 te berekenen, bedenk je dat je te maken hebt met rijtjes van 7 letters met 6 p 's en 1 q .

Dus $a_1 = \frac{7!}{6! \cdot 1!} = 7$.

En zo is $a_3 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$.

b Bereken a_6 .

c Bereken de coëfficiënt van de term met $p^3 q^2 r^2$.

Theorie D Multinomiaalcoëfficiënten

De vorm $(p + q + r)^7$ in opgave 15 wordt een **multinomial** genoemd.

De coëfficiënten in de herleiding van een multinomial heten

multinomiaalcoëfficiënten.

In de herleiding van $(p + q + r)^7$ is de multinomiaalcoëfficiënt van

$$p^4 q^2 r \text{ gelijk aan } \frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!}.$$

Dit wordt ook genoteerd als $\binom{7}{4, 2, 1}$. En zo is $\binom{10}{2, 3, 5} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!}$.

De herleiding van $(p + q + r)^7$ kan met de sigmanotatie worden

geschreven als $(p + q + r)^7 = \sum_{i+j+k=7} \binom{7}{i, j, k} p^i q^j r^k$.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$$

In de herleiding van $(4a - b + 3c)^9$ is een van termen van de vorm

$Aa^4 b^3 c^2$. Om de coëfficiënt A van deze term te berekenen bedenk

je dat deze term is

$$\binom{9}{4, 3, 2} \cdot (4a)^4 \cdot (-b)^3 \cdot (3c)^2 =$$

$$\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 4^4 \cdot a^4 \cdot (-1)^3 \cdot b^3 \cdot 3^2 \cdot c^2 =$$

$$1260 \cdot 256 \cdot -1 \cdot 9 \cdot a^4 b^3 c^2 = -2903040 a^4 b^3 c^2.$$

Dus de coëfficiënt is -2903040 .

Voorbeeld

Gegeven is $(2a - 3b + 4c)^6$ met zijn herleiding.

- a Bereken de coëfficiënt van a^4bc in de herleiding.
- b Hoeveel termen heeft de herleiding?

Aanpak

- b Het gaat bij de herleiding om het kiezen van 6 letters uit de letters a , b en c waarbij de volgorde niet van belang is en herhalingen zijn toegestaan.
Je hebt dus met een herhalingscombinatie van 6 uit 3 te maken.

Uitwerking

- a De term met a^4bc is

$$\binom{6}{4, 1, 1} \cdot (2a)^4 \cdot (-3b)^1 \cdot (4c)^1 = \frac{6!}{4!} \cdot 2^4 \cdot a^4 \cdot -3b \cdot 4c = -5760a^4bc.$$

Dus de coëfficiënt is -5760 .

- b $N(\text{termen}) = \binom{3 + 6}{6} = \binom{9}{6} = 28$

- 16** a Herleid met behulp van multinomiaalcoëfficiënten $(a - b + 2c)^3$.
b Hoeveel termen heeft de herleiding van $(a - b + 2c)^{20}$?

- 17** Bereken de coëfficiënt van
 - a $a^5b^3c^2$ in de herleiding van $(a - b + c)^{10}$
 - b $a^2b^3c^4$ in de herleiding van $(3a + b - 2c)^9$
 - c $a^2b^2c^6$ in de herleiding van $(ab + c)^8$
 - d $a^{10}b^9$ in de herleiding van $(a^2 - 2a^2b + b^3)^7$.

- A 18** Bereken de coëfficiënt van $a^2b^3c^4d^5$ in de herleiding van
 - a $(a + b + c + d)^{14}$
 - b $(2a + 3b + c - \frac{1}{2}d)^{14}$
 - c $(a^2 + b + c^2 - d)^{11}$
 - d $(ab + bc + cd + d)^8$.

Terugblik

2

De driehoek van Pascal

In de driehoek van Pascal is elk getal gelijk aan de som van de twee getallen die er schuin boven staan,

$$\text{dus } \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Dit is de regel van Pascal.

In de vierde rij staan de getallen

$$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3} \text{ en } \binom{4}{4}.$$

De som van de getallen in de vierde rij is 2^4 .

		SOM
1	→ rij 0	$2^0 = 1$
1 1	→ rij 1	$2^1 = 2$
1 2 1	→ rij 2	$2^2 = 4$
1 3 3 1	→ rij 3	$2^3 = 8$
1 4 6 4 1	→ rij 4	$2^4 = 16$
1 5 10 10 5 1	→ rij 5	$2^5 = 32$
1 6 15 20 15 6 1	→ rij 6	$2^6 = 64$

Het binomium van Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Zo is $(2a-3)^4 =$

$$\binom{4}{0} \cdot (2a)^4 + \binom{4}{1} \cdot (2a)^3 \cdot (-3) + \binom{4}{2} \cdot (2a)^2 \cdot (-3)^2 + \binom{4}{3} \cdot 2a \cdot (-3)^3 + \binom{4}{4} \cdot (-3)^4 =$$

$$1 \cdot 16a^4 + 4 \cdot 8^3 \cdot (-3) + 6 \cdot 4a^2 \cdot 9 + 4 \cdot 2a \cdot (-27) + 81 = 16a^4 - 96a^3 + 216a^2 - 216a + 81.$$

Om de coëfficiënt van x^{15} in de herleiding van $(x^3-2)^7$ te berekenen, bedenk je dat $(x^3)^5 = x^{15}$, dus dat je met de derde term te maken hebt.

$$\text{De coëfficiënt is } \binom{7}{2} \cdot 1^5 \cdot (-2)^2 = 84.$$

Multinomiaalcoëfficiënten

$(a-b+c)^3$ is een voorbeeld van een multinomium.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$$

Hierin is $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$ een multinomiaalcoëfficiënt.

$$\text{Het aantal termen van } (a-b+c)^{15} \text{ is } \binom{3-1+15}{15} = \binom{17}{15} = 136.$$

Om de coëfficiënt van x^4y^8 in de herleiding van $(x^2-3xy+y^3)^5$ te berekenen, bedenk je dat $x^2 \cdot (xy)^2 \cdot (y^3)^2$ juist x^4y^8 geeft.

$$\text{Deze term is } \binom{5}{1, 2, 2} \cdot x^2 \cdot (-3xy)^2 \cdot (y^3)^2 = \frac{5!}{2! \cdot 2!} \cdot x^2 \cdot 9x^2y^2 \cdot y^6 = 270x^4y^8,$$

dus de coëfficiënt is 270.

2.2 Recursieve formules

- O 19** Thomas heeft op 1 januari 2015 bij de bank 10 000 euro geleend.
 Hij betaalt 5% rente per jaar.
 Met ingang van 1 januari 2016 betaalt hij telkens op 1 januari 700 euro van zijn schuld terug.
 Op 1 januari 2016 heeft hij zo een restschuld van 9800 euro.
- Licht dit toe met een berekening.
 - Laat met een berekening zien dat op 1 januari 2017 zijn restschuld 9590 euro bedraagt.
 - Vul de tabel verder in. Rond af op centen.

datum	1-1-2015	1-1-2016	1-1-2017	1-1-2018	1-1-2019
restschuld	10 000	9800	9590		

Theorie A Getallenrijen

Renske heeft een nieuwe baan. Haar maandsalaris bedraagt 2000 euro. Met haar werkgever is zij overeengekomen dat zij jaarlijks een loonsverhoging van 160 euro per maand krijgt. Zo ontstaat de rij 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ... Dit is een voorbeeld van een **getallenrij**. De getallen in de rij heten de **termen**.

Het is gebruikelijk de eerste term van een getallenrij te noteren met u_0 , de tweede met u_1 , de derde met u_2 , enzovoort.

Bij de rij 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ... is

$$u_0 = 2000$$

$$u_1 = 2000 + 160 = u_0 + 160$$

$$u_2 = 2160 + 160 = u_1 + 160$$

$$u_3 = 2320 + 160 = u_2 + 160$$

$$\text{Algemeen is } u_n = u_{n-1} + 160.$$

LET OP!

De 1^e term is u_0 .

De 5^e term is u_4 .

De 10^e term is u_9 .

In de formule $u_n = u_{n-1} + 160$ is n een geheel getal met $n \geq 0$.

Neem je $n = 10$, dan krijg je $u_{10} = u_9 + 160$.

De formule $u_n = u_{n-1} + 160$ is een voorbeeld van een **recursieve formule**.

Met alleen de recursieve formule kun je de termen van de rij niet berekenen.

Je moet daarvoor ook een **startwaarde** weten.

Bij de rij 2000, 2160, 2320, 2480, 2640, 2800, ... is de startwaarde 2000.

Zo krijg je $u_n = u_{n-1} + 160$ met $u_0 = 2000$.

We spreken af dat je bij een recursieve formule altijd de startwaarde vermeldt.

Een recursieve formule van een rij geeft aan hoe elke term uit één of meer voorafgaande termen volgt.

Bij een recursieve formule vermeld je de startwaarde(n).

De rij $u_n = u_{n-1} + 160$ met $u_0 = 2000$ kun je doorrekenen op het basisscherm van de GR met **Ans**.

- Tik in 2000 **ENTER** (of **EXE**)
 - Tik in + 160 **ENTER**, **ENTER**, **ENTER**, ...
- Zie het GR-scherm hiernaast.

```

2000
Ans+160
2160
2320
2480
2640

```

Voorbeeld

Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,25u_{n-1} - 10$ met $u_0 = 100$.

- Bereken de vijfde en de zesde term van de rij. Rond af op twee decimalen.
- Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 500$?

Uitwerking

- Voer in 100 en $1,25\text{Ans} - 10$.
Je krijgt $u_4 \approx 186,48$ en $u_5 \approx 223,11$.

De 5^e term is u_4 .

u_{10} is de 11^e term.

- $u_9 \approx 487,03$ en $u_{10} \approx 598,79$.
Vanaf de 11^e term is $u_n > 500$.

$u_9 < 500$ en $u_{10} > 500$
Noem beide termen.

```

100
Ans*1.25-10
115
133.75
157.1875
186.484375

```

- Gegeven is de recursieve formule $u_n = 0,9u_{n-1} + 50$ met $u_0 = 200$.
 - Bereken de zevende en de achtste term van de rij. Rond af op twee decimalen.
 - Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 400$?

- Gegeven is de recursieve formule $u_n = 10 + 20\sqrt{u_{n-1}}$ met $u_0 = 50$.
 - Bereken de vierde en de vijfde term van de rij. Rond af op twee decimalen.
 - Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 419,5$?
 - Is er een term waarvoor $u_n > 420$? Licht toe.

- A 22** Gegeven is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}}$ met $u_0 = 25$.

- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de zevende en de achtste term van de rij.
- Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 35$?
- Vanaf welke n is $u_n - u_{n-1} > 0,975$?

23 Stel van de volgende rijen de recursieve formule op. Vergeet de startwaarde niet.

- a 100, 110, 120, 130, 140, ...
- b 200, 180, 160, 140, 120, ...
- c 1000, 1200, 1440, 1728, 2073,6, ...
- d 2000, 1200, 720, 432, 259,2, ...

A 24 a Hoeveel positieve termen heeft de rij 800, 727, 654, 581, 508, ...?
 b Gegeven is de rij 1024, 768, 576, 432, 324, ...
 Hoeveel termen van de rij zijn groter dan 10?

O 25 Gegeven is de getallenrij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
 a Wat is de volgende term van de rij?
 b Waarom lukt het niet deze rij door te rekenen op het basisscherm van de GR?

Geschiedenis Leonardo van Pisa

De Italiaanse wiskundige en koopman Leonardo van Pisa, bijgenaamd Fibonacci, leefde van 1175 tot 1250.

Tijdens zijn vele reizen door de landen rond de Middellandse Zee werd Leonardo steeds meer gegrepen door de wetenschap.

In 1202 publiceerde hij het boek 'Liber Abaci', dat bijna alle wiskundige kennis van die tijd bevatte.

In plaats van Romeinse cijfers gebruikte hij in dit boek als eerste westerse wiskundige het Hindoe-Arabische getallenstelsel met het cijfer 0. Een van de problemen die hij in 'Liber Abaci' beschrijft, is het zogenaamde konijnenprobleem.

Een paar konijnen van één maand oud is nog te jong om zich te kunnen voortplanten. Maar vanaf de tweede maand krijgt het paar elke maand twee jongen, die zich op hun beurt na twee maanden eveneens voortplanten met twee jongen per maand per paar. Enzovoort.

Bij dit probleem hoort de rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...



Theorie B Het rijen-invoerscherm van de GR

De getallenrij in opgave 25 heet de **rij van Fibonacci**. Elke term is de som van de twee voorafgaande termen.

$$\text{Zo is } u_3 = u_2 + u_1$$

$$u_4 = u_3 + u_2$$

$$u_5 = u_4 + u_3$$

$$\text{Algemeen is } u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Deze recursieve formule geeft aan hoe elke term uit de twee voorafgaande termen volgt. Om de rij vast te leggen, moet je twee startwaarden weten.

De recursieve formule van de rij van Fibonacci is

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ met } u_0 = 1 \text{ en } u_1 = 1.$$

Het is niet mogelijk deze formule op het basisscherm van de GR door te rekenen. Maar het lukt wel door de rij in te voeren op het rijen-invoerscherm van de GR.

[► GR] Hoe dat gaat leer je in de module **Het rijen-invoerscherm**. Neem eerst deze module door.

Voorbeeld

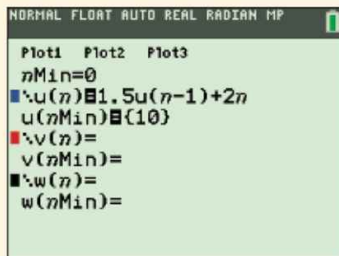
Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,5u_{n-1} + 2n$ met $u_0 = 10$.

- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de tiende term van de rij.
- Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 10\,000$?

Uitwerking

TI

- Voer in
 $nMin = 0$
 $u(n) = 1,5u(n-1) + 2n$
 $u(nMin) = 10$
 De tiende term is $u_9 \approx 797,75$.
- $u_{15} \approx 9562$ en $u_{16} \approx 14\,374$.
 Vanaf de 17^e term is $u_n > 10\,000$.



n	u(n)			
8	519.84			
9	797.75			
10	1216.6			
11	1846.9			
12	2794.4			
13	4217.6			
14	6354.4			
15	9561.7			
16	14374			
17	21596			
18	32430			

Casio

- Voer in
 $a_{n+1} = 1,5a_n + 2(n+1)$
 Start: 0
 $a_0: 10$
 De tiende term is $u_9 \approx 797,75$.
- $u_{15} \approx 9562$ en $u_{16} \approx 14\,374$.
 Vanaf de 17^e term is $u_n > 10\,000$.

n+1	a _{n+1}
14	6354.4
15	9561.6
16	14374
17	21595

Table Setting	n+1
Start: 0	
End: 20	
a ₀ : 10	
b ₀ : 0	
c ₀ : 0	
a _n Str: 0	
a ₀	a ₁

- 26** Gegeven is de recursieve formule $u_n = 0,5u_{n-1} + n^2$ met $u_0 = 100$.
- Welke term is de kleinste term van deze rij?
 - Bereken in twee decimalen nauwkeurig de achtste term van de rij.
 - Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 500$?

- 27** Gegeven is de recursieve formule $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_0 = 2$ en $u_1 = 3$.
- Bereken de eerste zes termen van de rij.
 - Vanaf de hoeveelste term is u_n meer dan 1 miljoen?

- A 28** De rijen u_n en v_n zijn gegeven door $u_n = u_{n-1} + 5n$ met $u_0 = 100$ en $v_n = v_{n-1} + n^2$ met $v_0 = 10$.
- Vanaf welke n is $v_n > u_n$?
 - Vanaf welke n is $v_n - u_n > 1000$?
 - Bereken $v_n - u_n$ in het geval $u_n = 1600$.

- O 29** Frans zet op 1 januari 2015 een bedrag van € 1000 op de bank tegen een vaste rente van 3% per jaar. Met ingang van 1 januari 2016 neemt hij jaarlijks op 1 januari € 100 op. Bij deze situatie hoort een van de volgende recursieve formules.
- $u_n = u_{n-1} - 100$ met $u_0 = 1000$
 - $u_n = 1,03u_{n-1}$ met $u_0 = 1000$
 - $u_n = 1,03u_{n-1} - 100$ met $u_0 = 1000$
- Zoek de juiste formule.
 - Onderzoek met de GR op welke datum het saldo voor het eerst ontoereikend is om € 100 op te nemen.



Theorie C Recursieve formules opstellen

Bij een rente van 3,5% per jaar groeit een bedrag B volgens de recursieve formule $B_n = 1,035B_{n-1}$.

Neem je bovendien jaarlijks een bedrag van 150 euro op, dan krijg je de formule $B_n = 1,035B_{n-1} - 150$.

Is de startwaarde bekend, dan is deze rij door te rekenen. Je kunt dit doen op het basisscherm, maar het is handiger om dit te doen op het rijen-invoerscherm. Je kunt dan immers in de tabel aflezen welke n bij een situatie hoort.

Voorbeeld

Op 1 maart zit in een opslagtank 20 000 liter water. Elke dag wordt 30% van de in de tank aanwezige hoeveelheid voor zuivering overgeheveld naar een andere tank. Direct daarna wordt de eerste tank bijgevuld met 5000 liter water. De eerste keer gebeurt dat op 2 maart.

- Stel bij deze situatie de recursieve formule op van de hoeveelheid water W_n in de tank.
- Hoeveel liter water zit er op 6 maart na het bijvullen in de tank?
- De hoeveelheid water in de tank komt niet beneden een grenswaarde. Onderzoek welke waarde dat is. Geef het antwoord in gehele liters nauwkeurig.

Uitwerking

- Er wordt 30% overgeheveld, dus er blijft 70% over.
 $W_n = 0,7W_{n-1} + 5000$ met $W_0 = 20\,000$
- Voer de formule in op de GR.
Bij 6 maart hoort u_5 .
Lees af in de tabel $u_5 \approx 17\,227$.
Op 6 maart zit er 17 227 liter water in de tank.
- Vanaf $n = 24$ is $u_n \approx 16\,667$, dus de grenswaarde is 16 667 liter.

- 30** In een natuurgebied op de Veluwe leeft op 1 juli 2015 een populatie van 275 Schotse hooglanders. De populatie groeit jaarlijks met 8%. Natuurbeheer maakt zich zorgen over de omvang van de populatie. Besloten wordt ingaande 1 juli 2016 jaarlijks 30 exemplaren naar een ander gebied te verplaatsen.
- Stel de recursieve formule op van het aantal Schotse hooglanders H_n .
 - In welk jaar zijn er op 1 juli voor het eerst minder dan 150 Schotse hooglanders in het natuurgebied?
 - Hoeveel Schotse hooglanders moeten jaarlijks ingaande 1 juli 2016 verplaatst worden om de populatie op peil te houden?

- A 31** Op 1 januari 2015 heeft Eva € 17 500 op een spaarrekening gezet. Ze krijgt elk jaar 3,5% rente. Ze neemt elk jaar op 1 januari € 500 op van deze rekening. Ze begint hiermee op 1 januari 2016.
- Stel de recursieve formule op van het bedrag B_n op de spaarrekening van Eva.
 - Welk bedrag staat op 1 januari 2026, direct na het opnemen van de € 500, op haar rekening?
 - Op 1 januari van welk jaar heeft Eva voor het eerst meer dan € 20 000 op haar spaarrekening staan?
 - Welk bedrag kan Eva vanaf 1 januari 2016 jaarlijks opnemen opdat het saldo direct na het opnemen elk jaar hetzelfde is?

Theorie D De recursieve formule van een somrij

De formule $u_n = n^2 + 1$ met n geheel en $n \geq 0$ legt de rij

1, 2, 5, 10, 17, 26, ... vast.

Je krijgt direct u_{10} door $n = 10$ in te vullen in de formule:

$u_{10} = 10^2 + 1 = 101$. Het is dus niet nodig om eerst u_0 tot en met u_9 te berekenen. De formule $u_n = n^2 + 1$ heet de **directe formule** van de rij.

Bij elke rij kun je een **somrij** maken. We definiëren de somrij S_n

van een rij u_n met n geheel en $n \geq 0$ als volgt: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Dus: $S_0 = u_0$

$$S_1 = u_0 + u_1 = S_0 + u_1$$

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2$$

$$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3$$

Algemeen is $S_n = S_{n-1} + u_n$.

De recursieve formule van de somrij S_n van de rij u_n is

$S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = u_0$.

Je kunt de recursieve formule van de somrij doorrekenen op het rijen-invoerscherm van de GR.

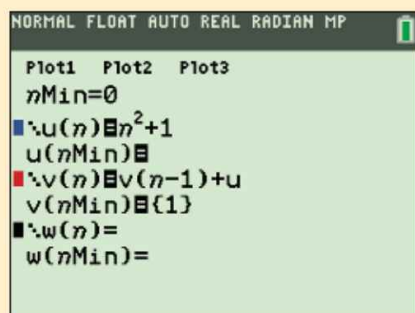
Bij de TI voer je de rij u_n in bij $u(n)$ en de recursieve formule van S_n voer je in bij $v(n)$.

Bij de Casio krijg je de somrij door Σ Display op On te zetten.

Je kunt voor de rij u_n ook een directe formule invoeren. Bij de Casio kies je dan bij TYPE met F1 de vorm a_n .

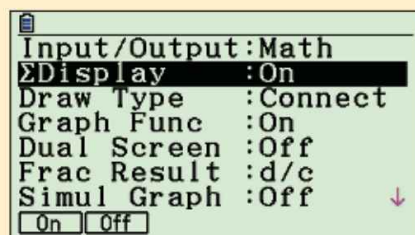
Op de GR-schermen hieronder zie je hoe je de rij $u_n = n^2 + 1$ met $n \geq 0$ en de bijbehorende somrij invoert op de GR.

Je leest af dat de somrij is 1, 3, 8, 18, 35, 61, ...



n	u(n)	v(n)
0	1	1
1	2	3
2	5	8
3	10	18
4	17	35
5	26	61
6	37	98
7	50	148
8	65	213
9	82	295
10	101	396

u(n)=n^2+1



a_n = n^2 + 1

n	a_n	Σa_n
0	1	1
1	2	3
2	5	8
3	10	18

FORMULA DELETE GPH-CON GPH-PLT

Voorbeeld

Gegeven is de rij $u_n = n^2 + n + 1$.

a Bereken $\sum_{k=0}^{10} u_k$.

b Bereken vanaf welke n geldt dat $\sum_{k=0}^n u_k > 1000$.

Uitwerking

a TI

Voer in

$$n\text{Min} = 0$$

$$u(n) = n^2 + n + 1$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(n\text{Min}) = 1$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{10} u_k = 451$.

b Lees af in de tabel $S_{13} = 924$ en $S_{14} = 1135$.
Dus vanaf $n = 14$.

Casio

Voer in $a_n = n^2 + n + 1$ en zet

$\Sigma\text{Display}$ op On.

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{10} u_k = 451$.

R 32 Zie het voorbeeld met de uitwerking van de TI.
Waarom is het niet nodig om bij $u(n\text{Min})$ iets in te vullen,
en waarom is dit wel nodig bij $v(n\text{Min})$?

33 Gegeven is de rij $u_n = n^2 - 2n + 1$.

a Bereken $\sum_{k=0}^{15} u_k$.

b Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 2500$?

34 Gegeven is de rij $u_n = 2u_{n-1} - 5$ met $u_0 = 10$.

a Bereken $\sum_{k=0}^8 u_k$.

b Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 25\,000$?

35 Bereken.

a $\sum_{k=0}^{20} (k^2 + 1)$

c $\sum_{k=2}^{15} (k^2 - 2k)$

b $\sum_{k=0}^{20} (k+1)^2$

d $\sum_{k=6}^{30} \left(\frac{1}{2}k^2 - 4\right)$

36 Bereken in twee decimalen nauwkeurig.

a $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k+1}$

c $\sum_{k=5}^{20} \sqrt{k^3 + 1}$

b $\sum_{k=0}^{15} \frac{k}{k^2 + 1}$

d $\sum_{k=1}^{10} 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

37 Schrijf met de sigmanotatie en bereken.
Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + \dots + 101$

b $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{15}{16}$

c $2 + 3 + 6 + 11 + 18 + 27 + 38 + \dots + 402$

d $768 + 384 + 192 + 96 + \dots + 3$

A 38 Op 12 juni 2005 is in het Noord-Hollandse dorp Limmen het wereldrecord bierkratten stapelen verbeterd. Bij dit record werden in totaal 63 365 kratten gestapeld. Dat waren er 9370 meer dan bij het oude record. De bovenste laag bestond uit één krat, de laag daaronder bestond uit vier kratten, laag drie bestond uit negen kratten, enzovoort.

Bij deze situatie hoort de vergelijking

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 63\,365.$$

a Licht dit toe en bereken n . Wat betekent het antwoord?

De gebruikte kratten hebben een lengte van 40 cm, een breedte van 30 cm en een hoogte van 25 cm. In een krat gaan 24 flesjes, elk met een inhoud van 33 cL.

b Hoe hoog was de stapel in Limmen?

En hoeveel m^2 was het grondvlak van het bouwwerk?

c Hoeveel liter bier gaat er in totaal in de flesjes die in de kratten passen?

In juni 2011 heeft Limmen het wereldrecord bierkratten stapelen moeten afstaan aan het Noord-Duitse plaatsje Satow, waar in totaal 105 995 kratten werden gebruikt. Het stapelproces was anders dan in Limmen: in Satow bestond de bovenste laag uit één krat, de laag daaronder uit negen kratten, laag drie bestond uit vijfentwintig kratten, enzovoort.

d Welke vergelijking hoort bij deze situatie?

e Hoe hoog was de stapel in Satow?

En hoeveel m^2 was het grondvlak van het bouwwerk?

Gebruik dat de kratten in Satow een lengte van 40 cm hadden, terwijl de breedte en hoogte beide 30 cm waren.



Terugblik

2

Recursieve formules

Bij de getallenrij 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... ontstaat elke term door bij de voorafgaande term 4 op te tellen. Bij de rij hoort daarom de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 4$ met $u_0 = 5$. Sommige recursieve formules kun je op het basisscherm van de GR doorrekenen met **Ans**. Zo krijg je bij de rij $u_n = 1,03u_{n-1} - 500$ met $u_0 = 15000$ het GR-scherm hiernaast. Je leest af: de vijfde term is ongeveer 14790,82. Let erop dat de vijfde term u_4 is. En zo is u_{15} de zestiende term.

15000
Ans*1.03-500
15000
14950
14898.5
14845.455
14790.81865

Het rijen-invoerscherm van de GR

De rij $u_n = 1,03u_{n-1} - 500n$ met $u_0 = 15000$ is niet door te rekenen op het basisscherm. Je rekent deze rij door op het rijen-invoerscherm. Ook een recursieve formule als $u_n = 2u_{n-1} - 3u_{n-2}$ met $u_0 = 5$ en $u_1 = 10$ en een directe formule als $u_n = 2n^2 - 3n + 4$ reken je door op het rijen-invoerscherm.

Met een directe formule is een term te berekenen zonder de voorafgaande termen te kennen. Zo is bij de rij $u_n = 2n^2 - 3n + 4$ de zesde term gelijk aan $u_5 = 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 4 = 39$.

Recursieve formules opstellen

De populatie bavianen in een dierentuin telt 150 exemplaren op 1 januari 2015. Jaarlijks groeit de populatie met 12%. Om overbevolking tegen te gaan worden met ingang van 1 januari 2016 jaarlijks 20 bavianen aan andere dierentuinen verkocht.

Noem je het aantal bavianen B_n , dan hoort bij deze situatie de recursieve formule $B_n = 1,12B_{n-1} - 20$ met $B_0 = 150$.

De som van de termen van een rij

Met de recursieve formule $S_n = S_{n-1} + u_n$ is bij de rij u_n de som van een aantal termen te berekenen. Gebruik daarbij het rijen-invoerscherm.

Voer op de TI bij $v(n)$ de recursieve formule van de somrij in.

Bij de Casio zet je Σ Display op On.

Op de GR-schermen hieronder zie je de invoer en de tabellen als je te maken hebt met de directe formule $u_n = 2n^2 - 3n + 4$.

Plot1	Plot2	Plot3
nMin=0		
$u(n) = 2n^2 - 3n + 4$		
$u(nMin)$		
$v(n) = v(n-1) + u$		
$v(nMin) = \{4\}$		
$w(n) =$		
$w(nMin) =$		

n	u(n)	v(n)
0	4	4
1	3	7
2	6	13
3	13	26
4	24	50
5	39	89
6	58	147
7	81	228
8	108	336
9	139	475
10	174	649

n	u(n)	Σu(n)
0	4	4
1	3	7
2	6	13
3	13	26

Je ziet dat de somrij is 4, 7, 13, 26, 50, 89, 147, ..., dus $\sum_{k=0}^6 (2k^2 - 3k + 4) = 147$.

2.3 Rekenkundige rijen

O39 Gegeven is de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 20$.

a Schrijf de eerste 5 termen van de rij op.

De rij is ook te noteren met de directe formule $u_n = a + bn$.

b Geef a en b .

c Gebruik de directe formule van vraag b om u_{25} te berekenen.

Theorie A Formules van rekenkundige rijen

De rij 75, 80, 85, 90, 95, 100, ... is een voorbeeld van een **rekenkundige rij**. Bij een rekenkundige rij is het verschil van twee opeenvolgende termen constant. Dit **constante verschil** noteren we met v .

De algemene recursieve formule van een rekenkundige rij (rr) is $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0 .

De rekenkundige rij 75, 80, 85, 90, 95, 100, ... is ook te noteren met de directe formule $u_n = 75 + 5n$.

Een rekenkundige rij is een rij waarvan het verschil van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is.

Van een rekenkundige rij met beginterm u_0 en verschil v is

- de directe formule $u_n = u_0 + vn$
- de recursieve formule $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0 .

Voorbeeld

Gegeven is de rekenkundige rij $u_n = u_{n-1} + 4$ met $u_0 = 41$.
Hoeveel termen van deze rij zijn kleiner dan 500?

Uitwerking

rr met $u_0 = 41$ en $v = 4$, dus $u_n = 41 + 4n$.

$41 + 4n = 500$ geeft $4n = 459$

$$n = 114,75$$

Dus u_0 tot en met u_{114} zijn kleiner dan 500.

Dat zijn 115 termen.

40 Gegeven is de rij 13, 18, 23, 28, 33, ...

a Waarom is dit een rekenkundige rij?

b Stel de recursieve en de directe formule van de rij op.

c Bereken de 50^e term van de rij.

d De hoeveelste term van de rij is gelijk aan 633?

- 41** Gegeven is de rij $u_n = u_{n-1} - 7$ met $u_0 = 1023$.
- De hoeveelste term van de rij is gelijk aan 246?
 - Hoeveel positieve termen heeft de rij?

- A 42** Van de rekenkundige rijen v_n en u_n is gegeven $u_5 = 85$, $u_8 = 124$, $v_5 = 440$ en $v_8 = 404$.
Bereken vanaf welke n geldt $v_n < u_n$.

Geschiedenis Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) behoort tot de grootste wiskundigen aller tijden. Het verhaal gaat dat hij als driejarige peuter al fouten verbeterde in het rekenwerk van zijn oom Friedrich. Op school viel Carl niet alleen op door zijn intelligentie, maar ook door zijn niet altijd vlekkeloze gedrag. Op een dag moest hij van zijn onderwijzer, terwijl de rest van de klas buiten ging spelen, als straf in het klaslokaal blijven totdat hij de getallen 1 tot en met 100 had opgeteld. De onderwijzer dacht dat de zevenjarige Gauss hiermee een flinke tijd bezig zou zijn, maar Carl gaf binnen enkele ogenblikken het juiste antwoord. Hoe Gauss dit probleem aanpakte, zie je in opgave 43.



- O 43** De manier waarop de zevenjarige Gauss de getallen 1 tot en met 100 optelde komt op het volgende neer.

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 \\ 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \end{array} +$$

De getallen van klein naar groot.
De getallen van groot naar klein.
Optellen geeft 100 keer het getal 101.

- Licht toe dat $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101$.
- Bereken $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49 + 50$ op de manier van Gauss.

Theorie B De som van termen van een rekenkundige rij

Er bestaat een directe formule voor de som van de eerste $n + 1$ termen van een rekenkundige rij. Om die formule te begrijpen, bekijken we S_{28} van de rij $u_n = 3n + 1$.

$$S_{28} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{27} + u_{28} = 1 + 4 + 7 + \dots + 82 + 85.$$

$$\begin{array}{r} \text{Dus } S_{28} = 1 + 4 + 7 + \dots + 82 + 85 \\ S_{28} = 85 + 82 + \dots + 7 + 4 + 1 \\ \hline 2 \cdot S_{28} = 86 + 86 + 86 + \dots + 86 + 86 \end{array} +$$

Van klein naar groot.
Van groot naar klein.
Dit is 29 keer 86.

$$\text{Dus } 2 \cdot S_{28} = 29 \cdot 86, \text{ dus } S_{28} = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 86.$$

Merk hierbij op

- 29 is het aantal termen dat je optelt.
- 86 is de som van de eerste en de laatste term.

Je ziet som = $\frac{1}{2} \cdot$ aantal termen $\cdot$ (eerste term + laatste term).

Algemeen geldt dat bij een rekenkundige rij de som van de

eerste $n + 1$ termen gelijk is aan $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$.

Voor een rekenkundige rij u_n geldt

som = $\frac{1}{2} \cdot$ aantal termen $\cdot$ (eerste term + laatste term), ofwel

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2} (n+1)(u_0 + u_n).$$

Voorbeeld

a Bereken $\sum_{k=0}^{39} (7k + 1)$.

b Bereken $\sum_{k=10}^{50} (300 - 5k)$.

c Bereken $9 + 15 + 21 + 27 + \dots + 183$.

Uitwerking

a $u_0 = 7 \cdot 0 + 1 = 1$ en $u_{39} = 7 \cdot 39 + 1 = 274$

$$\sum_{k=0}^{39} (7k + 1) = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot (1 + 274) = 5500$$

b $u_{10} = 300 - 5 \cdot 10 = 250$ en $u_{50} = 300 - 5 \cdot 50 = 50$

$$\sum_{k=10}^{50} (300 - 5k) = \frac{1}{2} \cdot 41 \cdot (250 + 50) = 6150 \quad \leftarrow \sum_{k=10}^{50} \text{ dus 41 termen optellen.}$$

c rr met $u_0 = 9$ en $v = 6$, dus $u_n = 9 + 6n$.

$$u_n = 183 \text{ geeft } 9 + 6n = 183$$

$$6n = 174$$

$$n = 29$$

$$\text{Dus } 9 + 15 + 21 + 27 + \dots + 183 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (9 + 183) = 2280.$$

44 Bereken.

a $\sum_{k=0}^{50} (3k + 4)$

c $\sum_{k=5}^{30} (6k - 12)$

b $\sum_{k=0}^{40} (100 - 2k)$

d $\sum_{k=12}^{36} (150 - 3k)$

45 a Bereken $12 + 16 + 20 + 24 + \dots + 152$.

b Bereken de som van de positieve termen van de rij
100, 97, 94, 91, 88, ...

c Bereken de som van de eerste 25 termen van de rij
 $u_n = u_{n-1} + 7$ met $u_0 = 18$.

- A 46** Bij het langebaanschaatsen wordt de 10 km gereden in 25 rondjes van 400 meter.
- Bob begint met een rondje van 28,62 seconden.
Vervolgens rijdt hij elke ronde 0,15 seconde langzamer dan de voorafgaande ronde.
Bereken zijn eindtijd.
 - Sven begint met een rondje van 31,76 seconden.
Vervolgens rijdt hij elke ronde 0,12 seconde sneller dan de voorafgaande ronde.
Bereken de eindtijd van Sven.



- 47** Van een rekenkundige rij is de eerste term 20 en is de som van de eerste 30 termen gelijk aan 2340. Hieruit volgt de vergelijking $15(40 + 29v) = 2340$, waarin v het constante verschil van de rij is.
- Licht de vergelijking toe.
 - Bereken v .
 - Bereken de som van de eerste 50 termen van de rij.

- A 48** Een skiër gaat met toenemende snelheid een helling af. De afstanden die hij elke volgende seconde aflegt, vormen een rekenkundige rij. In de eerste seconde legt hij 4 meter af. Na twaalf seconden heeft hij in totaal 147 meter afgelegd. Hoeveel meter heeft hij na acht seconden afgelegd?

- D 49** Van de rekenkundige rij u_n is gegeven $\sum_{k=5}^{14} u_k = 535$ en $\sum_{k=20}^{24} u_k = 580$.

Bereken $\sum_{k=0}^{10} u_k$.

- 50** Je kunt bij de rekenkundige rij $u_n = 7n + 1$ de directe formule

opstellen van $\sum_{k=0}^n u_k$. Je krijgt $\sum_{k=0}^n u_k = 3\frac{1}{2}n^2 + 4\frac{1}{2}n + 1$.

- Toon aan dat deze formule juist is.

- Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 1000$?

- 51** Gegeven is de rij $u_n = 4n + 12$.

- Stel de directe formule op van $\sum_{k=0}^n u_k$.

- Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 500$?

52 Van een rekenkundige rij met beginterm u_0 is $u_{12} = 26$ en $u_{20} = 38$.

a Bereken de som van de eerste 20 termen.

b Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 1200$?

R 53 De opgaven 50b, 51b en 52b lijken erg op opgave 33b.

Licht toe dat de aanpak met de directe formule van de somrij niet werkt bij opgave 33b.

A 54 Victor heeft een nieuwe baan. Hij begint in december 2015 met een maandsalaris van 2500 euro. In zijn contract staat dat dit bedrag elke maand met 12 euro wordt verhoogd.

a In welke maand van welk jaar is zijn maandsalaris 2800 euro?

b Hoeveel euro is zijn totale salaris in de periode tot en met december 2018?

c In welke maand van welk jaar overtreft het totale salaris voor het eerst de één miljoen euro?

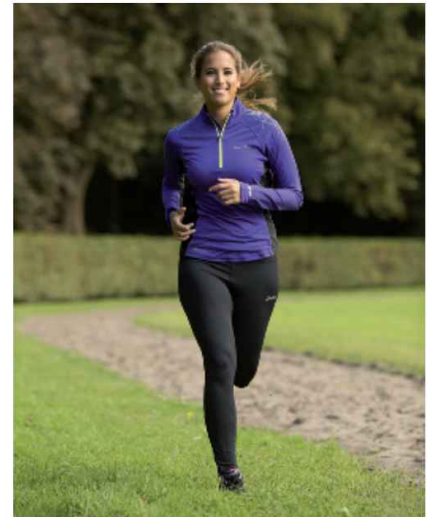
A 55 Elise is in training voor de Zevenheuvelenloop. Eén keer per week gaat ze trainen. Ze houdt het volgende trainingsschema aan. De eerste week legt ze een afstand van 5 km af, dus $u_0 = 5$.

Elke week loopt ze 200 meter meer dan de week ervoor.

Zo ontstaat de rij u_n van de per week gelopen afstand in km.

a Na hoeveel weken traint ze voor het eerst meer dan 9 km in een week?

b Na hoeveel weken overtreft de totale door Elise afgelegde afstand voor het eerst de 250 km?



A 56 Uit een vliegtuig valt een voorwerp. De eerste seconde is de valafstand 4,9 meter, de tweede seconde valt het voorwerp 14,7 meter, de derde seconde 24,5 meter, enzovoort.

De valafstanden per seconde vormen een rekenkundige rij u_n .

a Hoeveel meter is het voorwerp in de eerste zes seconden gevallen?

b Het vliegtuig vliegt op een hoogte van 1960 meter.
Na hoeveel seconden treft het voorwerp de grond?

D 57 Bij elke rij kun je een verschilrij maken.

De verschilrij van de rij u_n geven we aan met Δu_n en er geldt

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n.$$

Toon aan dat de verschilrij van de kwadratische rij

$u_n = an^2 + bn + c$ een rekenkundige rij is.

Terugblik

2

Rekenkundige rij

Een rekenkundige rij (rr) is een rij waarbij het verschil tussen twee opeenvolgende termen constant is. Dit constante verschil wordt aangegeven met v .

De recursieve formule van een rekenkundige rij is $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0 .

De directe formule is $u_n = u_0 + vn$.

Berekeningen bij een rekenkundige rij

De rij 102, 99, 96, 93, 90, ... is een rekenkundige rij met $u_0 = 102$ en $v = -3$.

De directe formule is $u_n = 102 - 3n$.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} - 3$ met $u_0 = 102$.

Een van de termen van deze rij is 15.

De waarde van n volgt uit $102 - 3n = 15$, en dit geeft $n = 29$.

Dus de 30^e term is 15.

De som van een rekenkundige rij

Voor de som van een aantal termen van een rekenkundige rij geldt de woordformule som rekenkundige rij = $\frac{1}{2} \cdot$ aantal termen $\cdot$ (eerste term + laatste term).

Bij de som van de eerste twaalf termen van de rij $u_n = 18 + 5n$ geeft de woordformule som = $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (18 + 73) = 546$, want de laatste term is $u_{11} = 18 + 5 \cdot 11 = 73$.

Met de sigmanotatie krijg je $\sum_{k=0}^n (u_0 + vk) = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$.

Zo is $\sum_{k=0}^{11} (18 + 5k) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (18 + 73) = 546$

en $\sum_{k=15}^{25} (18 + 5k) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (93 + 143) = 1298$, want je moet 11 termen optellen met

als eerste term $u_{15} = 18 + 5 \cdot 15 = 93$ en als laatste term $u_{25} = 18 + 5 \cdot 25 = 143$.

De formule van $\sum_{k=0}^n u_k$ opstellen

Bij de rij $u_n = 8 + 6n$ krijg je de formule van $\sum_{k=0}^n u_k$ als volgt.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(8 + 8 + 6n) = \frac{1}{2}(n+1)(6n + 16) \\ &= \frac{1}{2}(6n^2 + 22n + 16) = 3n^2 + 11n + 8 \end{aligned}$$

Met deze formule kun je bijvoorbeeld berekenen vanaf welke n de som $\sum_{k=0}^n u_k$ groter

is dan 1000. Voer de formule $y_1 = 3x^2 + 11x + 8$ in op de GR en maak een tabel.

Je krijgt $y_1(16) = 952$ en $y_1(17) = 1062$, dus vanaf $n = 17$ is $\sum_{k=0}^n u_k$ groter dan 1000.

2.4 Meetkundige rijen

O58 Gegeven is de recursieve formule $u_n = 1,5 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 400$.

a Schrijf de eerste vijf termen van de rij op.

De rij is ook te noteren in de vorm $u_n = a \cdot b^n$.

b Welke getallen zijn a en b ?

Theorie A Meetkundige rijen

De rij in opgave 58 is een voorbeeld van een **meetkundige rij**.

Het getal 1,5 heet de **factor** van de rij. De factor van een meetkundige rij (mr) geven we aan met de letter r .

De algemene vorm van de recursieve formule van een meetkundige rij is $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0 .

De directe formule van een meetkundige rij krijg je als volgt.

$$u_1 = u_0 \cdot r = u_0 \cdot r^1$$

$$u_2 = u_0 \cdot r \cdot r = u_0 \cdot r^2$$

$$u_3 = u_0 \cdot r \cdot r \cdot r = u_0 \cdot r^3$$

$$\text{Algemeen is } u_n = u_0 \cdot r^n.$$

Een meetkundige rij is een rij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds hetzelfde getal is.

Van een meetkundige rij met beginterm u_0 en factor r is

- de directe formule $u_n = u_0 \cdot r^n$
- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0 .

Voorbeeld

Van een meetkundige rij is $u_6 = 1600$ en $u_{11} = 51\,200$.

Stel de directe formule van u_n op.

Uitwerking

$$r^5 = \frac{u_{11}}{u_6} = \frac{51\,200}{1600} = 32, \text{ dus } r = \sqrt[5]{32} = 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n = u_0 \cdot 2^n \\ u_6 = 1600 \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_0 \cdot 2^6 = 1600 \\ u_0 = \frac{1600}{2^6} \end{array}$$

$$u_0 = 25$$

Dus $u_n = 25 \cdot 2^n$.

$$u_6 \cdot r^5 = u_{11}, \text{ dus } r^5 = \frac{u_{11}}{u_6}.$$

- 59** Gegeven is de rij 1250, 1500, 1800, 2160, 2592, ...
- Waarom is dit een meetkundige rij?
 - Stel de recursieve formule en de directe formule op van de rij.
 - Vanaf de hoeveelste term zijn de termen groter dan 15 000?

- 60** Van een meetkundige rij is $u_3 = 54$ en $u_{10} = 118\,098$.
Stel de directe formule van u_n op.

- A 61** Van een rij is $u_3 = 16$ en $u_8 = 16\,384$.
- Neem aan dat u_n een rekenkundige rij is.
Stel de directe formule van u_n op.
 - Neem aan dat u_n een meetkundige rij is.
Stel de directe formule van u_n op.

De letter r voor factor komt van het woord reden (verhouding). Je komt het woord reden ook tegen in evenredig (van gelijke verhouding).

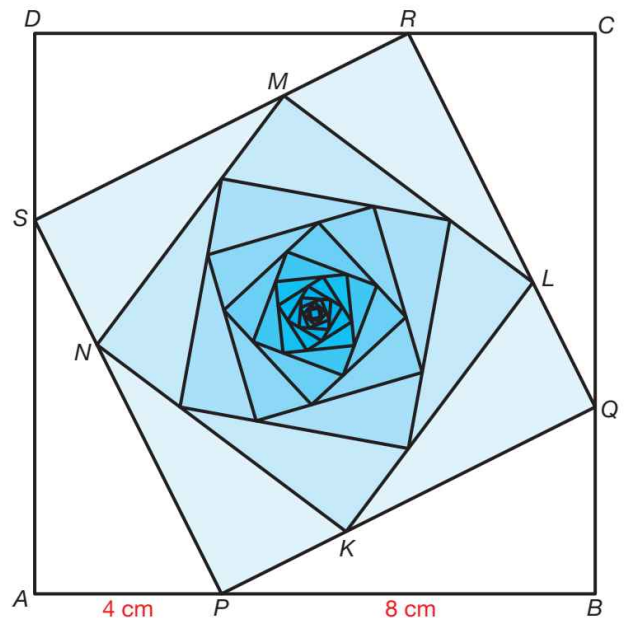
- R 62** Met wat voor soort groei heeft een meetkundige rij te maken?
En een rekenkundige rij?

- A 63** Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 12 cm. In het vierkant wordt een kleiner vierkant $PQRS$ getekend zo, dat $AP = BQ = CR = DS = \frac{1}{3} AB$.
Op dezelfde manier wordt in vierkant $PQRS$ een kleiner vierkant $KLMN$ getekend. Dus $PK = \frac{1}{3} PQ$. Zie figuur 2.7.
Dit proces wordt voortdurend herhaald.
De lengten van de zijden van de opeenvolgende vierkanten vormen de meetkundige rij u_n met $r = \frac{\sqrt{80}}{12}$.
Hierbij hoort $n = 0$ bij vierkant $ABCD$.

- Toon aan dat de genoemde factor $\frac{\sqrt{80}}{12}$ juist is.
- Stel de directe formule op van de rij u_n .
- Van hoeveel van deze vierkanten zijn de zijden langer dan 1 cm?

De oppervlakten van de vierkanten vormen de rij v_n .

- Stel de directe formule op van de rij v_n .
- Van hoeveel van deze vierkanten is de oppervlakte meer dan 1 mm^2 ?



figuur 2.7

O 64

Gegeven is de meetkundige rij $u_n = 15 \cdot 3^n$.We vragen ons af wat de som S_{10} van de eerste 11 termen is.

$$S_{10} = 15 + 45 + 135 + \dots + 295245 + 885735.$$

We vermenigvuldigen S_{10} met de factor van de meetkundige rij, dus met 3. Je krijgt

$$\begin{array}{r} S_{10} = 15 + 45 + 135 + \dots + 295245 + 885735 \\ 3 \cdot S_{10} = \quad 45 + 135 + \dots + 295245 + 885735 + 2657205 \\ \hline -2 \cdot S_{10} = 15 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 - 2657205 \end{array}$$

Bereken S_{10} .**Theorie B** De som van termen van een meetkundige rij

Er bestaat een directe formule voor de som S_n van de eerste $n + 1$ termen van een meetkundige rij. De afleiding van de formule gaat als volgt.

Ga uit van de meetkundige rij $u_n = u_0 \cdot r^n$.Omdat de rij meetkundig is, geldt $r \cdot u_{n-1} = u_n$ en $r \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{Dus } r \cdot S_n &= r(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n) \\ &= r \cdot u_0 + r \cdot u_1 + r \cdot u_2 + \dots + r \cdot u_{n-1} + r \cdot u_n \\ &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{Je krijgt } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ r \cdot S_n = \quad u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} \\ \hline S_n - r \cdot S_n = u_0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 - u_{n+1} \end{array}$$

$$S_n \cdot (1 - r) = u_0 - u_{n+1}$$

$$\text{Dus } S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r}.$$

Uit $u_n = u_0 \cdot r^n$ volgt $u_{n+1} = u_0 \cdot r^{n+1}$.

$$\text{Dus } S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r} = \frac{u_0 - u_0 \cdot r^{n+1}}{1 - r} = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r}.$$

$$\text{Met de sigmanotatie krijg je } \sum_{k=0}^n u_0 \cdot r^k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r}.$$

Voor een meetkundige rij u_n met factor r geldt $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r}$

$$\text{en ook } \sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r}.$$

Op de volgende bladzijde staan deze formules in de vorm van woordformules. Hierin komt het begrip ‘volgende term’ voor. Hiermee bedoelen we de eerste term die niet meer bij de som hoort.

Voor een meetkundige rij geldt:

$$\text{som} = \frac{\text{eerste term} - \text{volgende term}}{1 - \text{factor}} \text{ en}$$

$$\text{som} = \frac{\text{eerste term}(1 - \text{factor}^{\text{aantal termen}})}{1 - \text{factor}}.$$

In onderdeel a van het eerste voorbeeld wordt de formule

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} \text{ gebruikt.}$$

Bij het optellen van de termen u_p tot en met u_n gaat de formule

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r} \text{ over in } \sum_{k=p}^n u_k = \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - r}. \text{ Zie onderdeel b.}$$

Voorbeeld

Gegeven is de meetkundige rij $u_n = 32 \cdot 1,5^n$ met beginterm u_0 .

a Bereken de som van de eerste tien termen van de rij.

b Bereken $\sum_{k=10}^{18} u_k$ in gehele nauwkeurig.

Uitwerking

$$\mathbf{a} \quad \sum_{k=0}^9 32 \cdot 1,5^k = \frac{32(1 - 1,5^{10})}{1 - 1,5} = 3626,5625$$

$$\mathbf{b} \quad \sum_{k=10}^{18} 32 \cdot 1,5^k = \frac{32 \cdot 1,5^{10} - 32 \cdot 1,5^{19}}{1 - 1,5} \approx 138187$$

Bij de formule $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r}$ hoef je niet te weten hoeveel termen je optelt.

Je moet wel de ‘volgende term’ van de rij berekenen. Zie het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

Bereken $2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 118098$.

Aanpak

Bedenk dat 2, 6, 18, 54, ... een meetkundige rij is met $u_0 = 2$ en $r = 3$.

Uitwerking

mr met $u_0 = 2$ en $r = 3$

$u_n = 118098$, dus $u_{n+1} = 3 \cdot 118098 = 354294$.

$$2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 118098 = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r} = \frac{2 - 354294}{1 - 3} = 177146$$

R 65 In de theorie op bladzijde 81 is de formule $S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r}$ voor de som van de eerste $n + 1$ termen van meetkundige rij $u_n = u_0 \cdot r^n$ voor het algemene geval afgeleid. Op bladzijde 74 is de formule $S_n = \frac{1}{2}(n + 1)(u_0 + u_n)$ slechts aangetoond voor de som S_{28} bij de rekenkundige rij $u_n = 3n + 1$. Leid ook de formule $S_n = \frac{1}{2}(n + 1)(u_0 + u_n)$ af voor het algemene geval.

- 66** a Bereken de som van de eerste twaalf termen van de rij $u_n = 0,001 \cdot 2^n$ met beginterm u_0 .
- b Bereken $\sum_{k=0}^{20} 100 \cdot 0,8^k$ in twee decimalen nauwkeurig.
- c Bereken $\sum_{k=5}^{18} 200 \cdot 1,1^k$ in gehelen nauwkeurig.
- d Gegeven is de rij $u_n = 0,75 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 600$. Bereken in één decimaal nauwkeurig de som van de eerste vijftien termen van de rij.

- 67** Bereken in drie decimalen nauwkeurig.
- a $2000 + 3000 + 4500 + 6750 + \dots + 34171,875$
- b $1,06 + 1,06^2 + 1,06^3 + 1,06^4 + \dots + 1,06^{12}$
- c $1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 + \dots + 1,5^{20}$
- d $1,2 - 1,2^2 + 1,2^3 - 1,2^4 + \dots - 1,2^{24}$

A 68 De Coca-Cola Company had in 1995 een omzet van 11,3 miljard dollar. Sindsdien nam de omzet per jaar met 7,4% toe. Bereken de totale omzet in de periode van 1995 tot en met 2015.

A 69 Jan heeft een kamerplant gekocht. De plant is dan 18 cm hoog. De eerste week groeit de plant 5,2 cm. Elke volgende week is de toename van de hoogte 80% van de toename van de voorafgaande week.

a Hoeveel mm is de plant in de achtste week gegroeid?

b Hoeveel mm is de plant in de eerste acht weken in totaal gegroeid?

c Bereken in mm nauwkeurig de hoogte van de plant na tien weken.

- 70** Gegeven is de rij $u_n = 18 \cdot 0,4^n$.
- a Toon aan dat $\sum_{k=0}^n u_k = 30 - 12 \cdot 0,4^n$.
- b Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 29,99$?

71 Gegeven is de rij $u_n = 10\,000 \cdot 0,6^n$.

a De formule van $\sum_{k=0}^n u_k$ is van de vorm $\sum_{k=0}^n u_k = a + b \cdot c^n$.

Bereken a , b en c .

b Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 24\,999$?

A 72 Een atleet is in training voor de marathon van New York. Eén keer per week doet hij een duurloop. Hij kiest hierbij het volgende trainingsprogramma.

- Begin met een duurloop van 20 km, dus $u_0 = 20$.
- Verhoog elke week de af te leggen afstand met 10%, dus $u_1 = 22$.

a Stel de directe formule op van u_n .

b Onderzoek bij de hoeveelste duurloop hij voor het eerst meer dan 42 km aflegt. Hoeveel km heeft hij dan in totaal in zijn duurlopen afgelegd?

c Schrijf de totale afstand T in km van de duurlopen in de vorm $T = a + b \cdot c^n$ en bereken na hoeveel duurlopen hij voor het eerst in totaal meer dan 400 km heeft afgelegd.

A 73 Gegeven zijn de rijen u_n : 100, 115, 130, 145, 160, ... en v_n : 10, 15, 22,5, 33,75, 50,625, ...

Er geldt $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

a Druk S_n en T_n uit in n .

b Vanaf welke n is $T_n > S_n$?

D 74 Bij elke rij kun je een verschilrij maken.

De verschilrij van de rij u_n geven we aan met Δu_n en er geldt

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n.$$

Toon aan dat de verschilrij van een meetkundige rij weer een meetkundige rij is.

Theorie C Sommeerbare rijen

Bij de meetkundige rij $u_n = 10 \cdot 0,8^n$ is

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{10(1 - 0,8^{n+1})}{1 - 0,8} = \frac{10(1 - 0,8^{n+1})}{0,2}.$$

Op het GR-scherm hiernaast zie je enkele waarden van $\sum_{k=0}^n u_k$.

Je ziet: hoe groter n , hoe dichter $\sum_{k=0}^n u_k$ bij 50 komt te liggen.

Je kunt dit als volgt verklaren.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP					
PRESS ENTER TO EDIT					
n	$u(n)$				
15	48.593				
20	49.539				
25	49.849				
30	49.95				
35	49.984				
40	49.995				
45	49.998				
50	49.999				
55	50				
60	50				
65	50				
$u(n) \square 10(1-0.8^{n+1})/0.2$					

Voor grote n is $0,8^{n+1} \approx 0$, dus voor grote n is

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{10(1 - 0,8^{n+1})}{1 - 0,8} \approx \frac{10(1 - 0)}{0,2} = 50.$$

We noemen 50 de **limiet** van $\sum_{k=0}^n u_k$.

- De som $10 + 10 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,8^2 + 10 \cdot 0,8^3 + \dots$ van oneindig veel termen geven we aan met de letter S .
- S is de limiet van $\sum_{k=0}^n u_k$, dus $S = 50$.
- $S = 10 + 10 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,8^2 + 10 \cdot 0,8^3 + \dots = 50$.
- We zeggen: de rij $u_n = 10 \cdot 0,8^n$ is **sommeerbaar**.

Elke meetkundige rij met $-1 < r < 1$ is sommeerbaar.

Immers voor grote n is $r^{n+1} \approx 0$, dus voor grote n is

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} \approx \frac{u_0(1 - 0)}{1 - r} = \frac{u_0}{1 - r}.$$

Dus voor $-1 < r < 1$ is de som $u_0 + u_0 \cdot r + u_0 \cdot r^2 + \dots$ van oneindig veel termen gelijk aan $S = \frac{u_0}{1 - r}$.

De meetkundige rij $u_n = u_0 \cdot r^n$ is sommeerbaar voor $-1 < r < 1$.

De som is $S = u_0 + u_0 \cdot r + u_0 \cdot r^2 + \dots = \frac{u_0}{1 - r}$.

Voorbeeld

Bereken $10 - 5 + 2,5 - 1,25 + 0,625 - \dots$

Aanpak

Bedenk $10 - 5 + 2,5 - 1,25 + 0,625 - \dots = 10 + -5 + 2,5 + -1,25 + 0,625 + \dots$

Dit is de som van een meetkundige rij met $u_0 = 10$ en $r = -\frac{1}{2}$.

Uitwerking

Sommeerbare mr met $u_0 = 10$ en $r = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{u_0}{1 - r} = \frac{10}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{10}{1\frac{1}{2}} = 6\frac{2}{3}$$

75 Bereken.

- $400 + 300 + 225 + 168,75 + 126,5625 + \dots$
- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$
- de som van de meetkundige rij $u_n = 40 \cdot 0,9^n$
- de som van de meetkundige rij $u_n = 500 \cdot (\frac{2}{3})^n$

2

R 76 Floris gebruikt de formule $S = \frac{u_0}{1-r}$ om

$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots$ te berekenen.

Geef commentaar.

77 Een heimachine slaat een betonnen paal in de grond.
Bij de eerste klap gaat de paal 200 cm de grond in. Bij elke volgende klap gaat de paal 20% minder ver de grond in dan bij de voorgaande klap.
Hoe ver kan de heimachine de paal maximaal de grond in slaan?

A 78 Peter laat een bal vallen van 135 cm hoogte. De bal komt bij het stuiteren telkens terug tot 70% van de vorige hoogte.
Hoeveel cm heeft de bal in totaal afgelegd als hij is uitgestuiterd?

A 79 Bungeejumpen is een sport voor waaghalzen. Je springt van een brug af aan een lang elastiek. Juist voordat je het wateroppervlak bereikt, is het elastiek maximaal uitgerekt, waarna je weer terugveert. Vervolgens val je weer naar beneden, enzovoort. Ga ervan uit dat het elastiek bij de eerste val 40 meter uitrekt. Neem verder aan dat je bij het terugveren telkens een afstand van 40% van de vorige val overbrugt en dat je bij het opnieuw vallen 75% van de zojuist teruggeveerde afstand overbrugt. Bereken hoeveel meter de bungeejumper in totaal aflegt.

A 80 Gegeven is de stapel van 8 kubussen in figuur 2.8. De ribbe van de onderste kubus is 6 cm. Vier hoekpunten van de tweede kubus vallen samen met de middens van de onderste kubus. Enzovoort.
De ribben van de opeenvolgende kubussen vormen een meetkundige rij.

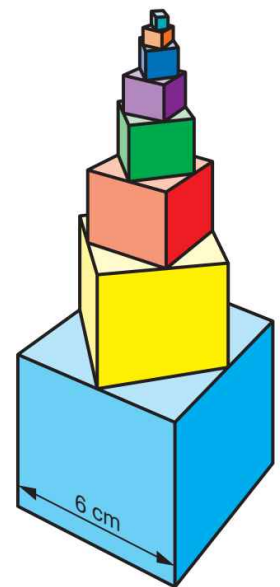
a Bereken in mm nauwkeurig de hoogte van de stapel in de figuur.

Hoe ver je ook doorgaat met stapelen, de hoogte van de gehele stapel komt niet boven een grenswaarde.

b Bereken deze grenswaarde in mm nauwkeurig.

c De totale inhoud van de stapel kubussen heeft ook een grenswaarde.

Bereken deze grenswaarde in mm^3 nauwkeurig.



figuur 2.8

Terugblik

Meetkundige rij

Een meetkundige rij (mr) is een rij waarbij het quotiënt van twee opeenvolgende termen constant is. Dit quotiënt heet de factor van de rij.

Van een meetkundige rij met beginterm u_0 en factor r is

- de directe formule $u_n = u_0 \cdot r^n$
- de recursieve formule $u_n = r \cdot u_{n-1}$ met beginterm u_0 .

Berekeningen met een meetkundige rij

Van de mr 100, 105, 110,25, 115,76, 121,55, ... is $u_0 = 100$ en $r = 1,05$.

De directe formule is $u_n = 100 \cdot 1,05^n$ en de recursieve formule is

$u_n = 1,05 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 100$.

De twaalfde term is $u_{11} = 100 \cdot 1,05^{11} \approx 171,03$.

De som van een meetkundige rij

Voor een meetkundige rij geldt $\sum_{k=0}^n u_0 \cdot r^k = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r}$ en ook $\sum_{k=0}^n u_0 \cdot r^k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r}$.

In woorden: som = $\frac{\text{eerste term} - \text{volgende term}}{1 - \text{factor}}$ en som = $\frac{\text{eerste term}(1 - \text{factor}^{\text{aantal termen}})}{1 - \text{factor}}$.

Zo is $\sum_{k=6}^{20} 100 \cdot 1,05^k = \frac{100 \cdot 1,05^6 - 100 \cdot 1,05^{21}}{1 - 1,05} \approx 2891,73$

en $1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + \dots + 1,05^{20} = \frac{1,05(1 - 1,05^{20})}{1 - 1,05} \approx 34,72$.

Voor het berekenen van $1000 + 800 + 640 + 512 + \dots + 134,217728$ gebruik je de

formule $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r}$ omdat je dan niet hoeft te weten hoeveel termen je optelt.

Je krijgt $\frac{1000 - 0,8 \cdot 134,217728}{1 - 0,8} \approx 4463,13$.

De formule van $\sum_{k=0}^n u_k$ opstellen

Bij de rij $u_n = 80 \cdot 1,4^n$ krijg je de formule van $\sum_{k=0}^n u_k$ als volgt.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{80(1 - 1,4^{n+1})}{1 - 1,4} = \frac{80(1 - 1,4^{n+1})}{-0,4} = -200(1 - 1,4^{n+1}) \\ &= -200 + 200 \cdot 1,4^{n+1} = -200 + 200 \cdot 1,4^n \cdot 1,4 = 280 \cdot 1,4^n - 200 \end{aligned}$$

Sommeerbare meetkundige rij

Als de factor r van een meetkundige rij tussen -1 en 1 ligt, is de rij sommeerbaar.

De som van de rij $u_n = u_0 \cdot r^n$ komt voor groter wordende n steeds dichterbij

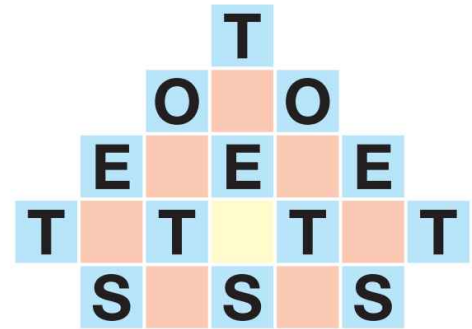
de limiet $S = \frac{u_0}{1 - r}$. Dus $S = u_0 + u_0 \cdot r + u_0 \cdot r^2 + u_0 \cdot r^3 + u_0 \cdot r^4 + \dots = \frac{u_0}{1 - r}$.

Diagnostische toets

2

2.1 Het binomium van Newton

- 1 Op hoeveel manieren kun je in figuur 2.9 het woord TOETS lezen?



figuur 2.9

- 2 Bekijk de herleiding van $(2a - b)^{14}$.
 a Hoeveel termen heeft de herleiding?
 b Bereken de vijfde en de dertiende term van de herleiding.
- 3 Bereken de coëfficiënt van a^8 in de herleiding van
 a $(a^2 - 1)^{10}$ b $(\frac{1}{2}a^2 + 4)^{10}$
- 4 Bereken de coëfficiënt van $p^4q^3r^2$ in de herleiding van
 a $(p + q - r)^9$ b $(2p - q + 5r)^9$

2.2 Recursieve formules

- 5 Gegeven zijn de rijen $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + n \cdot \sqrt{n}$ met $u_0 = 8$ en $v_n = \frac{v_{n-1}}{n} + n^3$ met $v_0 = 0$.
 a Bereken van beide rijen de vierde en de negende term.
 b Voor welke waarden van n is $u_n < v_n$?
 c Vanaf welke n is $u_n - v_n > 2000$?
- 6 Vincent heeft op 1 januari 2015 van zijn vader 6000 euro geleend. Hij betaalt 4,5% rente per jaar en lost vanaf 1 januari 2016 ieder jaar 500 euro af.
 a Stel een recursieve formule op voor zijn restschuld.
 b Bereken de restschuld als hij 6000 euro heeft betaald.
 c Hoeveel moet hij in totaal terugbetalen?
- 7 Gegeven is de rij $u_n = \frac{1}{2}n^2 + 4n + 3$.
 a Bereken $\sum_{k=5}^{25} u_k$.
 b Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 2000$?

2.3 Rekenkundige rijen

- 8 Gegeven is de rij 25, 32, 39, 46, 53,
 a Geef de recursieve en de directe formule van de rij.
 b De hoeveelste term van de rij is 130?

- 9** Bereken.
- a** $18 + 30 + 42 + 54 + \dots + 150$
- b** $180 + 172 + 164 + 156 + \dots + 100$
- 10** Gegeven is de rij $u_n = 8n - 5$.
- a** Bereken de som van de eerste dertig termen.
- b** Bereken $\sum_{k=10}^{25} u_k$.
- c** $\sum_{k=0}^n u_k = an^2 + bn + c$. Bereken a , b en c .
- d** Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n u_k > 5000$?
- 11** Op 1 januari 2015 begint mevrouw Andriesse met een nieuwe baan. Haar bruto maandsalaris is dan €2750. In haar contract staat dat dit bedrag maandelijks met €10 wordt verhoogd.
- a** Hoeveel is het salaris van mevrouw Andriesse in januari 2025?
- b** Hoeveel salaris heeft zij tot en met december 2024 ontvangen?
- c** Vanaf welke maand van welk jaar heeft zij in totaal meer dan een half miljoen euro aan salaris ontvangen?

2.4 Meetkundige rijen

- 12** Gegeven is de rij u_n : 800, 1000, 1250, 1562,5, 1953,125, ...
- a** Geef een recursieve en een directe formule van de rij.
- b** Vanaf de hoeveelste term is $u_n > 20\,000$?
- 13** Gegeven is de meetkundige rij $u_n = 100 \cdot 1,08^n$.
- a** Bereken $\sum_{k=0}^{10} u_k$.
- b** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de som van de eerste vijftien termen.
- 14** **a** Bereken $5 + 20 + 80 + 320 + 1280 + \dots + 1\,310\,720$.
- b** Bereken in drie decimalen nauwkeurig $1,15 + 1,15^2 + 1,15^3 + \dots + 1,15^{20}$.
- 15** Roos blaast een ballon op. Na de eerste keer blazen zit er 500 cm^3 lucht in de ballon. Bij elke volgende keer blazen is de hoeveelheid lucht die Roos in de ballon blaast 75% van de vorige keer.
- a** Hoeveel lucht blaast Roos in de ballon bij de vierde keer blazen?
- b** De hoeveelheid lucht die Roos per keer in de ballon blaast zijn termen van de rij u_n . Er geldt $\sum_{k=0}^n u_k = a + b \cdot c^n$.
- Bereken a , b en c .
- c** Na hoeveel keer blazen zit er voor het eerst meer dan 1700 cm^3 in de ballon?

In 1985 ontdekten de Amerikaanse oogartsen Leonard Flom en Aran Safir dat de unieke textuur van de iris kan worden gebruikt om mensen te identificeren. De irisscan wordt onder andere gebruikt op Schiphol, waardoor het mogelijk wordt zonder paspoort aan boord van een vliegtuig te komen. Ook al is de irisscan een zeer betrouwbare methode om mensen te identificeren, toch is er een geringe kans op een foute identificatie.

Wat leer je?

- Hoe je met de kansdefinitie van Laplace kansen berekent.
- Wat het verschil is tussen theoretische kansen en empirische kansen.
- Hoe je het vaasmodel gebruikt bij het berekenen van kansen.
- Kansen berekenen met de productregel, de somregel en de complementregel.
- Het berekenen van voorwaardelijke kansen, ook met de regel van Bayes.



Kansrekening

3

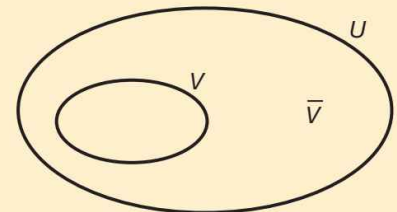


Voorkennis Verzamelingen en combinatoriek

Theorie A Het complement

Geldt voor de verzamelingen A en B dat de vereniging van de verzamelingen gelijk is aan de uitkomstenverzameling U en dat de doorsnede van A en B de lege verzameling is, dan is B het **complement** van A . Notatie $B = \bar{A}$. Ook is dan A het complement van B , dus $A = \bar{B}$.

Voor de verzameling V en de uitkomstenverzameling U geldt $\bar{V} = U \setminus V$. In het venndiagram hiernaast zie je dat $\#(V) + \#(\bar{V}) = \#(U)$. Hieruit volgt $\#(\bar{V}) = \#(U) - \#(V)$.



figuur 3.1 $V \cup \bar{V} = U \wedge V \cap \bar{V} = \emptyset$

Het complement van de verzameling V is de verzameling $\bar{V}$ waarvoor geldt $V \cup \bar{V} = U \wedge V \cap \bar{V} = \emptyset$.

- 1 Voor de verzamelingen A , B en C geldt $A \cup B \cup C = U$, $\#(A) = 18$, $\#(B) = 19$, $\#(C) = 20$, $\#(A \cap B) = 8$, $\#(A \cap C) = 5$, $\#(B \cap C) = 7$ en $\#(A \cap B \cap C) = 3$.

Bereken.

- | | | |
|------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| a $\#(U)$ | d $\#(\overline{A \cup B})$ | g $\#(\bar{A} \setminus (B \cap C))$ |
| b $\#(\bar{A})$ | e $\#(\overline{A \cap B})$ | h $\#(\overline{A \cap B})$ |
| c $\#(A \cup B)$ | f $\#(A \setminus (B \cap C))$ | i $\#(\bar{A} \cap \bar{B})$ |

Theorie B Combinatoriek

Je weet wat variaties, permutaties, herhalingsvariaties, combinaties en herhalingscombinaties zijn.

KIES k ELEMENTEN UIT EEN VERZAMELING VAN n ELEMENTEN			
		volgorde van belang?	
		ja	nee
herhalingen toegestaan?	nee	$N(\text{variaties}) = nPk = \frac{n!}{(n-k)!}$ $k = n$ geeft $N(\text{permutaties}) = n!$	$N(\text{combinaties}) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
	ja	$N(\text{herhalingsvariates}) = n^k$	$N(\text{herhalingscombinaties}) = \binom{n-1+k}{k}$

Maak je met de letters A, B, C, D, E en F codes van 2 of 3 letters, dan gebruik je de somregel voor de berekening van het aantal codes. Merk op dat bij een code de volgorde van belang is, immers de code AB is een andere code dan de code BA.

We onderscheiden de volgende situaties.

- Herhalingen zijn toegestaan.
Het aantal codes is $6^2 + 6^3 = 252$.
- Herhalingen zijn niet toegestaan.
Het aantal codes is $6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 = 150$.

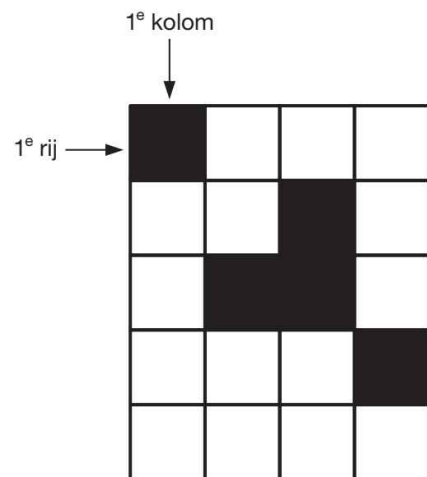
- 2** Daan gooit met twee dobbelstenen.
Hoeveel uitkomsten zijn er
- a met in totaal minstens 9 ogen
 - b met op elke dobbelsteen evenveel ogen
 - c waarbij het product van de ogen hoogstens 6 is
 - d waarbij de som van de ogen even is?
- 3** Een bedrijf maakt bij het coderen van zijn artikelen gebruik van de letters A, B, C, D en E. Hoeveel codes zijn er
- a van 3 letters als herhalingen zijn toegestaan
 - b van 4 letters als herhalingen niet zijn toegestaan
 - c van 2, 3 of 4 letters als herhalingen zijn toegestaan
 - d van hoogstens 3 letters als herhalingen niet zijn toegestaan
 - e van 5 letters die met AA beginnen als herhalingen zijn toegestaan
 - f van 5 letters die op DE eindigen als herhalingen niet zijn toegestaan?

- 4** Een bedrijf codeert zijn artikelen door in een rooster met 5 rijen en 4 kolommen de vakjes al dan niet zwart te maken. In figuur 3.2 zie je een van de ruim een miljoen mogelijke codes.

- a Bereken hoeveel codes er in totaal zijn.

Hoeveel codes zijn er

- b met aan de rand allemaal zwarte vakjes
- c met in elke rij één zwart vakje
- d met in elke kolom twee zwarte vakjes
- e met in de eerste kolom één zwart vakje, in de tweede kolom twee zwarte vakjes, in de derde kolom drie zwarte vakjes en in de vierde kolom vier zwarte vakjes
- f met in geen enkele rij vier zwarte vakjes?



figuur 3.2

- 5** Amber gooit met zeven dobbelstenen.
Hoeveel uitkomsten zijn er met
- a twee zessen en vijf enen
 - b geen enkele zes
 - c in totaal 41 ogen
 - d in totaal 40 ogen
 - e in totaal hoogstens 9 ogen?

3.1 Het kansbegrip

01 Bekijk bij het experiment ‘een worp met twee dobbelstenen’ de gebeurtenissen

A : de som van de ogen is 7 en

B : de som van de ogen is 9.

a Bereken $\#(A)$ en $\#(B)$.

b Welke van de gebeurtenissen A en B heeft de grootste kans?

Licht toe.

Theorie A De kansdefinitie van Laplace

Een worp met een dobbelsteen is een voorbeeld van een

kansexperiment. De uitkomstenverzameling is

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kenmerkend voor een kansexperiment is dat de uitkomst niet van tevoren vastligt.

Een worp met twee dobbelstenen is een voorbeeld van een

samengesteld kansexperiment.

In het rooster hiernaast zijn hiervan alle uitkomsten terug te vinden. De uitkomstenverzameling van dit kansexperiment is $U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

Er geldt $\#(U) = 36$.

Bij de gebeurtenis A : **som is 5** horen vier uitkomsten.

Bij de gebeurtenis B : **som is 10** horen drie uitkomsten.

De kans op gebeurtenis B is dus kleiner dan de kans op gebeurtenis A , want al deze uitkomsten zijn even waarschijnlijk.

	SOM					
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

figuur 3.3

In het dagelijks leven geeft men een kans meestal in procenten, bijvoorbeeld een kans van 50% of 70%.

In de kansrekening gebruikt men liever getallen van 0 tot en met 1.

Bij het experiment ‘een worp met twee dobbelstenen’ bereken je de kans op de gebeurtenis G : ‘de som van de ogen is 5’ als volgt.

In totaal zijn er 36 uitkomsten, die alle even waarschijnlijk zijn.

Bij de gebeurtenis G horen 4 uitkomsten.

De kans op de gebeurtenis G is gelijk aan $\frac{4}{36}$.

Notatie: $P(G) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Om de kans op een gebeurtenis G te berekenen, deel je het aantal elementen van G door het aantal elementen van U .

Je gebruikt dan de **kansdefinitie van Laplace**.

De letter P komt van ‘probabilitas’, het Latijnse woord voor kans.

De kansdefinitie van Laplace

Bij een kansexperiment met een eindig aantal even waarschijnlijke uitkomsten, is de kans op een gebeurtenis G gelijk aan

$$P(G) = \frac{\#(G)}{\#(U)}.$$

Om de kansdefinitie van Laplace toe te passen, is het belangrijk een goed overzicht te hebben van alle mogelijke uitkomsten. Het maken van een rooster kan daarbij van pas komen.

Bij het exact berekenen van een kans rond je niet af.

Voorbeeld

Willeke gooit met een gewone dobbelsteen en met een viervlaksdobbelsteen.

Met een viervlaksdobbelsteen kun je 1, 2, 3 of 4 gooien.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a A : ze gooit met beide stenen evenveel
- b B : de som is minstens 8
- c C : het product is hoogstens 4.

*Aanpak*

Maak een 4×6 rooster met de uitkomsten en geef hierin de uitkomsten van de gebeurtenissen aan.

Uitwerking

a $\#(U) = 6 \cdot 4 = 24$ en $\#(A) = 4$, dus $P(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

b $\#(B) = 6$, dus $P(B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

c $\#(C) = 8$, dus $P(C) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

			a b	b	b	
4	c					
3	c		a		b b	
2	c	a c			b	
1	a c	c	c			
	1	2	3	4	5	6

- a beide evenveel
- b som minstens 8
- c product hoogstens 4

R 2 Zie het voorbeeld.

- a U is de productverzameling van twee verzamelingen G_1 en G_2 .
Noteer de elementen van G_1 en van G_2 .
- b Noteer de elementen van A , van B en van C .

T 3 [►►7] Experiment: een worp met een rode en een groene dobbelsteen.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a A : de som van de ogen is meer dan 9
- b B : het aantal ogen op de rode dobbelsteen is één meer dan op de groene
- c C : het verschil van de ogen is 3
- d D : het product van de ogen is minstens 20.

- 4 Lieke gooit met twee viervlaksdobbelstenen.
- Noteer de elementen van de uitkomstenverzameling U .
 - Noteer de elementen die bij de gebeurtenis A : 'de som van de ogen is meer dan 5' horen en bereken exact $P(A)$.
 - Noteer de elementen die bij de gebeurtenis B : 'het product van de ogen is minder dan 5' horen en bereken exact $P(B)$.

- 5 Experiment: een worp met een rode en een groene dobbelsteen. Bereken exact de kans op de gebeurtenis
- A : de som van de ogen is meer dan 10
 - B : de som van de ogen is even
 - C : met beide dobbelstenen hetzelfde aantal ogen gooien
 - D : het aantal ogen op de rode dobbelsteen is hoger dan op de groene.

- 6 Experiment: het gooien met twee dobbelstenen. Bereken exact de kans op de gebeurtenis
- A : het verschil van de ogen is 2
 - B : het product van de ogen is 12
 - C : het product van de ogen is minder dan 30.

Het verschil van 5 en 3 is 2 en ook het verschil van 3 en 5 is 2.

- R 7** Harm laat de schijf in figuur 3.4 ronddraaien. Nadat de schijf is uitgedraaid wijst de pijl één sector aan. Harm zegt: "Er zijn vijf uitkomsten mogelijk, dus de kans dat de pijl 3 aanwijst is $\frac{1}{5}$."
- Wat is er mis met de redenering van Harm?
 - Geef de kans dat de pijl 3 aanwijst.



figuur 3.4

Geschiedenis Pierre Simon de Laplace

Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) werd geboren in een klein dorpje in Normandië, waar zijn vader een herenboer was. Tijdens zijn studie theologie raakte hij geïnteresseerd in de wiskunde. Vanaf 1789 hield hij zich voornamelijk bezig met de mechanica en de kansrekening. Zijn in 1812 verschenen monumentale werk 'Théorie analytique des probabilités' is een inleiding in de waarschijnlijkheidstheorie. Hierin wees hij erop dat voor het toepassen van zijn kansdefinitie $P(G) = \frac{\#(G)}{\#(U)}$ uitgegaan moet worden van even waarschijnlijke uitkomsten, zoals bij de zes uitkomsten van een dobbelsteen.



- A 8** Experiment: een worp met een octaëder en met een viervlaksdobbelsteen. Op de zijvlakken van de octaëder staan de cijfers 1 tot en met 8.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a A : de cijfers zijn gelijk
- b B : de som van de cijfers is 8
- c C : het product van de cijfers is minstens 16
- d D : het verschil van de cijfers is 1.

- D 9** Sophie gooit met een rode en een groene dobbelsteen. Per worp krijgt ze punten.

Gooit ze met de rode een even aantal ogen, dan is het aantal punten gelijk aan het aantal ogen van de rode dobbelsteen plus twee keer het aantal ogen van de groene dobbelsteen.

Gooit ze met de rode een oneven aantal ogen, dan is het aantal punten gelijk aan het aantal ogen van de rode dobbelsteen plus drie keer het aantal ogen van de groene dobbelsteen.

Bereken de kans dat in één worp

- a Sophie een even aantal punten krijgt
- b het aantal punten een drievoud is
- c Sophie meer dan 15 punten krijgt.

- D 10** Roos, Saar en Tess treden op bij een schoolfeest. Ze zingen achter elkaar ieder vier keer hetzelfde lied van drie regels. Het zingen van elk van de drie regels duurt even lang. Roos begint met zingen. Saar gaat zingen als Roos aan de tweede regel begint en Tess begint als Roos aan de derde regel begint. Hoe groot is de kans dat Roos, Saar en Tess op een willekeurig moment bij het optreden alle drie aan het zingen zijn?

Geschiedenis Christiaan Huygens

Christiaan Huygens (1629 - 1695) werd in Den Haag geboren als tweede zoon van de beroemde dichter en staatsman Constantijn Huygens. Hij groeide op in een vooraanstaand milieu en kreeg als kind onderwijs van privéleraren. Hij was in alles een uitblinker. Op negenjarige leeftijd sprak hij al Latijn. Grote aanleg had hij ook voor wiskunde en mechanica. In 1645 ging hij in Leiden rechten en wiskunde studeren.

Zijn eerste wiskundige publicaties gaan over berekeningen met betrekking tot kegelsneden, cirkels en raaklijnen aan grafieken. Het in 1657 verschenen werk 'Van rekeningh in spelen van geluck' gaat over de kansrekening. Huygens zet hierin uiteen, dat de uitkomsten van kansspelen weliswaar onzeker zijn, maar dat de kans op verlies of winst exact te bepalen is.



O11 Experiment: een worp met drie geldstukken.

De uitkomstenverzameling is $U = G \times G \times G$, waarbij $G = \{k, m\}$.

- Hoeveel elementen heeft U ?
- Noteer de elementen van U .

Theorie B Samengestelde kansexperimenten

Bij een worp met drie dobbelstenen heb je te maken met een **samengesteld kansexperiment**. De uitkomstenverzameling is $U = G \times G \times G$ met $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Het aantal elementen van U is dus $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Om de kans op de gebeurtenis A : 'de som van de ogen is 17' te berekenen, bedenk je dat $A = \{(6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6)\}$, dus $\#(A) = 3$.

$$\text{Zo krijg je } P(A) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}.$$

Het aantal elementen van een gebeurtenis bij een samengesteld kansexperiment krijg je bij

- twee kansexperimenten met een rooster
- drie of meer kansexperimenten met systematisch noteren en/of handig tellen.

Voorbeeld

Experiment: een worp met vijf geldstukken.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis drie of vier keer kop.

Uitwerking

$$\#(U) = 2^5 = 32$$

A : drie of vier keer kop

$$A = \{(k, k, k, m, m), (k, k, m, k, m), \dots\} \cup \{(k, k, k, k, m), (k, k, k, m, k), \dots\}$$

$$\#(A) = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 5 = 15$$

$$P(A) = \frac{15}{32}$$

Het aantal rijtjes met

- 3 k's en 2 m'en is

$$\binom{5}{3} = 10$$

- 4 k's en 1 m is $\binom{5}{4} = 5$.

T12 [►►15] Experiment: een worp met vier dobbelstenen.

- Bereken exact de kans dat de som van de ogen 22 is.
- Bereken exact de kans dat de som van de ogen minder dan 7 is.
- Toon aan dat $P(\text{het product van de ogen is } 4) = \frac{5}{648}$.

13 Experiment: het gooien met vier geldstukken.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a vier keer hetzelfde
- b één keer kop
- c meer dan één keer munt.

14 Experiment: een worp met drie dobbelstenen.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a de som van de ogen is 5
- b de som van de ogen is minder dan 7
- c hetzelfde aantal ogen.

A 15 Bereken exact de kans dat je met zes geldstukken

- a vijf keer kop gooit
- b drie keer munt gooit
- c minder dan drie keer kop gooit.

A 16 Experiment: een worp met vijf dobbelstenen.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a twee vijven en drie zessen
- b de som van de ogen is minder dan 8
- c drie enen, een twee en een vier
- d het product van de ogen is 12.

D 17 In een doos zitten 15 briefjes die genummerd zijn van 1 tot en met 15. Lisa pakt drie briefjes uit de doos.

Bereken exact de kans dat de som van de getallen op deze drie briefjes gelijk is aan 15.



Terugblik

Kansen berekenen

Volgens de kansdefinitie van Laplace geldt voor de kans op een gebeurtenis G

$$P(G) = \frac{\#(G)}{\#(U)}. \text{ Hierin is } U \text{ de uitkomstenverzameling.}$$

Je mag deze definitie alleen gebruiken als alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

Bij een verkeerslicht zijn de uitkomsten rood, oranje en groen niet even waarschijnlijk, want het verkeerslicht staat korter op oranje dan op rood of groen. Dus $P(\text{oranje})$ is niet gelijk aan $\frac{1}{3}$.

Bij een worp met een dobbelsteen is elk van de zes uitkomsten van de uitkomstenverzameling $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ even waarschijnlijk.

Is G de gebeurtenis 'meer dan vier ogen gooien', dan is $G = \{5, 6\}$ en dus is

$$P(G) = \frac{\#(G)}{\#(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Hiermee is de kans exact berekend. Bij een exact antwoord mag je niet benaderen.

Een rooster maken bij twee experimenten

Bij een worp met twee dobbelstenen, het gooien met twee geldstukken en bij het draaien van twee kanstolletjes krijg je een overzicht van alle mogelijke uitkomsten door een rooster te maken.

In het rooster hiernaast is af te lezen dat bij een worp met twee viervlaksdobbelstenen $P(\text{som is minstens } 5) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

4	*	*	*	*
3		*	*	*
2			*	*
1				*
	1	2	3	4

* som minstens 5

Samengestelde kansexperimenten bestaande uit meer dan twee experimenten

Heb je met meer dan twee experimenten te maken, dan bereken je kansen als volgt.

- Bereken het aantal elementen van de uitkomstenverzameling U .
- Bereken het aantal elementen van de gebeurtenis G door deze systematisch te noteren en/of handig te tellen.
- Deel $\#(G)$ door $\#(U)$.

Zo krijg je bij een worp met drie dobbelstenen en de gebeurtenis G : som van de ogen is 15

- $\#(U) = 6^3 = 216$
- $\#(G) = 10$, namelijk

$$\{(6, 6, 3), (6, 3, 6), (3, 6, 6)\}$$

$$\{(6, 5, 4), (6, 4, 5), (5, 6, 4), (5, 4, 6), (4, 5, 6), (4, 6, 5)\}$$

$$\{(5, 5, 5)\}$$

$$\begin{aligned} \binom{3}{1} &= 3 \text{ keer} \\ 3! &= 6 \text{ keer} \\ 1 &= 1 \text{ keer} \end{aligned}$$

- Dus $P(G) = \frac{3 + 6 + 1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

3.2 Empirische kansen

- O18** Margo gooit eerst 50 keer met een punaise, dan 100 keer, dan 150 keer, enzovoort. Bij elke serie telt ze hoe vaak de punt van de punaise omhoog ligt. Zie de tabel.

PUNT VAN PUNAISE OMHOOG

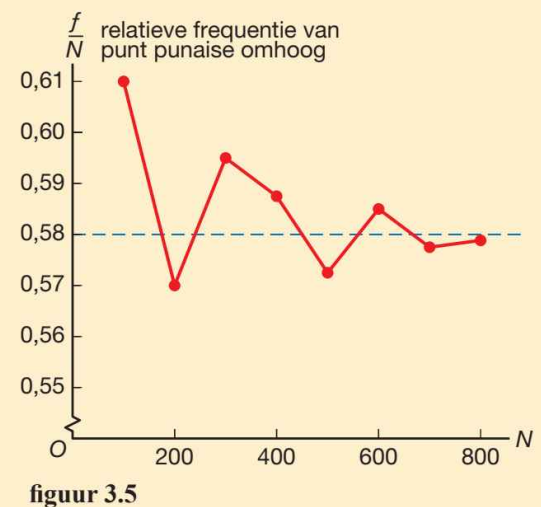
aantal keer gooien N	50	100	150	200	250	300	500	1000
frequentie f	31	61	89	114	141	174	282	579
relatieve frequentie $\frac{f}{N}$	0,62							

- Vul de tabel verder in. Rond af op twee decimalen.
- Geef een schatting van $P(\text{punt van punaise ligt omhoog})$.
- Volgens Bart zijn er twee mogelijkheden bij het gooien met een punaise: de punt ligt omhoog of de punt ligt niet omhoog. Daarom is volgens Bart $P(\text{punt van punaise ligt omhoog}) = \frac{1}{2}$. Geef commentaar.



Theorie A Empirische en theoretische kansen

Bij het opgooien van een punaise bekijken we de uitkomsten 'punt omhoog' en 'punt niet omhoog'. Deze uitkomsten zijn niet even waarschijnlijk. Je kunt de kans op de gebeurtenis G : 'punt omhoog' schatten door het experiment een groot aantal keren uit te voeren en de **relatieve frequentie** van G te berekenen. De relatieve frequentie bereken je door de frequentie van de gebeurtenis te delen door de **totale frequentie**. De ervaring leert dat deze relatieve frequentie een goede schatting geeft van de kans als je het experiment heel vaak uitvoert. Dit is een gevolg van de **empirische wet van de grote aantallen**.



Empirische wet van de grote aantallen

Door een kansexperiment heel vaak uit te voeren, komt de relatieve frequentie van een gebeurtenis dicht bij de kans op die gebeurtenis te liggen.

Bij de punaise volgt uit de empirische wet van de grote aantallen dat $P(\text{punt omhoog}) \approx 0,58$.

Er zijn ook kansen die je kunt schatten met behulp van statistische gegevens. Wil je de kans weten dat bij een geboorte in Nederland een meisje ter wereld komt, dan gebruik je bijvoorbeeld gegevens van het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek).

In 2012 werden er in Nederland 175 457 kinderen geboren, waarvan 85 707 meisjes. De kans op een meisje is dus $\frac{85\,707}{175\,457} \approx 0,488$.

Je schat hier de kans op grond van gegevens uit het verleden.

Je gaat er hierbij vanuit dat de gegevens van 2012 ook voor de komende jaren een goed beeld van de werkelijkheid geven.

$P(\text{meisje bij geboorte})$ en $P(\text{punaise met punt omhoog})$ zijn voorbeelden van **empirische kansen**. Empirisch betekent ‘op ervaring gegrond’. Empirische kansen krijg je door een groot aantal waarnemingen te gebruiken.

Empirische kansen bereken je met relatieve frequenties.

Bij veel kansexperimenten kun je van tevoren zeggen wat de kans op een gebeurtenis is. Zo is $P(\text{meer dan 4 ogen})$ bij een worp met een dobbelsteen gelijk aan $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Je gebruikt hierbij de kansdefinitie van Laplace.

Zulke kansen heten **theoretische kansen**, ook wel **a priori** (vooraf) **kansen** genoemd.

Een derde soort kans is de **subjectieve kans**. Wat is bijvoorbeeld de kans dat het wereldrecord verspringen vóór het jaar 2020 boven de 9,20 meter ligt? Iedereen kan daar zijn eigen mening over hebben, maar het is onmogelijk deze kans te berekenen.

Bij theoretische kansen ga je er vanuit dat kansexperimenten eerlijk verlopen. Dat houdt bijvoorbeeld in dat de gebruikte dobbelsteen zuiver is. Maar een perfecte dobbelsteen bestaat niet. Je werkt dus met een wiskundig model.

Voorbeeld

Zie de tabel.

BEVOLKINGSOPBOUW VAN AMSTERDAM IN 2012

leeftijd	0 - 19	20 - 34	35 - 49	50 - 64	65+	totaal
aantal	161 687	216 791	184 959	137 025	89 582	790 044

Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat in 2012 een willekeurig gekozen inwoner van Amsterdam

a 35 jaar of ouder was

b jonger dan 20 of 65-plusser was.

Uitwerking

$$\mathbf{a} \quad P(35 \text{ jaar of ouder}) = \frac{184\,959 + 137\,025 + 89\,582}{790\,044} \approx 0,521$$

$$\mathbf{b} \quad P(\text{jonger dan 20 of 65+}) = \frac{161\,687 + 89\,582}{790\,044} \approx 0,318$$

- 19** Hemelvaartsdag valt altijd op een donderdag, tien dagen voor Pinksteren. De vroegste datum waarop Hemelvaartsdag kan vallen is 30 april en de laatst mogelijke datum is 3 juni.

Het weer op Hemelvaartsdag kan erg uiteenlopen. De hoogste maximumtemperatuur is gemeten op 27 mei 1954. Het werd toen maar liefst $29,2^{\circ}\text{C}$. De laagste maximumtemperatuur was op 13 mei 2010. De temperatuur kwam toen niet hoger dan $9,2^{\circ}\text{C}$. Ook de neerslaghoeveelheden variëren sterk, evenals het aantal uren zonneshijn. In de tabel zie je gegevens over het weer op Hemelvaartsdag in de periode van 1910 tot en met 2012. De gegevens zijn afkomstig van het KNMI in De Bilt. Je leest af dat er 31 Hemelvaartsdagen waren met een maximumtemperatuur van minstens 20°C .

HET WEER OP HEMELVAARTSDAG

max. temperatuur	freq.	neerslag	freq.	uren zon	freq.
lager dan 10°C	2	$0 - < 0,1 \text{ mm}$	46	$0 - < 1$	17
$10 - < 15^{\circ}\text{C}$	31	$0,1 - < 1,0 \text{ mm}$	15	$1 - < 5$	30
$15 - < 20^{\circ}\text{C}$	39	$1,0 \text{ mm} - < 5,0 \text{ mm}$	24	$5 - < 10$	34
20°C of hoger	31	$5,0 \text{ mm}$ of meer	18	10 of meer	22
	103		103		103

Neem aan dat deze gegevens ook gelden voor een willekeurige Hemelvaartsdag in de toekomst. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat op een Hemelvaartsdag

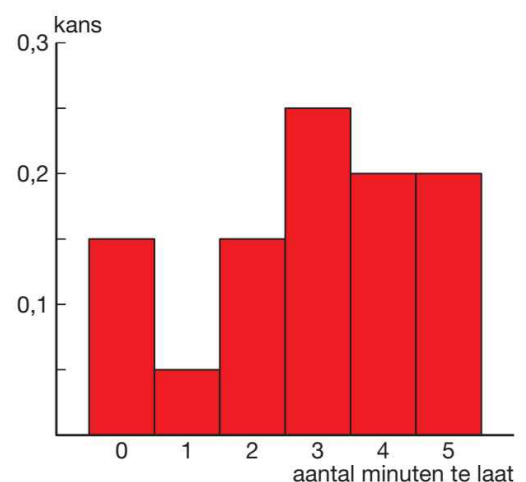
- de maximumtemperatuur minstens 15°C is
- minder dan $5,0 \text{ mm}$ regen valt
- de zon minstens één uur schijnt.



- 20** Matthijs gaat elke dag met de trein naar school. Een maand lang heeft hij bijgehouden hoeveel minuten de trein te laat aankwam. De gegevens heeft hij verwerkt in het **kanshistogram** van figuur 3.6.

Gebruik dit kanshistogram om de kans te berekenen dat de trein op een willekeurige dag

- meer dan drie minuten te laat aankomt
- minstens twee, maar niet meer dan vier minuten te laat aankomt
- minder dan twee minuten te laat aankomt.



figuur 3.6

R 21 In welke van de volgende situaties gaat het om theoretische kansen en in welke om empirische kansen?

De kans dat

- a een Nederlander linkshandig is
- b Annemiek bij een loterij een prijs wint
- c een trein te laat vertrekt uit Zutphen
- d je bij een worp met drie dobbelstenen in totaal negen ogen gooit
- e een Nederlander bloedgroep A heeft.

3

O 22 Het CBS heeft een onderzoek gedaan naar korte vakanties van Nederlanders in het buitenland. In de kruistabel staan de aantallen in duizendtallen.

KORTE VAKANTIES VAN NEDERLANDERS IN HET BUITENLAND ($\times 1000$)

	België	Frankrijk	Duitsland	overig	totaal
georganiseerd	699	365	813	756	2633
niet-georganiseerd	411	135	437	84	1067
	1110	500	1250	840	3700

- a Toon aan dat de kans dat een georganiseerde reis naar België ging, ongeveer gelijk is aan 0,265.
- b Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat een niet-georganiseerde reis naar België ging.
- c Volgens een onderzoeker was België bij de niet-georganiseerde reizen een populairdere bestemming dan bij de georganiseerde reizen. Hoe komt de onderzoeker tot deze conclusie?



Theorie B Voorwaardelijke empirische kansen

Aan 96 volwassen Nederlanders is gevraagd wat ze vinden van het verhogen van de pensioengerechtigde leeftijd van 65 naar 67 jaar. In de kruistabel zijn de antwoorden verwerkt, waarbij onderscheid is gemaakt naar leeftijd.

VERHOGING PENSIOENGERECHTIGDE LEEFTIJD

	voor	tegen	geen mening	
jongeren	7	14	3	24
dertigers	11	18	5	34
veertigplussers	5	25	8	38
	23	57	16	96

Uitgaande van deze tabel zijn heel wat kansberekeningen te maken.

Zo is

- $P(\text{ondervraagde is dertiger}) = \frac{34}{96} \approx 0,354$
- $P(\text{ondervraagde is voor verhoging}) = \frac{23}{96} \approx 0,240.$

Maar niet altijd moet je delen door de totale frequentie 96 van de gehele groep. Soms is de vraagstelling zo, dat je moet kiezen uit een *beperkte groep*. Beperk je je tot de dertigers, dan deel je door 34.

Dus $P(\text{ondervraagde die dertiger is, is voor verhoging}) = \frac{11}{34} \approx 0,324.$

Het gaat hier om de kans dat een ondervraagde voor verhoging is *onder de voorwaarde* dat hij een dertiger is.

Zo'n kans, waarbij je je tot een deelgroep beperkt, heet een **voorwaardelijke kans**. Je kunt deze voorwaardelijke kans ook noteren als $P(\text{voor verhoging} \mid \text{dertiger})$. Je spreekt dit uit als de kans op 'voor verhoging' onder de voorwaarde 'dertiger'. Neem je voor de gebeurtenis 'voor verhoging' de letter A en voor de gebeurtenis 'dertiger' de letter B , dan krijg je $P(A \mid B)$.

$$\text{Je ziet } P(A \mid B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}.$$

De voorwaardelijke kans $P(A \mid B)$ is de kans op A onder de

voorwaarde B . Er geldt $P(A \mid B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$.

Tot nu toe werd in de opgaven vermeld in hoeveel decimalen nauwkeurig je de gevraagde kansen moest geven. Om te voorkomen dat we dit in elke opgave moeten herhalen, maken we hierover een afspraak.

Hoeveel procent van de dertigers is voor verhoging? Antwoord:

$$\frac{11}{34} \times 100\% \approx 32,4\%.$$

Staat er niets vermeld, dan geef je de kans in drie decimalen nauwkeurig. Een uitzondering is als de kans door afronden op drie decimalen 0,000 of 1,000 wordt. Zo is bijvoorbeeld de kans om in de Staatsloterij de jackpot te winnen, ongeveer gelijk aan 0,000 000 16. In dit geval geven we de kans in zeven of acht decimalen nauwkeurig, omdat 0,000 geen zinnig antwoord is.

Afspraak

Bereken kansen in drie decimalen nauwkeurig, tenzij

- anders vermeld
- de kans door afronden op drie decimalen 0,000 of 1,000 wordt.

Voorbeeld

Hiernaast zie je nog eens de tabel van het onderzoek naar de verhoging van de pensioengerechtigde leeftijd. Bereken de kans dat een willekeurig gekozen ondervraagde

VERHOGING PENSIOENGERECHTIGDE LEEFTIJD

	voor	tegen	geen mening	
jongeren	7	14	3	24
dertigers	11	18	5	34
veertigplussers	5	25	8	38
	23	57	16	96

- a veertigplusser is
 b die veertigplusser is, voor verhoging is
 c die voor verhoging is, veertigplusser is
 d veertigplusser is en voor verhoging is.

Uitwerking

a $P(\text{veertigplusser}) = \frac{38}{96} \approx 0,396$

b $P(\text{voor verhoging} \mid \text{veertigplusser}) = \frac{5}{38} \approx 0,132$

c $P(\text{veertigplusser} \mid \text{voor verhoging}) = \frac{5}{23} \approx 0,217$

d $P(\text{veertigplusser en voor verhoging}) = \frac{5}{96} \approx 0,052$

Bij **EN** deel je het aantal dat aan twee kenmerken voldoet door de frequentie van de hele groep.

Dat je met een voorwaardelijke kans te maken hebt, kun je in de omschrijving van de gevraagde kans zien aan de bijzin die met het woord die begint.

Maar ook zonder het woord *die* te gebruiken, is een beperkte groep aan te duiden. Zo kun je in plaats van

$P(\text{een ondervraagde die veertigplusser is, is voor verhoging})$
 ook noteren

$P(\text{veertigplusser is voor verhoging}).$

- 23** De gemeenteraad van Vierhouten wil weten hoeveel auto's dagelijks het kruispunt in het centrum passeren. Op een dinsdag in mei is niet alleen geteld hoeveel auto's het kruispunt passeerden, maar ook uit welke richting ze kwamen en in welke richting ze hun weg vervolgden. De resultaten staan in de kruistabel.

		van				
		N	O	Z	W	
naar	N	0	877	51	408	1336
	O	1053	1	234	1682	2970
	Z	53	154	0	491	698
	W	982	1711	830	0	3523
		2088	2743	1115	2581	8527

Bereken de kans dat een willekeurig gekozen auto

- a uit het westen kwam
- b verder ging naar het oosten
- c die uit het noorden kwam, verder ging naar het westen
- d rechtdoor ging
- e linksaf sloeg
- f die uit het westen kwam, verder ging naar het noorden.

Op een andere dinsdag in mei passeerden 7520 auto's het kruispunt.

- g Hoeveel auto's daarvan, verwacht je, kwamen uit het westen?

- 24** In 1985 werden in Nederland 496 000 nieuwe personenauto's verkocht. In de tabel zie je dat er van deze auto's 169 000 minstens 15 jaar meegaan en 32 000 minstens 20 jaar. Dus de kans dat een in 1985 verkochte auto die 15 jaar meegaat, ook 20 jaar meegaat, is $\frac{32}{169} \approx 0,189$.

LEVENSDUUR VAN IN 1985 VERKOCHTE NIEUWE AUTO'S

leeftijd in jaren	0	15	16	17	18	19	20
aantal $\times 1000$	496	169	118	82	59	42	32

Bereken de kans dat een in 1985 verkochte auto

- a minstens 17 jaar meegaat
- b 17 jaar meegaat, maar geen 18 jaar
- c die 15 jaar meegaat, ook 18 jaar meegaat
- d van 19 jaar binnen een jaar van de weg verdwijnt
- e die al 16 jaar meegaat, binnen drie jaar van de weg verdwijnt.

A 25 Hiernaast zie je een sterftetabel van de Nederlandse bevolking. Er is uitgegaan van 1 000 000 baby's.

Je ziet dat van de 1 000 000 baby's er 983 378 de leeftijd van 30 jaar halen.

Bereken de kans dat

- a** een dertigjarige zijn zestigste verjaardag haalt
- b** een dertigjarige voor zijn veertigste sterft
- c** een tachtigjarige minstens 95 jaar wordt
- d** een pasgeboren baby voor zijn dertigste sterft
- e** een zestigjarige wel zijn zeventigste, maar niet zijn tachtigste verjaardag viert.

leeftijd	levenden
30	983 378
35	976 843
40	967 252
45	952 699
50	930 601
55	896 701
60	845 134
65	768 465
70	659 273
75	514 596
80	344 752
85	180 300
90	63 017
95	11 472
100	726

R 26 Bij een onderzoek zijn van 83 treinpassegeers enkele reisgegevens genoteerd.

	afgelegde afstand in km				
	0 – < 20	20 – < 40	40 – < 60	60 of meer	
met voordeelurenabonnement	6	9	12	10	37
zonder voordeelurenabonnement	8	11	12	15	46
	14	20	24	25	83

Bij de tabel is een aantal kansen berekend. De antwoorden staan hieronder. Bedenk bij elk van deze kansen een passende gebeurtenis. Noteer je antwoord in de vorm $P(\dots)$.

a $\frac{14}{83}$

b $\frac{9}{20}$

c $\frac{11}{46}$

Theorie C Zelf een kruistabel maken

In het voorbeeld op de volgende bladzijde zie je hoe je gegevens in een kruistabel verwerkt en deze tabel vervolgens gebruikt bij het berekenen van kansen.

Na het invullen van de gegevens ontstaat de volgende kruistabel.

	man	vrouw	
kleurenblind	40		49
niet kleurenblind			
	527	473	1000

Vervolgens is het mogelijk de tabel verder in te vullen en de gevraagde kansen te berekenen.

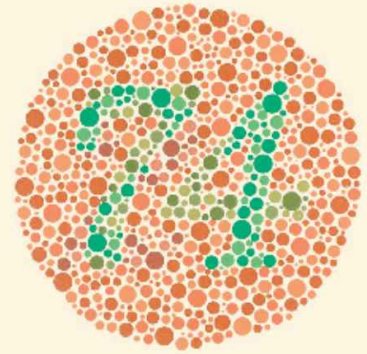
Voorbeeld

Bij een onderzoek naar kleurenblindheid onder 527 mannen en 473 vrouwen blijken 49 personen kleurenblind te zijn.

Van de mannen is 7,6% kleurenblind.

Bereken de kans dat een bij het onderzoek betrokken persoon

- een kleurenblinde man is
- van het vrouwelijk geslacht kleurenblind is
- die kleurenblind is, een man is.



7,6% van 527 is
 $0,076 \cdot 527 = 40$

Aanpak

Er is gekeken naar twee kenmerken, namelijk 'man of vrouw' en 'al dan niet kleurenblind'. Maak daarom een kruistabel.

Uitwerking

- $P(\text{kleurenblinde man}) = \frac{40}{1000} = 0,04$
- $P(\text{kleurenblind} \mid \text{vrouw}) = \frac{9}{473} \approx 0,019$
- $P(\text{man} \mid \text{kleurenblind}) = \frac{40}{49} \approx 0,816$

	man	vrouw	
kleurenblind	40	9	49
niet kleurenblind	487	464	951
	527	473	1000

- 27** Aan een onderzoek naar de betrouwbaarheid van een irisscanner doen 1200 personen mee. Aan de hand van de irisscan wordt bepaald of een persoon al dan niet toestemming krijgt een ruimte te betreden. Van deze groep zijn de gegevens van 800 personen zo geprogrammeerd, dat ze gerechtigd zijn de ruimte te betreden, de andere 400 personen zijn daartoe niet gerechtigd.

Van de personen die de ruimte mogen betreden, wordt 1,5% de toestemming ten onrechte geweigerd. En van de personen die de ruimte niet mogen betreden, wordt 2,5% toch toegelaten.

Uit de groep van 1200 personen wordt willekeurig één persoon gekozen. Deze persoon blijkt niet toegelaten te zijn.

Bereken de kans dat deze persoon ten onrechte geweigerd is.

Informatief Biometrie

Biometrie betekent het vaststellen van meetbare lichaamskenmerken. Sinds de jaren 90 van de vorige eeuw is er een verschuiving in betekenis in de richting van een identificatiemethode op grond van unieke lichaamskenmerken. In eerste instantie werd biometrie voornamelijk gebruikt voor misdaadbestrijding, aanvankelijk via vingerafdrukken en later met het DNA-profiel. Maar biometrie is ook toepasbaar bij beveiliging, bijvoorbeeld bij iriscopie en spraakherkenning, die een vrijwel foutloze identificatie geven, eventueel samen met pasjes, codes en wachtwoorden.



- 28** Bij kabelexploitant PCU werken Alec, Bram en Cas op de afdeling klantenservice. Van de 1500 vragen die in een week zijn binnengekomen, heeft Alec 40% behandeld, Bram 50% en Cas 10%. De ervaring leert dat Alec 5% van de vragen niet kan beantwoorden. Bij Bram is dat 8% en bij Cas 2%.

Bereken de kans dat een willekeurig binnengekomen vraag

- a beantwoord is
- b die beantwoord is, door Alec is behandeld
- c die niet beantwoord is, door Cas is behandeld.

3

- A 29** Een onderzoeksbureau ondervraagt 4157 personen die vorige maand een auto hebben aangeschaft. Van hen hebben er 2895 een tweedehands auto gekocht: 64,0% een Europese auto en 8,3% een Amerikaanse. Van de personen die een nieuwe auto kochten, schafte 72,3% een Europese auto aan en bleek 15,6% een andere (dus niet-Europese en niet-Amerikaanse) auto gekocht te hebben.

Bereken de kans dat een bij dit onderzoek betrokken persoon

- a een nieuwe Europese auto kocht
- b die een Europese auto aanschafte, een nieuwe auto kocht
- c die een Amerikaanse auto aanschafte, een tweedehands auto kocht.

- D 30** Bij het opsporen van hoofd- en halskanker gebruikt men een ‘elektronische neus’ (nano artificial nose, kortweg NA-nose). Dit is een methode om de adem te onderzoeken. Omdat deze techniek nog in de kinderschoenen staat, zijn de resultaten echter niet betrouwbaar genoeg.

Van de mensen die kanker hebben wordt met deze methode 82% opgespoord. Bij 16% van de mensen die geen kanker hebben, geeft deze test toch een positieve uitslag. Dit wil zeggen dat het testresultaat de aanwezigheid van kanker aangeeft.

Neem aan dat er 2500 personen worden onderzocht met de NA-nose-methode en dat van deze 2500 personen 350 kanker hebben.

- a Bereken de kans dat iemand die positief reageert op de test inderdaad kanker heeft.

Men hoopt in de toekomst betere resultaten te boeken met deze methode. De in vraag a berekende kans moet voor een verantwoord gebruik van de test minstens 95% zijn. Neem aan dat het genoemde percentage van 82% kan worden opgehoogd naar 90%.

- b Bereken in één decimaal nauwkeurig wat het genoemde percentage van 16% moet worden, opdat de kans dat iemand die positief reageert op de test inderdaad kanker blijkt te hebben 95% is. Neem aan dat 14% van de onderzochte personen kanker heeft.

O31

Op een school zitten 970 leerlingen.
 Er zijn 520 leerlingen met een lengte van meer dan 170 cm.
 Er zijn 388 leerlingen met blond haar.
 Er zijn 208 leerlingen met blond haar die een lengte hebben van meer dan 170 cm.
 A: leerling heeft een lengte van meer dan 170 cm.
 B: leerling heeft blond haar.
 Bereken $P(A)$ en $P(A|B)$.



3

Theorie D Onafhankelijke gebeurtenissen

De tabel hieronder geeft informatie over een groep van 60 leerlingen.

	blauwe ogen	niet blauwe ogen	
jongen	15	5	20
meisje	30	10	40
	45	15	60

De kans dat een willekeurig gekozen leerling uit deze groep blauwe ogen heeft, is gelijk aan $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

Er is bij deze tabel iets bijzonders aan de hand.

Immers ook $P(\text{jongen heeft blauwe ogen}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ en

$P(\text{meisje heeft blauwe ogen}) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$.

Je kunt zeggen dat het geslacht geen enkele invloed heeft op het al dan niet blauwe ogen hebben. We noemen daarom de gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling heeft blauwe ogen' **onafhankelijk**. Ook de gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling heeft blauwe ogen' zijn onafhankelijk. Merk op dat $P(\text{leerling heeft blauwe ogen} | \text{leerling is jongen}) = P(\text{leerling heeft blauwe ogen})$.

Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten **afhankelijk**.

I en II zijn beweringen.

$I \Rightarrow II$ betekent
als I dan II.

$I \Leftrightarrow II$ betekent
I en II zijn
gelijkwaardig, ofwel
 $I \Rightarrow II$ en $II \Rightarrow I$.

■ **A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.**

Voorbeeld

Van een groep van 200 personen blijkt iedereen bloedgroep AB of bloedgroep 0 te hebben. Van elk van deze personen is de resusfactor bekend.

	bloedgroep		totaal
	AB	0	
Rh ⁺	15	155	170
Rh ⁻	5	25	30
totaal	20	180	200

Toon aan dat de gebeurtenissen ‘bloedgroep AB’ en ‘resusfactor positief’ afhankelijk zijn.

Aanpak

Toon aan dat $P(\text{bloedgroep AB} \mid \text{Rh}^+)$ niet gelijk is aan $P(\text{bloedgroep AB})$.

Je mag ook aantonen dat $P(\text{Rh}^+ \mid \text{AB})$ niet gelijk is aan $P(\text{Rh}^+)$.

Uitwerking

$$\left. \begin{aligned} P(\text{bloedgroep AB}) &= \frac{20}{200} = 0,1 \\ P(\text{bloedgroep AB} \mid \text{Rh}^+) &= \frac{15}{170} \approx 0,088 \end{aligned} \right\} 0,1 \neq 0,088$$

De gebeurtenissen ‘bloedgroep AB’ en ‘Rh⁺’ zijn dus afhankelijk.

- 32** Van een groep van 2000 aboriginals heeft iedereen bloedgroep 0 of bloedgroep A. Van elk van deze personen is ook de resusfactor bekend. Zie de tabel hiernaast. Toon aan dat het hebben van bloedgroep 0 en het hebben van een positieve resusfactor afhankelijke gebeurtenissen zijn.

	bloedgroep		totaal
	0	A	
Rh ⁺	1250	450	1700
Rh ⁻	250	50	300
totaal	1500	500	2000

- A 33** Van de 200 werknemers van de firma G&R is het bloed onderzocht: 60 personen blijken bloedgroep A te hebben en 170 hebben een positieve resusfactor. De gebeurtenissen ‘bezit bloedgroep A’ en ‘de resusfactor is positief’ zijn onafhankelijk.
- Maak bij de gegevens een kruistabel.
 - Bereken de kans dat een werknemer van G&R bloedgroep A heeft en een negatieve resusfactor.
 - Bereken de kans dat een werknemer met positieve resusfactor bloedgroep A heeft.

Terugblik

Empirische kansen

Een empirische kans is gebaseerd op een aantal waarnemingen. Je schat een empirische kans met de relatieve frequentie, dat is $\frac{\text{frequentie gebeurtenis}}{\text{totale frequentie}}$.

Je kunt een relatieve frequentie berekenen door

- een kansexperiment een groot aantal keer uit te voeren
- gebruik te maken van statistische gegevens.

Uit de empirische wet van de grote aantallen volgt dat de relatieve frequentie een goede schatting van de kans geeft als je het experiment heel vaak uitvoert.

Voorwaardelijke empirische kansen

Let bij kansberekeningen die bij een tabel horen goed op of je met de totale groep te maken hebt of met een deelgroep. Bij een deelgroep heb je te maken met een voorwaardelijke kans.

De kans op de gebeurtenis A onder de voorwaarde B is de voorwaardelijke kans $P(A|B)$.

Je berekent deze kans met $P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$.

Zo is bij de tabel hiernaast

$$P(\text{leerling van 15 jaar is een jongen}) = P(\text{jongen} | 15 \text{ jaar}) = \frac{9}{14} \approx 0,643.$$

	leeftijd				
	14	15	16	17	
jongen	2	9	0	1	12
meisje	6	5	6	1	18
	8	14	6	2	30

Zelf een kruistabel maken

Heb je bij onderzoeksresultaten te maken met twee kenmerken, dan is het verstandig de gegevens in een kruistabel te verwerken.

Bij een screening van 55- tot 75-jarigen zijn 870 mensen onderzocht op darmkanker. Bij 28 van de 53 onderzochten met een positieve uitslag werd inderdaad een afwijking geconstateerd.

Van de onderzochten met een negatieve uitslag bleken bij nader onderzoek 810 inderdaad geen afwijking te hebben.

Om de kans te berekenen dat een persoon met een negatieve uitslag inderdaad geen afwijking heeft, maak je de kruistabel hiernaast.

Je ziet dat deze kans gelijk is aan $\frac{810}{817} \approx 0,991$.

		uitslag		
		neg	pos	
afwijking	ja	7	28	35
	nee	810	25	835
		817	53	870

Onafhankelijke gebeurtenissen

De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk betekent dat $P(A|B) = P(A)$.

Bij de tabel hiernaast kun je als volgt aantonen dat A en B onafhankelijk zijn.

$$P(A|B) = \frac{48}{80} = \frac{3}{5} \text{ en } P(A) = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}, \text{ dus } P(A|B) = P(A).$$

Ook is bijvoorbeeld $P(B|A) = P(B)$ en $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A})$.

Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten afhankelijk.

	A	$\bar{A}$	
B	48	32	80
$\bar{B}$	24	16	40
	72	48	120

3.3 Het vaasmodel en de productregel

34 Uit een groep van tien leerlingen wordt door loting een afvaardiging van drie personen aangewezen.

- Volgens Eva zijn er $10 \cdot 10 \cdot 10$ drietallen mogelijk.
Welke fout maakt Eva?
- Volgens Wilco zijn er $10 \cdot 9 \cdot 8$ drietallen mogelijk.
Welke fout maakt Wilco?
- Hoeveel drietallen zijn er volgens jou?

Theorie A Kansen en combinaties

Bij het kiezen van een afvaardiging in opgave 34 is de volgorde niet van belang en zijn herhalingen niet toegestaan. Daarom heb je te maken met combinaties.

Het aantal combinaties van 3 uit 10 is $\binom{10}{3} = 120$.

Ook bij het pakken van knikkers uit een vaas heb je met combinaties te maken.

In een vaas zitten acht rode, vier witte en drie blauwe knikkers. We vragen ons af wat de kans is dat je bij het pakken van vijf knikkers twee rode, twee witte en een blauwe knikker pakt.

Om deze kans te berekenen gebruiken we de kansdefinitie van Laplace.

- Het aantal elementen in de uitkomstenverzameling U is het aantal manieren om vijf knikkers uit de totaal $8 + 4 + 3 = 15$ knikkers te pakken.

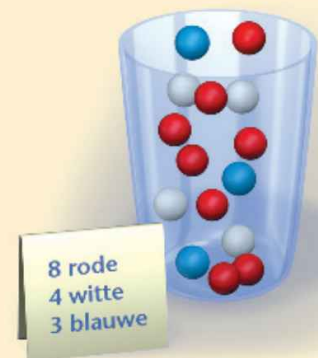
$$\text{Dus } \#(U) = \binom{15}{5}.$$

- Het aantal uitkomsten bij de gebeurtenis G : ‘twee rode uit de acht rode pakken en twee witte uit de vier witte pakken en één blauwe uit de drie blauwe pakken’ is

$$\#(G) = \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}.$$

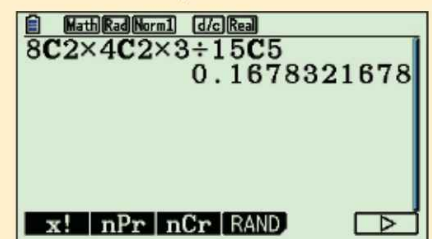
- De gevraagde kans is dus

$$P(2 \text{ rode, } 2 \text{ witte en } 1 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{15}{5}} \approx 0,168.$$



figuur 3.7

Je weet $\binom{3}{1} = 3$, dus
tik niet te veel in.



Voorbeeld

In een vaas zitten acht rode, vier witte en drie blauwe knikkers.

Experiment: pak vijf knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op de gebeurtenis

- a één rode, twee witte en twee blauwe knikkers
- b geen rode knikkers
- c drie rode knikkers.

Aanpak

$$\#(U) = \binom{15}{5}$$

- a A : één rode uit de acht rode én twee witte uit de vier witte én

twee blauwe uit de drie blauwe, dus $\#(A) = \binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}$.

- b B : vijf knikkers uit de $4 + 3 = 7$ niet-rode pakken, dus $\#(B) = \binom{7}{5}$.

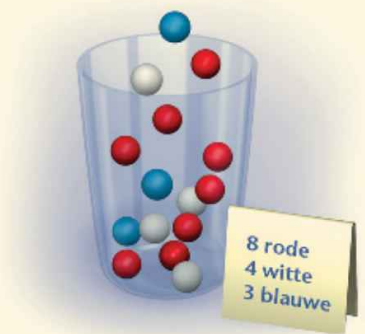
- c C : drie rode uit de acht rode én dus twee niet-rode uit de zeven niet-rode pakken, dus $\#(C) = \binom{8}{3} \cdot \binom{7}{2}$.

Uitwerking

$$\text{a } P(1 \text{ rode, } 2 \text{ witte en } 2 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{15}{5}} \approx 0,048$$

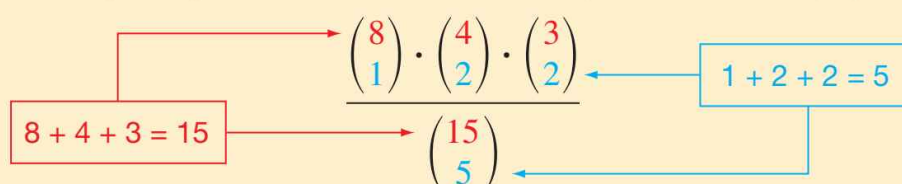
$$\text{b } P(\text{geen rode}) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{15}{5}} \approx 0,007$$

$$\text{c } P(3 \text{ rode}) = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{15}{5}} \approx 0,392$$



figuur 3.8

Merk bij vraag a van het voorbeeld de volgende samenhang op.



R 35 De samenhang onderaan de vorige bladzijde lijkt bij vraag b van het voorbeeld te ontbreken.

Noteer de kans van vraag b zo, dat ook hier dit verband zichtbaar wordt.

36 In een vaas zitten zeven rode, acht witte en zes groene knikkers.

Experiment: pak drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op de gebeurtenis

- a drie rode knikkers
- b geen groene knikkers
- c twee rode knikkers en één witte
- d twee witte knikkers.

A 37 In een vaas zitten 18 rode, 12 blauwe en 32 witte knikkers.

Experiment: pak zes knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op de gebeurtenis

- a drie witte en drie blauwe knikkers
- b geen witte knikkers
- c vier witte knikkers
- d één rode knikker.

Theorie B Het vaasmodel toepassen

Bij veel kansberekeningen kan het handig zijn het kansexperiment om te zetten in het pakken van knikkers uit een geschikt samengestelde vaas. Je maakt dan een **vaasmodel** bij het probleem. Zie het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

Bij een loterij zijn 50 loten verkocht. Er is één hoofdprijs en er zijn vier tweede prijzen. Yvette heeft vier loten gekocht.

Bereken de kans dat zij de hoofdprijs en één tweede prijs wint.

Aanpak

Maak een vaasmodel: vaas met 50 knikkers, waarvan één rood (de hoofdprijs), vier wit (de tweede prijzen) en 45 zwart (de nieten). Pak er vier uit en bereken $P(\text{één rode en één witte en twee zwarte knikkers})$.

Uitwerking

$$P(\text{de hoofdprijs en één tweede prijs}) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{50}{4}} \approx 0,017$$

T 38**[▶▶41]** Klaverjassen is een kaartspel met 32 kaarten.

Er zijn vier soorten kaarten: klaveren (zwart), schoppen (zwart), harten (rood) en ruiten (rood). Van elke soort wordt gespeeld met de 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer en aas. We trekken acht kaarten uit het spel.

Bereken de kans op

- a vier rode en vier zwarte kaarten
- b vier azen
- c geen enkele schoppenkaart
- d van klaveren de 7, 8, 9 en 10 en verder geen klaveren.

**3****39**

Bij een loterij zijn 60 loten verkocht. Er is één hoofdprijs en er zijn vijf tweede prijzen. Dennis heeft vijf loten gekocht.

- a Bij deze situatie hoort een vaasmodel.
Hoe is de vaas samengesteld? Hoeveel knikkers pakt Dennis uit de vaas?

Bereken de kans dat Dennis

- b twee tweede prijzen wint en verder niets
- c de hoofdprijs en één tweede prijs wint.

40

Bij een loterij zijn 40 loten verkocht. Er zijn drie eerste prijzen en zeven tweede prijzen. Monique koopt drie loten en Barbara koopt er vier.

Bereken de kans dat

- a Monique één prijs wint
- b Barbara twee tweede prijzen wint
- c geen van beiden een prijs wint
- d elk lot van Barbara een prijs oplevert.

A 41

Rutger kiest willekeurig vier letters van de 26 letters van het alfabet. Met deze letters gaat hij woorden vormen.

Bereken exact de kans dat hij met die letters

- a het woord 'boek' kan vormen
- b het woord 'bak' kan vormen
- c het woord 'de' kan vormen.

Bij lastige opgaven schrijf je de samenstelling van de vaas op.

A 42

Bij een trekking van de lotto worden uit de getallen 1 tot en met 45 zes getallen getrokken.

Bereken de kans dat

- a alle zes getallen even zijn
- b alle getallen kleiner dan 20 zijn
- c het kleinste getal groter dan 5 is
- d het grootste getal 37 is
- e het grootste getal 35 en het kleinste getal 10 is.

3

A 43 Een fabriek levert lampen af in dozen van 20 stuks. Voordat een doos de fabriek verlaat, vindt de eindcontrole plaats. Daarbij kiest men willekeurig vier lampen uit de doos. Als alle vier de lampen het doen, wordt de hele doos goedgekeurd. Neem aan dat in een doos twee defecte lampen zitten. Bereken de kans dat deze doos wordt goedgekeurd bij de eindcontrole.

A 44 Een partij van 500 appels wordt verpakt in 20 dozen van elk 25 stuks. Bij deze appels zijn er tien met een rotte plek. Marloes koopt een doos. Bereken de kans dat alle appels in de doos gaaf zijn.

D 45 De leerlingen van vwo 4 van het Laplace College gaan een week naar een Europese hoofdstad. Van de 125 leerlingen hebben 38 gekozen voor Londen, 36 voor Parijs, 27 voor Berlijn en 24 voor Praag.

Om te kunnen deelnemen aan de reis moeten de leerlingen hun bloedgroep opgeven. Zie de tabel hiernaast.

Bereken de kans dat

- geen van de leerlingen die naar Praag gaat bloedgroep AB heeft
- van de leerlingen die naar Londen gaan de helft bloedgroep 0 heeft
- alle leerlingen die bloedgroep AB hebben naar Parijs gaan
- van de leerlingen die bloedgroep A of bloedgroep B hebben een kwart naar Berlijn gaat.

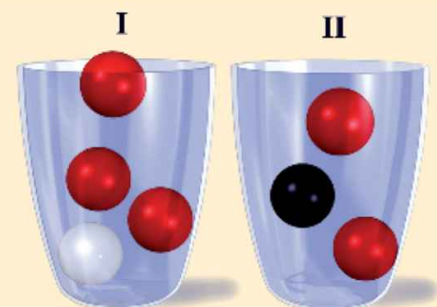
bloedgroep	aantal leerlingen
0	57
A	53
B	11
AB	4

Theorie C Kansbomen en de productregel

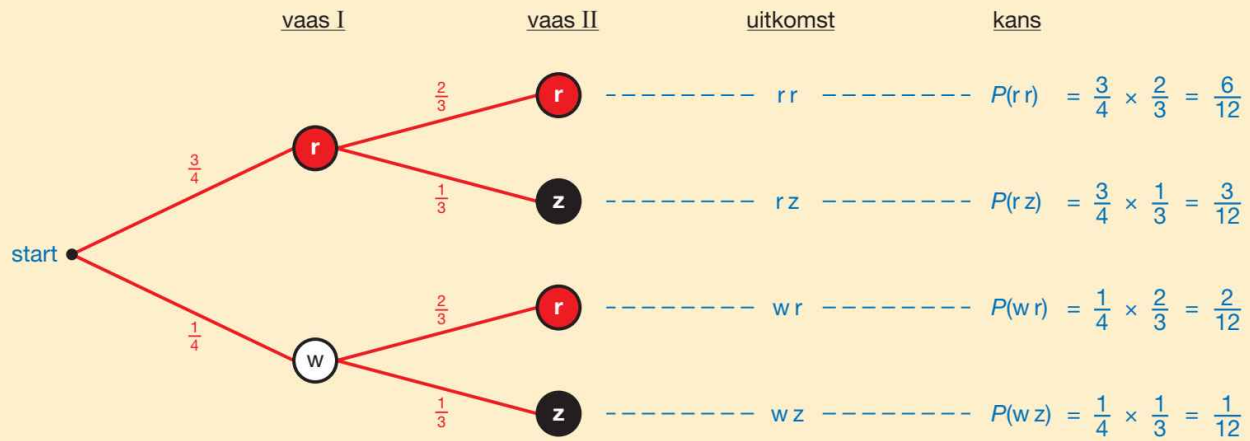
Kansexperimenten die uit twee of meer experimenten bestaan die elkaar op geen enkele wijze beïnvloeden, heten **onafhankelijke kansexperimenten**.

Om bij deze samengestelde kansexperimenten kansen te berekenen, kun je gebruik maken van een boomdiagram. Omdat door de vele vertakkingen een boomdiagram al snel onoverzichtelijk wordt, passen we een vereenvoudiging toe. Bij het pakken van één knikker uit elke vaas in de figuur hiernaast gaat dat als volgt.

- Pak eerst een knikker uit vaas I. Omdat je alleen de uitkomsten r en w hebt, zijn er vanaf de start slechts twee takken getekend. Bij elke tak staat de bijbehorende kans.
- Pak vervolgens een knikker uit vaas II. Je hebt alleen de uitkomsten r met kans $\frac{2}{3}$ en z met kans $\frac{1}{3}$.



figuur 3.9



figuur 3.10

Een boomdiagram met kansen bij de takken heet een **kansboom**. Bij het doorlopen van een kansboom moet je de kansen die je tegenkomt vermenigvuldigen. Zo zie je

$$P(wz) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{ en } P(rz) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Je hebt hier te maken met de **productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen**.

■ De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Voorbeeld

De schijven in figuur 3.11 draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven tot stilstand zijn gekomen, wijst elke pijl een vrucht aan.

Bereken exact de kans op

- drie keer kersen
- een appel, een banaan en een citroen
- geen enkele citroen.

Uitwerking

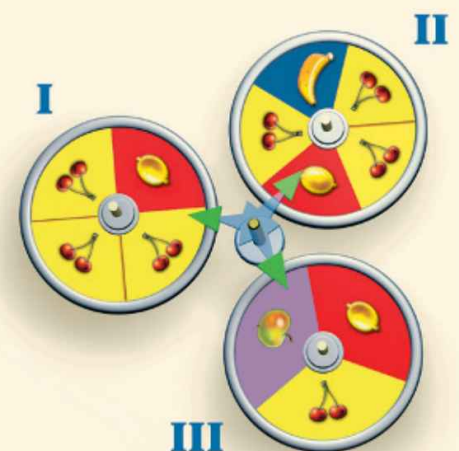
$$\text{a } P(\text{drie keer kersen}) = P(k \ k \ k) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

$$\text{b } P(\text{een appel, een banaan en een citroen}) = P(c \ b \ a) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{60}$$

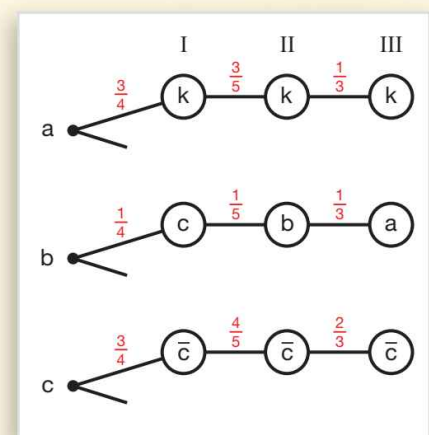
$$\text{c } P(\text{geen enkele citroen}) = P(\bar{c} \ \bar{c} \ \bar{c}) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

Bij elk probleem hoort een andere kansboom.

$\bar{c}$ betekent geen citroen.



figuur 3.11



T 46 [▶▶50] In vaas I zitten twee rode, drie witte en vier blauwe knikkers.

In vaas II zitten drie rode, twee witte en twee groene knikkers.

In vaas III zitten vier rode, twee groene en twee blauwe knikkers.

Bram pakt uit elk van de drie vazen één knikker.

Bereken de kans dat Bram

- a drie rode knikkers pakt
- b geen enkele rode knikker pakt
- c geen enkele blauwe knikker pakt
- d twee blauwe knikkers en een groene knikker pakt.

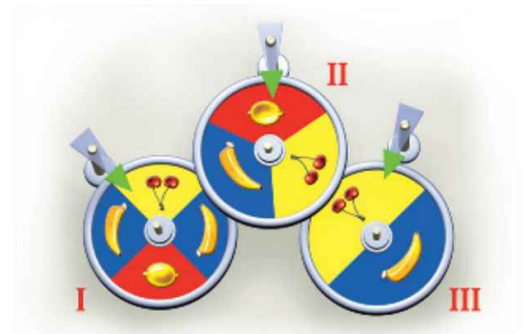
47 In vaas I zitten twee rode, vijf witte en drie blauwe knikkers.
In vaas II zitten twee witte, twee blauwe en één groene knikker.
Mark pakt uit beide vazen één knikker.

Bereken exact de kans op

- a twee witte knikkers
- b een blauwe en een rode knikker
- c een witte en een groene knikker
- d geen enkele blauwe knikker
- e geen enkele rode knikker.

48 Nadat de schijven in figuur 3.12 tot stilstand zijn gekomen, wijzen de pijlen elk één vrucht aan.
Bereken exact.

- a $P(\text{drie keer banaan})$
- b $P(\text{geen enkele keer kersen})$
- c $P(\text{twee citroenen en één banaan})$
- d $P(\text{drie keer citroen})$

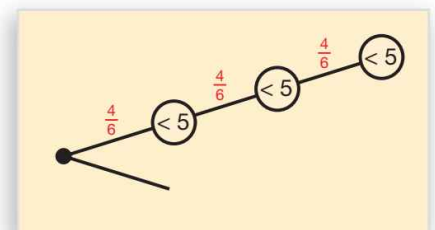


figuur 3.12

49 Lodewijk gooit met drie dobbelstenen.
Bij $P(\text{met elke dobbelsteen minder dan 5 ogen})$ hoort de kansboom hiernaast.

Bereken exact de kans dat Lodewijk

- a met elke dobbelsteen minder dan 5 ogen gooit
- b geen enkele keer 5 ogen gooit
- c met elke dobbelsteen meer dan 4 ogen gooit.



figuur 3.13

A 50 Leonie gooit met vier viervlaksdobbelstenen.
Bereken de kans dat zij

- a met geen enkele dobbelsteen 4 ogen gooit
- b met elke dobbelsteen minder dan 3 ogen gooit
- c in totaal 4 ogen gooit.

Terugblik

Knikkers pakken uit een vaas

Bij kansberekeningen die gaan over het pakken van knikkers uit een vaas maak je steeds dezelfde soort berekening. Pak je vijf knikkers uit de vaas hiernaast, dan is

$$P(3 \text{ blauwe, 1 rode en 1 witte}) = \frac{\binom{52}{3} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{60}{5}} \approx 0,049.$$

$$\text{Verder is } P(3 \text{ blauwe}) = \frac{\binom{52}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{60}{5}} \approx 0,113.$$

Bedenk hierbij: 3 blauwe en dus 2 niet-blauwe.



Het vaasmodel

Veel kansproblemen kun je omzetten in het pakken van knikkers uit een vaas, waardoor het probleem beter hanteerbaar wordt. Het is verstandig om bij ingewikkelde situaties de samenstelling van de vaas te vermelden, evenals het aantal knikkers dat je pakt.

probleem Een loterij met 100 loten heeft één eerste prijs, twee tweede prijzen en vijf derde prijzen. Twan koopt vier loten.

Wat is de kans dat Twan één prijs wint?

vaasmodel In een vaas zitten 100 knikkers, waarvan er 8 rood zijn (de 1 + 2 + 5 prijzen) en 92 wit (de nieten).

Pak vier knikkers uit deze vaas.

$$\text{antwoord} \quad P(\text{één prijs}) = P(\text{één rode en drie witte knikkers}) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{92}{3}}{\binom{100}{4}} \approx 0,256$$

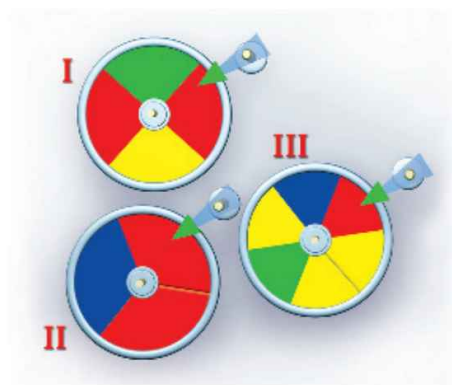
De productregel voor onafhankelijke kansexperimenten

Voor onafhankelijke kansexperimenten geldt de productregel.

Is G_1 een gebeurtenis bij het ene experiment en is G_2 een gebeurtenis bij het andere experiment, dan is

$$P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2).$$

Bij het berekenen van kansen bij samengestelde kansexperimenten maak je in gedachten (een gedeelte van) een kansboom. Bij het doorlopen van de kansboom moet je de kansen die je tegenkomt vermenigvuldigen. Zo is bij de schijven hiernaast $P(\text{geen enkele keer rood}) = P(\bar{r} \cap \bar{r} \cap \bar{r}) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \approx 0,139$.



3.4 De somregel en de complementregel

051 Bekijk het experiment ‘een worp met twee dobbelstenen’ met de gebeurtenissen A : ‘de som is 3’, B : ‘de som is 4’ en C : ‘het product is 4’.

a Bereken exact $P(A)$, $P(B)$ en $P(A \cup B)$.

b Is $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

c Onderzoek of $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

Theorie A De somregel voor kansen

Je kent de somregel voor de verzamelingen A en B .

Voor de verzamelingen A en B geldt $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Deel je in de somregel voor verzamelingen door $\#(U)$, dan krijg je de **somregel voor kansen**.

Voor de gebeurtenissen A en B geldt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Voor de disjuncte verzamelingen A en B geldt $A \cap B = \emptyset$, dus voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen A en B is $P(A \cap B) = 0$.

Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen A en B geldt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

In de opgaven heb je vaak te maken met de somregel voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen. Zie het voorbeeld.

Voorbeeld

Bij een loterij zijn alle 80 loten verkocht. Er zijn zes prijzen.

Martine heeft vier loten gekocht.

Bereken de kans dat Martine meer dan twee prijzen wint.

Aanpak

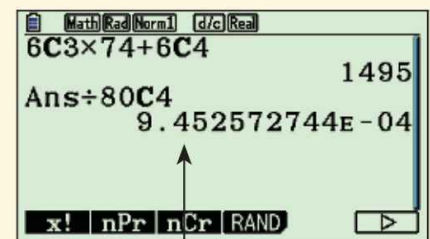
Meer dan twee prijzen betekent hier drie of vier prijzen.

Pas de somregel toe.

Uitwerking

$$P(\text{meer dan 2 prijzen}) = P(3 \text{ prijzen of } 4 \text{ prijzen}) =$$

$$P(3 \text{ prijzen}) + P(4 \text{ prijzen}) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{74}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{6}{4}}{\binom{80}{4}} \approx 0,001$$



9,452... $\times 10^{-4}$, dus begin met 4 nullen.
0,000945 is afgerond op drie decimalen 0,001.

- R 52** Zie het GR-scherm in het voorbeeld. Bij het berekenen van de kans in het voorbeeld zijn eerst de tellers samen genomen.

Daarna is de uitkomst gedeeld door $\binom{80}{4}$.

Waarom mag dat? Wat is het voordeel van deze werkwijze?

- T 53** [►►56] Bij een spelletje klaverjassen (zie opgave 38) trekken we acht kaarten uit het spel.

Bereken de kans op

- a drie of vier azen
- b minder dan drie schoppen.

- 54** In een vaas zitten vier rode, twee blauwe en vier groene knikkers.

Experiment: pak drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans op de gebeurtenis

- a twee of drie rode knikkers
- b minder dan twee groene knikkers.

- 55** In een klas zitten 13 jongens en 15 meisjes.

Voor het organiseren van een activiteit tijdens de feestweek worden vier leerlingen uitgeloot.

Bereken de kans dat er

- a minder dan twee meisjes bij zijn
- b niet enkel en alleen jongens of meisjes bij zijn.

- A 56** In de tabel zie je hoe ver de werknemers van de firma Adphex van hun werk af wonen.

Bij een onderzoek naar de vergoeding van reiskosten worden tien personen van dit bedrijf ondervraagd.

Bereken de kans dat

- a meer dan acht ondervraagden minder dan 5 km van het bedrijf wonen
- b minder dan drie vrouwen bij het onderzoek zijn betrokken
- c er twee vrouwen bij zitten die 5 km of meer van het werk af wonen.

	man	vrouw	
0 – < 5 km	18	11	29
5 – < 10 km	13	3	16
10 km of meer	6	2	8
	37	16	53

- O 57** In een vaas zitten twaalf rode en tien witte knikkers.

Daan pakt willekeurig vier knikkers uit de vaas.

Bereken de kans dat hij

- a vier witte pakt
- b minder dan vier witte pakt.

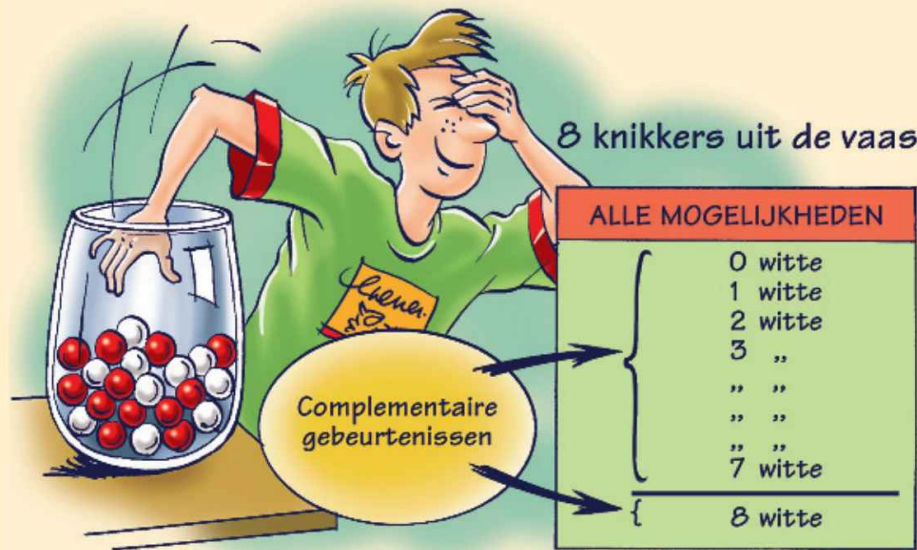
Theorie B De complementregel

Pak je acht knikkers uit de vaas van opgave 57, dan is de kans op minder dan acht witte knikkers gelijk aan

$$P(0 \text{ witte}) + P(1 \text{ witte}) + P(2 \text{ witte}) + \dots + P(7 \text{ witte}).$$

In plaats van deze acht kansen apart te berekenen en daarna op te tellen, kun je je heel wat rekenwerk besparen door te bedenken dat $P(\text{minder dan 8 witte}) = 1 - P(8 \text{ witte})$.

Dit is een voorbeeld van de **complementregel**. Het complement van een gebeurtenis bestaat uit alle uitkomsten die niet tot de gebeurtenis behoren.



Bij de formulering van de complementregel gebruiken we de notatie $\bar{A}$ voor de verzameling waarvoor geldt $A \cup \bar{A} = U$ en $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Dus $\#(A) + \#(\bar{A}) = \#(U)$.

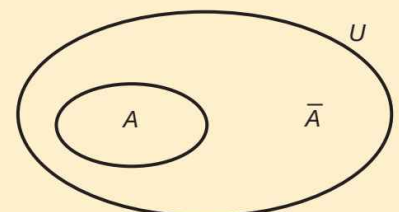
We noemen $\bar{A}$ de **complementgebeurtenis** van A . Omdat $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, geldt $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

De complementregel

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$, waarbij $\bar{A}$ de complementgebeurtenis van A is.

Het woord complement komt van completeren: het toevoegen van het gedeelte dat ontbreekt om iets volledig te maken. In de figuur hiernaast zie je een gebeurtenis en zijn complementgebeurtenis. Samen geven ze alle uitkomsten.

Het is belangrijk om bij kansberekeningen na te gaan of de complementregel je rekenwerk kan besparen. Zie het schema op de volgende bladzijde.



figuur 3.14

Pak 6 knikkers uit een vaas met 10 rode en 20 witte knikkers

gebeurtenis	met somregel	complement-gebeurtenis	complementregel handig?
minder dan 6 witte	0, 1, 2, 3, 4 of 5 witte	6 witte	ja
minder dan 2 witte	0 of 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	nee
meer dan 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	0 of 1 witte	ja
minstens 1 witte	1, 2, 3, 4, 5 of 6 witte	0 witte	ja
hoogstens 1 witte	0 of 1 witte	2, 3, 4, 5 of 6 witte	nee

Voorbeeld

Bij een televisieshow wordt de finalist voor tien deuren geplaatst.
 Achter drie van die deuren bevindt zich een waardevolle prijs.
 Achter de andere zeven deuren ligt een lege envelop.
 De finalist mag vier deuren openen.
 Bereken de kans dat er minstens één prijs de deur uit gaat.

Uitwerking

$$P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} \approx 0,833$$

T 58 [▶▶62] Uit de 32 kaarten bij het klaverjassen (zie opgave 38)

trekken we acht kaarten.

Bereken de kans op

- a** minstens één aas
- b** hoogstens zes zwarte kaarten
- c** geen enkele aas of tien.

59 In een loterij met vier prijzen zijn 25 loten verkocht.

Frank heeft drie loten gekocht.

Bereken de kans dat hij

- a** minstens één prijs wint
- b** niet drie prijzen wint
- c** twee prijzen wint
- d** niets wint.

60 Experiment: een worp met drie dobbelstenen.

Bereken de kans dat de som van de ogen

- a** geen 5 is
- b** minder dan 17 is.

Komt in een omschrijving van een gebeurtenis ‘minstens’, ‘hoogstens’, ‘niet’, ‘geen’, ‘meer dan’ of ‘minder dan’ voor, kijk dan of de complementregel je rekenwerk kan besparen.

- 61** In een vaas zitten vier gele, drie groene en vijf blauwe knikkers.

Experiment: pak drie knikkers uit de vaas.

Bereken de kans dat

- a er minstens één groene bij is
- b er hoogstens twee blauwe bij zijn
- c ze alle drie van kleur verschillen
- d ze alle drie dezelfde kleur hebben.

- R 62** Een kansexperiment bestaat uit het pakken van vijf knikkers uit een vaas met acht rode, zes witte en twaalf groene knikkers.

Bij het gebruik van de complementregel kan er gemakkelijk iets fout gaan. Wat is er fout aan de volgende beweringen?

- a $P(\text{geen groene}) = 1 - P(\text{allemaal groene})$
- b $P(\text{gelijke kleuren}) = 1 - P(\text{drie verschillende kleuren})$
- c $P(\text{meer dan twee rode}) = 1 - P(\text{minder dan twee rode})$
- d $P(\text{hoogstens drie witte}) = 1 - P(\text{minstens drie witte})$

- 63** Gegeven zijn de kansen $P(A) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,1$ en $P(A \cup B) = 0,6$.

Bereken.

- a $P(\bar{A})$
- b $P(B)$
- c $P(A \setminus B)$
- d $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- e $P(\overline{A \cap B})$
- f $P(B \setminus \bar{A})$

- A 64** In de tabel zie je hoe ver de leerlingen van een klas van school af wonen.

Bij een onderzoek naar te laat komen worden van deze klas acht leerlingen ondervraagd.

Bereken de kans dat

- a minstens zes ondervraagden minder dan 10 km van school wonen
- b minder dan zeven jongens worden ondervraagd
- c er drie meisjes bij zitten die minder dan 10 km van school wonen.

	jongen	meisje	
0 – < 10 km	7	13	20
10 – < 20 km	4	3	7
20 km of meer	1	2	3
	12	18	30

- A 65** Tijdens een bedrijfsuitje gaan de 28 werknemers van de firma Flash dineren in restaurant De Groene Dijk. In het restaurant zijn vier tafels gedekt, elk voor acht personen. Neem aan dat de 28 werknemers willekeurig een plaats krijgen toegewezen.

Bereken de kans dat aan

- a tafel 1 vier plaatsen leeg blijven
- b tafel 2 twee plaatsen leeg blijven
- c tafel 3 geen enkele plaats leeg blijft
- d tafel 4 minstens twee plaatsen leeg blijven.

- A 66** Op een ochtend tussen acht uur en half negen controleert de politie bij de ingang van het Newton College of de scooters van leerlingen opgevoerd zijn. Er komen dit halfuur 28 leerlingen op hun scooter naar school en 9 hiervan hebben hun scooter opgevoerd. De politie controleert 10 van de 28 scooters.

Bereken de kans dat de politie hierbij

- a** hoogstens twee scooters aantreft die zijn opgevoerd
- b** minstens vier scooters aantreft die zijn opgevoerd.



Ook Axel en Bas komen tussen acht uur en half negen met hun scooter naar school. De scooter van Axel is opgevoerd en de scooter van Bas is niet opgevoerd.

- c** Bereken de kans dat de scooter van Axel niet wordt gecontroleerd en de scooter van Bas wel.

- A 67** In de staat New York doen elke week miljoenen mensen aan de lotto mee. Elke deelnemer moet uit de getallen 1 tot en met 44 er zes aankruisen. Bovendien moet een extra zevende getal worden aangegeven.

Elke week worden de zes winnende getallen getrokken.

Bereken de kans dat

- a** de zes getrokken getallen allemaal kleiner dan 20 zijn
- b** 40 het grootste getal is
- c** minstens twee van de getallen groter zijn dan 30.



Je wint de derde prijs als vier van de zes getallen overeenstemmen.

Je wint de vierde prijs als drie van de zes getallen en het extra getal overeenstemmen.

- d** Bereken de kans op de derde prijs.
- e** Bereken de kans op de vierde prijs.

- D 68** Uit de 32 kaarten bij het klaverjassen (zie opgave 38) trekken we acht kaarten.

Bereken de kans op

- a** meer dan vier kaarten van één soort
- b** vier klaverkaarten en minstens één schoppenkaart
- c** minstens één schoppenkaart en geen enkele hartenkaart.

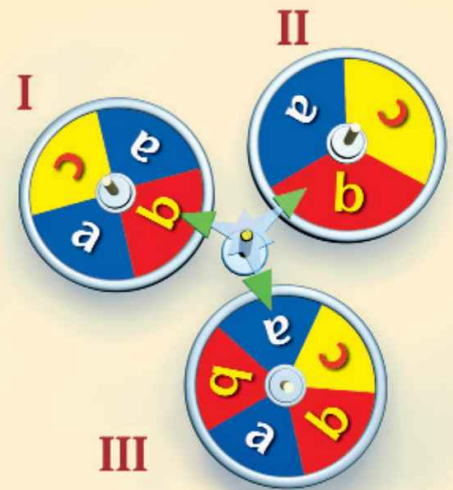
Theorie C De product-, de som- en de complementregel

De drie schijven hiernaast draaien onafhankelijk van elkaar. Om de kans op drie gelijke letters te berekenen, gebruik je de somregel.

Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 geldt $P(G_1 \cup G_2) = P(G_1) + P(G_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Je krijgt } P(\text{drie gelijke letters}) &= \\ P(a a a \text{ of } b b b \text{ of } c c c) &= \\ P(a a a) + P(b b b) + P(c c c) &= \\ \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} &= \frac{4}{60} + \frac{2}{60} + \frac{1}{60} = \frac{7}{60}. \end{aligned}$$

Verder is $P(\text{minstens één } a) = 1 - P(\text{geen enkele } a) = 1 - P(\bar{a} \bar{a} \bar{a}) = 1 - \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Hierbij is de complementregel gebruikt.



figuur 3.15

Voorbeeld

Experiment: een worp met drie dobbelstenen.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a minstens één zes
- b twee vieren.

Uitwerking

$$\begin{aligned} \text{a } P(\text{minstens één zes}) &= 1 - P(\bar{6} \bar{6} \bar{6}) = 1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \\ 1 - \frac{125}{216} &= \frac{91}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } P(\text{twee vieren}) &= P(44\bar{4}) + P(4\bar{4}4) + P(\bar{4}44) = \\ \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} &= \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \end{aligned}$$



- 69 Experiment: het één keer laten draaien van de schijven van figuur 3.16. De schijven draaien onafhankelijk van elkaar. Nadat de schijven zijn uitgedraaid, wijst elke pijl één sector aan.

Bereken de kans dat

- a beide pijlen een 3 aanwijzen
- b geen enkele 2 wordt aangewezen
- c één 3 wordt aangewezen
- d de som van de getallen 4 is
- e minstens één 3 wordt aangewezen.



figuur 3.16

- 70** In een fruitautomaat draaien drie schijven onafhankelijk van elkaar. Door een hendel kan elke schijf tot stilstand worden gebracht. In de tabel zie je wat er op elke schijf staat.

	aantal		
	schijf I	schijf II	schijf III
peer	3	1	2
appel	1	0	1
kersen	2	1	2
citroen	2	6	3



Bereken de kans op

- a** drie peren
- b** twee citroenen en één keer kersen
- c** geen enkele appel
- d** één appel
- e** minstens één peer.

- A71** Experiment: een worp met vier dobbelstenen.
Bereken exact de kans op de gebeurtenis
- a** minstens twee dobbelstenen met een vijf of een zes
 - b** hoogstens twee dobbelstenen zonder zes.

Terugblik

De somregel

Voor de gebeurtenissen A en B geldt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen geldt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Arjan koopt vijf loten in een loterij met 40 loten. Er zijn vier prijzen te winnen. De kans dat Arjan minder dan twee prijzen wint, bereken je met de somregel.

$$P(\text{minder dan twee prijzen}) = P(\text{geen prijs of één prijs}) =$$

$$P(\text{geen prijs}) + P(\text{één prijs}) = \frac{\binom{36}{5}}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{36}{4}}{\binom{40}{5}} \approx 0,931$$

De complementregel

Komt in de omschrijving van een gebeurtenis ‘minstens’, ‘hoogstens’, ‘meer dan’, ‘minder dan’ of ‘niet’ voor, dan kan de complementregel je rekenwerk besparen.

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Hierin is $\bar{A}$ de complementgebeurtenis van A .
Zo is bij de loterij hierboven

$$P(\text{minstens één prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - \frac{\binom{36}{5}}{\binom{40}{5}} \approx 0,427.$$

Maar $P(\text{hoogstens één prijs})$ bereken je met de somregel.
Immers $P(\text{hoogstens één prijs}) = P(\text{geen prijs of één prijs})$.

De somregel en de complementregel samen met de productregel

Bij het draaien van de drie schijven in de figuur hiernaast krijg je

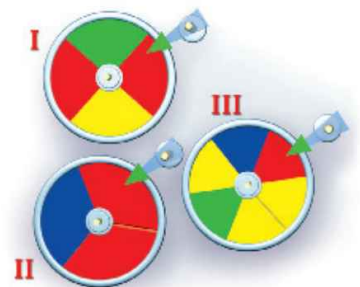
$$P(\text{één keer rood}) = P(r \bar{r} \bar{r}) + P(\bar{r} r \bar{r}) + P(\bar{r} \bar{r} r) =$$

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,444.$$

somregel, daarna productregel

$$P(\text{minstens één rood}) = 1 - P(\bar{r} \bar{r} \bar{r}) = 1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,861$$

complementregel, daarna productregel



3.5 Voorwaardelijke kansen

72

Gegeven is een vaas met 10 knikkers: 3 rode en 7 witte.

Experiment: pak twee knikkers uit de vaas.

G_1 : je pakt twee rode knikkers.

G_2 : je pakt twee witte knikkers.

G_3 : je pakt een rode en een witte knikker.

a Licht toe dat $P(G_1) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$.

b Ook is $P(G_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$. Licht dit toe.

c Bereken $P(G_2)$ op de manier van vraag b.

d Bereken $P(G_3)$ op de manier van vraag b en controleer je

antwoord met de berekening $P(G_3) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{2}}$.

Theorie A Voorwaardelijke theoretische kansen

Bij de berekening $P(G_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$ in opgave 72b is de

voorwaardelijke kans $\frac{2}{9}$ gebruikt. Deze kans $\frac{2}{9}$ is de kans dat de tweede knikker rood is onder de voorwaarde dat de eerste knikker rood is.

Notatie $P(\text{de tweede knikker is rood} \mid \text{de eerste knikker is rood})$.

Introduceer je de gebeurtenissen

A : de eerste knikker is rood

B : de tweede knikker is rood

dan geldt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$.

Dit is ook te noteren als $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Deze formule is de definitie van de voorwaardelijke kans $P(B \mid A)$.

$P(B \mid A)$ is de kans op B onder de voorwaarde A .

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ met $P(A) \neq 0$.

Voorbeeld

Experiment: een worp met een gewone dobbelsteen en een viervlaksdobbelsteen.

Er wordt met één van beide dobbelstenen een 4 gegooit.

Bereken exact de kans dat dit met de gewone dobbelsteen was.

Aanpak

Introduceer de gebeurtenissen

A : met de gewone dobbelsteen een 4 gooien

B : met één van beide dobbelstenen een 4 gooien

en bereken $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Uitwerking

A : met de gewone dobbelsteen een 4 gooien.

B : met één van beide dobbelstenen een 4 gooien.

De gevraagde kans is $P(A|B)$.

$P(A \cap B) = P(\text{met de gewone dobbelsteen een 4 gooien en met de viervlaksdobbelsteen geen 4 gooien}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

Dus $P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}$.

Informatief Voorwaardelijke kansen

In paragraaf 3.2 heb je voorwaardelijke empirische kansen berekend met de formule

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}.$$

Deel je in $\frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$ teller en noemer door $\#(U)$, dan krijg je de formule $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

R73 Zie het voorbeeld.

Je kunt hierbij een rooster maken zoals in de figuur hiernaast.

a Neem het rooster over en geef hierin de gebeurtenis B aan.

b Gebruik $P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$ om $P(A|B)$ te berekenen.

4						
3						
2						
1						
	1	2	3	4	5	6

figuur 3.17

- 74** In een vaas zitten 4 rode en 6 witte knikkers.

Experiment: pak na elkaar twee knikkers uit de vaas.

A : de eerste knikker is rood.

B : de tweede knikker is wit.

Toon aan.

a $P(B|A) = \frac{2}{3}$

b $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$

c $P(B) = \frac{3}{5}$

d $P(A|B) = \frac{4}{9}$

- 75** Gegeven is de uitkomstenverzameling U met de gebeurtenissen A en B . Verder is gegeven $P(A) = \frac{5}{8}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ en $P(A \cap B) = \frac{3}{16}$.

Bereken.

a $P(A|B)$

b $P(B|A)$

c $P(A|A \cup B)$

d $P(U \setminus (A \cup B))$

- 76** Gegeven zijn de gebeurtenissen A en B met $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$ en $P(A|B) = \frac{2}{5}$.

Bereken.

a $P(B)$

b $P(A \setminus (A \cup B))$

- 77** Experiment: vier keer gooien met een geldstuk.

Bereken de kans op twee keer kop onder de voorwaarde

- a** de eerste keer kop gooien
- b** de eerste keer munt gooien
- c** de eerste twee keer kop gooien
- d** de eerste twee keer munt gooien.

- 78** Experiment: een worp met een rode en een groene dobbelsteen.

X = het aantal ogen van de rode dobbelsteen.

Y = het aantal ogen van de groene dobbelsteen.

Bereken exact.

a $P(X + Y = 9 | X > 3)$

b $P(X > 3 | X + Y = 9)$

c $P(X + Y = 9 | Y < 5)$

d $P(Y < 5 | X + Y = 9)$

- 79** Dirk gooit met twee geldstukken.

- a** Een van de geldstukken valt op de grond en Dirk ziet dat kop boven ligt. Bereken de kans dat bij beide geldstukken kop boven ligt.
- b** Ellie bekijkt een volgende worp met de geldstukken. Zij vertelt dat er minstens één keer kop boven ligt. Bereken de kans dat bij beide geldstukken kop boven ligt.



A80 Uit de 32 kaarten bij het klaverjassen (zie opgave 38) trekken we acht kaarten. We definiëren de volgende gebeurtenissen.

A : we trekken twee azen.

B : we trekken één rode aas.

C : we trekken de hartenaas.

Bereken exact.

a $P(A|B)$

c $P(A|C)$

e $P(B|C)$

b $P(B|A)$

d $P(C|A)$

f $P(C|B)$

3

A81 Neem in deze opgave aan dat bij een geboorte de kans op een jongen gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

In het gezin Dijkstra zijn vier kinderen.

a Bereken de kans dat er in het gezin twee jongens en twee meisjes zijn.

b Je belt bij het huis van het gezin aan en een zoon doet open. Bereken de kans dat er in het gezin twee jongens en twee meisjes zijn.

c Meneer Dijkstra zegt tijdens een feestje: “Gelukkig heb ik niet vier dochters”.

Bereken de kans dat er in het gezin twee jongens en twee meisjes zijn.

O82 Bij een kansexperiment geldt voor de gebeurtenissen A en B dat $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ en $P(A|B) = \frac{1}{5}$.

Bereken eerst $P(A \cap B)$ en vervolgens $P(B|A)$.

Theorie B De regel van Bayes

Voor de gebeurtenissen A en B bij een kansexperiment

$$\text{geldt } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \dots (1)$$

$$\text{en ook } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \dots (2)$$

Uit (2) volgt $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.

$$\text{Samen met (1) geeft dit } P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

Deze formule staat bekend als **de regel van Bayes**.

Regel van Bayes

Voor de gebeurtenissen A en B bij een kansexperiment

$$\text{geldt } P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$



Voorbeeld

Gegeven is dat 0,02% van de bevolking van een land tuberculose (tbc) heeft. Om na te gaan of iemand een infectie met tbc heeft gehad, wordt een huidtest gebruikt, de zogenaamde Mantoux-test. Uit ervaring is bekend dat van de personen die tbc hebben 98% positief reageert op de test (dat wil zeggen dat het testresultaat de aanwezigheid van tbc bevestigt) en de overige 2% negatief. Van personen die geen tbc hebben, vertoont 1% toch een positieve reactie bij de Mantoux-test. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat iemand die positief op de test reageert ook werkelijk tbc heeft.

Uitwerking

A : heeft tbc.

B : reageert positief op de test.

Gevraagd wordt $P(A|B)$.

Gebruik $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$ met $P(B|A) = 0,98$, $P(A) = 0,0002$ en

$P(B) = P(\text{positief en heeft tbc}) + P(\text{positief en heeft geen tbc}) = 0,98 \cdot 0,0002 + 0,01 \cdot 0,9998 = 0,010194$.

Dit geeft $P(A|B) = \frac{0,98 \cdot 0,0002}{0,010194} \approx 0,0192$.

- 83** Het is van belang zo vroeg mogelijk de diagnose van de ziekte van Parkinson te stellen. Daarom zijn huisartsen extra alert bij het optreden van spierpijnlachten. Het blijkt dat 70% van de Parkinsonpatiënten spierpijnlachten heeft, terwijl dat bij anderen slechts 20% is. Verder is bekend dat 1% van de Nederlandse bevolking aan de ziekte van Parkinson lijdt.
- Bereken de kans dat een Nederlander spierpijnlachten heeft.
 - Bereken de kans dat een Nederlander die spierpijnlachten heeft aan de ziekte van Parkinson lijdt.
 - Volgens een neuroloog is de klacht 'spierpijn' diagnostisch onbruikbaar voor de ziekte van Parkinson. Omschrijf in eigen woorden hoe hij tot deze uitspraak komt.

- 84** Osteoporose (botontkalking) is een aandoening waarbij het bot langzaam steeds meer botmineralen verliest, vooral kalk. Hierdoor wordt het botweefsel steeds minder sterk en kunnen de botten snel breken. Van de bejaarde vrouwen heeft 1 op de 3 osteoporose en van de bejaarde mannen is dat 1 op de 5. Van de bejaarden is 65% vrouw en 35% man.
- Bereken de kans dat een bejaarde osteoporose heeft.
 - Bereken de kans dat een bejaarde die osteoporose heeft van het vrouwelijk geslacht is.

- R 85** Maak het voorbeeld van bladzijde 132 met behulp van de regel van Bayes.

- 86** Een chipfabrikant heeft een methode ontwikkeld waarmee snel getest kan worden of een chip al of niet gebreken heeft. Een chip met gebreken dient te worden afgekeurd.

Bij chips die geen gebreken hebben geeft deze methode in 99,5% van de gevallen het juiste resultaat. In slechts 0,5% van de gevallen worden de goede chips ten onrechte afgekeurd.

Bij chips die wel gebreken hebben geeft de methode in 93% van de gevallen het juiste resultaat. In 7% van de gevallen worden de chips met gebreken ten onrechte toch goedgekeurd.

Neem aan dat 4% van de geproduceerde chips gebreken heeft.

- Hoeveel procent van de chips wordt door deze methode afgekeurd?
- Bereken de kans dat een afgekeurde chip daadwerkelijk gebreken heeft.
- Bereken de kans dat een goedgekeurde chip toch gebreken heeft.

- A 87** Veel vakantiegangers naar de tropen zijn niet ingeënt tegen malaria. Vandaar dat veel hotels zogenaamde sneltests aanbieden, waarmee binnen 20 minuten geconstateerd wordt of er bij koorts sprake is van malaria.

De *specificiteit* van zo'n sneltest is goed, namelijk 95%. Dat betekent dat een niet met malaria besmet persoon in 95% van de gevallen een negatief testresultaat heeft. Maar de *sensitiviteit* van zo'n sneltest is slechts 80%. Dat wil zeggen dat een met malaria besmet persoon in 80% van de gevallen een positief testresultaat heeft. In de volgende vragen gaat het over personen die naar de tropen gaan zonder te zijn ingeënt. Van hen raakt 6% besmet met malaria.

- Rob ondergaat een sneltest.
Bereken de kans dat het testresultaat negatief is.
- Bij Marc is het testresultaat positief.
Bereken de kans dat Marc ook echt met malaria besmet is.
- Het testresultaat is bij Sabine negatief.
Bereken de kans dat zij in werkelijkheid niet besmet is.

Informatief Sensitiviteit en specificiteit

Bij een medische test is het van belang dat een patiënt de juiste uitslag krijgt. Daarbij hanteert men de begrippen sensitiviteit en specificiteit. De sensitiviteit van een medische test is de kans dat iemand die de betreffende ziekte heeft, een positieve uitslag krijgt. Bij een perfecte sensitiviteit is deze kans 1 en wordt dus iedere zieke gevonden. Er zijn dan geen zogenaamde fout-negatieve uitslagen.

De specificiteit van een test is de kans dat iemand die niet ziek is, een negatieve uitslag krijgt.

Hoe hoger de specificiteit, hoe minder fout-positieve uitslagen er zijn.

Bij een perfecte test krijgt iedereen de juiste uitslag en zijn zowel de sensitiviteit als de specificiteit gelijk aan 1, ofwel 100%. In werkelijkheid is geen enkele test perfect.

Terugblik

Voorwaardelijke theoretische kansen

De definitie van de kans op A onder de voorwaarde B is

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ met } P(B) \neq 0.$$

Bij een worp met een rode en een groene dobbelsteen en de gebeurtenissen

A : met de rode dobbelsteen minstens 5 ogen gooien

B : met de groene dobbelsteen 3 ogen gooien

geldt $A = \{(5, 1), (5, 2), \dots, (5, 6), (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$,

dus $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, $B = \{(1, 3), (2, 3), \dots, (6, 3)\}$, dus $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

en $A \cap B = \{(5, 3), (6, 3)\}$, dus $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

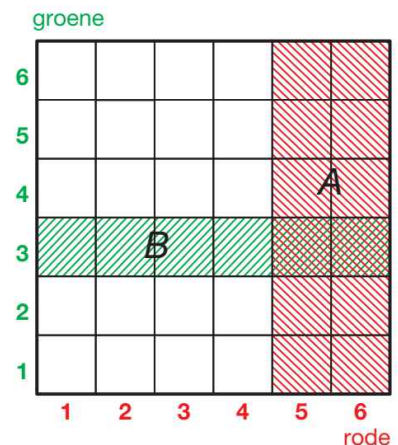
Zo krijg je $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$ en

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}.$$

De voorwaardelijke kansen $P(A|B)$ en $P(B|A)$ zijn ook af te

lezen in de figuur hiernaast. Je krijgt $P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

en $P(B|A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.



De regel van Bayes

Volgens de regel van Bayes geldt voor de gebeurtenissen A en B dat

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

Bekijk de volgende situatie.

Een autofabrikant neemt de ruitenwissers af van de leveranciers P, Q en R.

P levert 30% van de ruitenwissers, Q levert 45% en R de rest.

Het blijkt dat binnen anderhalf jaar 15% van de ruitenwissers van

P vervangen moet worden. Van Q is dat 20% en van R is dat 8%.

Om de kans te berekenen dat een willekeurige ruitenwisper die binnen

anderhalf jaar vervangen moet worden van P afkomstig is, neem je

A : ruitenwisper moet binnen anderhalf jaar worden vervangen

B : ruitenwisper is afkomstig van P.

Dit geeft $P(A|B) = 0,15$, $P(B) = 0,30$ en

$$P(A) = 0,15 \cdot 0,30 + 0,20 \cdot 0,45 + 0,08 \cdot 0,25 = 0,155$$

De gevraagde kans is $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0,15 \cdot 0,30}{0,155} \approx 0,290$.

Diagnostische toets

3.1 Het kansbegrip

- 1** Experiment: een worp met een gewone dobbelsteen en een octaëder. Met een octaëder kun je 1, 2, 3, ..., 8 gooien. Bereken exact de kans op de gebeurtenis
- a A : de som van de ogen is 8
 - b B : de som van de ogen is minder dan 4
 - c C : het verschil van de ogen is 2
 - d D : de aantallen ogen zijn gelijk.
- 2** Experiment: het gooien met vier viervlaksdobbelstenen. Bereken exact de kans op de gebeurtenis
- a het product van de ogen is 16
 - b de som van de ogen is meer dan 13.

3.2 Empirische kansen

- 3** In een fabriek van plasmaschermen verzorgen de machines I, II en III de gehele productie van 2000 schermen per dag. Het aandeel van deze drie machines in de productie is achtereenvolgens 55%, 30% en 15%. Per machine is het aantal defecte schermen achtereenvolgens 1%, 2% en 3%. Er wordt willekeurig een scherm gekozen. Deze blijkt defect te zijn. Bereken de kans dat dit scherm door machine III is gefabriceerd.

3.3 Het vaasmodel en de productregel

- 4** In een vaas zitten vijf rode, zeven witte en negen blauwe knikkers. Mirella pakt zes knikkers uit de vaas. Bereken de kans dat zij
- a van elke kleur twee knikkers pakt
 - b geen enkele blauwe knikker pakt
 - c twee rode knikkers pakt.
- 5** Joris heeft een cd-speler met een shuffle-functie. Hiermee is het mogelijk de nummers van een cd in willekeurige volgorde af te spelen. Een nummer wordt pas opnieuw afgespeeld als alle nummers van de cd zijn geweest. Joris draait een cd met 16 nummers. Bereken de kans dat
- a nummer 14 bij de eerste drie afgespeelde nummers zit
 - b de nummers 1, 2 en 3 op het eind worden afgespeeld
 - c de nummers 3, 7, 8 en 9 bij de eerste acht afgespeelde nummers zitten.
- 6** Experiment: een worp met vier dobbelstenen. Bereken exact de kans op de gebeurtenis
- a met elke dobbelsteen meer dan vier ogen gooien
 - b geen enkele zes gooien.

3.4 De somregel en de complementregel

- 7** Bij een loterij zijn 120 loten verkocht. De loten kosten 5 euro per stuk. Er is een hoofdprijs van 100 euro en er zijn vier tweede prijzen van 25 euro. Elsbeth heeft zes loten gekocht. Bereken de kans dat Elsbeth
- minder dan twee prijzen wint
 - 100 euro wint
 - geen verlies lijdt bij deze loterij.

- 8** In de tabel staan de overlevingskansen van een insectensoort. Je kunt aflezen dat een insect uit de klasse van 0 tot 1 maand een kans van 0,83 heeft om in de leeftijdsklasse van 1 tot 2 maanden te komen. Bereken de kans dat een zojuist uit het ei gekomen insect
- in de klasse 3 tot 4 komt
 - doodgaat in de klasse 2 tot 3
 - minstens 4 maanden oud wordt
 - minder dan 4 maanden oud wordt.

leeftijd in maanden	kans
0 tot 1	0,83
1 tot 2	0,66
2 tot 3	0,41
3 tot 4	0,12
4 tot 5	0,08

3.5 Voorwaardelijke kansen

- 9** Huub gooit met drie dobbelstenen.
- Een van de dobbelstenen valt op de grond. Huub ziet dat hij met die dobbelsteen 6 ogen heeft gegoooid. Bereken exact de kans op twee keer 6 ogen.
 - Cindy bekijkt een volgende worp met drie dobbelstenen. Zij zegt dat er minstens een keer 6 ogen is gegoooid. Bereken exact de kans op twee keer 6 ogen.
- 10** In 2013 ging 70% van de Nederlanders op vakantie. Hiervan is 67% in 2014 ook weer op vakantie geweest. Van de Nederlanders die in 2013 niet op vakantie zijn geweest, is 31% in 2014 wel op vakantie geweest. Bereken de kans dat een Nederlander die in 2014 niet op vakantie is geweest, dit wel is geweest in 2013.

Bij sommige verhuurbedrijven van campers is het mogelijk om in de ene plaats een camper te huren en die in een andere plaats weer in te leveren. Voor het verhuurbedrijf is het dan nodig te weten welke aantallen campers in de verschillende plaatsen kunnen worden verwacht. Met behulp van berekeningen met matrices is zo'n schatting te maken.

Wat leer je?

- Hoe je matrices optelt, vermenigvuldigt en hoe je machten van een matrix berekent.
- Welke toepassingen overgangsmatrices hebben.
- Hoe je stelsels lineaire vergelijkingen oplost met het gauss-jordanalgoritme.
- Wat de inverse van een matrix is en hoe je deze kunt gebruiken om stelsels op te lossen.
- Wat een determinant van een matrix is en hoe je hieraan kunt zien of het bijbehorende stelsel precies één oplossing heeft.



Matrices

4



Voorkennis Stelsels vergelijkingen

Theorie A Twee vergelijkingen met twee variabelen

Voor het oplossen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen ga je als volgt te werk.

- 1 Maak bij een van de vergelijkingen een van de variabelen vrij.
- 2 Vul de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking in en los de verkregen vergelijking op. Je hebt nu een van de variabelen berekend.
- 3 Gebruik het antwoord van stap 2 om de andere variabele te berekenen.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$ op.

Uitwerking

Uit $4x - y = 3$ volgt $y = 4x - 3$.

$3x + 4y = 26$ en $y = 4x - 3$ geeft $3x + 4(4x - 3) = 26$

$$3x + 16x - 12 = 26$$

$$19x = 38$$

$$x = 2$$

$x = 2$ en $y = 4x - 3$ geeft $y = 4 \cdot 2 - 3 = 5$.

De oplossing is $(x, y) = (2, 5)$.

In het voorbeeld is y in $3x + 4y = 26$ vervangen door $4x - 3$.

In plaats van y vervang y door $4x - 3$

zeggen we y substitueer $y = 4x - 3$.

Substitueren betekent
vervangen door.

De manier waarop het stelsel in het voorbeeld is opgelost, heet **eliminieren door substitutie**. Eliminieren betekent wegwerken.

1 Los op.

a $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 5x - 2y = 27 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - y = 13 \\ 3x - y = 23 \end{cases}$

2 Los op.

a $\begin{cases} 4a + 3b = 16 \\ 5a - b = 1 \end{cases}$

b $\begin{cases} p + 3q = 48 \\ 2p - 5q = 30 \end{cases}$

c $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 29 \\ -3x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$

3 Gegeven zijn de lijnen k : $2x + 3y = 11$ en l : $x + 3y = 9$.

a Teken k en l in één figuur.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en l door een stelsel op te lossen.

- 4 Gegeven zijn de lijnen $m: 2x - y = 2$ en $n: 2x - y = 4$.
- a Teken m en n in één figuur.
- b Hoe kun je in de figuur van vraag a zien dat het stelsel

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad \text{geen oplossing heeft?}$$

- 5 Welke van de volgende stelsels hebben geen oplossing?

I $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

II $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

III $\begin{cases} 4x - y = 6 \\ -8x + 2y = -3 \end{cases}$

Theorie B Achterwaartse substitutie

Het stelsel $\begin{cases} x + 2y + 3z = 21 \\ 6y - z = 1 \\ z = 5 \end{cases}$ los je als volgt op.

- Substitueer $z = 5$ in $6y - z = 1$. Dit geeft $6y - 5 = 1$, dus $y = 1$.
- Substitueer $y = 1$ en $z = 5$ in $x + 2y + 3z = 21$. Dit geeft $x + 2 + 15 = 21$, dus $x = 4$.
- De oplossing is $(x, y, z) = (4, 1, 5)$.

Bij het oplossen is **achterwaartse substitutie** gebruikt. Je begint met het substitueren van $z = 5$ en werkt daarbij van achteren naar voren. Hierbij begin je met de variabele die bekend is. Deze substitueer je in de vergelijking waar maar één andere variabele in staat, zodat je deze ook kunt berekenen. Enzovoort.

- 6 Los op met behulp van achterwaartse substitutie.

a $\begin{cases} 3x + y - z = 7 \\ 3y + 2z = 11 \\ 6z = 15 \end{cases}$

b $\begin{cases} a - 3b + 9c = 16 \\ 5b + 12c = -21 \\ 21c = 7 \end{cases}$

- 7 Los op.

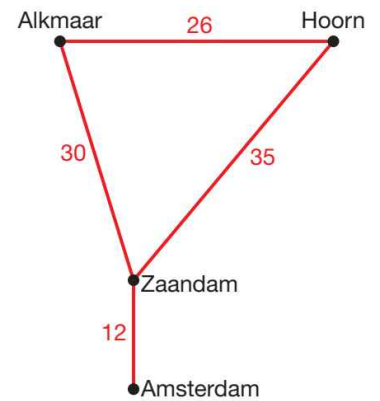
a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 14 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_3 + x_4 = 7 \\ x_4 = 6 \end{cases}$

b $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -1 \\ 2x_3 + x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_4 - 15x_5 = 1 \\ 12x_5 = 4 \end{cases}$

4.1 Rekenen met matrices

01 In figuur 4.1 zie je enkele plaatsen met hun onderlinge afstanden. Hierbij is een afstandstabel te maken. Deze tabel is hieronder gedeeltelijk ingevuld.

	Alkmaar	Amsterdam	Hoorn	Zaandam
Alkmaar	0	42	...	...
Amsterdam	42	0	...	...
Hoorn	...	47	0	...
Zaandam	...	12	...	0



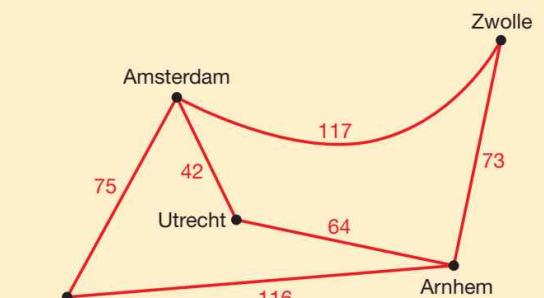
figuur 4.1

Neem de tabel over en vul hem verder in.

Theorie A Bewerkingen met matrices

Een bedrijf heeft vestigingen in Amsterdam en Arnhem, en klanten in Rotterdam, Utrecht en Zwolle. Zie figuur 4.2 met de afstanden in kilometer. Zo'n figuur heet een **graaf**. Een graaf bestaat uit punten waarvan er twee of meer verbonden zijn door wegen. De afstanden van de vestigingen tot de klanten zijn genoteerd in de tabel hieronder.

	Arnhem	Amsterdam
Utrecht	64	42
Rotterdam	116	75
Zwolle	73	117



figuur 4.2

De tabel kan ook genoteerd worden in een schema zoals hiernaast. Zo'n schema heet een **matrix**.

De matrix A hiernaast heeft drie **rijen** en twee **kolommen**. De **afmeting** van A is 3×2 .

De getallen in de matrix zijn de **elementen** van de matrix. Dus A heeft 6 elementen.

Het element a_{12} is het getal dat in de eerste rij en in de tweede kolom staat, dus $a_{12} = 42$.

Verder is bijvoorbeeld $a_{21} = 116$ en $a_{32} = 117$.

$$A = \begin{pmatrix} 64 & 42 \\ 116 & 75 \\ 73 & 117 \end{pmatrix}$$

$a_{32} = 117$. Spreek a_{32} uit als a -drie-twee.

Een $m \times n$ -matrix A heeft m rijen en n kolommen. Het element a_{ij} is het getal in de i -de rij en de j -de kolom van A .

Een **kolommatrix** heeft de afmeting $m \times 1$.

Zo is $K = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ een 3×1 kolommatrix.

Een **vierkante matrix** is een matrix met evenveel rijen als kolommen. Bij een vierkante matrix M bestaat de **hoofddiagonaal** uit de elementen $m_{11}, m_{22}, m_{33}, \dots$

Twee matrices met dezelfde afmeting kun je optellen.

De **sommatrix** krijg je door de getallen op de overeenkomstige plaatsen op te tellen.

Bij $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ krijg je

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ en } A - B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Verder kun je een matrix met een getal vermenigvuldigen. Je vermenigvuldigt dan elk element van de matrix met dat getal.

$$\text{Dus } 3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 12 & 6 & 15 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$-2B = -2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -6 \\ -12 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Het vermenigvuldigen van een matrix A met een kolommatrix K , dus het berekenen van $A \cdot K$, lukt alleen als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van K .

Is A een 2×3 -matrix en K een 3×1 -matrix, dan is de **productmatrix** $A \cdot K$ een 2×1 -matrix.

Bij $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ en $K = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ bereken je $A \cdot K$ met het volgende schema.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = K \right.$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 78 \end{pmatrix} = A \cdot K$$

$2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 - 3 \cdot 8 = -5$

$4 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 78$

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & -3 \\ 2 & \boxed{-3} & 1 \\ 3 & 2 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

hoofddiagonaal

Voorbeeld

Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bereken zo mogelijk $A \cdot B$ en $A \cdot C$.

Uitwerking

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{array}{l} 3 \times 5 + 2 \times 7 = 29 \\ 1 \times 5 + 5 \times 7 = 40 \\ 0 \times 5 + 3 \times 7 = 21 \end{array} \quad \text{dus } A \cdot B = \begin{pmatrix} 29 \\ 40 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$A \cdot C$ bestaat niet, want A is een 3×2 -matrix en C is een 3×1 -matrix.
Het aantal kolommen van A is niet gelijk aan het aantal rijen van C .

- 2** Gegeven zijn $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Bereken zo mogelijk.

- a** $A \cdot B$ **c** $C \cdot B$ **e** $A \cdot B + D \cdot B$
b $A \cdot C$ **d** $D \cdot B$ **f** $2A \cdot B$

- 3** In een fabriek worden op productielijn A per uur 15 fietsen gemaakt. Op productielijn B zijn dat er 14. In het productieschema zie je dat op beide productielijnen drie typen fietsen gemaakt worden.

AANTAL GEPRODUCEERDE FIETSEN PER UUR

type	productielijn A	productielijn B
3 versnellingen	6	8
5 versnellingen	5	4
10 versnellingen	4	2

Hierbij hoort de productiematrix P hiernaast.

Productielijn A is 7 uur per dag in gebruik,
voor productielijn B is dat 8 uur.

- a** Verwerk de gegevens over de productietijden in een matrix T zo, dat $P \cdot T$ betekenis heeft.
b Bereken $V = P \cdot T$. Geef een interpretatie van de elementen van V .
c Gegeven is de matrix $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 Bereken $W \cdot V$ en geef een interpretatie van $W \cdot V$.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} A & B \\ \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- 4** Van de computerzaken A en B zijn de maandverkopen van de typen Q, T, L en S gegeven in de verkoopmatrix V .

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Q} & \text{T} & \text{L} & \text{S} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

In de matrix W staat de prijs per computer, de winst per computer en de prijs van het softwarepakket dat bij de computer wordt geleverd. De bedragen zijn in honderden euro's.

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{prijs} & \text{winst} & \text{software} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Q} \\ \text{T} \\ \text{L} \\ \text{S} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Bereken het totale bedrag dat elke zaak voor de computers ontvangt. Bereken ook per zaak de totale winst en het totale bedrag voor de software.
- Verwerk de antwoorden van vraag a in een 2×3 -matrix K . Geef de elementen net zo als bij matrix W in honderden euro's.

Theorie B Het vermenigvuldigen van matrices

De matrix K in opgave 4 heet de productmatrix van V en W .

Dus $K = V \cdot W$.

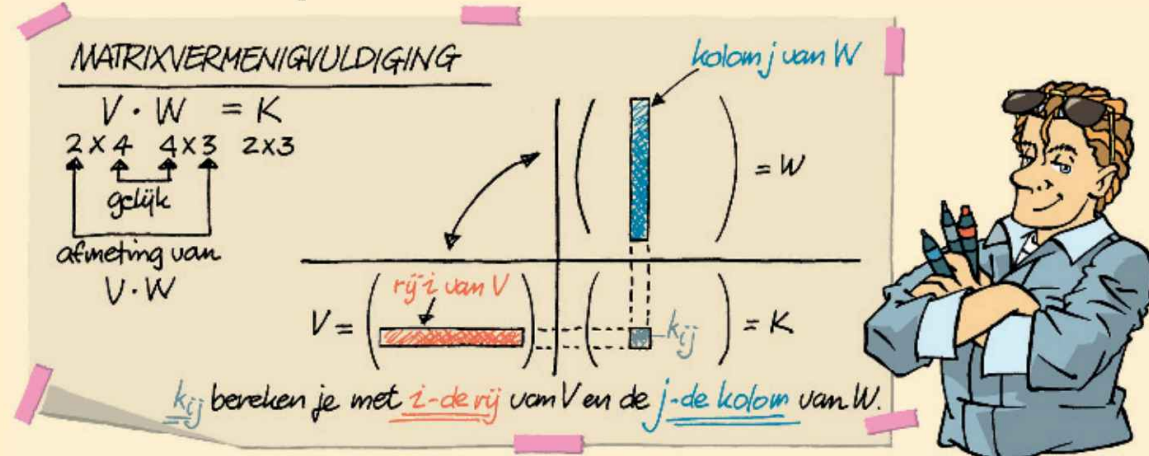
De berekening van K schrijven we als volgt op.

$$\begin{array}{c|ccc} & \begin{matrix} \text{Q} & \text{T} & \text{L} & \text{S} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{prijs} & \text{winst} & \text{software} \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \text{Q} \\ \text{T} \\ \text{L} \\ \text{S} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 4 \end{pmatrix} & = W & \\ \hline V = \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 260 & 51 & 38 \\ 184 & 37 & 29 \end{pmatrix} & = K & \\ & \uparrow & & \\ & \boxed{6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 29} & & \end{array}$$

$$\text{Dus } K = V \cdot W = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{prijs} & \text{winst} & \text{software} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 260 & 51 & 38 \\ 184 & 37 & 29 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Let bij deze vermenigvuldiging op het volgende.

- Het rode getal in $V \cdot W$ staat in de **tweede rij** en in de **derde kolom**. Je krijgt dat getal door de getallen van de **tweede rij** van V te vermenigvuldigen met de bijbehorende getallen van de **derde kolom** van W en daarna de uitkomsten op te tellen.
- De betekenis van de kolommen van V vind je in dezelfde volgorde terug bij de rijen van W .
- De informatie links van de productmatrix $V \cdot W$ staat links van V . De informatie boven de productmatrix $V \cdot W$ staat boven W . Door dit in de gaten te houden, herken je snel de betekenis van de elementen van de productmatrix.



figuur 4.3 Je kunt het product van de matrices V en W alleen berekenen als het aantal kolommen van V gelijk is aan het aantal rijen van W .

Voorbeeld

Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Bereken zo mogelijk $A \cdot B$ en $B \cdot A$.

Uitwerking

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 10 & 11 & 5 \\ 5 & 8 & 7 & 7 \end{pmatrix} = A \cdot B$$

$B \cdot A$ bestaat niet, want B heeft 4 kolommen en A heeft 2 rijen.

Het vermenigvuldigen van matrices is niet commutatief, dat wil zeggen dat in het algemeen niet geldt $A \cdot B = B \cdot A$. Matrixvermenigvuldiging is wel associatief. Dat wil zeggen dat voor een $k \times l$ -matrix A , een $l \times m$ -matrix B en een $m \times n$ -matrix C geldt dat $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

De vermenigvuldiging van getallen is commutatief. Zo is $2 \times 5 = 5 \times 2$.

- 5 Gegeven zijn de matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } S = (1 \quad 5).$$

Bereken zo mogelijk.

- a $P \cdot Q$ c $R \cdot P$ e $R \cdot R$
 b $P \cdot R$ d $S \cdot R$ f $Q \cdot P$

- 6 Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

- a Bereken $A \cdot B$, $B \cdot A$ en $B \cdot C$.
 b Toon aan dat $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

- 7 Een fabriek vervaardigt de producten A, B en C die worden samengesteld uit de grondstoffen P, Q en R. Per product zijn de benodigde eenheden van de grondstoffen verwerkt in de matrix M evenals de benodigde hoeveelheid arbeidstijd T in uren.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & Q & R & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De grondstoffen P, Q en R kosten per eenheid respectievelijk 10, 8 en 15 euro. Het arbeidsloon is 40 euro per uur.

De fabriek krijgt een bestelling van 1000 producten A, 600 producten B en 800 producten C.

- a Verwerk de grondstofkosten en het arbeidsloon in een matrix K zo, dat $M \cdot K$ betekenis heeft.
 b Verwerk de bestelling in een matrix N zo, dat $N \cdot M$ betekenis heeft.
 c Bereken $M \cdot K$. Geef een interpretatie van de elementen van $M \cdot K$.
 d Bereken $N \cdot M$. Geef een interpretatie van de elementen van $N \cdot M$.
 e Bereken $N \cdot M \cdot K$.

Welke informatie geeft de matrix $N \cdot M \cdot K$?



PRODUCTIEPROCES

8 Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ en $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Onderzoek of geldt $A \cdot I = I \cdot A$.

9 Gegeven is $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bereken a , b , c en d .

10 Gegeven is $\begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 3 & y & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & a \\ b & -2 \end{pmatrix}$.

Bereken x , y , a en b .

A 11 Gegeven is $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Bereken g , h en i .

A 12 Van drie 4 vwo-groepen zijn de rapportcijfers wiskunde gegeven in de matrix R .

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4B1 \\ 4B2 \\ 4B3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 8 & 13 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Stel de matrix A op zo, dat $R \cdot A$ aangeeft hoeveel zevens per klas gescoord zijn.
- Stel de matrix B op zo, dat $R \cdot B$ aangeeft hoeveel voldoende's per klas gescoord zijn.
- Stel de matrix C op zo, dat $R \cdot C$ aangeeft hoeveel leerlingen elke klas heeft.
- Stel een matrix D op zo, dat $R \cdot D$ aangeeft hoeveel punten totaal per klas voor wiskunde gescoord zijn.
- Stel een matrix E op zo, dat $E \cdot R$ aangeeft hoeveel vieren, hoeveel vijven, hoeveel zessen, ... de drie groepen samen gescoord hebben.



A 13 Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

a Voor welke matrix P geldt $P \cdot M = 3M$?

b Voor welke matrix Q geldt $Q \cdot M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

c Voor welke matrix R geldt $M \cdot R = \begin{pmatrix} a+b & 2c & b \\ d+e & 2f & e \\ g+h & 2i & h \end{pmatrix}$?

O 14 Gegeven is de matrix $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \end{pmatrix}$.

a Geef de matrix A waarvoor geldt $M \cdot A = M$.

b Geef de matrix B waarvoor geldt $B \cdot M = M$.

Theorie C Machten van een matrix

Een vierkante matrix met op de hoofddiagonaal uitsluitend enen en alle andere elementen gelijk aan nul, heet een **eenheidsmatrix**.

Zo is $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de 3×3 -eenheidsmatrix.

Je kunt een vierkante matrix A met zichzelf vermenigvuldigen.

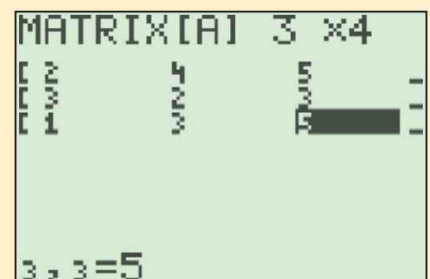
In plaats van $A \cdot A$ schrijven we A^2 . En zo is $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

Maar ook is $A^3 = A^2 \cdot A$ en $A^3 = A \cdot A^2$.

Het berekenen van A^2 en A^3 is een tijdrovend karwei. Gelukkig bezit de GR een optie om met matrices te rekenen. Zowel het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen als machtsverheffen kun je voortaan aan de GR overlaten.

Toch is het van groot belang dat je het principe van het vermenigvuldigen van matrices goed begrijpt. Alleen dan is het mogelijk een door de GR geleverde productmatrix goed te interpreteren.

[► GR] In de module **Matrices** kun je lezen hoe je matrices op de GR invoert en hoe het rekenen met matrices gaat.



Voorbeeld

Gegeven zijn $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ en $Q = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$.

Bereken $P \cdot Q$ en Q^5 .

Uitwerking

De GR geeft $P \cdot Q = \begin{pmatrix} 46 & 32 \\ 41 & 27 \\ 51 & 37 \end{pmatrix}$ en $Q^5 = \begin{pmatrix} 496550 & 344850 \\ 632225 & 439075 \end{pmatrix}$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP	
[A]*[B]	$\begin{bmatrix} 46 & 32 \\ 41 & 27 \\ 51 & 37 \end{bmatrix}$
[B]^5	$\begin{bmatrix} 496550 & 344850 \\ 632225 & 439075 \end{bmatrix}$

- 15** Gegeven zijn $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ en $R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Voer de matrices P , Q en R in op de GR en bereken zo mogelijk.

- a** $P \cdot Q$ **c** $3P + P \cdot Q^4$ **e** $Q^4 - R^5$
b $R \cdot P$ **d** P^3 **f** $R^3 \cdot P + 5P$

- 16** Gegeven zijn $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

- a** Bereken A^2 , A^3 en A^4 .
b Bereken B^2 , B^3 en B^4 .
c Druk C^2 , C^3 , C^4 en C^{10} uit in a .

Verder is gegeven de kolommatrix $K = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- d** Licht toe dat $A^n \cdot K = K$.
e Licht toe dat $B^n \cdot K = 2^n \cdot K$.
f Druk $C^n \cdot K$ uit in a , n en K .
g Bereken a zo, dat $C^5 \cdot K = 6K$.

- A 17** Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ en $K = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$.

- a** Druk A^2 en A^4 uit in a , b , c en d .
b Wat weet je van $abcd$ als $A^4 \cdot K = K$? En wat als $A^4 \cdot K = 2K$?
 En wat als $A^8 \cdot K = 10K$?

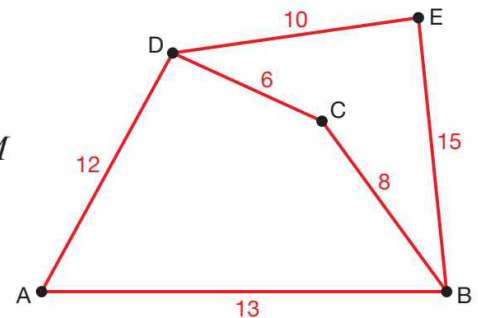
Terugblik

Grafen en matrices

Een graaf bestaat uit punten waarvan er twee of meer verbonden zijn door wegen. In de figuur hiernaast zie je een graaf met vijf punten en zes wegen. Bij deze graaf hoort de afstandstabel hieronder.

		van	
		B	D
	A	13	12
naar	C	8	6
	E	15	10

$$\text{naar} \begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} B & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ C \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 8 & 6 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \end{matrix} = M$$



De plaatsen A, C en E worden bevoorradet vanuit B en D.

De getallen van de afstandstabel staan ook in de matrix M . Een matrix is een rechthoekig schema getallen. De matrix M heeft 3 rijen en 2 kolommen. De afmeting is 3×2 . Het element m_{ij} is het getal in de i -de rij en de j -de kolom van M . Dus $m_{12} = 12$ en $m_{31} = 15$.

Een matrix met afmeting $m \times 1$ heet een kolommatrix.

Een vierkante matrix heeft evenveel rijen als kolommen. De hoofddiagonaal van een vierkante matrix is de diagonaal van linksboven naar rechtsonder.

Vermenigvuldigen van matrices

De matrices A en B kun je vermenigvuldigen als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B . Is A een $m \times n$ -matrix en B een $n \times p$ -matrix, dan is $A \cdot B$ een $m \times p$ -matrix. Het element c_{ij} van de productmatrix bereken je met de i -de rij van A en de j -de kolom van B .

$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$
 $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & \dots \\ 6 & \dots \\ 8 & \dots \\ 3 & \dots \end{pmatrix}$

De productmatrix is

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \dots & \dots \\ q & 78 & \dots \\ r & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 78$

Het vermenigvuldigen van matrices gaat handig met de GR.

Machten van matrices

Van een vierkante matrix A kun je de machten A^n berekenen. Dit doe je met de GR. De $n \times n$ -eenheidsmatrix is de matrix met uitsluitend enen op de hoofddiagonaal en verder allemaal nullen.

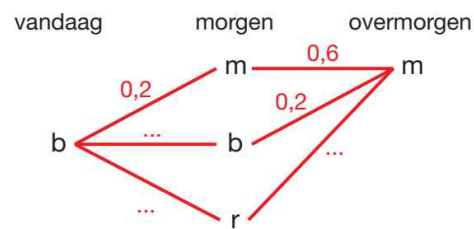
De 3×3 eenheidsmatrix is dus $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2 Matrices en kansen

O18 Een amateurmeteoroloog maakt bij de weersgesteldheid op een dag in mei onderscheid tussen drie situaties: mooi weer (m), bewolkt (b) en regen (r). Na bestudering van een groot aantal statistieken over het weer in mei komt de meteoroloog tot de volgende uitspraken.

- Is het vandaag mooi weer, dan zijn de kansen voor morgen: mooi weer 0,6 bewolkt 0,3 regen 0,1.
- Is het vandaag bewolkt, dan zijn de kansen voor morgen: mooi weer 0,2 bewolkt 0,5 regen 0,3.
- Is het vandaag regenachtig, dan zijn de kansen voor morgen: mooi weer 0,2 bewolkt 0,3 regen 0,5.

Op een dag in mei is het bewolkt. Om de kans te berekenen dat het overmorgen mooi weer is, gebruik je het schema in figuur 4.4. Vul het schema verder in en bereken die kans.

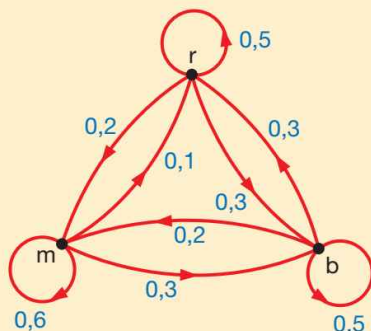


figuur 4.4

Theorie A Overgangsmatrices

De meteoroloog in opgave 18 heeft te maken met drie toestanden die in elkaar overgaan. Door het tekenen van de **gerichte graaf** in figuur 4.5 krijg je een goed overzicht van de mogelijke overgangen. Bij elke pijl staat de bijbehorende kans. Naast de gerichte graaf staat de bijbehorende **overgangsmatrix** W . We spreken af dat we 'van' boven en 'naar' voor de matrix zetten.

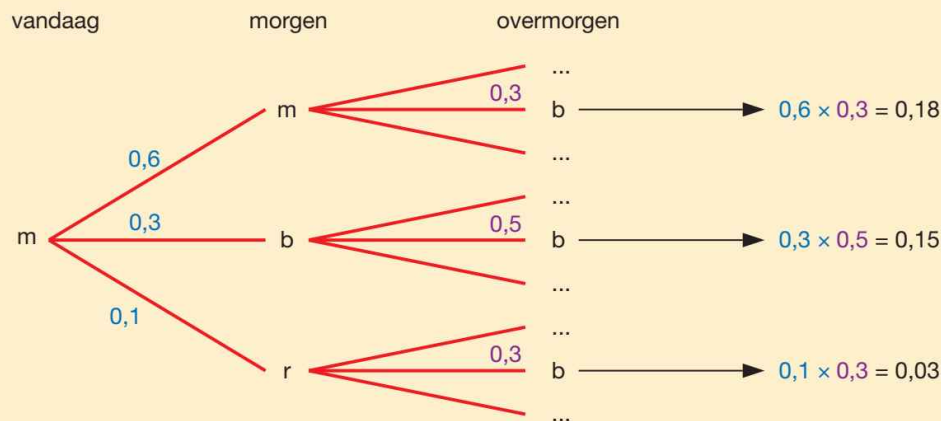
Een graaf met één of meer eenrichtingswegen heet een gerichte graaf.



figuur 4.5

$$\begin{array}{c} \text{OVERGANGSMATRIX} \\ \text{van} \\ \text{naar} \end{array} \begin{array}{c} m \\ b \\ r \end{array} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} = W$$

We vragen ons het volgende af. Als het op een dag in mei mooi weer is, hoe groot is dan de kans dat het twee dagen later bewolkt is? Deze vraag is met een kansboom te beantwoorden.



figuur 4.6

Uit de kansboom volgt dat de gevraagde kans gelijk is aan $0,6 \times 0,3 + 0,3 \times 0,5 + 0,1 \times 0,3 = 0,36$, dus aan de som van de producten van de elementen van de eerste kolom van W met de bijbehorende elementen van de tweede rij van W .

Een dergelijke berekening heb je in de vorige paragraaf bij het vermenigvuldigen van matrices al heel wat keren uitgevoerd. Je hebt hier juist te maken met de berekening van het element w_{21} van de productmatrix $W \cdot W = W^2$. Zie hieronder.

				van		
				m	b	
				r		
	m	b	r	$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} = W$		
$W =$ naar	m	b	r	$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$		
				$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 0,36 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = W^2$		

Is het vandaag mooi weer, dan geeft het element w_{21} van W^2 blijkbaar de kans dat het twee dagen later bewolkt is.

Geeft W de kansen op de overgangen per dag, dan geeft W^2 deze kansen per twee dagen. En zo geeft W^3 de kansen per drie dagen, enzovoort.

Geeft de matrix W de kansen op de overgangen per dag, dan geeft

- de matrix W^2 die kansen per twee dagen
- de matrix W^n die kansen per n dagen.

- 19** Gegeven is de matrix W die de overgangen van het weer in mei beschrijft.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} \text{m} \\ \text{b} \\ \text{r} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} \text{m} & \text{b} & \text{r} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} = W$$

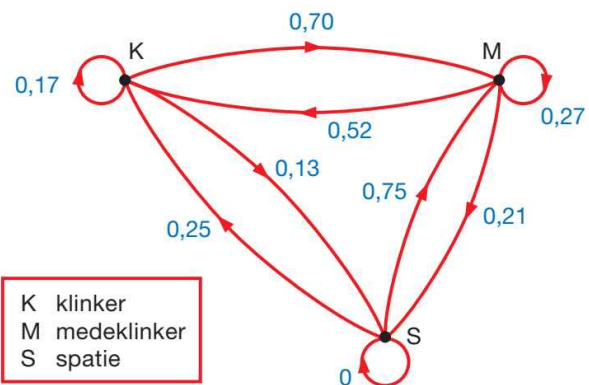
- Waarom is de som van de elementen van elke kolom gelijk aan 1? En waarom hoeft de som van de elementen van een rij niet 1 te zijn?
- Bereken de matrix W^2 .
- Geef een interpretatie van het element w_{31} van W^2 .
- Stel dat het op een dag in mei regent.
Geef de kans dat het twee dagen later mooi weer is.
- Bereken W^3 en geef een interpretatie van het getal w_{23} van deze matrix.
- Stel dat het op 3 mei regent.
Geef de kans dat het op 6 mei ook regent.
- In Egypte is het in de maand mei bijna altijd mooi weer.
Hoe zal de 3×3 -overgangsmatrix er voor Egypte ongeveer uitzien?

- 20** Bij het onderzoek naar eigenschappen van de taal zijn taalwetenschappers geïnteresseerd in het voorkomen van klinkers en medeklinkers. Onderzoek levert voor het Nederlands de graaf in figuur 4.7 op.

- a** Vul de overgangsmatrix T in en geef een interpretatie van het element t_{22} van T .

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} \text{K} \\ \text{M} \\ \text{S} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{M} & \text{S} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = T$$

- Bereken T^3 en geef een interpretatie van het element t_{22} van T^3 .
- Bereken de kans dat vier plaatsen na een medeklinker weer een medeklinker staat.
- Bereken de kans dat vijf plaatsen na een klinker een spatie volgt.



figuur 4.7

Q21 Een verhuurbedrijf van campers in Australië heeft vestigingen in Adelaide, Brisbane en Cairns. Huur je een camper in Adelaide, dan mag je die ook in Brisbane of Cairns inleveren. Hierdoor verandert het aantal beschikbare campers in de vestigingen voortdurend. De overgangsmatrix V geeft de overgangen per maand.

$$\text{naar} \begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,90 & 0,05 & 0,05 \\ 0,04 & 0,85 & 0,02 \\ 0,06 & 0,10 & 0,93 \end{pmatrix} \end{matrix} = V$$

- a Hoeveel procent van de campers uit Adelaide staat daar twee maanden later weer?

Op een gegeven moment staan er 50 campers in Adelaide, 25 campers in Brisbane en 40 campers in Cairns.

- b Zet deze aantallen zo in de kolommatrix K , dat $V \cdot K$ betekenis heeft. Welke betekenis hebben de elementen van $V \cdot K$?
- c Welke betekenis hebben de elementen van $V^2 \cdot K$, denk je?



Theorie B Markovketens

In opgave 21 heb je te maken met de overgangsmatrix V en de kolommatrix K .

Hieronder staat de berekening van de productmatrix $V \cdot K$.

$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,90 & 0,05 & 0,05 \\ 0,04 & 0,85 & 0,02 \\ 0,06 & 0,10 & 0,93 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = K$	$p_{21} = 24,05$ want $\underbrace{0,04 \cdot 50}_{\substack{\text{van A} \\ \text{naar B}}} + \underbrace{0,85 \cdot 25}_{\text{blijft in B}} + \underbrace{0,02 \cdot 40}_{\substack{\text{van C} \\ \text{naar B}}} = 24,05$ Aantal in B na één maand.
$V \cdot K = \begin{pmatrix} 48,25 \\ 24,05 \\ 42,70 \end{pmatrix}$	$= V \cdot K$	

$V \cdot K$ geeft de verdeling één maand later. En zo geeft $V^2 \cdot K$ de verdeling twee maanden later, en $V^3 \cdot K$ de verdeling drie maanden later. Je berekent $V^n \cdot K$ met de GR.

Geef de overgangsmatrix V de kansen op de overgangen per tijdseenheid en de kolommatrix K de verdeling op $t = 0$, dan geeft $V^n \cdot K$ de verdeling op $t = n$.

Een situatie zoals bij de camperverhuur is op te vatten als een zich telkens herhalend kansexperiment. Je hebt te maken met een systeem dat betrekking heeft op meerdere toestanden. Bij de campers zijn dat de toestanden ‘camper staat in A’, ‘camper staat in B’ en ‘camper staat in C’. Bij zo’n situatie is gegeven hoe in een *vast tijdsbestek* een toestand kan overgaan in een andere toestand of in zichzelf.

Zo’n serie van zichzelf alsmaar herhalende kansexperimenten heet een **markovketen**, naar de Russische wiskundige Andrei Markov (1856-1922). Essentieel bij een markovketen is dat je steeds dezelfde overgangsmatrix houdt.

Met machten van de overgangsmatrix kun je voorspellingen doen over toekomstige situaties. Bedenk wel dat je hierbij van enkele randvoorwaarden uitgaat. Zo ga je bij de camperverhuur van de volgende randvoorwaarden uit.

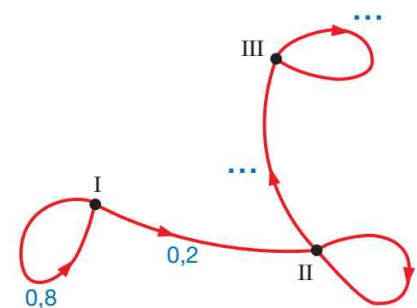
- De in de matrix vermelde kansen blijven gelden.
- Het aantal campers verandert niet. Er is sprake van een **gesloten systeem**.

- 22** Een boomkweker heeft op 1 januari 2015 in totaal 400 bomen op een terrein staan. Hij verdeelt deze bomen in drie klassen:
- klasse I kleiner dan 1 meter
 klasse II vanaf 1 meter tot 2 meter
 klasse III 2 meter of groter
- Elk van zijn bomen groeit per jaar niet meer dan 1 meter. Dus in één jaar kan een boom uit klasse I óf overgaan naar klasse II óf in klasse I blijven. Inventarisatie op 1 januari 2015 en op 1 januari 2016 levert de volgende tabel op.

AANTAL BOMEN OP DE KWEKERIJ

	klasse I	klasse II	klasse III	totaal
1-1-2015	250	100	50	400
1-1-2016	200	120	80	400

- Licht de getallen in de graaf toe en stel de overgangsmatrix V op.
- Bereken hoeveel bomen op 1 januari 2017 in elke klasse zitten.
- Doe dat ook voor 1 januari 2021.



figuur 4.8

Geschiedenis Andrei Markov

Andrei Markov (1856 - 1922) kreeg wereldfaam met een artikel over overgangsmatrices. Merkwaardig genoeg werd Markov bij het schrijven van dit artikel uitsluitend door theoretische achtergronden geïnspireerd. Hij heeft weinig geschreven over toepassingen van zijn theorie. Alleen een taalkundige analyse van het werk van de schrijver Poesjkin is bekend. Markov was erg betrokken bij de politiek. Na de Russische revolutie verzocht hij als echte revolutionair om overplaatsing naar een kleine provinciestad om de jeugd wiskunde te leren. Na een winter vol ontberingen keerde Markov terug naar Sint Petersburg. Zijn gezondheidstoestand was zo verslechterd dat hij spoedig overleed.



4

- A 23** Een vertegenwoordiger in gereedschappen heeft 750 klanten in zijn bestand, voornamelijk winkeliers. Hij verdeelt de klanten in vier categorieën. Heeft een klant minder dan 20% van de gereedschappen uit het aanbod van de vertegenwoordiger, dan komt de klant in categorie I. Heeft de klant tussen de 20% en 50% in zijn assortiment dan komt de klant in categorie II, tussen de 50% en 80% in III en bij meer dan 80% in IV.

In de tabel zie je de verdeling over de categorieën op 1 januari 2015 en op 1 januari 2016. De vertegenwoordiger gaat ervan uit dat een klant in één jaar in dezelfde categorie blijft of in de volgende categorie komt.

AANTAL KLANTEN

	1-1-2015	1-1-2016
categorie I	400	310
categorie II	240	246
categorie III	100	140
categorie IV	10	54
	750	750

- Stel de overgangsmatrix V op.
- Bereken hoeveel klanten op 1 januari 2018 in elke categorie zitten.
- In welk jaar zitten voor het eerst meer dan 500 klanten in categorie III en IV samen?

- O 24** De bewoners van een woonwijk zijn voor hun dagelijkse boodschappen aangewezen op drie winkels: de supermarkten A, B en C. Bij een onderzoek naar de klantenbinding blijkt het volgende.

- Van de klanten die bij A kopen, koopt 85% de volgende week weer bij A, 9% bij B en 6% bij C.
- Van de klanten die bij B kopen, koopt 82% de volgende week weer bij B, 8% bij A en 10% bij C.
- Van de klanten die bij C kopen, koopt 77% de volgende week weer bij C, 12% bij A en 11% bij B.

De bijbehorende overgangsmatrix is S .

- Stel S op.

In een bepaalde week zijn de klanten in de drie winkels geteld: 2500 bij A, 2400 bij B en 2200 bij C.

- Bereken de aantallen klanten vier weken later.
- Bereken de aantallen klanten 20 en 30 weken later. Wat valt je op?
- Bereken S^{20} en S^{30} . Rond af op drie decimalen. Wat valt je op?

Theorie C Stabilisatie

In opgave 24 heb je gezien dat de verdeling van het aantal klanten over de supermarkten op den duur niet meer verandert. Zie ook de tabel hieronder waarin deze verdeling met de GR is doorgerekend.

	S	$S \cdot K$	$S^2 \cdot K$	$S^5 \cdot K$	$S^{10} \cdot K$	$S^{25} \cdot K$	$S^{50} \cdot K$
t	0	1	2	5	10	25	50
A	2500	2581	2639	2731	2774	2785	2785
B	2400	2435	2458	2490	2501	2501	2501
C	2200	2084	2003	1879	1825	1814	1814

Er ontstaat een **evenwichtstoestand**. Op den duur kopen 2785 klanten bij A, 2501 bij B en 1814 bij C. Het blijkt dat je onafhankelijk van de begintoestand telkens dezelfde evenwichtstoestand krijgt. Er treedt **stabilisatie** op.

Zo'n stabilisatie doet zich bij veel overgangsmatrices voor. In opgave 24 kun je de evenwichtstoestand ook aflezen uit S^n , waarbij n voldoende groot is.

Met de GR krijg je de volgende machten. Hierbij is afgerond op drie decimalen.

$$S^{25} = \begin{pmatrix} 0,393 & 0,392 & 0,392 \\ 0,352 & 0,353 & 0,352 \\ 0,255 & 0,256 & 0,256 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$S^{50} = \begin{pmatrix} 0,392 & 0,392 & 0,392 \\ 0,352 & 0,352 & 0,352 \\ 0,255 & 0,255 & 0,255 \end{pmatrix}$$

Vanaf een zekere n verandert S^n nauwelijks meer. Uit de berekende waarden van S volgt dat op den duur 39,2% van de klanten naar supermarkt A gaat. Voor de supermarkten B en C zijn deze percentages 35,2% en 25,5%.

- 25** In 2000 had 29% van de beroepsbevolking in Nederland een lagere opleiding, 44% had een middelbare opleiding en 27% had een hogere opleiding.

De overgangen tussen de verschillende opleidingsniveaus per 20 jaar worden gegeven door de matrix M hiernaast.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} l \\ m \\ h \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ m \\ h \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ m \\ h \end{array} \end{pmatrix} = M$$

- a** Hoeveel procent van de beroepsbevolking heeft naar verwachting in 2060 een lagere opleiding?
- b** Toon aan dat er stabilisatie optreedt. Hoeveel procent van de beroepsbevolking zal uiteindelijk een hogere opleiding hebben?

A 26

Het kabinet wil een gezonde leefstijl bevorderen. Gezonder leven verlaagt de kans op ziekten en levert daardoor een forse kostenbesparing in de gezondheidszorg op.

Het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) kreeg in 2001 de opdracht een onderzoek te doen naar de effecten van meer bewegen.

De bevolking werd ingedeeld in drie klassen.

klasse I de inactieven (0 dagen per week bewegen)

klasse S de semi-actieven

klasse N de normactieven (minstens 5 dagen per week dagelijks een halfuur bewegen)

In 2001 zat 10% van de bevolking in klasse I, 44% in klasse S en 46% in klasse N. De matrix G geeft een goed beeld van de overgangen per jaar.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{S} \\ \text{N} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{c} \text{I} \quad \text{S} \quad \text{N} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} 0,11 & 0,09 & 0,08 \\ 0,52 & 0,48 & 0,42 \\ 0,37 & 0,43 & 0,50 \end{pmatrix} = G$$

- Hoeveel procent van de inactieven was in 2006 nog inactief?
- Hoeveel procent van de bevolking was in 2008 normactief?
- Toon aan dat er stabilisatie optreedt.

Het kabinet streefde ernaar om in tien jaar tijd het aantal inactieven tot 6% terug te brengen en het aantal normactieven te laten stijgen tot 54%. Het RIVM adviseerde daartoe een beleid te voeren dat er op gericht is de overgangskansen naar klasse I te verlagen tot 0,05.

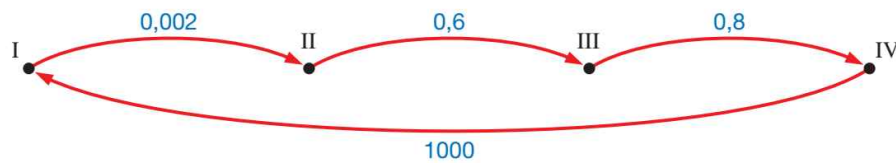
- Wijzig de matrix G zo, dat de aanbevelingen van het RIVM erin verwerkt zijn.
- Onderzoek of het mogelijk is binnen het advies van het RIVM de matrix G zo bij te stellen dat aan het streven van het kabinet voldaan is.



O27

De groei van een populatie vissen wordt vaak gekenmerkt door hoge vruchtbaarheidscijfers en door een lage overlevingskans voor pasgeboren exemplaren.

In de volgende graaf is informatie verwerkt over een populatie vissen die in vier leeftijdsklassen is ingedeeld.



figuur 4.9 In de graaf staan de overgangen per jaar.

klasse I	$0 - < 1$ jaar	klasse III	$2 - < 3$ jaar
klasse II	$1 - < 2$ jaar	klasse IV	$3 - < 4$ jaar

Geen van de vissen haalt de leeftijd van 4 jaar.

- a Hoe is in de graaf verwerkt dat
- geen enkele vis 4 jaar wordt
 - een vis uit klasse IV gemiddeld 1000 nakomelingen heeft
 - alleen vissen uit klasse IV nakomelingen hebben?
- b Op 1 juni 2015 behoren 500 exemplaren van deze populatie tot klasse II.
- Hoeveel exemplaren behoren op 1 juni 2016 tot klasse III? En hoeveel behoren er op 1 juni 2017 tot klasse IV? Voor hoeveel nakomelingen zorgen deze vissen het jaar daarop?

Theorie D Populatievoorspellingsmatrices

In de graaf hiernaast zijn de overgangen per maand van een insectensoort gegeven.

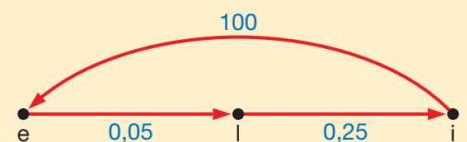
Er is te zien dat 5% van de eitjes (e) zich ontwikkelt tot larve (l) en dat van de larven 25% zich ontwikkelt tot insect (i).

Een maand later is van de oorspronkelijke insecten niet één meer over, maar ze hebben wel elk voor gemiddeld 100 eitjes gezorgd. Hierbij hoort de volgende **populatievoorspellingsmatrix** L , ook wel **lesliematrix** genoemd.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \end{array} \begin{array}{c} \text{e} \\ \text{l} \\ \text{i} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \text{e} \quad \text{l} \quad \text{i} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} = L$$

Hoort bij de beginsituatie de kolommatrix $P = \begin{pmatrix} 4000 \\ 500 \\ 50 \end{pmatrix}$,

dan krijg je met $L \cdot P$ de populatie na één maand. Met $L^2 \cdot P$ krijg je de populatie na 2 maanden en met $L^n \cdot P$ krijg je de populatie na n maanden.



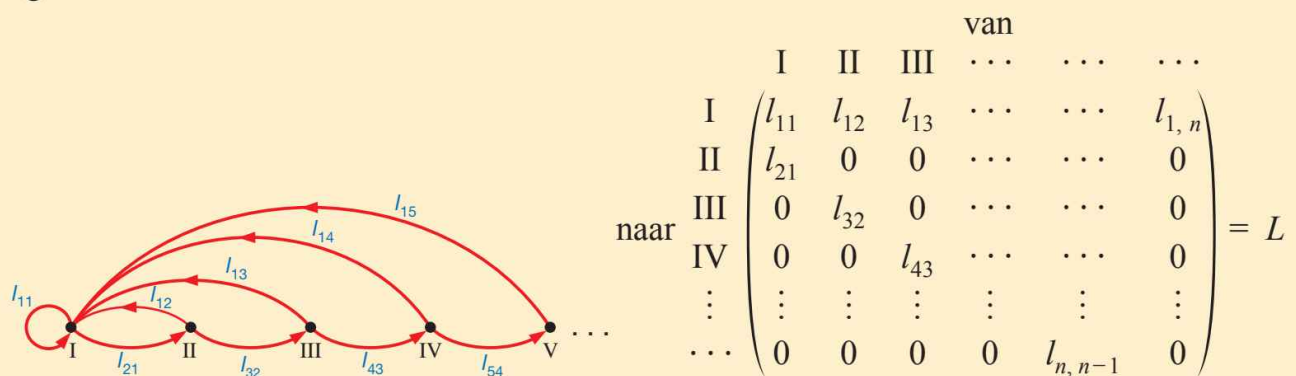
Je kunt nagaan dat $L \cdot P = \begin{pmatrix} 5000 \\ 200 \\ 125 \end{pmatrix}$ en $L^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 12500 \\ 250 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Om populatievoorspellingsmatrices te gebruiken moet de populatie verdeeld zijn in leeftijdsklassen met dezelfde klassenbreedte T .

Nadat een tijdsinterval van lengte T verstreken is, hangt de samenstelling van de populatie af van

- de kans dat een individu in de volgende leeftijdsklasse komt
- het gemiddelde aantal nakomelingen dat elk individu uit een leeftijdsklasse in het tijdsinterval van lengte T krijgt.

De graaf met de overgangen per tijdsinterval T en de populatievoorspellingsmatrix L hebben dus een structuur als in figuur 4.10.



figuur 4.10

De betekenis van element l_{13}

l_{13} geeft het gemiddelde aantal nakomelingen per individu in de derde leeftijdsklasse in één tijdsinterval T .

De betekenis van element l_{43}

l_{43} is de kans dat een individu uit de derde leeftijdsklasse na één tijdsinterval T in de vierde leeftijdsklasse zit.

De getallen in de eerste rij van L noemt men **vruchtbaarheidscijfers**.

Bij het gebruik van Lesliematrices gaan we uit van een aantal veronderstellingen, zoals

- mannen en vrouwen hebben gelijke overlevingskansen
- er is geen immigratie en ook geen emigratie
- de matrix verandert in de loop van de tijd niet.

- 28** Op $t = 0$ zijn er van een populatie dieren 1000 in hun eerste levensjaar, 630 in hun tweede levensjaar, 510 in hun derde levensjaar en 370 in hun vierde levensjaar. Geen van de dieren wordt ouder dan vier jaar. Van de dieren uit het eerste levensjaar bereikt 70% het tweede levensjaar, vanuit het tweede levensjaar bereikt 90% het derde levensjaar en vanuit het derde levensjaar bereikt 80% het vierde levensjaar. Alleen dieren in het derde en vierde levensjaar krijgen jongen. In het derde levensjaar krijgt elk dier gemiddeld twee nakomelingen. In het vierde levensjaar is dat gemiddeld 0,3 per dier.
- Stel de populatievoorspellingsmatrix L op.
 - Bereken de samenstelling na één, twee en drie jaar.



- 29** Van een populatie dieren is de leeftijdsopbouw op 1 januari 2015 en op 1 januari 2016 gegeven. Zie de tabel hiernaast.
- Van de zesjarigen sterft 90% binnen één jaar. Alleen de twee-, drie- en vierjarige dieren krijgen jongen. De tweejarigen en de driejarigen krijgen gemiddeld evenveel jongen, en de vierjarigen krijgen gemiddeld 0,4 jong per dier.
- Stel de lesliematrix L op. Licht de matrix toe met berekeningen.
 - Bereken de te verwachten leeftijdsopbouw op 1 januari 2021.

leeftijd	1-1-2015	1-1-2016
0	6000	6840
1	4000	4500
2	3800	3400
3	3500	2964
4	2500	2590
5	1000	1550
≥ 6	500	600

Geschiedenis Patrick Leslie

In 1945 introduceerde de Engelse bioloog Patrick Leslie een model dat het mogelijk maakte voorspellingen te doen over de samenstelling van populaties. Leslie werkte aan de Universiteit van Oxford op een afdeling die zich bezighield met het bestuderen van dierenpopulaties. In het wetenschappelijke tijdschrift *Biometrika* verscheen in 1945 een artikel van zijn hand met de naam 'On the use of matrices in certain population mathematics'. Hierin werkte hij een reeds in 1941 door H. Bernardelle geopperde suggestie nader uit. Essentieel in zijn idee was om een populatie te verdelen in n leeftijdsklassen die elk k jaar lang zijn. Bij de mens kiest men meestal $k = 5$, bij vissen $k = 2$ en bij knaagdieren $k = \frac{1}{12}$. De naar Leslie genoemde matrices worden tegenwoordig veel gebruikt in de demografie. Wel zijn er allerlei verfijningen in zijn model aangebracht.



A 30 Bij een insectensoort komen de levensfasen eitje, larve en insect voor. Elke fase duurt één maand. Verder is gegeven:

- de kans dat een eitje zich ontwikkelt tot larve is a
- de kans dat een larve zich ontwikkelt tot insect is b
- elk insect legt gemiddeld c eitjes.

- a** Stel de populatievoorspellingsmatrix L op.
b Geef L^3 .

Wat weet je van abc als

- c** de populatie na drie maanden gelijk is aan de beginpopulatie
d na drie maanden het aantal larven met 20% is toegenomen
e de populatie op den duur uitsterft?

A 31 Van een diersoort wordt de halfjaarlijkse verandering in de bevolkingsopbouw gegeven door de populatievoorspellingsmatrix L .

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \text{van} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0,80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = L$$

- a** Bereken de kans dat een pasgeboren dier één jaar wordt.

Op 1 januari 2016 bevatten de leeftijdsklassen achtereenvolgens 500, 160, 60 en 50 dieren.

- b** Bereken de samenstelling op 1 juli 2017.
c Bereken de samenstelling op 1 juli 2015.
d Bereken L^4 . Wat volgt uit L^4 voor de populatie?
e Op 1 januari 2016 zijn er in totaal 770 dieren.
 Hoeveel dieren zijn er op 1 januari 2024?

De dierenpopulatie is nogal schadelijk. Met behulp van een bestrijdingsmiddel wordt de vruchtbaarheid aangetast. Na toepassing van dit middel blijkt de populatieomvang over een periode van twee jaar niet te veranderen.

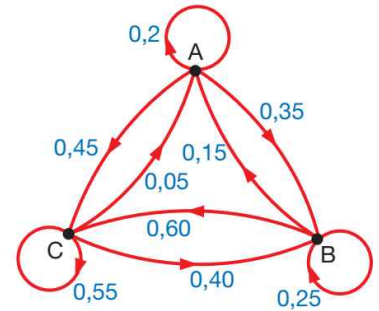
- f** Stel de nieuwe matrix L op. Rond de elementen van L zo nodig af op twee decimalen.

Terugblik

Overgangsmatrices

De getallen in de graaf hiernaast zijn de kansen op de verschillende overgangen per week. Bij deze graaf hoort de overgangsmatrix M .

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} 0,20 & 0,15 & 0,05 \\ 0,35 & 0,25 & 0,40 \\ 0,45 & 0,60 & 0,55 \end{pmatrix} = M$$



In een overgangsmatrix is de som van de getallen in elke kolom gelijk aan 1.

In de graaf zie je het verloop van de klanten tussen de supermarkten A, B en C per week.

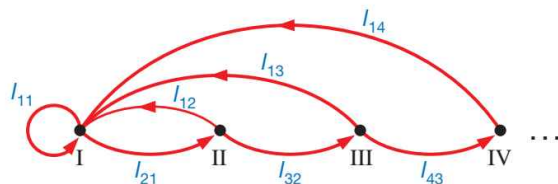
Geeft M de kansen op overgangen per week, dan geeft M^n de kansen op de overgangen per n weken. Is de verdeling van de klanten over de supermarkten A, B en C in een bepaalde week gegeven door de matrix K , dan geeft het product $M \cdot K$ de verdeling één week later. $M^2 \cdot K$ geeft de verdeling van de klanten twee weken later, $M^3 \cdot K$ de verdeling drie weken later, enzovoort. Met de GR zijn zulke berekeningen snel te maken.

Markovketens en stabilisatie

Bij de supermarkten hierboven is sprake van een markovketen. Dat is een serie zichzelf herhalende onafhankelijke kansexperimenten. De kansen in de overgangsmatrix veranderen niet en er is sprake van een gesloten systeem. Een markovketen kun je gebruiken om voorspellingen te doen. Vaak ontstaat er na verloop van tijd een evenwichtstoestand. Er treedt stabilisatie op. Bij de bovengenoemde matrix M kun je de evenwichtstoestand vinden door met de GR machten van M te berekenen. Ga door tot M^n niet meer verandert.

Populatievoorspellingsmatrices

De Engelsman Leslie ontwikkelde een model om de groei van een populatie te bestuderen. De populatie wordt daarbij verdeeld in n leeftijdsklassen die elk k jaar lang zijn.



In een populatievoorspellingsmatrix staan in de eerste rij vruchtbaarheidscijfers. De overige elementen in de matrix die niet nul zijn, zijn de overlevingskansen. Zo is l_{43} in L de kans dat een exemplaar uit klasse III na k jaar in klasse IV zit.

$$\begin{array}{c} \text{aar} \\ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \dots \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & \dots \\ l_{21} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & l_{32} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & l_{43} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = L$$

Soms is de klassenbreedte van de oudste leeftijdsklasse groter dan k jaar. In dat geval is het element l_{nm} van L ongelijk aan nul.

4.3 Stelsels en matrices

O32 Gegeven is de matrixvermenigvuldiging $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Licht dit toe dat hierbij het stelsel $\begin{cases} x - 4y = 8 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ hoort.

Als je twee keer de eerste vergelijking aftrekt van de tweede

vergelijking krijg je het stelsel $\begin{cases} x - 4y = 8 \\ 11y = -11 \end{cases}$.

b Licht dit toe en gebruik dit om de oplossing van het stelsel te berekenen.

Theorie A Oplossen van stelsels met behulp van matrices

Het stelsel van opgave 32 is te noteren als $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}$.

Links van de verticale streep staan de coëfficiënten van de variabelen.

De matrix $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ heet de **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel.

De matrix $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}$ heet de **aangevulde matrix** van het stelsel.

In opgave 32 is de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}$ overgegaan in de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ -11 \end{vmatrix}.$$

Uit de onderste rij volgt $11y = -11$, dus $y = -1$.

Samen met $x - 4y = 8$ geeft dat $x = 4$, dus de oplossing van het stelsel is $(x, y) = (4, -1)$.

Elk stelsel lineaire vergelijkingen is te noteren als een matrix.

Zo hoort bij het stelsel

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - y + 4z = 3 \\ 2x + 5y - z = 15 \end{cases} \text{ de matrix } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \end{vmatrix}.$$

Noem de rijen van de matrix R_1 , R_2 en R_3 .

We gaan nu als volgt te werk om het stelsel op te lossen.

- 1 Trek $3R_1$ af van R_2 en trek $2R_1$ af van R_3 .

We noteren dit als volgt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \end{array}\right)$$

- 2 Tel $7R_3$ op bij R_2 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + 7R_3 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -54 & 108 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \end{array}\right)$$

- 3 Deel R_2 door -54 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -54 & 108 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{54}R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \end{array}\right)$$

Uit de tweede rij volgt $z = -2$.

Uit de derde rij volgt $y - 7z = 15$ en samen met $z = -2$ geeft dit $y = 1$.

Uit de eerste rij volgt $x + 2y + 3z = 0$ en samen met $y = 1$ en $z = -2$ geeft dit $x = 4$.

De oplossing van het stelsel is dus $(x, y, z) = (4, 1, -2)$.

Bij de laatste stappen in deze oplossingsmethode is achterwaartse substitutie gebruikt. Om tot een matrix te komen waarmee je met achterwaartse substitutie de oplossing van het stelsel kunt berekenen, mag je de volgende **elementaire rijbewerkingen** gebruiken.

Elementaire rij-bewerkingen

- Je mag twee rijen verwisselen.
- Je mag een rij vermenigvuldigen met een getal dat niet nul is.
- Je mag een veelvoud van een rij optellen bij een andere rij.

Met een elementaire rij-bewerking wordt een stelsel lineaire vergelijkingen omgezet in een gelijkwaardig stelsel lineaire vergelijkingen. Dat betekent dat met zo'n omzetting de oplossing van het stelsel niet verandert.

Door het uitvoeren van elementaire rij-bewerkingen ontstaan **rij-equivalente matrices**.

Twee matrices zijn rij-equivalent als ze uit elkaar ontstaan door één of meer elementaire rij-bewerkingen.

Door bij laatste matrix op de vorige bladzijde de tweede en de derde

rij te verwisselen, krijg je de matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

Aan deze matrix kun je direct zien dat het vinden van een oplossing met achterwaartse substitutie mogelijk is. Uit de onderste rij volgt z . Door de waarde van z en de rij erboven te gebruiken, krijg je y . Enzovoort.

In het voorbeeld wordt een stelsel van vier vergelijkingen en vier variabelen opgelost door toe te werken naar een matrix met de vorm zoals hiernaast.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & c & d \\ 0 & 1 & e & f & g \\ 0 & 0 & 1 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & j \end{array}\right)$$

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 13 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 23 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 22 \text{ op.} \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 29 \end{cases}$

Uitwerking

Bij het stelsel hoort de matrix $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 23 \\ 2 & 5 & 5 & -1 & 22 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 29 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 23 \\ 2 & 5 & 5 & -1 & 22 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 29 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 - 2R_1 \rightarrow R_4}]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_4}]{R_4 \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-R_4 \rightarrow R_4}]{-R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

R_4 geeft $x_4 = 3$.

$x_4 = 3$ en R_3 geeft $x_3 + 6 = 7$, dus $x_3 = 1$.

$x_3 = 1$, $x_4 = 3$ en R_2 geeft $x_2 + 4 - 3 = 3$, dus $x_2 = 2$.

$x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$ en R_1 geeft $x_1 + 4 + 1 + 3 = 13$, dus $x_1 = 5$.

De oplossing is $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 2, 1, 3)$.

In het voorbeeld zijn de oplossingen gevonden door te **vegen in kolommen**. Eerst is de eerste kolom geveegd, dat wil zeggen dat er in de kolom één 1 en verder nullen komen te staan. Er is geveegd met het element 1 in de eerste rij en de eerste kolom. Het element waarmee je veegt heet het **spilelement** of kortweg de **spil**. Daarna is het element in de tweede rij en de tweede kolom als spil gekozen om de tweede kolom te vegen. Na het vegen van de eerste kolom is gekozen voor het verwisselen van de tweede en de vierde rij, zodat je in de tweede rij een 1 als spil krijgt.

33 Los de volgende stelsels op zoals in het voorbeeld.

a
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 18x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 15 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 6x_4 = 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 21 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 63 \end{cases}$$

A 34 Gegeven is dat de parabool $y = ax^2 + bx + c$ door de punten $(-1, 9)$, $(2, 6)$ en $(3, 13)$ gaat. Bereken a , b en c door een stelsel op te lossen.

O 35 Bij het stelsel
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$
 hoort de matrix A .

a Geef A .

Bij het stelsel hoort ook de matrix $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array} \right)$.

b Bereken p , q en r .

Theorie B Het gauss-jordanalgoritme

Bij het stelsel
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

hoort de aangevulde matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 13 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Door te vegen in kolommen krijg je de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

De matrix staat nu in **rij-echelonvorm**.

In de definitie van een matrix die in rij-echelonvorm staat, komen de begrippen nulrij en leidend element voor. Een **nulrij** is een rij die uitsluitend uit nullen bestaat. Het **leidende element** van een rij is het eerste element in de rij dat ongelijk is aan nul.

Matrix in rij-echelonvorm

- Elk leidend element in de matrix is gelijk aan 1.
- De niet-nulrijen zijn zo geordend dat elke volgende rij met meer nullen begint.
- Eventuele nulrijen staan onderaan in de matrix.

De matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ kan worden omgevormd tot de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Deze matrix staat in **gereduceerde rij-echelonvorm**.

Matrix in gereduceerde rij-echelonvorm

- De matrix staat in rij-echelonvorm.
- In een kolom met een leidende 1 is elk ander element gelijk aan 0.

Het omvormen van een matrix in rij-echelonvorm tot een matrix in gereduceerde rij-echelonvorm gaat met het vegen in kolommen met behulp van de leidende elementen. Het met elementaire rijbewerkingen omvormen van een willekeurige matrix naar een matrix in gereduceerde rij-echelonvorm, heet het **gauss-jordanalgoritme**.

Informatief Algoritme

Een algoritme is een eindige reeks instructies die vanuit een gegeven begintoestand naar een beoogd doel leiden. Een algoritme is dus een soort recept. Het woord algoritme komt van het Arabische woord *algawarizmiat* en dit is afgeleid van de Perzische wiskundige Al-Khwarizmi (± 790 - 845).

Algoritmen worden veel gebruikt in de informatica.



Voorbeeld

Stel bij de matrix $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right)$ de matrix B op in gereduceerde rij-echelonvorm.

Uitwerking

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 4R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & 9 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{6}R_3 \rightarrow R_3} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[R_2 + 3R_3 \rightarrow R_2]{R_1 - 4R_3 \rightarrow R_1} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) = B$$

- R 36** Bij de matrix A van het voorbeeld hoort een stelsel lineaire vergelijkingen met de variabelen x_1 , x_2 en x_3 . Noteer dit stelsel en geef hiervan de oplossing.

- 37** Welke van de volgende matrices staan in rij-echelonvorm en welke in gereduceerde rij-echelonvorm?

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$C = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad D = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

- 38** Stel bij de matrix de bijbehorende matrix in gereduceerde rij-echelonvorm op.

$$\text{a } A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \text{b } B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 27 \\ 3 & 8 & 5 & -3 & 21 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 31 \\ 1 & 4 & 6 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

39 Onderzoek of de matrices rij-equivalent zijn.

a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

b $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

A 40 Gegeven het stelsel $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = p \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

Druk de oplossing van het stelsel uit in p .

A 41 In figuur 4.11 zie je een aantal stangen waaraan de gewichten G_1 , G_2 , G_3 , G_4 en G_5 hangen. De massa's van de gewichten zijn zo gekozen dat het systeem in evenwicht is.

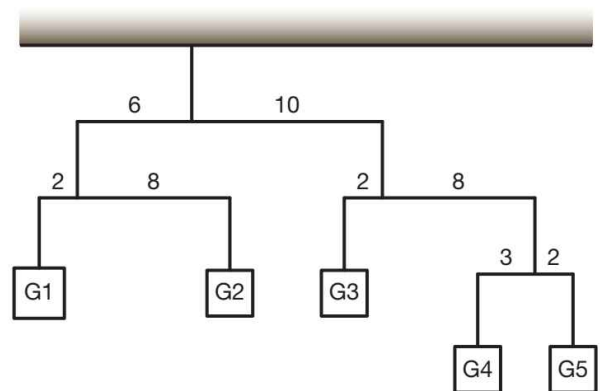
Volgens de hefboomwet van Archimedes geldt voor elk draaipunt dat het product van de lengte van de arm en het gewicht dat aan die arm hangt links en rechts gelijk moet zijn.

Hieruit volgt bijvoorbeeld

$$6(G_1 + G_2) = 10(G_3 + G_4 + G_5).$$

a Licht toe dat er oneindig veel waarden voor G_1 , G_2 , G_3 , G_4 en G_5 zijn.

b Bereken G_1 , G_2 , G_3 , G_4 en G_5 als de gewichten samen 800 gram wegen.



figuur 4.11

Geschiedenis Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss werd in 1777 geboren in Braunschweig, in het huidige Niedersachsen. Zijn eerste baanbrekende wiskundige ontdekkingen deed hij al toen hij nog een tiener was. Zo was zijn constructie van een regelmatige zeventienhoek met passer en liniaal de eerste wezenlijke vooruitgang in de klassieke meetkunde sinds de tijd van de oude Grieken. Zijn hoofdwerk, de *Disquisitiones Arithmeticae*, voltooide Gauss op 21-jarige leeftijd. Dit werk was van fundamenteel belang voor de getaltheorie. In diverse andere gebieden binnen de exacte wetenschappen zorgde zijn werk voor belangrijke nieuwe inzichten, bijvoorbeeld in de statistiek, de analyse, de astronomie, de mechanica en de optica. Gauss wordt algemeen erkend als een van de briljantste wiskundigen uit de geschiedenis. Om deze reden wordt hij soms de koning van de wiskunde genoemd. Hij overleed in 1855 in Göttingen.



O42

Gegeven zijn de stelsels lineaire vergelijkingen I, II en III hieronder. Bij I hoort de aangevulde matrix A , bij II hoort de aangevulde matrix B en bij III hoort de aangevulde matrix C .

$$\text{I} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\text{III} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 13 \end{cases}$$

a Matrix A is met elementaire rij-bewerkingen om te vormen tot

$$\text{de matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Wat betekent dit voor de oplossing van stelsel I?

b Matrix B is met elementaire rij-bewerkingen om te vormen tot

$$\text{de matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Wat betekent dit voor de oplossing van stelsel II?

c Matrix C is met elementaire rij-bewerkingen om te vormen tot

$$\text{de matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Wat betekent dit voor de oplossing van stelsel III?

Theorie C Het aantal oplossingen van een stelsel

Bij het stelsel $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ hoort de aangevulde matrix $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \end{array} \right)$.

De matrix A is om te vormen tot $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$.

Hieraan is te zien dat het stelsel één oplossing heeft. De oplossing is $(x, y) = (4, 3)$. Het stelsel is **samenhangend en bepaald**.

Bij het stelsel $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ hoort de aangevulde matrix $B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$.

De matrix B is om te vormen tot $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

Hieraan is te zien dat het stelsel geen oplossing heeft. Uit de onderste rij volgt immers $0x + 0y = 1$ en hieraan voldoet geen enkele oplossing (x, y) . Het stelsel is **niet-samenhangend**. De vergelijkingen van het stelsel zijn **strijdig**.

Bij het stelsel $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$ hoort de aangevulde matrix $C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array} \right)$.

De matrix C is om te vormen tot $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Hieraan is te zien dat het

stelsel oneindig veel oplossingen heeft. Uit de onderste rij volgt namelijk de ware bewering $0x + 0y = 0$. Uit de overblijvende rij volgt $x + 2y = 10$ en hieraan voldoen oneindig veel oplossingen (x, y) . Het stelsel is **samenhangend en onbepaald**. De vergelijkingen van het stelsel zijn **afhankelijk**.

Bij een samenhangend en onbepaald stelsel heb je in feite te maken met

meer variabelen dan vergelijkingen. Zo heb je bij het stelsel $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$

eigenlijk alleen de vergelijking $x + 2y = 10$, want $2x + 4y = 20$ ontstaat uit $x + 2y = 10$ door beide leden met 2 te vermenigvuldigen.

Ook bij het stelsel $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 27 \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 34 \end{cases}$ heb je te maken met meer

variabelen dan vergelijkingen. De onderste vergelijking ontstaat namelijk door de eerste en de tweede vergelijking bij elkaar op te tellen. Ook hier heb je te maken met vergelijkingen die afhankelijk zijn van elkaar. Na het omvormen van de aangevulde matrix krijg je een matrix met een nulrij. Verander je in het stelsel hierboven een van de getallen 7, 27 of 34, dan ontstaat een niet-samenhangend stelsel. In de omgevormde matrix komt in een van de rijen $0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$ te staan.

Aantal oplossingen van stelsels

Een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n variabelen is

- samenhangend en bepaald als er één oplossing is. De gereduceerde rij-echelonvorm van de aangevulde matrix bestaat uit een $n \times n$ eenheidsmatrix en een kolom met de oplossing. De vergelijkingen van het stelsel zijn onafhankelijk van elkaar.
- niet-samenhangend als er geen oplossing is. De gereduceerde rij-echelonvorm van de aangevulde matrix heeft een rij die begint met n nullen en eindigt met een getal ongelijk nul. De vergelijkingen van het stelsel zijn strijdig.
- samenhangend en onbepaald als er oneindig veel oplossingen zijn. De gereduceerde rij-echelonvorm van de aangevulde matrix heeft een nulrij. De vergelijkingen van het stelsel zijn afhankelijk.

Het omvormen van een matrix naar de gereduceerde rij-echelonvorm kan snel met de GR worden gedaan.

Op de TI gebruik je de optie B: rref van het MATRIX-MATH-menu.

Op de Casio gebruik je de optie Rref uit het OPTN-MAT-menu.

Voorbeeld

Onderzoek van welk type het volgende stelsel is.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

Uitwerking

Voer in $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

De optie rref (TI) of Rref (Casio) geeft $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1\frac{1}{2} & 4\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Het stelsel is samenhangend en onbepaald. Er zijn oneindig veel oplossingen.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP

[A]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

rref([A])

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -.5 & 4.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Math Rad Norm1 d/g Real

Rref Mat A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 & 4.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mat Mat→Lst Det Trn Augment

- 43** Onderzoek van welk type de volgende stelsels zijn en geef zo mogelijk de oplossing.

a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 14 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 14 \end{cases}$

b $\begin{cases} a + 4b - 5c + 3d = 19 \\ a - 2b + c - 3d = -5 \\ 2a - b + 3c - 11d = -2 \\ a - 5b + 8c - 14d = -21 \end{cases}$

c $\begin{cases} p + 4q - 5r + 3s = 19 \\ p - 2q + r - 3s = -5 \\ 2p - q + 3r - 11s = -2 \\ p - 5q + 8r - 14s = 20 \end{cases}$

- 44** Bereken voor welke p het stelsel $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \\ 2x + y = p \end{cases}$ samenhangend en bepaald is.

45 Bereken voor welke q de vergelijkingen van het stelsel

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + y + 3z = 5 \\ 2x + y - z = 6 \\ 3x + y - 2z = q \end{cases} \quad \text{strijdig zijn.}$$

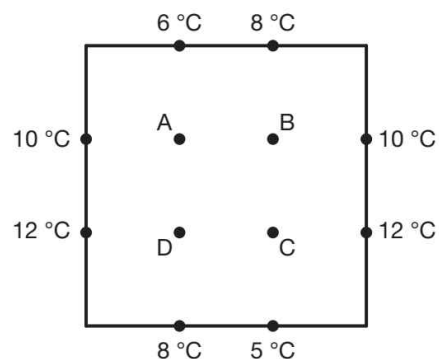
A 46 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = a \\ x - y + z = 5 \\ 3x + by + 5z = 6 \end{cases}$

Bereken voor welke a en b het stelsel

- a één oplossing heeft
- b geen oplossing heeft
- c oneindig veel oplossingen heeft.

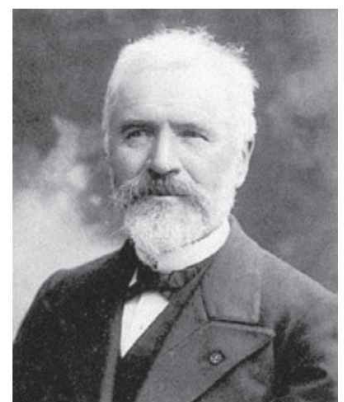
A 47 Gegeven is dat $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$. Bereken a , b , c en d door een stelsel op te lossen.

A 48 Op internet kun je op ieder moment zien wat de temperatuur in een bepaalde plaats is. Deze temperatuur wordt voor veel plaatsen berekend met behulp van gegevens van weerstations. In de figuur hiernaast zie je de plaatsen A, B, C en D en de temperaturen die zijn gemeten in acht naburige weerstations. We nemen aan dat de temperatuur in ieder punt het gemiddelde is van de temperaturen van de vier naastgelegen punten. Voor de temperatuur T_A in A geldt dus $T_A = \frac{1}{4}(10 + T_D + T_B + 6)$. Bereken de temperatuur in A, B, C en D door een stelsel op te lossen. Rond af op één decimaal.



Geschiedenis Camille Jordan

Camille Jordan (1838 - 1922) was een Franse wiskundige. Hij studeerde in Parijs aan de École Polytechnique, waaraan hij later ook als hoogleraar verbonden was. Zijn verdiensten liggen met name op het gebied van de grafentheorie. Zijn naam is onder andere verbonden aan de jorkankromme en de jordan-normaalvorm, een matrix in de lineaire algebra. Hij stelde bij zijn publicaties hoge eisen aan de exacte formuleringen van de definities en de strengheid van de bewijzen van de stellingen.



Terugblik

Vegen in kolommen met het gauss-jordanalgoritme

Bij het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ x + 2y - 4z = -6 \\ 3x - y + 2z = 17 \end{cases}$ hoort de coëfficiëntenmatrix $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

en de aangevulde matrix $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -4 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & 17 \end{array} \right)$.

Het stelsel kan worden opgelost door de matrix A om te vormen tot de matrix

$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right)$ die rij-equivalent is met matrix A .

Dit omvormen gaat met het vegen in kolommen.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -4 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & -7 & 9 & 20 \\ 0 & -7 & 14 & 35 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 9 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dus de oplossing is $(x, y, z) = (4, 1, 3)$.

Samenhangende en niet-samenhangende stelsels

Het stelsel hierboven heeft één oplossing. Het stelsel is samenhangend en bepaald.

Bij een niet-samenhangend stelsel zijn de vergelijkingen strijdig. Dit is

bijvoorbeeld het geval bij het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ x + 2y - 4z = -6 \\ 3x - y - 3z = 17 \end{cases}$

Na het vegen in kolommen van de aangevulde matrix krijg je een rij met $0 \ 0 \ 0 \ 1$. Het stelsel is niet-samenhangend.

Een stelsel kan ook samenhangend en onbepaald zijn. Er zijn dan oneindig veel oplossingen.

Bij het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ x + 2y - 4z = -6 \\ 3x - y - 3z = 2 \end{cases}$ is de derde vergelijking de som van de eerste twee. Je hebt dus eigenlijk te maken met twee vergelijkingen met drie variabelen.

Na het vegen in kolommen van de aangevulde matrix krijg je een nulrij.

4.4 Inverse matrices en determinanten

O 49 Bij de stelsels $\begin{cases} x + 4y = 23 \\ 2x + 9y = 51 \end{cases}$ en $\begin{cases} x + 4y = 22 \\ 2x + 9y = 50 \end{cases}$ hoort de coëfficiëntenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Je kunt beide stelsels in één keer oplossen door de aangevulde

matrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 23 & 22 \\ 2 & 9 & | & 51 & 50 \end{pmatrix}$ te vegen tot de vorm $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a & b \\ 0 & 1 & | & c & d \end{pmatrix}$.

Bereken op deze manier de oplossingen.

O 50 Gegeven is de aangevulde matrix $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

De gereduceerde rij-echelonvorm van A is $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$.

a Toon dit aan.

b Bereken $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Wat valt je op?

Theorie A De inverse matrix

Bij een vierkante matrix A kan precies één matrix B horen waarvoor geldt $A \cdot B = B \cdot A = I$. Hierbij is I een eenheidsmatrix. Matrix B is de **inverse matrix** of kortweg de **inverse** van A . Notatie $B = A^{-1}$. Er geldt dus $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

In opgave 50 heb je gezien dat je de inverse matrix van $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ kunt

vinden door de gereduceerde rij-echelonvorm van $\begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 1 & 0 \\ 2 & 9 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$ te berekenen.

Bij het stelsel $\begin{cases} x + 4y = 23 \\ 2x + 9y = 51 \end{cases}$ hoort de coëfficiëntenmatrix

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ en de kolommatrix $B = \begin{pmatrix} 23 \\ 51 \end{pmatrix}$.

Het stelsel is te noteren als $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$.

Het stelsel $\begin{cases} x + 4y = 23 \\ 2x + 9y = 51 \end{cases}$ is te noteren als $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 51 \end{pmatrix}$.

Vermenigvuldig je beide leden van $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$ aan de

linkerkant met A^{-1} , dan krijg je $A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$. Omdat

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ krijg je } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B.$$

In opgave 50 heb je gezien dat $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, dus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Hiermee is de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x + 4y = 23 \\ 2x + 9y = 51 \end{cases}$ gevonden.

De oplossing is $(x, y) = (3, 5)$.

Op deze manier kun je bij elk stelsel lineaire vergelijkingen de oplossing berekenen, mits de inverse matrix van de coëfficiëntenmatrix bestaat.

De oplossing van het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

is $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Voorwaarde is dat de inverse matrix A^{-1} van de coëfficiëntenmatrix A bestaat.

Het berekenen van de inverse matrix A^{-1} gaat eenvoudig met de GR. Gebruik hierbij de toets x^{-1} .

De inverse matrix is ook te gebruiken om bij overgangsmatrices 'in de tijd terug te rekenen'.

De regel

geeft de overgangsmatrix V de overgangen per tijdseenheid en de kolommatrix K de verdeling op $t = 0$, dan geeft $V^n \cdot K$ de verdeling op $t = n$

is ook toepasbaar voor $n = -1$.

En met $(V^{-1})^2 \cdot K$ krijg je de verdeling twee tijdseenheden terug.

Voorbeeld

Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} 3x + 4y + z = p \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x + 5y + 3z = -1 \end{cases}$$

- a** Neem $p = 0$ en los het stelsel op door gebruik te maken van een inverse matrix.
b Druk de oplossing van het stelsel uit in p .

Uitwerking

a Voer in $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De GR geeft $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus de oplossing is $(x, y, z) = (3, -2, -1)$.

b De GR geeft $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,7 & 0,5 \\ 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,6 & -0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8p + 3 \\ p - 2 \\ -0,6p - 1 \end{pmatrix}$$

De oplossing is $(x, y, z) = (-0,8p + 3; p - 2; -0,6p - 1)$.

51 Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} x + 2y - 5z = p \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

- a** Neem $p = 3$ en los het stelsel op door gebruik te maken van een inverse matrix.
b Druk de oplossing van het stelsel uit in p .

52 Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = p \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = q \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

- a** Neem $p = 4$ en $q = 0$ en los het stelsel op door gebruik te maken van een inverse matrix.
b Druk de oplossing van het stelsel uit in p en q .

R 53 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

Licht toe dat het stelsel geen oplossing heeft.

Hoe volgt hieruit dat matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ geen inverse heeft?

D 54 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Druk A^{-1} uit in p, q, r en s .

A 55 In een bosgebied is in 2012 en 2014 het aantal wilde zwijnen geteld. De dieren zijn hierbij in vier leeftijdsklassen verdeeld. In klasse I zitten de 0- en 1-jarigen, in klasse II de 2- en 3-jarigen, in klasse III de 4- en 5-jarigen, en in klasse IV de dieren van 6 jaar en ouder.

klasse	I	II	III	IV
nov. 2012	100	80	60	50
nov. 2014	119	75	56	46

Alleen de dieren in de klassen II en III krijgen jongen, en wel per individu evenveel per jaar. Verder is gegeven dat de overlevingskans voor de 4- en 5-jarigen gelijk is aan 0,6.

Bij deze gegevens is de populatievoorspellingsmatrix L op te stellen die de overgangen per twee jaar geeft.

- Bereken de elementen l_{21} en l_{32} van L .
- Toon met berekeningen aan dat uit de gegevens volgt dat $l_{44} = 0,2$ en $l_{12} = l_{13} = 0,85$.
- Bereken hoe de leeftijdsopbouw in november 2010 en in november 2008 was.
- Bereken met hoeveel procent de populatie in november 2024 naar verwachting is toegenomen, vergeleken met november 2012.



O 56 Onderzoek hoeveel oplossingen elk van de volgende stelsels heeft.

I $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$

II $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

III $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$

Theorie B Determinanten

Het stelsel $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$ heeft

- één oplossing als $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$
- geen oplossingen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$
- oneindig veel oplossingen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.

In de laatste twee gevallen is $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$ ofwel $aq = bp$, dus $aq - bp = 0$.

De term $aq - bp$ heet de **determinant** van de matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}$.

Notatie $\det(A) = aq - bp$, of $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = aq - bp$.

De determinant van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ is $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Als $|A| \neq 0$ dan heeft het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ één oplossing.

Als $|A| = 0$ dan heeft het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ geen oplossingen of oneindig veel oplossingen.

Ook bij vierkante matrices van een hogere orde dan 2×2 hoort een determinant.

En ook hier geldt dat het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ één

oplossing heeft als $|A| \neq 0$.

De determinant van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ is

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Hierbij is de determinant *ontwikkeld volgens de eerste rij*.

Hiernaast zie je hoe de berekening van de term $a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$ in beeld kan worden gebracht.

Je berekent daarbij de determinant van de

ondermatrix $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Deze determinant heet de **onderdeterminant** van a_{11} .

De onderdeterminant van a_{11} is dus $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$.

En zo is de onderdeterminant van a_{12} gelijk aan $a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$$

figuur 4.12 De onderdeterminant van a_{12} is gelijk aan $a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$ en de onderdeterminant van a_{13} is gelijk aan $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$.

Let op het minteken voor a_{12} in de determinant van A . Het is ook mogelijk een determinant te ontwikkelen volgens een andere rij of volgens een kolom. Dit is met name handig als er een rij of kolom is die één of meer nullen bevat. Gebruik hierbij het schema hiernaast.

$$\begin{pmatrix} \boxed{+} & \boxed{-} & \boxed{+} \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & p \\ 2p & 1 & 2 \\ 1 & 4 & p \end{pmatrix}$.

Bereken voor welke p geldt $|A| = 0$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} |A| &= 2(p - 8) - 3(2p^2 - 2) + p(8p - 1) \\ &= 2p - 16 - 6p^2 + 6 + 8p^2 - p \\ &= 2p^2 + p - 10 \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \text{ geeft } 2p^2 + p - 10 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81$$

$$p = \frac{-1 - 9}{4} = -2\frac{1}{2} \vee p = \frac{-1 + 9}{4} = 2$$

Dus voor $p = -2\frac{1}{2}$ en voor $p = 2$ is $|A| = 0$.

R 57 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Ontwikkel de determinant volgens de tweede rij en laat zien dat je hetzelfde krijgt als bij ontwikkeling volgens de eerste rij.

58 Bereken de determinant.

a $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

c $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

d $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

59 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 2 & b & a \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a Neem $a = 1$ en bereken voor welke b geldt $|A| = 0$.

b Neem $b = 1$ en bereken voor welke a geldt $|A| = 0$.

60 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & p & 5 \\ 3 & 4 & 3p \\ 2 & p & 1 \end{pmatrix}$.

Bereken voor welke p geldt $|A| = 0$.

61 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \\ x + y - z = p \end{cases}$

a Bereken de determinant van de coëfficiëntenmatrix.

Op grond van het antwoord op vraag a zijn er twee mogelijkheden voor het aantal oplossingen van het stelsel.

b Licht dit toe.

Onderzoek wat de oplossing is van het stelsel

c voor $p = 0$

d voor $p = 1$.

D 62 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Toon aan dat $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$.

A 63

Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + px_3 = 3 \\ -8px_1 + 3x_2 + 2x_3 = -50 \\ 5x_1 + 6x_2 + px_3 = 19 \end{cases}$$

- Bereken voor welke waarden van p het stelsel geen oplossing heeft.
- Bereken de oplossing van het stelsel voor $p = 2$.
- Bereken voor welke waarde van p de oplossing van het stelsel $(11, -14, -48)$ is.

R 64

Gegeven is de vierkante matrix A .

Wat weet je van $|A|$ als A^{-1} niet bestaat? Licht toe.

4

65

Gegeven is $\triangle OAB$ in figuur 4.13 met $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$. De oppervlakte van $\triangle OAB$ is uit te drukken in x_A, x_B, y_A en y_B . Gebruik hierbij de rechthoek met zijden x_A en y_B .

Er geldt $O(\triangle OAB) = \frac{1}{2}x_A y_B - \frac{1}{2}x_B y_A$.

- Toon dit aan.
- Bereken de determinant van de matrix

$$M = \begin{pmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{pmatrix}$$

en laat zien dat $O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot \det(M)$.

Omdat $O(\triangle OAB) > 0$ en $\det(M) < 0$ kan zijn, geldt algemeen

$$O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} |\det(M)|$$

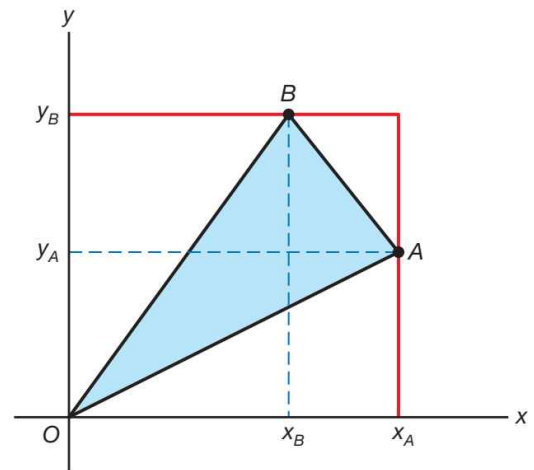
Door de driehoek ABC met $A(3, 2)$, $B(8, 4)$ en $C(6, 7)$ zo te verschuiven dat het punt A in de oorsprong terechtkomt, ontstaat driehoek $OB'C'$.

- Bereken de oppervlakte van driehoek ABC met een determinant.

A 66

Zie opgave 65.

- Gegeven zijn de punten $A(4, 1)$, $B(p, p)$ en $C(1, q)$ met $p \neq 0$.
Voor welke waarden van p en q geldt $O(\triangle OAB) = O(\triangle OBC) = O(\triangle OAC)$?
- Voor $p > 0$ zijn gegeven zijn de punten $A(3p, 2p)$, $B(2p, 2p + 1)$ en $C(0, 4)$.
Bereken voor welke p de oppervlakte van vierhoek $OABC$ gelijk is aan $10p$.
- Gegeven zijn de punten $A(6, 12)$ en $B(10, 6)$.
Voor welke punten $C(p, 4)$ is de oppervlakte van driehoek ABC gelijk aan 10?



figuur 4.13

Terugblik

De inverse matrix

Bij een vierkante matrix A kan precies één matrix B horen waarvoor geldt $A \cdot B = B \cdot A = I$. Hierbij is I een eenheidsmatrix. Matrix B is de inverse matrix of kortweg de inverse van A . Notatie $B = A^{-1}$.

De inverse matrix is te gebruiken om een stelsel op te lossen. Je gebruikt

$$\text{dat de oplossing van het stelsel } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ is } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

met A de coëfficiëntenmatrix van het stelsel.

Je berekent inverse matrices met de GR. Hiernaast is de

$$\text{inverse berekend van de matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Heb je te maken met het stelsel } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = p \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 14 \end{cases}$$

dan is de oplossing van het stelsel uit te drukken in p .

$$\text{Je krijgt } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ p \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2p + 0,08 \\ 0,4p - 1,24 \\ 0,2p - 2,32 \end{pmatrix}, \text{ dus}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,2p + 0,08; 0,4p - 1,24; 0,2p - 2,32).$$

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP

[A]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

[A]⁻¹

$$\begin{bmatrix} .48 & .2 & .04 \\ -.44 & .4 & -.12 \\ .08 & .2 & -.16 \end{bmatrix}$$

Determinanten

De determinant van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ is $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Als $|A| \neq 0$ dan heeft het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ één oplossing.

Als $|A| = 0$ dan heeft het stelsel $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ geen oplossingen of oneindig veel oplossingen.

Bij determinanten van matrices met een hogere orde dan 2×2 gelden soortgelijke regels.

$$\text{De determinant van de matrix } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ is}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Diagnostische toets

4.1 Rekenen met matrices

1 Gegeven is $\begin{pmatrix} 3 & x & -2 \\ 4 & -5 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & -5 \end{pmatrix}$.

Bereken x , y , a en b .

2 Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

en $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Bereken zo mogelijk.

a $B \cdot A$

b $A \cdot B$

c A^4

d $C^3 \cdot B - 4B$

e $5B + B \cdot A^3$

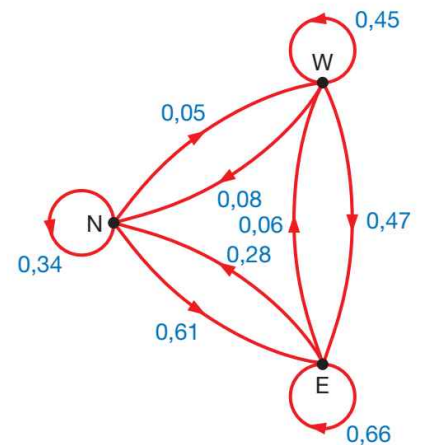
f $A^2 - C^2$

4.2 Matrices en kansen

- 3 Bij een groep Nederlandse gezinnen is onderzoek gedaan naar hun vakantiegedrag. Daarbij is onderscheid gemaakt naar vakanties in eigen land (N), vakanties naar het buitenland binnen Europa (E) en vakanties buiten Europa (W).

In de graaf hiernaast is te zien dat van de gezinnen die in 2014 in Nederland op vakantie zijn geweest 34% dat een jaar later weer deed, terwijl 5% van hen in 2015 naar een land buiten Europa afreisde.

- a Stel bij de graaf in figuur 4.14 de overgangsmatrix V op.



figuur 4.14

Neem aan dat de kansen in de graaf ook voor de jaren na 2014 gelden.

- b Toon aan dat er stabilisatie optreedt.
c Hoeveel procent van de gezinnen zal uiteindelijk in Nederland op vakantie gaan?



- 4 Van een populatie baarzen in een meer wordt de tweejaarlijkse verandering in samenstelling gegeven door de populatievoorspellingsmatrix L hiernaast.

a Bereken de kans dat een eitje uitgroeit tot een baars van zes jaar.

b Bereken L^4 . Met hoeveel procent neemt de populatie in acht jaar toe?

c Op 1 januari 2016 bevatten de leeftijdsklassen achtereenvolgens 75 000, 400, 300 en 140 vissen. Bereken de samenstelling op 1 januari 2018 en op 1 januari 2014.

d Door watervervuiling neemt de vruchtbaarheid van de baars af. Hoeveel eitjes legt een baars gemiddeld als in acht jaar de populatie baarzen niet verandert?

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \text{van} \end{array} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 0,005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 \end{pmatrix} = L$$

4.3 Stelsels en matrices

- 5 Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = p \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Druk de oplossing van het stelsel uit in p .

- 6 Bereken voor welke q het stelsel
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 7 \\ 4x + 3y + 2z = q \end{cases}$$

niet-samenhangend is.

4.4 Inverse matrices en determinanten

- 7 Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} x + 2y - 5z = p \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

a Neem $p = 3$ en los het stelsel op door gebruik te maken van een inverse matrix.

b Druk de oplossing van het stelsel uit in p .

- 8 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 2p & 2 & 1 \\ 3 & 2p & -3 \\ p & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bereken voor welke p geldt $|A| = 0$.

De Europese Kangoeroe is een internationale reken- en wiskundewedstrijd die jaarlijks wordt gehouden.

Er zijn opgaven voor

- de basisschool (wizFUN, wizKID en wizSMART)
- de klassen 1 en 2 havo/vwo en 3 havo (wizBRAIN)
- de klassen 4 en 5 havo en 3, 4, 5 en 6 vwo (wizPROF).

Er zijn eenvoudige, iets lastiger en moeilijke opgaven.

In dit boek staan de eenvoudige wizPROF opgaven van de jaren 2010 tot en met 2013.

Je mag geen rekenmachine gebruiken, maar wel kladpapier.



Kangoeroe-opgaven

K



2010

1 $20102010 : 2010 = ?$

- A 11 B 101 C 1001 D 10001 E 10101

- 2** Bij het spelen van een spelletje haalde Anton 85% van de te behalen punten. Lise deed het iets beter en haalde 90%. Zij had één punt meer. Hoeveel punten kun je halen bij dit spelletje?

- A 5 B 17 C 18 D 20 E 25

- 3** Anton telt de bovenste rij getallen op. Lise telt de onderste rij getallen op. Het laatste getal kan jij niet zien, maar Lise wel. Ze krijgen hetzelfde antwoord.

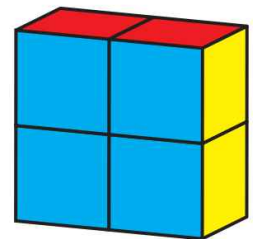
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

Wat is het laatste getal in de tweede rij?

- A 1010 B 1020 C 1910 D 1990 E 2020

- 4** Dit bouwwerk bestaat uit vier even grote kubussen. De oppervlakte van één kubus is 24 cm^2 . Wat is de oppervlakte van de buitenkant van dit bouwwerk?

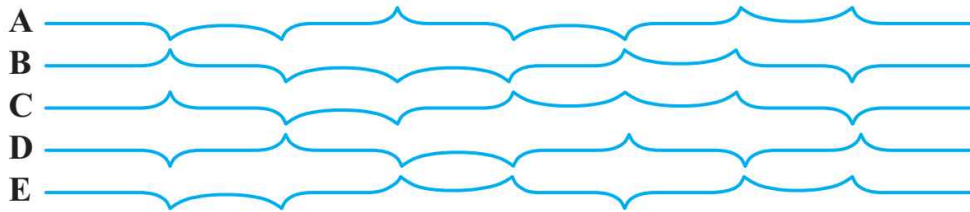
- A 24 cm^2
 B 32 cm^2
 C 40 cm^2
 D 64 cm^2
 E 80 cm^2



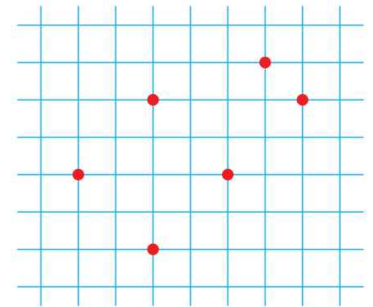
- 5** Toen Lise één jaar werd, stond op haar verjaardagstaart één kaarsje. Toen ze twee werd, stonden er twee kaarsjes op, enzovoort. Dus elk jaar evenveel kaarsjes als haar leeftijd. Ze heeft alle kaarsjes bewaard en heeft er nu 120. Hoe oud is Lise?

- A 11 jaar B 12 jaar C 13 jaar D 14 jaar E 15 jaar

- 6** Een strook papier wordt drie keer dubbel gevouwen. Daarna wordt hij opengevouwen. Als je het papiertje rechtop zet, dan zie je van boven de vouwtjes. Welke van de volgende tekeningen van die bovenrand is fout?

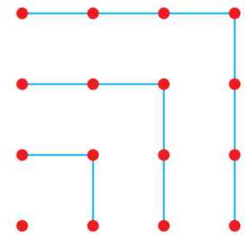


- 7** Anton gumt in het rooster hiernaast een of meer van de zes dikgetekende punten weg. Hij tekent een figuur met de overgebleven punten als hoekpunten. Welk figuur kan hij dan niet tekenen?



- A gelijkzijdige driehoek
B rechthoek
C rechthoekige driehoek
D ruit
E vijfhoek

- 8** In het plaatje zie je dat $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$. Waaraan is $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$ gelijk?

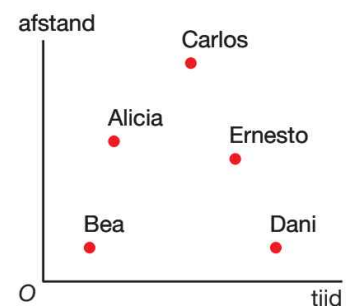


- A 10×10
B 11×11
C 12×12
D 13×13
E 14×14

- 9** In een maand vallen drie dinsdagen op een even datum. Op wat voor dag valt de 21^e van die maand?

- A woensdag
B donderdag
C vrijdag
D zaterdag
E zondag

- 10** Vijf atleten hebben hardgelopen. In het assenstelsel hiernaast kun je voor elke atleet zijn of haar tijd en afstand aflezen. Wie liep het hardst?



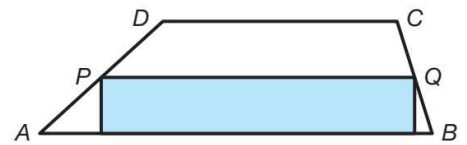
- A Alicia
B Bea
C Carlos
D Dani
E Ernesto

2011

- 11** Op een weg is over de breedte een zebrapad gemaakt met om en om witte en zwarte strepen.
Het zebrapad begint en eindigt met een witte streep. De strepen zijn allemaal 50 cm breed.
Het zebrapad heeft acht witte strepen.
Hoeveel meter is de weg breed?

A 7 B 7,5 C 8 D 8,5 E 9

- 12** De punten P en Q zijn de middens van de zijden van het trapezium $ABCD$.
De blauwe rechthoek heeft oppervlakte 13 cm^2 .
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het trapezium?



A 24 B 25 C 26 D 27 E 28

- 13** $a = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$, $b = 2^2 + 3^2 + 4^2$ en $c = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$.
We zetten de getallen a , b en c op volgorde van klein naar groot.
Wat is de juiste volgorde?

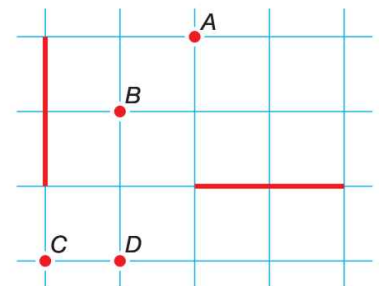
A a, c, b B b, a, c C b, c, a D c, a, b E c, b, a

- 14** Een rechthoekig mozaïek van 360 cm^2 bestaat uit even grote vierkante tegels.
Het mozaïek is 24 cm hoog en 5 tegels breed.
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van een tegel?

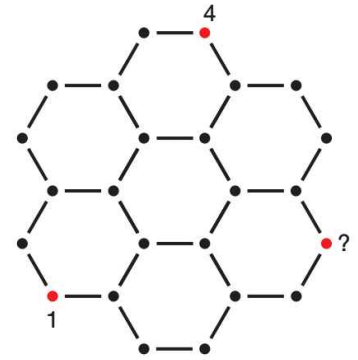
A 3 B 4 C 9 D 16 E 25

- 15** Met een draaiing kan een van de lijnstukjes worden afgebeeld op de ander.
Welk van de punten A , B , C of D kan het draaipunt zijn?

A alleen A
B A , B , C en D
C A en C
D A en D
E alleen D

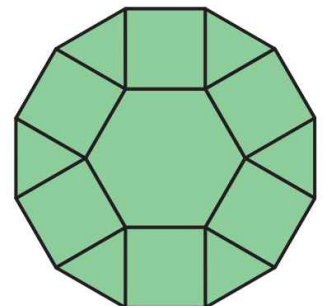


- 16** Hiernaast zie je een stuk van de plattegrond van een schoolplein. Op elk hoekpunt van de zeshoeken bevindt zich een knikkerkuiltje. Elke twee naast elkaar liggende kuiltjes bevatten samen eenzelfde aantal knikkers. Bij twee hoekpunten is het aantal knikkers aangegeven. Hoeveel knikkers zitten er in het kuiltje met het vraagteken?



- A 1
B 3
C 4
D 5
E kun je niet bepalen
- 17** Omar heeft 2011 gedeeld door een zeker positief geheel getal. Hij vond de rest 1011.
Welke van de volgende uitspraken is waar?
- A Omar heeft gedeeld door 100
B Omar heeft gedeeld door 500
C Omar heeft gedeeld door 1000
D Omar heeft gedeeld door een ander getal
E Omar heeft een fout gemaakt

- 18** De figuur hiernaast bestaat uit een regelmatige zeshoek met zijde 1, zes driehoeken en zes vierkanten.
Wat is de omtrek van de figuur?



- A 9
B $6 + 3\sqrt{2}$
C $6(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$
D 12
E $6(1 + \sqrt{2})$
- 19** Iemand maakt een lijst van de getallen van vier cijfers waarvan de som van de cijfers 4 is, van groot naar klein.
Op welke plaats staat het getal 2011?

A 5^e B 6^e C 8^e D 9^e E 10^e

- 20** In een maand waren er 5 maandagen, 5 dinsdagen en ook 5 woensdagen. In de maand ervoor waren er maar 4 zondagen.
Wat is zeker waar?

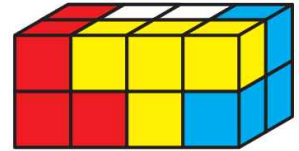
A de volgende maand heeft 4 vrijdagen
B de volgende maand heeft 4 zaterdagen
C de volgende maand heeft 5 zondagen
D de volgende maand heeft 5 woensdagen
E zo'n maand is er niet

2012

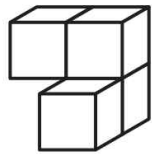
21 $11,11 - 1,111 =$

- A 9,009 B 9,0909 C 9,99 D 9,999 E 10

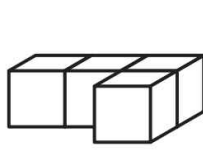
- 22** Een balk bestaat uit vier stukken van elk vier blokjes.
Elk stuk heeft een eigen kleur.



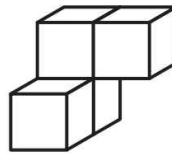
Welk is het witte stuk?



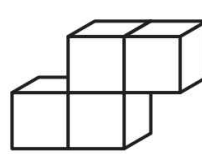
A



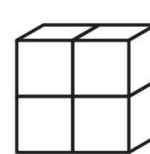
B



C



D



E

- 23** De getallen 144 en 220 geven bij deling door eenzelfde positief geheel getal beide rest 11.
Door welk getal wordt gedeeld?

- A 7 B 11 C 15 D 19 E 38

- 24** Anna stuurt Bram een boodschap die verticijferd is met het volgende systeem. Elke letter wordt vervangen door een getal: A = 01, B = 02, C = 03, ..., Z = 26. Daarna wordt elk getal vervangen door de uitkomst van de berekening $2 \times \text{getal} + 9$. De rij uitkomsten wordt naar Bram gestuurd. Hij heeft de rij 25, 39, 19, 38 ontvangen en wil deze rij ontcijferen.
Welke boodschap vindt Bram?

- A HEMD
B HOED
C HOOP
D NOOD
E geen, Anna heeft een fout gemaakt

- 25** De som van de cijfers van een positief geheel getal van zeven cijfers is 6.
Wat is het product van de cijfers?

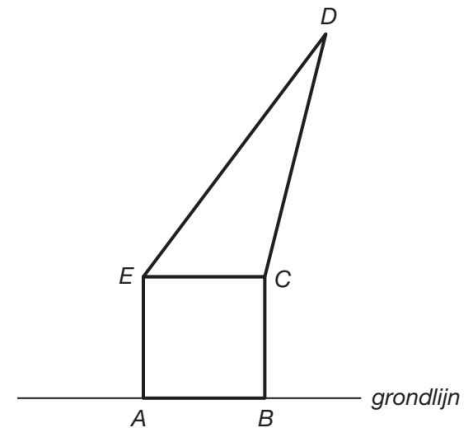
- A 0 B 1 C 6 D 7 E 42

- 26** In een kamer hangt aan ieder van de vier muren een klok, maar ze lopen geen van alle gelijk.
De eerste klok wijkt 2 minuten af, de tweede klok 3 minuten, de derde 4 minuten en de vierde 5 minuten.
Op alle vier de klokken kijkend ziet Ismael op een zeker moment de tijden 6 voor 3, 3 voor 3, 2 na 3 en 3 na 3.
Hoe laat is het dan?

A 2:55 B 2:56 C 2:57 D 2:58 E 2:59

- 27** Vierkant $ABCE$ heeft zijden van 4 cm.
Driehoek CDE en vierkant $ABCE$ hebben gelijke oppervlakte.
Hoeveel cm ligt punt D boven de grondlijn?

A $4 + 2\sqrt{3}$
B 8
C 12
D $10\sqrt{2}$
E Dat hangt af van de plaats van D

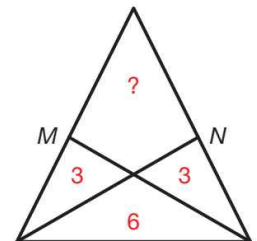


- 28** Van een rechthoekige driehoek zijn de rechthoekszijden 6 en 8 cm lang. K , L en M zijn de middens van de zijden.
Hoeveel cm is de omtrek van driehoek KLM ?

A 10 B 12 C 15 D 20 E 24

- 29** M en N zijn de middens van de gelijke zijden van een gelijkbenige driehoek.
De oppervlaktes van drie delen staan in het plaatje hiernaast.
Wat is de oppervlakte van het deel met het vraagteken?

A 3 B 4 C 5 D 6 E 7

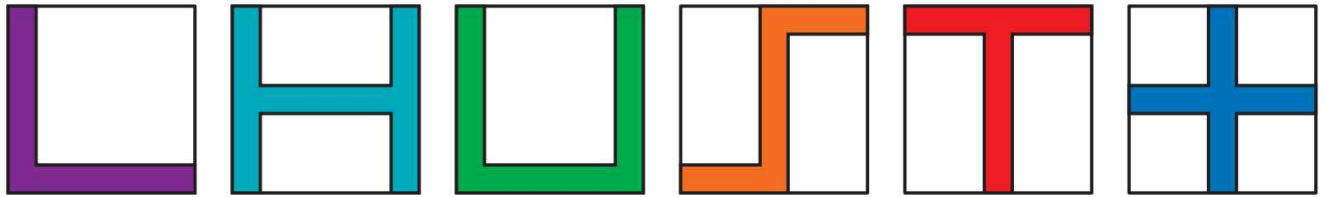


- 30** Een vierhoek heeft zijden van lengte 1 en 4, de lengtes van de andere twee zijn onbekend.
Door een van de diagonalen wordt de vierhoek opgedeeld in twee gelijkbenige driehoeken.
Deze diagonaal heeft lengte 2.
Wat is de omtrek van de vierhoek?

A 9 B 10 C 11 D 12 E 13

2013

- 31 Eva heeft op vierkante vellen papier gekleurde figuren getekend:



Sommige van deze figuren hebben dezelfde omtrek als het hele vel.
Hoeveel figuren?

- A 2 B 3 C 4 D 5 E 6
- 32 Door welk van de onderstaande getallen is de uitkomst van $200013 - 2013$ niet deelbaar?
- A 2 B 3 C 5 D 7 E 11

- 33 Mevrouw Boer koopt voor ieder van de vier personen van haar gezin 4 maïskolven. De winkel heeft een speciale aanbieding, zie hiernaast.
Hoeveel euro moet zij betalen?

- A €0,80
B €1,20
C €2,80
D €3
E €3,20

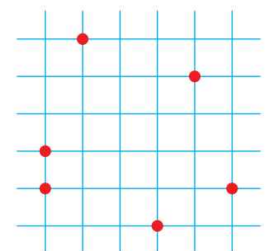


- 34 Karel heeft drie van de getallen 2, 4, 16, 25, 50 en 125 met elkaar vermenigvuldigd.
Hij kreeg 1000 als uitkomst.
Wat is de som van die drie getallen?

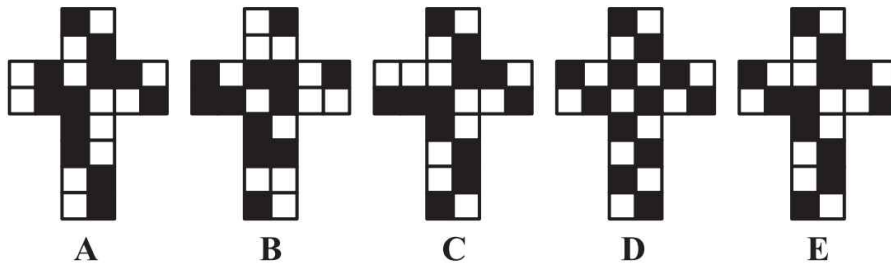
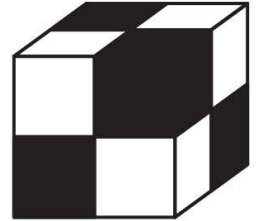
- A 70 B 77 C 91 D 131 E 143

- 35 Op een vel ruitjespapier zijn zes punten getekend. De ruitjes zijn 1 bij 1. We tekenen driehoeken met drie van deze zes punten als hoekpunten en berekenen hun oppervlakte.
Wat is de kleinste oppervlakte die je kunt krijgen?

- A $\frac{1}{2}$ B 1 C $1\frac{1}{2}$ D 2 E $2\frac{1}{2}$



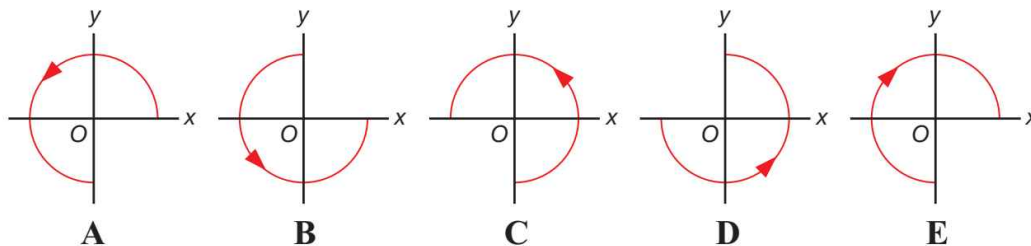
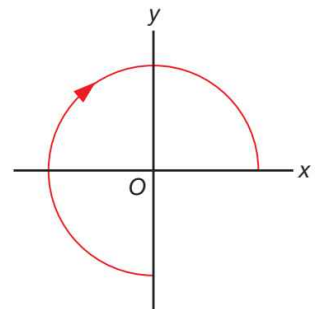
- 36** Op de zijvlakken van een kubus worden zwarte en witte vierkanten geverfd. Daardoor lijkt de kubus gemaakt van kleinere kubussen: vier zwarte en vier witte. Zie het plaatje. Welke van de volgende uitslagen hoort bij deze kubus?



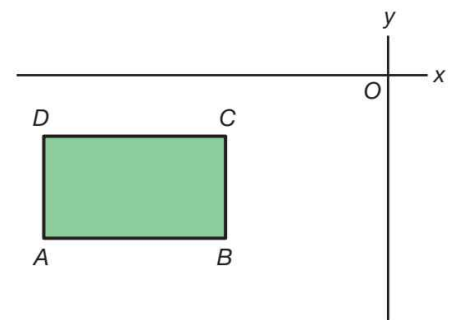
- 37** We bekijken alle getallen van drie cijfers die een positief veelvoud van 4 zijn. Wat is het verschil van het grootste en het kleinste van deze getallen?

A 224 B 225 C 896 D 899 E 900

- 38** We bekijken een driekwart cirkel met de oorsprong als middelpunt waarop een richting is aangegeven; zie het plaatje. We draaien het geheel eerst tegen de klok in over 90° en spiegelen het daarna in de x -as. Wat is het resultaat?



- 39** Rechthoek $ABCD$ is getekend in een assenstelsel. De zijden zijn evenwijdig met de assen. De rechthoek ligt onder de x -as en links van de y -as, zoals in het plaatje. Voor ieder van de punten A , B , C en D delen we de y -coördinaat door de x -coördinaat. Voor welk punt vinden we de kleinste uitkomst?



A A B B C C D D
E hangt af van de rechthoek

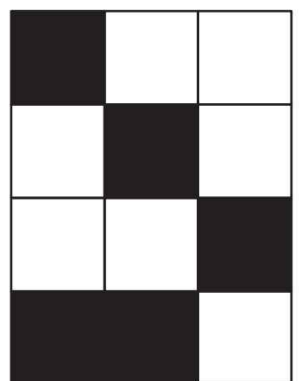
- 40** Welke van de volgende getallen is het grootst?

A $\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}$
B $\sqrt{20} \cdot 13$
C $20 \cdot \sqrt{13}$
D $\sqrt{201} \cdot 3$
E $\sqrt{2013}$

Gemengde opgaven

1 Combinatoriek

- 1** De firma JHM&J codeert zijn artikelen met getallen die bestaan uit vijf cijfers. Voor de eerste drie cijfers wordt gekozen uit 2, 3, 4, 5, 6 en 7. Voor de laatste twee cijfers wordt gekozen uit 5, 8 en 9. Hoeveel codes zijn mogelijk als
- elk cijfer vaker gebruikt mag worden en het getal kleiner is dan 50 000
 - de eerste drie cijfers verschillend en de laatste twee gelijk moeten zijn
 - elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal groter is dan 56 000
 - er in het getal geen gelijke cijfers mogen voorkomen?
- 2** Agility is een hondensport die in Nederland steeds populairder wordt. De sport is afkomstig uit Engeland. Bij agility gaat het om de behendigheid van honden en de samenwerking met het baasje. Daarbij moet een parkoers dat uit verschillende hindernissen bestaat in de voorgeschreven volgorde worden afgelegd. Wedstrijdleider Boom zet een parkoers uit dat bestaat uit drie verschillende hoogtehindernissen, vier verschillende raakvlakhindernissen, twee verschillende doorgangen en een slalom.
- Hoeveel parkoersen kan Boom uitzetten?
 - Hoeveel parkoersen zijn mogelijk als de vier raakvlakhindernissen direct achter elkaar staan?
 - Hoeveel parkoersen zijn mogelijk als het parkoers begint met de slalom en de rest per soort bij elkaar staat?
 - Hoeveel parkoersen zijn mogelijk als bij start en finish een hoogtehindernis staat?
- 3** Een kaasgroothandel gebruikt een code, waarbij in een rooster van vier rijen en drie kolommen de hokjes al dan niet zwart zijn. De eerste kolom geeft informatie over de producent, de tweede geeft de gewichtsklasse van de kaas en de derde de kwaliteit.
- Bereken het aantal codes met vijf zwarte hokjes.
 - Hoeveel codes zijn in totaal mogelijk?
 - Hoeveel codes zijn mogelijk met in de eerste kolom één zwart hokje, in de tweede kolom twee zwarte hokjes en in de derde kolom drie zwarte hokjes?
 - Hoeveel codes zijn mogelijk met in de eerste kolom twee zwarte hokjes?



figuur G.1

- 5** In de tabel staat informatie over de keuze voor de vier profielen NT, NG, EM en CM van de 4 vwo-leerlingen van het Noorderlicht College. Voor een onderzoek worden acht van deze leerlingen geënquêteerd. Hoeveel achttallen zijn mogelijk met
- evenveel jongens als meisjes
 - meer jongens dan meisjes
 - twee of drie leerlingen die het profiel NG hebben gekozen
 - hoogstens twee meisjes die het profiel NT of NG hebben gekozen
 - één leerling die het profiel CM heeft gekozen en hoogstens twee die het profiel NT hebben gekozen?

	j	m	
NT	12	7	19
NG	16	20	36
EM	22	15	37
CM	3	12	15
	53	54	107

- 6** Gegeven zijn de punten $A(-4, -2)$, $B(5, -2)$ en $C(0, 3)$. We bekijken zo kort mogelijke routes over roosterlijnen die in O beginnen en weer in O eindigen en de punten A , B en C aandoen. Een mogelijke volgorde is van O via B , C en A weer terug naar O .
- Hoeveel routes $OBCAO$ zijn er?
 - Hoeveel routes $OABCO$ zijn er?
 - Bij welke volgordes hoort het kleinste aantal routes?
Licht je antwoord toe.
- 7** Elke cel van je lichaam heeft een kern met daarin je unieke DNA, dat alle erfelijke eigenschappen bevat. DNA is een grote molecule in de vorm van een gedraaide touwladder. De treden worden gevormd door een groot aantal basen. Er komen vier soorten basen voor, namelijk adenine (A), cytosine (C), guanine (G) en thymine (T). De rangschikking van deze letters bepaalt je erfelijke eigenschappen.
- Hoeveel ketens van acht basen zijn er met van elke soort twee?
 - Hoeveel ketens zijn er die bestaan uit vijf adenine, drie cytosine, twee guanine en vier thymine basen?
- 8** In deze opgave gaat het over getallen van acht cijfers. De cijfers worden gekozen uit 1, 2, 3, 4, 5 en 6. In hoeveel van deze getallen
- komt drie keer een 1, drie keer een 2 en twee keer een 3 voor
 - komen vier cijfers elk twee keer voor
 - komt elk van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6 minstens één keer voor?
- 9** Op het homescreen van de smartphone van Elske is in een 4×4 rooster plaats voor 16 icoontjes van apps. Elske gebruikt niet alle 16 plaatsen. Zij heeft de twaalf icoontjes van haar meest gebruikte apps op het homescreen gerangschikt.
- Op hoeveel manieren kan dit?
 - Op hoeveel manieren kan dit als ze de linker kolom leeg laat?
 - Op hoeveel manieren kan dit als ze in elke rij één plaats leeg laat?
- Elske wil de vier icoontjes van haar socialmedia- en chatapps in één rij of in één kolom. Verder maakt het haar niet uit.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er?



- 10** Het alarmsysteem van de familie Schiereck kan worden aan- en uitgezet middels een pincode van vijf cijfers. Elk cijfer mag vaker gebruikt worden. Aan de slijtage van de knoppen op het cijferpaneel van het alarmsysteem is duidelijk te zien dat de knoppen voor de cijfers 4, 7 en 8 het meest gebruikt worden. Ga ervan uit dat de vijfcijferige pincode is opgebouwd uit deze drie cijfers.

Hoeveel mogelijke pincodes zijn er dan?

- 11** Bert is lid van de klaverjasvereniging 'Harten Boer'. Tijdens de wekelijkse kaartavond, waarbij 40 leden aanwezig zijn, wordt door loting bepaald dat Bert samen met nog drie andere leden aan tafel 7 komt te spelen.

- Hoeveel mogelijke viertallen zijn er voor tafel 7?
- Bert neemt plaats aan tafel 7.
Op hoeveel manieren kunnen de andere drie spelers dan plaatsnemen?



Bij klaverjassen wordt met 32 kaarten gespeeld, waaronder 16 plaatjes. Elke speler krijgt acht kaarten. Er moet opnieuw worden gedeeld als een speler geen enkel plaatje heeft gekregen. Bert deelt de kaarten. Hij geeft speler 1 in één keer acht kaarten. Hieronder bevinden zich vijf plaatjes. Daarna krijgt speler 2 in één keer acht kaarten. Deze speler beweert na het ontvangen van zijn kaarten dat hij geen enkel plaatje heeft.

- Hoeveel mogelijke achttallen zijn er voor de kaarten van speler 2?

Tijdens het kaarten worden er borrelhapjes geserveerd. Elke tafel krijgt vijf bitterballen, vijf vlammetjes, vijf loempiaatjes en vijf kaassoufflés.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om

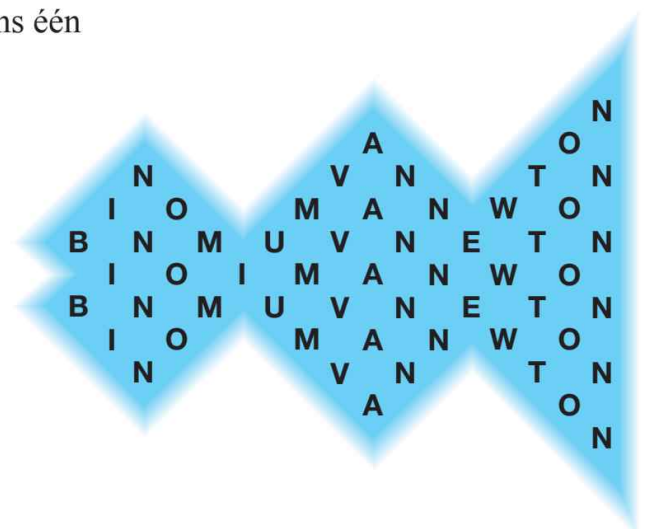
- vijf bitterballen over vier personen te verdelen
- vijf bitterballen over vier gelijke schaaltes te verdelen
- de borrelhapjes voor tafel 7 over de vier personen te verdelen?

Hoeveel mogelijkheden zijn er om de borrelhapjes voor tafel 7 over de vier personen te verdelen

- als een van de personen geen vlammetjes wil
- als iedereen minstens één bitterbal en minstens één loempiaatje krijgt
- als er ook borrelhapjes mogen blijven staan?

2 Discrete wiskunde

- 12** Op hoeveel manieren kun je in figuur G.2 BINOMIUM VAN NEWTON lezen?



figuur G.2

- 13** a Herleid $(2x - 3y)^5$.
 b Bereken de coëfficiënt van x^4y^6 in de herleiding van $(2x + 5y)^{10}$
- 14** a Hoeveel termen heeft de herleiding van $(p^2 + q^3 - 2)^{12}$?
 b Bereken de coëfficiënt van $p^{16}q^6$ in de herleiding van $(p^2 + q^3 - 2)^{12}$.
 c Hoeveel termen heeft de herleiding van $(a^2b + bc^2 + c^2d^2 + d)^9$?
 d Bereken de coëfficiënt van $a^4b^4c^8d^7$ in de herleiding van $(a^2b + bc^2 + c^2d^2 + d)^9$.

- 15** Gegeven zijn de rijen
 u_n : 300, 306, 312, 318, 324, ...
 v_n : 0,1, 0,2, 0,4, 0,8, 1,6, ...
 a Stel van beide rijen zowel de directe als de recursieve formule op.
 b Vanaf welke n is $v_n > u_n$?
 c Vanaf welke n is $\sum_{k=0}^n v_k > \sum_{k=0}^n u_k$?

- 16** Gegeven zijn de rijen
 u_n : 1000, 977, 954, 931, 908, ...
 v_n : 1000, 960, 921,6, 884, 736, 849,34656, ...
 a Bereken de som van de positieve termen van de rij u_n .
 b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de som van de termen van de rij v_n die groter zijn dan 500.

- 17** Bij het loslaten van een weerballon stijgt deze in de eerste minuut 500 meter. Elke volgende minuut is de stijging 10% minder dan in de voorafgaande minuut.
 a Hoeveel meter stijgt de weerballon in het eerste kwartier?
 b In welke minuut stijgt de weerballon voor het eerst minder dan 100 meter?
 c Na hoeveel minuten is de weerballon voor het eerst hoger dan 4700 meter?

- 18** Een bedrijf heeft bij de bank 100 000 euro geleend tegen een rente van 0,4% per maand. Er is een terugbetalingsregeling overeengekomen, waarbij het bedrijf na één maand 1000 euro terugbetaalt en vervolgens elke maand 1000 euro meer dan de voorafgaande maand.
 a Toon aan dat de schuld na één maand 99 400 euro is en na twee maanden € 97 797,60.
 b Hoeveel is de schuld na drie maanden?
 c Stel de recursieve formule op die de situatie beschrijft.
 d Bereken na hoeveel maanden de schuld is afbetaald.

- 19** André heeft op 1 januari 2015 een bedrag van 10 000 euro op de bank gezet tegen 2,5% rente per jaar. Vanaf 1 januari 2016 stort hij jaarlijks 1000 euro. Hij gaat hiermee door totdat er 30 000 euro op zijn rekening staat.

- a Stel de recursieve formule op van het saldo.
- b Hoeveel is het saldo op 1 januari 2018?
- c In welk jaar is het saldo op 1 januari voor het eerst meer dan 30 000 euro?

Aan het einde van 2030 heeft André 31 415 euro op zijn rekening staan. Vanaf 1 januari 2031 neemt hij jaarlijks 5000 euro op.

- d Stel voor deze situatie de recursieve formule op van het saldo. Hierbij is u_0 het saldo op 1 januari 2031.
- e Hoeveel keer kan André 5000 euro opnemen?
- f Hoeveel euro heeft André uiteindelijk meer opgenomen dan dat hij heeft gestort?

- 20** Gegeven zijn de rijen

$$u_n: 10, 11, 14, 19, 26, 35, \dots$$

$$v_n: \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$$

$$w_n: 11, 10\frac{1}{2}, 10\frac{1}{3}, 10\frac{1}{4}, 10\frac{1}{5}, \dots$$

- a Stel van elk van deze rijen de directe formule op.
- b Bereken van elke rij de som van de eerste tien termen. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- c Van twee van de gegeven rijen komen de termen steeds dichterbij een grenswaarde. Welke rijen zijn dat? Bereken de grenswaarden. Vanaf welke n verschillen de termen minder dan 0,05 van de grenswaarde?

- 21** Bij het langebaanschaatsen wordt de 10 km gereden in 25 rondjes van 400 meter.

- a Sven begint met een rondje van 30 seconden. Vervolgens is elke ronde 0,2 seconde langzamer dan de voorafgaande ronde. Bereken zijn eindtijd.
- b Jorrit begint ook met een rondje van 30 seconden en vervolgens is hij elke ronde 0,5% langzamer dan de voorafgaande ronde. In welke ronde is hij voor het eerst langzamer dan 33 seconden?
- c Bob begint ook met een rondje van 30 seconden. Vervolgens is elke ronde a seconden langzamer dan de voorafgaande ronde. Hij doet 13 minuten en 18 seconden over de 25 ronden. Bereken a .
- d Koen begint ook met een ronde van 30 seconden. Vervolgens is elke ronde $p\%$ langzamer dan de voorafgaande ronde. Zijn eindtijd is 14 minuten en 7,3 seconde. Hoe lang deed hij over de laatste ronde?
- e Jan en Stijn rijden een wedstrijd over 10 km. Voor de eerste ronde hebben beiden 35 seconden nodig en voor de laatste ronde hebben beiden 40 seconden nodig. De rondetijden van Jan vormen een rekenkundige rij en die van Stijn een meetkundige rij. Bereken wie de wedstrijd wint. Hoeveel seconden is het verschil?

- 22** Het lijnstuk PQ in figuur G.3 is verdeeld volgens de *gouden snede*, dat wil zeggen dat geldt $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Hierin wordt de verhouding $\frac{a}{b}$ het *gouden getal* genoemd en aangegeven met ϕ , de Griekse letter phi. Substitutie van $\phi = \frac{a}{b}$ in $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ geeft $\phi^2 = \phi + 1$.

- Toon dit aan.
- Bereken ϕ algebraïsch. Rond af op drie decimalen.

Zie figuur G.4 met een spiraal van vierkanten. De getallen in de figuur vormen de rij f_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

- Stel de recursieve formule van f_n op.

- Bereken $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ voor $n = 6, 8, 10, 12, 14$.

Rond telkens af op drie decimalen. Wat valt je op?

Zie de balk in figuur G.5 met lengte l , breedte b en hoogte h . De maten van de balk zijn zo gekozen, dat geldt

$\frac{l}{b} = \frac{h}{l} = \frac{l+h}{h}$. Hierin wordt de verhouding $\frac{l}{b}$ het *plastische getal* genoemd en aangegeven met ψ , de Griekse letter psi.

Uit $\frac{l}{b} = \frac{h}{l} = \frac{l+h}{h}$ volgt $h^2 = l^2 + bl$.

- Licht dit toe.

Door in $h^2 = l^2 + bl$ het linker- en rechterlid te delen door l^2 ontstaat een vorm die te herleiden is tot $\psi^3 = \psi + 1$.

- Geef deze herleiding.

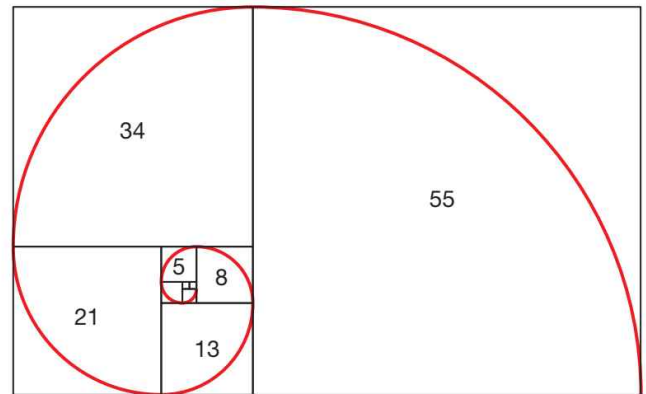
- Bereken ψ in drie decimalen nauwkeurig.

Zie figuur G.6 met een spiraal van gelijkzijdige driehoeken. De getallen in de figuur vormen de rij p_n : 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, ... Dit is de *rij van Padovan*. Bij deze rij hoort de recursieve formule $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$ met $p_0 = p_1 = p_2 = 1$.

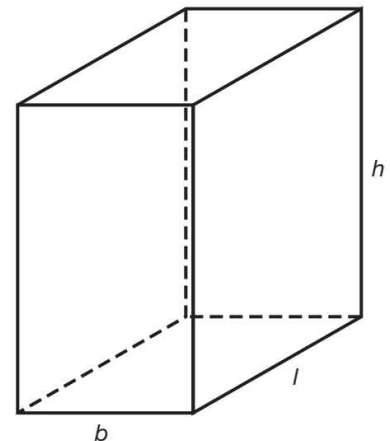
- Bereken $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ voor $n = 16, 18, 20, 22, 24$. Rond telkens af op drie decimalen. Wat valt je op?



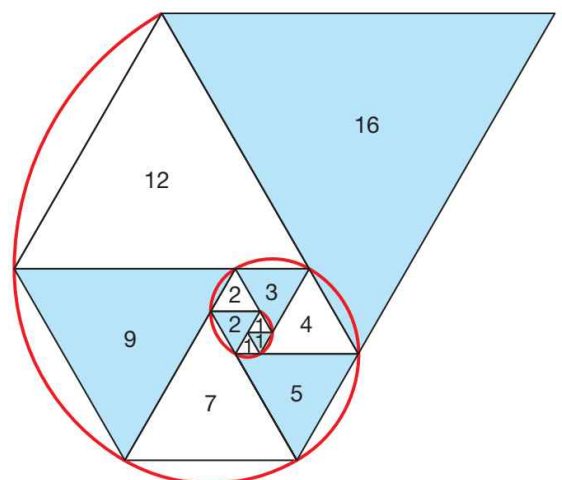
figuur G.3



figuur G.4 Het vierkant met daarin het getal 5 heeft zijden met lengte 5.



figuur G.5



figuur G.6 De gelijkzijdige driehoek met daarin het getal 3 heeft zijden met lengte 3.

3 Kansrekening

- 23** Experiment: een worp met twee dobbelstenen.

Bereken exact de kans op de gebeurtenis

- a de som van de ogen is minder dan 6
- b het verschil van de ogen is 2
- c het product van de ogen is deelbaar door 4.



- 24** Frank gooit met een viervlaksdobbelsteen, een gewone dobbelsteen en een octaëder.

Bereken exact de kans dat

- a de som van de ogen vijf is
- b hij met elke dobbelsteen hetzelfde aantal ogen gooit
- c de som van de ogen hoogstens 15 is
- d het product van de ogen deelbaar is door vijf.

- 25** Een jaar lang is bijgehouden hoeveel km file er op doordeweekse dagen 's morgens om 8 uur op de Nederlandse wegen stond. Zie de frequentietabel.

lengte file in km	ma	di	wo	do	vr	
< 40	7	9	11	8	5	40
40 – < 80	17	31	21	18	19	106
80 – < 120	16	6	12	20	17	71
≥ 120	12	6	8	6	11	43
	52	52	52	52	52	260

Bereken de kans dat 's morgens om 8 uur

- a er op een doordeweekse dag meer dan 80 km file was
- b er op een maandag meer dan 80 km file was
- c als er meer dan 80 km file was, het een maandag betrof
- d er minder dan 40 km file stond en het maandag was.

- 26** Een duivenhouder heeft van 85 pas uit het ei gekomen duiven bijgehouden hoe oud ze werden. Het resultaat van zijn tellingen staat in de tabel.

leeftijd in jaren	0	1	2	3	4	5	6
aantal duiven	85	69	55	35	14	6	0

Zo kun je bijvoorbeeld uit de tabel aflezen dat van de 55 duiven die twee jaar oud werden er 35 ook de driejarige leeftijd haalden.

Bereken de kans dat een duif

- a de eenjarige leeftijd niet haalt
- b die drie jaar oud wordt, de vijfjarige leeftijd niet haalt
- c wel drie jaar maar geen vier jaar oud wordt.

- 27** Een vaas bevat vijf rode en vier witte knikkers.

Sabine pakt één knikker uit de vaas en doet deze knikker samen met nog twee knikkers van dezelfde kleur als de getrokken knikker terug in de vaas.

Bereken de kans dat Sabine na drie beurten

- a alleen rode knikkers gepakt heeft
- b meer rode dan witte knikkers gepakt heeft.

28 Zie het krantenartikel.**Ruim één derde van de jongeren sport**

Van onze verslaggever.

AMSTERDAM – Van de jongeren van 12 tot 19 jaar zegt 36% aan sport te doen. Dit blijkt uit een onderzoek onder 1600 jongeren in deze leeftijdsgroep. Bij het onderzoek werd aan de jongeren ook gevraagd aan welke van de drie thuisactiviteiten ze de meeste tijd besteden: lezen, computeren of tv-kijken.

Van de sporters gaven 321 te kennen dat lezen de belangrijkste thuisactiviteit was. Dit aantal is daarmee precies gelijk aan dat bij de niet-sporters. De niet-sporters zitten echter meer achter de computer: bij de sporters 115 jongeren, bij de niet-sporters is dit aantal het dubbele.

Bereken de kans dat een bij dit onderzoek betrokken jongere

- a niet aan sport doet en computeren als belangrijkste thuisactiviteit heeft
- b tv-kijken als belangrijkste thuisactiviteit noemt
- c die tv-kijken als belangrijkste thuisactiviteit noemt, ook aan sport doet
- d die aan sport doet, tv-kijken als belangrijkste thuisactiviteit noemt.



In een vierde klas van 30 leerlingen doen er twaalf aan sport. Als belangrijkste thuisactiviteit noemen 13 leerlingen lezen, 8 leerlingen computeren en 9 leerlingen tv-kijken. We kiezen willekeurig tien leerlingen uit deze klas.

Bereken de kans dat er van deze tien

- e vijf aan sport doen
- f drie of vier computeren als belangrijkste thuisactiviteit noemen
- g vier lezen, twee computeren en vier tv-kijken als belangrijkste thuisactiviteit noemen.

- 29** Een van de belangrijkste volksgezondheidsproblemen in Nederland van dit moment is overgewicht. Van de volwassenen in Nederland kampt 43% met overgewicht. Bij ouders die beiden overgewicht hebben, heeft 35% van de kinderen ook overgewicht. Bij ouders waarvan één van beiden overgewicht heeft, heeft 18% van de kinderen overgewicht. En bij ouders die geen van beiden overgewicht hebben is dat percentage 9%.

Een gezin bestaat uit vader, moeder en twee kinderen.

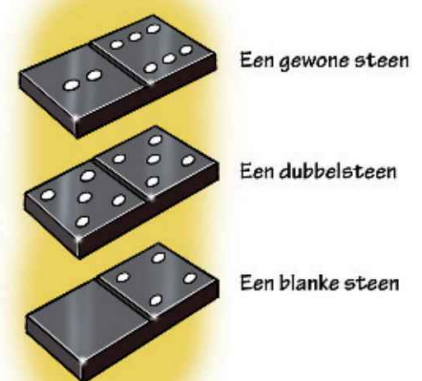
- a Bereken de kans dat niemand in het gezin overgewicht heeft.
- b Bereken de kans dat een van de ouders overgewicht heeft.
- c Bereken de kans dat beide kinderen overgewicht hebben.
- d Voor een onderzoek naar overgewicht wordt een persoon uit het gezin telefonisch geënquêteerd. Iemand zonder overgewicht beantwoordt de vragen.
Bereken de kans dat de overige gezinsleden overgewicht hebben.
- e Bereken de kans dat er in het gezin drie personen met overgewicht zijn als je weet dat tenminste een van de ouders overgewicht heeft.

- 30** In een gokautomaat draaien vier schijven onafhankelijk van elkaar. Door een hendel kan elke schijf tot stilstand worden gebracht. In de tabel zie je wat er op elke schijf staat. Bereken de kans op
- drie appels en één kers
 - vier gelijke plaatjes
 - één banaan
 - geen kiwi.

	aantal			
plaatje	band 1	band 2	band 3	band 4
appel	5	2	2	5
peer	3	4	4	3
banaan	1	5	5	1
kers	3	2	0	0
kiwi	3	2	4	6
	15	15	15	15

- 31** Op kanaal 1 zenden de omroepen A, B en C uit. Omroep A vult 40% van de zendtijd, de omroepen B en C vullen elk 30% van de zendtijd. We onderscheiden vier soorten programma's: amusement, series/films, actualiteiten en cultuur. Bij omroep A is de verdeling van de zendtijd over deze programmasoorten achtereenvolgens 60%, 20%, 10% en 10%. Bij omroep B is deze verdeling 40%, 30%, 20% en 10%. In totaal is op kanaal 1 gedurende 45% van de zendtijd amusement te zien. Voor actualiteiten en cultuur zijn deze percentages 16% en 13%.
- Hoeveel procent van zijn zendtijd vult omroep C met series en films?
 - Bram schakelt over op kanaal 1 en komt midden in een programma terecht. Wat is de kans dat het een amusementsprogramma van omroep B is?
 - Timo schakelt over op kanaal 1 en komt midden in een actualiteitenprogramma terecht. Bereken de kans dat dit een programma van omroep B is.
 - Onderzoek of bij het aanzetten van kanaal 1 de gebeurtenis 'omroep B te zien krijgen' en 'een amusementsprogramma te zien krijgen' onafhankelijk zijn.

- 32** Domino is een spel voor twee tot vier personen. Een dominosteentje heeft twee helften met op iedere helft een aantal ogen. De ogenaantallen 0, 1, 2, 3, 4, 5 en 6 komen voor. Een dubbelsteen is een steen met op beide helften hetzelfde aantal ogen. Een blanke steen is een steen met op minstens een van beide helften geen ogen.
- Toon aan dat er 28 verschillende dominostenen zijn.



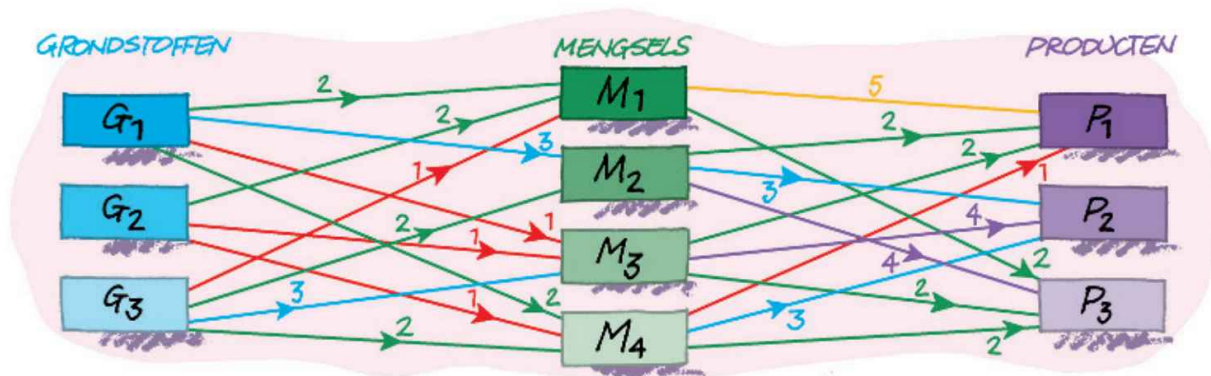
figuur G.7

Er wordt door vier personen gespeeld. Aan het begin van het spel worden de 28 stenen geschud en ondersteboven op tafel gelegd. Vervolgens pakken de spelers een voor een vijf stenen, dus eerst pakt speler 1 vijf stenen, daarna pakt speler 2 vijf stenen, enzovoort. De speler met de hoogste dubbelsteen mag beginnen. Bereken de kans dat

- geen enkele speler een dubbelsteen pakt
- speler 1 minstens twee stenen met 6 ogen pakt
- speler 1 geen steen met 4 ogen pakt en één blanke steen
- speler 2 minstens één blanke steen pakt als speler 1 geen blanke steen heeft gepakt
- de spelers 2 en 3 samen één blanke steen pakken als speler 1 geen blanke steen heeft gepakt.

4 Matrices

- 33** In figuur G.8 is een productieproces schematisch weergegeven. Het getal 2 bij de pijl van G_1 naar M_1 geeft aan dat er voor één eenheid M_1 2 eenheden G_1 nodig zijn. En het getal 5 bij de pijl van M_1 naar P_1 geeft aan dat er voor één eenheid P_1 5 eenheden M_1 nodig zijn.



figuur G.8

- Verwerk de getallen bij de pijlen van de grondstoffen naar de mengsels in een 3×4 -matrix A .
- Verwerk de overige getallen in een matrix S zo, dat de productmatrix $C = A \cdot S$ betekenis heeft.
- Bereken $C = A \cdot S$ en geef een interpretatie van de elementen c_{12} en c_{31} .

Er komt een bestelling binnen voor 10 eenheden van product P_1 , 15 eenheden van product P_2 en 20 eenheden van product P_3 . De kosten per eenheid mengsels M_1, M_2, M_3 en M_4 zijn in euro's 9, 10, 12 en 10.

- Verwerk de bestelling in een matrix B zo, dat $S \cdot B$ betekenis heeft. Verwerk verder de kosten per eenheid van de mengsels in een matrix K zo, dat $K \cdot S$ betekenis heeft.
- Bereken $S \cdot B$ en $K \cdot S$. Wat stellen de elementen van deze productmatrices voor?
- Bereken $K \cdot S \cdot B$ en geef een interpretatie van de uitkomst.

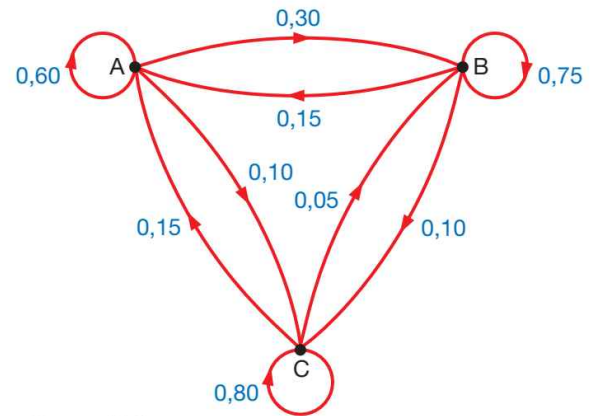
- 34** Van een schildpadsoort is bekend dat er twee keer zoveel mannetjes zijn als vrouwtjes. Elk vrouwtje legt één keer in haar leven een groot aantal eieren waarvan 75% uitkomt.

De verandering in leeftijdsopbouw per 25 jaar wordt beschreven door de populatievoorspellingsmatrix L .

- Hoeveel eieren legt een vrouwtje in haar leven? In welke leeftijdsklasse zit ze dan?
- Bereken L^4 . Welke conclusie trek je uit L^4 over de toe- of afname van de populatie schildpadden?
- Men neemt steeds de helft van het aantal gelegde eieren weg. Na hoeveel jaar is er dan nog de helft van het oorspronkelijke aantal schildpadden over?

$$\text{naar} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{van} \\ \\ \\ \end{matrix} = L$$

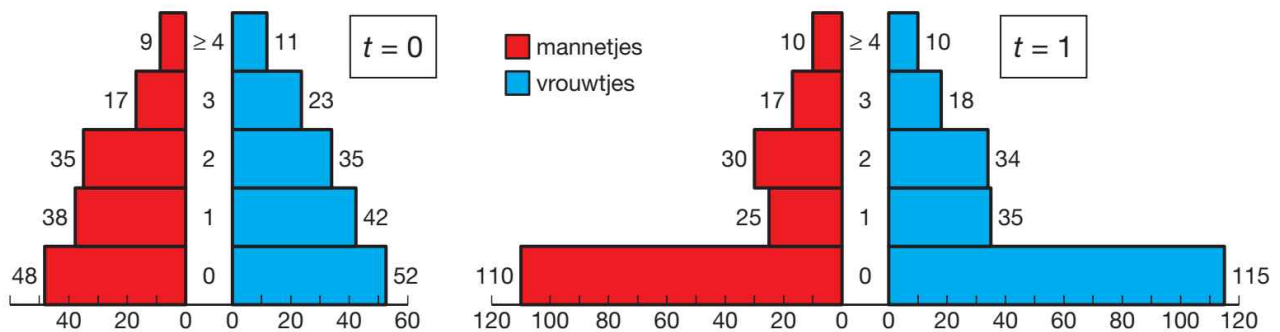
- 35** In een land zijn drie politieke partijen. Eens in de vier jaar worden verkiezingen gehouden. Onderzoek naar het stemgedrag levert de graaf in figuur G.9 op.
- Stel de overgangsmatrix V op die bij het stemgedrag hoort.
 - Bereken de kans dat iemand die in 2012 op A heeft gestemd dat in 2020 weer doet.
 - Bereken de kans dat iemand die in 2008 op B heeft gestemd in 2020 op A gaat stemmen.



figuur G.9

- In 2012 kreeg partij A 42% van de stemmen, partij B 36% en partij C 22%.
- Hoeveel procent van de stemmen ging in 2008 naar A?
 - Bereken het percentage van de mensen dat in 2020 op dezelfde partij zal stemmen als in 2012.
 - Onderzoek of op den duur een van de partijen de absolute meerderheid (minstens 50% van de stemmen) krijgt. Licht toe.

- 36** Van een populatie dieren is de leeftijdsopbouw op $t = 0$ en op $t = 1$ (t in jaren) gegeven. Zie de bevolkingspiramiden in figuur G.10.



figuur G.10

Van de 4-jarige en oudere dieren sterft 80% binnen één jaar. Alleen de 2- en 3-jarige dieren van deze populatie krijgen jongen. De 3-jarige dieren krijgen gemiddeld twee keer zoveel jongen als de 2-jarige. Elke 2-jarige krijgt gemiddeld 1,5 jong.

- Waarom is in de lesliematrix L het element l_{55} niet gelijk aan 0? Bereken dit element en stel de matrix L op.
 - Bereken de te verwachten leeftijdsopbouw op $t = 2$ en $t = 3$.
- 37** Gegeven is dat $1 + 8 + 27 + 64 + \dots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$. Bereken a , b , c , d en e .

- 38** Gegeven is het stelsel
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = p \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

- Toon aan dat het stelsel samenhangend en bepaald is voor elke waarde van p .
- Druk de oplossing van het stelsel uit in p .

- 39** In deze opgave ga je rekenen aan rijen waarbij matrices van pas komen.

Gegeven is de rij van Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

a Geef de recursieve formule van de rij.

De rij van Fibonacci kan worden genoteerd als $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$
met $f_0 = f_1 = 1$.

b Licht dit toe.

c Bereken de 30^e term in de rij van Fibonacci.

Gegeven is de rij van Padovan 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, ...

d Stel de recursieve formule van de rij van Padovan op.

De rij van Padovan kan worden genoteerd als

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \\ p_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ p_{n-2} \end{pmatrix} \text{ met } p_0 = p_1 = p_2 = 1.$$

e Licht toe dat $a = 0$, $b = 1$ en $c = 1$, en geef d , e , f , g , h en i .

f Bereken de 50^e term in de rij van Padovan.

- 40** **a** Gegeven zijn de punten $A(p, p-1)$, $B(2p, p)$ en $C(3p, p+1)$ met $0 < p < 2$.

Bereken exact de maximale oppervlakte van vierhoek $OABC$.

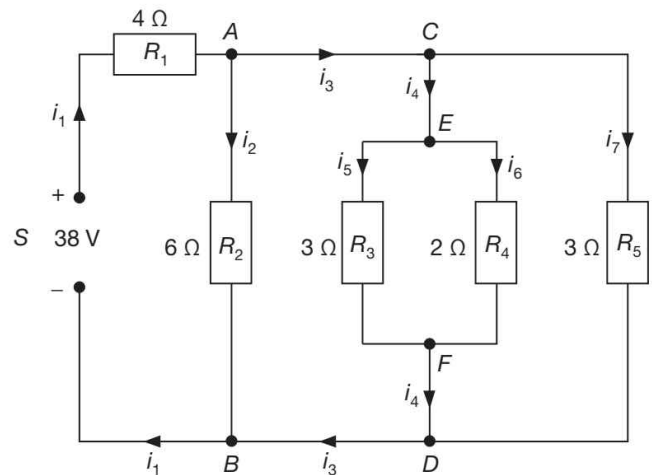
b Gegeven zijn de punten $P(4, 2)$, $Q(3p+4, p+6)$ en $R(4-p, p+4)$.

Bereken exact voor welke waarden van p de oppervlakte van driehoek PQR gelijk is aan 7.

- 41** In figuur G.11 zie je een elektrische schakeling met de stromen $i_1, i_2, \dots, i_7$ in ampère. Het spanningsverschil tussen de platen in de spanningsbron S is 38 Volt.

In de knooppunten A, B, C, D, E en F geldt de wet van Kirchhoff die zegt dat de som van de ingaande stromen gelijk is aan de som van de uitgaande stromen.

Voor de weerstanden R_1, R_2, R_3, R_4 en R_5 geldt de wet van Ohm die zegt dat het spanningsverschil tussen de uiteinden van een weerstand gelijk is aan het product van de stroom door die weerstand en de grootte van de weerstand.



figuur G.11

- a** Licht toe dat volgens de wet van Kirchhoff geldt $i_1 = i_2 + i_3$.
b Licht toe dat volgens de wet van Ohm geldt $4i_1 + 6i_2 = 38$.
c Bereken de stromen $i_1, i_2, \dots, i_7$ door een stelsel van zeven vergelijkingen met zeven variabelen op te lossen.

Overzicht GR-handleiding

Module

Het rijen-invoerscherm ▪ Het invoeren van een directe formule ▪ Het invoeren van een recursieve formule	vwo D deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 66
Matrices ▪ Rekenen met matrices	vwo D deel 1 hoofdstuk 4 bladzijde 151
Allerlei ▪ Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Trefwoordenregister

- A**
 a priori kans 102
 aangevulde matrix 167
 achterwaartse
 substitutie 143, 168
 afhankelijke
 gebeurtenissen 111
 afhankelijkte
 vergelijkingen 175
 afmeting van een
 matrix 144
 algoritme 171
 Al-Khwarizmi 171
- B**
 Bayes, regel van 134
 binomiaalcoëfficiënt 58
 binomium van Newton 58,
 59
 biometrie 109
 boomdiagram 13
- C**
 coëfficiëntenmatrix 167
 combinatie 29
 combinatoriek 11
 complement van
 verzamelingen 92
 complementgebeurtenis 124
 complementregel 124
 constant verschil 73
- D**
 deelverzameling 9
 determinant 183
 directe formule 69
 disjuncte verzamelingen 9
 doorsnede van
 verzamelingen 9
 driehoek van Pascal 53
- E**
 eenheidsmatrix 151
 element van een
 verzameling 8
- element van een matrix 144
 elementaire
 rijbewerking 168
 elimineren door
 substitutie 142
 empirische kans 102
 empirische wet van de grote
 aantallen 101
 evenwichtstoestand 160
- F**
 factor van een rij 79
 faculteit 25
 Fibonacci 65
 Fibonacci, rij van 66, 211
 frequentie, relatieve 101
 frequentie, totale 101
- G**
 Gauss, Carl Friedrich
 74, 173
 gauss-jordanalgoritme 171
 gebeurtenis 13
 gebeurtenissen,
 onafhankelijke 111
 gebeurtenissen,
 afhankelijke 111
 gereduceerde
 rij-echelonvorm 171
 gerichte graaf 154
 gesloten systeem 158
 getallenrij 63
 getallenverzameling 8
 graaf 144
 graaf, gerichte 154
 gulden getal 205
 gulden snede 205
- H**
 haakjes wegwerken 52
 herhalingen 21
 herhalingscombinatie 36
 herhalingsvariatie 21
 hoofddiagonaal 145
 Huygens, Christiaan 97
- I**
 inverse matrix 179
- J**
 Jordan, Camille 177
- K**
 kans, a priori 102
 kans, empirische 102
 kans, subjectieve 102
 kans, theoretische 102
 kans, voorwaardelijke 105
 kansboom 119
 kansdefinitie van
 Laplace 94, 95
 kansexperiment 94
 kansexperimenten,
 onafhankelijke 118
 kanshistogram 103
 kolom van een matrix 144
 kolommatrix 144
 kruistabel 108
- L**
 Laplace, kansdefinitie
 van 94, 95
 Laplace, Pierre Simon
 de 96
 lege verzameling 8
 leidend element 171
 Leonardo van Pisa 65
 Leslie, Patrick 164
 lesliematrix 162
 limiet 85
- M**
 macht met exponent nul 52
 Markov, Andrei 159
 markovketen 158
 matrix 144
 matrix, aangevulde 167
 matrix, inverse 179
 matrixvermenigvuldiging
 147

meetkundige rij 79
meetkundige rij, som
van 81

multinomiaalcoëfficiënt 60
multinomial 60

N

natuurlijke getallen 8
Newton, binomium van 58,
59
niet-samenhangend
stelsel 174
nulrij 171

O

onafhankelijke
gebeurtenissen 111
onafhankelijke
kansexperimenten 118
onderdeterminant 184
ondermatrix 184
overgangsmatrix 154

P

Padovan, rij van 205, 211
Pascal, Blaise 54
Pascal, driehoek van 53
Pascal, regel van 54
permutatie 25
plastische getal, het 205
populatievoorspellingsmatrix
162
product van verzamelingen 9
productmatrix 145
productregel bij telproblemen
16
productregel voor
onafhankelijke
gebeurtenissen 119

R

rangschikking 25, 42
recursieve formule 63, 67
reden 80
regel van Bayes 134
regel van Pascal 54
rekenkundige rij 73

rekenkundige rij, som
van 74
relatieve frequentie 101
rij van een matrix 144
rij van Fibonacci 65, 66,
211
rij van Padovan 205, 211
rij-echelonvorm 170
rijen-invoerscherm 66
rij-equivalente matrices 168
rooster 13
rooster, kortste routes in 33

S

samengesteld
kansexperiment 94, 98
samenhangend en bepaald
stelsel 174
samenhangend en onbepaald
stelsel 175
sensitiviteit 136
sigmanotatie 56
sommatrix 145
sommeerbaar 85
somregel voor kansen 122
somregel voor telproblemen
17
somregel, algemene 17
somrij 69
somrij, recursieve formule
van 69
specificiteit 136
spil 170
spilelement 170
stabilisatie 160
startwaarde van een rij 63
stelsels vergelijkingen 142
strijdige vergelijkingen 174
subjectieve kans 102
substitutie, achterwaartse
143, 168
substitutie, elimineren door
142
systematisch noteren 13

T

telproblemen, visualiseren
van 13
termen van een rij 63
theoretische kans 102
totale frequentie 101

U

uitkomst 13
uitkomstenverzameling 13

V

vaasmodel 116
variatie 21
vegen in kolommen 170
venndiagram 8
vereniging van
verzamelingen 9
vermenigvuldigen van
matrices 147
verschil van verzamelingen
9
verzameling 8
vierkante matrix 145
voorwaardelijke kans
105, 131, 132
vruchtbaarheidscijfers 163

W

wegendiagram 13
wet van de grote aantallen
101

Verantwoording

Fotoresearch: B en U International Picture Service,
Amsterdam

Illustratieverwerving: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: OKS, Delhi (India)

Foto's

Hollandse Hoogte, Amsterdam: blz. 6-7, 23, 26,
38, 43, 65, 74, 76, 77, 96, 97, 104, 127 b, 149,
154, 159

iStockphoto: blz. 45, 73, 182

ANP Photo, Rijswijk: blz. 46, 158, 164 b

Novum / WFA, Amsterdam: blz. 50-51, 65, 74,
96, 101

Shutterstock: blz. 90-91, 109, 161

Rue des Archives / Hollandse Hoogte: blz. 97

Getty Images: blz. 127 b, 188

Polaris / Hollandse Hoogte, Amsterdam: blz. 127 o
Imageselect, Wassenaar: blz. 140-141

Springer -Verlag, Londen: blz. 164 o

Wikimedia Commons: blz. 171, 173, 177

Matt King/Getty Images: blz. 190-191

Gerrit de Jong, Middelburg: blz. 202 b

Nationale Beeldbank, Amsterdam: blz. 207

Met betrekking tot sommige teksten en/of
illustratiemateriaal is het de uitgever, ondanks
zorgvuldige inspanningen daartoe, niet gelukt
eventuele rechthebbende(n) te achterhalen. Mocht
u van mening zijn (auteurs-)rechten te kunnen doen
gelden op teksten en/of illustratiemateriaal in deze
uitgave dan verzoeken wij u contact op te nemen
met de uitgever.

Colofon

Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer

Lay-out: OKS, Delhi (India)



4 / 17

© 2014 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Houten,
The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van
1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze
uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in
een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar
gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij
elektronisch, mechanisch, door fotokopieën,
opnamen of enig andere manier, zonder voorafgaande
schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische
verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op
grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de
daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan
Stichting Reprorecht (Postbus 3060, 2130 KB
Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen
van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen,
readers en andere compilatiewerken (artikel 16
Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting
PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten
Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp,
www.stichting-pro.nl).

*All rights reserved. No part of this publication
may be reproduced, stored in a retrieval system, or
transmitted, in any form or by any means, electronic,
mechanical, photocopying, recording or otherwise
without prior written permission of the publisher.*

ISBN 978-90-01-84238-3