

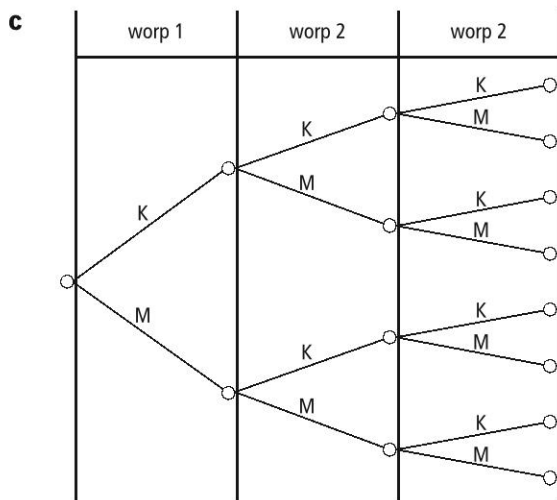
H1 Systematisch tellen

1-1 Machtsbomen en faculteitsbomen

Pagina 12

- 1 Er zijn 4 mogelijkheden: KK, KM, MK en MM.
 Bij KK wast Ruud af, bij MM wast Harry af en bij KM en MK moet Frank afwassen.
 Frank is dus in het nadeel omdat hij in twee van de vier mogelijkheden af moet wassen.

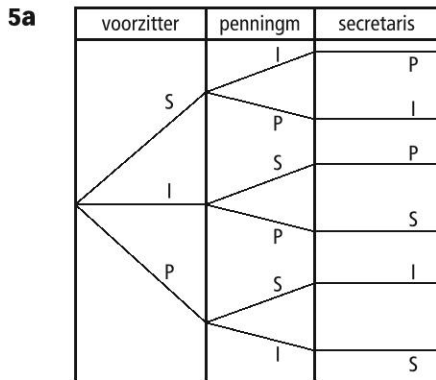
- 2a Het boomdiagram heeft drie kolommen, één voor elke worp.
 b Bij elke splitsing teken je twee takken, één voor kop en één voor munt.



- d Er zijn acht verschillende volgorden in het boomdiagram.
 e Bij vijf keer een geldstuk opgooien heeft het boomdiagram vijf kolommen met telkens twee takken bij elke splitsing, dus in totaal $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ verschillende volgorden.
- 3a Jeroen heeft vijf mogelijkheden voor het eerste bordje en vier voor het tweede.
 b Er zijn $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ verschillende manieren.

Pagina 13

- 4a Er zijn drie dipswitches, dus in het boomdiagram zijn er drie kolommen.
 Per dipswitch zijn er twee standen, dus bij elke splitsing in het boomdiagram zijn er twee takken. Er zijn dus $2 \times 2 \times 2 = 8$ verschillende instellingen mogelijk.
- b $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ verschillende instellingen
- c $2^9 = 512$ en $2^{10} = 1024$
 Er zijn dus 10 dipswitches nodig.



Je hebt hier een faculteitsboom.

- b** Er zijn zes verschillende verdelingen mogelijk.
c De faculteitsboom bestaat dan uit vijf kolommen waarin het aantal takken bij elke splitsing telkens met één afneemt.
 Er zijn dan $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ verschillende verdelingen mogelijk.

- 6** Voor de eerste knikker zijn er tien mogelijkheden, voor de tweede nog negen enzovoorts.
 Je kunt op $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$ verschillende volgorden de tien knikkers uit de vaas halen.

- 7a** Dat is hetzelfde als $12!$ en dus gelijk aan 479 001 600.

b $8! = 40\,320$

c $25! \approx 1,55 \cdot 10^{25}$

- d** Het aantal volgorden is $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ofwel $15! \approx 1,31 \cdot 10^{12}$

e
$$\frac{9!}{8!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9$$

$$\frac{100!}{98!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{98!} = 100 \cdot 99 = 9900$$

- 8a** Vijf kinderen kun je op $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ verschillende manieren op een rij zetten.
b Er zijn $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ verschillende 'woorden' van vier letters.
c Voor elk cijfer van de pincode heb je 10 verschillende cijfers om uit te kiezen.
 Er zijn $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$ verschillende pincodes van vier cijfers.
d Bij elke vraag moet je kiezen uit drie antwoorden. Er zijn 50 vragen, dus er zijn $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^{50} \approx 7,18 \cdot 10^{23}$ verschillende manieren om de toets te maken.
e Je hebt bij opdracht a en b te maken met een faculteitsboom, bij opdracht c en d met een machtsboom.

1-2 Permutaties

Pagina 14

- 9a** Je kunt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ verschillende ‘woorden’ maken van zeven letters.
- b** Peter kan $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ verschillende ‘woorden’ van drie letters maken.
- c** Hij kan $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ verschillende ‘woorden’ van vijf letters maken.
- 10** Voor de positie linksvoor heeft de coach negen keuzemogelijkheden, voor de positie middenvoor nog acht enzovoorts. Er zijn dus $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60\,480$ beginopstellingen mogelijk.
- 11a** Je kunt $23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \approx 5,40 \cdot 10^{13}$ opstellingen maken.
- b** $23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 =$

$$\frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{12} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{23!}{12!}$$
- 12a** $45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 = \frac{45!}{37!} \approx 8,69 \cdot 10^{12}$
- b** $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{15!}{6!} = 1\,816\,214\,400$
- c** $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = \frac{18!}{12!} = 13\,366\,080$
- d** $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = \frac{36!}{29!} \approx 4,21 \cdot 10^{10}$
- 13** Dat kan op $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$ manieren.
- b** Dat kan op $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 = \frac{40!}{30!} \approx 3,08 \cdot 10^{15}$ manieren.

Pagina 15

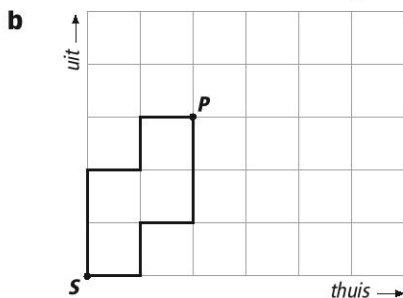
- 14a** Als je $n!$ uitschrijft, heb je alleen de eerste r factoren nodig. De overige $n - r$ factoren moet je wegdelen. Je moet dus delen door $(n - r)!$.
- b** $\frac{1!}{(1 - 1)!} = \frac{1!}{0!} = \frac{1}{0!}$
 Als de uitkomst hiervan gelijk moet zijn aan 1, dan volgt daaruit dat $0! = 1$.
- 15a** ${}_{20}nPr\,6 = 27\,907\,200$
- b** ${}_{14}nPr\,4 = 24\,024$
 ${}_{12}nPr\,3 = 1320$
 ${}_{12}nPr\,9 = 79\,833\,600$
- 16** Een mogelijke proefwerkvraag is:
 Uit een klas van 20 leerlingen worden drie leerlingen aangewezen die op een rijtje voor de klas moeten gaan staan. Hoeveel verschillende rijtjes kun je zo maken?

- 17a** Er zijn drie plaatsen op de wikkel waar het woord suiker in een ‘vreemde’ taal afgedrukt wordt. Voor plaats 1 heb je dan de keus uit drie talen, voor plaats 2 de keus uit twee talen en voor plaats 3 nog de keus uit één taal.
Het aantal verschillende wikkels is dus $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
- b** Voor plaats 1 op de wikkel heb je nu de keus uit zeven talen, voor plaats 2 de keus uit zes talen en voor plaats 3 de keus uit vijf talen.
Er zijn dus $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ verschillende wikkels mogelijk.
- c** Voor de twee andere talen kun je dan nog uit 9 talen kiezen.
Voor het Nederlandse woord ‘suiker’ heb je de keus uit drie plaatsen. Voor de twee andere plaatsen op de wikkel heb je dan $9 \cdot 8 = 72$ mogelijkheden voor twee verschillende talen.
Er zijn dus $3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$ verschillende wikkels met het Nederlandse woord suiker.

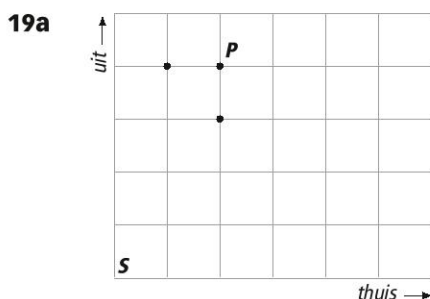
1-3 Routes in een rooster

Pagina 16

- 18a** Elke route met drie U’s en twee T’s hoort bij een uitslag met drie doelpunten voor de uit spelende club en twee doelpunten voor de thuis spelende club. Bij zo’n route hoort dus de uitslag 2-3.



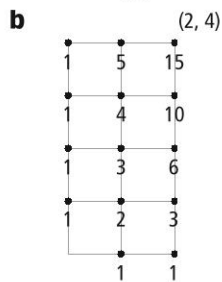
- c** UUUTT, UUTUT, UUTTU, UTUUT, UTUTU, UTTUU, TUUUT, TUUTU, TUTUU, TTUUU
- d** Er zijn 10 rijtjes met drie U’s en twee T’s, dus er zijn 10 scoreverlopen mogelijk met eindstand 2-3.



- b** Er zijn zes routes van (0, 0) naar (2, 2) namelijk TTUU, TUTU, TUUT, UTTU, UTUT en UUTT.
- c** Er zijn vier routes van (0, 0) naar (1, 3) namelijk TUUU, UTUU, UUTU en UUUT.
- d** Je moet altijd via (2, 2) of (1, 3) om in (2, 3) te komen.
Dus in totaal zijn er $6 + 4 = 10$ manieren om van (0, 0) naar (2, 3) te komen.

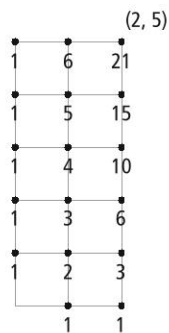
- 20a** Er is precies één route naar de punten B en F .
b Er is precies één route naar de punten C, D, E en K .
c De aantallen routes kloppen.
d Punt J bereik je via punt E of via punt I . Er zijn dus $1 + 4 = 5$ routes van punt A naar punt J .
e Er zijn $4 + 6 = 10$ routes van A naar N .
 Er zijn $5 + 10 = 15$ routes van A naar P .

- 21a** Twee rode ballen, dus twee naar rechts. Vier witte ballen, dus vier omhoog.
 Je krijgt hier het eindpunt $(2, 4)$.



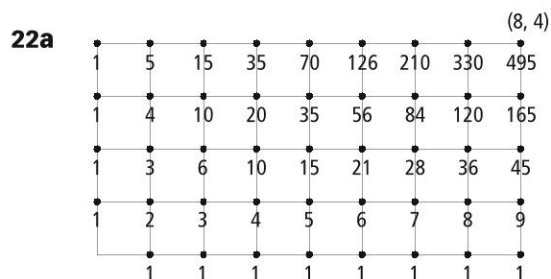
In het rooster lees je af dat er 15 routes naar het punt $(2, 4)$ gaan.
 Er zijn dus 15 verschillende kleurpatronen.

- c** Het eindpunt is nu $(2, 5)$.

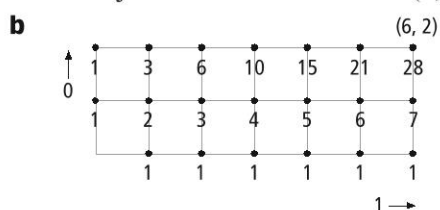


Er zijn 21 verschillende kleurpatronen met twee rode en vijf witte ballen.

Pagina 17



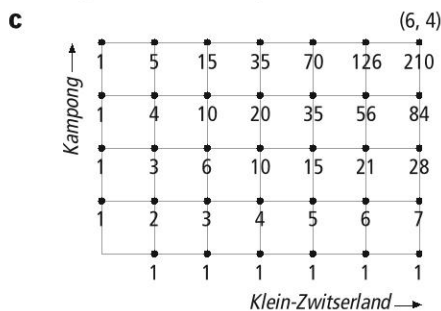
Er zijn 495 kortste routes van $(0, 0)$ naar $(8, 4)$.



Er zijn 28 bytes mogelijk met zes enen en twee nullen.

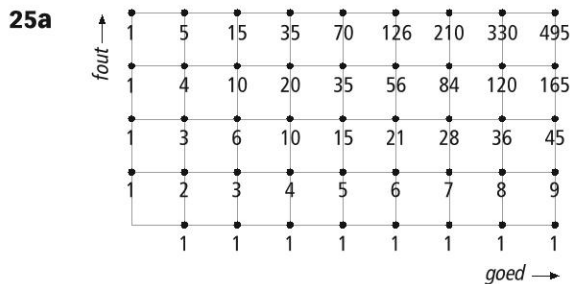
- 23a** Met het rooster tel je alle routes van P naar R , dus ook de routes die niet via Q gaan.
- b** Van P naar Q is van $(0, 0)$ naar $(3, 3)$. Daar zijn 20 routes mogelijk.
Van Q naar R is van $(3, 3)$ naar $(5, 5)$ en dat komt overeen met van $(0, 0)$ naar $(2, 2)$. Daar zijn zes routes mogelijk.
In totaal zijn er dus $20 \times 6 = 120$ routes om van P via Q naar R te komen.

- 24a** Bij elk gemaakt doelpunt kun je kiezen uit twee alternatieven: een doelpunt voor Kampong of een doelpunt voor Klein-Zwitserland.
- b** Bij de eindstand 4-6 hoort het eindpunt $(4, 6)$ (of het eindpunt $(6, 4)$, dat hangt af van welke ploeg je bij de horizontale as van het rooster zet en welke bij de verticale as).



Er kunnen 210 verschillende scoreverlopen leiden tot deze uitslag.

- d** Van 0-0 naar 2-2 kan op zes verschillende manieren.
Van 2-2 naar 4-6 komt overeen met van 0-0 naar 2-4 en dat kan op 15 verschillende manieren.
Met de ruststand 2-2 zijn er dus $6 \times 15 = 90$ verschillende scoreverlopen mogelijk.



Je kunt dus op 495 manieren acht van de twaalf vragen goed hebben.

- b** Voor vijf goed beantwoorde vragen van de eerste zeven vragen ga je in het rooster naar het punt $(5, 2)$.
Er gaan 21 routes naar dat punt. Dat kan dus op 21 verschillende manieren.
Voor drie goed beantwoorde vragen van de laatste vijf vragen ga je in het rooster naar het punt $(3, 2)$. Er gaan 10 routes naar dit punt. Dat kan dus op 10 verschillende manieren.
In totaal kan dit dus op $21 \times 10 = 210$ verschillende manieren.

1-4 Combinaties

Pagina 18

- 26a** Het aantal keuzemogelijkheden neemt telkens met één af, dus hier hoort een faculteitsboom bij.
- b** Dat kan op $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ manieren.
- c** $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!}$
- 27a** Farid heeft drie cd's gewonnen, het maakt dan niet uit in welke volgorde hij de drie cd's kiest.
- b** Er zijn tien mogelijke drietallen:
ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE
- c** In het rooster moet je dan naar het punt (3, 2) gaan. Er gaan tien routes naar dat punt.
- 28a** Bij opdracht 26 speelde de volgorde van drie gekozen cd's een rol, bij opdracht 27 niet.
- b** Voor de eerste cd heb je de keuze uit drie, voor de tweede de keuze uit twee, voor de derde nog maar uit één.
- c** Als Jelle bijvoorbeeld BDE kiest is dat een andere keuze dan DEB. Voor Farid is dat dezelfde keuze. Er zijn $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschillende rijtjes te maken met B, D en E. Die zijn voor Jelle allemaal verschillend, voor Farid zijn ze hetzelfde. Dus het aantal keuzemogelijkheden voor Farid kun je berekenen door het aantal van Jelle ($5 \cdot 4 \cdot 3$) te delen door $3 \cdot 2 \cdot 1$.
- d**
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$
- 29a** Er zijn $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ feestcommissies mogelijk.
- b** Let je op de bestuursfunctie dan zijn er 504 mogelijkheden.
Hierin zitten steeds $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschillende mogelijkheden met dezelfde drie mensen.
Let je niet meer op de bestuursfunctie, dan zijn er dus $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ verschillende mogelijkheden.
- c**
$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{3! \cdot 6!}$$

Pagina 19

- 30a**
$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$$
- b** Je kiest r 'dingen' uit een totaal van n .
Als je $n!$ uitschrijft, heb je alleen de eerste r factoren nodig. De overige $n - r$ factoren moet je wegdelen. Je moet dus delen door $(n - r)!$.
Vervolgens doet de volgorde waarin de r dingen gekozen worden er niet toe. Er zijn $r!$ volgorden waarop de r dingen gekozen kunnen worden, dus je deelt door $r!$.

31a In het rooster doe je 3 stappen naar rechts en 7 stappen omhoog. Je doet dus in totaal $3 + 7 = 10$ stappen.

b $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ of met de rekenmachine:

$$10 \text{ nCr } 3 = 120$$

32a $\binom{20}{4} = 20 \text{ nCr } 4 = 4845$

$$\binom{12}{7} = 12 \text{ nCr } 7 = 792$$

b $\binom{19}{3} = 19 \text{ nCr } 3 = 969$

$$\binom{20}{6} = 20 \text{ nCr } 6 = 38\,760$$

$$\binom{60}{59} = 60 \text{ nCr } 59 = 60$$

c Telkens als je een selectie maakt van 14 dingen uit een totaal van 20, blijven er zes dingen over.

Het aantal mogelijke selecties van 14 dingen uit een totaal van 20 komt dus overeen met het aantal mogelijke selecties van zes dingen uit een totaal

van 20. Dus is $\binom{20}{14} = \binom{20}{6}$.

33a Je kunt $\binom{30}{8} = 5\,852\,925$ verschillende groepjes van acht toeristen kiezen.

b Er zijn nu nog $30 - 8 = 22$ toeristen over om uit te kiezen.

Dat kan dus op $\binom{22}{10} = 646\,646$ manieren.

c Voor het derde busje blijven twaalf toeristen over. Die passen precies in het derde busje.

In totaal kunnen de toeristen dus op $5\,852\,925 \cdot 646\,646 \cdot 1 \approx 3,78 \cdot 10^{12}$ manieren over de drie busjes verdeeld worden.

d De werkwijze bij opdracht a, b en c combineren.

Voor de eerste groep kun je $\binom{30}{10} = 30\,045\,015$ verschillende groepjes van tien deelnemers kiezen.

Daarna kun je uit de overgebleven 20 toeristen op $\binom{20}{10} = 184\,756$ manieren

tien deelnemers kiezen.

Voor de derde groep blijven tien toeristen over, die vormen de laatste groep.

In totaal kunnen de toeristen dus op $30\,045\,015 \cdot 184\,756 \cdot 1 = 5,55 \cdot 10^{12}$ manieren in drie groepen van tien deelnemers verdeeld worden.

1-5 Telproblemen

Pagina 20

34a Rijtjes met vijf ballen waarvan er één rood is, bestaan dus uit één rode en vier witte.

Je kunt zo vijf rijtjes krijgen.

- b** Er zijn $\binom{5}{2} = 10$ rijtjes met twee rode ballen.
Er zijn $\binom{5}{3} = 10$ rijtjes met drie rode ballen.
Er zijn $\binom{5}{4} = 5$ rijtjes met vier rode ballen.
- c** Met geen enkele rode bal is er één rijtje mogelijk, met vijf rode ballen ook één.
- d** In totaal kun je dus $5 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 32$ rijtjes van vijf ballen krijgen.
- 35a** Er zijn $\binom{7}{0}$ rijtjes mogelijk met 0 rode ballen. Net zo zijn er $\binom{7}{1}$ rijtjes met 1 rode bal mogelijk. Enzovoorts. Het totaal aantal rijtjes krijg je dan door al deze aantallen rijtjes bij elkaar op te tellen.
- b** $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$
mogelijke rijtjes
- c** $2^7 = 128$, dus het klopt.
- 36a** Aflezen bij het punt (4, 2) geeft 15 mogelijke rijtjes.
- b** Het totaal aantal mogelijke rijtjes met zes ballen vind je door de aantallen bij de punten (0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) en (6, 0) bij elkaar op te tellen. Deze punten liggen op de lijn door (0, 6) en (6, 0).
- c** Zie opdracht 35c. Bij elke getrokken bal zijn er twee mogelijkheden. Het totaal aantal rijtjes is dus een macht van 2. Het totaal aantal rijtjes vind je ook door de getallen op een diagonaal bij elkaar op te tellen. Dus de som van de getallen op een diagonaal is een macht van 2.
- 37a** Je kunt zo $7! = 5040$ verschillende ‘woorden’ maken.
- b** Je houdt op deze manier $5040 : 2 = 2520$ woorden over.
- c** Op deze manier hou je $2520 : 2 = 1260$ woorden over.

Pagina 21

- 38a** Bij zeven verschillende letters zou je $7!$ verschillende woorden krijgen. Nu er twee letters hetzelfde zijn, moet je dat aantal door 2 delen. Omdat er nog twee letters hetzelfde zijn, moet je nog een keer door 2 delen.
- b** De letters E, F en G kunnen op $3! = 6$ manieren onderling verwisseld zijn. Dus zes ‘woorden’ worden vervangen door het ‘woord’ KMPMPPK.
- c** Het aantal ‘woorden’ wordt zo zes keer zo klein.
Je houdt $1260 : 6 = 210$ ‘woorden’ over.
- 39a** Je kunt $10! = 3\,628\,800$ verschillende rijtjes maken.
- b** Je kunt dan $\frac{10!}{5!} = 30\,240$ verschillende rijtjes maken.
- c** Dan kun je $\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2520$ verschillende rijtjes maken.

40a Je hebt in totaal $5 + 3 + 6 = 14$ knikkers.

Er zijn $\frac{14!}{5! \cdot 3! \cdot 6!} = 168\,168$ rangschikkingen mogelijk.

b Er zijn in totaal $3 + 5 + 1 = 9$ personen.

Er zijn $\frac{9!}{3! \cdot 5! \cdot 1!} = 504$ rangschikkingen mogelijk.

c Je hebt in totaal 12 letters.

Er zijn $\frac{12!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 9979\,200$ rangschikkingen mogelijk.

41a Het aantal routes van A naar B lees je in het rooster af bij het punt $(3, 3)$ en dat is 20.

Het aantal routes van B naar C komt in het rooster overeen met het aantal routes van $(0, 0)$ naar $(2, 2)$ en dat is gelijk aan 6.

Het totaal aantal routes is dus $20 \times 6 = 120$.

b

			6		C
			22	48	
		6	16	26	
1	3	6	10	10	
1	2	3	4		
A	1	1	1		

In dit rooster zijn er 48 routes van A naar C .

42

			6			Q
			22	53	84	115
		6	16	31	31	31
1	3	6	10	15		
1	2	3	4	5		
P	1	1	1	1	1	

In het linker rooster zijn er 115 kortste routes van P naar Q .

1	5	15		15	51	108	186	Q
1	4	10		15	36	57	78	
1	3	6	10	15	21	21	21	
1	2	3	4	5	6			
P	1	1	1	1	1	1	1	

In het middelste rooster zijn er 186 kortste routes van P naar Q .

1	5	9	13	22	42	80	Q
1	4	4	4	9	20	38	
1	3			5	11	18	
1	2	3	4	5	6	7	
P	1	1	1	1	1	1	1

In het rechter rooster zijn er 80 kortste routes van P naar Q .

1-6 Binomium van Newton

Pagina 22

- 43a** Er zijn vier mogelijke samenstellingen mogelijk van een gezin met drie jongens en één meisje.
- b** Dat aantal komt overeen met het aantal routes naar punt C , dus dat is $\binom{4}{2} = 6$.
- c** Het totaal aantal samenstellingen van een gezin met vier kinderen is
 $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.
Of: het totaal is $2^4 = 16$.
- d** Vooreen gezin met twee jongens en vier meisjes zijn er $\binom{6}{2} = 15$ samenstellingen mogelijk.
- e** Het totaal aantal samenstellingen van een gezin met zes kinderen is $2^6 = 64$.
- 44a** $8 = 1 + 7$, $28 = 7 + 21$, $56 = 21 + 35$ enzovoorts.
De getallen op de achtste rij ontstaan, uitgezonderd het eerste en het laatste getal, door het getal dat er linksboven staat en het getal dat er rechtsboven staat bij elkaar op te tellen.
- b** 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
- c** Elke rij bestaat uit één getal meer dan het nummer van de rij.
De elfde rij bestaat uit twaalf getallen.
- d** De getallen op de elfde rij staan in een ‘gewoon’ rechthoekig rooster op een diagonaal die loopt vanaf het punt $(11, 0)$ tot het punt $(0, 11)$.
Het vierde getal hoort bij het punt $(8, 3)$ in het rooster. Het aantal routes naar $(8, 3)$ is $\binom{11}{3}$.
- e** Het zesde getal op de twaalfde rij is $\binom{12}{5} = 792$.

Pagina 23

- 45a** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Op de puntjes komen 1, 2 en 1 te staan.
- b** $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= (a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3)$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Op de puntjes komen 1, 3, 3 en 1 te staan.
- c** De getallen 1, 2 en 1 staan op de 2^e rij van de driehoek van Pascal, de getallen 1, 3, 3 en 1 op de 3^e rij.
- 46a** De term a^3b komt $\binom{4}{1} = 4$ keer voor.
- b** De term a^2b^2 komt $\binom{4}{2} = 6$ keer voor.
- c** $(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

d De getallen die op de puntjes zijn ingevuld, zijn gelijk aan $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}$ en

$\binom{4}{4}$ en dus gelijk aan de getallen op de vierde rij van de driehoek van Pascal.

e $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$ dus

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

47a De uitwerking bestaat uit acht termen (de 7^e rij van de driehoek van Pascal heeft acht getallen).

b Op de 7^e rij van de driehoek van Pascal staan de getallen 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7 en 1. Dus:

$$(x+y)^7 = 1x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + 1y^7$$

c $\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1} \cdot x \cdot 5 + \binom{2}{2} \cdot 5^2 = 1x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 1 \cdot 25 = x^2 + 10x + 25$, dus het klopt.

d $(x+2)^4 = 1x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot x \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$ ofwel

$$(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

$(p+3)^5 = 1p^5 + 5 \cdot p^4 \cdot 3 + 10 \cdot p^3 \cdot 3^2 + 10 \cdot p^2 \cdot 3^3 + 5 \cdot p \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^5$ ofwel

$$(p+3)^5 = p^5 + 15p^4 + 90p^3 + 270p^2 + 405p + 243$$

e $(a-b)^5 = 1a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot (-b) + 10 \cdot a^3 \cdot (-b)^2 + 10 \cdot a^2 \cdot (-b)^3 + 5 \cdot a \cdot (-b)^4 + 1 \cdot (-b)^5$
ofwel $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

f $(j+m)^4 = j^4 + 4j^3m + 6j^2m^2 + 4jm^3 + m^4$

Bijvoorbeeld de 4 in de term $4j^3m$ betekent dat er vier gezinssamenstellingen mogelijk zijn met drie jongens en één meisje.

48 $a = 1$ en $b = 1$ invullen geeft

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

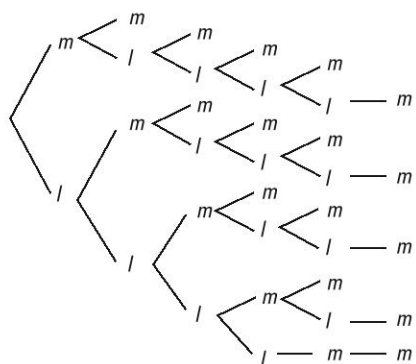
$(1+1)^n = 2^n$ en $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$ is de som van alle getallen op

de n^e rij van de driehoek van Pascal, dus de som van alle routes naar de punten waar je in n stappen kunt komen.

1-7 Gemengde opdrachten

Pagina 24

49a



- b** Uit het boomdiagram kun je aflezen dat er 15 volgorden zijn.
- c** Er zijn nu nog zes verschillende volgorden, namelijk:
mm, mlm, mllm, lmm, lmlm, llmm

50a Voor de veldspelers moeten er zeven gekozen worden uit een totaal van tien, dat kan op $\binom{10}{7} = 120$ verschillende manieren. Voor de keeper zijn er twee mogelijkheden.

De coach kan dus $120 \times 2 = 240$ verschillende teams samenstellen.

- b** Er zijn 7 veldspelers, waarvan er steeds 4 in het veld staan. Er kunnen dus $\binom{7}{4} = 35$ verschillende samenstellingen in het veld staan.

51a De decaan kiest dus 10 leerlingen uit 24 om er op maandag mee te praten.

Dit kan, als de volgorde onbelangrijk is, op $\binom{24}{10} = 1\,961\,256$ verschillende manieren. De rest van de klas komt dan automatisch op dinsdag.

- b** Het aantal volgorden waarin de tien gesprekken worden gevoerd is gelijk aan $10! = 3\,628\,800$.
- c** Een rooster voor de gesprekken is een rijtje van drie keer een j (jongen) en zeven keer een m (meisje).

Het aantal van zulke rijtjes is $\binom{10}{3} = 120$.

- d** De decaan kan deze klas op $\frac{21!}{8! \cdot 3! \cdot 10!} = 58\,198\,140$ manieren voor de gesprekken opsplitsen.

Pagina 25

52a De acht verschillende cijfers zijn op $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 =$

$\frac{10!}{2!} = 1\,814\,400$ manieren te rangschikken. De zeven letters zijn op

$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 420$ manieren te rangschikken.

Er zijn zo $1\,814\,400 \times 420 = 762\,048\,000$ verschillende wachtwoorden mogelijk.

- b** De acht cijfers zijn nu op 10^8 manieren te rangschikken.
Er zijn nu $10^8 \times 420 = 4,2 \times 10^{10}$ verschillende wachtwoorden mogelijk.

53a $(x - y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

- b** $(3x + 4)^2 = 1 \cdot 9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 1 \cdot 16$ ofwel $(3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$

- c** $(2p + 3)^5 = 1 \cdot (2p)^5 + 5 \cdot (2p)^4 \cdot 3 + 10 \cdot (2p)^3 \cdot 3^2 + 10 \cdot (2p)^2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 2p \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^5$
ofwel $(2p + 3)^5 = 32p^5 + 240p^4 + 720p^3 + 1080p^2 + 810p + 243$

- d** $(a - 2b)^6 =$
 $a^6 + 6 \cdot a^5 \cdot (-2b) + 15 \cdot a^4 \cdot (-2b)^2 + 20 \cdot a^3 \cdot (-2b)^3 + 15 \cdot a^2 \cdot (-2b)^4 + 6 \cdot a \cdot (-2b)^5 + (-2b)^6 =$
 $a^6 - 12a^5b + 60a^4b^2 - 160a^3b^3 + 240a^2b^4 - 192ab^5 + 64b^6$

- e** x^3y^4 komt voor in de vijfde term in de uitwerking van $(3x + 5y)^7$.

Het vijfde getal op de 7^e rij in de driehoek van Pascal is 35.

De vijfde term is dus $35 \cdot (3x)^3 \cdot (5y)^4$ ofwel $590\,625x^3y^4$.

De term x^3y^4 komt 590 625 keer voor.

- 54a** In totaal zijn er voor de jongens $3 \times 3 \times 3 = 27$ keuzemogelijkheden omdat elke jongen drie keuzemogelijkheden heeft.
- b** XXY betekent jongen A kiest meisje X, jongen B kiest meisje X en jongen C kiest meisje Y.
Er zijn zes mogelijkheden dat meisje X twee keer wordt gekozen namelijk XXY, XYX, YXX, XXZ, XZX en ZXX . Op dezelfde manier zijn er ook steeds zes mogelijkheden dat meisje Y of Z twee keer wordt gekozen. In totaal zijn er dus 18 mogelijkheden.
- c** XYZ betekent: jongen A kiest meisje X, jongen B kiest meisje Y en jongen C kiest meisje Z.
Dit zijn de gevallen XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY en ZYX .
- d** Bij elke van de 27 mogelijke keuzes van de jongens, zijn natuurlijk ook 27 keuzes van de meisjes. Er zijn dus in totaal $27 \times 27 = 729$ verschillende keuzemogelijkheden.
- e** XYZ -ABC betekent: jongen A kiest meisje X, jongen B kiest meisje Y, jongen C kiest meisje Z, en meisje X kiest jongen A, meisje Y kiest jongen B en meisje Z kiest jongen C.
Er zijn zes mogelijkheden om drie 'love duo's' te vormen namelijk XYZ -ABC, XYZ -ACB, XYZ -BAC, XYZ -BCA, XYZ -CAB en XYZ -CBA.
Het gebeurt dus in zes van de 729 gevallen ofwel $\frac{1}{121\frac{1}{2}}$, wat betekent dat de kans nog kleiner is dan de presentator dacht.

Test jezelf

Pagina 28

- T-1a** Dit is een faculteitsboom.
- b** Bij elke baan neemt het aantal takken telkens met één af.
- c** Er zijn $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ verschillende getallen mogelijk.
- d** Voor elk cijfer heb je zes mogelijkheden.
Er zijn $6^{10} = 60\,466\,176$ verschillende getallen mogelijk.
- T-2a** Het aantal permutaties van 5 uit 88 is $88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 = 4\,701\,090\,240$.
Of met de rekenmachine: $88 \text{ nPr } 5 = 4\,701\,090\,240$.
- b** A $23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = \frac{23!}{18!} = 4037880$
B $58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53 = \frac{58!}{52!} \approx 2,91 \cdot 10^{10}$
- T-3a** Dit komt overeen met het aantal routes van (0, 0) naar (3, 3) en dat is 20.
- b** Van (0, 0) naar (6, 5) zijn 462 routes. Er zijn dus 462 verschillende scoreverlopen.
- c** Van (0, 0) naar (5, 1) zijn zes routes. Van (5, 1) naar (7, 4) komt overeen met van (0, 0) naar (2, 3) en dat zijn 10 routes.
Het aantal verschillende scoreverlopen is dus $6 \times 10 = 60$.
- d** Van (0, 0) naar (6, 2) zijn 28 routes.
- e** Bij de eerste zes vragen er drie goed hebben komt overeen met van (0, 0) naar (3, 3) en dat zijn 20 routes.
Bij de laatste vier vragen er twee goed hebben komt overeen met van (0, 0) naar (2, 2) en dat zijn 6 routes.
Het aantal verschillende volgorden is dus $20 \times 6 = 120$.

- manieren.

Pagina 29

- leggen.

P 1 1 1 1 1 1 1

- Dat geeft:

$$(p+q)^8 = p^8 + 8p^7q + 28p^6q^2 + 56p^5q^3 + 70p^4q^4 + 56p^3q^5 + 28p^2q^6 + 8pq^7 + q^8$$

- Dat geeft:

$$(a+3)^6 = a^6 + 6 \cdot a^5 \cdot 3 + 15 \cdot a^4 \cdot 3^2 + 20 \cdot a^3 \cdot 3^3 + 15 \cdot a^2 \cdot 3^4 + 6 \cdot a \cdot 3^5 + 3^6$$

ofwel $(a + 3)^6 = a^6 + 18a^5 + 135a^4 + 540a^3 + 1215a^2 + 1458a + 729$

- Dat geeft:

$$(a-2)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot (-2) + 6 \cdot a^2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot a \cdot (-2)^3 + (-2)^4 \text{ ofwel}$$

$$(a - 2)^4 = a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$$

- T-7a** Er is één scoreverloop dat leidt tot 3-0.
- b** Voor 3-2 was het 2-2, want bij elke andere stand zou de wedstrijd afgelopen zijn.
De stand 2-2 kan op $\binom{4}{2} = 6$ manieren tot stand komen.
- c** Nu zijn er $\binom{5}{2} = 10$ mogelijke scoreverlopen.
- T-8a** Deze tweekamp kan op $\frac{20!}{8! \cdot 7! \cdot 5!} = 99\,768\,240$ manieren verlopen zijn.
- b** Van de overige 15 partijen heeft A er dus nog drie gewonnen, heeft B er zeven gewonnen en zijn er vijf partijen geëindigd in remise.
De tweekamp kan nu op $\frac{15!}{3! \cdot 7! \cdot 5!} = 360\,360$ manieren verlopen zijn.
- T-9a** Dat kan op $\binom{9}{3} = 84$ manieren.
- b** Het ene gaatje staat niet in de rij en de kolom van het andere gaatje, dus als er al één gaatje is, zijn er nog vier mogelijkheden voor het tweede gaatje. Omdat dit voor elk tweetal gaatjes opgaat, zijn er in het totaal $(9 \times 4) : 2 = 18$ mogelijkheden. Je moet door 2 delen, anders tel je elke mogelijkheid twee keer mee.
- c** Bij elk cijfer zijn er twee mogelijkheden: wegponsen of niet. In het totaal zijn er dus $2^9 - 1 = 511$ mogelijkheden. Het is dus mogelijk om in elke trein op een verschillende wijze gaatjes weg te ponsen.

H2 Kansen

2-1 Theoretische kansen

Pagina 32

- 1a** In één van de acht vakjes staat een 5. De kans is $\frac{1}{8}$.
- b** In vijf van de acht vakjes staat een even getal. De kans is $\frac{5}{8} = 0,625$.
- c** Vier van de acht vakjes zijn rood. De kans is 50%.
- d** Drie van de acht vakjes zijn rood met een oneven getal. De kans is $\frac{3}{8} = 0,375$, dus 37,5%.
- 2** Totaal is er $361 + 639 = 1000$ keer gegooid. 361 worpen resulteerden in een rugligging. De kans op rugligging is dus ongeveer $\frac{361}{1000} = 0,361$, dus ongeveer 36%.
- 3a** Bij 100 keer gooien verwacht je 50 keer kop.
Dit is 8 minder dan de 58 keer kop van de simulatie.
- b** Bij 500 keer gooien verwacht je 250 keer kop.
Dit is 12 minder dan de 262 keer kop van de simulatie.
Bij 5000 keer gooien verwacht je 2500 keer kop. Dit is 76 minder dan de 2576 keer kop van de simulatie.
- c** Bij 100 keer gooien is het percentage kop 58%.
Bij 500 keer gooien is het percentage kop $\frac{262}{500} \times 100\% = 52,4\%$.
Bij 5000 keer gooien is het percentage kop $\frac{2576}{5000} \times 100\% = 51,52\%$.
- d** Hoe groter de simulatie, hoe beter de geschatte kans de theoretische kans van 50% nadert.

Pagina 33

- 4a** Er zijn zes kanten. Op één kant staan vier ogen. De kans is 1 op 6.
- b** Er zijn $6 \times 6 = 36$ mogelijke uitkomsten. Met 2-6, 3-5, 4-4, 5-3 en 6-2 heb je vijf mogelijkheden om totaal acht ogen te gooien. De kans is 5 op 36, ofwel $\frac{5}{36}$.
- 5a** Het aantal ogen is op elke kant van een dobbelsteen positief, dus $P(C)$ is dus 1.
- b** Op drie van de zes kanten staat een even aantal ogen, dus $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Op drie van de zes kanten staat een oneven aantal ogen. $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Het aantal ogen is altijd even of oneven, dus $P(A) + P(B) = 1$.
- c** Het aantal ogen is altijd zes of minder dan zes, dus $P(D) + P(E) = 1$.
- d** Nee, een kans kan nooit meer dan 1 zijn.
- 6a** Zie tabel hiernaast.
- b** Er zijn zes uitkomsten die horen bij de gebeurtenis 'de som is 7' en er zijn vijf uitkomsten die horen bij de gebeurtenis 'de som is 6'.
De gebeurtenis 'de som is 7' is dus het meest waarschijnlijk.
- c** Bijvoorbeeld de gebeurtenissen 'de som is 4' en 'de som is 10'.
- d** Gebeurtenis *niet-G*: de som is minder dan vier.

som	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- e** Bij gebeurtenis *niet-G* horen de uitkomsten (1, 1), (1, 2) en (2, 1), dus
 $P(\text{niet-G}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ en $P(G) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.
- f** Gebeurtenissen *H* en *K* zijn niet complementair. *H* en *K* hebben uitkomsten gemeenschappelijk zoals (1, 1) en (2, 2). Ook bevatten ze samen niet alle mogelijke uitkomsten, bijvoorbeeld (1, 2) en (1, 4).

2-2 Kansen vermenigvuldigen

Pagina 34

- 7a** $\frac{35}{100} \times 2000 = 700$, er komen dus 700 auto's langs *B*.
- b** $\frac{1}{4} \times 700 = 175$, er gaan dus 175 auto's naar *D*.
 $\frac{3}{4} \times 700 = 525$, er gaan dus 525 auto's naar *E*.
 $\frac{65}{100} \times 2000 = 1300$ en $\frac{1}{5} \times 1300 = 260$, er gaan dus 260 auto's naar *F* en
er gaan dus $1300 - 260 = 1040$ auto's naar *G*.
- c** $\frac{175}{2000} = \frac{7}{80}$ deel gaat naar *D*
 $\frac{525}{2000} = \frac{21}{80}$ deel gaat naar *E*
 $\frac{260}{2000} = \frac{13}{100}$ deel gaat naar *F*
 $\frac{1040}{2000} = \frac{13}{25}$ deel gaat naar *G*
- | | <i>D</i> | <i>E</i> | <i>F</i> | <i>G</i> | totaal |
|---------------|----------------|-----------------|------------------|-----------------|--------|
| aantal auto's | 175 | 525 | 260 | 1040 | 2000 |
| gedeelte | $\frac{7}{80}$ | $\frac{21}{80}$ | $\frac{13}{100}$ | $\frac{13}{25}$ | 1 |
- d** $\frac{21}{80}$ deel van de auto's gaat naar *E*. De kans dat een auto naar *E* gaat is dus $\frac{21}{80}$.
- 8a** *WW*, *WR* en *RR*.
- b** Er zijn meer rode ballen dan witte. $P(RR)$ is dus groter dan $P(WW)$.
- c** $P(RW)$ en $P(WR)$ hebben dezelfde kans.
- 9a** Eén op de vijf ballen is wit. De kans op een witte bal is $\frac{1}{5} = 0,2$.
De kans op een rode bal is $1 - 0,2 = 0,8$.
- b** $0,2 \times 1000 = 200$ en $0,8 \times 1000 = 800$. In theorie verwacht je bij 1000 keer een bal pakken 200 keer een witte en 800 keer een rode bal.
- c** $0,2 \times 200 = 40$. In theorie zul je 40 keer twee witte ballen krijgen.
- d** Van boven naar beneden kun je in de vakjes verwachten:
 $0,2 \times 200 = 40$
 $0,8 \times 200 = 160$
 $0,2 \times 800 = 160$
 $0,8 \times 800 = 640$
- e** In 160 van de 1000 keer krijg je *RW*. $P(RW) = \frac{160}{1000} = 0,16$.
- f** $P(WW) = \frac{40}{1000} = 0,04$
 $P(WR) = \frac{160}{1000} = 0,16$
 $P(RR) = \frac{640}{1000} = 0,64$

- g** $P(WW) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$
 $P(RW) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$
 $P(WR) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$
 $P(RR) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$

Deze uitkomsten komen overeen met de antwoorden uit de vorige opdrachten.

Pagina 35

- 10** $P(K) = 0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,063$

- 11a** De bijbehorende kansboom is:

$$P(LL) = 0,28 \times 0,28 = 0,0784$$

$$P(LR) = 0,28 \times 0,72 = 0,2016$$

$$P(RL) = 0,72 \times 0,28 = 0,2016$$

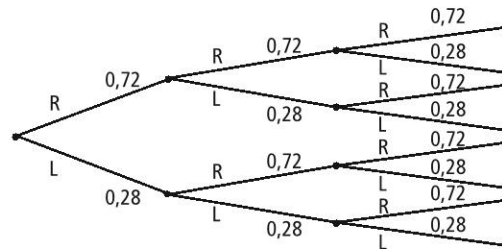
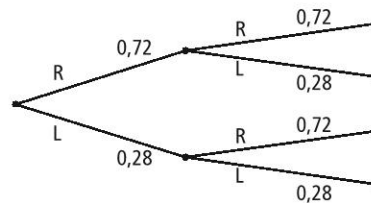
$$P(RR) = 0,72 \times 0,72 = 0,5184$$

- b** LL , LR , RL en RR zijn alle mogelijke uitkomsten. De som van de kansen op alle mogelijke uitkomsten is altijd 1.

- c** De kansboom wordt nu:

$$P(LRL) = 0,28 \times 0,72 \times 0,28 \approx 0,0564$$

$$P(RRL) = 0,72 \times 0,72 \times 0,28 \approx 0,1452$$

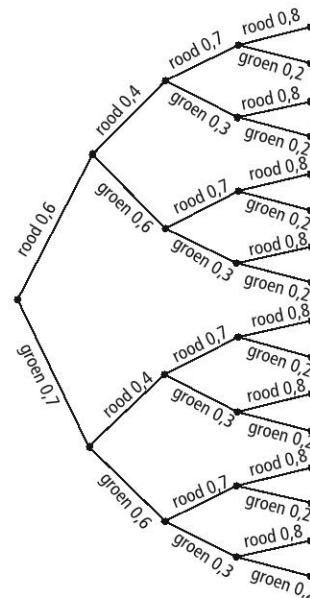


- 12a** De bijbehorende kansboom is:

$$P(RRRR) = 0,6 \times 0,4 \times 0,7 \times 0,8 = 0,1344$$

- b** $P(RGRG) = 0,6 \times 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,0504$

- c** $P(RRGG) = 0,6 \times 0,4 \times 0,3 \times 0,2 = 0,0144$



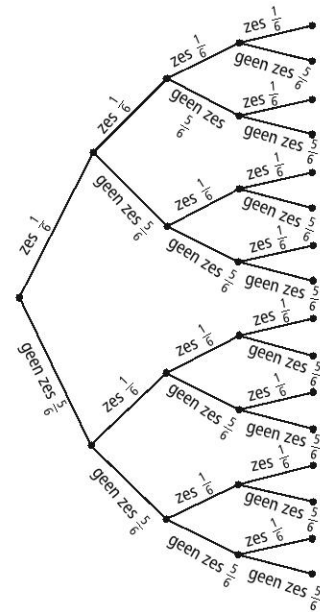
13a De bijbehorende kansboom is:

$$P(\text{geen zes, geen zes, geen zes, geen zes}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \approx 0,4823$$

b $P(37 \text{ keer geen zes}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{37} \approx 0,0012$

$$P(38 \text{ keer geen zes}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{38} \approx 0,00098$$

Je moet dus 38 keer gooien.



2-3 Kansen optellen

Pagina 36

14a $0,6 \times 0,65 = 0,39$

Langs D stroomt $\frac{39}{100}$ deel van het water dat langs A komt.

$$0,4 \times 0,3 = 0,12$$

Langs E stroomt $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ deel van het water dat langs A komt.

b $0,39 + 0,12 = 0,51$, dus $\frac{51}{100}$ deel van het water dat langs A stroomt, komt in het meer terecht.

15a De kansboom is:

b $P(AB) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$

$$P(BA) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$$

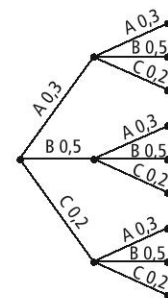
c $P(X) = P(AB) + P(BA) = 0,15 + 0,15 = 0,3$

d $P(AA) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$

e $P(BB) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$

$$P(CC) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$$

f $P(Y) = P(AA) + P(BB) + P(CC) = 0,09 + 0,25 + 0,04 = 0,38$



Pagina 37

16a De kansboom is:

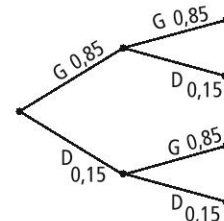
$$P(DD) = 0,15 \times 0,15 = 0,0225$$

$$P(GG) = 0,85 \times 0,85 = 0,7225$$

b $P(\text{een goede en een defecte}) =$

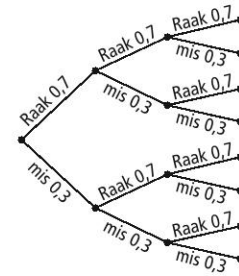
$$P(GD) + P(DG) = 0,85 \times 0,15 + 0,15 \times 0,85 = 0,255$$

c $P(\text{minstens één defecte}) = 1 - P(GG) = 1 - 0,7225 = 0,2775$



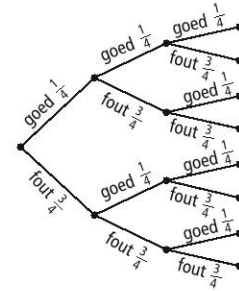
17a De kansboom staat hiernaast.

- b** $P(\text{twee keer raak}) = P(RRM) + P(RMR) + P(MRR) =$
 $0,7 \times 0,7 \times 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,7 + 0,3 \times 0,7 \times 0,7 =$
 $0,147 + 0,147 + 0,147 = 0,441$
- c** $P(RMR) = 0,7 \times 0,3 \times 0,7 = 0,147$
- d** $P(\text{hoogstens twee keer raak}) =$
 $1 - P(RRR) = 1 - 0,7 \times 0,7 \times 0,7 = 1 - 0,343 = 0,657$



18a De kansboom staat hiernaast.

- b** $P(\text{één fout}) = P(FGG) + P(GFG) + P(GGF) =$
 $0,75 \times 0,25 \times 0,25 + 0,25 \times 0,75 \times 0,25 + 0,25 \times 0,25 \times 0,75 \approx 0,1406$
 $P(\text{twee fouten}) = P(FFG) + P(FGF) + P(GFF) =$
 $0,75 \times 0,75 \times 0,25 + 0,75 \times 0,25 \times 0,75 + 0,25 \times 0,75 \times 0,75 \approx 0,4219$
- c** $P(\text{hoogstens twee fouten}) = 1 - P(FFF) = 1 - 0,75 \times 0,75 \times 0,75 \approx 0,5781$
- d** $P(\text{minstens twee fouten}) = P(\text{twee fouten}) + P(\text{drie fouten}) =$
 $0,4219 + 0,75 \times 0,75 \times 0,75 \approx 0,8438$



- 19a** $P(\text{drie welpen}) = P(111) = 0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,008$
 $P(\text{vier welpen}) = P(112) + P(121) + P(211) =$
 $0,2 \times 0,2 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,2 \times 0,2 = 0,06$
 $P(\text{vijf welpen}) = P(122) + P(212) + P(221) + P(113) + P(131) + P(311) =$
 $0,2 \times 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,2 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 \times 0,2 +$
 $0,2 \times 0,2 \times 0,3 + 0,2 \times 0,3 \times 0,2 + 0,3 \times 0,2 \times 0,2 = 0,186$
 $P(\text{zes welpen}) = P(222) + P(123) + P(132) + P(213) + P(231) + P(312) + P(321) =$
 $0,5 \times 0,5 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5 \times 0,3 + 0,2 \times 0,3 \times 0,5 + 0,5 \times 0,2 \times 0,3 +$
 $0,5 \times 0,3 \times 0,2 + 0,3 \times 0,2 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 \times 0,2 = 0,305$
 $P(\text{zeven welpen}) = P(223) + P(232) + P(322) + P(331) + P(313) + P(133) =$
 $0,5 \times 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,3 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 \times 0,5 +$
 $0,3 \times 0,3 \times 0,2 + 0,3 \times 0,2 \times 0,3 + 0,2 \times 0,3 \times 0,3 = 0,279$
 $P(\text{acht welpen}) = P(233) + P(323) + P(332) =$
 $0,5 \times 0,3 \times 0,3 + 0,3 \times 0,5 \times 0,3 + 0,3 \times 0,3 \times 0,5 = 0,135$
 $P(\text{negen welpen}) = P(333) = 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027$

De tabel wordt:

aantal welpen	3	4	5	6	7	8	9
kans	0,008	0,06	0,186	0,305	0,279	0,135	0,027

- b** $P(\text{hoogstens 7 welpen}) =$
 $1 - P(8 \text{ welpen}) - P(9 \text{ welpen}) = 1 - 0,135 - 0,027 = 0,838$
- c** $P(\text{minstens 4 welpen}) = 1 - P(3 \text{ welpen}) = 1 - 0,008 = 0,992$
- d** $P(\text{twee hetzelfde aantal}) = 1 - P(\text{drie hetzelfde aantal}) - P(\text{alledrie een ander aantal}) =$
 $1 - P(111) - P(222) - P(333) - P(123) - P(132) - P(213) - P(231) - P(312) - P(321) =$
 $1 - 0,2^3 - 0,5^3 - 0,3^3 - 0,2 \times 0,5 \times 0,3 - 0,2 \times 0,3 \times 0,5 - 0,5 \times 0,2 \times 0,3 +$
 $-0,5 \times 0,3 \times 0,2 - 0,3 \times 0,2 \times 0,5 - 0,3 \times 0,5 \times 0,2 = 0,66$

2-4 Kansen en roosters**Pagina 38**

- 20a** $P(\text{Ab} - \text{Ab} - \text{Ab}) = 0,6 \times 0,6 \times 0,6 = 0,216$
- b** $P(\text{Ab} - \text{Bert} - \text{Ab}) = 0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,144$
- c** De kansen blijven de hele wedstrijd gelijk. De uitslag Bert - Ab - Ab is dus even waarschijnlijk als de uitslag Ab - Bert - Ab of Ab - Ab - Bert, want steeds $0,6 \times 0,4 \times 0,6$ in verschillende volgorden.
- 21a** Het scoreverloop is Ab - Ab - Bert - Ab - Bert - Ab.
De eindstand is dus 4-2 in het voordeel van Ab.
- b** $P(\text{Ab} - \text{Ab} - \text{Bert} - \text{Ab} - \text{Bert} - \text{Ab}) = 0,6 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,6^4 \times 0,4^2 \approx 0,0207$
- c** Er zijn $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ mogelijke scoreverlopen met eindstand 4 - 2.
- d** Elk scoreverloop bevat viermaal winst voor Ab en tweemaal winst voor Bert.
De kans op elk van deze scoreverlopen is dus $0,6^4 \times 0,4^2 \approx 0,0207$
- e** $P(\text{Ab} \text{ wint met } 4 - 2) = 15 \times 0,6^4 \times 0,4^2 \approx 0,3110$

Pagina 39

- 22a** $P(\text{één vraag fout}) = \binom{12}{1} \times 0,75 \times 0,25^{11} \approx 2,15 \times 10^{-6}$
- b** $P(\text{acht vragen goed}) = \binom{12}{8} \times 0,75^4 \times 0,25^8 \approx 0,0024$
- c** $P(\text{drie vragen goed}) = \binom{12}{3} \times 0,75^9 \times 0,25^3 \approx 0,2581$
- d** $P(\text{hoogstens drie vragen goed}) = P(\text{geen vraag goed}) + P(\text{één vraag goed}) + P(\text{twee vragen goed}) + P(\text{drie vragen goed}) = 0,75^{12} + \binom{12}{1} \times 0,75^{11} \times 0,25 + \binom{12}{2} \times 0,75^{10} \times 0,25^2 + \binom{12}{3} \times 0,75^9 \times 0,25^3 \approx 0,6488$
- e** $P(\text{ten minste negen vragen goed}) = P(\text{negen vragen goed}) + P(10 \text{ vragen goed}) + P(11 \text{ vragen goed}) + P(12 \text{ vragen goed}) = \binom{12}{9} \times 0,75^3 \times 0,25^9 + \binom{12}{10} \times 0,75^2 \times 0,25^{10} + \binom{12}{11} \times 0,75^1 \times 0,25^{11} + 0,25^{12} \approx 3,92 \times 10^{-4} \approx 0,0004$
- 23a** $P(\text{geen prijs} - \text{geen prijs} - \text{prijs}) = 0,85 \times 0,85 \times 0,15 \approx 0,1084$
- b** $P(\text{vijf keer geen prijs} - \text{prijs}) = 0,85^5 \times 0,15 \approx 0,0666$
- c** Als Willem ten minste acht loten moet kopen, heeft hij in ieder geval zeven keer achter elkaar geen prijs.
 $P(\text{ten minste acht loten kopen}) = 0,85^7 \approx 0,3206$
- d** Twee keer prijs en vier keer geen prijs komt overeen met het punt (2, 4).
 $P(\text{twee keer prijs}) = \binom{6}{2} \times 0,85^4 \times 0,15^2 \approx 0,1762$

- 24a** $P(\text{Basic, Extra}) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$
- b** $P(\text{twee keer hetzelfde type}) = P(\text{Basic, Basic}) + P(\text{Extra, Extra}) + P(\text{Solar, Solar})$
 $P(\text{twee keer hetzelfde type}) = 0,3 \times 0,3 + 0,5 \times 0,5 + 0,2 \times 0,2 = 0,38$
- c** $P(\text{Basic, Solar, Extra}) = 0,3 \times 0,5 \times 0,2 = 0,03$
- d** Er zijn $3 \times 2 \times 1 = 6$ mogelijke volgorden om van elk type rekenmachine één te verkopen.
De kans op elke volgorde is even groot.
De kans om van elk type precies één te verkopen is dus $6 \times 0,03 = 0,18$.
- e** Er zijn $\frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = 2520$ mogelijke volgorden om drie keer een Basic, vijf keer een Solar en twee keer een Extra te verkopen. De kans op elke volgorde is $0,3^3 \times 0,2^5 \times 0,5^2$.
De gevraagde kans is dus $2520 \times 0,3^3 \times 0,2^5 \times 0,5^2 \approx 0,0054$.
- 25a** Het aantal volgorden om drie partijen te winnen, één te verliezen en één keer remise te spelen bereken je met behulp van meerdere combinaties:
 $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 20$.
 $P(3 \text{ winst, 1 verlies en 1 remise}) = 20 \cdot 0,6^3 \cdot 0,25 \cdot 0,15 = 0,162$.
- b** Zes punten kun je halen door drie partijen te winnen en twee partijen te verliezen, door twee partijen te winnen, twee partijen remise te spelen en één partij te verliezen of één partij winnen en vier keer remise.
 $P(6 \text{ punten}) = P(3 \text{ winst, 2 verlies}) + P(2 \text{ winst, 2 remise, 1 verlies}) + P(1 \text{ winst, 4 remise})$
 $P(6 \text{ punten}) = \binom{5}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,15^2 + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,25^2 \cdot 0,15 + \binom{5}{1} \cdot 0,6 \cdot 0,25^4 \approx 0,1616$
- c** $P(\text{minder dan 9 punten}) = 1 - P(10 \text{ punten}) - P(9 \text{ punten}) = 1 - P(5 \text{ winst}) - P(4 \text{ winst, 1 remise})$
 $P(\text{minder dan 9 punten}) = 1 - 0,6^5 - \binom{5}{4} \cdot 0,6^4 \cdot 0,25 \approx 0,7602$

2-5 Het vaasmodel

Pagina 40

- 26a** De kans op een witte knikker is telkens $\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$, dus $P(WW) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$.
- b** De kans op een rode knikker is telkens $\frac{20}{28} = \frac{5}{7}$, dus
 $P(RW \text{ of } WR) = \frac{5}{7} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{49}$
- 27a** De kans op een witte knikker is bij de eerste knikker $\frac{8}{28}$. Bij de tweede knikker is het totaal aantal knikkers $28 - 1 = 27$ en zijn er nog $8 - 1 = 7$ witte knikkers. De kans op een witte knikker is dan $\frac{7}{27}$, dus geldt
 $P(RR) = \frac{8}{28} \times \frac{7}{27}$.
- b** $P(RW \text{ of } WR) = P(RW) + P(WR) = \frac{20}{28} \times \frac{8}{27} + \frac{8}{28} \times \frac{20}{27} = \frac{80}{189} \approx 0,4233$
- c** Tom pakt alle zes de knikkers in één keer. Er is dus niet vast te stellen in welke volgorde de knikkers gepakt zijn.

- d** De kans op drie rode en drie witte knikkers is gelijk aan de kans op de route $RRRWWWW$ vermenigvuldigd met het aantal mogelijke routes naar $(3, 3)$.

$$P(\text{drie rode en drie witte}) = \binom{6}{3} \times \frac{20}{28} \times \frac{19}{27} \times \frac{18}{26} \times \frac{8}{25} \times \frac{7}{24} \times \frac{6}{23} \approx 0,1695$$

Pagina 41

- 28a** Met terugleggen, dus de kansen blijven gelijk. De kans op een rode knikker is $\frac{4}{9}$ en de kans op een witte knikker is $\frac{5}{9}$. Twee witte en vijf rode knikkers komt overeen met het punt $(2, 5)$.

Er zijn $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ mogelijke routes naar dit punt. Elke route heeft dezelfde kans, zodat

$$P(2W \text{ en } 5R) = 21 \times \left(\frac{5}{9}\right)^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^5 \approx 0,1124.$$

- b** Met terugleggen, dus de kansen blijven gelijk. De kans op een rode knikker is $\frac{4}{9}$ en de kans op een witte knikker is $\frac{5}{9}$. Vijf witte en twee rode knikkers komt overeen met het punt $(5, 2)$.

Er zijn $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$ mogelijke routes naar dit punt. Elke route heeft dezelfde kans, zodat

$$P(5W \text{ en } 2R) = 21 \times \left(\frac{5}{9}\right)^5 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \approx 0,2195.$$

- 29a** Zonder terugleggen, dus de kansen veranderen.

$$P(\text{zes knikkers met dezelfde kleur}) = P(\text{zes blauwe}) + P(\text{zes gele}) =$$

$$\frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \approx 0,0097$$

- b** Drie gele en drie blauwe knikkers komt overeen met het punt $(3, 3)$.

Er zijn $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ mogelijke routes naar dit punt. Elke route heeft dezelfde kans, zodat

$$P(3G \text{ en } 3B) = 20 \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \approx 0,3730.$$

- 30a** De kans dat Wendy de roos treft, is 3 op 5. Er zitten vijf knikkers in de vaas, waarvan drie rode (het treffen van de roos) en twee witte (voor het missen van de roos).

- b** De kans op raak schieten blijft na ieder schot 0,6. Je trekt dus 10 keer met terugleggen een knikker uit de vaas.

- c** Zeven keer raak, dus drie keer mis. Dit komt overeen met het punt $(7, 3)$.

$$\text{Er zijn } \binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

mogelijke routes naar dit punt. Er zijn dus 120 series mogelijk, waarin Wendy zeven keer raak schiet.

- d** $P(\text{zeven keer raak}) = 120 \times 0,6^7 \times 0,4^3 \approx 0,2150$

- 31a** Er zitten zes knikkers in de vaas, waarvan drie rood (prijs) en drie wit (geen prijs). Het trekken van een knikker uit de vaas komt overeen met het openkrassen van een vakje. Je kunt een vakje niet twee keer openkrassen, dus je trekt zonder terugleggen.

- b** Je kunt twee keer prijs krassen in de drie volgorden: prijs-prijs-geen prijs, prijs-geen prijs-prijs en geen prijs- prijs-prijs.
- c** De kans op elk van deze volgorden is even groot: $\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 0,15$.
- d** $P(\text{twee prijsvakjes}) = 3 \times 0,15 = 0,45$
- 32a** Er zitten 12 knikkers in de vaas, waarvan vier rode (leeg) en acht witte (vol). Het trekken van een knikker komt overeen met het pakken en testen van een batterij. Een batterij kan slechts één keer gepakt worden, dus je trekt zonder terugleggen tot je vier witte knikkers hebt.
- b** Als er zes testen nodig zijn, had Karin na vijf testen drie volle en twee lege batterijen. De zesde test levert haar de vierde volle batterij op. Voor het aantal mogelijke volgordes moet je het aantal routes berekenen naar het punt (3, 2).
- c** Er zijn $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ routes naar het punt (3, 2).
 $P(\text{zes testen nodig}) = 10 \times \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \approx 0,3030$
- 33a** Het aantal blikken is erg groot en de steekproef is in verhouding erg klein. De veranderende kansen blijven daardoor bij benadering gelijk aan de kansen van trekken met terugleggen.
- b** $P(\text{één blik niet van kwaliteit A}) = \binom{10}{1} \times 0,9^9 \times 0,1 \approx 0,3874$
- c** $P(\text{twee blikken niet van kwaliteit A}) = \binom{10}{2} \times 0,9^8 \times 0,1^2 \approx 0,1937$

2-6 Voorwaardelijke kansen

Pagina 42

- 34a** $P(\text{even}) = P(\text{oneven}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, dus de kans dat ze goed raadt is 0,5.
- b** Er zijn nog drie mogelijke uitkomsten: 2, 4 en 6. De kans dat ze het goed heeft is $\frac{1}{3}$.
- 35a** Van de 79 mensen die sinaasappels eten, zijn 26 verkouden geworden, dus de kans is $\frac{26}{79} \approx 0,329$.
- b** Van de 71 mensen die geen sinaasappels eten, zijn 32 verkouden geworden, dus de kans is $\frac{32}{71} \approx 0,451$.
- c** Totaal zijn er $26 + 32 = 58$ verkouden personen. Hiervan eten 26 personen sinaasappels, dus de kans is $\frac{26}{58} \approx 0,448$.
- 36a** Gebeurtenis A : het gooien van een drievoud (3 of 6).
Gebeurtenis B : het gooien van een even getal (2, 4 of 6).
 $P(A|B) = \frac{1}{3}$
- b** Gebeurtenis A : 3, 4, 5, 6
Gebeurtenis B : 1, 2, 3
 $P(A|B) = \frac{1}{3}$ en $P(B|A) = \frac{1}{4}$

- 37a** In het schema kun je zien welke uitkomsten bij gebeurtenis A en B horen.

$$P(A|B) = \frac{2}{5}$$

b $P(B|A) = \frac{2}{9}$

	1	2	3	4	5	6
1					B	
2		A		A, B		A
3			B			
4		A, B		A		A
5	B					
6		A		A		A

Pagina 43

- 38a** Er zitten 52 kaarten in een kaartspel, waarvan vier azen, dus $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
Er zijn 13 schoppenkaarten, waarvan één aas, dus $P(A|B) = \frac{1}{13}$.

De kansen zijn gelijk, omdat de verhouding tussen het aantal azen en het totaal aantal kaarten waaruit je kiest niet verandert.

- b** Er zitten 52 kaarten in een kaartspel, waarvan 13 schoppenkaarten.

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Er zijn vier azen, waarvan één schoppenaas. $P(B|A) = \frac{1}{4}$

De kansen zijn gelijk, omdat de verhouding tussen het aantal schoppenkaarten en het totaal aantal kaarten waaruit je kiest niet verandert.

- c** Er zitten 52 kaarten in een kaartspel, waarvan één klaveraas, dus $P(C) = \frac{1}{52}$.

Er zijn vier azen, waarvan één klaveraas, dus $P(C|A) = \frac{1}{4}$.

De kansen zijn niet gelijk, omdat de totale groep waaruit je kiest wel wijzigt, maar het aantal gunstige kaarten blijft constant.

- 39a** Zie tabel hiernaast.

Gebeurtenis A en B hebben één uitkomst gemeen en bevatten beide zes van de totaal 36 mogelijke uitkomsten.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(A|B) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B|A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = P(A|B) = P(B) = P(B|A)$$

Dus de gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk.

- b** Zie tabel hiernaast.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(A|C) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(C|A) = \frac{1}{6}$$

$P(A) = P(A|C) = P(C) = P(C|A)$, dus de gebeurtenissen A en C zijn onafhankelijk.

Ook hier geldt dat gebeurtenissen A en C zes van de totaal 36 mogelijke worpen bevatten en hebben één uitkomst gemeen.

$2^e \backslash 1^e$	1	2	3	4	5	6
1	C		A			
2		C	A			
3			A, C			
4			A	C		
5	B	B	A, B	B	B, C	B
6			A			C

- 40a** 77% haalt een voldoende op het SE. 11% haalt een onvoldoende op het CSE, dus de kans is $\frac{11}{77} = \frac{1}{7}$.

- b** 71% haalt een voldoende op het CSE. 5% had daarnaast een onvoldoende op het SE, dus de kans is $\frac{5}{71}$.

- c** De kansen gelden voor de landelijk gemiddelde leerling. Iemand die je kent zal waarschijnlijk niet precies zo zijn, dus gelden er andere kansen voor.

d $P(\text{onv. SE}) = \frac{23}{100}$

$$P(\text{onv. SE} | \text{onv. CSE}) = \frac{18}{29}$$

$$P(\text{onv. CSE}) = \frac{29}{100}$$

$$P(\text{onv. CSE} | \text{onv. SE}) = \frac{18}{23}$$

De gebeurtenissen zijn niet onafhankelijk.

2-7 Gemengde opdrachten

Pagina 44

- 41a** Om meer dan € 0,50 te verliezen moet je de sector 0,00 raken. De kans hierop is $\frac{1}{5}$.

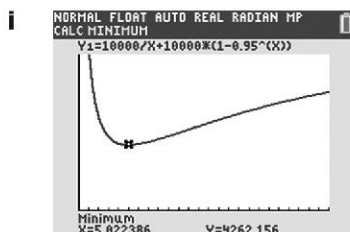
b

+	0,00	0,50	1,00	1,50	2,50
0,00	0,00	0,50	1,00	1,50	2,50
0,50	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00
1,00	1,00	1,50	2,00	2,50	3,50
1,50	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00
2,50	2,50	3,00	3,50	4,00	5,00

- c** Er zijn totaal $5 \times 5 = 25$ mogelijke uitkomsten. Om je inzet uitgekeerd te krijgen moet je totaal € 2,50 raken.
Er zijn dus vier gunstige uitkomsten. De kans is $\frac{4}{25}$.
- d** Er zijn 15 uitkomsten met een uitkering van meer dan € 1,50. De kans is $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.
- 42a** $P(\text{een zieke krijgt uitslag gezond}) = 15\%$
- b** Van de 62 000 mensen zijn waarschijnlijk $8 \times 62 = 496$ mensen ziek en $62\,000 - 496 = 61\,504$ gezond.
Waarschijnlijk dus 85% van $496 \approx 422$ en 5% van $61\,504 \approx 3075$ mensen te horen dat ze ziek zijn. In totaal zijn dit $422 + 3075 = 3497$ mensen.
- c** Van de 62 000 mensen krijgen 15% van 496 en 5% van 61 504 een verkeerde uitslag.
Dit zijn 3149,6 mensen. De kans op een verkeerde uitslag is dus $\frac{3149,6}{62\,000} = 0,0508 = 5,08\%$
- d** $P(\text{verkeerde uitslag}) = 10\%$. Deze test is dus minder betrouwbaar.
- 43a** $P(\text{geen zes, geen zes, geen zes, zes}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \approx 0,0965$
- b** Als je n keer gooit tot de eerste zes verschijnt, heb je $n - 1$ keer achter elkaar geen zes gegooit.
 $P(n - 1 \text{ keer geen zes, zes}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$
Voor $n = 16$ geeft de formule $P \approx 0,0108$.
Voor $n = 17$ geeft de formule $P \approx 0,0090$.
De kans is dus kleiner dan 0,01 voor waarden van n groter of gelijk aan 17.
- c** Als je n keer moet gooien voor de tweede zes. Heb je na $n - 1$ keer gooien precies één keer een zes gegooit en $n - 2$ keer geen zes. Die ene zes en $n - 2$ keer geen zes kunnen in $n - 1$ mogelijke volgordes gegooit zijn.
De kans op twee zessen en $n - 2$ keer geen zes is $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$, dus geldt
 $P(G) = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = (n - 1) \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$.
- d** Voor $n = 25$ geeft de formule $P(G) \approx 0,01006$.
Voor $n = 26$ geeft de formule $P(G) \approx 0,0087$.
Als de kans op het verschijnen van de tweede zes kleiner is dan 0,01 moet je dus minimaal 26 keer gooien.

Pagina 45

- 44a** Elke groep kost één test. Twintig groepen is dus 20 testen. Daarnaast zijn $3 \times 15 = 45$ tests nodig voor de rekruten uit de drie positief bevonden groepen. Dit zijn totaal $20 + 45 = 65$ tests.
- b** Er zijn 1000 groepen van 10 rekruten. Dit zijn 1000 testen. Daarnaast zijn $400 \times 10 = 4000$ tests nodig voor de rekruten uit de positief bevonden groepen. Dit zijn totaal $1000 + 4000 = 5000$ tests.
- c** $P(\text{geen geval van syfilis}) = 0,95^8 \approx 0,6634$
 $P(\text{minstens één geval van syfilis}) = 1 - P(\text{geen geval van syfilis}) = 1 - 0,95^8 \approx 0,3366$
- d** In 33,66% van de groepen verwacht je minstens één geval van syfilis. Er zijn $\frac{10000}{8} = 1250$ groepen.
- Naar verwachting zijn er 33,66% van $1250 = 421$ groepen waar iedere rekrut apart getest moet worden. Er zullen naar schatting $1250 + 421 \times 8 = 4618$ tests nodig zijn.
- e** Er zijn $\frac{10000}{n}$ groepen, en dus ook $\frac{10000}{n}$ tests nodig om die groepen te controleren.
- f** $P(\text{minstens één geval van syfilis}) = 1 - P(\text{geen geval van syfilis}) = 1 - 0,95^n$
- g** Om een besmette groep van n mannen te controleren zijn n tests nodig.
- h** Er zijn naar verwachting $(1 - 0,95^n) \cdot \frac{10000}{n}$ groepen met ten minste één rekrut met syfilis. De rekruten uit deze groepen moeten apart getest worden. Dit zijn n tests per groep. Totaal zijn dat $(1 - 0,95^n) \cdot \frac{10000}{n} \cdot n = (1 - 0,95^n) \cdot 10000$ extra tests. Het totaal aantal benodigde tests bij een groeps grootte van n mannen is dus $\frac{10000}{n} + 10000(1 - 0,95^n)$.



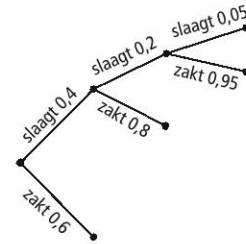
Invoer: $Y1 = 10000/X + 10000(1 - 0.95^X)$
 Window: $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 25$, $Y_{\min} = 0$, $Y_{\max} = 10000$
 Opties: CALC, minimum (TI)
 G-solv, MIN (Casio)
 Het minimum ligt op (5,02; 4262)
 De groeps grootte 5 is het meest efficiënt.

Test Jezelf

Pagina 48

- T-1a** Er zijn $6 \times 6 = 36$ mogelijke uitkomsten. Er is één gunstige uitkomst: (3, 3).
De kans is $\frac{1}{36}$.
- b** Er is één uitkomst gunstig: (4, 5). De kans is $\frac{1}{36}$.
- c** Er zijn twee uitkomsten gunstig: (5, 6) en (6, 5). De kans is $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
- d** De gebeurtenis *niet-A*: de som van de ogen is 12.
- e** De gunstige uitkomst voor gebeurtenis *niet-A* is (6, 6).
 $P(\text{niet-A}) = \frac{1}{36}$ en dus geldt $P(A) = 1 - P(\text{niet-A}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.

- T-2a** De kansboom is:



- b** $P(\text{slaagt, slaagt, zakt}) = 0,4 \times 0,2 \times 0,95 = 0,076$
- c** $P(\text{slaagt, slaagt, slaagt}) = 0,4 \times 0,2 \times 0,05 = 0,004$
- T-3a** $P(\text{OOO}) = 0,467^3 \approx 0,1018$
- b** $P(\text{AAA}) = 0,418^3 \approx 0,073$
 $P(\text{hoogstens twee met bloedgroep O}) = 1 - P(\text{OOO}) = 1 - 0,1018 \approx 0,8982$
De kans op hoogstens twee mensen met bloedgroep O is dus groter dan de kans op drie mensen met bloedgroep A.
- c** De mogelijkheden A-B-AB, A-AB-B, B-A-AB, B-AB-A, AB-A-B, AB-B-A zijn zes volgordes met A, B en AB. De kans op elke volgorde is $0,418 \times 0,085 \times 0,03$.
De gevraagde kans is dus $6 \times 0,418 \times 0,085 \times 0,03 \approx 0,0064$.
- d** 46,7% heeft bloedgroep O, dus 53,3% heeft niet bloedgroep O.
 $P(\text{minstens één met bloedgroep O}) = 1 - P(\text{geen enkele met bloedgroep O}) = 1 - 0,533^3 \approx 0,8486$.

Pagina 49

- T-4a** De kans op het gooien van een A is $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
De kans op het gooien van een K is $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
De kans op het gooien van een S is $\frac{1}{6}$.
 $P(\text{KAAS}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$
- b** Het gooien van twee keer een K en twee keer een A komt overeen met een route naar het punt (2, 2). Er zijn $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ mogelijke routes naar dit punt. De kans op elke route is $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$.
De gevraagde kans is $6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}$.
- c** De kans op het gooien van een S is $\frac{1}{6}$. De kans om geen S te gooien is dus $\frac{5}{6}$.
 $P(\text{vier keer geen S}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,4823$

- d** In vijf keer gooien één keer een S en vier keer geen S komt overeen met het punt (1, 4).

Er zijn $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$ mogelijke routes naar dit punt. De kans op elke

route is $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

De gevraagde kans is $5 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,4019$.

- e** In vijf keer gooien hoogstens twee keer de letter S betekent 0, 1 of 2 keer de letter S.

Dit komt overeen met de punten (0, 5), (1, 4) en (2, 3).

$P(\text{hoogstens twee keer de letter S}) =$

$$\binom{5}{0} \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,9645$$

- T-5a** In één keer vier kaarten trekken komt overeen met trekken zonder terugleggen. Er zitten 52 knikkers in de vaas, waarvan 13 rode (harten) en 39 witte (niet harten). Je trekt vier keer zonder terugleggen een knikker.

- b** Het trekken van twee hartenkaarten komt overeen met twee rode en twee

witte knikkers. Hierbij hoort het punt (2, 2). Er zijn $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

mogelijke routes naar dit punt.

De kans op elke route is gelijk aan $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{39}{50} \cdot \frac{38}{49}$. De gevraagde kans is dus

$$6 \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{39}{50} \cdot \frac{38}{49} \approx 0,2135.$$

- c** Het vaasmodel blijft gelijk, je trekt nu vier keer met terugleggen. De kansen blijven dus gelijk. Minstens twee hartenkaarten betekent twee, drie of vier hartenkaarten. De complementaire gebeurtenis is nul of één hartenkaart.

$P(\text{minstens twee hartenkaarten}) = 1 - P(\text{nul harten}) - P(\text{één}) =$

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \approx 0,2617$$

- T-6a** Er zijn in een kaartspel totaal $4 \times 4 = 16$ kaarten met een plaatje, dus

$$P(A) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

- b** Er zijn 16 kaarten met een plaatje. Hiervan zijn vier kaarten een schoppenkaart, dus $P(B|A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

- c** Er zijn totaal 52 kaarten, waarvan 13 schoppenkaarten, dus $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Er zijn 13 schoppenkaarten, waarvan vier kaarten met een plaatje, dus $P(A|B) = \frac{4}{13}$.

Omdat $P(A) = P(A|B)$ en $P(B) = P(B|A)$ geldt, zijn de gebeurtenissen A en B onafhankelijk.

- T-7a** Trekken zonder terugleggen

$$P(\text{echtpaar Karsten}) = P(\text{Wil, Joke}) + P(\text{Joke, Wil}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

- b** De kans dat echtpaar Karsten moet afwassen is een groot als de kans dat een ander echtpaar moet afwassen.

$$\text{Er zijn drie echtparen. } P(\text{een echtpaar moet afwassen}) = 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$

- c** De gebeurtenis “twee mensen moeten afwassen die niet met elkaar getrouwd zijn” is complementair aan de gebeurtenis “een echtpaar moet afwassen”.

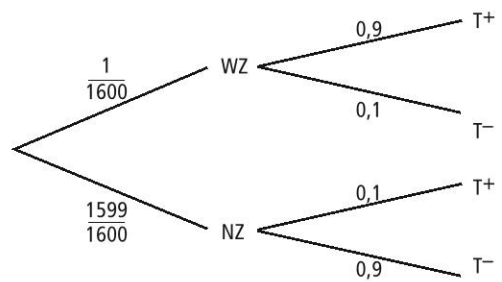
$$P(\text{niet een echtpaar moet afwassen}) = 1 - P(\text{een echtpaar moet afwassen}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

T-8a Zie hiernaast.

- b** Bij 16 000 mensen verwacht je 10 mensen met myxoedeem.
Van deze mensen krijgt 90% de juiste uitslag, dat zijn 9 mensen.
- c** Het aantal mensen dat niet ziek is, is $16\,000 - 10 = 15\,990$.
10% van 15 990 is 1599 en 90% van 15 990 is 14391.
Het totaal aantal mensen met een positieve testuitslag is
 $9 + 1599 = 1608$ en het totaal aantal met een negatieve uitslag is
 $1 + 14\,391 = 14\,392$.
De tabel wordt dus:

	test pos. T^+	test neg. T^-	
wel ziek (WZ)	9	1	10
niet ziek (NZ)	1599	14391	15990
totaal	1608	14392	16000

- d** 1608 mensen krijgen een positieve testuitslag.
Hiervan zijn 1599 niet ziek.
De kans is $\frac{1599}{1608} \approx 0,9944$.



H3 Redeneren en bewijzen

3-1 Stellingen

Pagina 52

- 1a** $\angle A_{1,2}$ is een gestrekte hoek, dus is $\angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ$.
- b** $\angle A_{2,3}$ is een gestrekte hoek, dus is $\angle A_2 + \angle A_3 = 180^\circ$.
- c** $\angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2 = 180^\circ - (180^\circ - \angle A_3) = \angle A_3$
- d** $\angle A_{1,4}$ is een gestrekte hoek, dus is $\angle A_4 = 180^\circ - \angle A_1$; volgens onderdeel a is $\angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2 \Rightarrow \angle A_4 = 180^\circ - \angle A_1 = 180^\circ - (180^\circ - \angle A_2) = \angle A_2$
- 2a** Z-hoeken: $\angle C$ en $\angle B_2$; F-hoeken: $\angle A$ en $\angle B_3$
- b** Uit onderdeel a volgt $\angle A = \angle B_2$ en $\angle C = \angle B_3$. Verder is $\angle B_{123}$ een gestrekte hoek, dus is $\angle A + \angle B_1 + \angle C = \angle B_3 + \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$
- 3** $\angle B_1 + \angle B_{2,3} = 180^\circ$ (gestrekte hoek).
Verder is $\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180^\circ$ (hoekensom driehoek). Dus is $\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B_1 = \angle B_{2,3}$.
- 4a** $\angle A_{3,4} = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$
 $\angle A_{2,3} = \frac{1}{2} \angle A_{1,2} + \frac{1}{2} \angle A_{3,4} = \frac{1}{2} \cdot 44^\circ + \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 44^\circ) = 22^\circ + 68^\circ = 90^\circ$
- b** Het vermoeden is dat de twee deellijnen bij twee snijdende lijnen steeds loodrecht op elkaar staan.
- c** Stel $\angle A_{1,2} = 2\alpha$, dan is $\angle A_{3,4} = 180^\circ - 2\alpha$ ($\angle A_{1,2,3,4}$ is een gestrekte hoek)
dan is $\angle A_{2,3} = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha + \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 2\alpha) = \alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$.
- d** De twee deellijnen horende bij twee snijdende lijnen staan altijd loodrecht op elkaar.

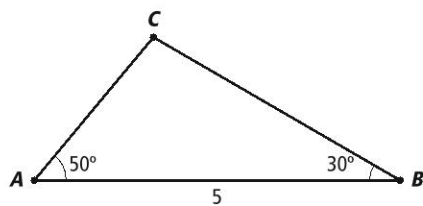
Pagina 53

- 5a** Als $\angle C = 80^\circ$, dan is $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ (hoekensom driehoek) en $\angle S_1 = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle B$ (opnieuw hoekensom driehoek)
 $\angle S_1 = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
- b** Gegeven: S is het snijpunt van de deellijnen van de hoeken A en B in $\triangle ABC$.
Te bewijzen: $\angle S_1 = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$.
Bewijs: Stel $\angle C = \gamma$. $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - \gamma$ (hoekensom driehoek) en $\angle S_1 = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle B$ (opnieuw hoekensom driehoek)
 $= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle B) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \gamma) = 90^\circ + \frac{1}{2} \gamma = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$.

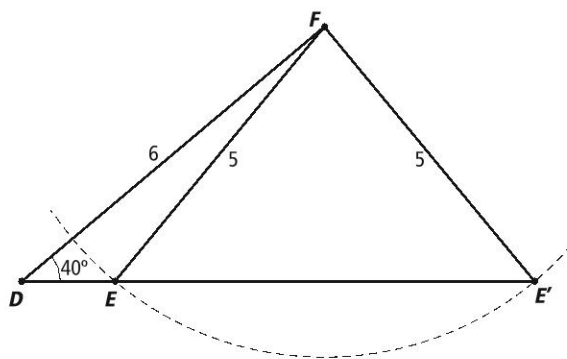
3-2 Congruentie

Pagina 54

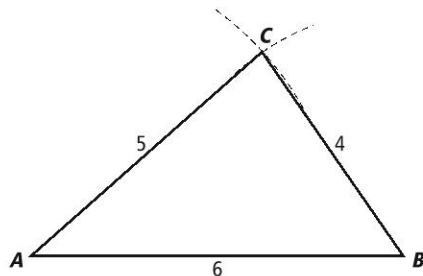
6a



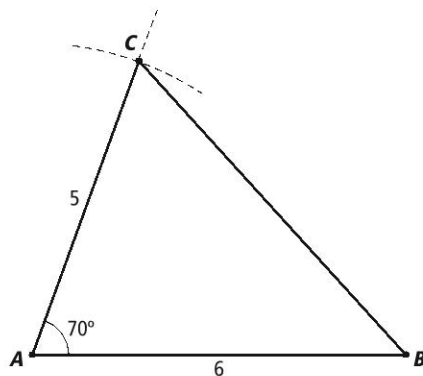
- b** Je krijgt altijd dezelfde driehoek. Twee van deze driehoeken passen steeds exact op elkaar.
c Zowel $\triangle DEF$ als $\triangle DE'F$ voldoen aan de eisen.



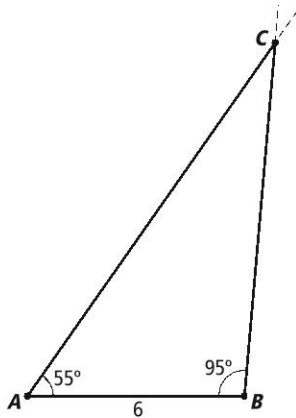
- 7a** Dit levert maar één vorm op.



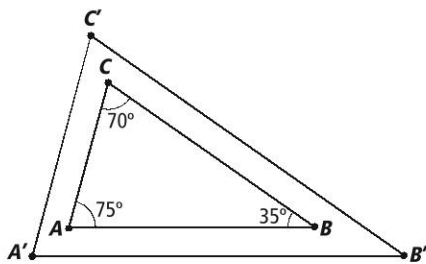
- b** Dit levert ook maar één vorm op.



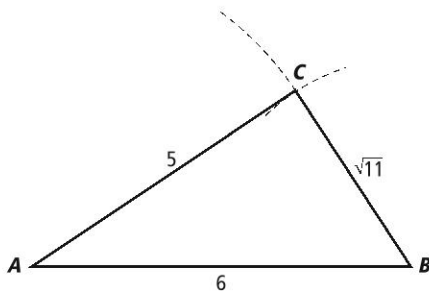
- c** Bij het tekenen maak je gebruik van de stelling hoekensom driehoek.
Dus $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$.
Hierbij hoort ook maar één vorm.



- d** Hieronder zijn twee driehoeken getekend die aan de voorwaarden voldoen.
Er zijn er natuurlijk veel meer.



- e** Als $\angle C = 90^\circ$ dan is AB de schuine zijde en is volgens de stelling van Pythagoras $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11} \approx 3,32$. De lengten van de drie zijden zijn dus bekend en dus hoort ook in dit geval slechts één vorm (vergelijk onderdeel a).
Bijbehorende tekening:



- 8** $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ (ZHZ); $\triangle EGM \cong \triangle FGM$ (ZZR);
 $\triangle PQT \cong \triangle SRT$ (HZH of ZHH)

Pagina 55

9 Eerste geval:

Gegeven: $AM = DM$; $BM = CM$

Te bewijzen: $\triangle ABM \cong \triangle DCM$

$$\text{Bewijs: } \left\{ \begin{array}{l} AM = DM \text{ (gegeven)} \\ BM = CM \text{ (gegeven)} \\ \angle AMB = \angle DMC \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle DCM \text{ (ZHZ)}$$

Tweede geval:

Gegeven: $EG = FG$; $\angle M_1 = \angle M_2 = 90^\circ$

Te bewijzen: $\triangle EGM \cong \triangle FGM$

$$\text{Bewijs: } \left\{ \begin{array}{l} EG = FG \text{ (gegeven)} \\ \angle M_1 = \angle M_2 = 90^\circ \text{ (gegeven)} \\ GM = GM \text{ (hetzelfde lijnstuk)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EGM \cong \triangle FGM \text{ (ZZR)}$$

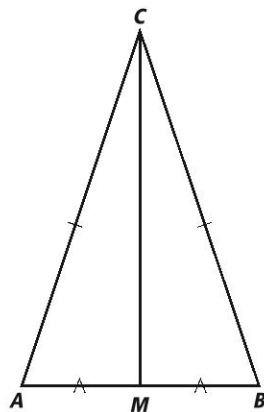
Derde geval:

Gegeven: $PQ = RS$; $PQ \parallel RS$

Te bewijzen: $\triangle PQT \cong \triangle SRT$

$$\text{Bewijs: } \left\{ \begin{array}{l} PQ = RS \text{ (gegeven)} \\ \angle PTQ = \angle GTM \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle Q = \angle R \text{ (Z - hoeken)} \\ \angle P = \angle S \text{ (Z - hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PQT \cong \triangle SRT \text{ (HZH of ZHH)}$$

10a



b Gegeven: $AC = BC$; $AM = BM$

Te bewijzen: $\angle A = \angle B$

$$\text{Bewijs: } \left\{ \begin{array}{l} AC = BC \text{ (gegeven)} \\ AM = BM \text{ (gegeven)} \\ CM = CM \text{ (zelfde lijnstuk)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACM \cong \triangle BCM \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle A = \angle B$$

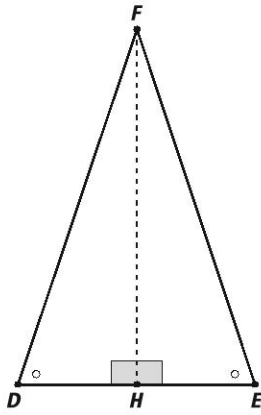
c Gegeven: $\angle D = \angle E$

Te bewijzen: $DF = EF$

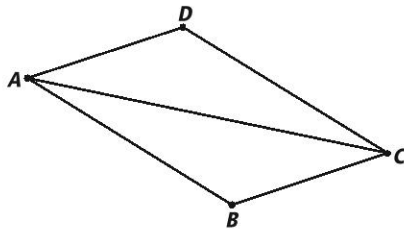
Bewijs:

Laat de loodlijn uit F neer op de tegenoverliggende zijde DE en noem het snijpunt H .

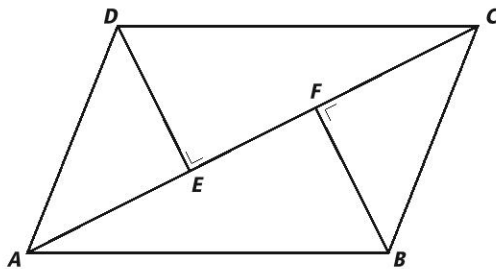
Dan is dus $\angle DHF = \angle EHF = 90^\circ$.



Er geldt $\left\{ \begin{array}{l} \angle D = \angle E \text{ (gegeven)} \\ \angle DHF = \angle EHF = 90^\circ \text{ (eigenschap loodlijn)} \\ HF = HF \text{ (zelfde lijnstuk)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DHF \cong \triangle EHF (ZHH) \Rightarrow DF = EF$

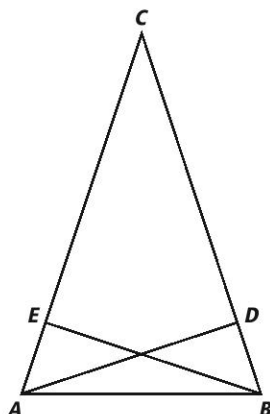
11a**b** Gegeven: $AB \parallel CD$ en $AD \parallel BC$ Te bewijzen: $AB = CD$ en $AD = BC$

Bewijs: $\left\{ \begin{array}{l} \angle BAC = \angle DCA \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle BCA = \angle DAC \text{ (Z-hoeken)} \\ AC = CA \text{ (zelfde lijnstuk)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle CDA (HZH) \Rightarrow AB = CD \text{ en } BC = DA$

12Gegeven: $ABCD$ is parallellogram, $DE \perp AC$, $BF \perp AC$,Te bewijzen: $DE = BF$

Bewijs: $\left\{ \begin{array}{l} AD = CB \text{ (parallellogram, opgave 11)} \\ \angle AED = \angle CFB = 90^\circ \text{ (gegeven)} \\ \angle EAD = \angle FCB \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AED \cong \triangle CFB (ZHH) \Rightarrow DE = BF$

13



Gegeven: $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $AD = BE$

Te bewijzen: $\triangle ABC$ is gelijkbenig.

Bewijs: $\left\{ \begin{array}{l} \angle C = \angle C \text{ (dezelfde hoek)} \\ AD = BE \text{ (gegeven)} \\ \angle CEB = \angle CDA = 90^\circ \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \cong \triangle BCE \text{ (ZHH)} \Rightarrow AC = BC$
 $\Rightarrow \triangle ABC$ is gelijkbenig

3-3 Bijzondere lijnen in een driehoek

Pagina 56

14a Gegeven: M is het midden van AB , lijn m gaat door M en $m \perp AB$, punt P ligt op m

Te bewijzen: $PA = PB$

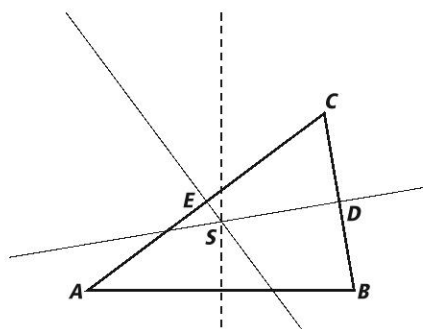
Bewijs: $\left\{ \begin{array}{l} AM = BM \text{ (} M \text{ is het midden)} \\ PM = PM \text{ (zelfde lijnstuk)} \\ \angle AMP = \angle BMP = 90^\circ \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMP \cong \triangle BMP \text{ (ZHZ)} \Rightarrow PA = PB$

b Gegeven: M is het midden van AB , $QA = QB$, $Q \neq M$

Te bewijzen: $QM \perp AB$

Bewijs: $\left\{ \begin{array}{l} AM = BM \text{ (} M \text{ is het midden)} \\ QM = QM \text{ (zelfde lijnstuk)} \\ QA = QB \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMQ \cong \triangle BMQ \text{ (ZZZ)}$
 $\Rightarrow \angle QMA = \angle QMB = 90^\circ$ (hierbij gebruik je feitelijk $Q \neq M$) $\Rightarrow QM \perp AB$

15a

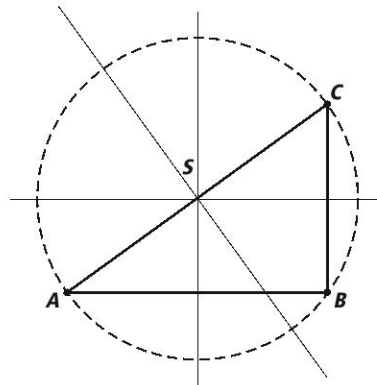
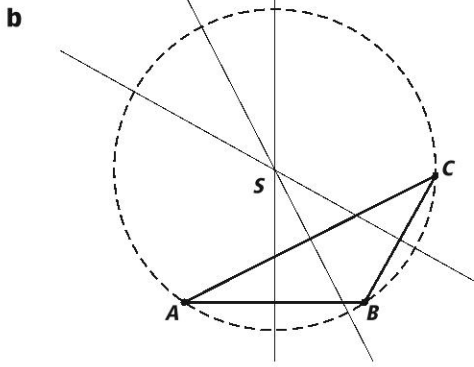
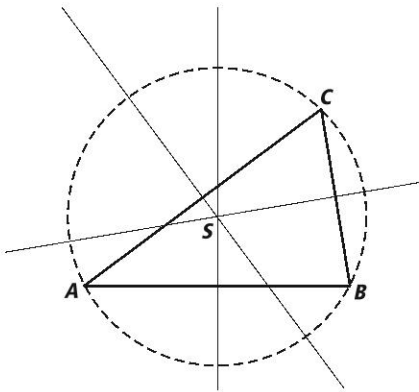


b $SA = SC$ (middelloodlijn stelling 1)

c $SB = SC$ (middelloodlijn stelling 1)

- d** $SA = SC = SB \Rightarrow SA = SB$ (zie onderdelen b en c)
- e** Gegeven: Bij $\triangle ABC$ is S het snijpunt van de middelloodlijnen van AC en BC .
Te bewijzen: S ligt ook op de middelloodlijn van AB
- Bewijs: $\begin{cases} SA = SC \text{ (middelloodlijn stelling 1)} \\ SB = SC \text{ (middelloodlijn stelling 1)} \end{cases} \Rightarrow SA = SB \Rightarrow S \text{ ligt op de middelloodlijn van } AB.$

- 16a** $SA = SB = SC \Rightarrow$ de cirkel met middelpunt S en straal SA gaat door A , B en C .



- 17a** De vierhoek $ABCD$ is een parallellogram, omdat AD evenwijdig is aan BC en DC evenwijdig is aan AB .
De vierhoek $ABEC$ is een parallellogram, omdat AC evenwijdig is aan BE en CE evenwijdig is aan AB .
- b** Uit onderdeel a volgt dat $DC = AB = CE$ (parallellogram) en dus gaat de hoogtelijn uit C precies door het midden van DE . Deze hoogtelijn staat loodrecht op AB , en staat dus ook loodrecht op DE . Dus valt de hoogtelijn uit C samen met de middelloodlijn van DE . De loodlijnen uit A en B komen overeen met de andere middelloodlijnen van $\triangle DEF$
- c** De middelloodlijnen van $\triangle DEF$ gaan door één punt (bewezen in opgave 16) en dus gaan de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ ook door één punt.

Pagina 57

18a Gegeven: P ligt op bissectrice van $\angle A$

Te bewijzen: $PB = PC$

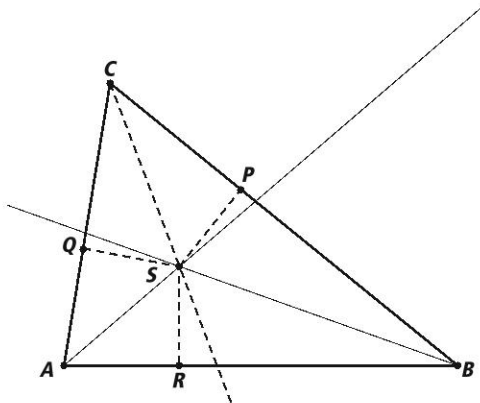
Bewijs: $\left\{ \begin{array}{l} AP = AP \\ \angle BAP = \angle CAP (P \text{ ligt op bissectrice}) \\ \angle ABP = \angle ACP = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABP \cong \triangle ACP (ZHH) \Rightarrow BP = CP$

b Gegeven: $QD \perp AD, QE \perp AE, QD = QE$

Te bewijzen: QA deelt $\angle A$ middendoor

Bewijs: $\left\{ \begin{array}{l} AQ = AQ \\ DQ = EQ (\text{gegeven}) \\ \angle ADQ = \angle AEQ = 90^\circ (\text{gegeven}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADQ \cong \triangle AEQ (ZZR) \Rightarrow \angle DAQ = \angle EAQ$

19



Gegeven: S is snijpunt van de bissectrices van $\angle A$ en $\angle B$

Te bewijzen: S ligt ook op de bissectrice van $\angle C$

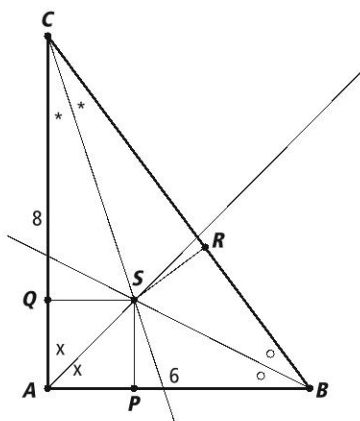
Bewijs: Teken $SR \perp AB; SP \perp BC$ en $SQ \perp AC$

S ligt op de bissectrice van $\angle A$ (gegeven) $\Rightarrow QS = RS$ (bissectrice stelling 1).

Verder ligt S op de bissectrice van $\angle B$ (gegeven) $\Rightarrow PS = RS$ (bissectrice stelling 1).

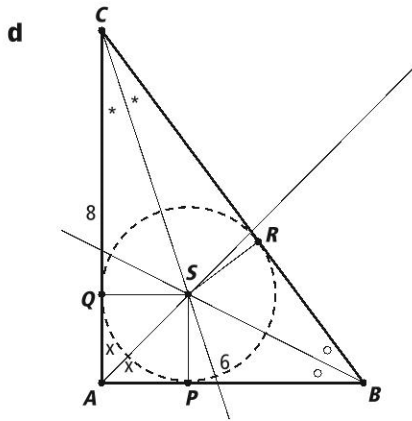
Uit $QS = RS$ en $PS = RS$ volgt $QS = PS$ en S ligt dus ook op de bissectrice van $\angle C$ (bissectrice stelling 2).

20ab



c Uit opgave 19 volgt dat $PS = QS = RS$ en dus gaat er een cirkel met middelpunt S door P, Q en R .

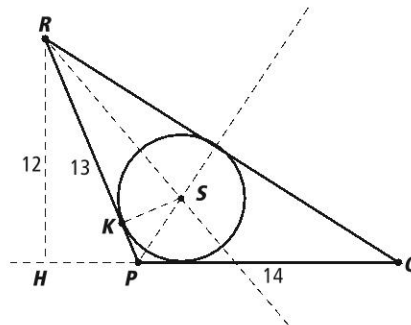
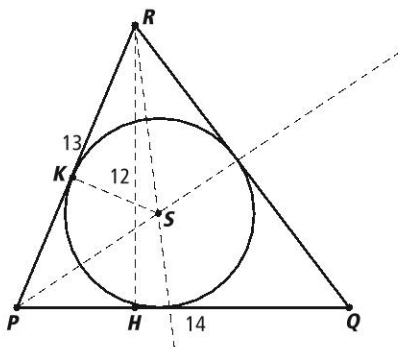
Deze cirkel raakt aan de zijden van $\triangle ABC$, omdat PS, QS en RS loodrecht op die zijden staan.



- 21a** Oppervlakte ($\triangle SAB$) is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot r = 3r$, oppervlakte ($\triangle SAC$) is $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 8^2} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r = 5r$ en oppervlakte ($\triangle SBC$) is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot r = 4r$.
- b** De oppervlakte van $\triangle ABC$ is enerzijds $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ en anderzijds $3r + 5r + 4r = 12r$. Dus $12r = 24$ en $r = 2$.

- 22a** Oppervlakte $\triangle PQR$ is gelijk aan
- $$\text{Oppervlakte}(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot r + \frac{1}{2} \cdot QR \cdot r + \frac{1}{2} \cdot RP \cdot r =$$
- $$\frac{1}{2} \cdot (PQ + QR + RP) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \text{omtrek}(\triangle PQR) \cdot r \text{ Hieruit volgt}$$
- $$r = \frac{\text{oppervlakte}(\triangle PQR)}{\frac{1}{2} \cdot \text{omtrek}(\triangle PQR)} = \frac{2 \cdot \text{oppervlakte}(\triangle PQR)}{\text{omtrek}(\triangle PQR)}.$$

- b** Hier zijn twee mogelijkheden. De driehoek kan scherphoekig worden gekozen, maar kan ook stomphoekig zijn.
Teken $\triangle PQR$ en de deellijnen van $\angle P$ en $\angle R$. Het snijpunt S is het middelpunt van de ingeschreven cirkel.
Teken $SK \perp PR$. SK is de straal van de ingeschreven cirkel.



- c** Bij de scherphoekige driehoek is $PH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, dus is $HQ = 14 - 5 = 9$ en $RQ = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ en dan is de omtrek $13 + 14 + 15 = 42$ en $r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12}{42} = 4$.

Bij de stomphoekige driehoek is $PH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, dus is

$HQ = 14 + 5 = 19$ en $RQ = \sqrt{19^2 + 12^2} = \sqrt{505}$ en dan is de omtrek

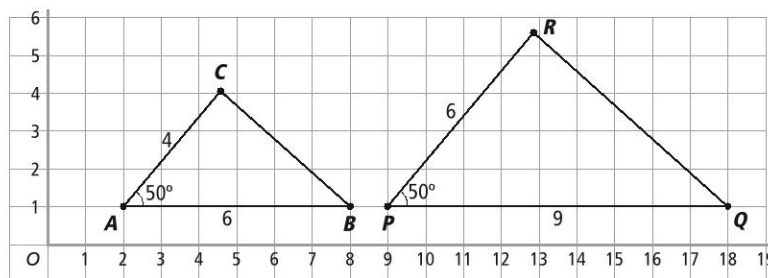
$$13 + 14 + \sqrt{505} = 27 + \sqrt{505} \text{ en } r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12}{27 + \sqrt{505}} = \frac{168}{27 + \sqrt{505}} =$$

$$\frac{168 \cdot (27 - \sqrt{505})}{(27 + \sqrt{505})(27 - \sqrt{505})} = \frac{4536 - 168\sqrt{505}}{224} = 20\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{505} \approx 3,396.$$

3-4 Gelijkvormigheid

Pagina 58

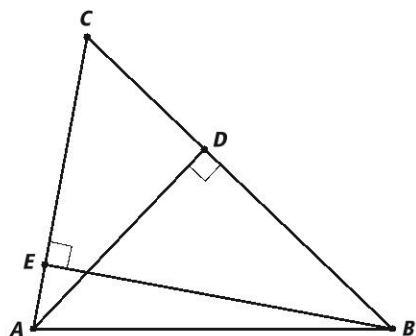
23ab



- c Om door vergroting van $\triangle ABC$ een driehoek te krijgen die congruent is met $\triangle PQR$, moet je een factor $1\frac{1}{2}$ gebruiken. De factor die je moet gebruiken om uitgaande van $\triangle PQR$ een driehoek te krijgen die congruent is met $\triangle ABC$, is $\frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

$$24 \quad \left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ \frac{BC}{SC} = \frac{16}{8} = 2 \\ \frac{AC}{TC} = \frac{14}{7} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle TSC (zhz) \Rightarrow \frac{AB}{TS} = 2 \Rightarrow TS = \frac{AB}{2} = 8\frac{1}{2}.$$

25a



- b Te bewijzen: $\triangle ADC \sim \triangle BEC$
Bewijs: $\angle C = \angle C$ en $\angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$ (hh)
- c Uit de gelijkvormigheid volgt $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE}$, dus o.a. $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC}$.

d Te bewijzen: $\triangle CDE \sim \triangle CAB$

Bewijs: $\angle C = \angle C$ en verder volgt uit $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow CD \cdot BC = AC \cdot CE \Rightarrow$

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \text{ en dus is } \triangle CDE \sim \triangle CAB (zhz).$$

e $\angle DEC = \angle ABC$ en $\angle CDE = \angle CAB$ (let op de lettervolgorde)

Pagina 59

26a
$$\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ \frac{CE}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{CD}{CB} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CED \sim \triangle CAB (zhz)$$

b Omdat $\triangle CED \sim \triangle CAB$ en $\frac{CE}{CA} = \frac{1}{2}$ is ook $\frac{DE}{BA} = \frac{1}{2}$ en $DE = \frac{1}{2} AB$.

Verder is $\angle CED = \angle CAB$ en dus $DE \parallel AB$ (F-hoeken)

c Een middelparallel in een driehoek behorende bij de middens van twee zijden is qua lengte de helft van de lengte van de derde zijde en is daaraan evenwijdig (*middenparallel driehoek*).

27a Uit stelling middenparallel driehoek volgt $DE \parallel AB$ en dus is

$$\left. \begin{array}{l} \angle DEZ = \angle ABZ (F\text{-hoeken}) \\ \angle DZE = \angle AZB (overstaandehoeken) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DEZ \sim \triangle ABZ (hh).$$

b Uit stelling driehoek middenparallel volgt ook $DE = \frac{1}{2} AB$ of ook $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$.

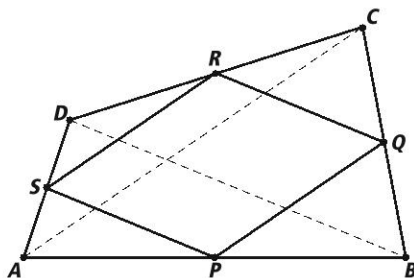
Uit de gelijkvormigheid bewezen bij onderdeel a volgt nu dat ook

$$\frac{DZ}{AZ} = \frac{EZ}{BZ} = \frac{1}{2} \text{ of } AZ : ZD = BZ : ZE = 2 : 1.$$

c $AS : SD = 2 : 1$

d Er geldt $AZ : ZD = 2 : 1$ (zie onderdeel d) en ook $AS : SD = 2 : 1$. Z en S liggen beide op zwaartelijn AD en moeten dus samenvallen en dus gaat de zwaartelijn uit C ook door Z.

28a



$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \frac{AD}{AS} = \frac{AB}{AP} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ASP \sim \triangle ADB (zhz)$$

b SP is middelparallel van $\triangle ABD$. Uit stelling middenparallel driehoek volgt direct dat $PS \parallel BD$ en $PS = \frac{1}{2} BD$

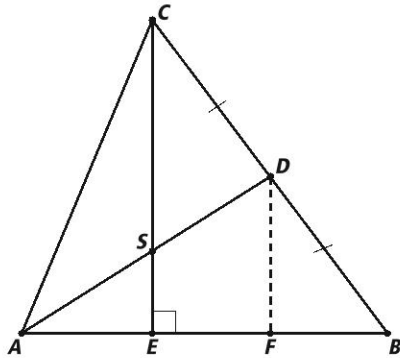
c $\left. \begin{array}{l} PS \parallel BD \\ RQ \parallel BD \end{array} \right\} \Rightarrow PS \parallel RQ (1) \text{ en } \left. \begin{array}{l} PQ \parallel AC \\ SR \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \parallel SR (2)$

Uit (1) en (2) volgt: tegenover elkaar liggende zijden van vierhoek PQRS zijn steeds evenwijdig, dus is vierhoek PQRS een parallellogram.

- d** De zijden van parallellogram $PQRS$ zijn steeds gelijk aan de helft van één van de diagonalen van vierhoek $ABCD$. Als de diagonalen van vierhoek $ABCD$ even groot zijn, dan zijn alle zijden van $PQRS$ even groot en is vierhoek $PQRS$ een ruit.

- 29a** De stelling van Pythagoras leert dat $CE^2 = AC^2 - AE^2 = 169 - 25 = 144$ en dus is $CE = \sqrt{144} = 12$.

b



$DF \perp AB$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ \angle BEC = \angle BFD = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCE \sim \triangle BDF (hh)$$

Omdat $\frac{BC}{BD} = 2$ volgt dan $\frac{CE}{DF} = \frac{BE}{BF} = 2$.

Dat betekent dat $DF = \frac{1}{2} \cdot CE = 6$ en $BF = EF$.

Omdat $BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{225 - 144} = 9$, is dus $EF = 4\frac{1}{2}$ en

$AF = AE + EF = 5 + 4\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$.

Ten slotte is $AD = \sqrt{AF^2 + DF^2} = \sqrt{\left(9\frac{1}{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{126,25} = \frac{1}{2} \sqrt{505} (\approx 11,24)$.

3-5 Cirkels

Pagina 60

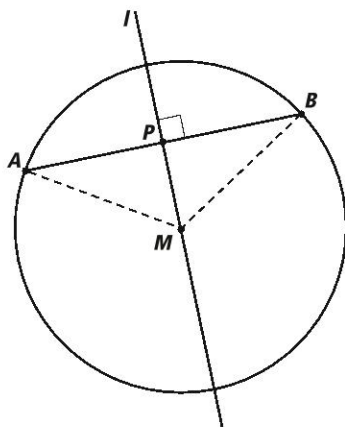
- 30a** Volgens Pythagoras is $MQ = \sqrt{MP^2 + PQ^2}$. Omdat $P \neq Q$, is $PQ > 0$ en is $\sqrt{MP^2 + PQ^2} > \sqrt{MP^2} = MP$, dus is $MQ > MP$.

- b** $MQ > MP$ betekent dat Q buiten de cirkel ligt. Omdat dit voor elk punt $P \neq Q$ op lijn l geldt, is P het enige punt dat lijn l met de cirkel gemeenschappelijk heeft en dus raakt l de cirkel.

- 31a** $\left. \begin{array}{l} \angle M_1 = \angle M_2 \\ MA = MC (A \text{ en } C \text{ liggen op de cirkel}) \\ MB = MD (B \text{ en } D \text{ liggen op de cirkel}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle CDM (ZHZ) \Rightarrow AB = CD$

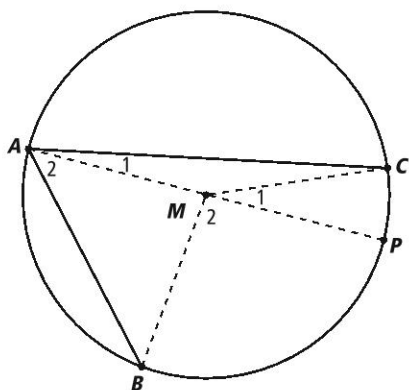
- b** De bogen AB en CD zijn ook even groot (en hebben dezelfde vorm).

32



$$\left. \begin{array}{l} \angle APM = \angle BPM = 90^\circ \\ MA = MB \text{ (A en B liggen op de cirkel)} \\ PM = PM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle APM \cong \triangle BPM \text{ (ZZR)} \Rightarrow AP = BP$$

- 33a** Driehoek AMC is gelijkbenig, dus $\angle A = \angle C$. Volgens de stelling buitenhoek driehoek is $\angle BMC = \angle A + \angle C$ en dus $\angle BMC = 2\angle A$ en $\angle A = \frac{1}{2}\angle BMC$
- b** Trek eerst wat hulplijnen: lijn door A en M die de cirkel snijdt in P , verder de stralen BM en CM .



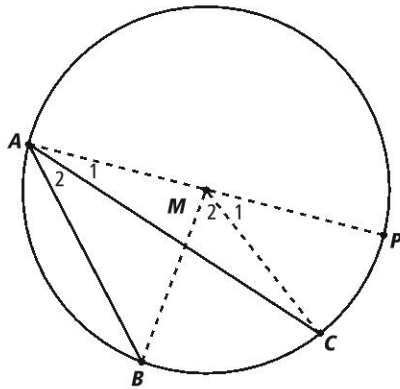
Je kunt nu twee maal hetgeen bij onderdeel a is gevondene toepassen.

Er geldt dan $\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle M_1$ en $\angle A_2 = \frac{1}{2}\angle M_2$. En dus

$$\angle A_{12} = \angle A_1 + \angle A_2 = \frac{1}{2}\angle M_1 + \frac{1}{2}\angle M_2 = \frac{1}{2}(\angle M_1 + \angle M_2) = \frac{1}{2}\angle M_{12}.$$

Pagina 61

- 34** Trek eerst wat hulplijnen: Lijn door A en M , die de cirkel snijdt in P , verder de stralen BM en CM .



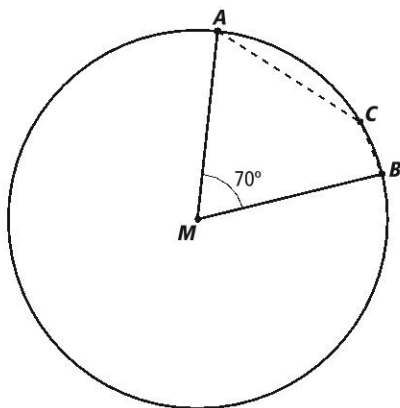
Te bewijzen: $\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle M_2$

Bewijs: $\angle A_2 = \angle A_{12} - \angle A_1 = \frac{1}{2} \angle M_{12} - \frac{1}{2} \angle M_1 = \frac{1}{2} (\angle M_{12} - \angle M_1) = \frac{1}{2} \angle M_2$.

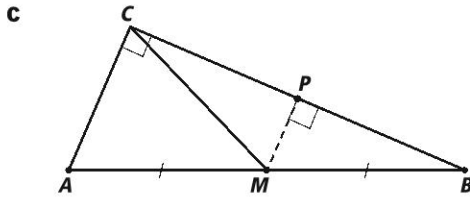
Je moet dus weer (net als bij opgave 33b) tweemaal het resultaat van opgave 33a toepassen.

- 35a** Omtrekshoek behorende bij de gele boog is $\angle A = 108^\circ$. De grootte van bijbehorende middelpuntshoek is dan $2 \cdot 108^\circ = 216^\circ$ (direct gevolg stelling omtrekshoek).
- b** De hoek bij M die hoort bij de blauwe boog, is $360^\circ - 216^\circ = 144^\circ$.
- c** $\angle C$ is een omtrekshoek horende bij de blauwe boog. Deze is dus $\frac{1}{2} \cdot 144^\circ = 72^\circ$ (stelling omtrekshoek).

36a



- b** Omtrekshoek $\angle ACB$ staat op de boog die ontstaat door boog AB uit de cirkel weg te laten. Bijbehorende middelpuntshoek is $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$. Volgens de stelling omtrekshoek is nu $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 290^\circ = 145^\circ$.
- 37a** Omtrekshoeken die op dezelfde boog staan hebben één en dezelfde middelpuntshoek en zijn dus elk qua grootte de helft van die middelpuntshoek (stelling omtrekshoek) en dus zijn die omtrekshoeken gelijk in grootte.
- b** AB is een middellijn, dus staat omtrekshoek C op een boog die gelijk is aan een halve cirkel.
Bijbehorende middelpuntshoek is gestrekt dus 180° en volgens de stelling omtrekshoek is dan $\angle C = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.



Trek het hulplijntje $MP \perp BC$. Nu is $\triangle BAC \sim \triangle BPM$ (hh), omdat $\angle C = \angle P = 90^\circ$ en omdat deze driehoeken $\angle B$ gemeenschappelijk hebben.

Omdat M het midden is van AB , is $\frac{BA}{BM} = 2$.

Vanwege de aangetoonde gelijkvormigheid is ook $\frac{BC}{BP} = 2$ en dus is

$$PB = PC.$$

Nu kun je eenvoudig bewijzen dat $\triangle BPM \cong \triangle CPM$ (zhz) en dus is dan $MC = MB = MA$.

Dit impliceert dat M (bijvoorbeeld) op de middelloodlijnen van AC en BC ligt en dat M het middelpunt is van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Anders gezegd, C ligt op de cirkel met middellijn AB .

Daarmee is de omgekeerde stelling van Thales bewezen.

$$\left. \begin{array}{l} \angle BSA = \angle CSD \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle SBA = \angle SCD \text{ (stelling constante hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABS \sim \triangle DCS \text{ (hh)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle BSC = \angle ASD \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle SBC = \angle SAD \text{ (stelling constante hoek)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCS \sim \triangle ADS \text{ (hh)}$$

3-6 Hoe bewijs je dat ?

Pagina 62

39 Gegeven: $ABCD$ is een vierhoek, waarbij A en C overstaande hoeken zijn en beide 90° .

Te bewijzen: Er is een cirkel die door A , B , C en D gaat.

Bewijs: Trek hulplijn BD .

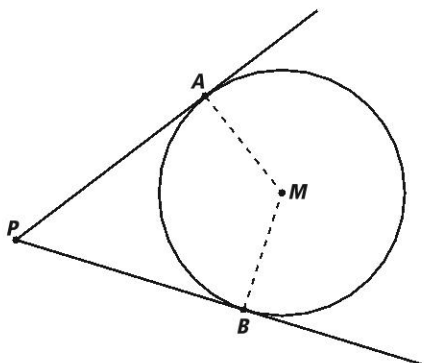
$\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow C$ op cirkel met middellijn BD . (Thales)

$\angle BAD = 90^\circ \Rightarrow A$ op cirkel met middellijn BD . (Thales)

Er is precies één cirkel met middellijn BD .

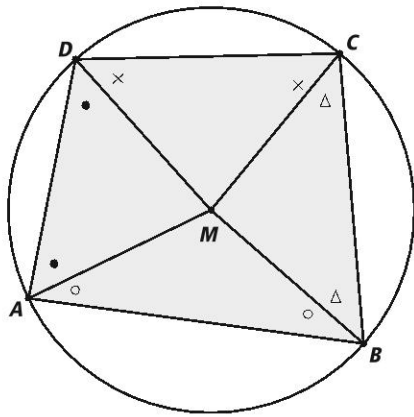
De cirkel met middellijn BD gaat door A , B , C en D .

40a



- b** Volgens stelling raaklijn staat een raaklijn loodrecht op de straal van raakpunt naar middelpunt, dus is $\angle A = 90^\circ$ en ook $\angle B = 90^\circ$. A en B zijn overstaande hoeken van vierhoek $PAMB$ dus gaat volgens het bewijs bij opgave 39 een cirkel door P , A , M en B .
- c** Je construeert de cirkel met PM als middellijn. Deze snijdt de oorspronkelijke cirkel in de gezochte raakpunten.

41a



Een koordenvierhoek kan worden opgedeeld in vier gelijkbenige driehoeken zoals in de figuur. De som van de 8 gemerkte hoeken zijn samen 360° .

Dus $2 \cdot \bullet + 2 \times + 2 \triangle + 2 \circ = 2(\bullet + \times + \triangle + \circ) = 360^\circ$.

De som van twee overstaande hoeken is dus steeds $\bullet + \times + \triangle + \circ = 180^\circ$.

- b** Overstaande (omtreks-) hoeken staan op bogen die samen de hele cirkel vormen. Bijbehorende middelpuntshoeken zijn dus samen 360° en de som van de overstaande hoeken is dan dus $\frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

Pagina 63

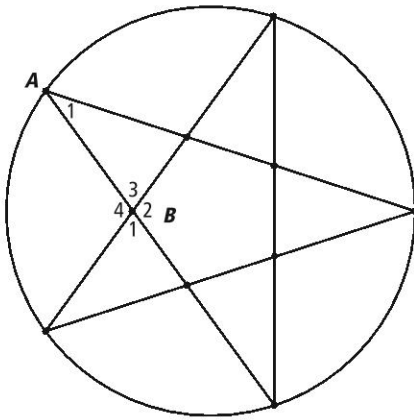
- 42a** Als A , Q en B op één lijn liggen dan is $\angle AQB$ gestrekt, dit is het geval als $\angle AQP + \angle BQP = 180^\circ$.
- b** Punt Q ligt op een cirkel met AP als middellijn. Volgens Thales is $\angle AQP = 90^\circ$. Punt Q ligt ook op een cirkel met BP als middellijn. Volgens Thales is dan $\angle BQP = 90^\circ$. Er geldt dus $\angle AQP + \angle BQP = 180^\circ$, $\angle AQB$ is gestrekt en A , Q en B liggen op één lijn.
- 43** Je bewijst dat vierhoeken $ARHQ$, $BPHR$ en $CQHP$ koordenvierhoeken zijn. Bijbehorende cirkels gaan door H en zijn dan natuurlijk ook de omgeschreven cirkels van resp. de driehoeken ARQ , BPR en CQP . $\angle Q = \angle R = 90^\circ \Rightarrow ARHQ$ heeft een omgeschreven cirkel met AH als middellijn, dit is ook de omgeschreven cirkel van $\triangle ARQ$. Op analoge wijze hebben ook $\triangle BPR$ en $\triangle CQP$ omgeschreven cirkels die door H gaan. De drie omgeschreven cirkels gaan dus door één punt, H .
- 44** In $\triangle ABP$ zie je dat $\angle APB = 180^\circ - \alpha - \beta$ (hoekensom driehoek). In $\triangle CDR$ zie je dat $\angle CRD = 180^\circ - \gamma - \delta$ (opnieuw hoekensom driehoek). dus $\angle APB + \angle CRD = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \delta$. De som van de hoeken van de vierhoek is enerzijds 360° .

Dus $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ en

$\angle P + \angle R = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

Omdat de som van de hoeken van vierhoek $PQRS$ 360° is, is ook $\angle Q + \angle S = 180^\circ$.

45



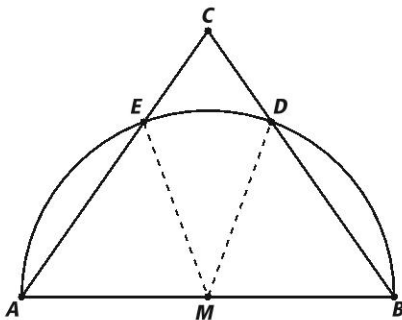
Omtrekshoek $\angle A_1$ staat op een boog overeenkomend met een vijfde deel van de cirkel. Bijbehorende middelpuntshoek is dus $\frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$ en dus $\angle A_1 = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$.

Omdat de driehoeken die aan de cirkel raken gelijkbenig zijn is

$2\angle B_3 + \angle A_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\angle B_3 = 180^\circ - 36^\circ \Rightarrow \angle B_3 = 72^\circ$.

Verder is $\angle B_1 = \angle B_3 = 72^\circ$ en $\angle B_2 = \angle B_4 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

46a



$\triangle ABC$ is gelijkbenig, dus $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$. $\angle A$ en $\angle B$ zijn beide omtrekshoeken.

$\angle EAB = 55^\circ \Rightarrow \angle EMB = 2 \cdot 55^\circ = 110^\circ$ (middelpuntshoek bij $\angle EAB$)

Ook $\angle DMA = 110^\circ$

Vervolgens is dan $\angle DMA + \angle EMB = 180^\circ + \angle EMD$

$\angle EMD = \angle DMA + \angle EMB - 180^\circ = 110^\circ + 110^\circ - 180^\circ = 40^\circ$.

b Als $\gamma = 90^\circ$ dan vallen C , D en E samen. In dat geval is $\angle EMD = 0^\circ$ (Thales).

Als $\gamma < 90^\circ$ dan hebben AC en BC geen snijpunt met de halfcirkel en is er dus geen sprake van een hoek $\angle EMD$.

Stel nu $\gamma > 90^\circ$.

$\triangle ABC$ is gelijkbenig, dus $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$. $\angle A$ en $\angle B$ zijn beide omtrekshoeken.

$\angle EAB = \frac{180^\circ - \gamma}{2} \Rightarrow \angle EMB = 2 \cdot \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 180^\circ - \gamma$ (middelpuntshoek bij $\angle EAB$)

Ook $\angle DMA = 180^\circ - \gamma$

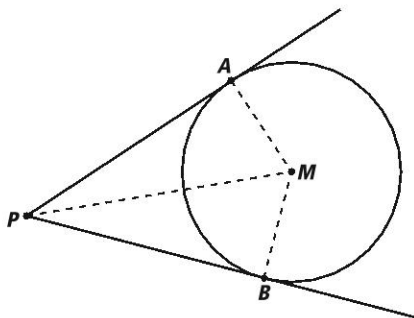
Vervolgens is dan $\angle DMA + \angle EMB = 180^\circ + \angle EMD$

$\angle EMD = \angle DMA + \angle EMB - 180^\circ = 180^\circ - \gamma + 180^\circ - \gamma - 180^\circ = 180^\circ - 2\gamma$

3-7 Gemengde opdrachten

Pagina 64

47



$$\left. \begin{array}{l} \angle PAM = \angle PBM = 90^\circ \text{ (raaklijn)} \\ \text{Bewijs: } AM = BM \text{ (straal)} \\ PM = PM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PAM \cong \triangle PBM \Rightarrow PA = PB$$

48a $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ (Pythagoras)

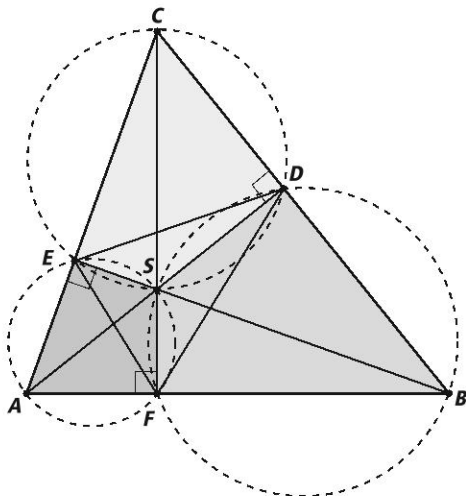
b $BP = AB - AP = 20 - r$, $CR = AC - AR = 21 - r$

c $CQ = CR$ (opgave 47) en $BQ = BP$ (opgave 47).

$$BC = BQ + CQ = (20 - r) + (21 - r) = 41 - 2r = 29$$

$$41 - 2r = 29 \Rightarrow r = 6.$$

49



Te bewijzen: DA is deellijn $\angle EDF$

Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} \angle AFC = \angle AEB = 90^\circ \\ \angle A = \angle A \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACF \sim \triangle ABE (hh) \Rightarrow \angle ACF = \angle ABE.$$

Vierhoek $ESDC$ is een koordenvierhoek met CS als middellijn van bijbehorende cirkel (2x Thales), dus $\angle ACF = \angle ECS = \angle EDS$ (constante hoek) $= \angle EDA$.

Ook vierhoek $FBDS$ is een koordenvierhoek, nu met BS als middellijn van de cirkel (2x Thales), dus is $\angle ABE = \angle FBS = \angle FDS$ (constante hoek) $= \angle FDA$. Uit $\angle ACF = \angle ABE$, $\angle ACF = \angle EDA$ en $\angle ABE = \angle FDA$ volgt dat $\angle EDA = \angle FDA$ en dus is DA is de deellijn van $\angle EDF$.

Dat FC en EB evenzo deellijnen zijn van $\angle F$ resp. $\angle E$ kun je op vergelijkbare manier bewijzen.

50 $AM = BM = CM = r$

Elk van de zijden van de zeshoek is middenparallel van één van de driehoeken $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ en $\triangle CAM$

Dus $RW = RU = UP = PV = VQ = QW = \frac{1}{2}r$

51a Bewijs: Er geldt $l \perp AM$ (raaklijn) dus $\angle MAB = 90^\circ - \alpha$.

Omdat $\triangle AMB$ gelijkbenig is, is ook $\angle MBA = 90^\circ - \alpha$. En dus is $\angle AMB = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ (hoekensom driehoek).

b De stelling met trefwoord omtrekshoek geldt ook als een been van de betreffende hoek de cirkel raakt.

Pagina 65

52a Bewijs: Laat $\angle A = \alpha$ dan is

$\angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ (hoekensom driehoek). Verder is

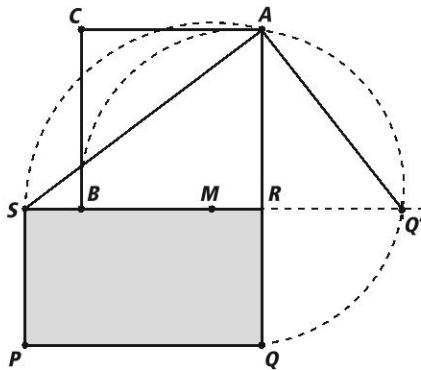
$\angle B = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ (oekhoekensom driehoek), dus $\angle ACD = \angle B$.

Omdat ook $\angle ADC = \angle CDB (= 90^\circ)$ is $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (hh).

b Uit de gelijkvormigheid bewezen bij onderdeel a volgt

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD.$$

cd



Verleng SR en plaats daarop punt Q' zodanig dat $RQ' = QR$ (passer gebruiken).

Bepaal vervolgens het midden van SQ' (kan via het construeren van de middelloodlijn) en noem dit punt M . Teken de halfcirkel met middelpunt M en straal MQ' . Deze halfcirkel snijdt het verlengde van QR in A . RA is een zijde van het gezochte vierkant. Teken een cirkelboog met middelpunt R en straal RA en vind het snijpunt B met SR . Het is nu verder niet moeilijk om punt C te vinden. Het vierkant met dezelfde oppervlakte als rechthoek $PQRS$ is nu vierhoek $BRAC$ want in $\triangle SQ'A$ geldt:

$$AR^2 = SR \cdot RQ' = SR \cdot RQ \Rightarrow \text{Oppervlakte } BRAC = \text{Oppervlakte } PQRS.$$

53a Bewijs van congruentie van $\triangle BAR$ en $\triangle ABC$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle R = \angle QAC \text{ (F - hoeken)} = \angle C \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle RBA = \angle A \text{ (Z - hoeken)} \\ BA = AB \end{array} \right\} HHZ$$

De bewijzen van de congruentie van $\triangle PCB$ en $\triangle CQA$ met $\triangle ABC$ gaan op eenzelfde manier.

b Uit de evenwijdigheid van PQ , QR en RP aan de zijden van $\triangle ABC$ volgt dat de vierhoeken $QABC$ en $ARBC$ parallelogrammen zijn en dat er geldt $QA = CB = AR$ (parallelogram 2x), met andere woorden, PA is zwaartelijn in $\triangle PQR$.

Dat RC en BQ ook zwaartelijnen zijn in $\triangle PQR$ bewijs je op vergelijkbare manier.

c Bewijs: $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{PR}{AC} = 2$ ($6 \times$ parallelogram) $\Rightarrow \triangle PQR \sim \triangle ABC$ (zzz).

d $CH = 2 \cdot MD$. Dit volgt uit $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ en de verhoudingen tussen overeenkomende lijnstukken.

e Bewijs:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{CH}{DM} = 2 \text{ (onderdeel d) en ook } \frac{CZ}{DZ} = 2 \text{ (zwaartelijnen driehoek)} \\ \angle H CZ = \angle MDZ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CHZ \sim \triangle DMZ \text{ (zhz)}$$

f $\angle CZM + \angle DZM = 180^\circ$ (Z ligt op zwaartelijn CD). Verder is $\angle DZM = \angle CZH$ (volgt uit de gelijkvormigheid), dus ook $\angle CZM + \angle CZH = 180^\circ$ en Z ligt op HM .

g Dit volgt rechtstreeks uit $\triangle CHZ \sim \triangle DMZ$ en de verhoudingen tussen overeenkomende lijnstukken die eerder zijn gevonden.

Test jezelf

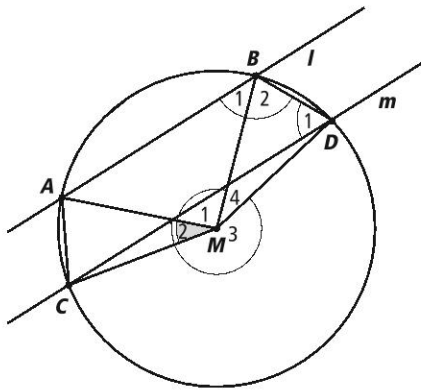
Pagina 68

T-1 $\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B \text{ (gegeven)} \\ \angle AFC = \angle BFE \text{ (overstaande hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow AFC \sim BFE \text{ (hh)} \Rightarrow \angle ACF = \angle BEF \Rightarrow$
 $\angle GCD = \angle HED \text{ (overstaande hoeken } 2 \times)$

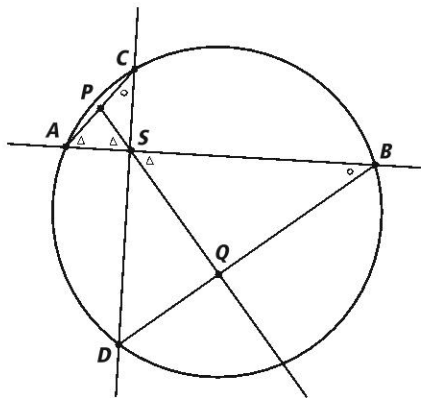
T-2 Stel de top hoeken van beide gelijkbenige driehoeken is gelijk aan α en stel $\angle CAD = \beta$, dan is
 $\left. \begin{array}{l} AB = AC \text{ (gelijkbenigheid)} \\ AE = AD \text{ (gelijkbenigheid)} \\ \angle BAD = \angle CEA = \alpha + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BAD \cong \triangle CAE \text{ (ZHZ)} \Rightarrow BD = CE$

T-3 De bissectrices snijden elkaar in punt S .
 S ligt op de bissectrice van $\angle A \Rightarrow d(S, AB) = d(S, m)$
 S ligt op de bissectrice van $\angle B \Rightarrow d(S, AB) = d(S, l)$
Dus $d(S, m) = d(S, l) \Rightarrow S$ op n

- T-4** $BC = 6 \Rightarrow BE = 3$ (AE is zwaartelijn);
 $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{64} = 8$ (Pythagoras);
 $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{73}$ (opnieuw Pythagoras);
 $AS : SE = 2 : 1$ (zwaartelijnen driehoek) $\Rightarrow AS = \frac{2}{3} \cdot AE = \frac{2}{3} \sqrt{73}$.

Pagina 69**T-5**

Omdat l en m evenwijdig zijn, is de som van de omtrekshoeken $\angle B_{12} + \angle D_1 = 180^\circ$. Dat betekent dat de som van bijbehorende middelpuntshoeken $\angle M_{23} + \angle M_{12} = 360^\circ$ (omtrekshoek). Er geldt $\angle M_{23} + \angle M_{12} = \angle M_1 + 2\angle M_2 + \angle M_3 = 360^\circ = \angle M_1 + \angle M_2 + \angle M_3 + \angle M_4 \Rightarrow \angle M_2 = \angle M_4$.
 Met stelling boog en koorde volgt dat $AC = BD$.

T-6

Omdat $\angle S = 90^\circ$, is P het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ASC$ (Thales). Er geldt dat $AP = SP$ en $\angle PAS = \angle PSA$ (gelijkbenige driehoek). Verder is $\angle ASP = \angle BSQ$ (overstaande hoeken) en dus is $\angle CAS = \angle PAS = \angle BSQ$. Omdat ook $\angle B = \angle C$ (constante hoek) is $\triangle CAS \sim \triangle BSQ$ (hh) en volgt dat $\angle BQS = \angle CSA = 90^\circ$ en dus $PQ \perp BD$.

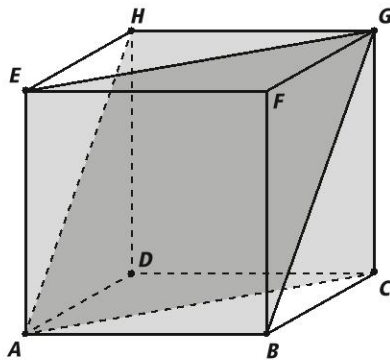
- T-7** Er geldt $\angle YAX = \angle YBX$ (constante hoek) en verder is $\angle YAX = \angle P_1AP_2$ (overstaande hoeken) en $\angle YBX = \angle Q_1BQ_2$. Dus is $\angle P_1AP_2 = \angle Q_1BQ_2$. Omdat $\angle P_1AP_2$ en $\angle Q_1BQ_2$ beide omtrekshoeken zijn in dezelfde cirkel, horen daarbij middelpuntshoeken die even groot zijn (omtrekshoek) en zijn dus $P_1P_2 = Q_1Q_2$ (boog en koorde).

H4 Redeneren met ruimtefiguren

4-1 Vlakken in de ruimte

Pagina 72

- 1a** $\triangle AEH$ is een gelijkbenig rechthoekige driehoek.
b Hoekpunt D
c De punten S , T en Q behoren ook tot vlak EHA .
d $DCGH$ is een rechthoek.
e De punten P , Q en T behoren tot het vlak $DCGH$.
- 2a** Er zijn nog oneindig veel vlakken mogelijk die de lijn door A en B gemeenschappelijk hebben. Elk derde punt dat niet op lijn AB ligt, bepaalt een vlak.
b Een vlak is vastgelegd door drie verschillende punten die niet op één lijn liggen. Als de drie punten op één lijn liggen, kan het vlak nog draaien om de lijn die door die drie punten gaat, dus het vlak is dan niet volledig bepaald.
- 3a** Om de verbindingslijn tussen de punten B en C draaien de vlakken $BCGF$, $BCHE$ en $BCDA$.
b Ja, de lijnen AB en GH zijn evenwijdig, dus er is een vlak mogelijk waar deze lijnen in liggen, namelijk vlak $ABGH$.



- c** De punten A , C en E liggen niet op één lijn, dus er is één vlak mogelijk, namelijk vlak $ACGE$.
d De lijnen AH en BG zijn twee snijdende lijnen, dus er is een vlak vastgelegd, namelijk vlak $ABGH$.
 Hoekpunt B behoort ook tot dit vlak.
e De punten B , D en F liggen niet op één lijn, dus er is een vlak vastgelegd, namelijk vlak $BDHF$.
 Hoekpunt H behoort ook tot dit vlak.
f Een vlak is vastgelegd door twee snijdende lijnen AG en EC .
 De lijnen AC en EG zijn evenwijdig, dus er is één vlak mogelijk waar deze beide lijnen in liggen, namelijk vlak $ACGE$.
g Omdat de lijnen AB en CH geen evenwijdige of snijdende lijnen zijn, is er geen vlak mogelijk waar deze lijnen allebei in liggen.

Pagina 73

- 4a** Bijvoorbeeld de punten B , C en I zijn punten die niet op één lijn liggen en daarmee het vlak bepalen. Of de punten B , I en F of de punten B , C en F of de punten C , I en F .
- b** Bijvoorbeeld lijn BC en punt F . Of lijn BF en punt I .
- c** Bijvoorbeeld de lijnen BC en BF snijden elkaar. Of BI en CF .
- d** Bijvoorbeeld de lijnen BC en FI zijn evenwijdige lijnen. Of BF en CI .
- e** Vlak $CHJE$ wordt bepaald door bijvoorbeeld de volgende drie punten: C , H en J .
Ook bijvoorbeeld door lijn CH en punt E .
Door bijvoorbeeld de snijdende lijnen CJ en EH .
Door bijvoorbeeld de evenwijdige lijnen CH en JE .
- 5a** Je mag er van uit gaan dat er geen vlakken samenvallen.
Vlak Z kan ook evenwijdig zijn aan V en W .
Of vlak Z snijdt de beide vlakken.
- b** Evenwijdig is vlak $PQRS$.
Snijdend is bijvoorbeeld vlak $ABFE$, $ABGH$, $DCFE$, $ACGE$ of $PQCD$.
- c** Snijlijn l bevat lijnstuk AD .
Om l te snijden kun je bijvoorbeeld vlak $ABFE$ of $DCGH$ kiezen.
Een vlak door l is bijvoorbeeld $ADHE$.
Een vlak evenwijdig aan l is bijvoorbeeld $EFGH$.
- 6a** Dan ligt het snijpunt van l en m in de vlakken V , W en Z .
Want het snijpunt ligt op l , dus in V en Z en het snijpunt ligt op m , dus in W en Z .
Dat kan niet, want V en W zijn evenwijdig. Dus het zijn geen snijdende lijnen.
Beide lijnen liggen in vlak Z , dan zijn het ook geen kruisende lijnen.
Conclusie: de snijlijnen l en m zijn evenwijdig.
- b** De lijnen kunnen geen kruisende lijnen zijn, want er liggen steeds twee in één vlak.
Noem de snijlijn van Z en V lijn m . Stel dat de lijnen l en m elkaar snijden.
Dat snijpunt ligt dan op lijn l , dus in V en W , maar ook op lijn m , dus in Z .
Dat kan niet, want Z is evenwijdig aan l .
Dezelfde redenering is er ook voor de snijlijn n van W en Z .
Conclusie: de drie snijlijnen zijn evenwijdig.
- 7a** Dat is mogelijkheid 2.
- b** Bij mogelijkheid 3 en 5

4-2 Lijnen in de ruimte**Pagina 74**

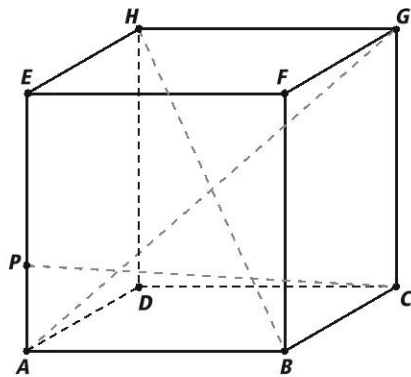
- 8a** Omdat de lijnen RS , PQ , MN en KL in verschillende horizontale vlakken liggen, kunnen ze elkaar niet snijden. Twee lijnen kunnen alleen maar evenwijdig zijn, wanneer ze in hetzelfde (natuurlijk niet horizontale) vlak liggen. De lijnen MN en KL zijn evenwijdig aan elkaar.

- b** Tweetallen lijnen die niet in één vlak liggen, zijn niet evenwijdig en snijden elkaar ook niet.

Als je je beperkt tot mogelijke tweetallen die in horizontale vlakken liggen:
 RS en PQ ; RS en MN ; RS en KL ; PQ en MN en PQ en KL .

- c** De plaat hout kan zonder buigen bevestigd worden in K , L , M en N .
Met de punten P , Q , R en S kan dat niet.

9a Zie tekening.

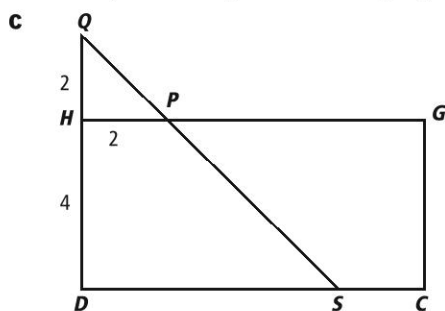


- b** Lijn CP ligt in de vlakken $ACGE$, BCP , DCP , FCP en HCP . Alle lijnen in deze vlakken die niet evenwijdig zijn aan lijn CP , snijden deze lijn.
Mogelijkheden zijn bijvoorbeeld AC , AE , EG , GA , CG , EC , BC , BP , DC , DP , FP , FC , HP en HC .
- c** Omdat bijvoorbeeld punt H niet ligt in het vlak $ACGE$ waar de lijn CP in ligt, hebben de lijnen HE , HG en HA geen snijpunt gemeen met de lijn CP en zijn ook niet evenwijdig aan deze lijn.
Omdat bijvoorbeeld punt F niet ligt in het vlak BCP waar de lijn CP in ligt, heeft de lijn BF geen snijpunt gemeen met de lijn CP en is ook niet evenwijdig aan deze lijn.
- d** De lijnstukken AE en CG zijn opstaande ribben van de kubus, dus zijn de lijnen AE en CG evenwijdig. Er is dus een vlak mogelijk door AE en CG , namelijk vlak $ACGE$.
Omdat de lijnen AG en CP allebei in vlak $ACGE$ liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.
- e** Het punt P ligt niet in het vlak $BCHE$ dat wordt bepaald door de punten B , C en H . De punten P , B , C en H liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen CP en HB . Deze lijnen kunnen dus niet evenwijdig zijn of een snijpunt hebben.
- 10a** De lijnen BC en ED liggen allebei in het grondvlak $ABCDE$, dus snijden elkaar of zijn evenwijdig. Volgens de tekening zijn de lijnen niet evenwijdig, dus moeten ze elkaar snijden.
- b** Het punt T ligt niet in het vlak $ABCDE$ dat wordt bepaald door de punten B , C en D . De punten T , B , C en D liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen TB en CD . Deze lijnen kunnen dus niet evenwijdig zijn of een snijpunt hebben.

- c** Het punt T ligt niet in het vlak $ABCDE$ dat wordt bepaald door de punten B , D en E . De punten T , B , D en E liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen TB en DE . Deze lijnen kunnen dus niet evenwijdig zijn of een snijpunt hebben.
In werkelijkheid hebben TB en DE geen snijpunt.

Pagina 75

- 11a** Het punt N ligt niet in het vlak BCT dat wordt bepaald door de punten B , C en T . De punten N , B , C en T liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen BC en TN . De lijnen BC en TN kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.
- b** Omdat de lijnen BN en AC allebei in het grondvlak $ABCD$ liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.
- c** Omdat de lijnen BT en CM allebei in het zijvlak BCT liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.
- d** Het punt T ligt niet in het grondvlak, waar A , C en N in liggen. De punten N , A , C en T liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen AT en CN . De lijnen AT en CN kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.
- e** Omdat de lijnen CN en AD allebei in het grondvlak $ABCD$ liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.
- f** Het punt M ligt niet in het vlak BDT . De punten M , B , D en T liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen BM en DT . De lijnen BM en DT kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.
- 12a** Het punt P ligt niet in het vlak $ADHE$ dat wordt bepaald door de punten A , D en H . De punten P , A , D en H liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen AP en DH .
De lijnen AP en DH kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.
- b** Het punt P ligt niet in het vlak $DBFH$. De punten P , D , B en F liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen PF en DB .

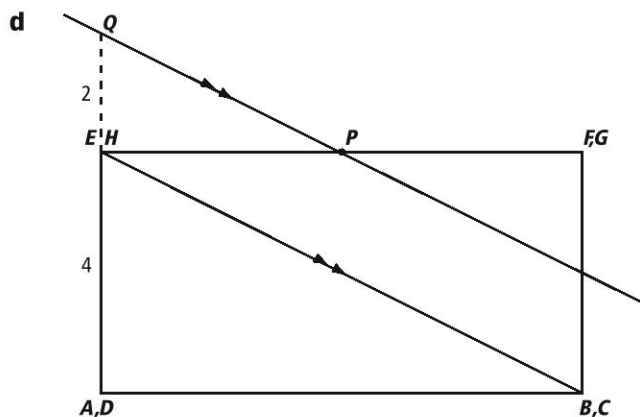


De lijnen PQ en CD snijden elkaar in punt S .

$\angle HQP = \angle DQS$ (overstaande hoeken) } hieruit volgt $\triangle HPQ$
 $\angle H = \angle D = 90^\circ$ }
 is gelijkvormig met $\triangle DSQ$.

$$\frac{\triangle HPQ}{\triangle DSQ} \left| \begin{array}{l} HP = 2 \\ HQ = 2 \end{array} \right| \frac{DS = ?}{DQ = 4 + 2 = 6}$$

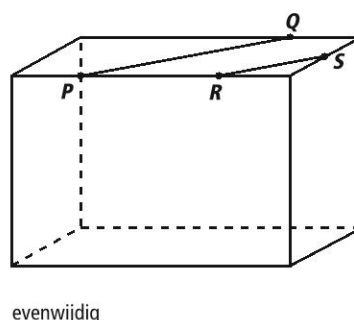
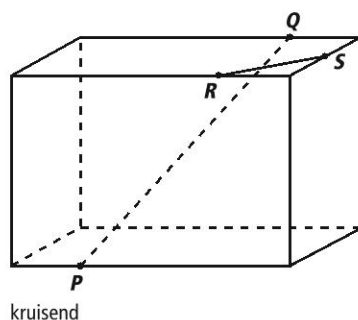
Dus $DS = 6$.



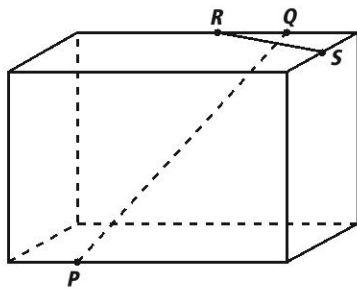
- e** Vlak $ABGH$ wordt bepaald door de punten A , B en P . Punt Q ligt niet in vlak $ABGH$, daarom is er geen vlak waarin de punten A , B , P en Q liggen, dus zullen AP en BQ elkaar nooit snijden.

- 13a** De lijnen AD en EH zijn ribben en liggen in het zijvlak $ADHE$. Punt P ligt op de verlengde van lijnstuk AD en punt Q op de verlengde van DH . Omdat de lijnstukken PQ en EH allebei in het zijvlak liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.
- b** Het punt P ligt niet in het vlak RHG , dat is het achtervlak $DCGH$. De punten P , H , G en R liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen HG en PR . De lijnen HG en PR kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.
- c** Het punt P ligt niet in het vlak CGE dat is het vlak $ACGE$. De punten P , C , G en E liggen niet in één vlak. Het punt G ligt dus niet in vlak PCE .
- d** $\triangle DAB$ is een rechthoekige driehoek. De rechthoekszijden zijn $AD = 4$ en $AB = 4$ $BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
 $\triangle BDQ$ is een rechthoekige driehoek. De rechthoekszijden $DQ = 6$ en $BD = \sqrt{32}$.
 $BQ = \sqrt{(\sqrt{32})^2 + 6^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$
- e** Punt Q ligt op de verlengde van ribbe DH , dus ligt Q in het zijvlak $ADHE$. Punt M ligt in het midden van hetzelfde zijvlak op ribbe DH . Omdat $AE \parallel DH$ geldt ook $AE \parallel MQ$. Ook zijn AE en MQ even lang, namelijk 4. Dus is $AMQE$ een parallellogram, dan geldt $AM \parallel EQ$.

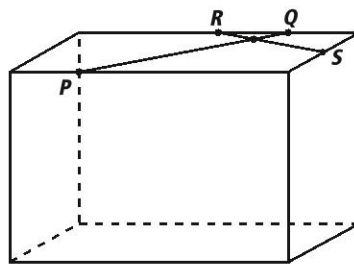
- 14a** De lijnen PQ en RS kunnen in situatie 1 elkaar kruisen wanneer bijvoorbeeld Q , R en S in het bovenvlak liggen en P in het ondervlak of de lijnen PQ en RS zijn evenwijdig wanneer bijvoorbeeld alle punten in het bovenvlak liggen.



- b** De lijnen PQ en RS kunnen in situatie 2 elkaar kruisen wanneer bijvoorbeeld Q, R en S in het bovenvlak liggen en P in het ondervlak of de lijnen PQ en RS kunnen elkaar snijden wanneer bijvoorbeeld alle punten in het bovenvlak liggen.

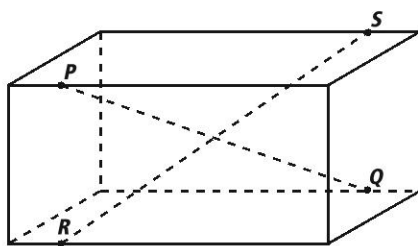


kruisend

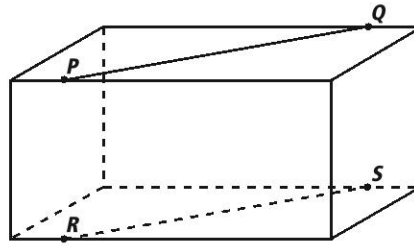


snijgend

De lijnen PQ en RS kunnen in situatie 3 elkaar snijden wanneer bijvoorbeeld P en S in het bovenvlak liggen en Q en R in het ondervlak of de lijnen PQ en RS zijn evenwijdig wanneer bijvoorbeeld P en Q in het bovenvlak liggen en R en S in het ondervlak.



snijgend



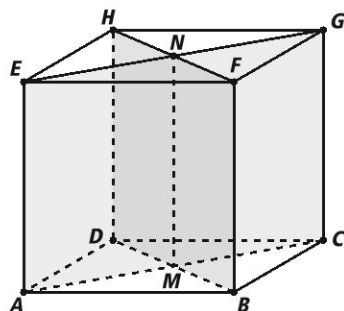
evenwijdig

4-3 Lijnen en vlakken

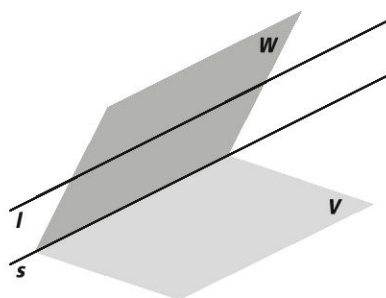
Pagina 76

- 15a** Lijn EH heeft geen gemeenschappelijke punten met vlak V .
Lijn EA heeft één gemeenschappelijk punt met vlak V , namelijk punt A .
Lijn EM heeft één gemeenschappelijk punt met vlak V , namelijk een snijpunt met het verlengde van AC .
- b** Bijvoorbeeld EF , EG of HG , HF , FG
- c** De van lijnen die meer dan één punt gemeenschappelijk hebben met V liggen in V .
Bijvoorbeeld AB , AD of BC , DC , AC , BD
- 16a** Omdat R ligt in W (gegeven) en S ligt op de snijlijn, dus ook in W . Dan liggen alle punten van lijn SR in vlak W .
- b** Punt S ligt op PQ , dus zijn lijn PQ en SR snijdende lijnen, die in vlak PQR liggen.
- 17a** Nee, de lijnen DG en BE snijden elkaar niet, want de ene ligt in het voorvlak en de andere in het achtervlak van de kubus.
- b** De lijnen DG en CH liggen in het achtervlak van de kubus en zijn niet evenwijdig, dus snijden elkaar.

- c** P ligt op lijn DG van vlak BGD en P ligt op lijn CG van vlak $BCHE$.
d Punt B
e Lijn BP
f



18



Stel dat snijlijn s van V en W lijn l snijdt.

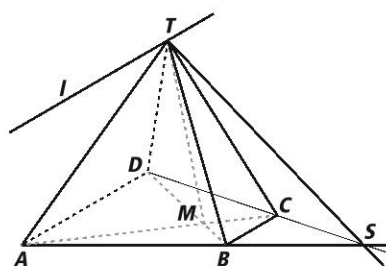
Dan ligt dat snijpunt in V en W .

Dan heeft V dus een punt gemeenschappelijk met l , dat kan niet want lijn l is evenwijdig aan vlak V .

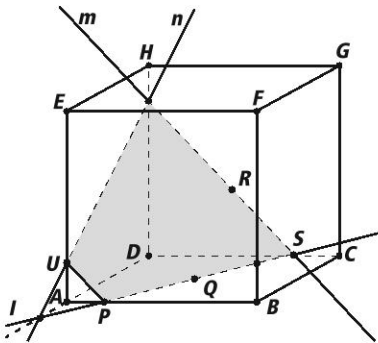
Conclusie: de snijlijn van V en W is evenwijdig aan l .

Pagina 77

- 19** Noem het vlak dat de evenwijdige lijnen l en m bevat vlak W . Dan is de snijlijn van de vlakken V en W precies lijn m .
 Stel dat lijn m een punt gemeenschappelijk heeft met V , dan ligt dat punt ook in W (want m ligt in W), dus op de snijlijn l . Dan is er een snijpunt van l en m . Dat is onmogelijk want l en m zijn evenwijdig.
 Conclusie: m heeft geen gemeenschappelijk punt met V en is dus evenwijdig aan V .
- 20a** Zie tekening bij d. De snijlijn is TM .
b In het grondvlak $ABCD$
c Zie tekening bij d. De snijlijn is TS .
d De lijn l evenwijdig aan AD door T ligt in vlak TAD .
 De lijn l is dan ook evenwijdig aan BC en gaat door T dus ligt in vlak TBC .
 Dus is lijn l de snijlijn van de vlakken TAD en TBC .



- 21a** Zie tekening bij c. l is de lijn PQ
b Lijn SR is de snijlijn met het achtervlak.
c Zie tekening.

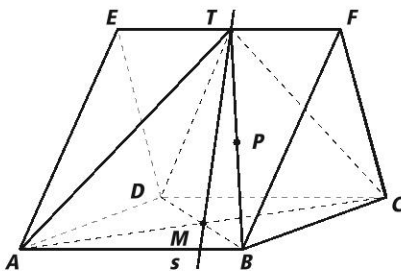


- d** UP is de snijlijn met het voorvlak en m is de snijlijn met het achtervlak.
 Vlak PQR snijdt evenwijdige vlakken volgens evenwijdige snijlijnen.

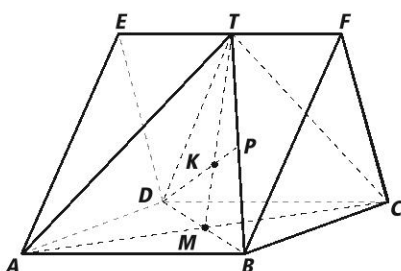
4-4 Snijpunten

Pagina 78

- 22a** Punt P ligt op BT , dus de lijnen DP en BT snijden elkaar in punt P en dus bepalen deze snijdende lijnen een vlak, namelijk vlak DBT .
 Lijn DP ligt dus zeker in vlak DBT .
b Om de snijlijn van de vlakken ACT en BDT te vinden teken je eerst de vlakken zelf. Je ziet dan waar de vlakken elkaar snijden en je kunt een snijlijn tekenen.
 Je krijgt dan onderstaand figuur:

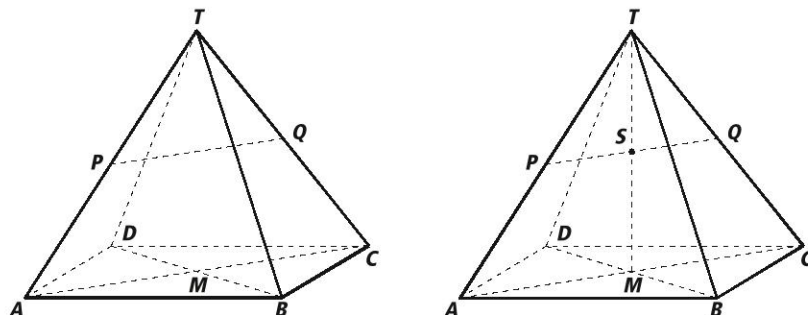


- c** Snijlijn s en lijn DP liggen beide in vlak BDT . Voor twee lijnen in een vlak geldt dat ze snijden elkaar of ze zijn evenwijdig. DP en s zijn duidelijk niet evenwijdig, dus ze snijden elkaar. Maar s was de snijlijn van BDT en ACT . Als DP lijn s snijdt, snijdt deze dus ook vlak ACT . Het snijpunt K van ACT en DP wordt dus gegeven door het snijpunt van de lijnen s en DP , zie onderstaande tekening.



- 23a** Lijn PQ ligt in vlak ACT , dit vlak kun je als hulpvlak gebruiken. Zie linker tekening.

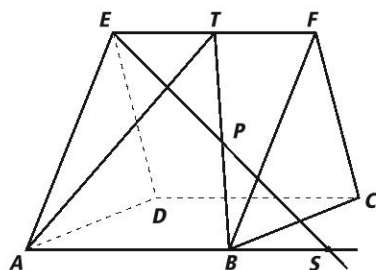
De vlakken ACT en BDT snijden elkaar in lijn MT , dit is je hulplijn. Het snijpunt S van MT en PQ is het snijpunt van PQ met vlak BDT , zie rechters tekening.



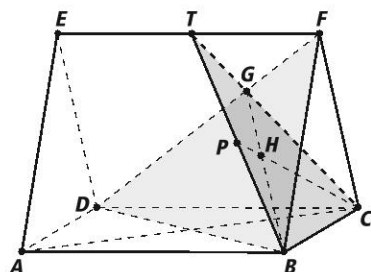
- b** Lijn PQ en vlak $ABCD$ hebben geen snijpunt omdat ze evenwijdig zijn.

Pagina 79

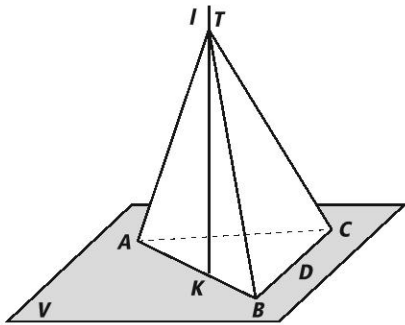
- 24a** Lijn EP ligt in vlak $ABFE$. De vlakken $ABCD$ en $ABFE$ snijden elkaar in snijlijn AB . Als je lijn AB en lijn EP doortrekt, snijden ze elkaar in punt S . Dit punt is het snijpunt van lijn EP en vlak $ABCD$, zie onderstaande tekening.



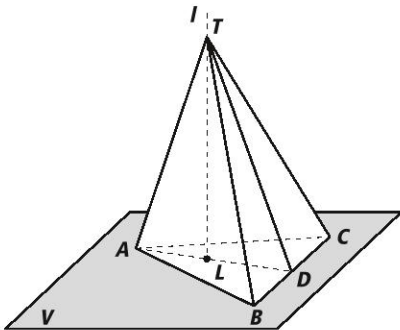
- b** Lijn CP ligt in vlak BCT , dit vlak gebruik je als hulpvlak.
Noem het snijpunt van DF en CT in vlak $DCFE$ punt G .
De vlakken BFD en BCT snijden elkaar in lijn BG . In vlak BCT snijdt CP lijnstuk BG in punt H .
Dit is het gezochte snijpunt, zie onderstaande tekening.



- 25a** Vlak TAB snijdt V in snijlijn AB . Als lijn l in TAB ligt, dan snijdt lijn l vlak V dus ook in snijlijn AB . Zie onderstaande tekening, met K het snijpunt van l en V .



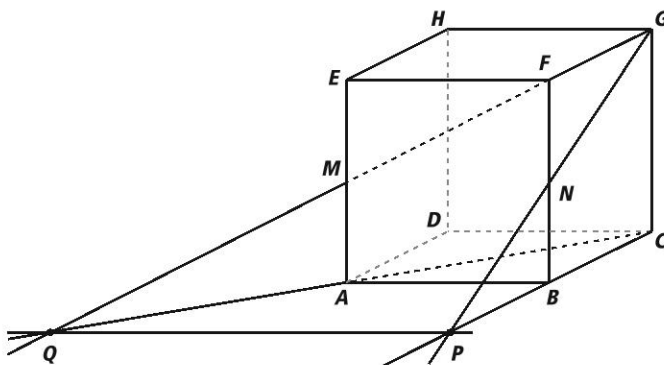
- b** Vlak TAD snijdt V in snijlijn AD . Als lijn l in TAD ligt, dan snijdt lijn l vlak V dus ook in snijlijn AD . Zie onderstaande tekening, met L het snijpunt van l en V .



- 26abc** Lijn GN ligt in vlak $BCGF$, dit is het hulpvlak. $BCGF$ snijdt $ABCD$ in lijn BC . Het snijpunt P van de lijnen GN en BC is daarom ook het snijpunt van GN en $ABCD$.

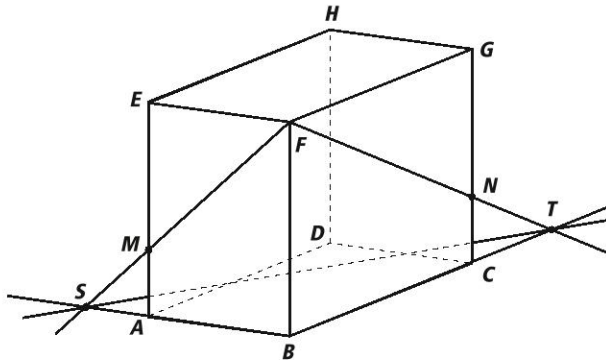
Analoog: lijn GM ligt in vlak $ACGM$, dit is het hulpvlak. $ACGM$ snijdt $ABCD$ in lijn AC . Het snijpunt Q van de lijnen GM en AC is daarom ook het snijpunt van GM en $ABCD$.

Dit geeft de volgende tekening.

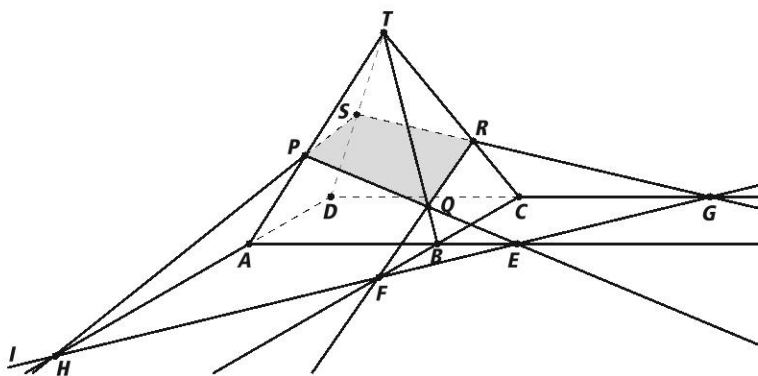


- d** Punt P ligt op de lijn GN . De lijn GN ligt in vlak GMN , dus punt P ligt in vlak GMN . Analoog: punt Q ligt op de lijn GM . De lijn GM ligt in vlak GMN , dus punt Q ligt in vlak GMN . P en Q liggen dus zowel in vlak GMN als in vlak $ABCD$, dus PQ is de snijlijn.

- 27a** Lijn FM ligt in het vlak $ABFE$, dit is het hulpvlak. $ABFE$ snijdt het grondvlak $ABCD$ in lijn AB . Het snijpunt S van de lijnen AB en FM is dus het snijpunt tussen het grondvlak $ABCD$ en lijn FM , zie de tekening bij b.
- b** Je kunt de snijlijn tussen het grondvlak en vlak MFN tekenen als je twee punten van de snijlijn hebt. Je hebt al één punt: snijpunt S van 27a. Om een tweede punt te vinden teken je het snijpunt T van FN met het grondvlak. De lijn ST is de snijlijn van het grondvlak en vlak MFN .



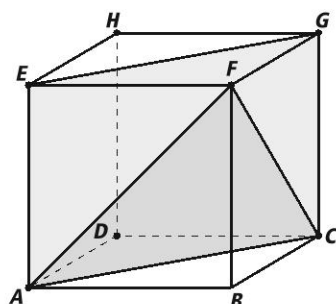
- 28ab** Het snijpunt E van PQ met AB is het snijpunt van PQ met het grondvlak. Het snijpunt F van RQ met BC is het snijpunt van RQ met het grondvlak. Dit geeft onderstaande tekening.
- c** Alle punten op l liggen in vlak PQR , zie tekening bij e.
- d** Alle punten op het verlengde van DC liggen in het vlak CDT . Het snijpunt G van l en het verlengde van CD ligt zowel in PQR als in CDT . Er zijn nu twee punten die zowel in PQR als in CDT liggen: het snijpunt G van l en DC en punt R . De lijn door beide punten is de snijlijn van vlak PQR en vlak CDT . Het snijpunt van lijn GR en lijn DT is dus het gezochte punt S . Dit geeft onderstaande tekening.
- e** Er zijn nu twee punten die zowel in PQR als in ADT liggen: het snijpunt S van GR en DT en punt P . De lijn door beide punten is de snijlijn van vlak PQR en vlak ADT . Het snijpunt H van PS en AD ligt in het grondvlak evenals de lijn l , die de snijlijn is van PQR en het grondvlak. Daarom ligt punt H op lijn l .



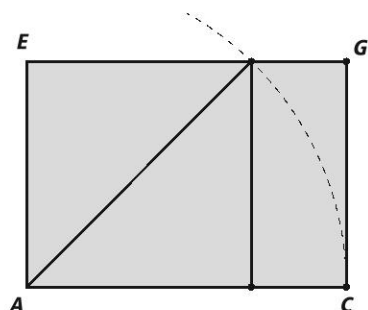
4-5 Doorsneden tekenen

Pagina 80

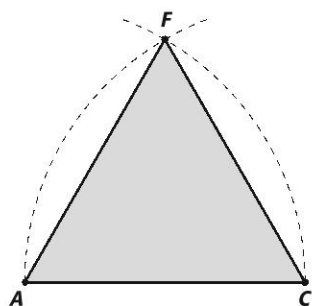
29ab



- a $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,8$
 Het diagonaalvlak $ACGE$ is een rechthoek met lengte $2\sqrt{2}$ cm en hoogte 2 cm.

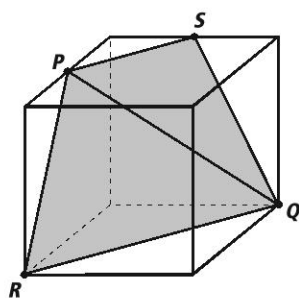


- b $AC = AF = CF = 2\sqrt{2}$
 Het doorsnijdingsvlak ACF is een gelijkzijdige driehoek met zijden van $2\sqrt{2}$ cm.



- 30a Evenwijdig aan lijn RQ

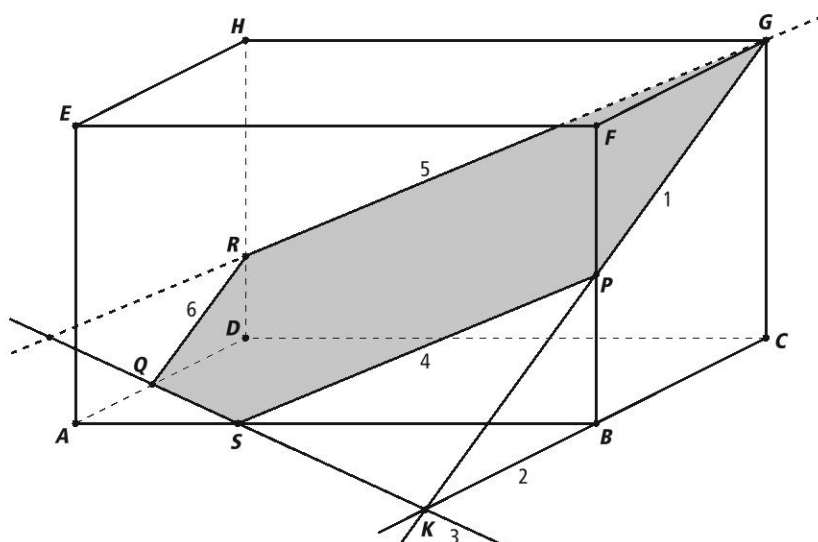
- b Zie tekening.



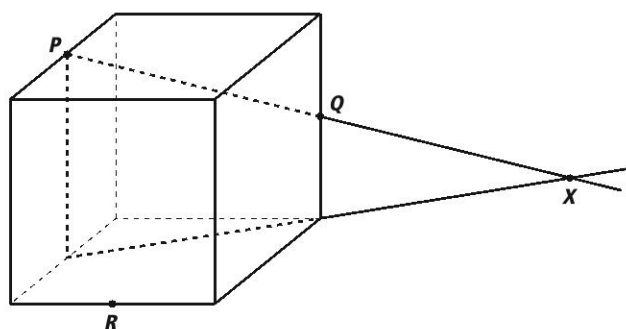
- 31a** Als eerste is lijnstuk QR getekend.
- b** Punt S vind je door een lijn door punt P te tekenen evenwijdig aan QR .
- c** Als je QR en DC verlengt, vind je snijpunt T .
Door de punten P en T te verbinden vind je een snijpunt op CG , dat is punt U .
 T ligt op lijn QR dus ligt in vlak PQR . Punt T ligt in het ondervlak en zijvlak van de kubus en daarmee dus ook in het gezochte snijvlak.
De punten P en T liggen in het gezochte snijvlak, dan liggen ook alle punten op de verbindingslijn van P en T in het gezochte snijvlak.
- d** Verbind R en U . Omdat de vlakken $BCGF$ en $ADHE$ evenwijdig zijn, zijn ook de snijlijnen evenwijdig. Dus teken door S de lijn evenwijdig aan RU . Noem het snijpunt met AE punt V . (stap 7).
Verbind V met Q . Omdat de vlakken $ABFE$ en $DCGH$ evenwijdig zijn, zijn ook de snijlijnen evenwijdig. Hieruit volgt dat QV evenwijdig is aan PU . (stap 8).

Pagina 81

- 32ab** Hieronder staat een tekening van het snijvlak en een toelichting bij de stappen.
- Stap 1: de lijn GP geeft de snijlijn van vlak GPQ met het rechtervlak van de balk.
- Stap 2: om de snijlijn tussen de vlak GPQ en de onderzijde van de balk te vinden heb je twee punten nodig die zowel in GPQ als in $ABCD$ liggen.
Je hebt al één punt: punt Q . Om het tweede punt te vinden bedenk je dat alle punten op de lijn GP in vlak GPQ liggen en alle punten op de lijn BC in vlak $ABCD$. Het gezochte tweede punt is dus het snijpunt van GP en BC . Om dit snijpunt K te vinden verleng je lijn CB .
- Stap 3: Je hebt nu twee punten die in GPQ en $ABCD$ liggen. Lijn QK is de snijlijn van GPQ met het ondervlak van de balk. Je tekent deze lijn.
- Stap 4: Lijn QK ligt in vlak GPQ en snijdt vlak $ABFE$ in de ribbe AB . Dit geeft snijpunt S tussen vlak GPQ en vlak $ABFE$. Je hebt al een snijpunt tussen deze vlakken: punt P . Lijn PS is de snijlijn van vlak GPQ en het voorvlak van de balk. Teken deze lijn.
- Stap 5: Het voorvlak en het achtervlak zijn evenwijdig, de snijlijn in het achtervlak zal dus evenwijdig lopen aan de snijlijn in het voorvlak. Teken vanuit G een lijn die evenwijdig is aan lijn PS , dit is de snijlijn tussen GPQ en het achtervlak.
- Stap 6: Je hebt nu twee snijpunten tussen GPQ en het linkervlak: punt Q en het snijpunt R van de bij stap 5 getekende lijn en de ribbe DH . Lijn RQ is de snijlijn tussen GPQ en het linkervlak. Hiermee is de doorsnede $PGRQS$ getekend. Het verkregen vlak kun je een kleurtje geven.



33a

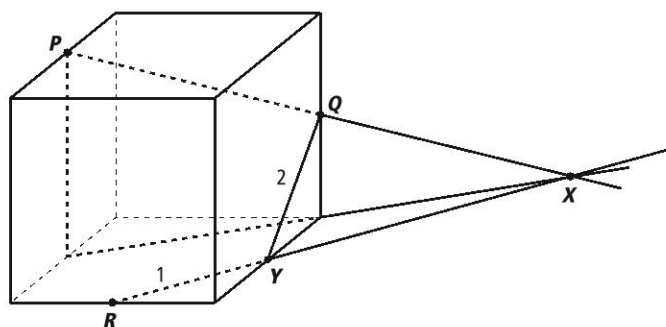


- b**

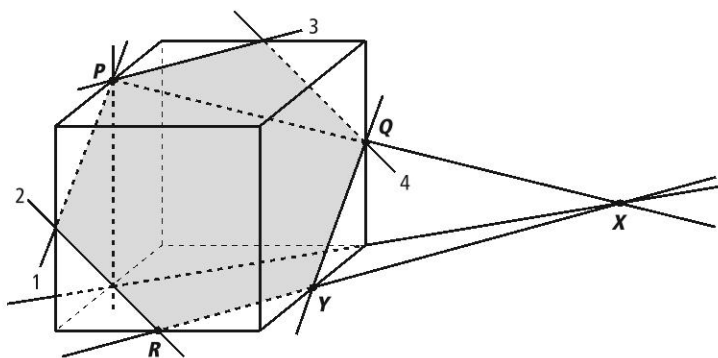
- C**

De verbindingslijn QY is dus de snijlijn tussen vlak PQR en het rechtervlak van de kubus en behoort dus tot de gevraagde doorsnede.

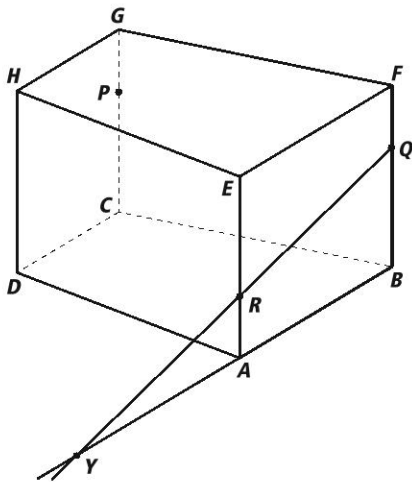
De snijlijnen van b en c zijn hieronder getekend.



- d** De doorsnede kan worden afgemaakt met de volgende stappen, zie onderstaande tekening (er zijn ook andere oplossingen mogelijk):
- Stap 3: Het linkervlak en het rechtervlak van de kubus zijn evenwijdig.
De snijlijn in het linkervlak zal daarom evenwijdig zijn aan lijn QY .
Teken nu lijn 1 vanuit P evenwijdig met QY .
- Stap 4: Je hebt nu twee punten die zowel in vlak PQR als in het voorvlak liggen: het snijpunt van de vorige stap en punt R . Lijn 2 is de snijlijn van PQR met het voorvlak.
- Stap 5: Het bovenvlak en het ondervlak van de kubus zijn evenwijdig.
De snijlijn in het bovenvlak zal daarom evenwijdig zijn aan RY .
Teken nu lijn 3 vanuit P evenwijdig met RY .
- Stap 6: Je hebt nu twee punten die zowel in vlak PQR als in het achtervlak liggen: het snijpunt van de vorige stap en punt Q . Lijn 4 is de snijlijn van PQR met het achtervlak.



- 34a** Alle punten op de lijn AB liggen in het grondvlak. Het snijpunt Y van QR en AB is dus het snijpunt tussen QR en het grondvlak, zie onderstaande tekening.



- b** Er is gegeven dat PQ evenwijdig is aan CB . De drie vlakken $ABCD$, $CBFG$ en PQR hebben dus twee evenwijdige snijlijnen. Omdat vlak PQR het grondvlak $ABCD$ snijdt, zijn deze vlakken niet evenwijdig en is de derde snijlijn evenwijdig aan de andere snijlijnen.

- c** De doorsnede kan worden afgemaakt met de volgende stappen:

Stap 1: Teken de lijn van opdracht b.

Stap 2: Verleng CD tot deze de bij stap 1 getekende lijn snijdt.

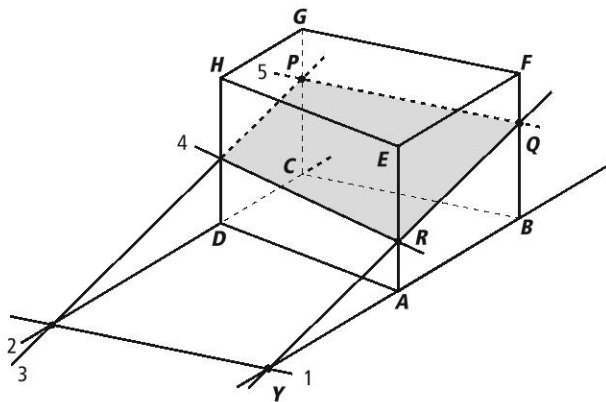
Stap 3: Je hebt nu twee punten die zowel in vlak PQR als in het linkervlak liggen: het snijpunt van het verlengde van CD met de lijn van stap 1 en punt P .

De verbindingslijn is de snijlijn van PQR met het linkervlak.

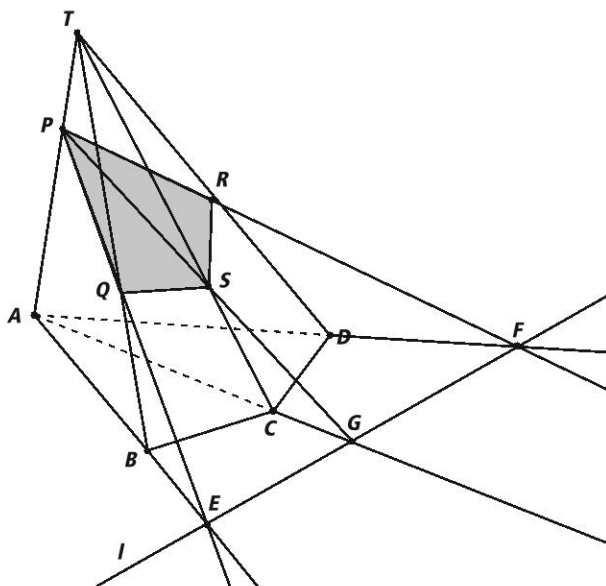
Stap 4: Nu heb je ook twee punten die zowel in vlak PQR als in het voorvlak liggen: het snijpunt van de vorige stap en punt R . De verbindingslijn is de snijlijn van PQR met het voorvlak.

Stap 5: Lijn PQ is de snijlijn tussen PQR en het achtervlak.

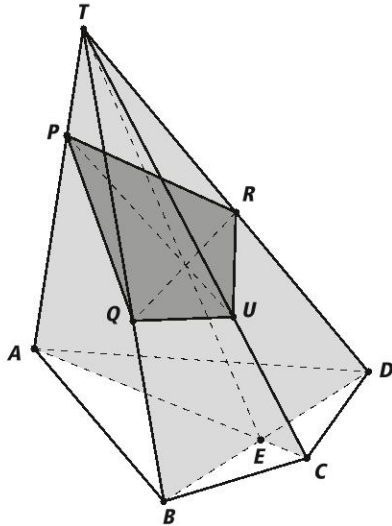
Hieronder staat een tekening van het snijvlak.



- 35a** Verleng PQ en AB , noem het snijpunt E
 Verleng PR en AD , noem het snijpunt F
 Zie tekening bij c.
- b** De snijlijn van vlak PQR met het grondvlak is lijn l door E en F .
- c** Teken hulpvlak TAC . Verleng AC en noem het snijpunt met lijn l punt G .
 In vlak TAC snijdt lijn PG de opstaande ribben TC in punt S .
 Dan is $PQSR$ de gevraagde doorsnede.

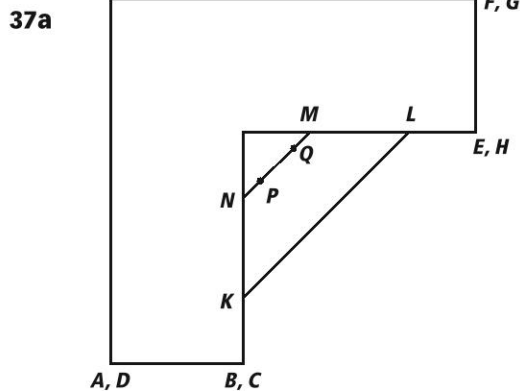


- 36a** Dit is de lijn $l = TE$, zie tekening bij d.
b QR en l liggen in hetzelfde vlak TBD .
c Het snijpunt van ribbe TC en vlak PQR vind je door lijnstuk PS te verlengen. Noem het snijpunt U .
d $PQUR$ is de gevraagde doorsnede.



4-6 Gemengde opdrachten

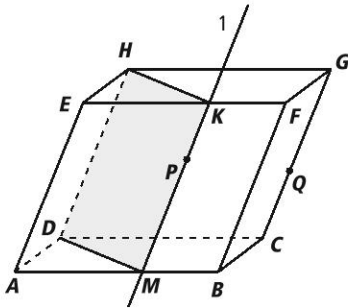
Pagina 82



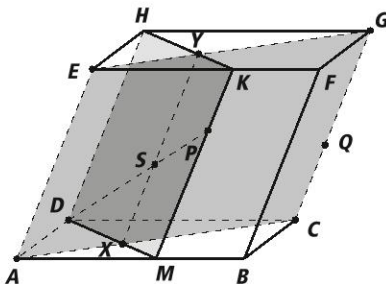
- b** Lijn DC is evenwijdig aan AB en omdat de twee rechthoekige blokken loodrecht op elkaar staan, is ook de lijn LE evenwijdig aan AB .
c Ja, omdat de lijnen AB en EF allebei in het grondvlak liggen en niet evenwijdig zijn, hebben deze twee lijnen een snijpunt.
d Het verticale vlak door EH en punt K wordt tevens vastgelegd door EH en de lijn door punt K evenwijdig aan lijn EH . Het is duidelijk dat punt N achter dit vlak ligt en dus niet in het vlak.
e Het punt N ligt niet in het vlak KEH . De punten K , E , H en N liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen KN en EH . De lijnen KN en EH kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden maar moeten elkaar kruisen.

- f De lijnen KL en NM zijn evenwijdig en leggen het vlak $KLMN$ vast. Omdat de lijnen KN en LM allebei in het vlak $KLMN$ liggen en niet evenwijdig zijn, hebben deze twee lijnen een snijpunt.

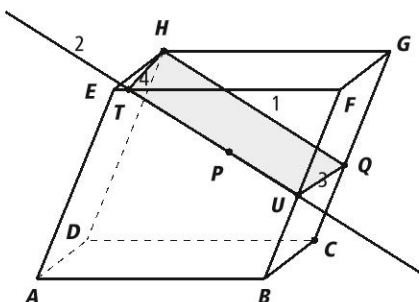
- 38a** Het voorvlak en het achtervlak zijn evenwijdig, dus
 Stap 1: Teken de lijn door punt P die evenwijdig loopt aan HD , noem de snijpunten met EF en AB bijvoorbeeld K en M .
 Stap 2: Verbind H, K, M en D .
 Stap 3: Hieronder staat een tekening van de gevraagde doorsnede.



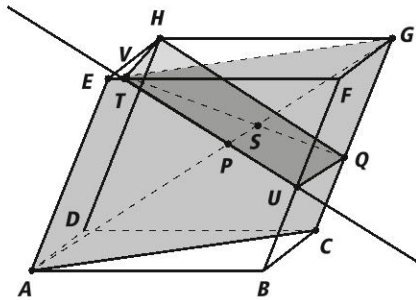
- b Stap 1. Het snijpunt van vlak HPD uit opdracht a met EG is Y . Het snijpunt met AC is X .
 Stap 2. XY is de snijlijn van vlak $ACGE$ met vlak HPD .
 Stap 3. Het snijpunt van DP en XY is het gevraagde punt S .



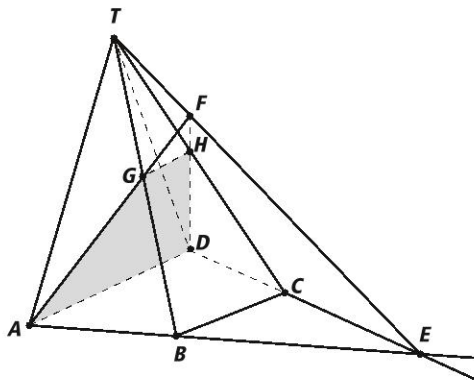
- c Stap 1: Teken de lijn HQ .
 Stap 2: Omdat het voorvlak en het achtervlak evenwijdig zijn, is de snijlijn in het voorvlak evenwijdig aan de snijlijn in het achtervlak. De snijlijn van het voorvlak kun je dus vinden door een lijn te tekenen door punt P evenwijdig aan HQ . Het snijpunt van deze lijn met de ribbe FE is punt T , het snijpunt met BF is U .
 Stap 3: $HQUT$ is de gevraagde doorsnede.
 Hieronder staat een tekening van de gevraagde doorsnede.



- d** Stap 1: Teken vlak $ACGE$. EG snijdt TH in punt V , dus V ligt in beide vlakken.
Stap 2: Q ligt op CG , dus ook in beide vlakken. Teken VQ , de snijlijn van $ACGE$ en HQP .
Stap 3: het snijpunt van VQ en AG is het gezochte punt S .

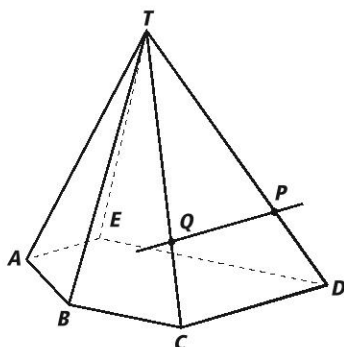


- 39** Stap 1: Verleng AB en DC , deze snijden elkaar in punt E .
Stap 2: Teken TE .
Stap 3: Teken punt F zo dat $TF = \frac{1}{4} TE$
Stap 4: F ligt op TE , dus F ligt in vlak TAB , Teken AF , deze snijdt TB in G .
Stap 5: F ligt op TE , dus F ligt in vlak TDC . Teken DF , deze snijdt TC in H .
Stap 6: $AGHD$ is de gevraagde doorsnede.



Pagina 83

- 40a** De snijlijnen van de vlakken zijn evenwijdig (situatie 4 van de theorie).
b Uit het antwoord bij a volgt dat de snijlijn van V met vlak TCD evenwijdig is aan lijn CD . Teken daarom vanuit P een lijn evenwijdig aan CD . Je krijgt dan onderstaande tekening, waarbij punt Q het snijpunt is tussen de lijn uit P en CT .



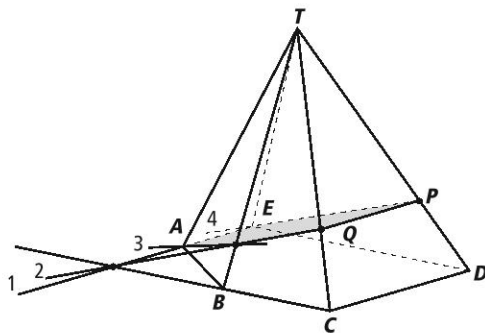
- c Lijn AE
- d De ribben AE en BC
- e Stap 1: Verleng de ribben AE en BC .

Stap 2: Alle punten op de lijn BC liggen in vlak BCT , alle punten op de lijn AE liggen in vlak V . Je hebt dus nu twee punten die zowel in vlak BCT als in vlak V liggen: (i) het snijpunt van BC met AE en (ii) punt Q . De verbindingslijn tussen deze twee punten is de snijlijn van BCT en V .

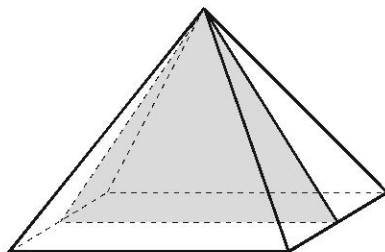
Stap 3: Nu heb je twee punten die zowel in vlak ABT als in vlak V liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 2 getekende snijlijn met ribbe BT en (ii) punt A . De verbindingslijn tussen deze twee punten is de snijlijn van ABT en V .

Stap 4: Teken de lijn EP .

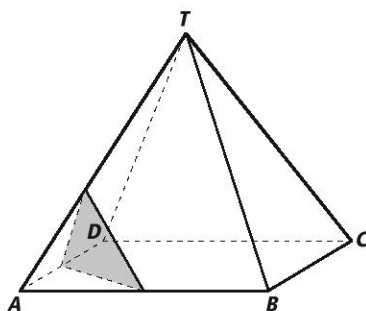
Hieronder staat een tekening van de gevraagde doorsnede.



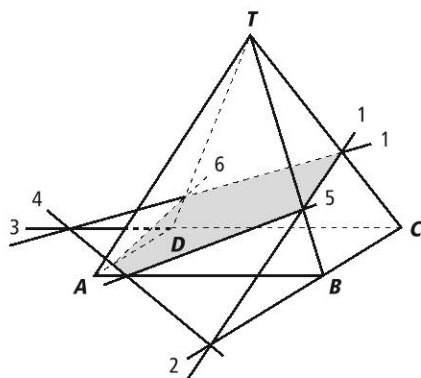
- 41a Als V een vierkant is, dan is V evenwijdig aan het grondvlak.
- b Hieronder is een mogelijke situatie getekend.



- c Ja, als doorsnede kun je een gelijkzijdig driehoek krijgen. Zie onderstaand voorbeeld.

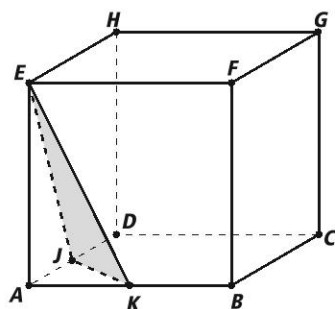


- d Een vijfhoekige doorsnede is mogelijk, zie bijvoorbeeld onderstaande tekening. Een zeshoekige doorsnede is niet mogelijk. Dit komt omdat je maximaal vier hoekpunten op de ribben kunt hebben of twee hoekpunten in het grondvlak en drie op de ribben.

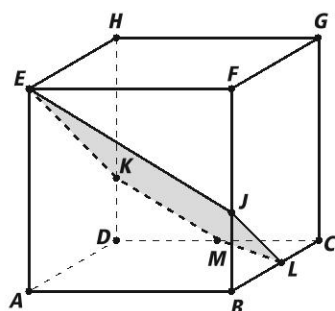


e De doorsnede is:

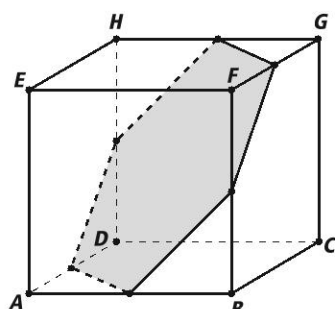
- > een vierkant als vlak V evenwijdig is met een van de zijvlakken van de kubus.
- > een gelijkbenige driehoek als vlak V door een hoekpunt van de kubus gaat en $EJ = EK$. Zie tekening.



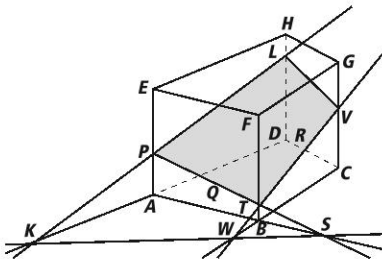
- > een gelijkzijdige driehoek als vlak V door drie hoekpunten van de kubus gaat, bijvoorbeeld EBD .
- > een vijfhoekige doorsnede als het vlak één hoekpunt bevat en verder vier punten op de ribben, zie tekening



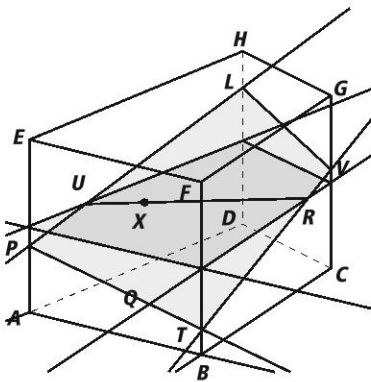
- > een zeshoekige doorsnede als vlak V twee snijpunten op de ribben van het bovenvlak heeft, twee opstaande ribben en twee in het ondervlak.



- 42a** Stap 1: PQ en AB snijden elkaar in S
 Stap 2: PQ snijdt BF in T
 Stap 3: Teken TR , deze snijdt BC in W en GC in V
 Stap 4: SW ligt in het grondvlak, dus snijdt AD in K
 Stap 5: Teken KP , deze snijdt DH in L
 Stap 6: $PTVL$ is de gevraagde doorsnede.



- b** Stap 1: Teken door R een vlak evenwijdig aan het grondvlak.
 Stap 2: Dit vlak snijdt PL in U
 Punt X ligt op lijnstuk UR

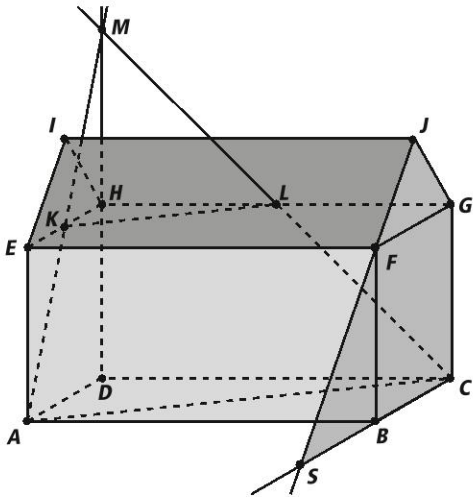


Test jezelf

Pagina 86

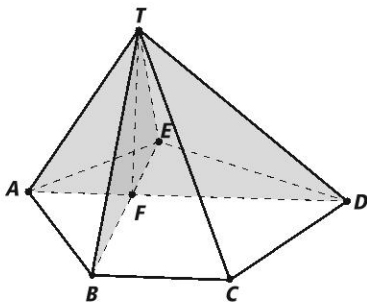
- T-1a** Wanneer je een lijn door A tekent evenwijdig aan lijn CN , vind je dat behalve A , C en N ook de punten S en W in vlak ACN liggen.
- b** Omdat de lijnen SW en DP evenwijdig zijn, is er een vlak mogelijk door deze lijnen.
- c** D , R en P liggen in vlak $DPRH$. A ligt niet in dit vlak, dus er bestaat er geen vlak waar deze lijnen beide in liggen.
- d** Omdat de lijnen BD en TW evenwijdig zijn, is er een vlak mogelijk door deze lijnen. In dat vlak liggen ook de lijnen BT en DW .
- e** S en W liggen in vlak ACN (zie opdracht a), dus ligt de lijn SN in vlak ACW .

- T-2a** De lijnen AK en CL snijden elkaar als A , K , C en L in één vlak liggen. Wanneer AC en KL evenwijdige lijnen zijn, liggen A , K , C en L in één vlak. L moet dus op lijnstuk GH liggen, zodanig dat KL evenwijdig is met AC . Dit gebeurt indien L het midden is van lijnstuk GH .
- b** Omdat de lijnen FJ en BC allebei in het rechterzijvlak liggen en niet evenwijdig zijn, hebben deze twee lijnen een snijpunt.

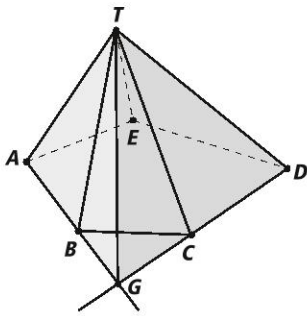


- c** *FI* en *AB*: Het punt *I* ligt niet in het voorvlak *ABFE* dat wordt bepaald door de punten *A*, *B* en *F*.
De punten *F*, *I*, *A* en *B* liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen *FI* en *AB*.
De lijnen *FI* en *AB* kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen. *BK* en *CH*: *BC* en *HE* zijn evenwijdige lijnen, dus liggen *B*, *C*, *H* en *E* in één vlak *BCHE*.
Omdat de lijnen *BK* en *CH* allebei in het vlak *BCHE* liggen en niet evenwijdig zijn, hebben deze twee lijnen een snijpunt.
HI en *GJ*: De lijnen *HI* en *GJ* zijn evenwijdig en leggen het vlak *GHIJ* vast.
GK en *BH*: Het punt *B* ligt niet in het vlak *FGHE* dat wordt bepaald door de punten *G*, *H* en *K*.
De punten *G*, *K*, *H* en *B* liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen *GK* en *BH*. De lijnen *GK* en *BH* kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.

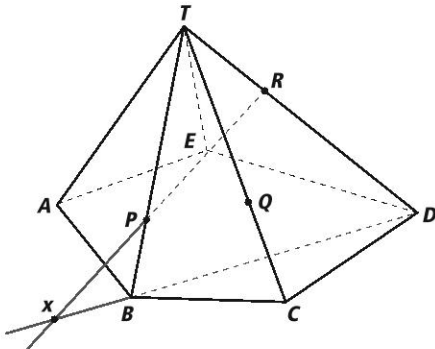
- T3a** Noem het snijpunt van AD en BE punt F , dan is TF de gevraagde snijlijn.



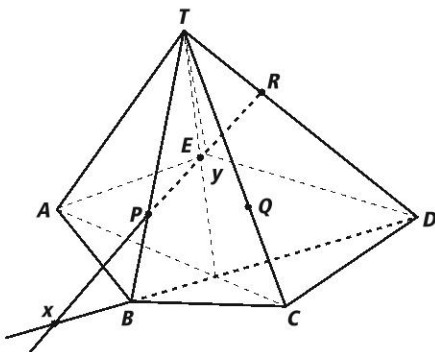
- b** Verleng AB en DC . Noem het snijpunt G , dan is TG de gevraagde snijlijn.



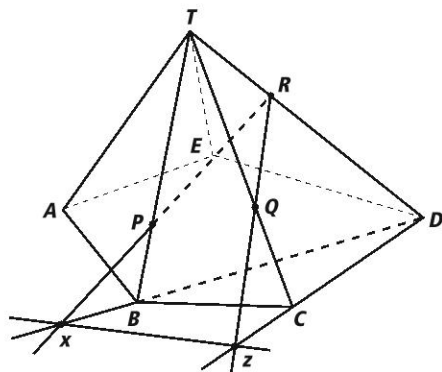
- T-4a** Lijn PR ligt in vlak TPR ofwel TBD , gebruik dit als hulpvlak. Teken de snijlijn van TPR met het grondvlak, dit is lijn BD . Alle punten op lijn BD liggen dus zowel in TPR als in het grondvlak. Het snijpunt X van PR met BD is daarom het gezochte snijpunt tussen PR en het grondvlak, zie onderstaande tekening.



- b** Gebruik weer vlak TPR als hulpvlak. Om de snijlijn tussen vlak TPR en vlak TAC te bepalen zijn er twee punten nodig die in beide vlakken liggen. Eén punt is al bekend: punt T . Het andere punt is het snijpunt van BD en AC . Teken nu de snijlijn van TPR en TAC . Het snijpunt Y van deze snijlijn met PR is het snijpunt van vlak TAC met PR . Zie onderstaande tekening.



- c** Er zijn twee snijpunten van vlak PQR en het grondvlak nodig om de snijlijn te kunnen bepalen. Lijn PR ligt in vlak PQR , dus het eerste punt is bepaald bij a. Als tweede punt gebruik je het snijpunt Z van de verlengde van RQ en de verlengde van DC . De verbindingslijn tussen X en Z is de gezochte snijlijn, zie onderstaande tekening.



- d De punten P en Q moeten op dezelfde hoogte liggen.

Pagina 87

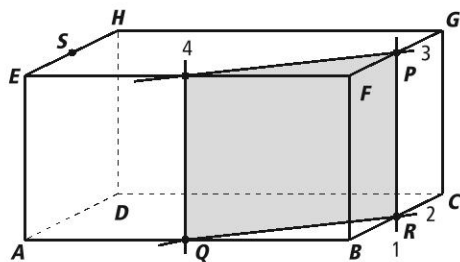
T-5a De doorsnede kun je op de volgende wijze tekenen:

Stap 1 en 2: Teken PR en QR .

Stap 3: Het bovenvlak is evenwijdig aan het ondervlak, dus ook de snijlijn in het bovenvlak is evenwijdig aan de snijlijn in het ondervlak. Teken door P een lijn evenwijdig aan QR .

Stap 4: Teken de lijn van Q naar het snijpunt van lijn 3 met ribbe EF .

Je krijgt dan de volgende doorsnede:



b De doorsnede kun je op de volgende wijze tekenen:

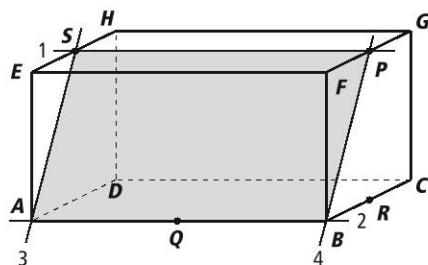
Stap 1: Teken SP .

Stap 2: Het bovenvlak is evenwijdig aan het ondervlak, dus ook de snijlijn in het bovenvlak is evenwijdig aan de snijlijn in het ondervlak. De snijlijn in het ondervlak is AB , omdat punt Q op ribbe AB ligt.

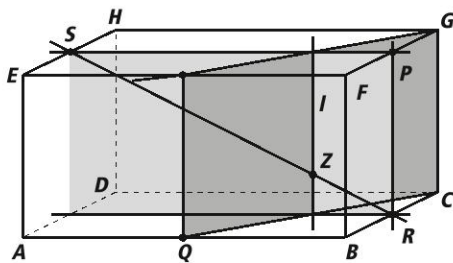
Stap 3: Teken de lijn AS .

Stap 4: Teken de lijn BP .

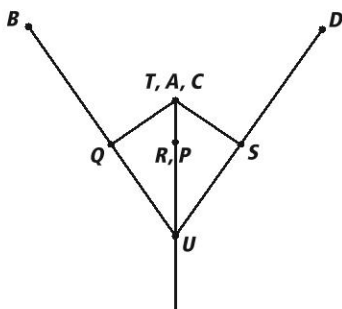
Je krijgt dan de volgende doorsnede:



- c** Lijn SR ligt in vlak SPR , dit vlak gebruik je als hulpvlak. Eerst zoek je de snijlijn l van SPR en QCG . Dan is het snijpunt Z van l en SR het gezochte snijpunt.
- Stap 1: Omdat het bovenvlak evenwijdig ligt aan het ondervlak, is de snijlijn van SPR met het ondervlak evenwijdig aan de snijlijn van SPR met het bovenvlak. De snijlijn van SPR door het ondervlak teken je door vanuit R een lijn te tekenen evenwijdig aan SP . Het snijpunt van deze lijn vanuit R met de lijn QC ligt in zowel vlak SPR als in vlak QCG .
- Stap 2: Het ondervlak is evenwijdig aan het bovenvlak, dus kun je de doorsnede van QCG met het bovenvlak vinden door vanuit G een lijn te tekenen die evenwijdig is aan QC . Het snijpunt van deze lijn vanuit G met de lijn SP ligt in zowel vlak SPR als in vlak QCG .
- Stap 3: Je hebt nu twee punten die zowel in SPR als in QCG liggen. De verbindingslijn tussen beide is snijlijn l .
- Stap 4: Het snijpunt Z van lijn l en lijn SR is het snijpunt van vlak QCG en lijn SR .
- Zie onderstaande tekening.



- T-6a** In de ruimte zijn er drie mogelijkheden voor de ligging van twee lijnen: (i) ze snijden elkaar; (ii) ze zijn evenwijdig of (iii) ze kunnen elkaar kruisen. De lijnen AC en PQ lopen duidelijk niet evenwijdig en ze snijden elkaar ook niet. Dus ze kruisen elkaar.
- b** De lijnen ST , RT , CU en DU kruisen PQ .
- c** Intekenen van de punten geeft de onderstaande afbeelding:



- T-7** Met de volgende stappen kun je de doorsnede van de piramide met vlak MPQ tekenen.
- Stap 1: Verleng de ribbe AB .
- Stap 2: Teken de lijn MP , de snijlijn met het voorvlak en teken deze door tot je de lijn AB snijdt. Noem het snijpunt X . Punt X ligt zowel in vlak MPQ als in het grondvlak.
- Stap 3: Verleng de ribbe CB .

Stap 4: Teken de lijn PQ , de snijlijn met het rechtervlak en teken deze door tot je de lijn BC snijdt.

Noem het snijpunt Y . Punt Y ligt zowel in vlak MPQ als in het grondvlak.

Je hebt nu twee punten die zowel in vlak MPQ als in het grondvlak liggen: de punten X en Y . De verbindingslijn van beide punten vormt dus de snijlijn tussen MPQ en het grondvlak.

Deze verbindingslijn kun je gebruiken om de doorsnede met het achtervlak en het rechtervlak te tekenen.

Stap 5: Verleng de ribbe DC .

Stap 6: Teken de lijn XY en trek deze door tot je de lijn CD snijdt. Noem het snijpunt Z .

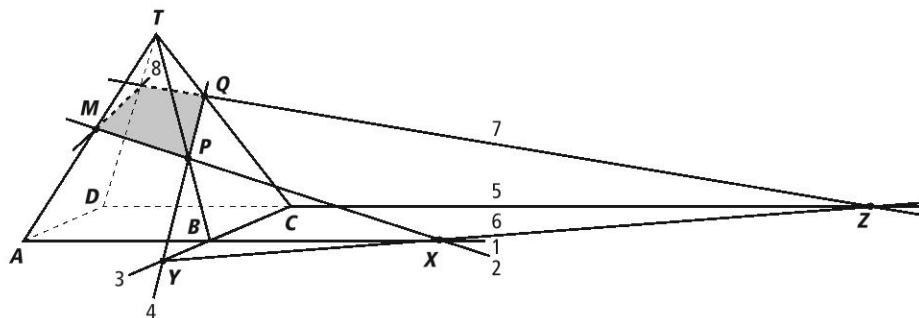
Punt Z ligt op XY en ligt dus in MPQ . Maar punt Z ligt ook op lijn CD en daarmee in vlak CDT .

Je hebt nu twee punten die zowel in vlak MPQ als in vlak CDT liggen: punt Z en punt Q . De verbindingslijn van beide punten vormt dus de snijlijn tussen MPQ en CDT en geeft dus de snijlijn van de doorsnede met het achtervlak.

Stap 7: Dus teken de lijn ZQ (de snijlijn met het achtervlak).

Stap 8: Je hebt nu twee punten die zowel in vlak MPQ als ADT liggen:

(i) het snijpunt van ZQ met DT en (ii) punt M . De verbindingslijn van beide is de snijlijn tussen MPQ en ADT en geeft dus de snijlijn van de doorsnede met het linkervlak.



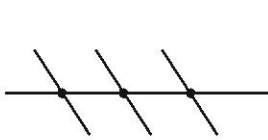
T-8a Vier vlakken kunnen één snijlijn hebben. Denk aan vier bladzijden uit een boek. Vier vlakken met twee snijlijnen is niet mogelijk.

Vier vlakken met drie snijlijnen weer wel.

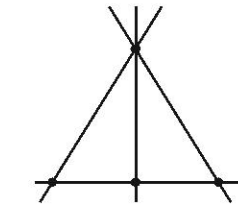
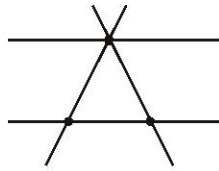
Ook vier vlakken met vier snijlijnen en vier vlakken met vijf snijlijnen zijn mogelijk.

Elk vlak kan een ander vlak maximaal één keer snijden. Het maximaal aantal snijlijnen wordt bereikt als elk vlak elk ander vlak snijdt, zoals bij een driesijdige piramide.

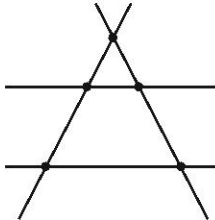
Vlak U snijdt dan drie andere vlakken, vlak V snijdt ook de andere twee en vlak W en X snijden elkaar onderling. Er zijn dan dus $3 + 2 + 1 = 6$ snijlijnen. Zie hieronder enkele bovenaanzichten van snijdende vlakken, de vlakken staan loodrecht op het papier getekend, waardoor je van elk vlak maar een lijn ziet. De snijlijnen van de vlakken staan ook loodrecht op het papier en van de snijlijnen zie je dan maar een punt.



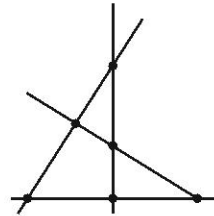
Vier vlakken met 3 snijlijnen



Vier vlakken met 4 snijlijnen



Vier vlakken met 5 snijlijnen



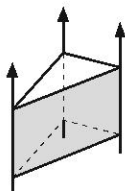
Vier vlakken met 6 snijlijnen

- b** Als twee lijnen in één vlak liggen, dan snijden ze elkaar of ze zijn evenwijdig. Het omgekeerde geldt ook: als twee lijnen elkaar snijden of evenwijdig zijn, dan liggen ze in één vlak.

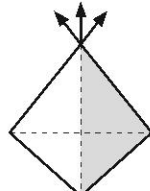
Als drie lijnen in één vlak liggen, dan snijden ze elkaar in één of twee of drie punten of ze zijn evenwijdig.

Als drie lijnen niet in één vlak liggen, dan kunnen de drie lijnen elkaar snijden in één of twee punten. Ook is het mogelijk dat ze geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.

Als er twee lijnen zijn die niet in één vlak liggen, dan kruisen deze twee elkaar. Het omgekeerde geldt nu echter niet: als de drie lijnen evenwijdig zijn of elkaar snijden hoeven ze nog niet in één vlak te liggen. Zie de voorbeelden hieronder.



Drie evenwijdige snijlijnen, maar liggen niet in één vlak.



Drie snijdende snijlijnen, maar liggen niet in één vlak.

H6 Rijen en webgrafieken

6-1 Somrijen en verschilrijen

Pagina 108

- 1a** $u(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$
 $u(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 1\frac{1}{2}$
 $u(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$
 $u(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 = 2\frac{1}{2}$
 $u(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 = 3$
- b** Je vindt de volgende term van de rij steeds door een constant getal bij de laatste term op te tellen, namelijk $\frac{1}{2}$.
 De rij is dan rekenkundig.
- c** $s(4) = 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + 3 = 10$
- d** $s(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + 1\frac{1}{4} \cdot 0 + 1 = 1 = u(0)$, dus klopt.
 $s(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^2 + 1\frac{1}{4} \cdot 1 + 1 = 2\frac{1}{2} = u(0) + u(1)$, dus klopt.
 $s(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + 1\frac{1}{4} \cdot 2 + 1 = 4\frac{1}{2} = u(0) + u(1) + u(2)$, dus klopt.
 $s(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^2 + 1\frac{1}{4} \cdot 3 + 1 = 7 = u(0) + u(1) + u(2) + u(3)$, dus klopt.
 $s(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^2 + 1\frac{1}{4} \cdot 4 + 1 = 10 = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4)$, dus klopt.
- e** $s(25) = \frac{1}{4} \cdot 25^2 + 1\frac{1}{4} \cdot 25 + 1 = 188\frac{1}{2}$
- 2a** $a(0) = 0, a(1) = 0, a(2) = 4, a(3) = 18, a(4) = 48$ en $a(5) = 100$
- b** $v(0) = 0 - 0 = 0; v(1) = 4 - 0 = 4; v(2) = 18 - 4 = 14; v(3) = 48 - 18 = 30;$
 $v(4) = 100 - 48 = 52$
- c** $a(n+1) = (n+1)^3 - (n+1)^2 = (n+1)^2 \cdot \{(n+1) - 1\} = (n+1)^2 \cdot n =$
 $n^3 + 2n^2 + n$
- d** $v(n) = a(n+1) - a(n) = (n^3 + 2n^2 + n) - (n^3 - n^2) = 3n^2 + n$
- 3a** TI via $\text{sum}(\text{seq}(\sqrt{x}, x, 0, 17, 1))$ of Casio via Menu Run: $\sum_{n=0}^{17} \sqrt{n} \approx 48,59$
- b** TI via $\text{sum}(\text{seq}(1/(x+1)^2, x, 0, 10, 1))$ of Casio via Menu Run:
 $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{(n+1)^2} \approx 1,56$
- c** TI via $\text{sum}(\text{seq}(2^x, x, 0, 15, 1))$ of Casio via Menu Run: $\sum_{n=0}^{15} 2^n = 65\,535$
- 4a** $v(n) = p(n+1) - p(n) = 12 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 12 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^n$
- b** $v(n) = 12 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 12 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^n = 12 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(1\frac{1}{2} - 1\right) = 6 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^n$
- c** TI via $\text{sum}(\text{seq}(12 \cdot 1,5^x, x, 0, 10, 1))$ of Casio via Menu Run:
 $\sum_{n=0}^{10} 12 \cdot 1,5^n \approx 2051,94$

Pagina 109

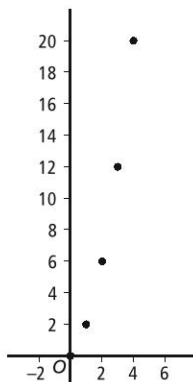
- 5a** Bij de rij hoort een lineaire formule met startgetal 5 en hellingsgetal 3.
De directe formule is dan $u(n) = 3n + 5$.
- b** $u(n+1) - u(n) = 3(n+1) + 5 - (3n+5) = 3$, dus constant
Dat is logisch, omdat er een constante toename van 3 is.
- c** $u(1)$ is 3 meer dan $u(0)$ en $u(99)$ is 3 minder dan $u(100)$, dus
 $u(0) + u(100) = u(1) + u(99)$.
In het algemeen geldt dat term $u(a)$ in de rij $3 \cdot a$ hoger is
dan $u(0)$ en de term $u(100-a)$ is $3 \cdot a$ minder dan $u(100)$, dus
 $u(a) + u(100-a) = u(0) + u(100)$.
- d** Uit opdracht c volgt dat er steeds tweetallen zijn waarvan de som gelijk is aan
 $u(0) + u(100)$.
Er zijn 50 van deze tweetallen te vinden (het laatste tweetal is $u(49) + u(51)$).
 $u(50)$ is precies het gemiddelde van $u(0)$ en $u(100)$.
De som van de eerste 101 getallen is dus 50,5 keer de uitkomst van
 $u(0) + u(100)$.
Dus geldt $s(100) = \frac{1}{2} \cdot 101 \cdot (u(0) + u(100))$.
- e** $u(0) = 5$ en $u(100) = 3 \cdot 100 + 5 = 305$
 $s(100) = \frac{1}{2} \cdot 101 \cdot (5 + 305) = 15\,655$
- 6a** $m(0) = 2, m(1) = 6, m(2) = 18, m(3) = 54, m(4) = 162, m(5) = 486$
Dan is $v(0) = 4, v(1) = 12, v(2) = 36, v(3) = 108, v(4) = 324$
- b** Een directe formule is $v(n) = 4 \cdot 3^n$.
- c** Maak gebruik van de somformule voor meetkundige rijen.
 $s(25) = 2 \cdot \frac{3^{26} - 1}{3 - 1} \approx 2,54 \cdot 10^{12}$
- 7** Rij $u(n)$ is een rekenkundige rij en rij $v(n)$ is een meetkundige rij.
- a** $\sum_{k=0}^{11} \left(5 + \frac{2}{3}k\right) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \left(5 + 12 \cdot \frac{1}{3}\right) = 104$
- b** $\sum_{k=0}^{11} \left(64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right) = 64 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = 42,65625$
- c** $u(18) = 5 + \frac{2}{3} \cdot 18 = 17; u(30) = 5 + \frac{2}{3} \cdot 30 = 25$, dus
 $\sum_{k=18}^{30} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot (17 + 25) = 273$
- d** $\sum_{k=0}^7 (u(k) + v(k)) = \sum_{k=0}^7 u(k) + \sum_{k=0}^7 v(k) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \left(5 + 9 \cdot \frac{2}{3}\right) + 64 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{-\frac{1}{2} - 1} =$
 $58\frac{2}{3} + 42\frac{1}{2} = 101\frac{1}{6}$

- 8a** $v(n) = u(n+1) - u(n) = 3(2(n+1) + 1) - 5 - (3(2n+1) - 5) = 6n + 6 + 3 - 5 - (6n + 3 - 5) = 6$
- b** $v(n) = u(n+1) - u(n) = 5 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot 3^n = 5 \cdot 3^n \cdot (3 - 1) = 10 \cdot 3^n$
- c** $v(n) = u(n+1) - u(n) = 3 \cdot (n+1)^2 - 3n^2 = 3n^2 + 6n + 3 - 3n^2 = 6n + 3$
- d** $v(n) = u(n+1) - u(n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)(n+2)} - \frac{n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}$
- e** $v(n) = u(n+1) - u(n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left\{1 - \frac{1}{2}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- 9** $v(n) = u(n+1) - u(n) = b \cdot r^{n+1} - b \cdot r^n = b \cdot r^n \cdot \{r - 1\} = b(r-1) \cdot r^n$
 Zowel b als r zijn constanten, dus is de verschilrij te schrijven als $v(n) = c \cdot r^n$.
 De reden r van de verschilrij is dus gelijk aan de reden van de oorspronkelijke rij

6-2 Stijgen en dalen

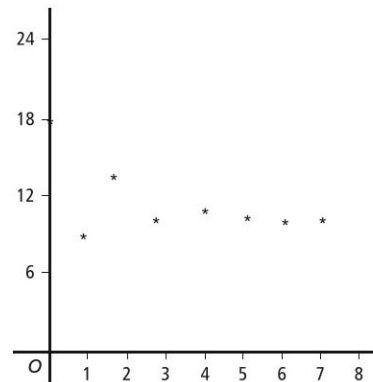
Pagina 110

10a



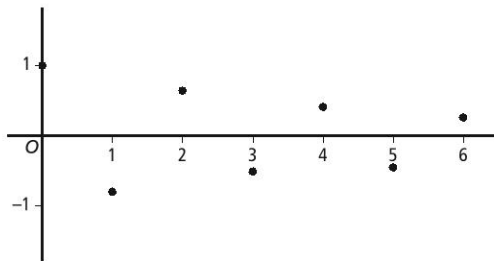
Stijgend en niet begrensd

b



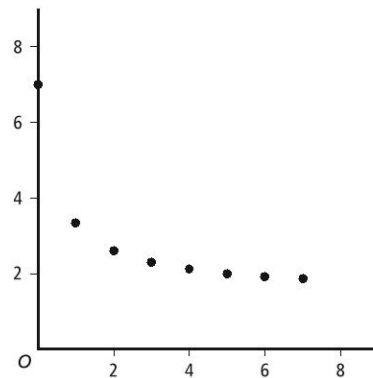
Nadert naar 12 en afwisselend boven en onder 12.

c



Begrensd en afwisselend
positieve en negatieve termen

d



Uitsluitend positieve termen,
begrensd en dalend

- 11** a: Monotoon stijgend
b: Begrensd
c: Begrensd en alternerend
d: Monotoon dalend en begrensd

- 12a** $u(n+1) - u(n) = 4(n+1)^2 - 2(n+1) - 1 - (4n^2 - 2n - 1) =$
 $4(n+1)^2 - 2(n+1) - 4n^2 + 2n = 4n^2 + 8n + 4 - 2n - 2 - 4n^2 + 2n =$
 $8n + 2 > 0$ voor elke $n \geq 0$
 Dus monotoon stijgend
b Nee want vanaf $n = 3$ zijn alle termen positief.
c Ja, nadert naar 1.

Pagina 111

- 13a** $\Delta u(n) = u(n+1) - u(n) = 3^{n+1} - 2^{n+1} - (3^n - 2^n) = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n - 3^n + 2^n =$
 $2 \cdot 3^n - 1 \cdot 2^n$ dus $a = 2$ en $b = 1$
b $3^n > 2^n \Rightarrow 2 \cdot 3^n > 1 \cdot 2^n \Rightarrow \Delta u(n) > 0$, dus is de rij monotoon stijgend.

14a
$$\frac{u(n+1)}{u(n)} = \frac{\frac{(n+1)+1}{2(n+1)+3}}{\frac{n+1}{2n+3}} = \frac{n+2}{2n+5} \times \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n^2+7n+6}{2n^2+7n+5} > 1$$

b $\frac{u(n+1)}{u(n)} > 1 \Rightarrow u(n+1) > u(n)$

De rij is dus monotoon stijgend.

15a $u(0) = 0; u(1) = \frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2}; u(2) = \frac{2^2}{2^2} = 1; u(3) = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8};$
 $u(4) = \frac{4^2}{2^4} = \frac{16}{16} = 1; u(5) = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32}; u(6) = \frac{6^2}{2^6} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

- b** Nee, want $u(3) > u(4)$ en $u(5) < u(6)$

c
$$\frac{u(n+1)}{u(n)} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{2 \cdot n^2} = \frac{n^2}{2 \cdot n^2} + \frac{2n}{2 \cdot n^2} + \frac{1}{2 \cdot n^2} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

- d** Voor $n \geq 3$ is $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{5}{6} + \frac{1}{18} < 1$, dus is de rij voor

$n \geq 3$ monotoon dalend.

- 16a** $u(0) = 25$ Voor $n > 0$ wordt de noemer van de breuk groter, de breuk dus kleiner, dus $u(n+1) < u(n)$.
 Omdat $u(n) > 20$ zijn er grenzen aan te wijzen waartussen alle waarden van $u(n)$ zich bevinden.
b $(-1)^n$ is 1 als n even is en is -1 als n oneven is.
 Dus $-1 \leq \frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$ dus is de rij v begrensd.
c $(-1)^n$ is 1 als n even is en is -1 als n oneven is. Dus zijn de termen van de rij v afwisselend positief en negatief.

d Herschrijven geeft $w(n) = 1 + \frac{n^2}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2+n+1}{n+1}$.

Dan is $w(n) = \frac{n^2+n+1}{n+1} > \frac{n^2+n}{n+1} = \frac{n(n+1)}{n+1} = n$ en

$$w(n) = \frac{n^2+n+1}{n+1} \leq \frac{n^2+2n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+1} = n+1.$$

Uit de gevonden ongelijkheden volgt $n < w(n) \leq n+1$

e Uit opdracht d volgt $w(n+1) > n+1 \geq w(n)$, dus is de rij monotoon stijgend.

17a De rij $s = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$ is alternerend.

Echter de som van de alternerende rij

8, -4, 2, -1, 8, -4, 2, -1, 8, -4, 2, -1, en de alternerende rij

-2, 5, -1, 4, -2, 5, -1, 4, -2, 5, -1, 4, ... is de rij

6, 1, 1, 3, 6, 1, 1, 3, 6, 1, 1, 3, ...

En deze laatste rij is niet alternerend. Conclusie: de rij s kan alternerend zijn, maar dat hoeft niet.

b Stel de termen van de rij u zijn +, -, +, -, en de rij v zijn +, -, +, -, dan geldt voor de rij p dat de termen allemaal positief zijn.

Ook als voor rij u geldt -, +, -, +, -, en voor rij v geldt

-, +, -, +, -, dan zijn de termen van p allemaal positief.

Als voor de termen van u geldt +, -, +, -, en voor de termen van v geldt

-, +, -, +, -, (of omgekeerd) dan zijn alle termen van de rij p negatief.

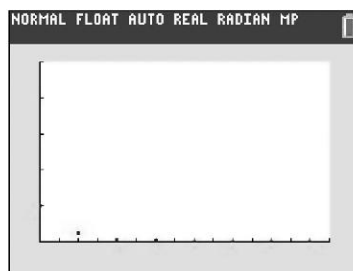
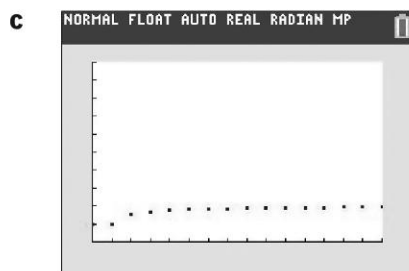
Conclusie: de rij p is niet alternerend.

6-3 Convergentie

Pagina 112

18a ..., $1\frac{5}{6}$, $1\frac{6}{7}$, $1\frac{7}{8}$, ... en ..., $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, ...

b $a(n) = 1 + \frac{n}{n+1}$ en $b(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$



De termen van rij a naderen het getal 2 en de termen van rij b naderen het getal 0.

d $a(n) = 1 + \frac{n}{n+1} < 1 + \frac{n+1}{n+1} = 1 + 1 = 2$, dus $a(n) < 2$ voor elke $n \geq 0$

e $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, dus $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \pm 0 = 0$ als $n \rightarrow \infty$

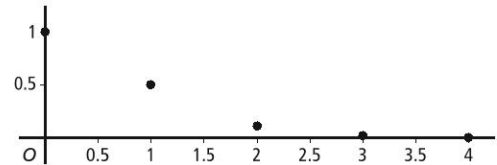
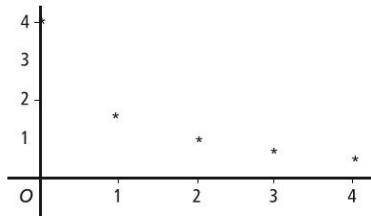
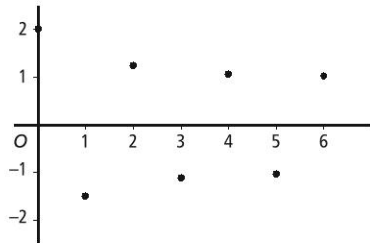
19 $u(n) = \frac{1+2n}{4+0,5n} = \frac{\frac{1}{n}+2}{\frac{4}{n}+0,5} \rightarrow \frac{0+2}{0+0,5} = 4$

Als $n \rightarrow \infty$ dan wordt de teller van $w(n) = \frac{1+2n}{4+0,5n}$ onbeperkt groot en

de noemer nadert $4+0=4$.

Conclusie: bij de rij u naderen de termen tot de waarde 4 en bij de rij w worden de termen onbeperkt groot.

20a



$$u(n) = (-1)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v(n) = \frac{24-3n}{6+6n}$$

$$w(n) = (n+1)^{-n}$$

b De rij u is begrensd, want $-1\frac{1}{2} \leq u(n) \leq 2$.

De rij v is begrensd, want $-\frac{1}{2} < v(n) \leq 4$.

Uit $w(n) = (n+1)^{-n} = \frac{1}{(n+1)^n}$ volgt dat $0 < w(n) \leq 1$, dus is ook de rij w begrensd.

c De rij u is niet monotoon. De rijen v en w zijn wel monotoon.

d De rij u is divergent, want $u(n) = (-1)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \pm 1 + \pm 0 = \pm 1$

De rij v is convergent, want $v(n) = \frac{24-3n}{6n+6} \rightarrow -\frac{1}{2}$ als $n \rightarrow \infty$.

De rij w is convergent, want $w(n) = \frac{1}{(n+1)^n} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Pagina 113

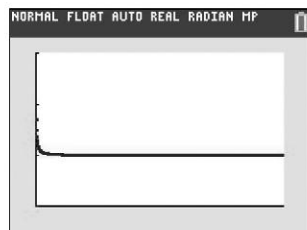
21a Onjuist, want de rij $u(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ is convergent maar niet monotoon.

b Juist

c C: bijvoorbeeld de rij $v(n) = 2n+1$ is monotoon stijgend maar niet convergent.

D: bijvoorbeeld de rij $w(n) = (-1)^n$ is begrensd maar niet convergent.

22a



De rij heeft limiet 1.

- b** $u(n) = \sqrt[n]{5} = 5^{\frac{1}{n}}$ en als $n \rightarrow \infty$, dan $\frac{1}{n} \rightarrow 0$
- c** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{n}} = 5^0 = 1$
- d** Voor waarden $a > 0$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Als $a = 0$ dan is de limiet 0 en als $a < 0$ dan bestaat de rij alleen voor oneven waarden van n .

23a In figuur 1 worden twee vierkantjes toegevoegd, dus $u(1) = 2^1 = 2$ klopt. Aan elk toegevoegd vierkant worden bij de volgende figuur twee nieuwe vierkanten toegevoegd.

Elk nieuw figuur heeft dan twee keer zoveel toegevoegde vierkantjes, dus $u(n) = 2^n$.

De oppervlakte van figuur 0 is $12 \times 12 = 144$.

De zijde van elk volgend toegevoegd vierkant is de helft van het laatste toegevoegde vierkant.

De oppervlakte van elk volgend toegevoegd vierkant is dan een vierde van het laatste toegevoegde vierkant.

Hieruit volgt $a(n) = 144 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- b** $b(n) = 2^n \cdot 144 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2^n \cdot 144 \cdot 2^{-2n} = 144 \cdot 2^{-n}$
- c** $A(n) = 144 + 144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \dots + \dots + 144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 144 \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \dots + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

De rij tussen haakjes is een meetkundige rij met beginterm 1 en rede $\frac{1}{2}$.

Toepassen van de somformule bij een meetkundige rij leidt tot

$$A(n) = 144 \cdot 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 144 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 288 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

- d** $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ nadert voor grote waarden van n naar 0, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = 288$.
- e** De open ruimten in de rechthoek van 12×24 zullen bij grote n opgevuld raken, dus wordt de oppervlakte $12 \times 24 = 288$.

6-4 Limieten berekenen

Pagina 114

24a $n^3 + 3 \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$ dus $\frac{2}{n^3 + 3} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$

- b** Je deelt alle termen door n^3 . Dat mag, omdat $n \neq 0$.

$$v(n) = \frac{3n^3 + 11}{n^3 + 3} = \frac{\frac{3n^3}{n^3} + \frac{11}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{3}{n^3}} = \frac{3 + \frac{11}{n^3}}{1 + \frac{3}{n^3}}$$

- c** Als $n \rightarrow \infty$, dan $\frac{11}{n^3} \rightarrow 0$ en $\frac{3}{n^3} \rightarrow 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3$

$$\text{d} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{2n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 0}{2 - 0}$$

Er bestaat geen vaste waarde waar de limiet naar nadert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 12n^3}{6n^4 + 2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^4}{n^4} + \frac{12n^3}{n^4}}{\frac{6n^4}{n^4} + \frac{2n^2}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{12}{n}}{6 + \frac{2}{n^2}} = \frac{3 + 0}{6 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{25a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 7}{n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{7}{n}}{1 + \frac{5}{n}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$$

$$\text{b} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 - 4n}{8n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{12}{n} - \frac{4n}{n}}{\frac{8n}{n} + \frac{5}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{12}{n} - 4}{8 + \frac{5}{n}} = \frac{0 - 4}{8 + 0} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7n}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^4} + \frac{7n}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{7}{n^3} \right) = 0$$

$$\text{d} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 1)^2}{n(n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 4n + 1}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{4 - 0 + 0}{1 - 0} = 4$$

$$\text{f} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n - 7)}{(n + 5)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 7n}{n^2 + 10n + 25} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{7n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{10n}{n^2} + \frac{25}{n^2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{7}{n}}{1 + \frac{10}{n} + \frac{25}{n^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0 + 0} = 2$$

$$\text{26a} \quad \text{Als } n \rightarrow \infty, \text{ dan } n \cdot \sqrt{n} \rightarrow \infty, \text{ dus } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n \cdot \sqrt{n}} = 0$$

$$\text{b} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7\sqrt{n} - 8}{n \cdot \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} - \frac{8}{n\sqrt{n}}}{\frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{n} - \frac{8}{\sqrt{n}}}{1} = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

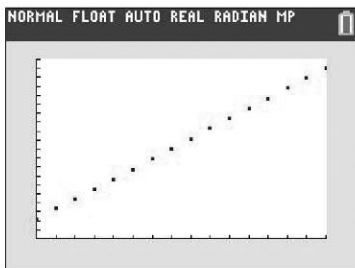
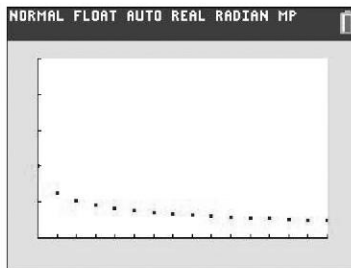
$$\text{c} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 5}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4 \cdot 3^n}{3^n} + \frac{5}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n} + \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{3^n}}{1 + \frac{1}{3^n}} = \frac{4 + 0}{1 + 0} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + 1)(2^n - 5)}{4^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} - 4 \cdot 2^n - 5}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{2n}}{2^{2n}} - \frac{4 \cdot 2^n}{2^{2n}} - \frac{5}{2^{2n}}}{\frac{2^{2n}}{2^{2n}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{2^n} - \frac{5}{2^n}}{1} = \frac{1 - 0 - 0}{1} = 1 \end{aligned}$$

Pagina 115

$$\text{27a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{9n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{9 + \frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{1}{9 + 0}} = \frac{1}{3}$$

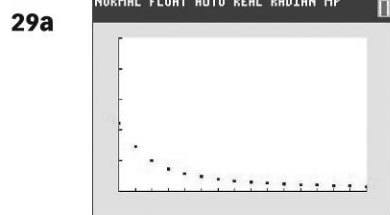
$$\begin{aligned} \text{b} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{\sqrt{4 \cdot 3^{2n} + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{3^{2n}}{3^{2n}}}{\frac{4 \cdot 3^{2n}}{3^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{4 + \frac{1}{3^{2n}}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4 + 0}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

28a Plot van $u(n) = \sqrt{n+4} + \sqrt{n}$:Plot van $w(n) = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$ Rij $w(n)$ lijkt convergent.

$$\text{b} \quad u(n) \cdot w(n) = (\sqrt{n+4} + \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+4} - \sqrt{n}) = (\sqrt{n+4})^2 - (\sqrt{n})^2 = n + 4 - n = 4$$

$$\text{c} \quad \text{Als } n \rightarrow \infty, \text{ dan geldt } \sqrt{n+4} \rightarrow \infty \text{ en } \sqrt{n} \rightarrow \infty, \text{ dus } u(n) \rightarrow \infty$$

$$w(n) = \frac{4}{u(n)}, \text{ dus als } u(n) \rightarrow \infty \text{ dan } w(n) \rightarrow 0$$



Vermoeden is, dat de limiet nadert naar 0.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad w(n) &= (\sqrt{n^2 + 5} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 5} + n}{\sqrt{n^2 + 5} + n} = \frac{(\sqrt{n^2 + 5} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 5} + n)}{\sqrt{n^2 + 5} + n} = \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + 5})^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 5} + n} = \frac{5}{\sqrt{n^2 + 5} + n} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} \quad \text{Als } n \rightarrow \infty, \text{ dan } \sqrt{n^2 + 5} + n \rightarrow \infty, \text{ dus } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{n^2 + 5} + n} = 0$$

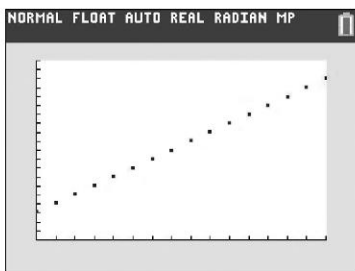
$$\begin{aligned} \mathbf{30} \quad \sqrt{A} - \sqrt{B} &= (\sqrt{A} - \sqrt{B}) \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{(\sqrt{A})^2 - (\sqrt{B})^2}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \\ &= \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{31a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+7} - \sqrt{3n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n+7) - (3n-1)}{\sqrt{3n+7} + \sqrt{3n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{\sqrt{3n+7} + \sqrt{3n-1}} \right) = 0$$

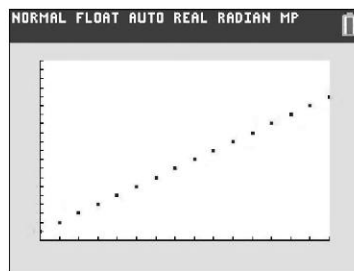
$$\mathbf{b} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 5} - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(4n^2 + 5) - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 5} + 2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{\sqrt{4n^2 + 5} + 2n} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 8} - (n+2)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n^2 + 4n + 8) - (n+2)^2}{\sqrt{n^2 + 4n + 8} + (n+2)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{\sqrt{n^2 + 4n + 8} + (n+2)} \right) = 0 \end{aligned}$$

32a plot van $u(n)$



plot van $v(n)$

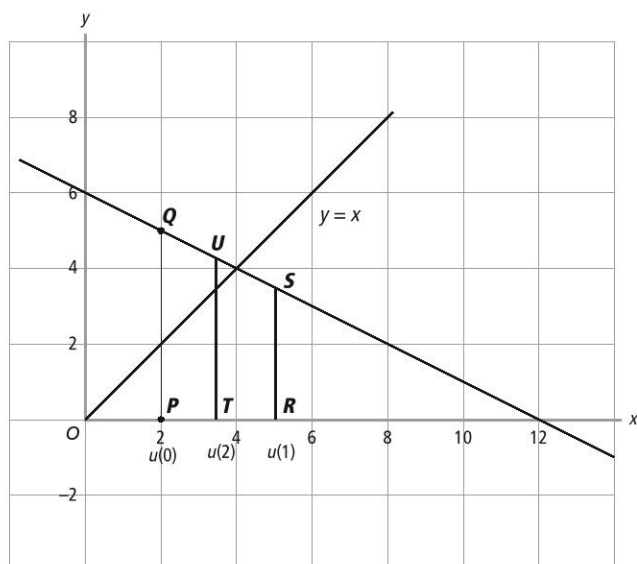


De rijen naderen beide naar oneindig. Moeilijk te voorspellen wat de limiet van het verschil is.

$$\begin{aligned} \mathbf{bc} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 10} - (n+1)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n^2 + 6n + 10) - (n+1)^2}{\sqrt{n^2 + 6n + 10} + (n+1)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n + 9}{\sqrt{n^2 + 6n + 10} + (n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{4n}{n} + \frac{9}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{6n}{n^2} + \frac{10}{n^2}} + \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + \frac{9}{n}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n} + \frac{10}{n^2}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right) = \frac{4 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1 + 0} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

6-5 Webgrafieken**Pagina 116**

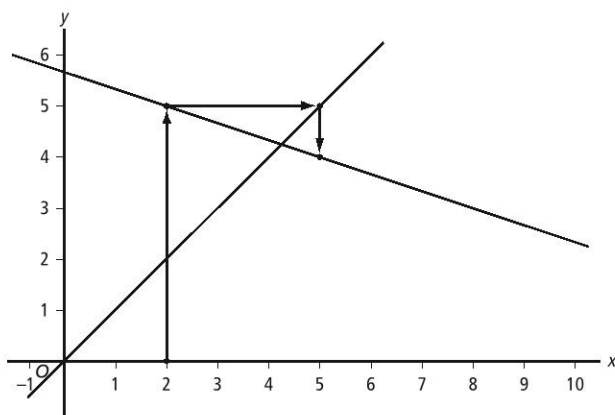
- 33a** $u(1) = 6 - 0,5 \cdot u(0) = 6 - 0,5 \cdot 2 = 5$
 $y_Q = f(2) = 6 - 0,5 \cdot 2 = 5 = u(1)$, dus de lengte van $PQ = 5$.
- b** Dus $R(5, 0)$



- c** De x -coördinaat van R is $u(1)$. Dan is de y -coördinaat van S gelijk aan $f(x) = 6 - 0,5 \cdot x_R = 6 - 0,5 \cdot u(1) = u(2)$.
 De lengte van RS is dus $u(2)$.
- d** $T(4, 3\frac{1}{2})$; De x -coördinaat van T is $u(2)$. Dan is de y -coördinaat van U gelijk aan $f(x) = 6 - 0,5 \cdot x_T = 6 - 0,5 \cdot u(2) = u(2) = 3\frac{1}{2}$.
 De lengte van RS is dus $u(2)$.
- e** Zie tekening.

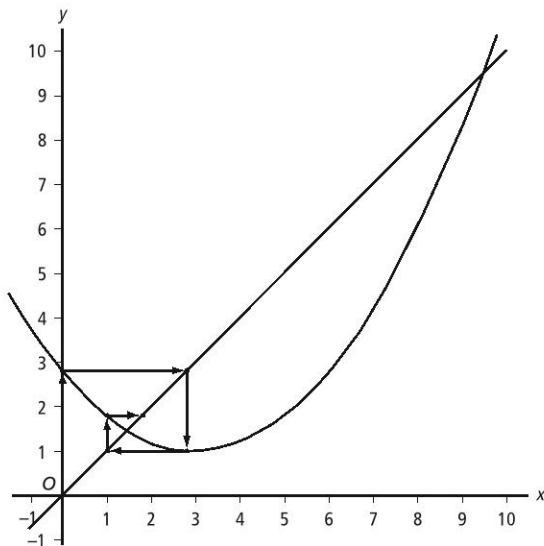
Pagina 117

34a $f(x) = \frac{1}{3}(17 - x) = -\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$

b,c

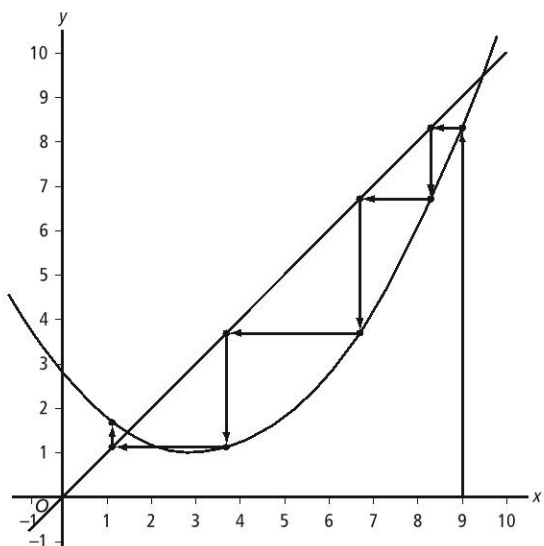
- d** Uit $f(x) = x$ volgt $17 - x = 3x$ en hieraan voldoet $x = 4\frac{1}{4}$.
De rij u convergeert naar $4\frac{1}{4}$.

35a



- b** De webgrafiek spiraleert naar een snijpunt van de grafiek van f en de lijn $y = x$.

c



Ook in dit geval convergeert de webgrafiek naar een snijpunt van de grafiek van f met de lijn $y = x$.

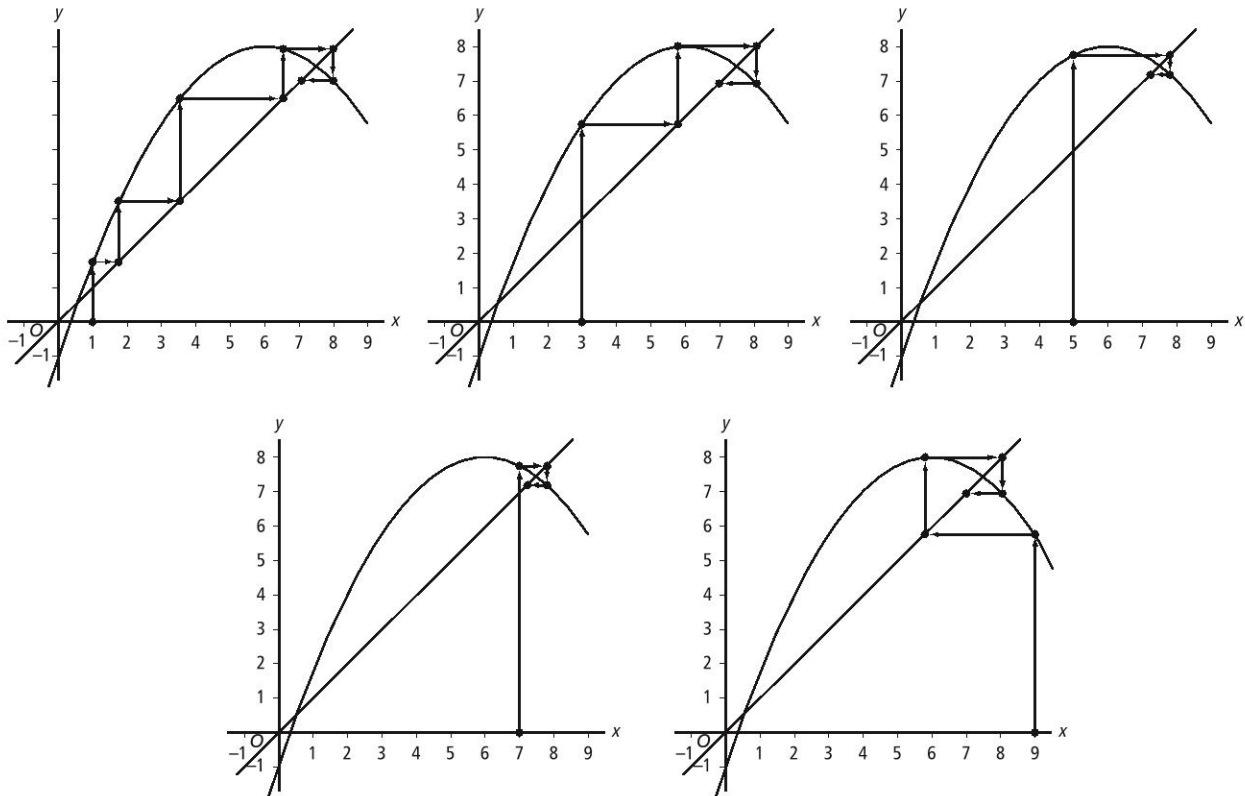
Nu gaat dat eerst trapsgewijs en daarna spiralend naar het snijpunt.

- d** Nee, dan zit je rechts van het andere snijpunt en loopt de webgrafiek weg van dit snijpunt.

- 36a** Als $u(0) = s$ dan is $u(1) = f(u(0)) = f(s) = s$. Dus zijn alle termen gelijk aan s .

Met de abc -formule vind je $s_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{2} = 4 \pm \frac{1}{2} \sqrt{48} = 4 \pm 2\sqrt{3}$.

In de tekening zijn het de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de lijn $y = x$.

c

d Met het resultaat van opdracht b en de webgrafieken is de limiet $4 + 2\sqrt{3} \approx 7,46$.

37a Uit $-0,1x^3 + 0,7x^2 = x$ volgt $x = 0$ of $-0,1x^2 + 0,7x = 1$.

$$x = 0 \text{ of } x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } (x - 5)(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = 5$$

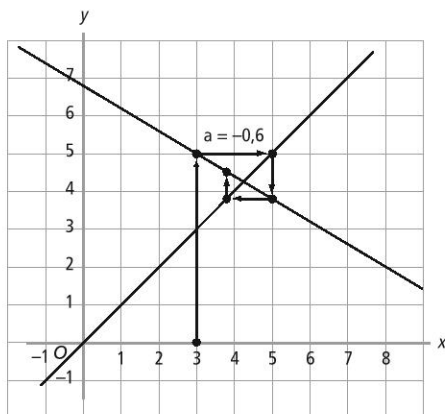
b Een webgrafiek laat zien dat de rij u convergeert naar 5.

c Als $u(0) = 6,5$ dan is $u(1) = f(6,5) = 2,1125$. Met een webgrafiek vind je dat de rij convergeert naar 5.

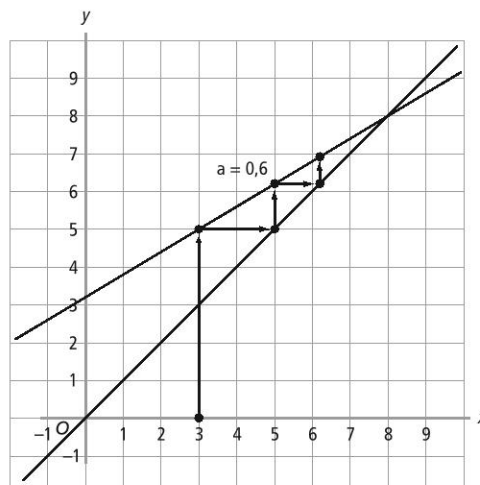
Als $u(0) = 6,6$ dan is $u(1) = f(6,6) = 1,7424$. Met een webgrafiek vind je dat de rij convergeert naar 0.

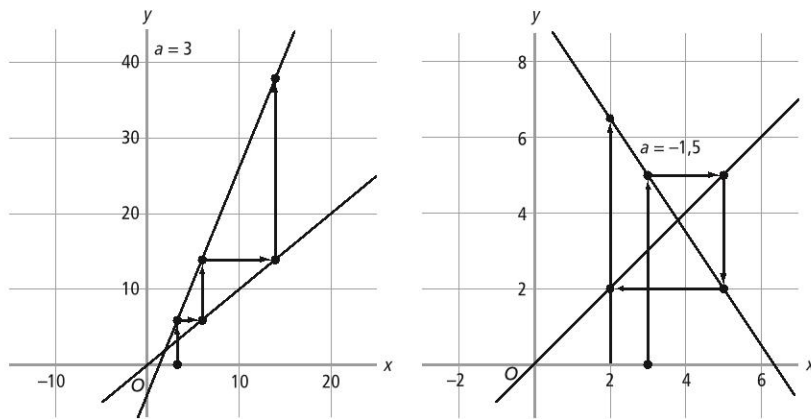
6-6 Contractiestelling

Pagina 118

38a

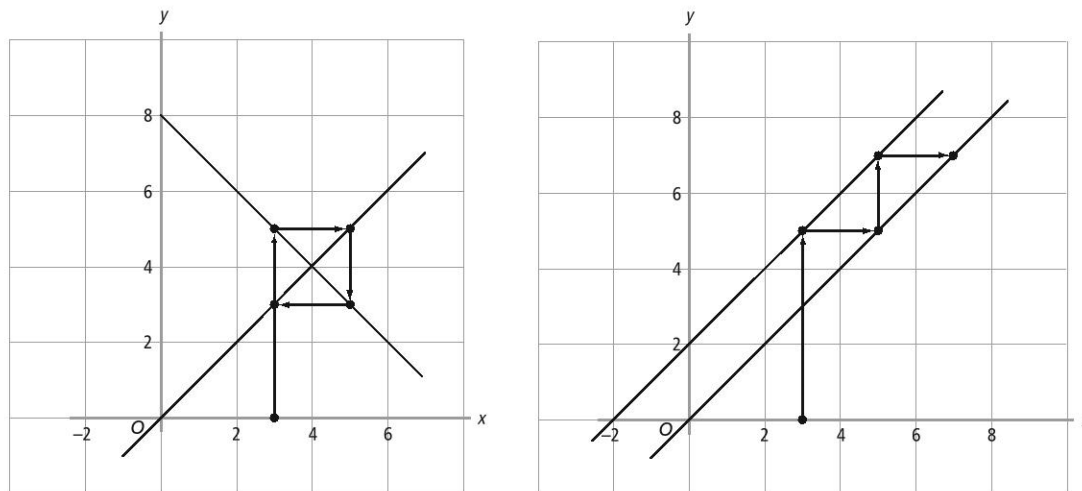
Voor $a = -0,6$ en voor $a = 0,6$ er convergentie.





Voor $a = 3$ en voor $a = -1,5$ is er geen convergentie.

b



$a = -1$

$a = 1$

Uit de webgrafieken blijkt dat er voor beide gevallen geen convergentie is.

Voor $a = -1$ is er sprake van een periodieke webgrafiek.

Voor $a = 1$ krijg je een trapgrafiek tussen twee evenwijdige lijnen.

c Waarschijnlijk als $-1 < a < 1$

39a Dan is $f(x) = 1,3x - 30$ en omdat $1,3 > 1$ is de rij niet convergent.

b Dan is $f(x) = -\frac{5}{9}x + 21$ en dus is de rij convergent want $-1 < -\frac{5}{9} < 1$.

De limiet is de oplossing van $-\frac{5}{9}x + 21 = x$.

Uit $1\frac{5}{9}x = 21$ volgt $x = 13\frac{1}{2}$. Dus is de limiet $13\frac{1}{2}$.

c Dan is $f(x) = x\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{2}{6}}$. Omdat $-1 < \sqrt{\frac{5}{6}} < 1$ is de rij convergent.

$$\frac{x\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = x \Rightarrow x\sqrt{5} + \sqrt{2} = x\sqrt{6}$$

$$\text{Dus is } x(-\sqrt{6} + \sqrt{5}) = -\sqrt{2} \text{ en is de limiet } \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}.$$

40a Dan is L de oplossing van $L = aL + b$ dan is $L - aL = b$ dus $L(1 - a) = b$

$$\text{en daarmee is } L = \frac{b}{1 - a}.$$

- b** $w(n+1) = u(n+1) - L = a \cdot u(n) + b - \frac{b}{1-a} = a \cdot u(n) + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a} =$
 $a \cdot u(n) - \frac{ab}{1-a} = a \cdot (u(n) - L) = a \cdot w(n)$
- c** $w(n) = w(0) \cdot a^n$ met $n \geq 0$
- d** $u(n) = w(n) + L = w(0) \cdot a^n + \frac{b}{1-a} = \left(u(0) - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n + \frac{b}{1-a} =$
 $(u(0) - L)a^n + L$
- e** Rij w en daarmee ook rij u , convergeert precies dan als $-1 < a < 1$.

Pagina 119

- 41** Invullen van $a = 1,3$; $b = -30$ en $u(0) = 110$ in de formule van opdracht 40d geeft

$$u(n) = \left(110 - \frac{-30}{1-1,3}\right) \cdot 1,3^n + \frac{-30}{1-1,3} = (110 - 100) \cdot 1,3^n + 100 =$$

$$10 \cdot 1,3^n + 100.$$

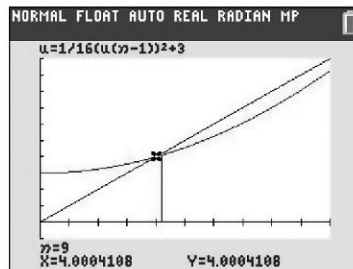
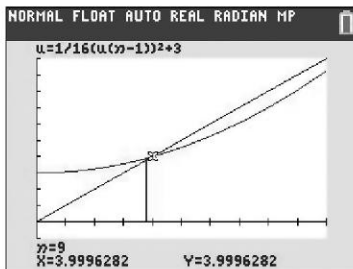
Invullen van $a = -\frac{5}{9}$; $b = 21$ en $u(0) = 37\frac{1}{2}$ geeft

$$u(n) = \left(37\frac{1}{2} - \frac{21}{1-\frac{5}{9}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^n + \frac{21}{1-\frac{5}{9}} = 24 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^n + 13\frac{1}{2}.$$

- 42a** $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x$ en dus is $f'(4) = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$.

- b** De grafiek van f wordt dan vervangen door $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Voor $u(0)$ in de buurt van 4 convergeert de rij u dan naar 4.

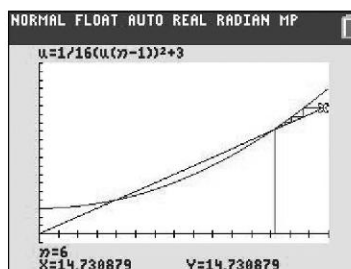
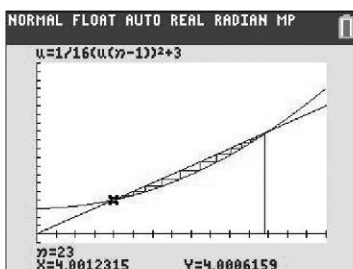


- 43a** Dan moet $\frac{1}{16}x^2 + 3 = x \Rightarrow x^2 - 16x + 48 = 0$. Uit $(x-4)(x-12) = 0$ volgt $x = 4$ of $x = 12$.

De gezochte waarde van t is 12.

- b** $f'(x) = \frac{1}{8}x \Rightarrow f'(12) = 1\frac{1}{2}$

- c** Voor $u(0) < 12$ convergeert de rij naar 4. Anders divergentie van rij u .



- 44a** $-x^3 + 11x^2 - 3x = 25x \Rightarrow x(x^2 - 11x + 28) = 0$. De oplossingen zijn $x = 0$ of $x = 4$ of $x = 7$.
- b** $f(x) = -\frac{1}{25}x^3 + \frac{11}{25}x^2 - \frac{3}{25}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{22}{25}x - \frac{3}{25}$
 $f'(0) = 0$ dus als $d = 0$ dan zijn er volgens de algemene contractiestelling waarden van $u(0)$ dichtbij 0 waarvoor er convergentie is met limiet 0.
 $f'(4) = -\frac{3}{25} \cdot 16 + \frac{22}{25} \cdot 4 - \frac{3}{25} = 1\frac{12}{25} > 1$ dus als $d = 4$ dan geeft de algemene contractiestelling geen uitsluitel!
 Immers deze stelling geeft niet aan dat er alleen voor waarden van de afgeleide tussen -1 en 1 convergentie mogelijk is.
 Dus is convergentie nog wel mogelijk maar dan niet met limiet 4. Er is wel convergentie met limiet 4 als $u(0) = 4$ want dit geeft een constante rij met termen 4.
 $f'(7) = -\frac{3}{25} \cdot 49 + \frac{22}{25} \cdot 7 - \frac{3}{25} = \frac{4}{25}$ dus als $d = 7$ is er voor waarden van $u(0)$ dichtbij 7 convergentie naar 7.
- c** Ga voor verschillende beginwaarden met een webgrafiek na of er wel of niet sprake is van convergentie.
 Vrijwel altijd is er direct of na enkele termen sprake van het trapsgewijs convergeren.
 Ook voor beginwaarden dicht bij 4 is dat het geval maar dan met limiet 0 of 7.

6-7 Gemengde opdrachten

Pagina 120

45a $\frac{5}{2}\sqrt{x-1} = x$

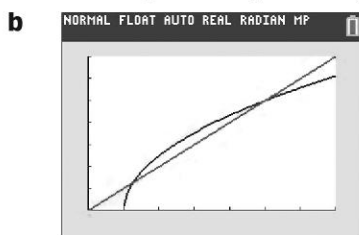
$$\frac{25}{4}(x-1) = x^2$$

$$x^2 - \frac{25}{4}x + \frac{25}{4} = 0$$

$$4x^2 - 25x + 25 = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{8}$$

De dekpunten zijn $x = 1\frac{1}{4}$ en $x = 5$.



- c** Voor alle waarden met $u(0) \geq 1\frac{1}{4}$ is de rij goed gedefinieerd, want anders wordt $u(1) < 1$ en gaat het alsnog niet.
- d** $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4\sqrt{x-1}}$
 $f'(1\frac{1}{4}) = 2\frac{1}{2}$ en $f'(5) = \frac{5}{8}$
 Alleen $f'(5)$ heeft een waarde tussen -1 en 1 .
 Volgens de algemene contractiestelling kan dekpunt $x = 5$ als limiet optreden.

46a $s(n) = 4 - t(n)$, dus $s(0) = 4 - t(0)$

Verder geldt $s(0) = t(0)$, dus $t(0) = 4 - t(0)$, waaruit volgt $t(0) = 2$.

b $s(1) = s(0) + t(1) = 2 + t(1) = 4 - t(1)$ Hieruit volgt $t(1) = 1$.

$s(2) = s(1) + t(2) = 3 + t(2) = 4 - t(2)$ Hieruit volgt $t(2) = \frac{1}{2}$.

$s(3) = s(2) + t(3) = 3\frac{1}{2} + t(3) = 4 - t(3)$ Hieruit volgt $t(3) = \frac{1}{4}$.

$s(4) = s(3) + t(4) = 3\frac{3}{4} + t(4) = 4 - t(4)$ Hieruit volgt $t(4) = \frac{1}{8}$.

c $s(n) = 4 - t(n)$

$s(n) = t(n) + s(n-1) -$

$0 = 4 - 2t(n) - s(n-1)$

$0 = 4 - 2t(n) - (4 - t(n-1))$

$2t(n) = t(n-1)$, dus $t(n) = \frac{1}{2} \cdot t(n-1)$, dus meetkundige rij met reede $\frac{1}{2}$.

47a $q(0) = \frac{u(1)}{u(0)} = \frac{1}{1} = 1$; $q(1) = \frac{u(2)}{u(1)} = \frac{1}{1} = 2$; $q(2) = \frac{u(3)}{u(2)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$;

$q(3) = \frac{u(4)}{u(3)} = \frac{5}{3} \approx 1,667$; $q(4) = \frac{u(5)}{u(4)} = \frac{8}{5} = 1,6$. $q(5) = \frac{u(6)}{u(5)} = \frac{13}{8} = 1,625$

b $q(n+1) = \frac{u(n+2)}{u(n+1)} = \frac{u(n+1) + u(n)}{u(n+1)} = \frac{u(n+1)}{u(n+1)} + \frac{u(n)}{u(n+1)} = 1 + \frac{u(n)}{u(n+1)} =$
 $1 + \frac{1}{q(n)}$

c Er geldt natuurlijk $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(n+1)$, dus uit b volgt $L = 1 + \frac{1}{L}$.

d $L = 1 + \frac{1}{L}$

$L - 1 = \frac{1}{L}$

$L^2 - L - 1 = 0$

$L = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$

Het antwoord moet tussen 1,5 en 2 liggen, dus de oplossing is $L = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

Pagina 121

48a $\frac{2}{x} = x \Rightarrow x^2 = 2$ dus $x = \pm \sqrt{2}$

$1 + \frac{1}{x+1} = x \Rightarrow x + 1 + 1 = x(x+1)$ dus is $x + 2 = x^2 + x$ en daarmee

vind je $x = \pm \sqrt{2}$.

b $f(x) = 2 \cdot x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

Dan is $f'(\sqrt{2}) = \frac{-2}{(\sqrt{2})^2} = -1$ en dus convergeert de rij niet naar $\sqrt{2}$.

c $g(x) = 1 + (x+1)^{-1} \Rightarrow g'(x) = -1(x+1)^{-2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$ dus is

$$g'(\sqrt{2}) = \frac{-1}{(\sqrt{2}+1)^2} \approx -0,17.$$

Omdat $-1 < g'(\sqrt{2}) < 1$ zijn er beginwaarden $u(0)$ waarvoor de rij naar $\sqrt{2}$ convergeert.

d $u(n+1) = g(u(n)) = g\left(\frac{p}{q}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{p}{q} + 1} = 1 + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+2q}{p+q}$

e $u(1) = \frac{2+2 \cdot 1}{2+1} = \frac{4}{3}$; $u(2) = \frac{4+2 \cdot 3}{4+3} = \frac{10}{7}$; $u(3) = \frac{10+2 \cdot 7}{10+7} = \frac{24}{17}$;

$$u(4) = \frac{24+2 \cdot 17}{24+17} = \frac{58}{41} \text{ en } u(5) = \frac{58+2 \cdot 41}{58+41} = \frac{140}{99} = 1 \frac{41}{99}.$$

Merk op: $\frac{140}{99} = 1,41414141\dots$ en $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$. Het verschil is kleiner dan 0,000 073.

49a $P(0) = 6 + 6 + 6 = 18$ en $P(1) = 12 \cdot 2 = 24$.

b K_0 heeft 3 lijnstukjes, K_1 heeft 12 lijnstukjes. Omdat bij een volgende stap het aantal lijnstukjes steeds vier keer zo groot wordt, heeft K_2 er 48. In het algemeen heeft K_n precies $3 \cdot 4^n$ lijnstukjes. Dus heeft K_5 er 3072.

c $P(n) = \text{aantal zijden} \times \text{lengte zijde} = 3 \cdot 4^n \times 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 18 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

d Omdat $\frac{4}{3} > 1$ is de rij $P(n) = 18 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ niet begrensd. Dus neemt de omtrek van de kromme onbeperkt toe.

e Uit $P(n) = 18 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n > 100\,000$ volgt met de rekenmachine $n > 29,97 \dots$ Dus voor $n = 30$.

f Voor de oppervlakte A van een gelijkzijdige driehoek met zijde z geldt

$$A = \frac{1}{2} z \cdot h = \frac{1}{2} z \sqrt{z^2 - (0,5z)^2} = \frac{1}{2} z \sqrt{\frac{3}{4} z^2} = \frac{1}{2} z \cdot \frac{1}{2} z \sqrt{3} = \frac{1}{4} z^2 \sqrt{3}.$$

Als $z = 6$ dan geeft deze formule $A = \frac{1}{4} \cdot 36 \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

En $A(0) = \left(1\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^0\right) \cdot 9\sqrt{3} = 1 \cdot 9\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Dus voor $n = 0$ klopt de formule.

Als $n = 1$ dan komen er ten opzichte van $n = 0$ drie gelijkzijdige driehoeken met zijde 2 bij.

Dus is de oppervlakte van K_1 gelijk aan $9\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^2 \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

En $A(1) = \left(1\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^1\right) \cdot 9\sqrt{3} = \left(1\frac{9}{15} - \frac{4}{15}\right) \cdot 9\sqrt{3} = 9\sqrt{3} = 1\frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Dus ook voor $n = 1$ klopt de formule.

g Merk op dat $0 \leq 1\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 1\frac{3}{5}$ voor elke $n \geq 0$ dus is

$$0 < A(n) < 1\frac{3}{5} \cdot 9\sqrt{3} = 14,4\sqrt{3} \text{ en daarmee is de rij } A \text{ begrensd.}$$

Dus blijft ook de oppervlakte van het gebied binnen de kromme begrensd.

h $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \cdot 9\sqrt{3} = \left(1\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot 0\right) \cdot 9\sqrt{3} = 1\frac{3}{5} \cdot 9\sqrt{3} = 14\frac{2}{5} \sqrt{3}$

Test jezelf**Pagina 124**

$$\mathbf{T-1a} \quad u(n+1) = \frac{1}{(n+1+1)(n+1+2)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{n+1}{n+1} =$$

$$\frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+3} \cdot u(n)$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = u(n)$$

$$\mathbf{c} \quad s(n) = u(0) + u(1) + u(2) + \dots + u(n-1) + u(n) =$$

$$\left(\frac{1}{0+1} - \frac{1}{0+2} \right) + \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2} \right) + \left(\frac{1}{2+1} - \frac{1}{2+2} \right) + \dots +$$

$$\left(\frac{1}{n-1+1} - \frac{1}{n-1+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) =$$

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) =$$

$$1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\mathbf{T-2a} \quad \frac{1}{2}n^2 \geq \frac{1}{2}n \Rightarrow n^2 \geq \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \Rightarrow \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{1}{2}n \Rightarrow u(n) = \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{1}{2}n$$

$$\mathbf{b} \quad \text{Niet begrensd, want } \frac{1}{2}n \rightarrow \infty \text{ als } n \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{c} \quad v(n) = u(n+1) - u(n) = \frac{(n+1)^2}{n+1+1} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} =$$

$$\frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{n^2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^3+2n^2+n+n^2+2n+1-n^3-2n^2}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{n^2+3n+1}{(n+1)(n+2)}$$

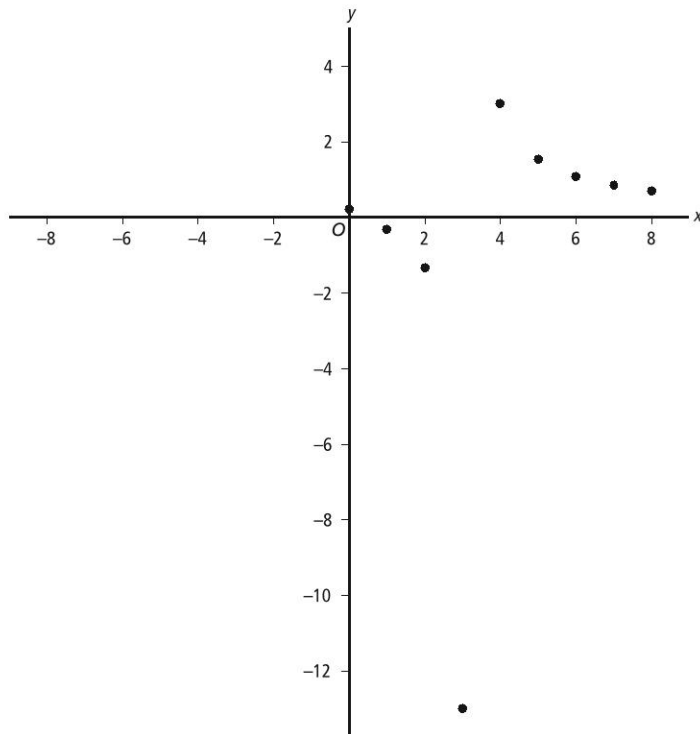
$$\mathbf{d} \quad v(n) = \frac{n^2+3n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+3n+2-1}{n^2+3n+2} = 1 - \frac{1}{n^2+3n+2} > 0$$

De termen van de rij v zijn positief voor $n \geq 0$, dus is de rij u stijgend.

$$\mathbf{e} \quad v(n) = \frac{n^2+3n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+3n+2-1}{n^2+3n+2} = 1 - \frac{1}{n^2+3n+2} < 1$$

Dus $0 < v(n) < 1$, de rij is begrensd.

T-3a



b $u(0) = 0,2; u(1) = -\frac{1}{3}; u(2) = -13; u(3) = -13; u(4) = 3; u(5) = 1\frac{8}{15}; u(6) = 1\frac{1}{13}$

Vanaf $u(7) = \frac{33}{39} = \frac{11}{13}$ zijn alle termen positief en kleiner dan 1.

Dus is $K = -13$ en is $L = 3$.

c Convergent, want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-2}{n^2-10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{10}{n^2}} = \frac{0-0}{1-0} = 0$.

T-4a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2n^2+4n^3}{n(n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2n^2+4n^3}{n^3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} + 4}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0-0+4}{1+0} = 4$

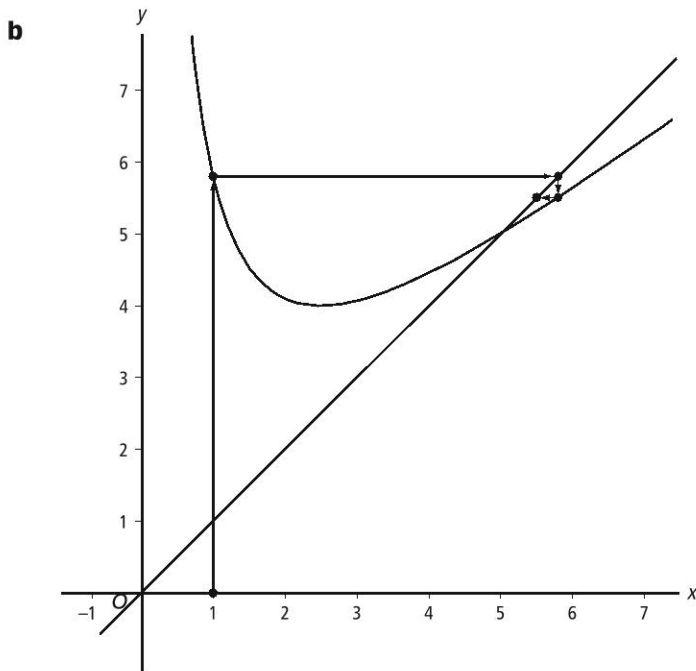
b $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2\sqrt{n}}{3n(1+n\sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2\sqrt{n}}{3n+3n^2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\frac{3}{n\sqrt{n}}+3} = \frac{5}{0+3} = 1\frac{2}{3}$

c $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n^3}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4n}{1+\frac{1}{n^2}}$ Teller nadert naar oneindig en noemer naar 1,
dus geen limiet.

d $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - \sqrt{25n^4 + 10}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n^4 - (25n^4 + 10)}{\sqrt{25n^4 + 10} + \sqrt{25n^4 + 10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10}{\sqrt{25n^4 + 10} + \sqrt{25n^4 + 10}} = 0$

T-5a Uit $f(x) = x$ volgt $\frac{4}{5}x + \frac{5}{x} = x$ dus $\frac{5}{x} = \frac{x}{5}$. Dit geeft $x = \pm 5$.

Omdat $x > 0$ voldoet alleen $u(0) = 5$.



- c** Voor $u(0) > 5$ is de rij u monotoon dalend.

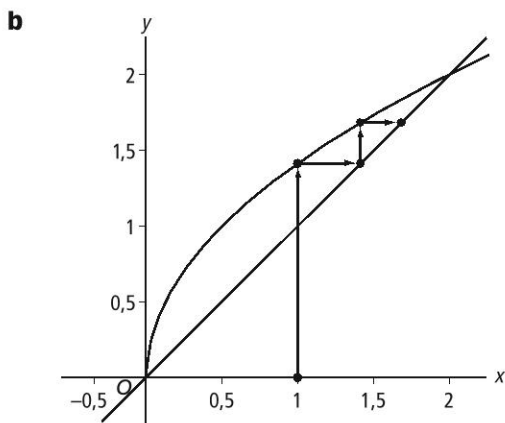
Pagina 125

T-6a Uit $f(x) = x$ volgt $x^2 - 9x + 30 = 4x$. Dus is $(x - 3)(x - 10) = 0$.
De dekpunten van f zijn $x = 3$ en $x = 10$.

b $f'(x) = \frac{1}{4}(2x - 9) \Rightarrow f'(3) = -\frac{3}{4}$ en $f'(10) = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.

- c** In de buurt van $x = 3$ zijn er waarden van $u(0)$ waarvoor de rij u convergeert met limiet 3.

T-7a $u(n) = \sqrt{2 \cdot u(n-1)}$ met $u(0) = 1$



- c** Uit $\sqrt{2x} = x$ volgt $2x = x^2$ dus $x = 0$ of $x = 2$.
Met startwaarde $u(0) = 1$ is $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 2$.

T-8a Figuur 0 heeft oppervlakte $12 \times 12 = 144$.

Bij de volgende figuren wordt geen oppervlakte toegevoegd of weggenomen.

Er wordt dus alleen oppervlakte verplaatst. De totale oppervlakte blijft gelijk.

b $P(0) = 4 \cdot 12 = 48$ en $P(n) = 2 \cdot P(n-1)$, dus een directe formule is $P(n) = 48 \cdot 2^n$.

- c** Als $n \rightarrow \infty$, dan $2^n \rightarrow \infty$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ bestaat niet.

H8 Lineair programmeren

8-1 Lineaire ongelijkheden

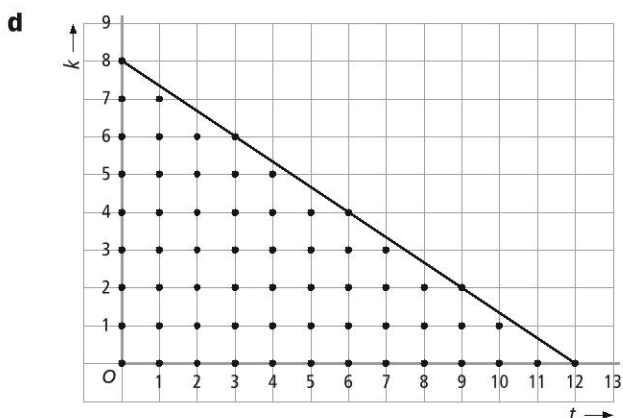
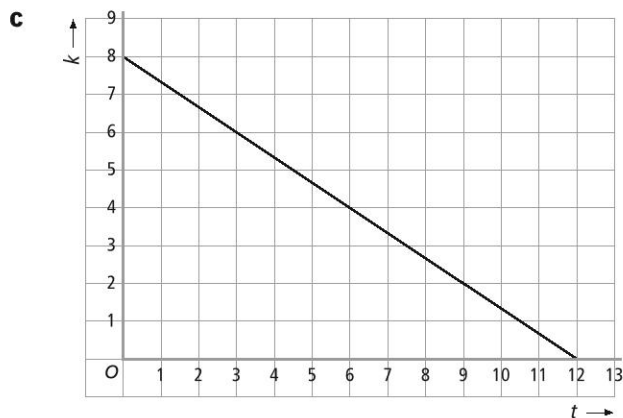
Pagina 146

- 1a** Bijvoorbeeld $(0, 4)$, $(6, 0)$ en $(3, 2)$
- b** Bijvoorbeeld $A(0, 5)$ en $B(7, 0)$ liggen boven de lijn.
 Voor $A(0, 5)$ geldt $2x + 3y = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$.
 Voor $B(7, 0)$ geldt $2x + 3y = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 0 = 14$.
- c** Bijvoorbeeld $C(0, 3)$ en $D(5, 0)$ liggen onder de lijn.
 Voor $C(0, 3)$ geldt $2x + 3y = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$.
 Voor $D(5, 0)$ geldt $2x + 3y = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 10$.
- d** Op of boven de lijn
- e** Onder de lijn

2a

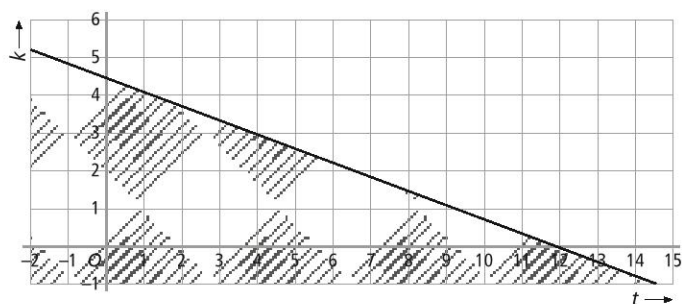
<i>manier</i>	1	2	3	4	5
<i>koppen koffie</i>	8	6	4	2	0
<i>koppen thee</i>	0	3	6	9	12

- b** k koppen koffie kosten $0,75k$ euro.
 t koppen thee kosten $0,50t$ euro.
 De kosten samen en de bovengrens van € 6,- geven $0,75k + 0,50t \leq 6$
 (beide kanten vermenigvuldigen met 4 geeft:
 $3k + 2t \leq 24$

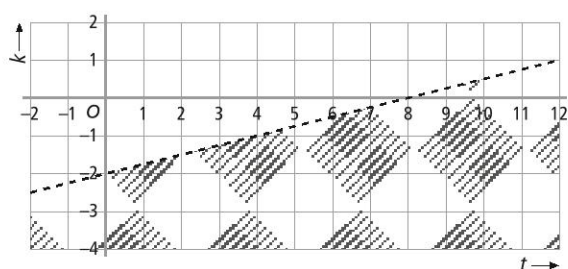


Pagina 147

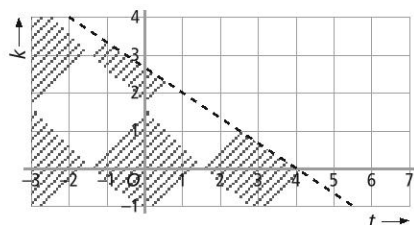
- 3a** $(0, 0)$ voldoet aan $3t + 8k \leq 36$, dus $(0, 0)$ ligt in het halfvlak.



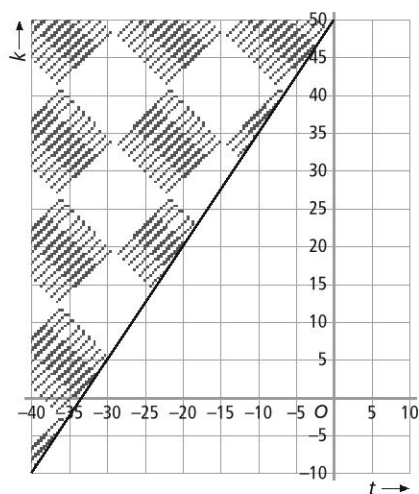
- b** $(0, 0)$ voldoet aan niet $t - 4k > 8$, dus $(0, 0)$ ligt niet in het halfvlak.

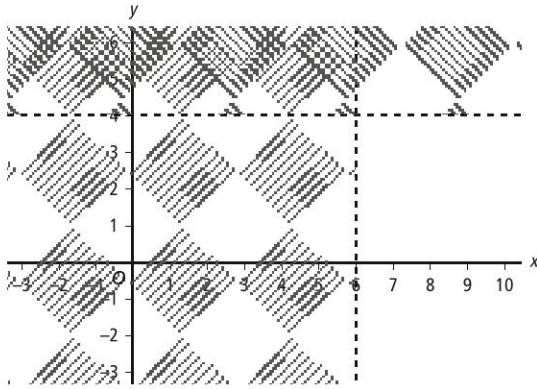


- c** $(0, 0)$ voldoet aan $500t + 750k < 2000$, dus $(0, 0)$ ligt in het halfvlak.



- d** $(0, 0)$ voldoet niet aan $0,02k - 0,03t \geq 1$, dus $(0, 0)$ ligt niet in het halfvlak.



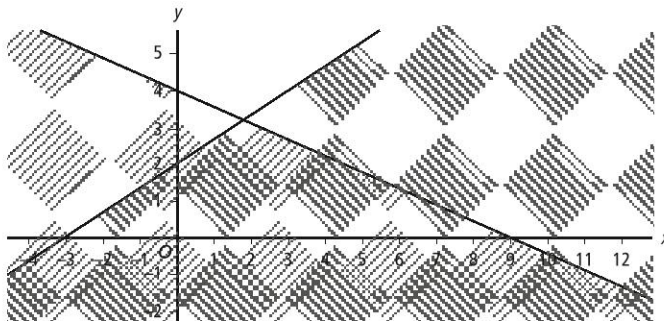
4ab

- c** In het gebied links van de lijn $x = 6$ én boven de lijn $y = 4$

5ab

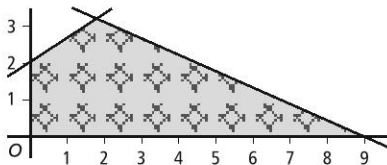
$(0, 0)$ voldoet aan $4x + 9y \leq 36$, dus $(0, 0)$ ligt in het halfvlak.

$(0, 0)$ voldoet aan $2x - 3y \geq -6$, dus $(0, 0)$ ligt in het halfvlak.



- c** In het dubbelgearceerde gebied, inclusief de randen

- d** In de vierhoek hieronder, inclusief de randen



6a $0,40p + 0,35q \leq 6$

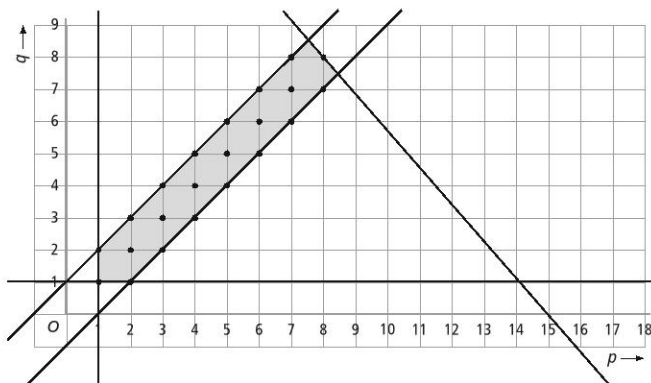
- b** p en q zijn geheel en 0 of groter, dus $p \geq 0$ en $q \geq 0$.

- c** De punten liggen in het gebied waarvoor geldt

$0,40p + 0,35q \leq 6$ en $p \geq 1$ en $q \geq 1$ en $|p - q| \leq 1$.

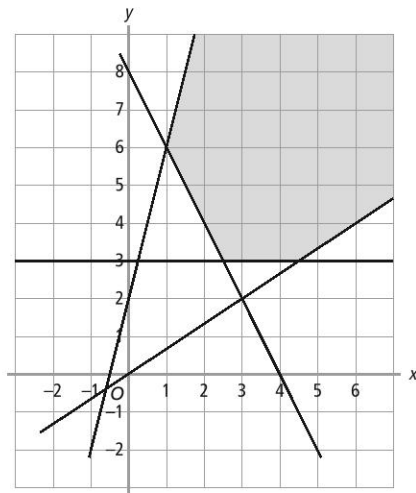
$0,40p + 0,35q \leq 6$ en $p \geq 1$ en $q \geq 1$ en $p - q \leq 1$ en $-(p - q) \leq 1$.

$0,40p + 0,35q \leq 6$ en $p \geq 1$ en $q \geq 1$ en $p - q \leq 1$ en $-p + q \leq 1$.



- d** De punten tellen geeft 22 keuzemogelijkheden.

7a



b $x \geq 0$

8-2 Lineair programmeren

Pagina 148

8a	Pakket 1	Pakket 2	Opbrengst
	10	20	$10 \times € 7 + 20 \times € 12 = € 310$
	20	20	$20 \times € 7 + 20 \times € 12 = € 380$
	20	30	$20 \times € 7 + 30 \times € 12 = € 500$
	25	25	$25 \times € 7 + 25 \times € 12 = € 475$
	20	25	$20 \times € 7 + 25 \times € 12 = € 440$

Pakket 2 brengt het meeste op, dus een combinatie waarin pakket 2 het meeste voorkomt lijkt de hoogste opbrengst te geven.

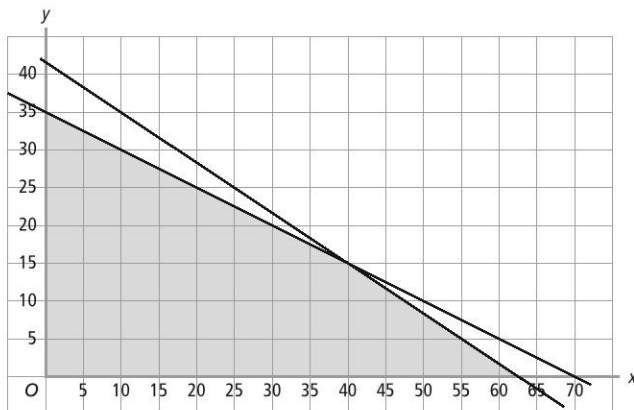
b De verdeling 20/30 is niet mogelijk, want er zijn geen $20 \cdot 4 + 30 \cdot 6 = 260$ paar katoenen sokken.

De verdeling 25/25 is niet mogelijk, want er zijn geen $25 \cdot 2 + 25 \cdot 4 = 150$ paar wollen sokken.

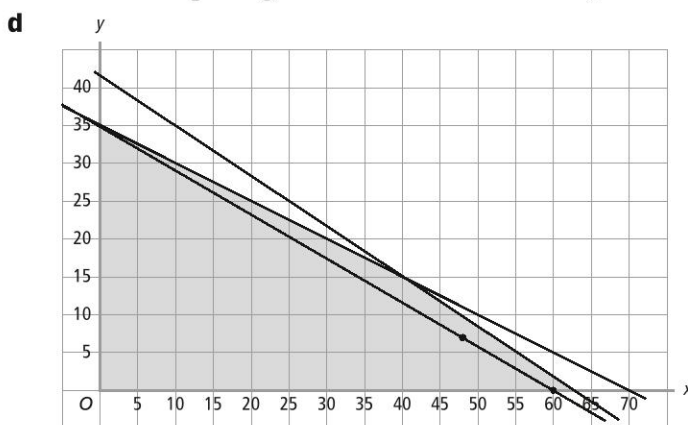
9a In x aantal pakketten 1 zitten $4 \cdot x$ paar katoenen sokken en in y aantal pakketten 2 zitten $6 \cdot y$ paar katoenen sokken. In alle pakketten samen zitten dus $4 \cdot x + 6 \cdot y$ paar katoenen sokken.

In totaal zijn er slechts 250 paar katoenen sokken, dus moet gelden $4 \cdot x + 6 \cdot y \leq 250$.

- b** De beperking voor het aantal wollen sokken geeft $2 \cdot x + 4 \cdot y \leq 140$.
De aantallen sokken zijn 0 of groter, dus $x \geq 0$ en $y \geq 0$.



- c** Pakket 1 brengt € 7 op en pakket 2 brengt € 12 op.
 x pakketten 1 brengen dus $7x$ euro op, en y pakketten 2 brengen $12y$ euro op.
De totale opbrengst TO is dan $TO = 7x + 12y$.



Bijvoorbeeld $(0, 35)$, $(60, 0)$ en $(48, 7)$.

De aantallen pakketten die horen bij de roosterpunten geven alle een opbrengst van € 420,-.

- e** Het is nog mogelijk een lijn boven en evenwijdig aan $7x + 12y = 420$ te trekken die door het gebied gaat, dus de opbrengst kan nog hoger zijn.
- f** Een lijn evenwijdig aan $7x + 12y = 420$ die nog door het gebied gaat, raakt het gebied in het hoekpunt dat het snijpunt is van de lijnen $4 \cdot x + 6 \cdot y = 250$ en $2 \cdot x + 4 \cdot y = 140$.
De coördinaten van het snijpunt zijn $(40, 15)$.
De marktkoopman moet dus 40 pakketten 1 en 15 pakketten 2 maken.
Zijn hoogst mogelijke opbrengst is $7 \cdot 40 + 12 \cdot 15 = 460$ euro.

Pagina 149

- 10** Het uiterste roosterpunt is dan $(10, 0)$.
Het maximum is $20 \cdot 10 - 30 \cdot 0 + 400 = 600$.

11a W is de winst in euro's. T en M zijn het verbouwde aantal hectare tarwe en maïs.

b $T \geq 0$: het aantal hectare tarwe is 0 of meer.

$T \geq 2M$: boeren zijn verplicht om minstens tweemaal zoveel tarwe te verbouwen als maïs.

$T + M \leq 48$: er is maximaal 48 hectare akkerland beschikbaar.

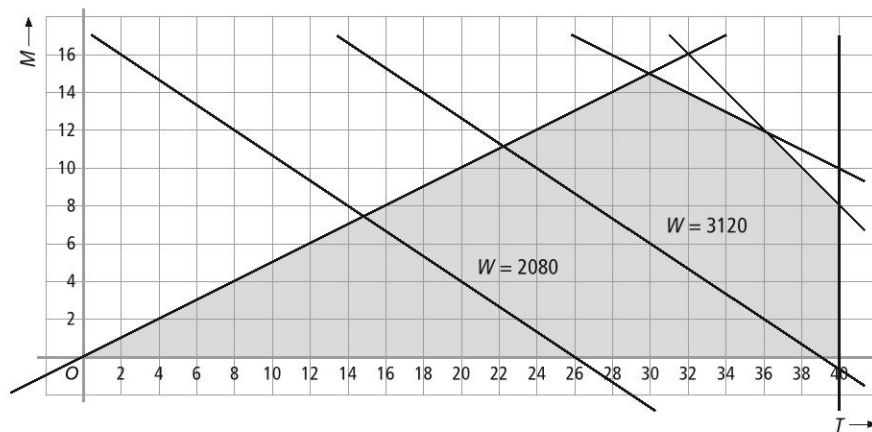
$M \geq 0$: het aantal hectare maïs is 0 of meer.

$200T + 400M \leq 12\,000$: de boer kan hoogstens € 12 000,- uitgeven aan investeringskosten.

$T \leq 40$: de boer kan niet meer dan 40 hectare aan tarwe beplanten.

c Voor $(20, 4)$ geldt $W = 80 \cdot 20 + 120 \cdot 4 = 2080$.

Voor $(30, 6)$ geldt $W = 80 \cdot 30 + 120 \cdot 6 = 2080$.



d De isolijn heeft in het hoekpunt $(36, 12)$ de maximale waarde.

Bij 36 ha tarwe en 12 ha maïs is de opbrengst $80 \cdot 36 + 120 \cdot 12 = 4320$ euro en het grootst.

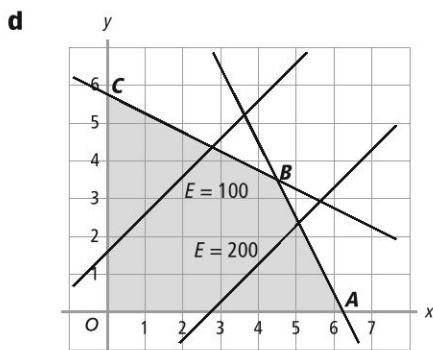
12a $2x + 4y = 23$ geeft voor $x = 0$ de y -waarde $\frac{23 - 2 \cdot 0}{4} = 5,75$.

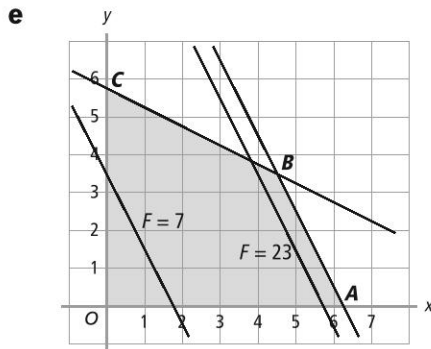
$4x + 2y = 25$ geeft voor $x = 0$ de y -waarde $\frac{25 - 4 \cdot 0}{2} = 12,5$.

Het snijpunt van l met de y -as ligt iets onder 6, dus $2x + 4y = 23$ hoort bij lijn l en $4x + 2y = 25$ bij lijn m .

b De doelfunctie neemt toe in de richting van punt B , dus in punt B is D maximaal.

c De doelfunctie neemt af in de richting van O , dus in O is D minimaal.





8-3 Randenvandelmethode

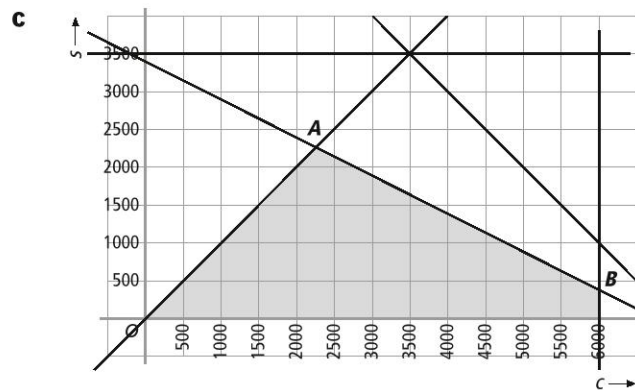
Pagina 150

- 13a** Door de negatieve factor -10 neemt W dan af.
b Door de positieve factor 20 neemt W dan toe.
c In de hoekpunten waar x het kleinst is en y het grootst, dus in A of B .
d Voor $A(0, 7)$ geldt $W = 20y - 10x + 15 = 20 \cdot 7 - 10 \cdot 0 + 15 = 155$.
 Voor $B(2, 9)$ geldt $W = 20y - 10x + 15 = 20 \cdot 9 - 10 \cdot 2 + 15 = 175$.
 In hoekpunt B is W maximaal met $W = 175$.
e Om een maximum in B te geven bezitten de isolijnen een helling die tussen de helling van lijn AB en de helling van lijn BC ligt. In D , E of de lijn DE kan bij deze helling een minimum zijn.
 Voor $D(10, 0)$ geldt $W = 20 \cdot 0 - 10 \cdot 10 + 15 = -85$.
 Voor $E(4, 0)$ geldt $W = 20 \cdot 0 - 10 \cdot 4 + 15 = -25$.
 In hoekpunt D heeft W de minimale waarde -85 .
- 14a** In D is $TW = 25 \cdot 0 + 25 \cdot 45 = 1125$.
 In A is $TW = 25 \cdot 35 + 25 \cdot 40 = 1875$.
 In B is $TW = 25 \cdot 40 + 25 \cdot 35 = 1875$.
 In C is $TW = 25 \cdot 50 + 25 \cdot 0 = 1250$.
 In A en B treedt het maximum op.
b $25x + 25y = 1875$
 $25y = -25x + 1875$
 $y = -x + 75$
c Het maximum is 1875 . Alle punten op het lijnstuk AB voldoen, $(35, 40)$, $(40, 35)$, $(36, 39)$, $(37, 38)$, $(38, 37)$ en $(39, 36)$.

Pagina 151

15a	<i>variabelen in kg</i>	<i>maximum hoeveelheid in kg</i>	<i>tijd nodig in minuten per kg</i>	<i>winst in euro per kg</i>
	c (chlorella)	6000	4	0,75
	s (sargassum)	3500	8	0,60

- b**
- $c \geq 0$
 - $s \geq 0$
 - $c \leq 6000$
 - $s \leq 3500$
 - $c + s \leq 7000$
 - $s \leq c$
 - $4c + 8s \leq 450 \cdot 60 \Rightarrow c + 2s \leq 6750$
 - $W = 0,75c + 0,6s$



$W = 0,75c + 0,6s$ is maximaal als c en s het grootst zijn, dus in A en/of B .
Voor A geldt

$$\begin{cases} s = c \\ c + 2s = 6750 \end{cases} \Rightarrow c + 2c = 6750 \Rightarrow c = \frac{6750}{3} = 2250, \text{ dus } A(2250, 2250).$$

Voor B geldt

$$\begin{cases} c = 6000 \\ c + 2s = 6750 \end{cases} \Rightarrow 6000 + 2s = 6750 \Rightarrow s = \frac{750}{2} = 375, \text{ dus } B(6000, 375).$$

In A is $W = 0,75 \cdot 2250 + 0,6 \cdot 2250 = 3037,5$.

In B is $W = 0,75 \cdot 6000 + 0,6 \cdot 375 = 4725$.

De maximale winst is dus € 4.725,- per maand bij een productie van 6000 kg chlorella en 375 kg sargassum per maand.

- 16a** Voor de bedragen in de drie soorten fondsen zijn drie variabelen nodig.

<i>variabelen in euro's</i>	<i>verwachte jaarlijks rendement</i>	<i>minimum inleg in euro's</i>
x (opties)	10%	3000
y (aandelen)	8%	3000
z (obligaties)	6%	3000

b $R = 0,1x + 0,08y + 0,06z$

c $x \geq 3000$

$y \geq 3000$

$z \geq 3000$

$x + y + z = 30\,000$

$x \leq 2z$

d $x + y + z = 30\,000 \Rightarrow z = 30\,000 - x - y$, geeft als voorwaarden

$x \geq 3000$

$y \geq 3000$

$30\,000 - x - y \geq 3000 \Rightarrow 30\,000 - (x + y) \geq 3000 \Rightarrow x + y \leq 27\,000$

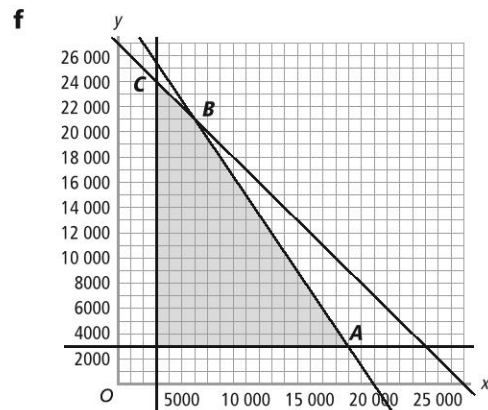
$x \leq 2z \Rightarrow x \leq 2(30\,000 - x - y) \Rightarrow x \leq 60\,000 - 2x - 2y \Rightarrow 3x + 2y \leq 60\,000$

e $R = 0,1x + 0,08y + 0,06z$

$R = 0,1x + 0,08y + 0,06(30\,000 - x - y)$

$R = 0,1x + 0,08y + 1800 - 0,06x - 0,06y$

$R = 0,04x + 0,02y + 1800$



$R = 0,04x + 0,02y + 1800$ is maximaal als x en y het grootst zijn, dus in A en/of B en/of C .

Voor A geldt

$$\begin{cases} y = 3000 \\ 3x + 2y = 60\,000 \end{cases} \Rightarrow 3x = 60\,000 - 2 \cdot 3000 \Rightarrow x = \frac{54\,000}{3} = 18\,000, \text{ dus}$$

$A(18\,000, 3000)$.

Voor B geldt

$$\begin{cases} x + y = 27\,000 \\ 3x + 2y = 60\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -54\,000 \\ 3x + 2y = 60\,000 \end{cases} \Rightarrow x = 6000 \Rightarrow$$

$y = 27\,000 - 6000 = 21\,000$, dus $B(6000, 21\,000)$.

Voor C geldt

$$\begin{cases} x = 3000 \\ x + y = 27\,000 \end{cases} \Rightarrow y = 27\,000 - 3000 = 24\,000, \text{ dus } C(3000, 24\,000).$$

In A is $R = 0,04 \cdot 18\,000 + 0,02 \cdot 3000 + 1800 = 2580$

In B is $R = 0,04 \cdot 6000 + 0,02 \cdot 21\,000 + 1800 = 2460$

In C is $R = 0,04 \cdot 3000 + 0,02 \cdot 24\,000 + 1800 = 2400$

Het maximale rendement is € 2.580,- door investering van € 18.000,- in opties, € 3.000,- in aandelen en $30\,000 - 18\,000 - 3000 = 9000$ euro in obligaties.

8-4 Drie variabelen

Pagina 152

- 17a** De benodigde opslagruimte is gelijk aan de ruimte voor $8 \cdot 2 + 28 + 17 \cdot 2 = 78$ stoelen.
Dat is meer dan de beschikbare ruimte van 70 stoelen, dus de productie kan niet.
- b** 1e voorwaarden: het aantal meubels van elke soort is 0 of meer.
2e voorwaarden: het maximum van elke soort wat geproduceerd kan worden op een dag.
3e voorwaarde: de maximale beschikbare ruimte in stoelen voor opslag aan het eind van de dag.
- 18a** Bij C hoort $b = 0$, $s = 30$ en $t = 0$, dus $C(0, 30, 0)$.
Bij E hoort $b = 0$, $s = 0$ en $t = 20$, dus $E(0, 0, 20)$.
Bij B hoort $b = 10$, $s = 30$ en $t = 0$, dus $B(10, 30, 0)$.
Bij F hoort $b = 10$, $s = 0$ en $t = 20$, dus $F(10, 0, 20)$.
- b** Bij H hoort $b = 0$, $s = 30$ en $t = 20$, dus 0 banken, 30 stoelen en 20 tafels.
- c** Voor G mag s toenemen vanuit F tot het maximum.
Voor F geldt $b = 10$ en $t = 20$, dus uit $2b + s + 2t = 70$ volgt $s = 70 - 2b - 2t = 70 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 20 = 70 - 20 - 40 = 10$ voor G .
De coördinaten van G zijn dus $(10, 10, 20)$.
Voor D mag t toenemen vanuit B tot het maximum.
Voor B geldt $b = 10$ en $s = 30$, dus uit $2b + s + 2t = 70$ volgt $2t = 70 - 2b - s = 70 - 2 \cdot 10 - 30 = 70 - 20 - 30 = 20$ $t = \frac{20}{2} = 10$ voor D .
De coördinaten van D zijn dus $(10, 30, 10)$.
- d** Voor elk punt in $ABDGF$ geldt $b = 10$, dus de productie bevat in ieder geval 10 banken.
- e** Voor elk punt in $BCHD$ geldt $s = 30$.
Voor elk punt in $EFGH$ geldt $t = 20$.
- f** Invullen van de coördinaten van D , G en H in de vergelijking voor de opslagcapaciteit $O = 2b + s + 2t$ geeft steeds de maximale opslagcapaciteit $O = 70$.
- g** $2b + s + 2t = 70$
- 19a** De winst op 1 bank is 30 euro, dus op b banken is de winst $30b$.
De winst op 1 stoel is 10 euro, dus op s stoelen is de winst $10s$.
De winst op 1 tafel is 25 euro, dus op t tafels is de winst $25t$.
De totale winst W is dus $W = 30b + 10s + 25t$.
- b** De winst is maximaal bij de grootste b , s en t .
De punten G en D komen dan in aanmerking.
In $G(10, 10, 20)$ is $W = 30b + 10s + 25t = 30 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 25 \cdot 20 = 900$.
In $D(10, 30, 10)$ is $W = 30b + 10s + 25t = 30 \cdot 10 + 10 \cdot 30 + 25 \cdot 10 = 850$.
In G komt de hoogste waarde voor.
Een wandeling vanuit G naar F en H geeft:
in $F(10, 0, 20)$ is de winst $W = 30b + 10s + 25t = 30 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 25 \cdot 20 = 800$
in $H(0, 30, 20)$ is de winst $W = 30b + 10s + 25t = 30 \cdot 0 + 10 \cdot 30 + 25 \cdot 20 = 800$.

In F en H is de winst lager, dus in G is de winst maximaal.

Bij $G(10, 10, 20)$ horen 10 banken, 10 stoelen en 20 tafels. De maximale winst is 900 euro.

c $W = 30b + 20s + 25t$

De winst is maximaal bij de grootste b , s en t .

De punten G en D komen dan in aanmerking.

In $G(10, 10, 20)$ is $W = 30b + 20s + 25t = 30 \cdot 10 + 20 \cdot 10 + 25 \cdot 20 = 1000$.

In $D(10, 30, 10)$ is $W = 30b + 20s + 25t = 30 \cdot 10 + 20 \cdot 30 + 25 \cdot 10 = 1150$.

In D komt de hoogste waarde voor.

Een wandeling vanuit D naar B en H geeft:

in $B(10, 30, 0)$ is de winst

$$W = 30b + 10s + 25t = 30 \cdot 10 + 10 \cdot 30 + 25 \cdot 0 = 600$$

in $H(0, 30, 20)$ is de winst

$$W = 30b + 10s + 25t = 30 \cdot 0 + 10 \cdot 30 + 25 \cdot 20 = 800.$$

In B en H is de winst lager, dus in D is de winst maximaal.

Bij $D(10, 30, 10)$ horen 10 banken, 30 stoelen en 10 tafels. De maximale winst is 1150 euro.

Pagina 153

20a Door de positieve factoren 2 en 3 in $W = 2x - y + 3z$ neemt W toe als x en z toenemen.

Door de negatieve factor -1 in $W = 2x - y + 3z$ neemt W toe als y afneemt.

b Voor het maximum van $T = 3x + y - 4z$ moeten x en y zo groot mogelijk zijn en z zo klein mogelijk. De punten B en C komen dan in aanmerking.

Voor B geldt

$$\begin{cases} x = 50 \\ z = 0 \\ x + y + z = 100 \end{cases} \Rightarrow y = 100 - x - z = 100 - 50 - 0 = 50, \text{ dus } B(50, 50, 0).$$

Voor C geldt

$$\begin{cases} y = 80 \\ z = 0 \\ x + y + z = 100 \end{cases} \Rightarrow x = 100 - y - z = 100 - 80 - 0 = 20, \text{ dus } C(20, 80, 0).$$

In $B(50, 50, 0)$ is $T = 3x + y - 4z = 3 \cdot 50 + 50 - 4 \cdot 0 = 200$.

In $C(20, 80, 0)$ is $T = 3x + y - 4z = 3 \cdot 20 + 80 - 4 \cdot 0 = 140$.

In B komt de hoogste waarde voor.

Een wandeling vanuit B naar $A(50, 0, 0)$ geeft

$T = 3x + y - 4z = 3 \cdot 50 + 0 - 4 \cdot 0 = 150$ wat ook lager is. Het maximum is dus 200 in B .

c Voor het minimum van $T = 3x + y - 4z$ moeten x en y zo klein mogelijk zijn en z zo groot mogelijk. Alleen punt $K(0, 0, 80)$ komt dan in aanmerking. Het minimum in K is $T = 3x + y - 4z = 3 \cdot 0 + 0 - 4 \cdot 80 = -320$.

21 De beperkende factoren zijn

$$0 \leq a \leq 100$$

$$0 \leq b \leq 150$$

$$0 \leq c \leq 200$$

$$c = a + b$$

$$3a + 1,5b + 2,5c \leq 750$$

Terugbrengen van drie beslissingsvariabelen naar twee:

Uit $c = a + b$ volgt dat de randvoorwaarden in twee variabelen worden:

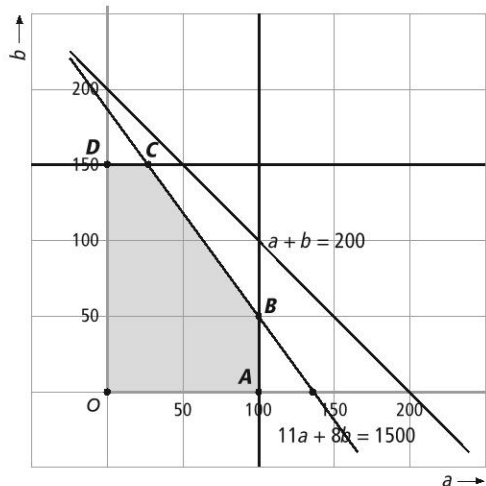
$$0 \leq a \leq 100$$

$$0 \leq b \leq 150$$

$$0 \leq a + b \leq 200$$

$$3a + 1,5b + 2,5(a + b) \leq 750 \Rightarrow 11a + 8b \leq 1500$$

Hieronder staat het toegestane gebied.



De doelfunctie voor de winst W is $W = 50a + 25b + 35c$

In twee variabelen: $W = 50a + 25b + 35(a + b) = 85a + 60b$

De hoekpunten zijn: A (100, 0), B (100, 50), C (27,3, 150) en D (0, 150).

$$W_B = 85 \cdot 100 + 60 \cdot 50 = 11500; \quad W_A = 85 \cdot 100 + 60 \cdot 0 = 8500;$$

$$W_C = 85 \cdot 27,3 + 60 \cdot 150 = 11320,50$$

De maximale winst is dus € 11.500,- als er 100 boekenkasten van type A, 50 van type B en 150 van type C worden gemaakt.

8-5 Lineair programmeren met Excel

Pagina 154

22a r is het aantal koppen rijst.

s is het aantal koppen sojabonen.

$$r \geq 0$$

$$s \geq 0$$

$$3360r + 1120s \geq 6720 \Rightarrow 3r + s \geq 6$$

$$15r + 20s \geq 90$$

$$0,1r + 0,3s \geq 0,9$$

b De doelfunctie is $TK = 70r + 50s$.

Voor het minimum van TK raakt een isolijn (evenwijdig aan de getekende isolijnen) in A.

A is het snijpunt van de lijnen voor energie en voor eiwit, dus geldt voor de coördinaten:

$$\begin{cases} 3360r + 1120s = 6720 \\ 15r + 20s = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3r + s = 6 \\ 15r + 20s = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3r + s = 6 \\ 3r + 4s = 18 \end{cases} \Rightarrow 3s = 12 \Rightarrow s = 4$$

Invullen in $15r + 20s = 90$ geeft $15r + 20 \cdot 4 = 90 \Rightarrow 15r = 10 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$.

In $A\left(\frac{2}{3}, 4\right)$ is het minimum $TK = 70r + 50s = 70 \cdot \frac{2}{3} + 50 \cdot 4 \approx 247$ cent.

Het menu bestaat uit $\frac{2}{3}$ kop rijst en 4 koppen sojabonen per dag.

- c** In het menu zit $0,1 \cdot \frac{2}{3} + 0,3 \cdot 4 \approx 1,27$ mg vitamine B2.

Dat is $1,27 - 0,9 = 0,37$ mg meer dan nodig.

- 23a** In B2 staat 3 en in B3 staat 2.

In C4 staat $= \$B\$2 * C2 + \$B\$3 * C3$, dat is $3 * 3360 + 2 * 1120 = 12\,320$ en het totaal aan energie.

In D4 staat $= \$B\$2 * D2 + \$B\$3 * D3$, dat is $3 * 15 + 2 * 20 = 85$ en het totaal aan eiwitten.

In E4 staat $= \$B\$2 * E2 + \$B\$3 * E3$, dat is $3 * 0,1 + 2 * 0,3 = 0,9$ en het totaal aan vitamine B2.

- b** Nee, want in D4 moet gelden $15r + 20s \geq 90$ en 85 is kleiner dan 90.
De cellen C4 en E4 kloppen wel.

- 24a** Maak B2 en B3 leeg.

Gebruik de 'Oplosser' met:

Doelfunctie: $\$F\4

Naar: Min

Door veranderen van variabelecellen: $\$B\$2:\$B\3

Onderworpen aan de randvoorwaarden:

$\$C\$4 \geq 6720$

$\$D\$4 \geq 90$

$\$E\$4 \geq 0,9$

Oplossen met Simplex LP als oplossingsmethode geeft:

	A	B	C	D	E	F
1	Variabelen	Aantal	Energie	Eiwitten	Vitamine B2	Kosten
2	r (koppen rijst)	0,666667	3360	15	0,1	70
3	s (koppen soja)	4	1120	20	0,3	50
4	Totaal		6720	90	1,26666667	246,6667

Het gewenste menu bestaat uit 0,666667 koppen rijst en 4 koppen sojabonen per dag en kost 246,6667 cent.

- b** Een isolijn tussen de punten (0, 5) en (9, 0) heeft een geschikte helling om B te raken voor een minimum van de doelfunctie.

De helling is $-\frac{5}{9}$. Daarbij past de lijn

$$s = -\frac{5}{9}r + c_1 \Rightarrow 5r + 9s = c \Rightarrow TK = 50r + 90s.$$

Een mogelijke prijs is dus: 50 cent voor een kop rijst en 90 cent voor een kop sojabonen.

De controle in Excel klopt:

	A	B	C	D	E	F
1	Variabelen	Aantal	Energie	Eiwitten	Vitamine B2	Kosten
2	r (koppen rijst)	3,6	3360	15	0,1	50
3	s (koppen soja)	1,8	1120	20	0,3	90
4	Totaal		14112	90	0,9	342

Pagina 155

- 25a** SA = aantal ha suikerbieten bij A
 KA = aantal ha katoen bij A
 SB = aantal ha suikerbieten bij B
 KB = aantal ha katoen bij B

Voor de opbrengst P is de doelfunctie $P = 950(SA + SB) + 700(KA + KB)$.

- b** $SA + KA \leq 150$
 $SB + KB \leq 225$
 $SA + SB \leq 200$
 $KA + KB \leq 190$
 $3SA + 2KA \leq 250$
 $3SB + 2KB \leq 300$

- c** Bijvoorbeeld 10 in B2 en 20 in B3 invullen geeft de som 30 in C6.

d

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
		aantal	oppervlakte kibboets A	oppervlakte kibboets B	suikerbieten kibboets A en B	katoen kibboets A en B	irrigatie kibboets A	irrigatie kibboets B	opbrengst per ha
1									
2	SA		1	0	1	0	3	0	950
3	KA		1	0	0	1	2	0	700
4	SB		0	1	1	0	0	3	950
5	KB		0	1	0	1	0	2	700
6	Totaal		0	0	0	0	0	0	0

Kopieer C6 naar D6, E6, F6, G6, H6 en I6 zodat

in D6 komt = $\$B\$2*\$D2+\$B\$3*\$D3+\$B\$4*\$D4+\$B\$5*\$D5$

in E6 komt = $\$B\$2*\$E2+\$B\$3*\$E3+\$B\$4*\$E4+\$B\$5*\$E5$

in F6 komt = $\$B\$2*\$F2+\$B\$3*\$F3+\$B\$4*\$F4+\$B\$5*\$F5$

in G6 komt = $\$B\$2*\$G2+\$B\$3*\$G3+\$B\$4*\$G4+\$B\$5*\$G5$

in H6 komt = $\$B\$2*\$H2+\$B\$3*\$H3+\$B\$4*\$H4+\$B\$5*\$H5$

in I6 komt = $\$B\$2*\$I2+\$B\$3*\$I3+\$B\$4*\$I4+\$B\$5*\$I5$

- e** Maak B2 tot en met B5 leeg.

Gebruik de 'Oplosser' met:

Doelfunctie: $\$I\6

Naar: Max

Door veranderen van variabelecellen: $\$B\$2:\$B\5

Onderworpen aan de randvoorwaarden:

$\$C\$6 \leq 150$

$\$D\$6 \leq 225$

$\$E\$6 \leq 200$

$\$F\$6 \leq 190$

$\$G\$6 \leq 250$

$\$H\$6 \leq 300$

Oplossen met Simplex LP als oplossingsmethode geeft:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
		aantal	oppervlakte kibboets A	oppervlakte kibboets B	suikerbieten kibboets A en B	katoen kibboets A en B	irrigatie kibboets A	irrigatie kibboets B	opbrengst per ha
1									
2	SA	0	1	0	1	0	3	0	950
3	KA	125	1	0	0	1	2	0	700
4	SB	56,667	0	1	1	0	0	3	950
5	KB	65	0	1	0	1	0	2	700
6	Totaal		125	121,6666667	56,66666667	190	250	300	186833,3

Kibboets A verbouwt alleen 125 ha katoen.

Kibboets B verbouwt 56,7 ha suikerbieten en 65 ha katoen.

De opbrengst is maximaal 186 833 dollar.

- f** Kibboets A moet de mogelijkheid om suikerbieten te verbouwen onbenut laten, terwijl de kibboets nog $150 - 125 = 25$ ha landbouwgrond over heeft.

26a Kibboets B is met 225 ha 1,5 keer groter dan A met 150 ha, dus volgens de afspraak mag B dan 1,5 keer zoveel verbouwen als A voor zowel suikerbieten als katoen.

- b** Klik kolom I in de kop en kies Start > Invoegen > Cellen invoegen.

Klik I1 en tik in: eerlijk verdelen

Vul -1,5 in bij I2 en I3. Vul 1 in bij I4 en I5.

Kopieer H6 naar I6. In I6 komt $=\$B\$2*I2+\$B\$3*I3+\$B\$4*I4+\$B\$5*I5$

- c** Gebruik de 'Oplosser' met:

Doelfunctie: \$J\$6

Naar: Max

Door veranderen van variabelecellen: \$B\$2:\$B\$5

Onderworpen aan de randvoorwaarden:

\$C\$6 <= 150

\$D\$6 <= 225

\$E\$6 <= 200

\$F\$6 <= 190

\$G\$6 <= 250

\$H\$6 <= 300

\$I\$6 = 0

Oplossen met Simplex LP als oplossingsmethode geeft:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		aantal	oppervlakte kibboets A	oppervlakte kibboets B	suikerbieten kibboets A en B	katoen kibboets A en B	irrigatie kibboets A	irrigatie kibboets B	eerlijk verdelen	opbrengst per ha
1										
2	SA	52,667	1	0	1	0	3	0	-1,5	950
3	KA	46	1	0	0	1	2	0	-1,5	700
4	SB	4	0	1	1	0	0	3	1	950
5	KB	144	0	1	0	1	0	2	1	700
6	Totaal		98,666667	148	56,66666667	190	250	300	0	186833,3

Kibboets A verbouwt 52,7 ha suikerbieten en 46 ha katoen.

Kibboets B verbouwt 4 ha suikerbieten en 144 ha katoen.

De opbrengst blijft hetzelfde met maximaal 186 833 dollar.

- d** De irrigatie van kibboets B wordt 50 meer, dus $3SB + 2KB \leq 300$ wordt $3SB + 2KB \leq 350$.

De $50 \cdot 250 = 12\,500$ dollar die het water kost, gaat van de opbrengst af, dus de doelfunctie $P = 950(SA + SB) + 700(KA + KB)$ wordt

$P = 950(SA + SB) + 700(KA + KB) - 12\,500$.

Verander daarom de inhoud van \$J\$6 in $=\$B\$2*I2+\$B\$3*I3+\$B\$4*I4+\$B\$5*I5-50$

Gebruik de 'Oplosser' met:

Doelfunctie: \$J\$6

Naar: Max

Door veranderen van variabelecellen: \$B\$2:\$B\$5

Onderworpen aan de randvoorwaarden:

\$C\$6 <= 150

\$D\$6 <= 225

\$E\$6 <= 200

\$F\$6 <= 190

\$G\$6 <= 250

\$H\$6 <= 350

\$I\$6 = 0

Oplossen met Simplex LP als oplossingsmethode geeft:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		aantal	oppervlakte kibboets A	oppervlakte kibboets B	suikerbieten kibboets A en B	katoen kibboets A en B	irrigatie kibboets A	irrigatie kibboets B	eerlijk verdelen	opbrengst per ha
2	SA	39,333	1	0	1	0	3	0	-1,5	950
3	KA	66	1	0	0	1	2	0	-1,5	700
4	SB	34	0	1	1	0	0	3	1	950
5	KB	124	0	1	0	1	0	2	1	700
6	Totaal		105,33333	158	73,33333333	190	250	350	0	190166,7

De opbrengst is nu maximaal 190 167 dollar, wat meer is dan de 186 833 dollar zonder de wateraankoop. Het is dus voordelig voor B om het water te kopen.

8-6 Gemengde opdrachten

Pagina 156

27a Alle teelaarde van kwaliteit 3 vormt 50% van de teelaarde van kwaliteit 4.

Alle teelaarde van kwaliteit 3 weegt 10 ton, dus 1% komt overeen met

$$\frac{10}{50} = 0,2 \text{ ton.}$$

20% van kwaliteit 1 weegt $20 \cdot 0,2 = 4$ ton en kost $4 \cdot 57 = 228$ euro.

30% van kwaliteit 2 weegt $30 \cdot 0,2 = 6$ ton en kost $6 \cdot 51 = 306$ euro.

De teelaarde van kwaliteit 4 weegt $10 + 4 + 6 = 20$ ton en kost

$$10 \cdot 46 + 228 + 306 = 994 \text{ euro.}$$

Dat is $\frac{994}{20} = 49,70$ euro per ton.

b 10 ton van kwaliteit 3 bevat $10 \cdot 90 = 900$ gram koper.

4 ton van kwaliteit 1 bevat $4 \cdot 33 = 132$ gram koper.

6 ton van kwaliteit 2 bevat $6 \cdot 45 = 270$ gram koper.

De 20 ton van kwaliteit 4 bevat dus $900 + 132 + 270 = 1302$ gram koper.

Dat is $\frac{1302}{20} = 65,1$ gram koper per ton, dus kwaliteit 4 voldoet niet aan de milieueis.

c $a \geq 0$

$b \geq 0$

Alle aarde van kwaliteit 3 weegt 10 ton en vormt $(100 - a - b)\%$ van het

mengsel, dus 1% teelaarde komt overeen met $\frac{10}{100 - a - b}$ ton.

$$\frac{\text{gram koper}}{\text{gewicht}} = \frac{10 \cdot 90 + a \cdot \frac{10}{100 - a - b} \cdot 33 + b \cdot \frac{10}{100 - a - b} \cdot 45}{10 + a \cdot \frac{10}{100 - a - b} + b \cdot \frac{10}{100 - a - b}} \leq 60 \Rightarrow$$

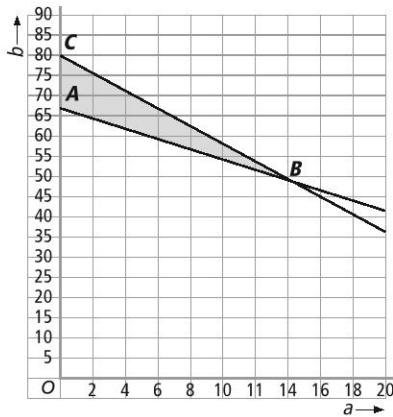
$$\frac{900(100 - a - b) + 330a + 450b}{10(100 - a - b) + 10a + 10b} \leq 60 \Rightarrow \frac{90000 - 900a - 900b + 330a + 450b}{1000 - 10a - 10b + 10a + 10b} \leq 60 \Rightarrow$$

$$90000 - 570a - 450b \leq 60000 \Rightarrow -19a - 15b \leq -1000$$

$$\frac{\text{kosten}}{\text{gewicht}} = \frac{10 \cdot 46 + a \cdot \frac{10}{100 - a - b} \cdot 57 + b \cdot \frac{10}{100 - a - b} \cdot 51}{10 + a \cdot \frac{10}{100 - a - b} + b \cdot \frac{10}{100 - a - b}} \leq 50 \Rightarrow$$

$$\frac{460(100 - a - b) + 570a + 510b}{10(100 - a - b) + 10a + 10b} \leq 50 \Rightarrow \frac{46000 - 460a - 460b + 570a + 510b}{1000 - 10a - 10b + 10a + 10b} \leq 50 \Rightarrow$$

$$46000 + 110a + 50b \leq 50000 \Rightarrow 11a + 5b \leq 400$$



De doelfunctie AB is het verbruik van a en b samen, dus $AB = a + b$.

Voor een minimum van de doelfunctie moeten a en b zo klein mogelijk zijn.

De punten A en B komen in aanmerking.

In A is $AB \approx 0 + 67 = 67$. In B is $AB \approx 14 + 49 = 63$, dus B is de beste keuze.

B is het snijpunt van de twee grenslijnen. Oplossen geeft:

$$\begin{cases} -19a - 15b = -1000 \\ 11a + 5b = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -19a - 15b = -1000 \\ 33a + 15b = 1200 \end{cases} \Rightarrow 14a = 200 \Rightarrow a = 14\frac{2}{7} \approx 14,3.$$

Invullen in $11a + 5b = 400$ geeft $5b = 400 - 11 \cdot 14\frac{2}{7} \Rightarrow b = 48\frac{4}{7} \approx 48,6$.

Het nieuwe mengsel moet dus 14,3% van kwaliteit 1 bevatten, 48,6% van kwaliteit 2 en $100 - 14,3 - 48,6 = 37,1\%$ van kwaliteit 3.

- 28** Voor 1 liter verf volgens bereidingswijze 1 is $\frac{3}{6}$ liter A nodig, $\frac{2}{6}$ liter B en $\frac{1}{6}$ liter C.

Voor 1 liter verf volgens bereidingswijze 2 is $\frac{5}{8}$ liter A nodig, $\frac{1}{8}$ liter B en $\frac{2}{8}$ liter C.

Als p liter verf volgens bereidingswijze 1 wordt gemaakt en q liter verf volgens bereidingswijze 2, dan is $\frac{3}{6}p + \frac{5}{8}q$ liter A nodig, $\frac{2}{6}p + \frac{1}{8}q$ liter B en $\frac{1}{6}p + \frac{2}{8}q$ liter C.

Daarmee wordt $\frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q$ liter binnenv verf gemaakt en $\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q$ liter buitenverf.

De beperkende voorwaarden zijn:

$$p \geq 0$$

$$q \geq 0$$

$$p \leq 1200$$

$$q \leq 1500$$

$$\frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q \geq 540$$

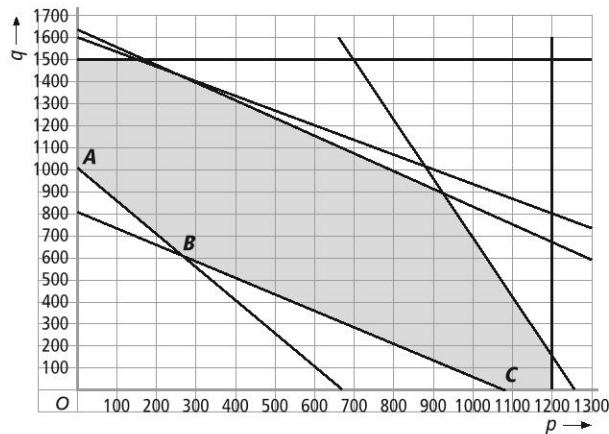
$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q \geq 335$$

$$\frac{3}{6}p + \frac{5}{8}q \leq 1020$$

$$\frac{2}{6}p + \frac{1}{8}q \leq 420$$

$$\frac{1}{6}p + \frac{2}{8}q \leq 400$$

De doelfunctie voor de kosten K is $K = 10p + 8q$ en minimaal als p en q zo klein mogelijk zijn.



De punten A , B en C komen in aanmerking. Schat door aflezen van de coördinaten:

In $A \approx (0, 1000)$ is $K \approx 8000$, in $C \approx (1080, 0)$ is $K \approx 10800$ en in $B \approx (270, 620)$ is $K \approx 10 \cdot 270 + 8 \cdot 620 = 7660$, dus in B is K minimaal.

B is het snijpunt van de grenslijnen $\frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q = 540$ en $\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q = 335$.

Oplossen geeft:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q = 540 \\ \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q = 335 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q = 540 \\ p + \frac{2}{3}q = 670 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}p = 130 \Rightarrow p = 260.$$

Invullen in $\frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q = 540$ geeft $\frac{1}{2} \cdot 260 + \frac{2}{3}q = 540 \Rightarrow q = \frac{3}{2}(540 - 130) = 615$.

Het advies is dus om 260 liter verf te laten maken met bereidingswijze 1 en 615 liter met bereidingswijze 2.

Er wordt dan $\frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q = \frac{1}{2} \cdot 260 + \frac{2}{3} \cdot 615 = 540$ liter binnenverf gemaakt en

$\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}q = \frac{1}{2} \cdot 260 + \frac{1}{3} \cdot 615 = 335$ liter buitenverf.

De kosten voor de productie bedragen $10p + 8q = 10 \cdot 260 + 8 \cdot 615 = 7520$ euro.

Pagina 157

29a Er komt $\frac{4}{5} \cdot 260 = 208$ ton aan. Dat is minder dan de $100 + 120 = 220$ ton die nodig is.

b Van 1 ton geladen in Hilim en verstuurd per vrachtwagen, komt $\frac{4}{5} \cdot 1 = 0,8$ ton aan in Ayeh.

Om 1 ton aan te laten komen in Ayeh moet dus $\frac{1}{0,8} = 1,25$ ton ingeladen worden in Hilim.

Het aanvoeren van 1,25 ton naar Hilim kost $1,25 \cdot 300 = 375$ dollar.

De levering van 1 ton in Ayeh per vrachtwagen kost dus

$1,25 \cdot 40 + 375 = 425$ dollar.

De levering van 1 ton in Ayeh per vliegtuig kost $150 + 300 = 450$ dollar.

Het vliegtuig is $450 - 425 = 25$ dollar duurder.

c Afgeleverd in Ayeh: $0,8x + u = 120 \Rightarrow u = 120 - 0,8x$

Afgeleverd in Biopa: $0,8y + v = 100 \Rightarrow v = 100 - 0,8y$

Er wordt $x + u$ ton naar Ayeh verzonden.

Er wordt $y + v$ ton naar Biopa verzonden.

De kosten naar Ayeh zijn

$40x + 150u = 40x + 150(120 - 0,8x) = 18000 - 80x$.

De kosten naar Biopa zijn $60y + 200v = 60y + 200(100 - 0,8y) = 20\,000 - 100y$.

De kosten om de te verzenden rijst aan te voeren in Hilim zijn

$$300(x + u + y + v) = 300(x + (120 - 0,8x) + y + (100 - 0,8y)) =$$

$$300x + 36\,000 - 240x + 300y + 30\,000 - 240y = 66\,000 + 60x + 60y.$$

De totale kosten zijn dus

$$K = (18\,000 - 80x) + (20\,000 - 100y) + (66\,000 + 60x + 60y) = 104\,000 - 20x - 40y.$$

- d** Uitsluitend vervoer per vrachtwagen is de ongunstigste transportmogelijkheid.

Voor alle 120 ton naar Ayeh per vrachtwagen moet dan $1,25 \cdot 120 = 150$ ton verstuurd worden.

Voor alle 100 ton naar Biopa per vrachtwagen moet dan $1,25 \cdot 120 = 125$ ton verstuurd worden.

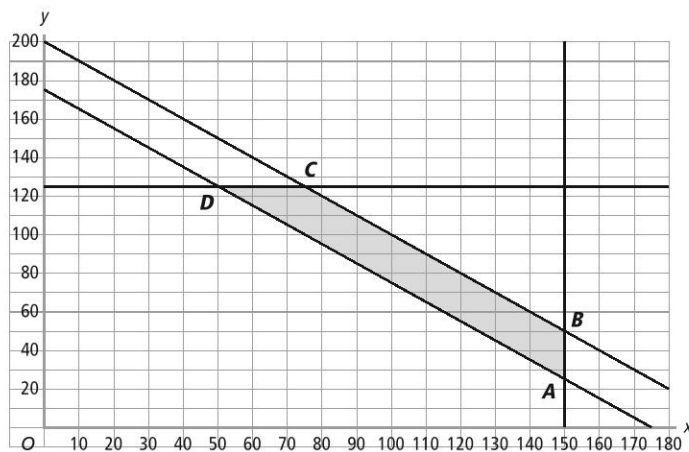
- e** De beperkende voorwaarden zijn:

$$x \leq 150$$

$$y \leq 125$$

$$u + v \leq 80 \Rightarrow 120 - 0,8x + 100 - 0,8y \leq 80 \Rightarrow x + y \geq 175$$

$$x + u + y + v \leq 260 \Rightarrow x + 120 - 0,8x + y + 100 - 0,8y \leq 260 \Rightarrow x + y \leq 200$$



$K = 104\,000 - 20x - 40y$ is minimaal als x en y zo groot mogelijk zijn.

Alleen de punten B en C komen in aanmerking. De punten liggen op de lijn $x + y = 200$.

In $B(150, 50)$ is $K = 104\,000 - 20 \cdot 150 - 40 \cdot 50 = 103\,000$ dollar.

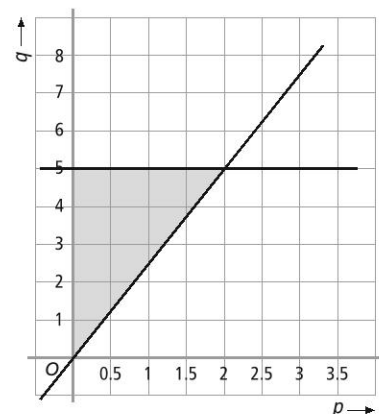
In $C(75, 125)$ is $K = 104\,000 - 20 \cdot 75 - 40 \cdot 125 = 97\,500$ dollar.

In C zijn de kosten minimaal en zijn $x = 75$, $y = 125$,

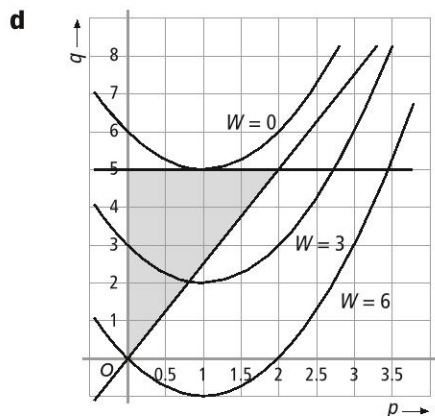
$$u = 120 - 0,8x = 120 - 0,8 \cdot 75 = 60 \text{ en } v = 100 - 0,8y = 100 - 0,8 \cdot 125 = 0.$$

Naar Ajeh moet dus 75 ton per vrachtwagen en 60 ton per vliegtuig en naar Biopa moet 125 ton per vrachtwagen en 0 ton per vliegtuig.

30a



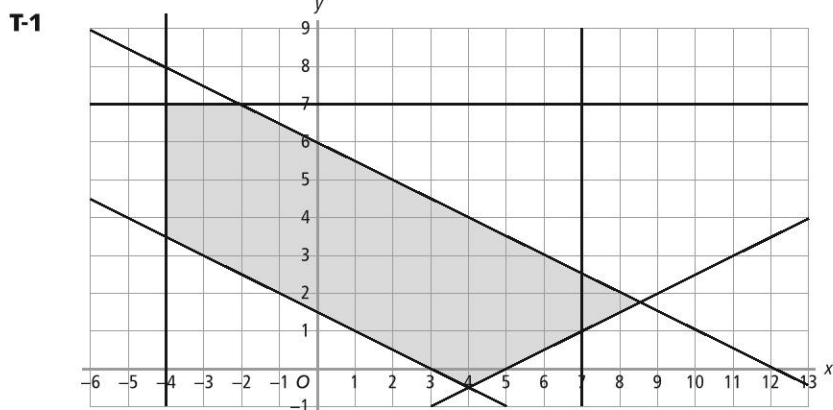
- b** Voor rechte isolijnen moet de doelfunctie de vorm $ap + bq = c$ hebben.
 $(p - 1)^2 - q + 5 = W$ kan niet in deze vorm geschreven worden.
- c** De vorm van een dalparabool



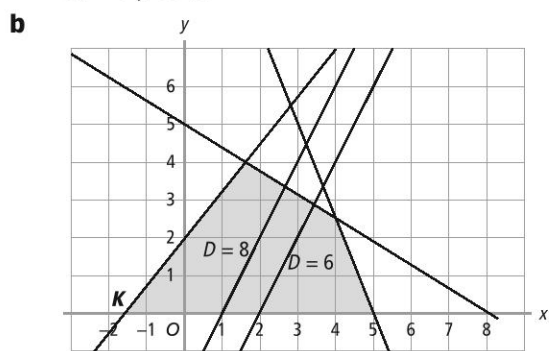
Voor $W = 0$ en $W = 6$ raken de isolijnen het toegestane gebied nog in één punt.
 Het minimum is dus $W = 0$ en het maximum is $W = 6$.

Test jezelf

Pagina 160



- T-2** $y \geq 0$
 $(1, 1)$ ligt in het toegestane gebied, dus de ongelijkheden moeten in $(1, 1)$ gelden: $5x + 8y = 5 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 13 \leq 40$ dus $5x + 8y \leq 40$.
 $-5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = -1 \leq 8$ dus $-5x + 4y \leq 8$.
 $y = -2,5x + 12,5 \Rightarrow 5x + 2y = 25$. Invullen geeft $5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 7 \leq 25$ dus $5x + 2y \leq 25$.



- c** De doelfunctie is maximaal in punt K .
 K is het snijpunt van de x -as met de grenslijn $-5x + 4y = 8$, dus voor K geldt $x = -1,6$ en $y = 0$.
 De maximale waarde is $D = 10 - 2x + y = 10 - 2 \cdot -1,6 + 0 = 13,2$.
- T-3** De doelfunctie $H = 20 - 4x - 3y$ is minimaal als x en y zo groot mogelijk zijn, dus K valt af.
 N is het snijpunt van $5x + 8y = 40 \Rightarrow 5x = 40 - 8y$ en $-5x + 4y = 8 \Rightarrow 5x = -8 + 4y$
 Deze lijnen snijden geeft $40 - 8y = -8 + 4y \Rightarrow 12y = 48 \Rightarrow y = 4$ en $x = 1,6$
 Dus $N(1,6; 4)$
 M is het snijpunt van de lijnen $5x + 8y = 40 \Rightarrow 8y = 40 - 5x$ en $y = -2,5x + 12,5 \Rightarrow 8y = -20x + 100$ Deze lijnen snijden geeft $40 - 5x = -20x + 100 \Rightarrow 15x = 60 \Rightarrow x = 4$ en $y = 2,5$
 Dus $M(4; 2,5)$ en $L(5, 0)$
 Randenvandelen met de doelfunctie H geeft:
 $H_N = 20 - 4 \cdot 1,6 - 3 \cdot 4 = 20 - 6,4 - 12 = 1,6$
 $H_M = 20 - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 2,5 = 20 - 16 - 7,5 = -3,5$
 $H_L = 20 - 4 \cdot 5 - 3 \cdot 0 = 0$
 De minimum waarde van H is dus $-3,5$.
- T-4a** $0 \leq s \leq 5$
 $0 \leq k \leq 4$
 $k + s \leq 6$
 $k + s + b \leq 12$
- b** Voor alle punten is de eerste coördinaat 5, wat bij het maximaal aantal stoelen hoort.
- c** Voor C, D, G en H is de tweede coördinaat 4, wat hoort bij het maximaal aantal kasten.
 Voor E, F, G, H en I is de som van de coördinaten 12, wat hoort bij het maximaal aantal van 12 meubels.
- d** De doelfunctie voor de kosten K in euro's is $K = 4s + 5k + 2,5b$.
 K is maximaal als s, k en b zo groot mogelijk zijn.
 De punten F en G komen in aanmerking.
 In $F(5, 1, 6)$ is $K = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 2,5 \cdot 6 = 40$.
 In $G(2, 4, 6)$ is $K = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 2,5 \cdot 6 = 43$.
 Bij 2 stoelen, 4 kasten en 6 bijzettafeltjes is de opbrengst 43 euro en maximaal.

Pagina 161

- T-5** Gebruik voor de opdracht het bijbehorende Excelrekenblad.
 AA = aandelen, OB = obligaties, OG = onroerend goed, GE = groene energie.
 De waarde van het variabelen is het bedrag in miljoenen euro's dat in het fonds is geïnvesteerd.
 Beperkende voorwaarden:
 $AA + OB + OG + GE = 30$
 $AA \geq 3$
 $OB \geq 3$
 $OG \geq 3$
 $GE \geq 3$

$$AA + OB \geq 10$$

$$AA \leq 2OB \Rightarrow AA - 2OB \leq 0$$

$$GE \leq AA + OB + OG \Rightarrow -AA - OB - OG + GE \leq 0$$

De doelfunctie voor de opbrengst P is

$$P = 0,08 \cdot AA + 0,07 \cdot OB + 0,09 \cdot OG + 0,11 \cdot GE.$$

Gebruik de 'Oplosser' met:

Doelfunctie: \$G\$6

Naar: Max

Door veranderen van variabelecellen: \$B\$2:\$B\$5

Onderworpen aan de randvoorwaarden:

$$B\$2 \geq 3$$

$$B\$3 \geq 3$$

$$B\$4 \geq 3$$

$$B\$5 \geq 3$$

$$C\$6 = 30$$

$$D\$6 \geq 10$$

$$E\$6 \leq 0$$

$$F\$6 \leq 0$$

Oplossen met Simplex LP als oplossingsmethode geeft:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Variabelen	Aantal	Voorwaarde 1	Voorwaarde 2	Voorwaarde 3	Voorwaarde 4	Doelfunctie
2	AA	6,666667	1	1	1	-1	0,08
3	OB	3,333333	1	1	-2	-1	0,07
4	OG	5	1			-1	0,09
5	GE	15	1			1	0,11
6	Totaal		30	10	0	0	2,86666667

Er moet 6,67 miljoen euro in aandelen, 3,33 miljoen in obligaties, 5 miljoen in onroerend goed en 15 miljoen in groene energie geïnvesteerd worden om een maximale verwachte opbrengst van 2,87 miljoen euro te geven.

T-6a Verander cel G2 van 0,08 in 0,04 en gebruik de 'Oplosser' weer.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Variabelen	Aantal	Voorwaarde 1	Voorwaarde 2	Voorwaarde 3	Voorwaarde 4	Doelfunctie
2	AA	3	1	1	1	-1	0,04
3	OB	7	1	1	-2	-1	0,07
4	OG	5	1			-1	0,09
5	GE	15	1			1	0,11
6	Totaal		30	10	-11	0	2,71

Aan aandelen wordt nu 3 miljoen euro besteed en aan obligaties 7 miljoen euro.

De bedragen voor OG en GE veranderen niet.

b De verwachte maximale opbrengst wordt nu 2,71 miljoen euro.

c Voeg de beperkende voorwaarde $GE \leq 12$ toe:

Voeg toe in Onderworpen aan de randvoorwaarden:

$$B\$5 \leq 12$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Variabelen	Aantal	Voorwaarde 1	Voorwaarde 2	Voorwaarde 3	Voorwaarde 4	Doelfunctie
2	AA	6,666667	1	1	1	-1	0,08
3	OB	3,333333	1	1	-2	-1	0,07
4	OG	8	1			-1	0,09
5	GE	12	1			1	0,11
6	Totaal		30	10	0	-6	2,80666667

De verwachte maximale opbrengst wordt nu 2,81 miljoen euro en neemt dus met $2,86 - 2,81 = 0,05$ miljoen euro af.

T-7 d = aantal zakken naar Dar es Salaam
 k = aantal zakken naar Kilwa Masoko
 l = aantal zakken naar Lindi

Beperkende voorwaarden:

$$0 \leq d \leq 200$$

$$0 \leq k \leq 200$$

$$0 \leq l \leq 200$$

$$d + k + l = 200$$

$$13d + k + 10l \leq 1700$$

Voor de winst W in shilling geldt

$$W = d \cdot 120 \cdot 1 + k \cdot 120 \cdot 0,60 + l \cdot 120 \cdot 0,80 - d \cdot 13 - k \cdot 1 - l \cdot 10$$

$$W = 107d + 71k + 86l$$

Terugbrengen naar twee variabelen:

$$d + k + l = 200 \Rightarrow l = 200 - d - k$$

daarmee volgen als beperkende voorwaarden voor twee variabelen:

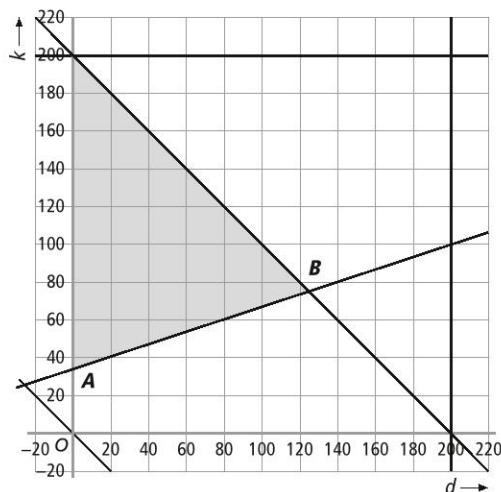
$$0 \leq d \leq 200$$

$$0 \leq k \leq 200$$

$$l \geq 0 \Rightarrow 200 - d - k \geq 0 \Rightarrow -d - k \geq -200$$

$$l \leq 200 \Rightarrow 200 - d - k \leq 200 \Rightarrow -d - k \leq 0$$

$$13d + k + 10l \leq 1700 \Rightarrow 13d + k + 10(200 - d - k) \leq 1700 \Rightarrow d - 3k \leq -100$$



De winstfunctie wordt

$$W = 107d + 71k + 86(200 - d - k) = 21d - 15k + 17200$$

en is maximaal als d zo groot mogelijk is en k zo klein mogelijk.

De punten A en B komen in aanmerking.

A is het snijpunt van de lijn $d - 3k = -100$ en de k -as, dus $A(0, 33\frac{1}{3})$.

B is het snijpunt van de grenslijnen $-d - k = -200$ en $d - 3k = -100$.

Oplossen geeft: $d = 125$ en $k = 75$. Dus $B(125, 75)$

$$W_A = 21 \cdot 33\frac{1}{3} - 15 \cdot 0 + 17200 = 17900.$$

$$W_B = 21 \cdot 125 - 15 \cdot 75 + 17200 = 18700.$$

In B is dus de maximumwaarde van W .

Hierbij hoort $l = 200 - d - k = 0$.

De verkoop van 125 zakken aan Dar es Salaam, 75 zakken aan Kilwa Masoko en 0 zakken aan Lindi geeft de maximale winst van 18 700 shilling.

Hoofdstuk 9 – Matrices

9-1 Matrices

Pagina 252:

- 1a Per week gaan er $12 + 7 + 6 = 25$ auto's weg uit Amsterdam. Na vier weken is de voorraad nog $300 - 4 \times 25 = 200$ auto's.
- Per week gaan er $0 + 8 + 4 = 12$ auto's weg uit Rotterdam. Na vier weken is de voorraad nog $200 - 4 \times 12 = 152$ auto's.
- b Rotterdam kan 16 weken leveren want $16 \times 12 = 192$ auto's. Amsterdam kan 12 weken leveren want $12 \times 25 = 300$ auto's. Amsterdam is als eerste door de voorraad heen.

2a

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{c} BS \quad OC \quad GP \quad PC \quad VS \quad CC \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

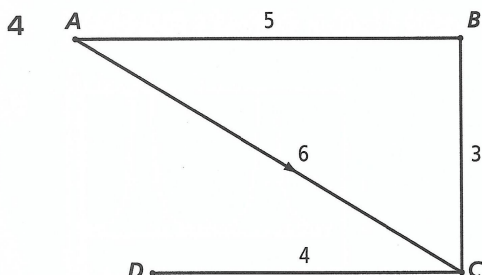
- b Je kunt vanuit elk station vertrekken maar omgekeerd kun je ook in elk station arriveren.

3a

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{c} BS \quad OC \quad GP \quad PC \quad VS \quad CC \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

- b Je hebt aan een halve matrix genoeg omdat deze symmetrisch is in de hoofddiagonaal. Als er bijvoorbeeld van VS naar GP een directe verbinding is dan is er die ook van GP naar VS. Je kunt kiezen uit de linker onderhelft of de rechter bovenhelft.
- c De haltes met de meeste enen in een rij of kolom liggen het meest centraal omdat die het vaakst direct zijn verbonden met een ander station. In dit geval zijn dat OC en GP.

Pagina 253:



$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{c} A \quad B \quad C \quad D \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{c} A \quad B \quad C \quad D \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 0 & 4 \\ 10 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

5a

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ \text{naar} \end{array} \begin{array}{c} \text{Al} \\ \text{Ut} \\ \text{Zw} \end{array} \begin{pmatrix} 148800 & 86800 & 74400 \\ 0 & 99200 & 49600 \end{pmatrix}$$

b

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \text{van} \end{array} \begin{array}{c} \text{Al} \\ \text{Ut} \\ \text{Zw} \end{array} \begin{pmatrix} 17 & 11 & 9 \\ 11 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

$$6a \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+5 & -4+0 \\ 3+(-1) & 9+7 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 2 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 1 \\ 3 \times -2 & 3 \times 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \times 6 & 4 \times -2 \\ 4 \times 0 & 4 \times 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \times 4 & -5 \times 0 \\ -5 \times -2 & -5 \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6+24-20 & 3-8+0 \\ -6+0+10 & 12+4-2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 4 & 13\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

9-2 Matrices vermenigvuldigen

Pagina 254:

7a $50 \times 17 + 20 \times 21 + 25 \times 29 = 1995$ dus het klopt.b Steeds is het de optelling van aantal $\times$ prijs voor de verhoging. Dus is het de weekopbrengst in euro's van de verkoop van alle gereedschappen in Rotterdam voor de prijsverhoging.c eerste rij $\times$ eerste kolom geeft $35 \times 17 + 15 \times 21 + 30 \times 29 = 1780$ eerste rij $\times$ tweede kolom geeft $35 \times 18 + 15 \times 23 + 30 \times 32 = 1935$ tweede rij $\times$ tweede kolom geeft $50 \times 18 + 20 \times 23 + 25 \times 32 = 2160$

$V \times P$	$\begin{array}{c} \text{voor} \\ \text{ha} \end{array} \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 21 & 23 \\ 29 & 32 \end{pmatrix}$
$\begin{array}{c} \text{ha} \\ \text{be} \\ \text{ze} \end{array} \begin{pmatrix} 35 & 15 & 30 \\ 50 & 20 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} \text{voor} \\ \text{Na} \end{array} \begin{pmatrix} 1780 & 1935 \\ 1995 & 2160 \end{pmatrix}$

d De weekopbrengst vóór de prijsverhoging is $1780 + 1995 = 3775$ euro.e De prijsverhoging levert $(1935 + 2160) - 3775 = 320$ euro op.

Pagina 255:

$$8a \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$b \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot -1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot -1 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot -1 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 2 \\ -3 \cdot 2 & -3 \cdot -1 & -3 \cdot 3 & -3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

c $(2 - 1 + 1 - 2 \quad 2 - 3 + 1 - 4) = (4 \quad 10)$

b
$$\begin{pmatrix} -1 - 8 + 3 - -3 \\ 0 - 8 + 1 - -3 \\ 2 - 8 + -1 - -3 \\ -2 - 8 + 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -3 \\ 19 \\ -31 \end{pmatrix}$$

9a Pagina 252

$P \times B$			<i>olympix</i> <i>super</i>	
	<i>small</i>	<i>medium</i>	<i>small</i>	<i>super</i>
<i>olympix</i>	60	75	5	2
<i>super</i>	75	85	4	6
			8	3

			<i>olympix</i> <i>super</i>	
	<i>small</i>	<i>medium</i>	<i>ol.</i>	<i>su.</i>
<i>olympix</i>	60	75	1320	840
<i>super</i>	75	85	1475	945

b De getallen 1 320 en 945 hebben betekenis.

De totaalprijs van de trainingspakken van het merk Olympix is 1320 euro en van het merk Super is dat 945 euro.

c De penningmeester is in totaal $1320 + 945 = 2265$ euro kwijt.

d

$B \times P$			<i>small</i> <i>medium</i> <i>large</i>		
			<i>olympix</i>		
			<i>super</i>		
			60	75	90
			75	85	95

		<i>small</i> <i>medium</i> <i>large</i>		
<i>olympix</i>	<i>super</i>	<i>small</i>	<i>medium</i>	<i>large</i>
5	2	450	545	640
4	6	690	810	930
8	3	705	855	1005

De getallen op de hoofddiagonaal hebben een zinvolle betekenis namelijk de totale kosten per maat in euro's.

De totale kosten zijn $450 + 810 + 1005 = 2265$ euro.

10a $KL = \begin{pmatrix} 51 & 20 & 38 \\ 71 & 28 & 53 \\ 11 & 4 & 8 \end{pmatrix}; LK = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 50 & 80 \end{pmatrix}$

b Nee, want $K \times L$ is een 3×3 matrix en $L \times K$ is een 2×2 matrix.

c Het aantal kolommen (= de lengte van een rij) van M is niet gelijk aan het aantal rijen (= de lengte van een kolom) van K .

d $K \times M = \begin{pmatrix} 9 & 38 & 30 & 52 \\ 12 & 53 & 42 & 74 \\ 3 & 7 & 6 & 12 \end{pmatrix}; L \times M$ en $M \times L$ zijn niet te berekenen.

e $N \times M = M$

f $N \times N = N$

11a Bijvoorbeeld

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$ of eenvoudiger $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- b De gezochte matrix moet een 2×1 matrix zijn want $3 \times 2 \cdot 2 \times 1 \rightarrow 3 \times 1$

Stel de gezochte matrix is $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Dan moet gelden $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dit geeft $\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x-5y \\ -6x+7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \Rightarrow 4x+6y=10 \Rightarrow 4x=10-6y \\ 4x-5y=-1 \end{cases}$$

De eerste in de tweede substitueren geeft $10-6y-5y=-1 \Rightarrow 11y=11 \Rightarrow y=1$ en dus $x=1$.

Kijken of dit ook klopt met de derde vergelijking $-6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 1$ klopt. Dus $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9-3 Overgangsmatrices

Pagina 256:

- 12a Er zijn 497 auto's van de Eendweg die via het plein naar de Gansstraat gaan.
De som van de eerste kolom geeft het aantal auto's van de Eendweg, dus 900.
- b De som van alle getallen in de matrix is 4000, het aantal auto's dat het Vogelplein passeert.

c $\frac{497}{900} \approx 0,552$

d

	van		
	E	F	G
naar E	0,009	0,489	0,471
naar F	0,439	0,009	0,526
naar G	0,552	0,502	0,003

- e $0,009 \times 1200 + 0,489 \times 1550 + 0,471 \times 2250 = 1829$ auto's verlaten het plein richting Eendweg
 $0,439 \times 1200 + 0,009 \times 1550 + 0,526 \times 2250 = 1724$ auto's verlaten het plein richting Fuutlaan
 $0,552 \times 1200 + 0,502 \times 1550 + 0,003 \times 2250 = 1447$ auto's verlaten het plein richting Gansstraat

- 13a De som van de fracties uit P en S is 1.

b

	van	
	S	P
naar S	0,98	0,08
naar P	0,02	0,92

$$= A$$

c $A \times B = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,08 \\ 0,02 & 0,92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 62\,000 \\ 38\,000 \end{pmatrix}$

- d Begin 2004 woonden er 62 000 mensen in de stad en 38 000 op het platteland.

Pagina 257:

- 14a In 2002 vierden $546 + 104 = 650$ personen Sinterklaas.
Hiervan vierden 104 geen Sinterklaas in 2003.

b

	van	
	W	N
naar W	0,84	0,20
naar N	0,16	0,80

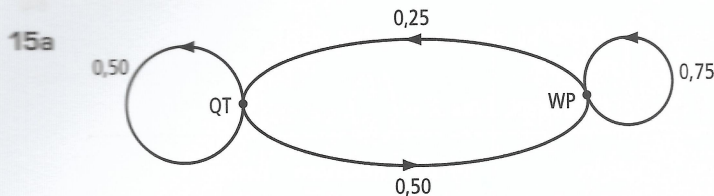
$$= M$$

c
$$\begin{pmatrix} 0,84 & 0,20 \\ 0,16 & 0,80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 650 \\ 335 \end{pmatrix} = \begin{matrix} W \\ N \end{matrix} \begin{pmatrix} 613 \\ 372 \end{pmatrix} \text{ in 2003}$$

$$\begin{pmatrix} 0,84 & 0,20 \\ 0,16 & 0,80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 613 \\ 372 \end{pmatrix} = \begin{matrix} W \\ N \end{matrix} \begin{pmatrix} 589 \\ 396 \end{pmatrix} \text{ in 2004}$$

$$\begin{pmatrix} 0,84 & 0,20 \\ 0,16 & 0,80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 589 \\ 396 \end{pmatrix} = \begin{matrix} W \\ N \end{matrix} \begin{pmatrix} 574 \\ 411 \end{pmatrix} \text{ in 2005}$$

In 2004 vierden 589 mensen Sinterklaas. In 2005 waren dat er nog 574.

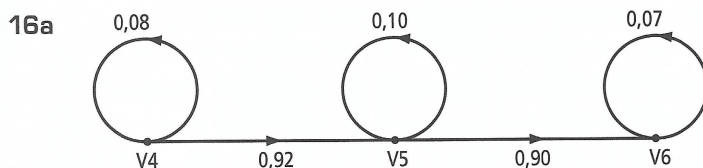


b van
 naar
$$\begin{matrix} QT & WP \\ QT & \begin{pmatrix} 0,50 & 0,25 \\ 0,50 & 0,75 \end{pmatrix} = M \end{matrix}$$

c Het is een vereenvoudiging van de werkelijkheid en een wiskundige beschrijving van de overgangen.

d
$$\begin{pmatrix} 0,50 & 0,25 \\ 0,50 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{matrix} QT \\ WP \end{matrix} \begin{pmatrix} 225 \\ 375 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0,50 & 0,25 \\ 0,50 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 225 \\ 375 \end{pmatrix} = \begin{matrix} QT \\ WP \end{matrix} \begin{pmatrix} 206 \\ 394 \end{pmatrix}$$

Na één maand tanken 375 mensen bij de 'Witte Pomp'. Na twee maanden zijn dat er 394.



- b In 4 VWO blijft 8% zitten.
 c In 6VWO slaagt $100\% - 7\% = 93\%$.
 d Ja, als iemand een klas overslaat of teruggeplaatst wordt.
 e Er vertrekt niemand en er komt geen nieuwe leerling op school.
 f Gebruik je rekenmachine en bereken de machten van M .

van
 naar
$$\begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & \begin{pmatrix} 0,0064 & 0 & 0 \\ 0,1656 & 0,010 & 0 \\ 0,8280 & 0,153 & 0,0049 \end{pmatrix} = M^2 \end{matrix}$$

van
 naar
$$\begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & \begin{pmatrix} 0,0005 & 0 & 0 \\ 0,0224 & 0,0010 & 0 \\ 0,2070 & 0,0197 & 0,0003 \end{pmatrix} = M^3 \end{matrix}$$

In M^2 staan de fracties per 2 jaar, 82,8% van de leerlingen in 4 vwo zit 2 jaar later in 6 vwo bijvoorbeeld en in M^3 staan de fracties per 3 jaar.

9-4 Machten van matrices

Pagina 258:

17a

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ A \quad B \quad C \\ \text{naar} \end{array} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} = M$$

b $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ is de verdeling aan het eind van de dag.

c

dag	1	2	3	4	5	6
A	36	38	39	40	40	40
B	24	22	21	20	20	20
C	30	30	30	30	30	30

d Na vier dagen verandert de verdeling niet meer.

18a 170 inwoners blijven in A, zodat de overgangskans van A naar A gelijk is aan $\frac{170}{200} = 0,85$

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ A \quad B \quad C \\ \text{naar} \end{array} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,05 & 0,06 \\ 0,05 & 0,88 & 0,10 \\ 0,10 & 0,07 & 0,84 \end{pmatrix} = M$$

b $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,05 & 0,06 \\ 0,05 & 0,88 & 0,10 \\ 0,10 & 0,07 & 0,84 \end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 227 \\ 342 \\ 431 \end{pmatrix}$ begin 2009

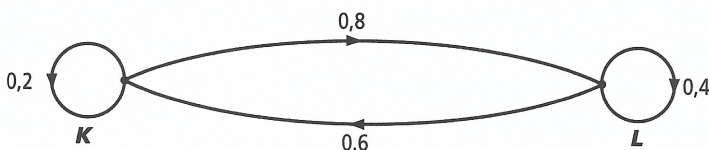
$\begin{pmatrix} 0,85 & 0,05 & 0,06 \\ 0,05 & 0,88 & 0,10 \\ 0,10 & 0,07 & 0,84 \end{pmatrix}^4 \times \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 \\ 365 \\ 392 \end{pmatrix}$ begin 2011

c Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,05 & 0,06 \\ 0,05 & 0,88 & 0,10 \\ 0,10 & 0,07 & 0,84 \end{pmatrix}^{100} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 267 \\ 394 \\ 339 \end{pmatrix} = V$

en $M \times V = V$ dus is de stabiele verdeling: 267 in A, 394 in B en 339 inwoners in C.

Pagina 259:

19a



b In een stabiele situatie moet gelden:

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \Rightarrow 0,2K + 0,6L = K \Rightarrow 0,8K = 0,6L \Rightarrow 8K = 6L$$

$$\Rightarrow 0,8K + 0,4L = L \Rightarrow 0,8K = 0,6L \Rightarrow 8K = 6L$$

- c Uit $8K = 6L$ volgt $K = 0,75L$.
Omdat ook geldt $K + L = 1400$ vind je na het invullen van $K = 0,75L$ dat $0,75L + L = 1400$.

Dus is $L = \frac{1400}{1,75} = 800$ en is $K = 600$.

d $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}^5 \times \begin{pmatrix} 700 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 599 \\ 801 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}^6 \times \begin{pmatrix} 700 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \end{pmatrix}$

Dus is na 6 perioden de situatie stabiel.

20a $M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 12 & 7 & -3 \\ 13 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b Nee, want $M \times N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 16 \end{pmatrix}$ en $N \times M = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -9 & 8 & -10 \\ 16 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c Ja, want $M \cdot M^3 = M^2 \cdot M^2 = M^4 = \begin{pmatrix} 17 & 50 & -27 \\ 81 & 109 & -69 \\ 39 & 65 & -52 \end{pmatrix}$.

- 21a Een éénjarige krijgt gemiddeld 3 nakomelingen.

b $M^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,8 & 1,8 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1,8 & 1,2 & 0,3 \\ 0,54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,45 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$

De getallen stellen de overgangen per 2 jaar voor. Zo is 54% van de nuljarigen over 2 jaar tweejarig en de tweejarigen hebben per individu over 2 jaar gemiddeld voor 1,2 éénjarige nakomelingen gezorgd.

c $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 60 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}$ na 1 jaar.

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 300 \\ 60 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 180 \\ 54 \\ 45 \end{pmatrix}$ na 2 jaar.

Na één jaar zijn er 450 dieren en na twee jaren zijn er 639 dieren.

d $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ want $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.

e

n	0	1	2	3	4	5
T_n	200	450	639	1076	1663	2687

Als je twee opeenvolgende waarden van T_n op elkaar deelt is dit niet constant.

De totale populatie groeit dus niet exponentieel.

22a Voor elke periode geldt dat 8% ziek wordt.

b Eén periode later is 8% van de gezonden uit de vorige periode ziek geworden dus $0,08G_n$ en 90% van de zieken uit de vorige periode blijft ziek dus $0,90Z_n$. Voor de volgende periode geldt dus

$$Z_{n+1} = 0,08G_n + 0,9Z_n$$

Voor het totale aantal gezonden geldt een periode later dat $G_{n+1} = 0,92G_n + 0,1Z_n$.

c $Z = 0,08G + 0,9Z \Rightarrow 0,1Z = 0,08G \Rightarrow Z = 0,8G$

Verder geldt $Z + G = 100$ dus $0,8G + G = 100 \Rightarrow G = \frac{100}{1,8} \approx 56$ en $Z = 44$.

d van

$$\text{naar } \begin{matrix} G & Z \\ \begin{pmatrix} 0,92 & 0,10 \\ 0,08 & 0,90 \end{pmatrix} \end{matrix} = M$$

$$\begin{pmatrix} 0,92 & 0,10 \\ 0,08 & 0,90 \end{pmatrix}^{100} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 56 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Hier is gekozen voor beginsituatie 50, 50, maar je kunt elke andere beginsituatie nemen als de som maar 100 is.

Dus is $G = 56$ en $Z = 44$ de stabiele situatie.

e Als $\begin{pmatrix} 0,92 & 0,10 \\ 0,08 & 0,90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ Z \end{pmatrix}$ dan is de verdeling stabiel en uit $Z + G = 100$ volgt dat $Z = 100 - G$.

Dan is $0,92G + 0,1(100 - G) = G$ en dus is $10 = 0,18G$.

$G \approx 56$ en $Z = 100 - 56 = 44$.

9-5 De inverse matrix

Pagina 260:

23a 0,90 geeft aan dat 90% van de gezonde leerlingen twee dagen later nog gezond is.

0,60 geeft aan dat 60% van de zieke leerlingen twee dagen later gezond is.

0,40 geeft aan dat 40% van de zieke leerlingen twee dagen later nog ziek is.

0,10 geeft aan dat 10% van de gezonde leerlingen na twee dagen ziek is.

b Op 12 januari was het aantal zieke leerlingen $0,10 \times 1803 + 0,40 \times 227 \approx 271$.

c Uit $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,6 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1803 \\ 227 \end{pmatrix}$ volgt $0,9g + 0,6z = 1803$ en $0,1g + 0,4z = 227$.

d $g + z = 2030 \Rightarrow g = 2030 - z$, dus

$$0,9 \cdot (2030 - z) + 0,6z = 1803$$

$$1803 - 0,6z = 0,9(2030 - z)$$

$$1803 - 0,6z = 1827 - 0,9z$$

$$0,3z = 24$$

$$z = 80 \text{ en } g = 1950$$

24a $V^{-1} \times B = \begin{pmatrix} g \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1950 \\ 80 \end{pmatrix}$ en dit klopt met opdracht 23d.

b $V \cdot V^{-1} = V^{-1} \cdot V = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c $V \times (V^{-1} \times B) = V^{-1} \times (V \times B) = B$

Je rekent 2 dagen terug en dan weer 2 dagen vooruit of andersom.

In beide situaties krijg je de situatie van 10 januari.

Pagina 261:

$$25a \quad S \times V = \begin{pmatrix} A & 4490 \\ B & 5040 \\ C & 4470 \end{pmatrix} \text{ in de eerste week van november en } S^5 \times V = \begin{pmatrix} A & 4642 \\ B & 4676 \\ C & 4682 \end{pmatrix} \text{ na vijf maanden.}$$

$$b \quad S^{-1} \times V = \begin{pmatrix} A & 4800 \\ B & 7000 \\ C & 2200 \end{pmatrix} \text{ in de eerste week van september.}$$

$$26a \quad 2a - c = 1 \quad (1)$$

$$2b - d = 0 \quad (2)$$

$$a + 3c = 0 \quad (3)$$

$$b + 3d = 1 \quad (4)$$

$$b \quad \text{Uit (1) en (3) volgt } -7c = 1 \text{ dus } c = -\frac{1}{7} \text{ en } a = \frac{3}{7}.$$

$$\text{Uit (2) en (4) volgt } 7b = 1 \text{ dus } b = \frac{1}{7} \text{ en } d = \frac{2}{7}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c \quad M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ps - qr} \cdot \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix} = \frac{1}{ps - qr} \cdot \begin{pmatrix} ps - qr & -pq + pq \\ rs - rs & -qr + sp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d \quad ps - qr \neq 0$$

$$27a \quad a_1 = 1; b_1 = 0; c_1 = 0; a_1 + 2a_2 = 0; b_1 + 2b_2 = 1; c_1 + 2c_2 = 0; -a_3 = 0; -b_3 = 0; -c_3 = 1.$$

$$a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}; b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2}; c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0; a_3 = 0; b_3 = 0 \text{ en } c_3 = -1.$$

$$b \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 + 2c_1 & a_1 - c_1 \\ a_2 & 2b_2 + 2c_2 & a_2 - c_2 \\ a_3 & 2b_3 + 2c_3 & a_3 - c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad 2b_1 + 2c_1 = 0, \quad a_1 - c_1 = 0 &\Rightarrow a_1 = 1, \quad c_1 = 1 \text{ en } b_1 = -1 \\ a_2 = 0, \quad 2b_2 + 2c_2 = 1, \quad a_2 - c_2 = 0 &\Rightarrow a_2 = 0, \quad c_2 = 0 \text{ en } b_2 = \frac{1}{2} \\ a_3 = 0, \quad 2b_3 + 2c_3 = 0, \quad a_3 - c_3 = 1 &\Rightarrow a_3 = 0, \quad c_3 = -1 \text{ en } b_3 = 1 \end{aligned} \quad \text{dus } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9-6 Gemengde opdrachten

Pagina 262:

28a Naar C wijzen de meeste pijlen dus zal de keus op C vallen.

b Naar C wijzen de meeste pijlen dus volgens deze graaf is C het minst geschikt.

c

$$\begin{matrix} & \text{van} \\ & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} \text{ naar} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- d Je telt de getallen van elke rij op. Dan heeft E (Els) de beste score en wordt dus vertegenwoordiger van de groep.

29a Je moet de matrix **M** kantelen en dan berekenen:

$$M \times P = \begin{matrix} & \begin{matrix} rijst & soja \end{matrix} \\ \begin{matrix} menu 1 \\ menu 2 \\ menu 3 \\ menu 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{matrix} rijst \\ soja \end{matrix} & \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} prijs \end{matrix} \\ \begin{matrix} menu 1 \\ menu 2 \\ menu 3 \\ menu 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 260 \\ 200 \\ 240 \\ 220 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} rijst & soja \end{matrix} \\ \begin{matrix} B2 \\ eiwit \\ energie \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 15 & 20 \\ 3400 & 1000 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{matrix} menu1 \\ menu2 \\ menu3 \\ menu4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} B2 \\ eiwit \\ energie \end{matrix} \\ \begin{matrix} menu1 & menu2 & menu3 & menu4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,6 & 1,2 & 0,8 & 1 \\ 65 & 80 & 70 & 75 \\ 11200 & 4000 & 8800 & 6400 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- c Voor een volwassene voldoet geen enkel menu, voor een kind voldoen de menu's 2 en 4.
d Menu 4 moet nog aangevuld worden met 15 gram eiwit en met 600 kJ energie.
Door 75 gram sojabonen toe te voegen is hier aan voldaan.
e Je moet minimaal $\frac{0,9}{0,1} = 9$ delen rijst hebben om aan de vitamine B2 behoefte te voldoen. Dan wordt er ruimschoots aan de eiwit- en energiebehoefte voldaan. Dat kost $9 \times 0,70 = 6,30$ euro.

Pagina 263:

30a De kans is 70% dat het morgen zonnig is als het vandaag zonnig is.

bc

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,52 \\ 0,39 & 0,48 \end{pmatrix}$$

0,61 is de kans dat het overmorgen zonnig is als het vandaag zonnig is.
0,39 is de kans dat het overmorgen bewolkt is als het vandaag zonnig is.
0,52 is de kans dat het overmorgen zonnig is als het vandaag bewolkt is.
0,48 is de kans dat het overmorgen bewolkt is als het vandaag bewolkt is.

d

$$\text{Uit bijvoorbeeld } M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,57 & 0,57 \\ 0,43 & 0,43 \end{pmatrix} \text{ volgt } M^{20} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^{20} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,57 \\ 0,43 \end{pmatrix}.$$

Dus maakt het niet uit of het vandaag zonnig of bewolkt is: over 20 dagen is de kans dat het zonnig is 0,57 en dat het bewolkt is 0,43. De verhouding hiervan is ongeveer 4 : 3.

- e Volgens dit model kun je ongeveer $\frac{4}{7} \times 365 \approx 209$ zonnige dagen per jaar verwachten.

31a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b De rij van Fibonacci is: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

In de rij van Fibonacci is elke term de som van de vorige twee termen.

c $F^{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{17} \\ f_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1597 \\ 987 \end{pmatrix}$ dus $f_{16} = 987$ en $f_{17} = 1597$

d $F^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 0 - 1 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_{17} \\ f_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{16} \\ f_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 987 \\ 610 \end{pmatrix}$ dus $f_{15} = 610$

e $F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{-2} \\ f_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dus vind je $f_{-1} = 1; f_{-2} = -1; f_{-3} = 2$.

32a Uit de matrixvermenigvuldiging volgen de twee vergelijkingen uit het stelsel.

b Met de rekenmachine vind je $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

c Vermenigvuldigen aan beide kanten met $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ geeft

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ dus } \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De oplossing is $x = 5\frac{1}{2}; y = 1\frac{1}{4}$.

d $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{5}{7} \\ 3\frac{6}{7} \end{pmatrix}$ dus $x = 4\frac{5}{7}$ en $y = 3\frac{6}{7}$.

e $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dus $x = 1, y = 1$ en $z = 2$.

Test jezelf

Pagina 266:

T-1a $Q - P = B \begin{pmatrix} 26 - 25 & 30 - 27 & 31 - 31 & 29,50 - 28 \\ 15 - 12 & 11 - 11 & 13 - 9 & 12,50 - 10,50 \\ 99,50 - 98 & 99,50 - 99,50 & 95 - 89 & 98 - 92 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1,50 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1,50 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

b $Q - P$ is de prijsverhoging op 1 januari 2006 ten opzichte van 1 januari 2005.

c Door elk getal uit matrix Q te vermenigvuldigen met 1,15 krijg je de gevraagde matrix.

	W1	W2	W3	W4
A	29,90	34,50	35,65	33,93
B	17,25	12,65	14,95	14,38
C	114,43	114,43	109,25	112,70

T-2a Verwissel de rijen en kolommen van matrix A.

$$\begin{array}{l} \text{winkel 1} \\ \text{winkel 2} \\ \text{winkel 3} \end{array} \begin{pmatrix} 10 & 14 & 4 \\ 12 & 10 & 3 \\ 15 & 8 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{array}{l} \text{Prijs} \\ \text{J8G1} \\ \text{C46L} \\ \text{F46L} \end{array} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{winkel 1} \\ \text{winkel 2} \\ \text{winkel 3} \end{array} \begin{pmatrix} 6500 \\ 5700 \\ 5400 \end{pmatrix}$$

De getallen 6500, 5700 en 5400 geven de totale inkooprijzen van de verkochte fietsen in de drie winkels.

b De winst per fiets is achtereenvolgens 140, 70 en 230 euro.

$$\begin{array}{l} \text{W 1} \\ \text{W 2} \\ \text{W 3} \end{array} \begin{pmatrix} 10 & 14 & 4 \\ 12 & 10 & 3 \\ 15 & 8 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{array}{l} \text{winst} \\ \text{J} \\ \text{C} \\ \text{F} \end{array} \begin{pmatrix} 140 \\ 70 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{winst} \\ \text{W 1} \\ \text{W 2} \\ \text{W 3} \end{array} \begin{pmatrix} 3300 \\ 3070 \\ 3120 \end{pmatrix}$$

Winkel 1 maakte in januari de meeste winst.

c
$$\begin{array}{l} \text{winkel 1} \\ \text{winkel 2} \\ \text{winkel 3} \end{array} \begin{pmatrix} 10 & 14 & 4 \\ 12 & 10 & 3 \\ 15 & 8 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{array}{l} \text{J8G1} \\ \text{C46L} \\ \text{F46L} \end{array} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{winkel 1} \\ \text{winkel 2} \\ \text{winkel 3} \end{array} \begin{pmatrix} 3550 \\ 3300 \\ 3350 \end{pmatrix} = W$$

T-3a
$$\begin{array}{c} \text{periode 1} \\ A \quad B \end{array}$$

$$\text{periode 2} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} = M$$

b
$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix} 625 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 415 \\ 710 \end{pmatrix}$$

Pagina 267:

T-4a
$$W \times \begin{pmatrix} 940 \\ 460 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 985 \\ 415 \end{pmatrix} \text{ op 22 mei en } W \times \begin{pmatrix} 985 \\ 415 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1019 \\ 381 \end{pmatrix} \text{ op 29 mei}$$

b
$$W^6 \times \begin{pmatrix} 940 \\ 460 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1088 \\ 312 \end{pmatrix} \text{ dus na 6 weken}$$

c
$$W^{-1} \times \begin{pmatrix} 940 \\ 460 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 880 \\ 520 \end{pmatrix} \text{ op 8 mei}$$

d
$$W^{26} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \end{pmatrix} \text{ en } W \times \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \end{pmatrix},$$

er treden geen veranderingen meer op.

e E heeft dan 200 klanten.

T-5a
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

T-6a Nee, want er is geen diplomaat die zowel Swahili als Duits beheerst.

b

$$\begin{array}{c}
 M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4 \quad M_5 \\
 B \cdot A = \begin{pmatrix} M_1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ M_2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ M_3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ M_4 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ M_5 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

De waarden geven aan in hoeveel talen twee diplomaten kunnen communiceren.

c

$$\begin{array}{c}
 E \quad F \quad D \quad S \\
 A \cdot B = \begin{pmatrix} E & 5 & 3 & 2 & 2 \\ F & 3 & 3 & 1 & 1 \\ D & 2 & 1 & 2 & 0 \\ S & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

De waarden geven aan hoeveel diplomaten de desbetreffende twee talen beheersen.

T-7 Stel A is een $n \times p$ -matrix en B is een $p \times n$ -matrix.

Dan is $A \cdot B = n \times p \cdot p \times n = n \times n = I_n$ en $B \cdot A = p \times n \cdot n \times p = p \times p = I_p$

Gegeven is dat $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, dus $n = p$. A en B zijn dus $n \times n$ matrices, beide met n rijen en n kolommen.

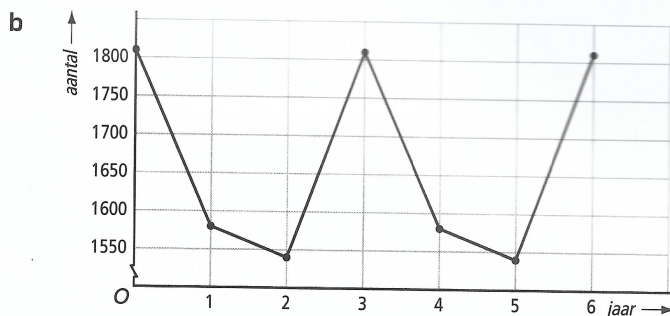
Hoofdstuk 10 – Matrices toepassen

10-1 Lesliematrices

Pagina 270:

- 1a** Van de 1200 dieren in de leeftijdsgroep van 0-1 jaar komen er $0,5 \cdot 1200 = 600$ in de leeftijdsgroep 1-2 jaar.
 Van de 450 dieren in de leeftijdsgroep van 1-2 jaar komen er $0,4 \cdot 450 = 180$ in de leeftijdsgroep 2-3 jaar.
 Van de 160 dieren in de leeftijdsgroep van 2-3 jaar komen er $5 \cdot 160 = 800$ nakomelingen in de leeftijdsgroep 0-1 jaar.

tijdstip	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$
0-1 jaar	1200	800	900	1200	800	900	1200
1-2 jaar	450	600	400	450	600	400	450
2-3 jaar	160	180	240	160	180	240	160
totaal	1810	1580	1540	1810	1580	1540	1810



Pagina 271:

- 2a** Uit $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$ volgt $L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \\ 0,2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (dit kun je ook met de rekenmachine doen) en $L^3 = L^2 \cdot L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \\ 0,2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Als voor $t=0$ de aantallen in de verschillende leeftijdsgroepen bekend zijn, kun je met L de aantallen voor $t=1$ berekenen, met L^2 de aantallen voor $t=2$ en met L^3 de aantallen voor $t=3$.

- b** Omdat $L^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ is de ontwikkeling van de populatie periodiek. De periode is drie jaar, dat wil zeggen na drie jaar zijn de verschillende leeftijdsgroepen net zo groot als de groepen op $t=0$.

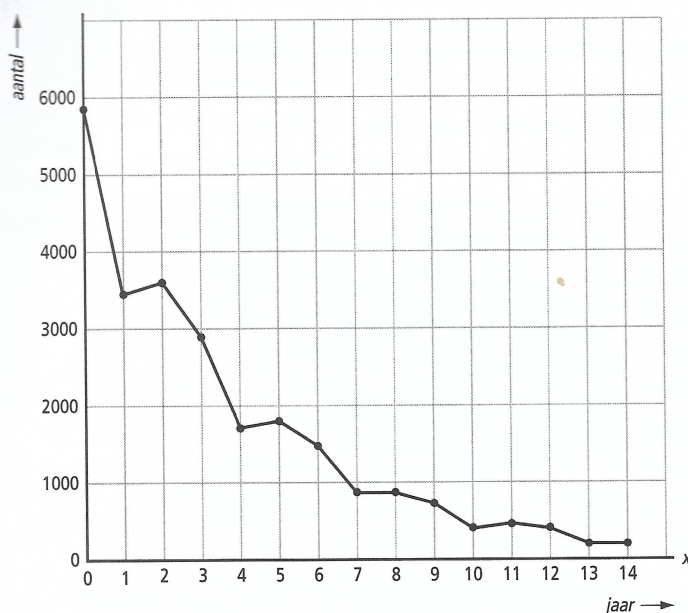
3a $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

$$b \quad t=1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3000 \\ 2500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 1000 \end{pmatrix}; t=2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 500 \\ 600 \end{pmatrix};$$

$$t=3: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2500 \\ 500 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1250 \\ 200 \end{pmatrix}$$

c

tijdstip	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$	$t=8$	$t=9$
0-1 jaar	3000	1000	2500	1500	500	1250	750	250	625	375
1-2 jaar	2500	1500	500	1250	750	250	625	375	125	313
2-3 jaar	400	1000	600	200	500	300	100	250	150	50
totaal	5900	3500	3600	2950	1750	1800	1475	875	900	738



De populatie halveert elke 3 jaar. Uiteindelijk zal de populatie dieren uitsterven.

4a De Lesliematrix is in dit geval $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_4 \end{pmatrix}$ met $g_1 = \frac{2500}{12500} = 0,2$;

$$g_2 = \frac{9600}{6400} = 1,5; g_3 = \frac{2200}{2750} = 0,8; g_4 = \frac{450}{900} = 0,5.$$

Verder is $12500 \cdot h_1 = 7500 \Rightarrow h_1 = \frac{7500}{12500} = 0,6$ en

$$6400 \cdot h_2 = 3200 \Rightarrow h_2 = \frac{3200}{6400} = 0,5; 2750 \cdot h_3 = 1100 \Rightarrow h_3 = \frac{1100}{2750} = 0,4 \text{ en } h_4 = 0.$$

Dus is $L = \begin{pmatrix} 0,2 & 1,5 & 0,8 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned}
 \text{b Maart 2009: } & \begin{pmatrix} 0,2 & 1,5 & 0,8 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14750 \\ 7500 \\ 3200 \\ 1100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17310 \\ 8850 \\ 3750 \\ 1280 \end{pmatrix} \\
 \text{Maart 2010: } & \begin{pmatrix} 0,2 & 1,5 & 0,8 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17310 \\ 8850 \\ 3750 \\ 1280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20377 \\ 10386 \\ 4425 \\ 1500 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

jaar	aantal	factor
2007	22550	1,1774
2008	26550	1,1748
2009	31190	1,1763
2010	36688	1,1757
2011	43133	

Conclusie: de groei is exponentieel met ongeveer de groeifactor 1,176.

- 5a Het getal linksboven betekent dat er in de leeftijdsklasse van 0-1 jaar gemiddeld 0,5 nakomeling per dier is.
 b In de derde leeftijdsklasse is de overlevingskans $\frac{1}{6}$.
 c De derde leeftijdsklasse gaat om dieren van ouder dan 2 jaar.
 d De kans dat een pasgeboren dier in de derde leeftijdsklasse komt is $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

10-2 Populatiegrootte voorspellen

Pagina 272:

$$6a \quad g_1 = \frac{300}{302} = 0,99 \quad \text{en} \quad g_2 = \frac{278}{284} = 0,98$$

- b Van $t = 0$ tot $t = 1$ beslaat een periode van tien jaar. De vierde leeftijdsklasse (van 30 jaar en ouder) beslaat een periode van meer dan tien jaar. Het is dus onbekend hoe de aantallen in de vierde leeftijdsklasse gedurende een periode van tien jaar veranderen. Daardoor kun je g_3 niet berekenen. Het is onbekend welk deel van de struiken er gedurende elke tien jaar door brand verdwijnt. Daardoor kun je g_4 niet berekenen.
- c De Chaparral-vegetatie zal bestaan uit: 19% vegetatie van 0-10 jaar, 19% vegetatie van 10-20 jaar, 18% vegetatie van 20-30 jaar en 44% vegetatie van 30 jaar en ouder.

leeftijdsklasse	percentage	oppervlakte (km ²)
0-10 jaar	19%	$\frac{2000}{100} \cdot 19 = 380 \text{ km}^2$
10-20 jaar	19%	$\frac{2000}{100} \cdot 19 = 380 \text{ km}^2$
20-30 jaar	18%	$\frac{2000}{100} \cdot 18 = 360 \text{ km}^2$
30 jaar en ouder.	44%	$\frac{2000}{100} \cdot 44 = 880 \text{ km}^2$

7a Na 10 jaar: $\begin{pmatrix} 0 & 1,0 & 0,6 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 240 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 133 \\ 97 \\ 51 \end{pmatrix}$

Na 25 jaar: $\begin{pmatrix} 0 & 1,0 & 0,6 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^{25} \begin{pmatrix} 240 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 52 \\ 27 \end{pmatrix}$

b Na 10 jaar zijn er 281 dieren en na 25 zijn er nog 150 dieren.

Dus op de lange duur zal de populatie uitsterven.

Wel blijven de onderlinge verhoudingen vrijwel stabiel want $\frac{133}{281} \approx 0,47$ en ook $\frac{71}{150} \approx 0,47$.

Verder is $\frac{97}{281} \approx \frac{52}{150} \approx 0,35$ en is $\frac{51}{281} \approx \frac{27}{150} = 0,18$.

Pagina 273:

8a $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

b Met de rekenmachine vind je $L^4 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,72 \end{pmatrix}$.

Deze matrix laat zien dat van elke leeftijdsklasse maar 72% overblijft. Er is dus sprake van afname in elke leeftijdsklasse wat betekent dat de populatie op den duur zal uitsterven.

Dat kun je ook zien aan: $0,9 \times 0,8 \times 0,5 \times 2 = 0,72 < 1$.

c $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2,5 \\ 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$, dit geeft $L^4 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Deze matrix laat zien dat van elke leeftijdsklasse maar 90% overblijft. Er is dus sprake van afname in elke leeftijdsklasse wat betekent dat de populatie op den duur zal uitsterven.

Ook dit kun je weer zien aan $0,9 \times 0,8 \times 0,5 \times 2,5 = 0,9 < 1$.

d Reken voor verschillende waarden van het geboortecijfer (groter dan 2,5) L^4 uit.

Bij het geboortecijfer 2,8 zie je dat $L^4 = \begin{pmatrix} 1,008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,008 \end{pmatrix}$.

Het geboortecijfer moet dus minstens 2,8 zijn opdat de totale populatie niet uitsterft.

Je kunt ook $0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,5x = 1$ oplossen. Dit geeft $x = \frac{1}{0,36} = 2,7777\dots$ en dus zal de populatie niet uitsterven als het geboortecijfer minstens 2,8 is.

9a $L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1\frac{9}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $L^4 = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

De getallen in de matrices schuiven bij elke volgende matrix naar linksonder en komen rechtsboven weer terug. De laatste matrix heeft alleen getallen op de diagonaal staan.

Na vier perioden is in elke leeftijdsklasse de omvang met 25% toegenomen.

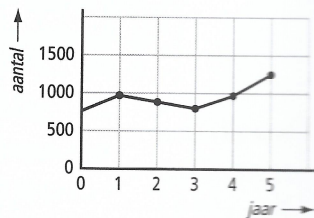
$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad t=1: & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 410 \\ 160 \\ 95 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 328 \\ 100 \\ 48 \end{pmatrix}; t=2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 410 \\ 160 \\ 95 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 400 \\ 205 \\ 50 \end{pmatrix}; \\
 t=3: & \begin{pmatrix} 0 & 1\frac{9}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 410 \\ 160 \\ 95 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 190 \\ 250 \\ 103 \end{pmatrix}; t=4: \begin{pmatrix} 1\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 410 \\ 160 \\ 95 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 513 \\ 200 \\ 119 \\ 125 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Totalen: 976, 893, 793 en 957.

- c In elke leeftijdsklasse is sprake van de volgende veranderingen: toename wordt gevolgd door afname en afname wordt weer gevolgd door toename.

d

Tijdstip	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
Totaal	765	976	893	793	957	1219



$$\text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{40} \begin{pmatrix} 410 \\ 160 \\ 95 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3818,4 \\ 1490,1 \\ 884,8 \\ 931,3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3818 \\ 1490 \\ 885 \\ 931 \end{pmatrix}$$

Na 40 jaar is het totaal aantal salamanders gelijk aan $3818 + 1490 + 885 + 931 = 7124$.

De groeifactor per vier jaar is 1,25 dus de groeifactor per jaar is dan $1,25^{\frac{1}{4}} \approx 1,057$.

De beginpopulatie heeft een grootte van 765.

Dus zal de formule zijn $S = 765 \cdot 1,057^t$ met t in jaren. Controle: $765 \cdot 1,057^{40} \approx 7025$ levert vrijwel hetzelfde aantal salamanders.

- 10a Op de diagonaal van de matrix staan de percentages klanten die bij hun eigen supermarkt blijven. Voor elke supermarkt geldt dat minder dan 20% van hun klanten van supermarkt is veranderd. Voor het totaal aantal klanten geldt dan ook dat minder dan 20% van supermarkt is veranderd. Er zijn geen aantallen bekend, dus het precieze percentage kun je niet berekenen.

$$\text{b} \quad \begin{pmatrix} 0,801 & 0,001 & 0,001 \\ 0,073 & 0,920 & 0,001 \\ 0,126 & 0,079 & 0,998 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4000 \\ 5000 \\ 6000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3215 \\ 4898 \\ 6887 \end{pmatrix}$$

Eén maand later heeft supermarkt I 3215 klanten, supermarkt II 4898 klanten en supermarkt III 6887 klanten.

- c Op de lange duur (vul bijvoorbeeld 10 jaar = 120 maanden in) ontstaat er een stabiele verhouding in het

$$\text{aantal klanten. } A^{120} = \begin{pmatrix} 0,005 & 0,005 & 0,005 \\ 0,017 & 0,167 & 0,167 \\ 0,978 & 0,978 & 0,978 \end{pmatrix} = A^{121}$$

Uitgaande van een totaal van 15 000 klanten wordt de verdeling dan

supermarkt I 75 klanten, supermarkt II 255 klanten en supermarkt III 14 670 klanten.

10-3 Lineaire stelsels

Pagina 274:

11a $(2x - y - 2z) + (x + y + z) = 7 + 2$ en dus $3x - z = 9$

b $-3(x + y + z) + (-x + 3y - z) = -3 \cdot 2 + -3$

$$-3x - 3y - 3z - x + 3y - z = -9$$

$$-4x - 4z = -9$$

$$4x + 4z = 9$$

c Uit opdracht a volgt $z = 3x - 9$. Invullen in het resultaat van opdracht b geeft

$$-4x - 4z = -9$$

$$-4x - 4(3x - 9) = -9$$

$$-4x - 12x + 36 = -9$$

$$-16x = -45$$

$$x = \frac{-45}{-16} = 2\frac{13}{16}$$

$$\text{Hieruit volgt } z = 3 \cdot 2\frac{13}{16} - 9 = -\frac{9}{16}.$$

d De tweede vergelijking $x + y + z = 2$ geeft $y = 2 - x - z = 2 - 2\frac{13}{16} - (-\frac{9}{16}) = -\frac{1}{4}$

e (1) $2 \cdot 2\frac{13}{16} - \frac{1}{4} - 2 \cdot (-\frac{9}{16}) = 4\frac{26}{16} + \frac{4}{16} + \frac{18}{16} = 5\frac{10}{16} + 1\frac{6}{16} = 7$ klopt

(2) $2\frac{13}{16} + (-\frac{1}{4}) + (-\frac{9}{16}) = 2\frac{13}{16} - \frac{4}{16} - \frac{9}{16} = 2\frac{13}{16} - \frac{13}{16} = 2$ klopt

(3) $-2\frac{13}{16} + 3 \cdot (-\frac{1}{4}) - (-\frac{9}{16}) = -2\frac{13}{16} - \frac{12}{16} + \frac{9}{16} = -2\frac{13}{16} - \frac{3}{16} = -3$ klopt

12a $(x + y + z) + (4y - z) = 7 + 13$ geeft $x + 5y = 20$

b Uit opdracht a volgt $x = 20 - 5y$. Dit invullen in de tweede vergelijking $2x - 3y = 1$ geeft

$$2(20 - 5y) - 3y = 1$$

$$40 - 10y - 3y = 1$$

$$-13y = -39$$

$$y = \frac{-39}{-13} = 3$$

$$\text{Hieruit volgt } x = 20 - 5 \cdot 3 = 5.$$

$$\text{Invullen in de derde vergelijking geeft } 4 \cdot 3 - z = 13 \text{ en dus } z = -1.$$

Controle:

(1) $5 + 3 + -1 = 7$ klopt

(2) $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$ klopt

(3) $4 \cdot 3 - -1 = 13$ klopt

Pagina 275:

13a $(4x - 3y) - 2(2x + 7y) = -7 - 2 \cdot 22$

$$4x - 3y - 4x - 14y = -51$$

$$-17y = -51$$

$$y = \frac{-51}{-17} = 3$$

$$\text{Hieruit volgt met de eerste vergelijking } 4x - 3 \cdot 3 = -7, 4x = -7 + 9 = 2 \text{ en dus is } x = \frac{1}{2}.$$

b Uit de tweede vergelijking volgt $5x - 3y = 0$. Combineren geeft

$$\frac{5}{3}(3x - 5y) - (5x - 3y) = \frac{5}{3} \cdot -8 - 0$$

$$5x - \frac{25}{3}y - 5x + 3y = \frac{-40}{3}$$

$$-5\frac{1}{3}y = \frac{-40}{3}$$

$$y = 2\frac{1}{2}.$$

$$\text{Hieruit volgt met de eerste vergelijking } 3x - 5 \cdot 2\frac{1}{2} = -8, 3x = -8 + 5 \cdot 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ en dus is } x = 1\frac{1}{2}.$$

$$c \quad 3\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right) - \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{6}y\right) = 3 \cdot -1 - 10$$

$$\frac{3}{2}x + 2y - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}y = -13$$

$$2\frac{1}{6}y = -13$$

$$y = -6$$

Hieruit volgt met de eerste vergelijking $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \cdot -6 = -1$, $\frac{1}{2}x = 3$ en dus is $x = 6$.

d Combineren van de eerste en derde vergelijking geeft

$$(2x + y) - 2(x - y + 2z) = 1 - 2 \cdot 13$$

$$2x + y - 2x + 2y - 4z = -25$$

$$3y - 4z = -25$$

$$3y = -25 + 4z$$

$$y = -\frac{25}{3} + \frac{4}{3}z \quad (1)$$

Invullen in de tweede vergelijking geeft

$$2y + z = -2$$

$$2\left(-\frac{25}{3} + \frac{4}{3}z\right) + z = -2$$

$$-\frac{50}{3} + \frac{8}{3}z + z = -2$$

$$3\frac{2}{3}z = 14\frac{2}{3}$$

$$z = \frac{14\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}} = 4$$

Hieruit volgt met (1) $y = -\frac{25}{3} + \frac{4}{3} \cdot 4 = -3$ en met de eerste vergelijking volgt $2x + -3 = 1$, $2x = 4$ en dus $x = 2$.

e Combineren van de eerste en tweede vergelijking geeft

$$(x + y + 2z) - (x - 3y + z) = -5 - -8$$

$$x + y + 2z - x + 3y - z = 3$$

$$4y + z = 3$$

$$z = 3 - 4y \quad (1)$$

Combineren van de eerste en derde vergelijking geeft

$$2(x + y + 2z) - (2x + y - z) = 2 \cdot -5 - -6$$

$$2x + 2y + 4z - 2x - y + z = -4$$

$$y + 5z = -4 \quad (2)$$

Invullen van (1) in (2) geeft

$$y + 5(3 - 4y) = -4$$

$$y + 15 - 20y = -4$$

$$-19y = -19$$

$$y = \frac{-19}{-19} = 1$$

Hieruit volgt met (1) $z = 3 - 4 \cdot 1 = -1$ en met de eerste vergelijking volgt $x + 1 + 2 \cdot -1 = -5$,

$$x = -5 - 1 - 2 \cdot -1 = -4.$$

$$14a \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ geeft } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ -0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dus is $x = 2$ en is $y = -2$.

$$b \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \end{pmatrix} \text{ geeft } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0,15 & 0,05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dus $x = 2$ en $y = -3$.

$$c \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,6 \\ 0,2 & -0,6 & -0,4 \\ -0,4 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus $x = -2$, $y = 1$ en $z = 1$.

$$d \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ geeft}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,04 & 0,29 & 0,19 & -0,01 \\ -0,12 & 0,04 & 0,31 & 0,18 \\ 0,18 & -0,10 & 0,10 & 0,17 \\ 0,19 & -0,02 & -0,03 & 0,28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dus $p = 3$, $q = 4$, $r = 5$ en $s = 6$.

10-4 Bijzondere stelsels

Pagina 276:

15a De coëfficiëntenmatrix van dit stelsel is $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

b Als je de inverse van deze matrix probeert te berekenen geeft de GR een error: singular matrix.

c (1) $1 - 6 - 3 = 4$ klopt

(2) $2 \cdot 1 + -6 + 3 \cdot 3 = 5$ klopt

(3) $4 \cdot 1 + 5 \cdot -6 + 11 \cdot 3 = 7$ klopt

d Bijvoorbeeld $x = 3$; $y = -1$; $z = 0$.

16a De coëfficiëntenmatrix van dit stelsel is $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Als je de inverse van deze matrix probeert te berekenen geeft de GR een error: singular matrix.

b $(x - 3y + 4z) + (2x + y + z) = 7 + 7$ geeft $3x - 2y + 5z = 14$, dit is strijdig met de derde vergelijking $3x - 2y + 5z = 6$. Conclusie: dit stelsel vergelijkingen heeft geen oplossing.

17a De matrix $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ heeft een inverse

$$\text{De oplossing is dus } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Dus $x = 2$; $y = -4$; $z = 7$.

b De matrix $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 13 & 14 & -4 \\ 11 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ heeft geen inverse. Het stelsel is dus afhankelijk of strijdig.

$$\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \Rightarrow 10x + 8y - 4z = 0 \\ 13x + 14y - 4z = 0 \\ 11x + 13y - 3z = 0 \end{cases}$$

De eerste en de tweede vergelijking van elkaar aftrekken geeft $-3x - 6y = 0 \Rightarrow 2y = -x$ (1)

drie maal de eerste vergelijking aftrekken van twee maal de derde geeft $7x + 14y = 0 \Rightarrow 2y = -x$ (2)

(1) en (2) zijn hetzelfde, het stelsel is dus afhankelijk een mogelijke oplossing is:

$x = 4$; $y = -2$; $z = 6$.

- c De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ heeft geen inverse. Het stelsel is dus afhankelijk of strijdig.

Tweemaal de eerste vergelijking geeft: $2x + 2y + 2z = 2$,

De tweede en derde samen geeft: $2x + 2y + 2z = 5$.

De twee nieuwe vergelijkingen zijn strijdig, er is dus geen oplossing.

Pagina 277:

- 18a De matrix heeft geen inverse.

Bij de matrixvergelijking hoort het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 8 \\ 7y - z = 3 \end{cases}$

De derde vergelijking geeft $z = 7y - 3$ (1).

Tweemaal de eerste vergelijking min de tweede geeft:

$$2(x - 3y + 2z) - (2x + y + 3z) = 2 \cdot 5 - 8$$

$$2x - 6y + 4z - 2x - y - 3z = 2$$

$$-7y + z = 2$$

$$z = 7y + 2 \quad (2)$$

(1) en (2) zijn strijdig. Het stelsel heeft dus geen oplossing.

b $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 + 4 \\ 6 - 4 + 8 \\ 9 - 6 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ klopt

c $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4 + 8 \\ 2 - 8 + 16 \\ 3 - 12 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ klopt

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 0 - 4 \\ 18 - 0 - 8 \\ 27 - 0 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ klopt

- d De punten $(x, y, z) = (3 - \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda)$ Invullen in de matrix vergelijking van opdracht b geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - \lambda \\ 2 + \lambda \\ 2 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda - (2 + \lambda) + 2(2 + \lambda) \\ 2(3 - \lambda) - 2(2 + \lambda) + 4(2 + \lambda) \\ 3(3 - \lambda) - 3(2 + \lambda) + 6(2 + \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda - 2 - \lambda + 4 + 2\lambda \\ 6 - 2\lambda - 4 - 2\lambda + 8 + 4\lambda \\ 9 - 3\lambda - 6 - 3\lambda + 12 + 6\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Dus kloppend voor elke waarde van λ .

- 19a Bij deze matrixvergelijking hoort het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 3x - ay = 5 \\ 2x + 4y = b \end{cases}$

Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 2 en tweede met 3 dan krijg je het stelsel $\begin{cases} 6x - 2ay = 10 \\ 6x + 12y = 3b \end{cases}$

Er is precies één oplossing als het stelsel van de vergelijkingen niet afhankelijk of strijdig is.

Dit is het geval als $-2a \neq 12$ dus als $a \neq -6$.

- b Voor $a = -6$ en $3b \neq 10 \Rightarrow b \neq \frac{10}{3}$ is het stelsel strijdig en zijn er dus geen oplossingen.

- c Voor $a = -6$ en $b = \frac{10}{3}$ is het stelsel afhankelijk en zijn er dus oneindig veel oplossingen.

- 20a Steeds voldoet als oplossing $x = 0$ en $y = 0$.

- b Dan moet het stelsel $\begin{cases} 9x + ay = 0 \\ 2ax + 8y = 0 \end{cases}$ precies één oplossing hebben.

Je kunt het stelsel herschrijven als $\begin{cases} 18ax + 2a^2y = 0 \\ 18ax + 72y = 0 \end{cases}$

Dit stelsel heeft één oplossing als $2a^2 \neq 72$ dus als $a \neq 6$ en $a \neq -6$.

c Dan moeten het stelsel afhankelijk zijn. Uit het resultaat van opdracht b volgt $a = 6$ of $a = -6$.

d $a = -6$: $\begin{cases} 9x - 6y = 0 \\ -12x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 9x \\ 8y = 12x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ alle paren die hieraan voldoen zijn dus oplossingen.

$a = 6$: $\begin{cases} 9x + 6y = 0 \\ 12x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = -9x \\ 8y = -12x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$ alle paren die hieraan voldoen zijn dus oplossingen.

21a De eerste vergelijking geeft $x = -2y$ (1).

De tweede vergelijking geeft met behulp van (1)

$$x + 4y - 2z = 0$$

$$-2y + 4y - 2z = 0$$

$$2y = 2z$$

$$y = z \quad (2)$$

De derde vergelijking geeft met behulp van (1) en (2)

$$2x + 4z = -8$$

$$2 \cdot -2y + 4y = -8$$

$$0 = -8$$

Conclusie: dit is een strijdig stelsel en heeft dus geen oplossing.

b De eerste vergelijking combineren met de tweede vergelijking geeft

$$2(x + y - 2z) - (2x + y - 3z) = 2 \cdot 0 - 0$$

$$2x + 2y - 4z - 2x - y + 3z = 0$$

$$y - z = 0$$

$$y = z \quad (1)$$

De derde vergelijking geeft met behulp van (1)

$$4x - 2y - 2z = 0$$

$$4x - 2y - 2y = 0$$

$$4x = 4y$$

$$x = y \quad (2)$$

De vierde vergelijking geeft met (1) en (2)

$$6x - x - 5z = 0$$

$$6x - x - 5x = 0$$

$$6x - 6x = 0$$

Deze vergelijking geldt voor alle waarden van x .

Echter de vijfde vergelijking geeft met (1) en (2)

$$7x - 3y - 4z = 1$$

$$7x - 3x - 4x = 1$$

$$0 = 1$$

Conclusie: dit is een strijdig stelsel en heeft dus geen oplossing.

10-5 Afbeeldingen

Pagina 278:

22a $A'(3, 4, -2)$

b $B'(b_1, b_2, -b_3)$

c $C'(-2, 4, -3)$

d $X'(-x, y, -z)$

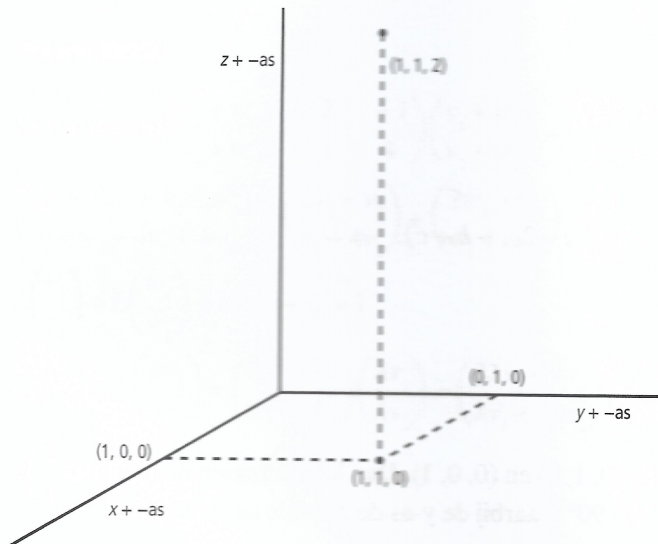
23a Spiegelen in de z -as.

b Spiegelen in het punt er tussen dus $\left(\frac{x+2-x}{2}, \frac{y+4-y}{2}, \frac{z+6-z}{2}\right) = (1, 2, 3)$.

c Vermenigvuldiging met de factor 2 ten opzichte van de oorsprong.

d Translatie (verschuiving) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

24a



b Voor elk van deze driepunten geldt dat de x -coördinaat gelijk is aan de y -coördinaat, al deze punten liggen in één vlak gevormd door de z -as en de lijn $y = x$ in het vlak $z = 0$.

c De z -coördinaat blijft gelijk maar de x - en y -coördinaten moet je verwisselen. Dus het beeld van het punt $P(x, y, z)$ is het punt $P'(y, x, z)$.

d x en y moeten verwisseld worden, de afbeeldingsmatrix is dus $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

controle: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$, dit klopt.

25a Bij loodrecht projecteren op het vlak $z = 0$ is het beeld van (x, y, z) het punt $(x, y, 0)$.

De bijbehorende matrix is dan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b Bij roteren om de z -as over 90° , waarbij de x -as de y -as als beeld heeft is het beeld van (x, y, z) het punt $(-y, x, z)$.

De bijbehorende matrix is dan $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c Bij Vermenigvuldiging met factor 3 ten opzichte van de oorsprong is het beeld van (x, y, z) het punt $(3x, 3y, 3z)$.

De bijbehorende matrix is dan $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pagina 279:

$$26a \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dus } P'(4, 2, -1).$$

$$b \quad Q' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 4-2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dus } Q'(-1, 2, 2).$$

$$c \quad R' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ dus } R'(0, -6, 3).$$

$$d \quad S' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b \\ 2a-2c \\ -b+c \end{pmatrix} \text{ dus } S'(a+3b, 2a-2c, -b+c).$$

$$27a \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}, \text{ dit zegt nog niet zoveel.}$$

Ga eerst na wat de beelden zijn van de punten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$. Dan kun je inzien dat het gaat om de afbeelding: roteren om de x-as over een hoek van 90° waarbij de y-as de z-as als beeld heeft.

$$b \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dus van elk punt blijven de x- en de y-coördinaat gelijk maar wordt de z-coördinaat gelijk aan 0.

Meetkundige betekenis: loodrecht projecteren op het vlak door de x-as en de y-as. Hierin liggen de punten die voldoen aan $z = 0$.

$$28a \quad \text{Het beeld van } (1, 0, 0) \text{ is } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b \quad \text{Het beeld van } (0, 1, 0) \text{ is } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Het beeld van } (0, 0, 1) \text{ is } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Het beeld van } (0, 0, 0) \text{ is } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c De beeldpunten van $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$ vormen respectievelijk de eerste, tweede en derde kolom van de afbeeldingsmatrix. Het beeldpunt van $(0, 0, 0)$ is zichzelf.

29a Het beeld van $P(x, y, z)$ is dan $P'(x, -y, z)$.

$$\text{Hierbij hoort de afbeeldingsmatrix } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b Het beeld van $P(x, y, z)$ is dan $P'(z, y, x)$.

Hierbij hoort de afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10-6 Lineaire afbeeldingen

Pagina 280:

$$\begin{aligned} 30 \quad L(\vec{v} + \vec{w}) &= L\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \\ (v_1 + w_1) + 4(v_2 + w_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2v_1 + 2w_1 - v_2 - w_2 \\ v_1 + w_2 + 4v_2 + 4w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w_1 - w_2 \\ w_1 + 4w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \\ &= L\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = L(\vec{v}) + L(\vec{w}) \\ L(\lambda \vec{v}) &= L\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda v_1 - \lambda v_2 \\ \lambda v_1 + 4\lambda v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(2v_1 - v_2) \\ \lambda(v_1 + 4v_2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} = \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda L\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda L(\vec{v}) \end{aligned}$$

$$31 \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dus is } 2 \cdot L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dus } L(O) = O.$$

$$32a \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = L\left(\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot L\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L\left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot L\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = L\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 33a Deze punten liggen even ver van de y -as als de z -as dus moet $y = z$.

- b $P'(4, 0, 0)$, $Q'(0, 0, 4)$ en $R'(0, 2, 5)$. Algemeen: het beeld van (x, y, z) is (x, z, y) .

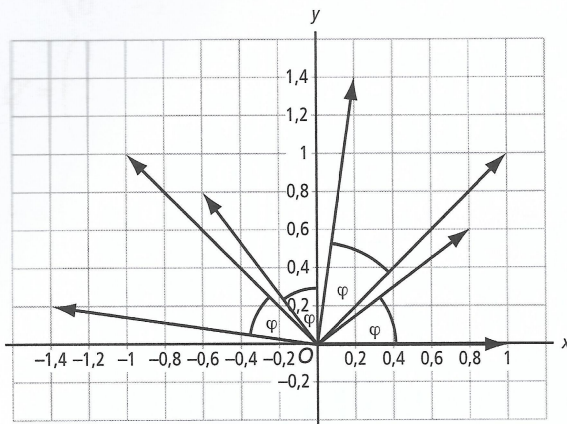
- c S heeft afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pagina 281:

- 34 Als een afbeelding lineair is dan moet het beeld van $(0, 0, 0)$ weer $(0, 0, 0)$ zijn.
Deze afbeelding is niet lineair want $P(0, 0, 0) = (0 - 2, 0 + 3, 0) = (-2, 3, 0) \neq (0, 0, 0)$.

35a $\begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ dus $A'(0,8;0,6)$; $\begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ dus $B'(-0,6;0,8)$;
 $\begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1,4 \end{pmatrix}$ dus $C'(0,2;1,4)$ en $\begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ dus $D'(-1,4;0,2)$.

b



c Noem de draaihoek ϕ . Dan is $\tan(\phi) = \frac{0,6}{0,8} = 0,75 \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0,75) \approx 37^\circ$.

36a Bij rotatie over een hoek $\phi = \frac{1}{2}\pi$ geldt $(a, b) \rightarrow (-b, a)$

De afbeeldingsmatrix is $\begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\pi) & -\sin(\frac{1}{2}\pi) \\ \sin(\frac{1}{2}\pi) & \cos(\frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b Neem de punten $(1, 2)$ en $(3, 1)$ op de lijn l . De beeldpunten zijn

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De lijn door de punten $(-2, 1)$ en $(-1, 3)$ is lijn l' .

De richtingscoëfficiënt van l' is dan $\frac{3-1}{-1-(-2)} = 2$ en het snijpunt met de y -as is $(0, 5)$.

Dus $l' : y = 2x + 5$.

c Kies op lijn l de snijpunten met de assen, dus $(0, \frac{1}{2})$ en $(5, 0)$.

De beelden hiervan zijn $(-\frac{1}{2}, 0)$ en $(0, 5)$. De lijn door deze beeldpunten is de lijn $y = 2x + 5$.

d $\begin{pmatrix} \cos(-\frac{1}{4}\pi) & -\sin(-\frac{1}{4}\pi) \\ \sin(-\frac{1}{4}\pi) & \cos(-\frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Teken de beelden in een assenstelsel. De lijn l'' door deze punten heeft richtingscoëfficiënt -3 .

De vergelijking van l'' is $y = -3x + 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

e Bij elke lineaire afbeelding is het beeld van $(0, 0)$ weer $(0, 0)$.

Als je roteert over $-\frac{1}{4}\pi$ om het punt $P(2, 3)$ dan is het beeld van $(0, 0)$ niet $(0, 0)$ en dus is er geen sprake van een lineaire afbeelding.

37a Bij een rotatie om de z -as veranderen alleen de x -waarden en de y -waarden van de punten.

De afbeeldingsmatrix van A is $\begin{pmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) & 0 \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} + 0 \\ 0 + 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dus $P'(0, 2, -1)$.

10-7 Afbeeldingen samenstellen

Pagina 282:

- 38a** Het beeldpunt van $P(a, b)$ heeft coördinaten (b, a) .
- b** Je schuift de spiegellijn $y = x + 4$ en ook het punt $P(a, b)$ vier eenheden naar beneden. De nieuwe spiegellijn is dan $y = x$ en het punt P is nu $S(a, b - 4)$. Het spiegelbeeld van S bij spiegeling in de lijn $y = x$ is $S'(b - 4, a)$. Nu schuiven we het spiegelbeeld van S weer vier eenheden omhoog en dit geeft $Q(b - 4, a + 4)$.
- c** Het beeldpunt van $P(a, b)$ is $Q(b - 4, a + 4)$ en het beeldpunt van $Q(b - 4, a + 4)$ is $R(a + 4, b - 4)$.
- d** De translatie 4 naar rechts en 4 naar beneden.

- 39a** De afbeelding S_m is spiegelen in de lijn $m: y = x$.

$S_m(1, 0) = (0, 1)$ en $S_m(0, 1) = (1, 0)$ leveren samen de afbeeldingsmatrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- b** Een lijn die loodrecht op de lijn $y = -2x$ staat, heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$.
Door het punt $(1, 0)$ levert dit de lijn $y = \frac{1}{2}x + b$ met $b = 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$ dus $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
Dit geeft $x = 2y + 1$. Hiermee is het snijpunt met de lijn $y = -2x$ te berekenen:
 $y = -2(2y + 1)$
 $y = -4y - 2$
 $5y = -2$
 $y = -\frac{2}{5}$
en dus $x = \frac{1}{5}$.

Het punt $(1, 0)$ spiegelen in de lijn $y = -2x$ heeft beeldpunt $(1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{5}, 0 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}) = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

Voor het punt $(0, 1)$ levert dit de lijn $y = \frac{1}{2}x + b$ met $b = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$ en dus $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Dit geeft $x = 2y - 2$. Hiermee is het snijpunt met de lijn $y = -2x$ te berekenen:

$$\begin{aligned} y &= -2(2y - 2) \\ y &= -4y + 4 \\ 5y &= 4 \\ y &= \frac{4}{5} \\ \text{en dus } x &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Het punt $(0, 1)$ spiegelen in de lijn $y = -2x$ heeft beeldpunt $(0 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5}, 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}) = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

Deze kentallen kloppen met de afbeeldingsmatrix A .

$$\mathbf{c} \quad S_n \circ S_m(1, 0) = S_n(0, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ en } S_n \circ S_m(0, 1) = S_n(1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

De afbeeldingsmatrix C is $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{d} \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \text{ klopt}$$

$$\mathbf{e} \quad S_m \circ S_n(1, 0) = S_m(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \text{ en } S_m \circ S_n(0, 1) = S_m(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}).$$

De afbeeldingsmatrix bij $S_m \circ S_n$ is $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$, deze is niet hetzelfde als de afbeeldingsmatrix van $S_n \circ S_m$, dus de afbeeldingen zijn niet hetzelfde.

$$\mathbf{40a} \quad S = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

- b** Eerst over β radialen draaien en daarna over α radialen draaien is hetzelfde als in één keer over de hoek $\alpha + \beta$ draaien. Dit levert de afbeeldingsmatrix $R \circ S = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$.

$$c \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

d De matrices van opdracht b en c zijn gelijk aan elkaar. Dus de uitdrukkingen links bovenin elk van deze matrices is gelijk aan elkaar: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

e De andere goniometrische formule is $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$.

f $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos(\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$$41a \quad \text{De afbeeldingsmatrix van V is } S \circ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ z \end{pmatrix}. \text{ De meetkundige betekenis hiervan is spiegelen in het vlak } x + y = 0.$$

$$42a \quad S(1, 0, 0) = (0, 1, 0), S(0, 1, 0) = (1, 0, 0) \text{ en } S(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \text{ Dit geeft } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R(1, 0, 0) = (0, 1, 0), R(0, 1, 0) = (-1, 0, 0) \text{ en } R(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \text{ Dit geeft } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b \quad \text{De afbeeldingsmatrix van W is } W = SR = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Test jezelf

Pagina 285:

$$T-1a \quad L^3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}. \text{ Aan deze matrix valt op dat er alleen op de diagonaal getallen ongelijk aan nul staan.}$$

b Voor een aantal tijdstippen de populatie uitrekenen. Neem daarvoor machten van L^3

$$L^3 \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}, L^6 \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Conclusie: De populatieomvang halveert elke drie perioden en zal dus uitsterven.

T-2a 0,25 is de overlevingskans in de leeftijdsgroep 'volwassenen'

$$b \quad \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,01 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 12000 \\ 12000 \\ 6000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 673 \\ 584 \\ 276 \end{pmatrix}$$

c In vijf jaar zijn de aantallen in elke klasse sterk afgenomen, dus zal deze diersoort uitsterven.

$$T-3a \quad (2x + 3y) - (3y + 2z) = -2 - 6$$

$$2x - 2z = -8 \quad (1)$$

$$b \quad (2x + 3y) - 3(x + y + z) = -2 - 3 \cdot 0$$

$$-x - 3z = -2 \quad (2)$$

- c Vergelijking (1) geeft $2x = -8 + 2z$ en dus $x = -4 + z$ (3). Invullen in (2) levert
- $$-(-4 + z) - 3z = -2$$
- $$4 - z - 3z = -2$$
- $$-4z = -6$$
- $$z = 1\frac{1}{2}$$
- $$z = 1\frac{1}{2} \text{ levert met (3) } x = -4 + 1\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$$
- d $y = -x - z = 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 1$
- e Invullen van $x = -2\frac{1}{2}$, $y = 1$ en $z = 1\frac{1}{2}$ geeft:
- (1) $2 \cdot -2\frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = -2$ klopt.
- (2) $-2\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} = 0$ klopt.
- (3) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{2} = 6$ klopt.

T-4a De eerste en tweede vergelijking combineren tot een vergelijking zonder de variabele y geeft

$$2(15x + 5y + 8z) + (9x - 10y - 5z) = 2 \cdot 37 + 71$$

$$30x + 10y + 16z + 9x - 10y - 5z = 145$$

$$39x + 11z = 145$$

$$39x = 145 - 11z$$

$$x = \frac{145}{39} - \frac{11}{39}z \quad (1)$$

De eerste en derde vergelijking combineren tot een vergelijking zonder de variabele y geeft

$$2(15x + 5y + 8z) - (12x + 10y - 8z) = 2 \cdot 37 - 26$$

$$30x + 10y + 16z - 12x - 10y + 8z = 48$$

$$18x + 24z = 48$$

Invullen van (1) in deze vergelijking geeft

$$18\left(\frac{145}{39} - \frac{11}{39}z\right) + 24z = 48$$

$$\frac{2610}{39} - \frac{198}{39}z + 24z = 48$$

$$\left(24 - \frac{198}{39}\right)z = 48 - \frac{2610}{39}$$

$$z = \frac{48 - \frac{2610}{39}}{24 - \frac{198}{39}} = -1$$

Met behulp van (1) geeft dit $x = \frac{145}{39} - \frac{11}{39} \cdot -1 = 4$. Met de derde vergelijking volgt $10y = 26 - 12x + 8z$, hieruit volgt $10y = 26 - 12 \cdot 4 + 8 \cdot -1 = -30$ en dus $y = -3$.

- b Vermenigvuldigen van de eerste vergelijking met 6 en de tweede vergelijking met 4 geeft

$$\begin{cases} 3x - 4y = 54 & (1) \\ 3x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 54 & (1) \\ 3x + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) - (2) geeft $-6y = 54$ dus $y = -9$. Dit invullen in (1) geeft $3x - 4 \cdot -9 = 54 \Rightarrow x = 6$.

T-5a De eerste vergelijking combineren met de tweede vergelijking geeft

$$(x + y + 2z) - (3x + y + 2z) = 5 - -5$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5 \quad (1)$$

Invullen van (1) in de tweede vergelijking geeft

$$2 \cdot -5 - y - z = 8$$

$$-y - z = 18$$

$$-y = 18 + z$$

$$y = -18 - z \quad (2)$$

Invullen van (1) en (2) in de derde vergelijking geeft

$$3 \cdot -5 + (-18 - z) + 2z = -5$$

$$-15 - 18 + z = -5$$

$$z = 28 \text{ en dus is } y = -18 - 28 = -46$$

- b De derde vergelijking geeft

$$3y + 2z = 7$$

$$2z = 7 - 3y$$

$$z = 3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}y \quad (1)$$

De eerste en tweede vergelijking combineren en invullen van (1) geeft

$$(2x - y - 2z) - 2(x - 2y - 2z) = -2 - 2 \cdot -3$$

$$2x - y - 2z - 2x + 4y + 4z = 4$$

$$3y + 2z = 4$$

$$3y + 2(3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}y) = 4$$

$$3y + 7 - 3y = 4$$

$$7 = 4$$

Conclusie: dit stelsel is strijdig en heeft dus geen enkele oplossing.

- c De derde vergelijking geeft

$$5x + 7y = 31$$

$$5x = 31 - 7y$$

$$x = \frac{31}{5} - \frac{7}{5}y \quad (1)$$

De eerste en tweede vergelijking combineren tot een vergelijking zonder z en invullen van (1) geeft

$$(x + 3y + 2z) + \frac{2}{3}(x - y - 3z) = 5 + \frac{2}{3} \cdot 8.$$

$$x + 3y + 2z + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - 2z = 10\frac{1}{3}$$

$$1\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{3}y = 10\frac{1}{3}$$

$$1\frac{2}{3}(\frac{31}{5} - \frac{7}{5}y) + 2\frac{1}{3}y = 10\frac{1}{3}$$

$$10\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{3}y = 10\frac{1}{3}$$

$$-2\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{3}y = 0$$

Deze vergelijking geldt voor alle waarden van y, dus dit is een afhankelijk stelsel met oneindig veel oplossingen.

Pagina 286:

T-6a
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Deze vectoren zijn gelijk aan hun beeldvector.

b Bijvoorbeeld: $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$

- c** Voor al van deze punten (x, y, z) geldt $x = -z$, de vergelijking van vlak V.

T-7a
$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \left(\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 2 \\ 1\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = A \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ dus}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \left(\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \left(-\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = A \left(-\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - A \left(-\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{3} \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ 1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b Uit de beeldpunten van opdracht a volgt de afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 2 \\ 1\frac{2}{3} & -1\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c Omdat $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ weet je eigenlijk maar van twee punten het beeld.

Voor de matrix van de lineaire afbeelding moet je van drie vectoren die geen combinaties van elkaar zijn, de beelden weten. En dat is hier niet het geval.

T-8a $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t \\ -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}t \\ \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b Met de rekenmachine vind je dat $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dus $L \circ L = L$.

c $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \\ \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \\ -\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 4 \\ \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot -4 \\ -\frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dus hebben de punten $(2, 2, 0)$ en $(5, 1, -4)$ zichzelf als beeldpunt.

Dat is alleen het geval als de punten al in het vlak W liggen waarop je projecteert.

T-9 Het stelsel is dus afhankelijk. Dat betekent dat het linkerlid van de tweede vergelijking een lineaire combinatie van de eerste en de derde vergelijking is:

$$2x + 8ay + z = p(x + y - z) + q(x + 3y)$$

$$2x + 8ay + z = (p + q)x + (p + 3q)y - pz$$

$$\text{Hieruit volgt: } -p = 1 \text{ dus } p = -1 \text{ en } p + q = 2 \Rightarrow -1 + q = 2 \Rightarrow q = 3$$

$$\text{Maar dan moet gelden } 8a = p + 3q = -1 + 3 \cdot 3 = 8 \Rightarrow a = 1.$$

Nu moet ook worden aangetoond dat dit ook geldt voor het rechterlid van de vergelijkingen:

$$8 + 5a = 2p + 5q$$

$$8 + 5 \cdot 1 = 2 \cdot -1 + 5 \cdot 3$$

$$8 + 5 = -2 + 15$$

$13 = 13$ en dit klopt. Dus er zijn oneindig veel oplossingen.