

Hoofdstuk 1

Systematisch tellen

In dit hoofdstuk

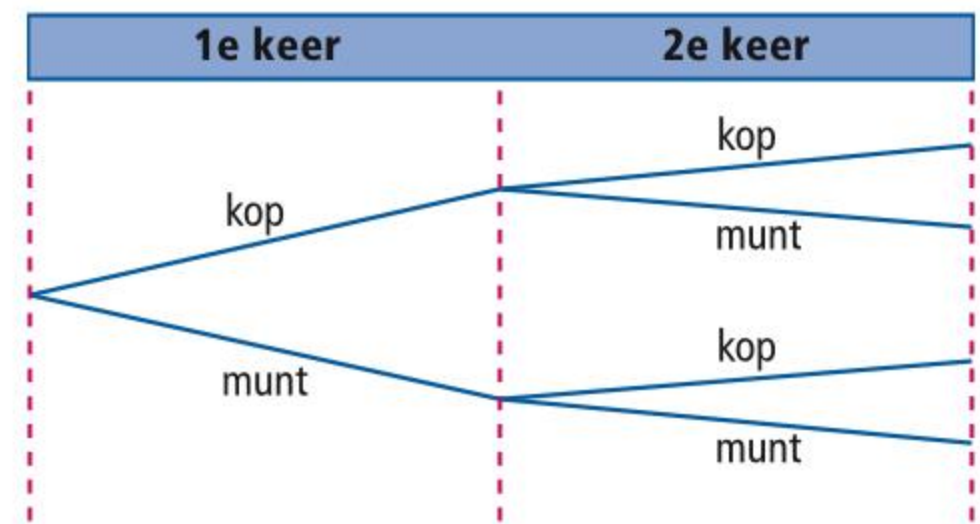
1-1	Machtsbomen en faculteitsbomen	12
1-2	Permutaties	14
1-3	Routes in een rooster	16
1-4	Combinaties	18
1-5	Telproblemen	20
1-6	Binomium van Newton	22
1-7	Gemengde opdrachten	24
	Samenvatting	26
	Test jezelf	28



1-1

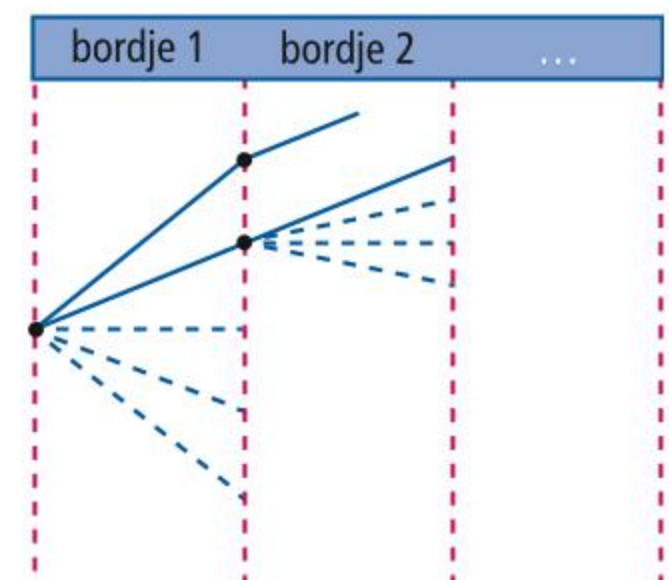
Machtsbomen en faculteitsbomen

- 1 Ruud, Harry en Frank hebben samen gegeten en ze hebben geen van drieën zin om af te wassen. Ruud stelt voor om te loten door twee keer met een munt te gooien en daarbij het volgende af te spreken. Als er twee keer kop gegooid wordt, wast Ruud af. Bij twee keer munt moet Harry afwassen. En als het één keer kop en één keer munt wordt, wast Frank af. Frank zegt dat hij in het nadeel is. Toon met het boomdiagram hiernaast aan dat hij gelijk heeft.



- 2 Bij een gokspelletje wordt drie keer een geldstuk opgegooid.
 a Het boomdiagram bij opdracht 1 bestaat uit twee kolommen. Hoeveel kolommen heeft het boomdiagram dat bij dit gokspelletje hoort?
 b Hoeveel takken moet je bij elke splitsing tekenen?
 c Teken het boomdiagram dat hoort bij het drie keer gooien met het geldstuk.
 d Hoeveel verschillende volgorden tel je in het boomdiagram?
 e Hoeveel verschillende volgorden zijn er als je vijf keer een geldstuk opgooit?

- 3 Jeroen doet mee aan een tv-spel. Jeroen moet vijf bordjes met namen van hoofdsteden naast de naam van het juiste land ophangen. Jeroen weet weinig van topografie en hangt de bordjes lukraak op.
 a Hoeveel mogelijkheden heeft Jeroen om zijn eerste bordje op te hangen? En hoeveel voor het tweede?
 b Op hoeveel verschillende manieren kunnen de bordjes worden opgehangen?

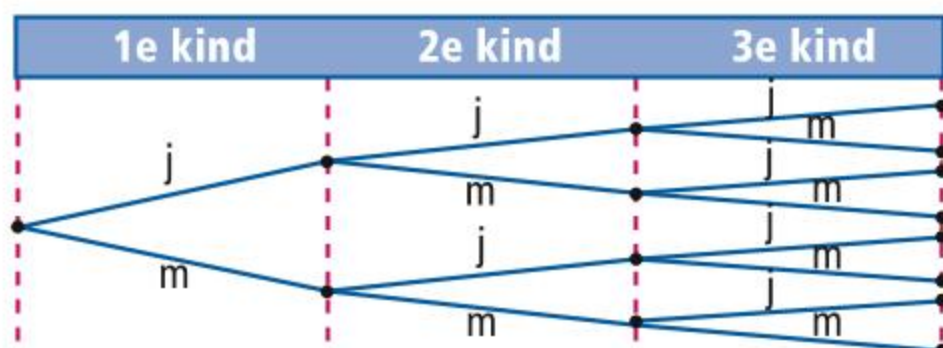


Theorie

Een **machtsboom** is een boomdiagram waarin bij elke splitsing het aantal takken gelijk blijft. Het totaal aantal volgorden (routes) is daarom een macht. Een **faculteitsboom** is een boomdiagram waarin bij elke splitsing het aantal takken één minder wordt, omdat bij elk keuzemoment het aantal keuzes één minder wordt.

Voorbeeld 1

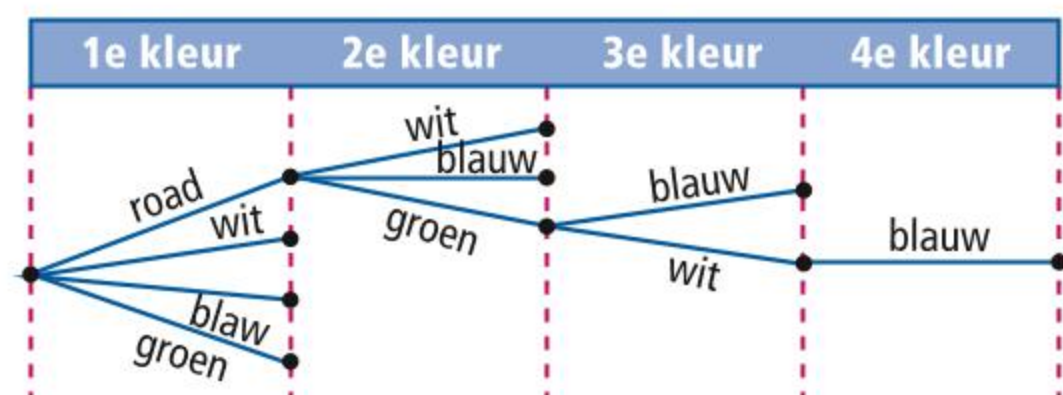
Hoeveel geboortevolgordes zijn in een gezin met 3 kinderen?



In de machtsboom hierboven zie je dat bij een gezin met 3 kinderen er $2^3 = 8$ mogelijke geboortevolgordes zijn.

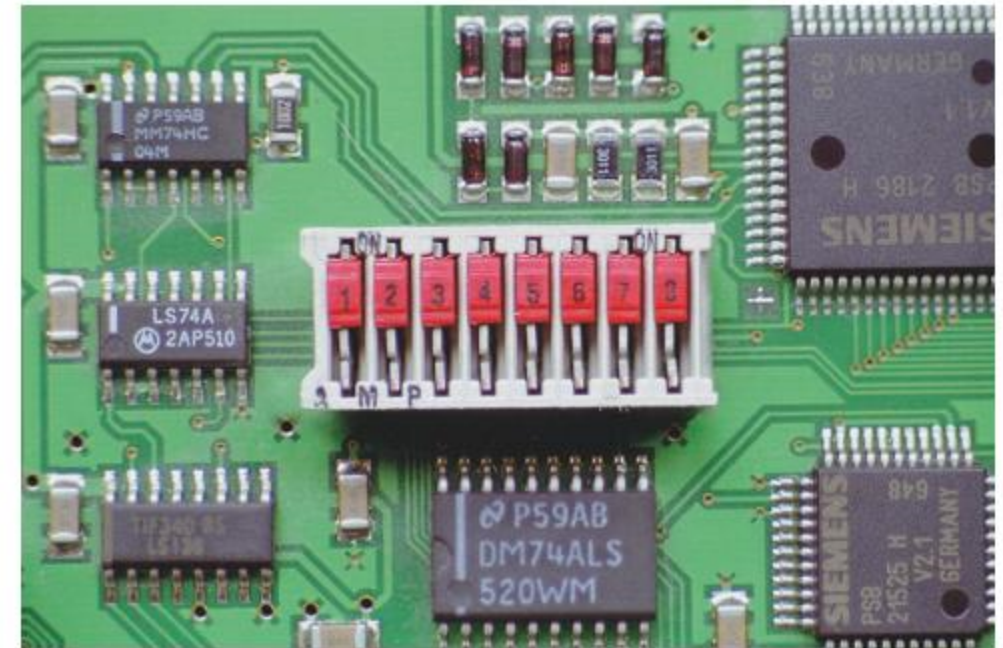
Voorbeeld 2

In een vaas zitten vier knikkers in de kleuren rood, wit, blauw en groen. Je trekt een knikker en legt die niet terug. Hoeveel volgordes zijn er waarin je de knikkers uit de vaas kunt halen?



In de faculteitsboom hierboven zie je dat er $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ volgordes zijn waarin je de vier gekleurde knikkers uit de vaas kunt halen.

- 4** In computerapparatuur zaten vroeger kleine schakelaartjes, dipswitches genoemd, waarmee het apparaat op de gewenste manier kon worden ingesteld. Elk schakelaartje kon in twee standen worden gezet.
- a** Hoeveel verschillende instellingen zijn er mogelijk met drie dipswitches?
- b** En hoeveel met acht dipswitches?
- c** Hoeveel dipswitches heb je minstens nodig om duizend verschillende instellingen te maken?
- 5** Bij een vereniging worden Sjaak, Inge en Pascal in het bestuur gekozen. Ze moeten de functies vervullen van voorzitter, penningmeester en secretaris en mogen deze functies onderling verdelen.
- a** Teken een boomdiagram met alle mogelijke verdelingen. Is dit boomdiagram een machtsboom of een faculteitsboom?
- b** Hoeveel verschillende verdelingen zijn er mogelijk?
- c** Hoeveel verschillende verdelingen zijn er mogelijk als vijf mensen vijf functies onderling moeten verdelen?
- 6** In een vaas zitten tien knikkers in verschillende kleuren. Je trekt een knikker en legt die niet terug. Dat doe je tien keer. Hoeveel volgorden zijn er waarin je de knikkers uit de vaas kunt halen?



Het product $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ heet 7-faculteit en noteer je als $7!$.

Zo is $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Op je rekenmachine zit een optie om faculteiten uit te rekenen. Zo kun je het product $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ snel uitrekenen door $12!$ op je rekenmachine in te voeren.

- 7a** Bereken $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
- b** Bereken $8!$
- c** Bereken $25!$
- d** De 15 leerlingen van een klas lopen één voor één naar buiten. In hoeveel verschillende volgorden kan dat gebeuren?
- e** Bereken zonder rekenmachine $\frac{9!}{8!}$ en $\frac{100!}{98!}$.

Hulpboek 4-1 Faculteiten

- 8a** Hoeveel verschillende volgorden zijn er om vijf kinderen op een rij te zetten?
- b** Op hoeveel manieren kun je een 'woord' van vier letters maken waarbij de letters A, B, C, en D elk precies één keer gebruikt worden?
- c** Hoeveel verschillende pincodes van vier cijfers zijn er?
- d** Hoeveel manieren zijn er om een toets te maken met 50 vragen waarbij je steeds uit drie mogelijke antwoorden moet kiezen?
- e** Geef bij de opdrachten a, b, c en d aan of je te maken hebt met een machtsboom of een faculteitsboom.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP	
1!	1
2!	2
3!	6
4!	24

1-2

Permutaties

- 9** Met de zeven letters b, d, e, i, r, u en z gaat Peter woorden maken. Door de letters in een andere volgorde te leggen, krijgt hij telkens een ander 'woord'. Dat kunnen ook onzinwoorden zijn, zoals deirbuz.
- a** Hoeveel verschillende 'woorden' van zeven letters kan hij maken?
- b** Peter gaat een 'woord' van drie letters maken. Hoeveel verschillende 'woorden' van drie verschillende letters kan Peter maken met zijn zeven letters?
- c** Hoeveel verschillende 'woorden' van vijf verschillende letters kan Peter met zijn zeven letters maken?
- 10** Een volleybalteam heeft een basis van negen spelers. Bij een volleybalwedstrijd moeten er zes spelers in het veld staan. De volgorde waarin de spelers in het veld staan is voor de beginopstelling van belang. Hoeveel beginopstellingen zijn er mogelijk?
- 11** Bij de gymles wordt voor het eerst een hockeywedstrijd gespeeld. Uit een groep van 23 leerlingen moeten 11 spelers in het veld opgesteld worden, in een opstelling zoals je hiernaast ziet.
- a** Bereken hoeveel opstellingen van 11 spelers je kunt maken uit een groep van 23 leerlingen.
- b** Laat zien dat je het aantal bij opdracht a kunt berekenen door van $23!$ en $12!$ gebruik te maken.
- Bij het berekenen van het aantal 'woorden' zoals in opdracht 9 of het aantal opstellingen neemt het aantal keuzes telkens met één af. Je kan dus een faculteitsboom gebruiken. Het aantal opstellingen van acht spelers uit een groep van 20 spelers is gelijk aan $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 5\,079\,110\,400$.*
- Je berekent dat aantal sneller met $\frac{20!}{12!}$.*
- 12** Bereken met behulp van faculteiten.
- a** $45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38$
- b** $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
- c** $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$
- d** $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30$
- 13a** Martijn kiest achtereenvolgens vier verschillende letters uit het alfabet. Op hoeveel manieren kan dat?
- b** Uit een collectie van 40 cd's wordt een top-10 samengesteld. Op hoeveel manieren kan dat?



Voorbeeld

$$11 \cdot 10 \cdot 9 =$$

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11!}{8!}$$

Zo is ook:

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 = \frac{25!}{19!} \text{ en}$$

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{11!}{3!}$$

Theorie

Een opstelling van vijf spelers uit een groep van 20 noem je een **permutatie** van 5 uit 20.

Een permutatie is een **rangschikking**.

Het aantal permutaties van r uit n is gelijk aan $\frac{n!}{(n-r)!}$

- 14a** In de theorie hierboven staat dat het aantal permutaties van r uit n gelijk is aan $\frac{n!}{(n-r)!}$.

Leg uit waarom er $(n-r)!$ in de noemer staat.

- b** Er is maar één permutatie van 1 uit 1.

Neem $n = 1$ en $r = 1$ in de formule $\frac{n!}{(n-r)!}$.

Welke waarde voor $0!$ volgt hier uit?

- 15a** Bereken het aantal permutaties van 6 uit 20.

- b** Bereken ook het aantal permutaties van 4 uit 14, van 3 uit 12 en van 9 uit 12.

Hulpboek 4-1 Faculteiten, permutaties en combinaties

Voorbeeld

Joke breit een trui met vijf horizontale streken. Ze heeft acht kleuren wol. Hoeveel truien zijn er mogelijk als geen twee streken dezelfde kleur krijgen?

Oplossing

Er is sprake van een rangschikking van 5 uit 8 kleuren, of een permutatie van 5 uit 8.

Er zijn $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{(8-5)!} = 6720$ truien mogelijk.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIANT MP

$10P_7$

$20C_6$

604800

- 16** De leraar heeft op het proefwerk een opgave gemaakt waarvan het antwoord $\frac{20!}{17!}$ is. Bedenk een vraag waarbij dit antwoord hoort.

- 17** Zwitserland is een meertalig land. Duits, Italiaans en Frans zijn de drie officiële talen. Op allerlei producten tref je dan ook de naam van het product in het Duits, Italiaans en Frans aan.

Soms krijg je bij een kop koffie een meertalig suikerklontje. Hiernaast zie je een uitgevouwen wikkel van zo'n suikerklontje. Op de wikkel staat steeds op dezelfde plaats Zucker, Sucre en Zucchero. Verder staat het woord suiker in nog drie andere talen vermeld. Voor een Zwitser zijn dit dus 'vreemde' talen.

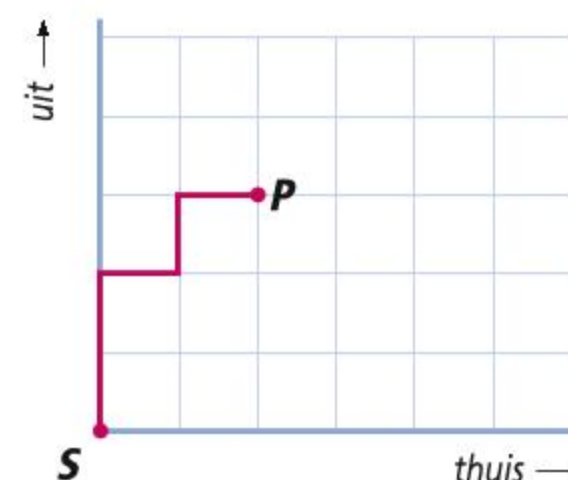
- a** Neem aan dat het woord suiker ook in het Nederlands, Engels en Zweeds wordt afgedrukt. Hoeveel verschillende wikkels zijn er dan mogelijk?
- b** Neem aan dat er voor de drie 'vreemde' talen uit zeven talen wordt gekozen. Hoeveel wikkels zijn er op deze manier mogelijk?
- c** Er wordt voor de drie 'vreemde' talen gekozen uit tien talen, waaronder Nederlands. Hoeveel verschillende wikkels zijn er mogelijk waarop je het woord 'suiker' aantreft?



1-3

Routes in een rooster

- 18** Een voetbalwedstrijd eindigt in een verlies van 2-3 voor de thuisclub. Elk scoreverloop dat tot deze uitslag leidt, kun je opvatten als een route van punt S naar punt P in een assenstelsel. Je begint bij de stand 0-0, dus in het punt $S(0, 0)$. Bij elk doelpunt van de thuisclub (T) ga je een stap naar rechts. Scoort de uit spelende club (U) dan ga je een stap omhoog.
- a** Waarom bestaat elke route van S naar P uit drie U's en twee T's?
- b** Een mogelijk rijtje van drie U's en twee T's is UUTUT. De bijbehorende route is hiernaast getekend.
- Neem de figuur over en teken ook de route die hoort bij het rijtje TUTUU.
- c** Schrijf alle mogelijke rijtjes van drie U's en twee T's op.
- d** Hoeveel scoreverlopen zijn er mogelijk met 2-3 als eindstand?

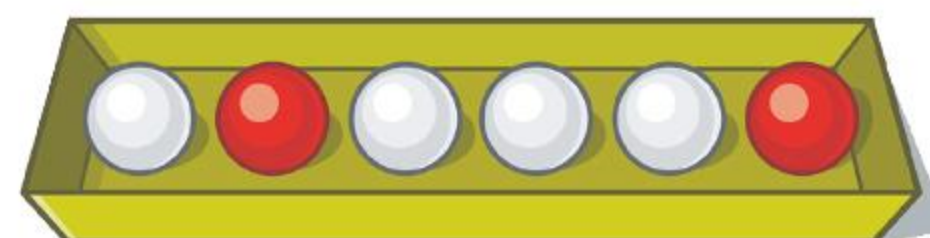


- 19** De eindstand 2-3 wordt bereikt via de stand 2-2 òf via 1-3.
- a** Geef deze voorgangers in het assenstelsel van opdracht 18 aan.
- b** Hoeveel routes zijn er van 0-0 naar 2-2?
- c** En hoeveel routes zijn er van 0-0 naar 1-3?
- d** Het aantal routes van 0-0 naar 2-3 krijg je door de antwoorden op de opdrachten b en c op te tellen. Leg uit waarom.

- 20** In het rooster hiernaast gaat het om het aantal routes zonder omwegen van punt A naar punt P . Bij elk kruispunt staat het aantal verschillende routes vanuit punt A naar dit kruispunt.
- a** Leg uit waarom er bij de punten B en F een 1 staat.
- b** Beantwoord dezelfde vraag voor de punten C , D , E en K .
- c** Ga na dat de aantallen routes bij G , H , I en L kloppen.
- d** Punt M kun je bereiken via punt H of via punt L .
Er zijn dus $3 + 3 = 6$ routes van punt A naar punt M .
Beredeneer op dezelfde manier hoeveel routes er zijn van punt A naar punt J .
- e** Doe hetzelfde voor de punten N en P .



- 21** Je hebt twee rode en vier witte ballen. Je legt die ballen van links naar rechts en één voor één in een doos. Je wilt het aantal verschillende kleurpatronen met rood en wit tellen. Omdat elk kleurpatroon bestaat uit zes ballen waarbij je telkens maar uit twee kleuren kunt kiezen, kun je hier een rooster gebruiken.
- Horizontaal zet je dan bijvoorbeeld *rood* en verticaal *wit*.
- a** Als je een rode bal neerlegt, doe je in een rooster een stap naar rechts en leg je een witte bal neer dan doe je een stap omhoog. Welke coördinaten heeft het punt dat je hierbij als eindpunt krijgt?
- b** Hoeveel verschillende kleurpatronen zijn er?
- c** En hoeveel verschillende kleurpatronen zijn er met twee rode en vijf witte ballen?



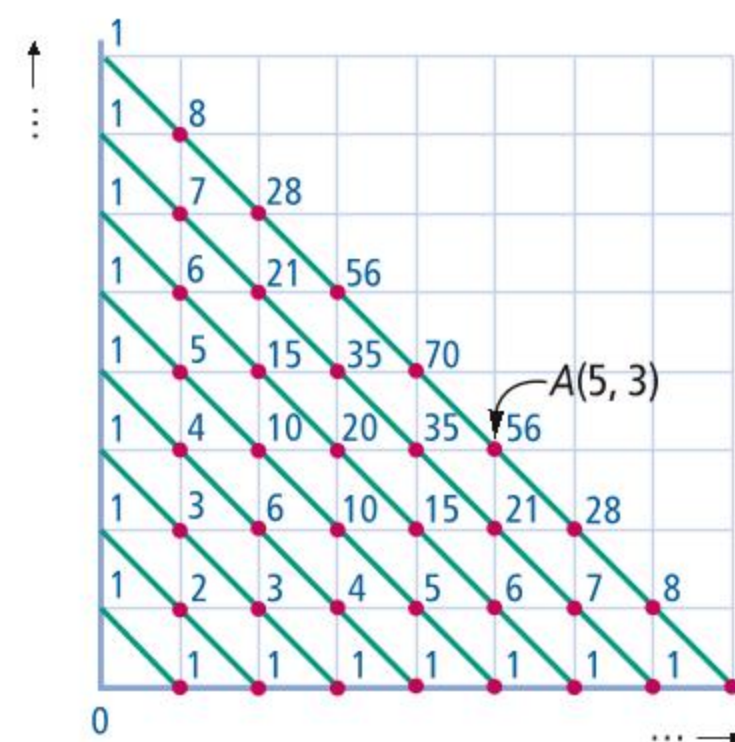
Theorie

Voor telproblemen waarbij je steeds moet kiezen uit twee **alternatieven** is een **rooster** een handig model.

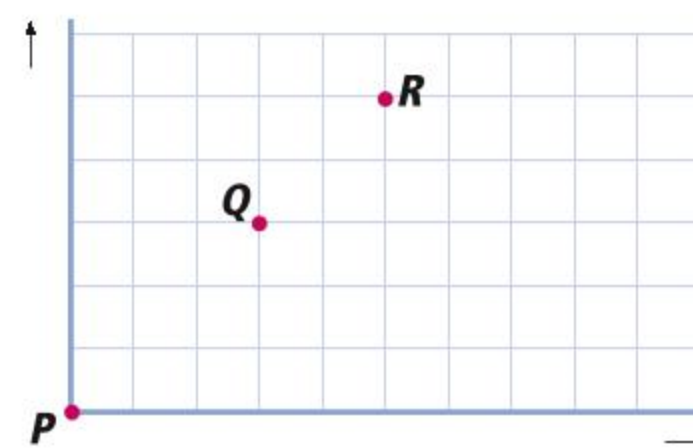
In het rooster hiernaast zijn er verschillende routes van punt $O(0, 0)$ naar het punt $A(5, 3)$. Elk van deze routes bestaat uit negen stappen: vijf stappen naar rechts en vier stappen omhoog. De routes verschillen in de volgorde waarin de stappen worden gezet.

Het aantal verschillende routes vind je met behulp van de voorgangers. Er zijn 56 verschillende routes van punt O naar punt A .

Het rooster in de vorm van een driehoek zoals hiernaast wordt ook wel de **driehoek van Pascal** genoemd.



- 22** Los de volgende telproblemen op door gebruik te maken van een rooster. Zet waar mogelijk de alternatieven bij de assen.
- a** Bereken het aantal kortste routes van het punt $S(0, 0)$ naar het punt $T(8, 4)$.
- b** Een byte is een rijtje van acht bits. Een bit is een 0 of een 1. Een byte is bijvoorbeeld 10101001. Hoeveel bytes met twee nullen en zes enen zijn er mogelijk?
- 23** Ab en Bert moeten het aantal routes van punt P via punt Q naar punt R in het rooster hiernaast vinden.
- a** Ab zegt: 'Een route zonder omwegen bestaat uit tien stappen, waarvan vijf stappen naar rechts. Het aantal routes van punt P naar punt R is volgens het rooster 252.' Welke fout maakt Ab?
- b** Bert zegt: 'Ik knip het rooster bij punt Q in stukken en tel in ieder stuk het aantal routes. Ik kom op 120 routes uit'. Hoe komt Bert aan 120 routes?



Als je het aantal kortste routes van punt A naar punt B en van punt B naar punt C weet, dan vind je het aantal routes van punt A via punt B naar punt C door die aantallen routes te vermenigvuldigen. Immers bij elke route van A naar B past elke route van B naar C.

- 24** De uitslag van een hockeywedstrijd tussen Kampong en Klein-Zwitserland was 4 – 6. Er zijn veel scoreverlopen die tot deze uitslag kunnen leiden.
- a** Waarom is dit telprobleem met een rooster op te lossen?
- b** Welk eindpunt in het rooster hoort hierbij?
- c** Hoeveel scoreverlopen kunnen leiden tot deze uitslag?
- d** De ruststand was 2 – 2. Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn er mogelijk met deze ruststand?

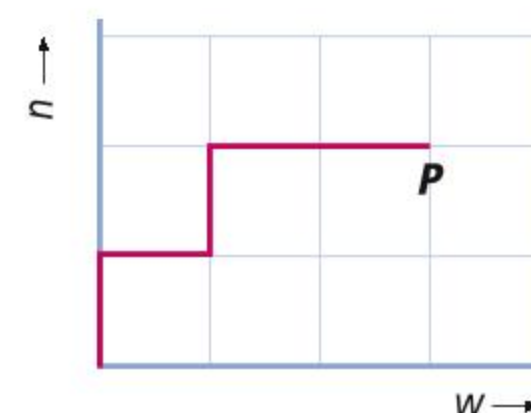
- 25** André maakt van een test met twaalf vragen er acht goed.
- a** Zoek met een rooster uit op hoeveel manieren dat kan.
- b** Van de acht goed beantwoorde vragen zitten er vijf bij de eerste zeven vragen en drie bij de laatste vijf vragen. Op hoeveel manieren kan dit?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	X	8	X	8	8	8	X	8	X	8	8

1-4

Combinaties

- 26** Jelle heeft vijf cd's waaruit hij een top-drie wil samenstellen.
- a** Wat voor soort boomdiagram hoort er bij dit probleem?
 - b** Bereken met behulp van een vermenigvuldiging op hoeveel verschillende manieren Jelle uit vijf cd's een top-drie kan samenstellen.
 - c** Je hebt bij opdracht b het aantal permutaties van drie uit vijf berekend. Hoe kun je met behulp van faculteiten dit aantal permutaties berekenen?
- 27** Farid heeft een prijs gewonnen. Uit de vijf cd's A, B, C, D en E mag hij er drie kiezen.
- a** Als Farid het drietal BDE kiest, is dat in deze situatie dezelfde keuze als het drietal DEB.
Leg uit waarom.
 - b** Schrijf alle mogelijke drietallen cd's op die Farid kan kiezen.
 - c** Om het aantal mogelijke drietallen voor Farid te tellen, kun je ook gebruik maken van een rooster. Immers: van elke cd kun je aangeven of Farid die wel (w) of niet (n) kiest. De rij nwnww betekent dan dat Farid de cd's B, D en E kiest. In het rooster hiernaast is deze keuzemogelijkheid aangegeven. Controleer met het rooster of je bij opdracht b het juiste aantal mogelijke drietallen hebt gevonden.
- 28a** Bij de opdrachten 26 en 27 was er in beide gevallen sprake van een keuze van drie cd's uit vijf cd's.
Wat is het verschil tussen de twee opdrachten?
- b** Leg uit dat je elk drietal cd's op $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ manieren kunt rangschikken.
 - c** Jelle kan op $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ manieren een top-drie samenstellen. Leg uit dat je het aantal keuzemogelijkheden voor Farid kunt berekenen met de deling $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.
 - d** Laat zien dat je de deling uit opdracht c ook kunt schrijven als $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$.
- 29** Bij een voetbalvereniging wordt uit de negen leden van het bestuur een feestcommissie van drie personen samengesteld. De leden van deze commissie worden door loting aangewezen.
- a** Er wordt besloten dat de eerst gekozen voorzitter wordt, de tweede secretaris, de derde penningmeester.
Hoeveel verschillende feestcommissies zijn er zo mogelijk?
 - b** Als je alleen let op de gekozen personen en niet op hun functie, zijn er $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6}$ feestcommissies mogelijk. Leg uit!
 - c** Laat zien dat je het aantal van opdracht b kunt schrijven als: $\frac{9!}{3! \cdot 6!}$



Theorie

Een selectie van drie dingen die je uit tien verschillende dingen kunt kiezen heet een **combinatie** van 3 uit 10.

De rangschikking van de drie gekozen dingen is daarbij niet van belang. Het aantal combinaties

noteer je als $\binom{10}{3}$ en $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$, wat je ook kunt

schrijven als $\frac{10!}{3! \cdot 7!}$. Je zegt: 10 boven 3.

Het aantal combinaties van r uit n is gelijk aan $\frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$

$r! \cdot (n-r)!$

Een combinatie is ook op te vatten als een herhaalde keuze uit twee alternatieven, met vaste aantallen per alternatief. Het aantal combinaties kun je daarom ook vinden door gebruik te maken van een rooster.

Voorbeeld

Op een fruitschaal liggen vijf vruchten: een appel, een banaan, een kiwi, een sinaasappel en een peer.

Je kiest drie vruchten.

Hoeveel verschillende drietallen vruchten zijn er mogelijk?

Oplossing

Je kiest drie vruchten en twee niet.

In een rooster is dit het punt (3, 2).

Er zijn 10 routes naar dit punt.

Of:

Het aantal is gelijk aan $\binom{5}{3} = 10$.

30a In de theorie hierboven staat dat $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ gelijk is aan $\frac{10!}{3! \cdot 7!}$

Laat zien hoe de ene breuk te herleiden is tot de andere.

b In de theorie hierboven staat dat het aantal combinaties van r uit n gelijk is aan $\frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$

Leg uit waarom er $r! \cdot (n-r)!$ in de noemer staat.

31 Het aantal routes in een rooster van (0, 0) naar (3, 7) is gelijk aan het aantal combinaties van 3 uit 10.

a Leg uit hoe je aan het getal 10 komt.

b Bereken met je rekenmachine het aantal routes van (0, 0) naar (3, 7).

NORMAL FLOAT AUTO REAL Radian MP

$10C_3$

.....120.

$20C_4$

Hulpboek 4-1 Faculteiten, permutaties en combinaties

32a Bereken het aantal combinaties van 4 uit 20 en van 7 uit 12.

b Bereken $\binom{19}{3}$, $\binom{20}{6}$ en $\binom{60}{59}$.

c Beredeneer waarom $\binom{20}{14} = \binom{20}{6}$.

33 Een groep van dertig toeristen wordt verdeeld over drie taxibusjes. Het eerste busje heeft acht plaatsen, het tweede tien en het derde twaalf.

a Hoeveel verschillende groepjes van acht toeristen kun je kiezen voor het eerste busje?

b Als acht toeristen voor het eerste busje zijn gekozen, worden tien personen voor het tweede busje gekozen. Op hoeveel manieren kan dat?

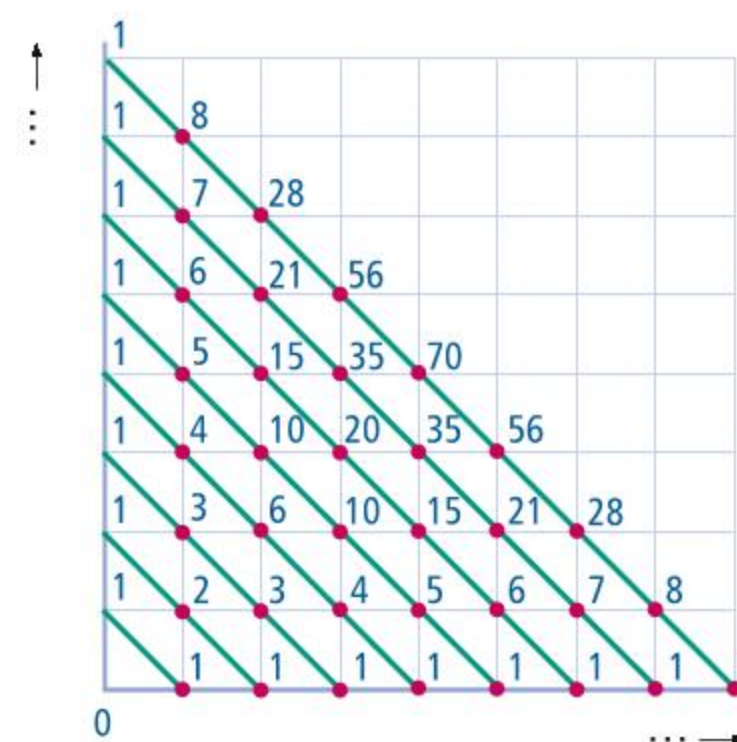
c Op hoeveel verschillende manieren kunnen de dertig toeristen over de drie busjes verdeeld worden?

d Op de plaats van bestemming aangekomen moet de groep worden verdeeld in drie groepen van elk tien deelnemers. Op hoeveel manieren kan dat?

1-5

Telproblemen

- 34** Uit een bak met rode en witte ballen worden vijf ballen getrokken en naast elkaar op tafel gelegd. Zo krijg je een rijtje van vijf ballen.
- Hoeveel rijtjes met één rode bal kun je zo krijgen?
 - Bereken ook het aantal rijtjes met twee, drie en vier rode ballen.
 - Hoeveel rijtjes zijn er met geen enkele rode bal? En met vijf rode ballen?
 - Hoeveel verschillende rijtjes van vijf ballen kun je in totaal krijgen?
- 35** Uit de bak van opdracht 34 worden nu zeven ballen getrokken en naast elkaar op tafel gelegd.
- Leg uit dat het totaal aantal mogelijke rijtjes van zeven ballen gelijk is aan $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$.
 - Bereken op de manier van opdracht a het totaal aantal mogelijke rijtjes.
 - Voor de eerste getrokken bal zijn er twee mogelijkheden: rood of wit. Voor elke volgende getrokken bal geldt dat ook. Het totaal aantal mogelijke rijtjes is dus gelijk aan $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$. Controleer hiermee je antwoord van opdracht b.
- 36** Uit de bak van opdracht 34 worden nu zes ballen getrokken en naast elkaar op tafel gelegd.
- Lees uit het rooster hiernaast af hoeveel rijtjes er mogelijk zijn met vier rode en twee witte ballen.
 - Welke getallen in het rooster moet je bij elkaar optellen om het totaal aantal mogelijke rijtjes met zes ballen te berekenen?
 - De som van de getallen op elke getekende diagonaal is een macht van 2. Leg uit waarom dat zo is.



Je gebruikt een rooster of $\binom{n}{r}$ om telproblemen op te lossen

waarbij je steeds een keuze hebt uit twee alternatieven. Soms kun je echter kiezen uit meerdere alternatieven.

- 37** Door de zeven letters A, B, C, D, E, F en G in een andere volgorde te leggen, krijg je telkens een ander 'woord'. Dat kunnen ook onzinwoorden als CDBEFAG zijn.
- Hoeveel verschillende 'woorden' kun je maken met de zeven letters?
 - In alle 'woorden' van opdracht a worden de letters A en B vervangen door de letter K. De 'woorden' DFEAGCB en DFEBGCA worden dan beide vervangen door het woord DFEKGCK. Hoeveel verschillende 'woorden' houd je op deze manier over?
 - In alle 'woorden' van opdracht b worden vervolgens de letters C en D vervangen door de letter M. Hoeveel verschillende 'woorden' houd je op deze manier over?

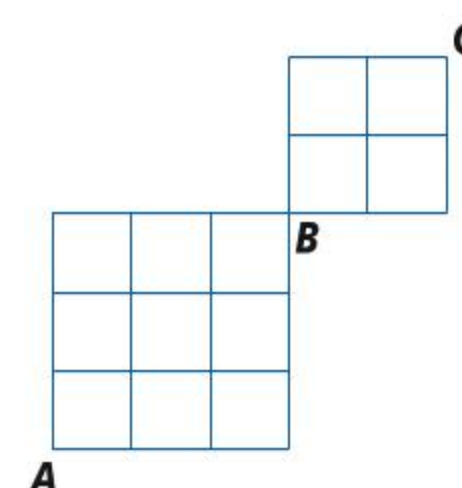
- 38** Gegeven zijn de zeven letters K, K, M, M, E, F en G.
- a** Leg met gebruik van opdracht 37 uit dat het aantal verschillende ‘woorden’ dat je met deze zeven letters kunt maken, te berekenen is met $\frac{7!}{2 \cdot 2}$
- b** In alle ‘woorden’ van opdracht a worden de letters E, F en G vervangen door de letter P. Zo wordt het ‘woord’ KMEMFGK vervangen door KMPMPPK. Hoeveel ‘woorden’ van opdracht a worden op deze manier vervangen door het ‘woord’ KMPMPPK?
- c** Hoeveel verschillende ‘woorden’ houd je op deze manier over?
- 39** Je legt tien knikkers op een rij.
- a** Hoeveel verschillende rijtjes kun je zo maken als de tien knikkers verschillend van kleur zijn?
- b** Hoeveel verschillende rijtjes kun je zo maken als van de tien knikkers er vijf rood zijn en de andere wit, blauw, geel, groen en oranje zijn?
- c** Hoeveel verschillende rijtjes kun je zo maken als van de tien knikkers er vijf rood en drie geel en twee knikkers blauw zijn?

Stel je hebt n letters, cijfers of andere ‘dingen’, waarbij er groepjes onderling gelijke voorkomen, bijvoorbeeld a van een bepaalde soort, b van een andere soort, c van een derde soort enzovoorts. Dan is het aantal rangschikkingen

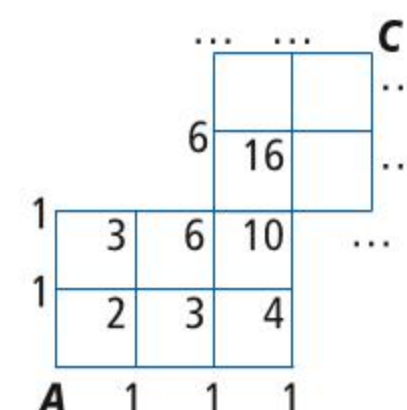
gelijk aan $\frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}$ waarbij $a + b + c + \dots = n$.

- 40** Bereken in de volgende gevallen hoeveel rangschikkingen je kunt maken.
- a** Vijf rode, drie zwarte en zes groene knikkers
- b** Drie Hollanders, vijf Belgen en één Duitser
- c** Twaalf letters waaronder vier a’s, twee m’s en de rest verschillend.

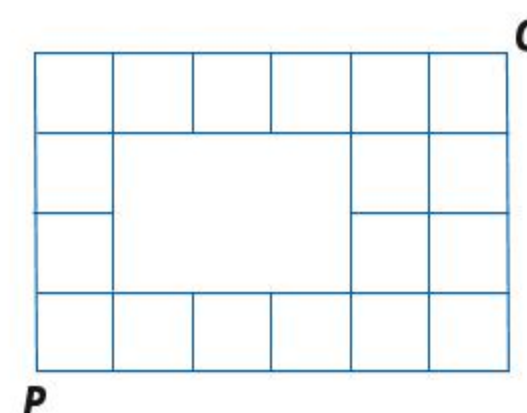
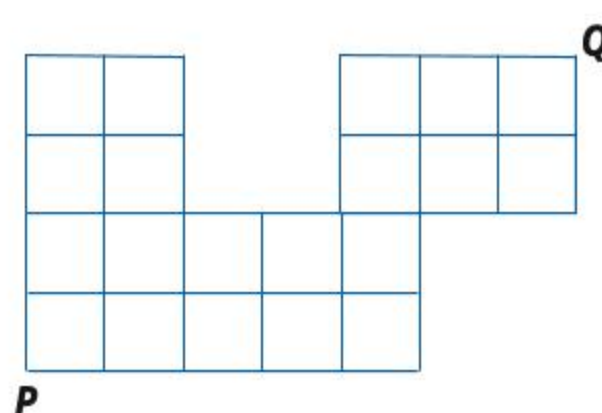
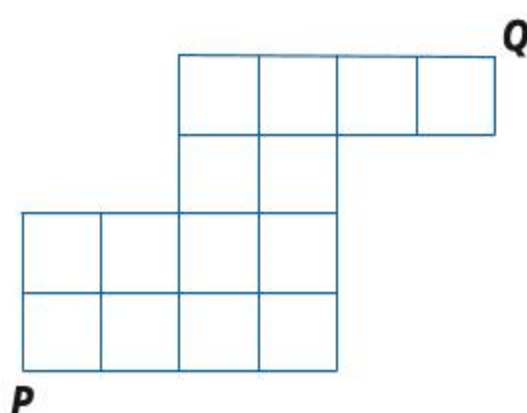
Het aantal routes van A naar C in het rooster hiernaast kun je berekenen door het aantal routes van A naar B te vermenigvuldigen met dat van B naar C. In het rooster dat eronder staat werkt deze methode niet.



- 41a** Ga na dat in het bovenste rooster het aantal routes van A naar C gelijk is aan $20 \times 6 = 120$.
- b** In het onderste rooster vind je het aantal routes van A naar C door in het rooster ‘door te tellen’. Vul de getallen op de stippen in. Hoeveel routes zijn er in dit rooster van A naar C?



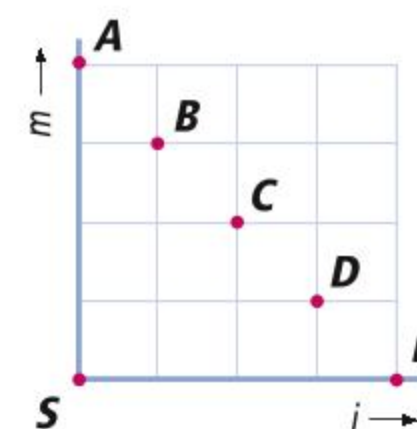
- 42** Bepaal bij onderstaande roosters het aantal kortste routes van P naar Q.



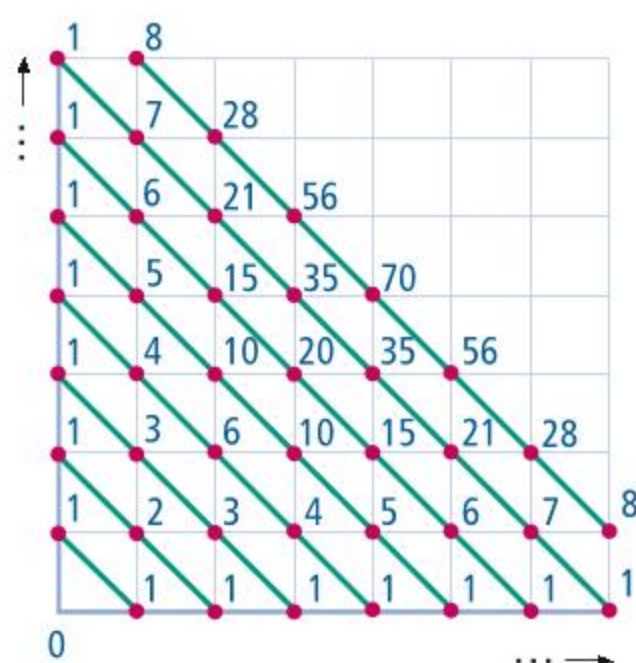
1-6

Binomium van Newton

- 43 In het rooster hiernaast geeft elk van de punten A tot en met E de mogelijke samenstelling van een gezin met vier kinderen weer.
- Van S naar D zijn vier routes mogelijk. Wat is de betekenis van deze routes?
 - Hoeveel samenstellingen van een gezin met vier kinderen zijn er mogelijk met twee jongens en twee meisjes?
 - Hoeveel samenstellingen van een gezin met vier kinderen zijn er in totaal mogelijk?
 - Hoeveel samenstellingen van een gezin met zes kinderen zijn er met twee jongens en vier meisjes?
 - Hoeveel samenstellingen van een gezin met zes kinderen zijn er in totaal?



Eerder in dit hoofdstuk heb je gezien dat het rooster waarmee je aantallen volgorden kunt tellen ook wel de driehoek van Pascal genoemd wordt. Hieronder rechts zie je de driehoek van Pascal in een andere vorm weergegeven. De getallen uit de driehoek van Pascal kom je op onverwachte plaatsen tegen. In deze paragraaf gebruik je deze getallen bij het wegwerken van haakjes.



De driehoek van Pascal

1e rij					1		1												
2e rij					1		2		1										
3e rij					1		3		3		1								
4e rij					1		4		6		4		1						
5e rij					1		5		10		10		5		1				
6e rij					1		6		15		20		15		6		1		
7e rij					1		7		21		35		35		21		7		1
8e rij					1		8		28		56		70		56		28		8
					1														1

- 44a Bekijk de driehoek van Pascal rechtsboven. Laat zien hoe je de getallen uit de achtste rij kunt afleiden uit de getallen van de zevende rij.
- Schrijf de negende rij met getallen op.
 - Uit hoeveel getallen bestaat de elfde rij getallen in de driehoek van Pascal?
 - Leg uit dat het vierde getal op de elfde rij gelijk is aan $\binom{11}{3}$.
 - Hoe groot is het zesde getal op de twaalfde rij in de driehoek van Pascal?

- 45a** Werk de haakjes in $(a + b)^2$ weg. Schrijf de uitkomst in de vorm $\dots a^2 + \dots ab + \dots b^2$. Welke getallen komen er op de puntjes te staan?
- b** Werk de haakjes in $(a + b)^3$ weg en schrijf de uitkomst in de vorm $\dots a^3 + \dots a^2b + \dots ab^2 + \dots b^3$. Welke getallen komen er op de puntjes te staan?
- c** Vergelijk de getallen die je in de opdrachten a en b op de puntjes hebt ingevuld, met de driehoek van Pascal. Waar vind je deze getallen in de driehoek terug?

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + \dots ab + b^2) \\ &= a^3 + \dots\end{aligned}$$

- 46** In de uitwerking van $(a + b)^4$ komen de termen a^4 , a^3b , a^2b^2 , ab^3 en b^4 voor. De vraag is alleen hoe vaak elke term voorkomt. Er geldt $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$. Om de term a^4 te krijgen moet je uit elke factor $(a + b)$ het getal a nemen en uit geen enkele factor het getal b . Dat kan dus maar op één manier.
- a** Voor de term a^3b moet je uit drie van de vier factoren $(a + b)$ het getal a nemen en uit één factor $(a + b)$ het getal b . Dat kan op $\binom{4}{1}$ manieren. Hoe vaak komt dus de term a^3b voor in de uitwerking van $(a + b)^4$ voor?
- b** En hoe vaak komt de term a^2b^2 voor in de uitwerking van $(a + b)^4$?
- c** Neem over en vul in:
 $(a + b)^4 = \dots a^4 + \dots a^3b + \dots a^2b^2 + \dots ab^3 + \dots b^4$
- d** Leg uit waarom de getallen die je in opdracht c op de puntjes hebt ingevuld, gelijk zijn aan de getallen op de vierde rij in de driehoek van Pascal.
- e** Gebruik de driehoek van Pascal om $(a + b)^5$ zonder haakjes te schrijven.

Theorie

Om producten als $(a + b)^5$ en $(x + 7)^4$ uit te werken kun je gebruik maken van de driehoek van Pascal. Er geldt:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Deze formule heet het **binomium van Newton**.

- 47a** Uit hoeveel termen bestaat de uitwerking van $(x + y)^7$?
- b** Schrijf $(x + y)^7$ zonder haakjes.
- c** Volgens het binomium van Newton is $(x + 5)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1} \cdot x \cdot 5 + \binom{2}{2} \cdot 5^2$. Ga dat dat dit klopt met $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$.
- d** Schrijf $(x + 2)^4$ en $(p + 3)^5$ zonder haakjes.
- e** Je kunt $(a - b)^5$ als $(a + -b)^5$ schrijven. Gebruik het binomium van Newton om $(a - b)^5$ zonder haakjes te schrijven.
- f** Schrijf $(j + m)^4$ zonder haakjes en leg uit wat het verband is met opdracht 43.
- 48** Door in de formule $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$ voor a en b beide 1 in te vullen, toon je aan dat de som van alle routes naar de punten waar je in n stappen kunt komen, gelijk is aan 2^n . Laat dit zien.

1-7

Gemengde opdrachten

- 49** Op een plank staan zes busjes. Onder twee busjes ligt een munt, onder de andere vier niet. Je kunt aan de buitenkant niet zien of er wel of niet een munt onder het busje ligt. Sjobbe wil de beide munten hebben. Hij neemt willekeurig een busje van de plank en kijkt eronder. Vervolgens pakt hij het volgende busje en kijkt eronder. Hij gaat zo door tot hij de twee munten heeft.
- Maak een boomdiagram bij deze situatie.
 - Hoeveel verschillende volgorden zijn er?
 - Mark heeft al onder de middelste twee busjes gekeken en verklaart dat daar geen munt onder ligt. Hoeveel verschillende volgorden zijn er nu voor Sjobbe?
- 50** De coach van een zaalvoetbalteam heeft een selectie van twaalf spelers: tien veldspelers en twee keepers.
- Bij een wedstrijd neemt hij een groep van acht spelers mee: zeven veldspelers en één keeper. Hoeveel verschillende groepen kan hij maken?
 - Tijdens de wedstrijd staan vijf spelers in het veld: de keeper en vier veldspelers. De veldspelers mogen gedurende de wedstrijd doorlopend worden gewisseld. Hoeveel verschillende opstellingen zijn er tijdens een wedstrijd in het veld mogelijk?
- 51** In een 4 havo klas zitten 24 leerlingen. De decaan wil met elk van hen een gesprek over de vervolgopleiding houden. Zij wil op maandag tien gesprekken voeren en op dinsdag veertien.
- Op hoeveel manieren kan de decaan de klas voor deze gesprekken in twee groepen opsplitsen? De volgorde waarop de gesprekken op zo'n dag worden gevoerd is hierbij niet van belang.
 - De decaan kiest tien willekeurige namen en maakt een rooster voor de gesprekken voor maandag. Laat zien dat er 3 628 800 verschillende roosters met deze tien leerlingen mogelijk zijn.
 - Maandag moeten drie jongens en zeven meisjes voor een gesprek bij de decaan komen. Als je alleen kijkt of je te maken hebt met een jongen of een meisje, hoeveel verschillende volgorden zijn er dan voor de gesprekken op maandag?
 - In een andere 4 havo klas zitten 21 leerlingen. Met deze leerlingen wil de decaan ook gesprekken voeren, namelijk acht op woensdag, drie op donderdag en tien op vrijdag. Op hoeveel manieren kan de decaan de klas voor deze gesprekken in drie groepen opsplitsen?

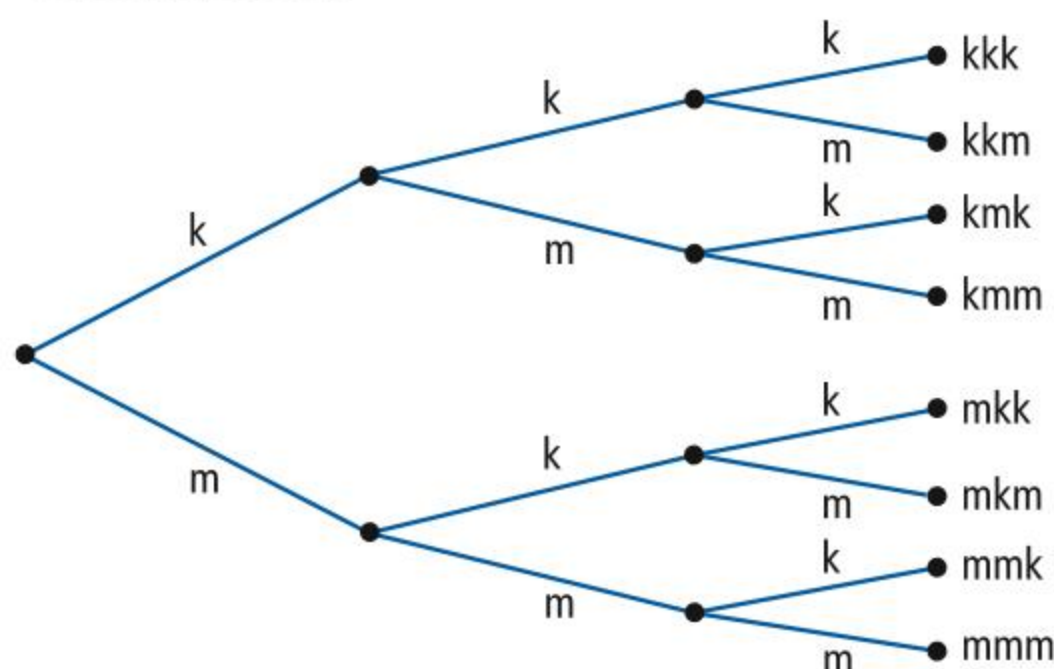


- 52** Een wachtwoord voor een internetsite moet bestaan uit zeven letters, gevolgd door acht cijfers. De acht cijfers moeten verschillend zijn. Bij de zeven letters moet er gewerkt worden met drie p's, twee a's, een r en een w.
- a** Hoeveel mogelijke wachtwoorden zijn er zo mogelijk?
- b** En hoeveel wachtwoorden zijn er mogelijk als de acht cijfers niet verschillend hoeven te zijn?
- 53a** Schrijf $(x - y)^6$ zonder haakjes.
- b** Volgens het binomium van Newton is
- $$(3x + 4)^2 = \binom{2}{0} \cdot (3x)^2 + \binom{2}{1} \cdot 3x \cdot 4 + \binom{2}{2} \cdot 4^2.$$
- Werk de uitdrukking uit tot de vorm $\dots x^2 + \dots x + \dots$
- c** Schrijf $(2p + 3)^5$ zonder haakjes.
- d** Schrijf $(a - 2b)^6$ zonder haakjes.
- e** Bereken hoe vaak de factor x^3y^4 voorkomt in de uitwerking van $(3x + 5y)^7$.
- 54** Bij elke uitzending van een datingprogramma op de televisie zijn er zes kandidaten, drie jongens A, B en C en drie meisjes X, Y en Z. Nadat allerlei vragen zijn beantwoord, moet iedere jongen één meisje kiezen. Ook kiest ieder meisje één jongen. Een keuzemogelijkheid voor de jongens is bijvoorbeeld: jongen A kiest meisje X, jongen B kiest meisje Y en jongen C kiest meisje Z. Maar het is ook mogelijk dat de drie jongens hetzelfde meisje kiezen.
- a** Hoeveel verschillende keuzemogelijkheden zijn er voor de drie jongens in totaal?
- b** In hoeveel gevallen kiezen twee jongens hetzelfde meisje?
- c** Laat zien dat er precies zes gevallen zijn waarbij elk meisje door precies één jongen gekozen wordt.
- d** Hoeveel verschillende keuzemogelijkheden zijn er in totaal voor alle kandidaten?
- Als bijvoorbeeld jongen A voor meisje Y kiest en meisje Y kiest voor jongen A, dan worden die twee uitgeroepen tot 'love duo'. Bij de uitzending van 4 december 2002 waren er drie love duo's ontstaan. De presentator riep toen uit: 'Dames en heren, er is iets unieks gebeurd vandaag. Dit gebeurt maar in 1 van de 99 gevallen'.
- e** Heeft de presentator gelijk? Licht je antwoord toe met een berekening.



Samenvatting

Machtsboom



Het aantal volgorden is $2^3 = 8$.

Machtsbomen en faculteitsbomen

Een machtsboom is een boomdiagram waarin bij elke splitsing het aantal takken gelijk blijft. Het totaal aantal volgorden is daarom een macht. Een faculteitsboom is een boomdiagram waarin bij elke splitsing het aantal takken één minder wordt. Het totaal aantal volgorden is dan te berekenen met behulp van faculteiten.

Faculteit

Het product $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ heet 7-faculteit en noteer je als $7!$

Rooster, alternatieven

Voor telproblemen waarbij je steeds moet kiezen uit twee alternatieven is een rooster een handig model.

Als je het aantal kortste routes van punt A naar punt B en van punt B naar punt C weet, dan vind je het aantal routes van punt A via punt B naar punt C door die aantallen routes te vermenigvuldigen. Immers bij elke route van A naar B past elke route van B naar C .

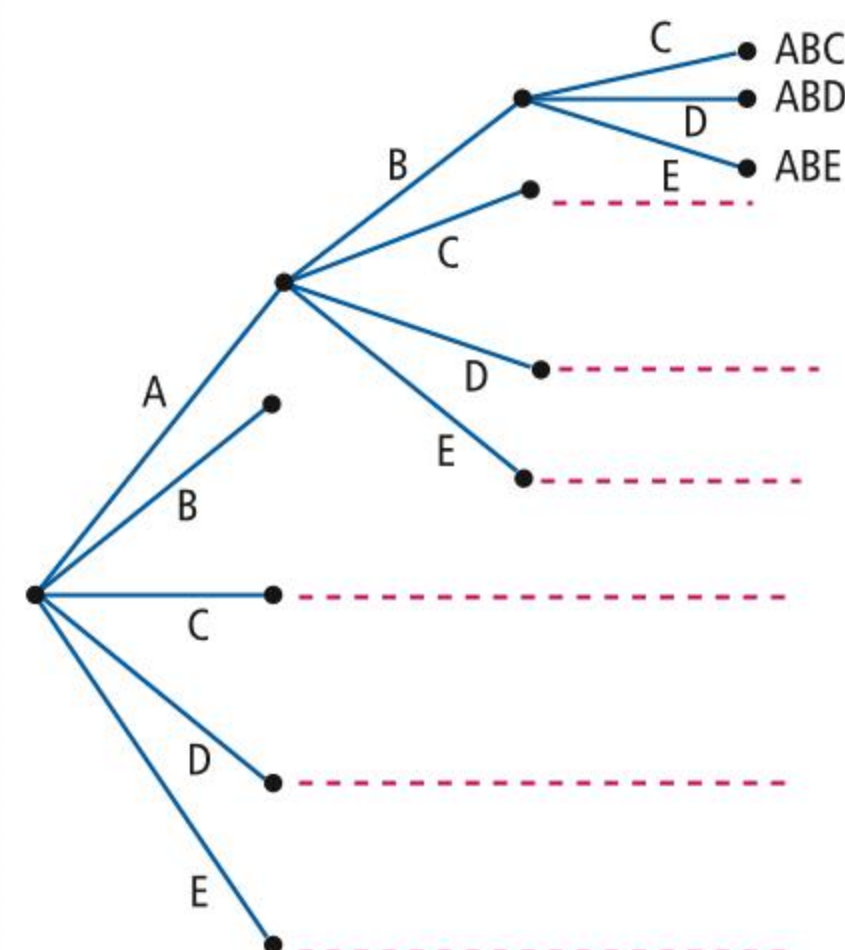
Driehoek van Pascal, binomium van Newton

Het rooster waarmee je aantallen volgorden kunt tellen heet ook wel de driehoek van Pascal.

Om producten als $(a + b)^5$ en $(x + 7)^4$ uit te werken kun je gebruik maken van de driehoek van Pascal. Er geldt:

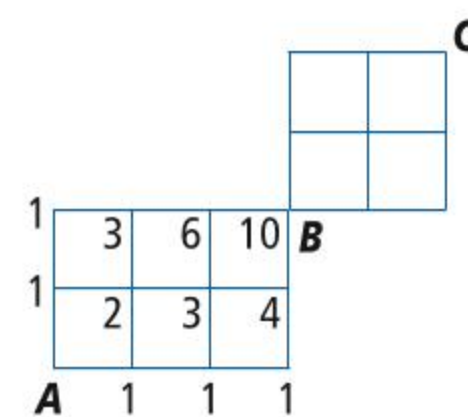
$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Faculteitsboom



Het aantal volgorden om drie letters uit vijf te kiezen is

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!} = 60$$



Het aantal kortste routes van A naar B is 10; dat van B naar C is 6. Het aantal kortste routes van A naar C via B is $10 \cdot 6 = 60$.

Permutaties

Een permutatie is een rangschikking. Een permutatie is een rij met een bepaalde volgorde.

De faculteitsboom is een telmodel voor het aantal permutaties.

Het aantal permutaties van r uit n is gelijk aan $\frac{n!}{(n-r)!}$

Combinaties

Een selectie van drie dingen die je uit tien verschillende dingen kunt kiezen heet een combinatie van 3 uit 10.

De rangschikking van de drie gekozen dingen is daarbij niet van belang.

Een combinatie is ook op te vatten als een herhaalde keuze uit twee alternatieven. Het aantal combinaties kun je daarom ook vinden door gebruik te maken van een rooster.

Het aantal combinaties van r uit n is gelijk aan $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$

Je kunt een telprobleem oplossen

Bij het oplossen van een telprobleem ga je eerst na of je gebruik kunt maken van een boomdiagram, een machtsboom, een faculteitsboom, een rooster, faculteiten, permutaties of combinaties.

Voorbeeld

Bij een zwemtoernooi komen steeds zes zwemmers tegen elkaar uit.

Uit de halve finales gaan de beste drie door naar de finale. Het aantal combinaties voor de zwemmers van een halve finale die doorgaan, is

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20.$$

De drie snelste zwemmers in de finale komen op het podium. Het aantal permutaties voor de bezetting van plaats één, twee en drie op het podium is

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120.$$

Voorbeeld 1

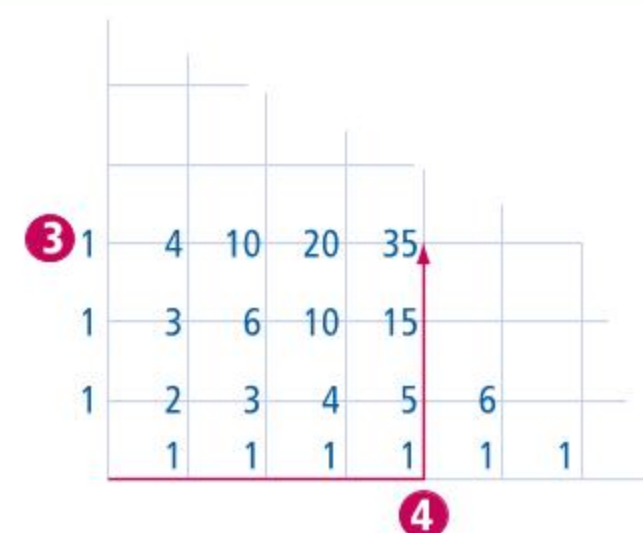
Aan zeven vlaggenstokken worden vier Nederlandse en drie oranje vlaggen gehesen. Hoeveel verschillende volgorden zijn er mogelijk?

Oplossing

In een rooster zet je het aantal Nederlandse vlaggen horizontaal en het aantal oranje vlaggen verticaal.

Je telt dus het aantal routes naar het punt (4, 3).

Er zijn dus $\binom{7}{4} = 35$ volgorden mogelijk.



Voorbeeld

Er staan 20 vlaggenstokken op een rij.

Aan de eerste 15 vlaggenstokken worden vier Nederlandse, drie oranje en acht vlaggen van de Europese Unie gehesen. Naast deze 15 vlaggenstokken staan vijf vlaggenstokken waaraan vijf vlaggen met verschillende kleuren worden gehesen.

Hoeveel verschillende volgorden zijn mogelijk voor de 20 vlaggen?

Oplossing

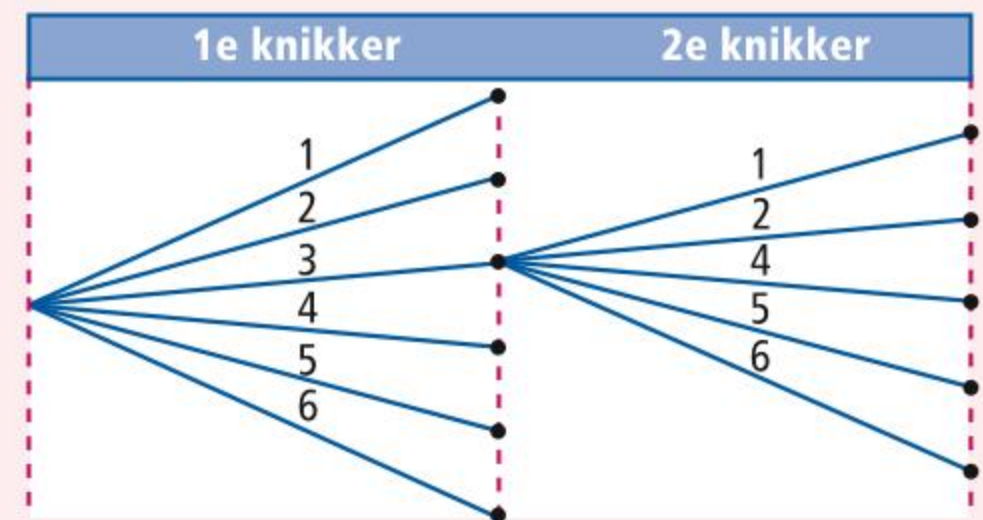
Er zijn $\frac{15!}{4! \cdot 3! \cdot 8!} = 225\,225$ volgorden mogelijk voor de eerste 15 vlaggen.

Er zijn $5! = 120$ volgorden mogelijk voor de vijf vlaggen met verschillende kleuren.

Voor de 20 vlaggen zijn er dus $225\,225 \times 120 = 27\,027\,000$ volgorden mogelijk.

Test jezelf

- T-1** In een vaas zitten zes knikkers met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Je trekt een knikker en legt die niet terug. Dit doe je zes keer en je legt de knikkers in volgorde van trekken naast elkaar. Er ontstaat op deze manier een getal van zes cijfers.
- a** Hiernaast staat een gedeelte van het boomdiagram. Wat voor soort boomdiagram is dit?
- b** Waarom is het niet nodig het hele boomdiagram te tekenen als je het aantal mogelijke getallen wilt tellen?
- c** Hoeveel verschillende getallen zijn er mogelijk?
- d** Je gooit tien keer met een dobbelsteen en noteert na elke worp het aantal ogen. Er ontstaat zo een getal van tien cijfers. Hoeveel verschillende getallen zijn er mogelijk?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-1.*



- T-2a** Bereken het aantal permutaties van 5 uit 88.
- b** Bereken met behulp van faculteiten:
- A** $23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19$
- B** $58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53$
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-2.*

- T-3** Hoeveel volgorden zijn er mogelijk bij de volgende telproblemen?
- a** Zes worpen met een euro met als resultaat drie keer kop en drie keer munt.
- b** Het scoreverloop bij een waterpolowedstrijd die eindigt in 6-5.
- c** Het scoreverloop van een waterpolowedstrijd die eindigt in 7-4 met een tussenstand 5-1 halverwege de wedstrijd.
- d** Bij de beantwoording van een meerkeuzetoets met acht vragen vul je op de gok antwoorden in en je scoort zes vragen goed.
- e** Bij de beantwoording van een meerkeuzetoets met tien vragen vul je op de gok antwoorden in en je scoort bij de eerste zes vragen drie goed en bij de laatste vier vragen twee goed.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-3.*

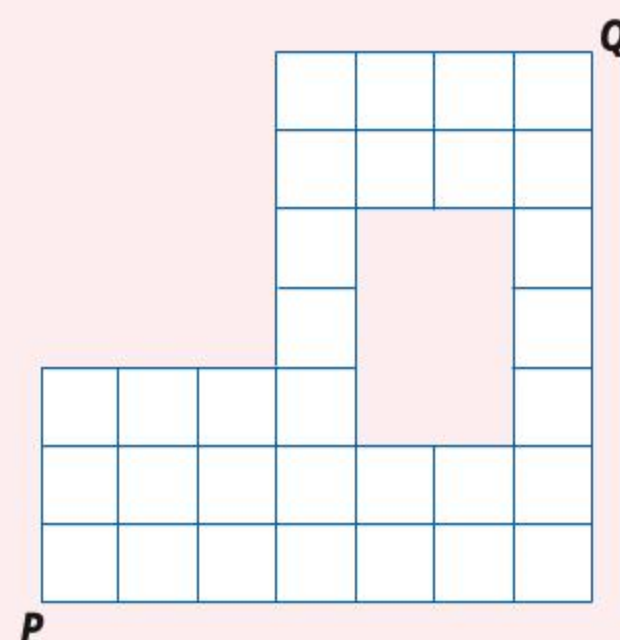
- T-4** Op een school kiezen 55 leerlingen in 3 vwo voor het NG profiel. Zij moeten kiezen tussen wiskunde A en B.
- a** Hoeveel verdelingen zijn er mogelijk, waarbij alle leerlingen wiskunde B kiezen?
- b** Hoeveel mogelijkheden zijn er, waarbij er 54 leerlingen wiskunde B kiezen?
- c** Hoeveel mogelijkheden zijn er, waarbij er 30 leerlingen wiskunde B kiezen? En waarbij 25 leerlingen wiskunde B kiezen?
- d** Er zijn 29 meisjes en 26 jongens. Hoeveel mogelijkheden zijn er, waarbij er 20 meisjes en 10 jongens wiskunde B kiezen?
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-4.*

T-5a Hoeveel routes van P naar Q zijn er in het rooster hiernaast?

b In een voetbalwedstrijd worden acht doelpunten gescoord. Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn er in totaal?

c Bereken $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10}$.

d Op een muurtje worden vijftien knikkers naast elkaar gelegd. Twee knikkers zijn rood, zeven zijn blauw, de rest is wit. Hoeveel volgorden zijn er om de knikkers neer te leggen?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-5.



T-6a Uit hoeveel termen bestaat de uitwerking van $(p + q)^8$?

b Schrijf $(p + q)^8$ zonder haakjes.

c Schrijf $(a + 3)^6$ zonder haakjes.

d Schrijf $(a - 2)^4$ zonder haakjes.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 1-6.

T-7 Bij volleybalwedstrijden wordt meestal gespeeld om drie gewonnen sets (best of five). Dat wil zeggen dat de wedstrijd is afgelopen zodra één van de teams drie sets gewonnen heeft.

a Hoeveel scoreverlopen leiden tot de uitslag 3-0?

b Hoeveel scoreverlopen leiden tot de uitslag 3-2?

c Hoeveel scoreverlopen leiden tot de uitslag 3-2 bij een voetbalwedstrijd?

T-8 Twee schaakgrootmeesters A en B spelen in een tweekamp 20 partijen tegen elkaar. Van deze 20 partijen wint A er acht en wint B er zeven. Vijf partijen eindigen in remise.

a Op hoeveel manieren kan deze tweekamp zijn verlopen?

b De eerste vijf partijen zijn gewonnen door A.

Op hoeveel manieren kan deze tweekamp nu zijn verlopen?

T-9 Wie in Budapest met de metro reisde, kocht een kaartje dat voorzien is van negen vakjes met daarin de cijfers 1 tot en met 9. Zodra je was ingestapt, moest je je kaartje in een ponsapparaat steken volgens de pijlrichting en met de bedrukte zijde boven. Een of meer (maximaal 9) cijfers werden dan in één keer weggeponst. Daarmee is aan het kaartje te zien in welke trein je reis is begonnen. Hiernaast zie je een kaartje waarbij de vakjes 1, 6 en 9 zijn voorzien van een gaatje.

a Bereken op hoeveel verschillende manieren er in een kaartje drie gaatjes geponst kunnen worden.

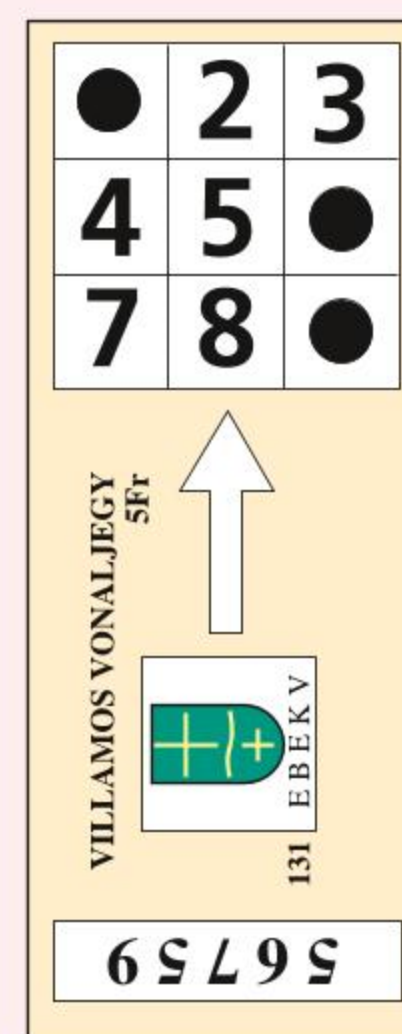
b In een kaartje worden twee gaatjes geponst die niet in dezelfde rij of dezelfde kolom zitten.

Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?

Het aantal cijfers dat wordt weggeponst, mag variëren van 1 tot en met 9. Op een dag rijden op het metronet 400 treinen.

c Is het mogelijk dat in elke trein op een verschillende wijze gaatjes worden geponst?

Ontleend aan het examen havo A 1992-II.



Hoofdstuk 2

Kansen

In dit hoofdstuk

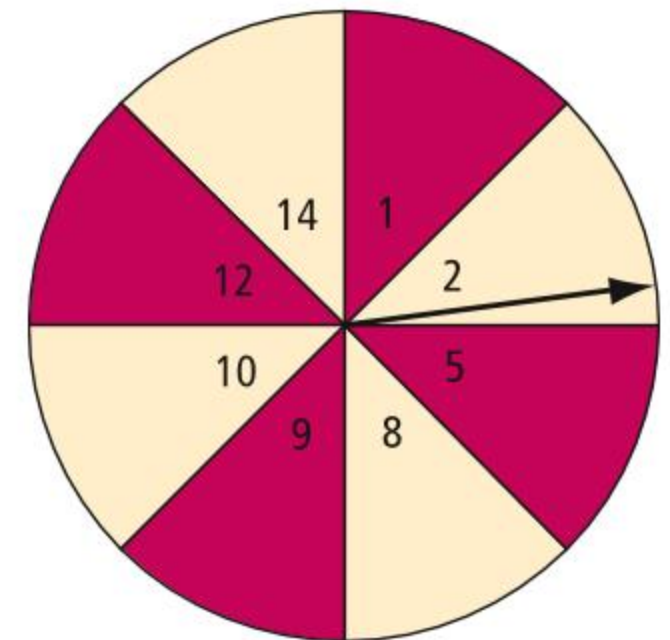
2-1	Theoretische kansen	32
2-2	Kansen vermenigvuldigen	34
2-3	Kansen optellen	36
2-4	Kansen en roosters	38
2-5	Het vaasmodel	40
2-6	Voorwaardelijke kansen	42
2-7	Gemengde opdrachten	44
	Samenvatting	46
	Test jezelf	48



2-1

Theoretische kansen

- 1 De kanstol hiernaast is verdeeld in acht sectoren die even groot zijn. Vier van de sectoren zijn rood gekleurd, de andere vier geel. De wijzer geeft na draaien een willekeurige sector aan.
 - a Hoe groot is de kans dat de wijzer de 5 aanwijst? Geef je antwoord als een breuk.
 - b Wat is de kans dat de wijzer een even getal aanwijst? Geef je antwoord als een decimaal getal.
 - c Geef in procenten de kans dat de wijzer een rood vak aanwijst.
 - d Hoe groot is de kans dat de wijzer een rood vak met een oneven getal aanwijst? Geef je antwoord op drie manieren.



Kansen kun je aangeven met procenten, maar vaak wordt gekozen voor een getal tussen 0 en 1. In plaats van 'de kans is 13%' of 'de kans is 13 op 100', zeg je: de kans is $\frac{13}{100}$ of 0,13.

- 2 Bij een worp met een punaise is het niet zo eenvoudig om de kans op 'rugligging' door redeneren te bepalen. Je kunt wel proberen deze kans te schatten door dit experiment een aantal keren uit te voeren. Hiernaast staat het resultaat van een experiment. Hoe groot schat je de kans op 'rugligging'?

<i>rugligging</i>	<i>aantal</i>
⊥ ja	361
∧ nee	639

Theorie

Bij een **toevalsexperiment** of **kansexperiment** staat de uitkomst niet van tevoren vast omdat het resultaat door het toeval wordt bepaald.

Een uitkomst of een aantal uitkomsten bij elkaar heet een **gebeurtenis**.

$P(A)$ is de notatie voor de **kans** op gebeurtenis A .

Er zijn twee manieren waarop je kansen kunt vinden.

- > Door te redeneren. Zo'n kans heet een **theoretische kans**.
- > Door herhaald uitvoeren van een experiment of door het verzamelen van gegevens. Zo'n kans heet een **experimentele kans**.

Voorbeeld

Bij het werpen van een geldstuk is er geen voorkeur voor kop of munt.

De theoretische kans op het werpen van kop is 0,5.

De kans dat een opgegooide punaise met de punt omhoog ligt kun je vinden door een punaise vaak op te gooien. Hier is sprake van een experimentele kans.

- 3 Hiernaast staat het resultaat van een simulatie van 100 keer, 500 keer en 5000 keer gooien met een geldstuk.
 - a Hoeveel verschilt het aantal keren kop bij 100 keer gooien in de tabel met het aantal dat je zou verwachten?
 - b En hoeveel bij 500 keer? En bij 5000 keer?
 - c Bereken het percentage kop bij 100 keer, 500 keer en 5000 keer gooien.
 - d Welke conclusie trek je uit je antwoorden bij opdracht c?

	<i>kop</i>	<i>munt</i>
<i>100 keer gooien</i>	58	42
<i>500 keer gooien</i>	262	238
<i>5000 keer gooien</i>	2576	2424

Bij toevalsexperimenten met N uitkomsten die allen even waarschijnlijk zijn, bereken je de kans op een gebeurtenis G als volgt: deel het aantal voor G gunstige uitkomsten $n(G)$ door het totaal aantal uitkomsten N , dus $P(G) = \frac{n(G)}{N}$

Voorbeeld

Bij een worp met twee dobbelstenen is gebeurtenis A : de som van de ogen is vier. Bereken $P(A)$.

Oplossing

Er zijn $6 \times 6 = 36$ mogelijke uitkomsten. Gebeurtenis A is $(1, 3)$, $(2, 2)$ en $(3, 1)$.

Dan is $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

- 4a** Jos gooit één keer met een dobbelsteen. Hij zegt dat de kans op vier ogen 1 op 6 is. Hoe kun je dat beredeneren?
- b** Petra gooit één keer met twee dobbelstenen. Zij let op de som van de ogen en zegt dat de kans op de som van acht ogen gelijk is aan $\frac{5}{36}$. Hoe kun je dat beredeneren?
- 5** Bij het toevalsexperiment 'één worp met een dobbelsteen' worden hiernaast vijf gebeurtenissen gedefinieerd.
- a** Hoe komt het dat $P(C) = 1$?
- b** Bereken $P(A)$ en $P(B)$.
Waarom is $P(A) + P(B) = 1$?
- c** Leg zonder de kansen uit te rekenen uit dat ook moet gelden: $P(D) + P(E) = 1$.
- d** Kun je een gebeurtenis F bedenken waarvoor geldt $P(F) > 1$?

A : het geworpen aantal ogen is even.
 B : het geworpen aantal ogen is oneven.
 C : het geworpen aantal ogen is positief.
 D : het geworpen aantal ogen is zes.
 E : het geworpen aantal ogen is minder dan zes.

Theorie

Bij elk toevalsexperiment geldt dat de som van de kansen op alle uitkomsten gelijk is aan 1.

Twee gebeurtenissen heten **complementair** als ze samen alle uitkomsten bevatten, maar geen enkele uitkomst gemeenschappelijk hebben.

Het **complement** van de gebeurtenis A wordt genoteerd als **niet- A** .

Omdat $P(A) + P(\text{niet} - A) = 1$, geldt de complementregel: $P(A) = 1 - P(\text{niet} - A)$.

Voorbeeld

Bij een worp met twee dobbelstenen is gebeurtenis B : de som van de ogen is minstens drie. Bereken $P(B)$.

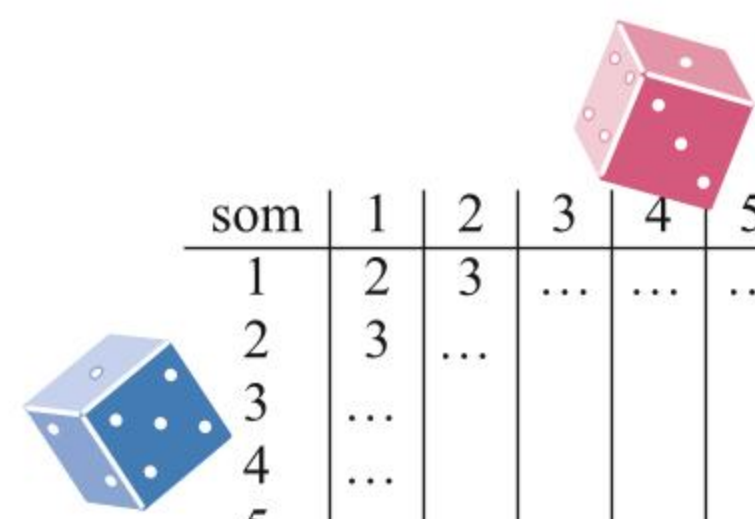
Oplossing

Gebeurtenis **niet- B** : de som van de ogen is kleiner dan 3.

Dus het gaat om de uitkomst $(1, 1)$.

Dan is $P(\text{niet-}B) = \frac{1}{36}$ en

$P(B) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.



som	1	2	3	4	5	6
1	2	3	...	...	...	...
2	3	...				
3	...					
4	...					
5	...					
6	...					

- 6** Je gooit met een rode en een blauwe dobbelsteen. Je let op de som van de ogen van beide dobbelstenen.
- a** Neem de tabel hiernaast over en vul deze in.
- b** Leg uit dat de gebeurtenissen 'de som is 7' en 'de som is 6' niet even waarschijnlijk zijn.
- c** Noem twee gebeurtenissen die wel even waarschijnlijk zijn.
- d** Gebeurtenis G : de som is ten minste 4.
Beschrijf de complementaire gebeurtenis van G .
- e** Bereken $P(G)$.
- f** Gebeurtenis H : de som is even.
Gebeurtenis K : de dobbelstenen hebben hetzelfde aantal ogen.
Zijn de gebeurtenissen H en K complementair? Waarom?

2-2

Kansen vermenigvuldigen

- 7 Hiernaast zie je een wegennet schematisch weergegeven.

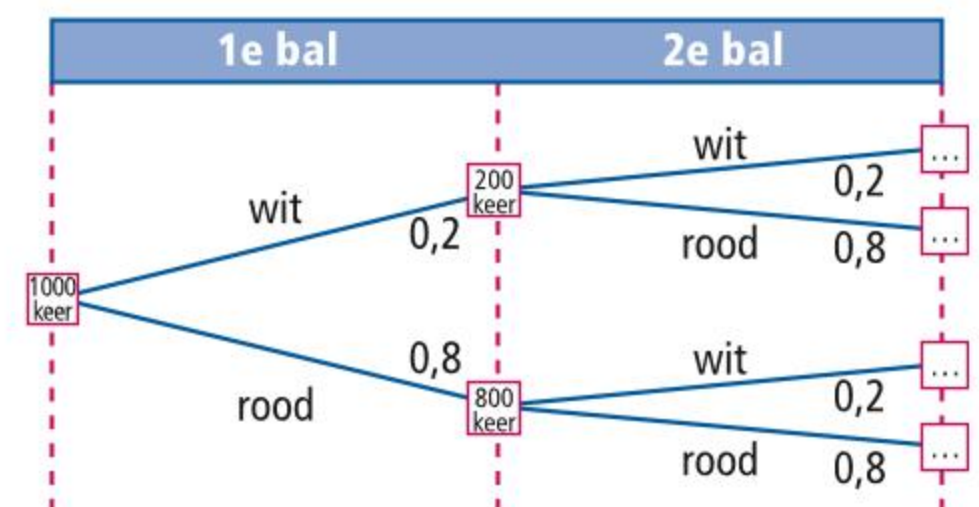
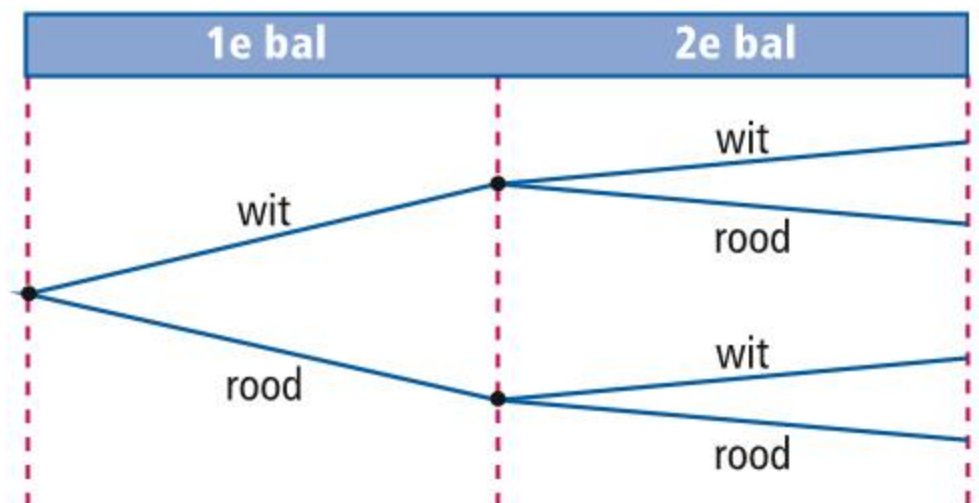
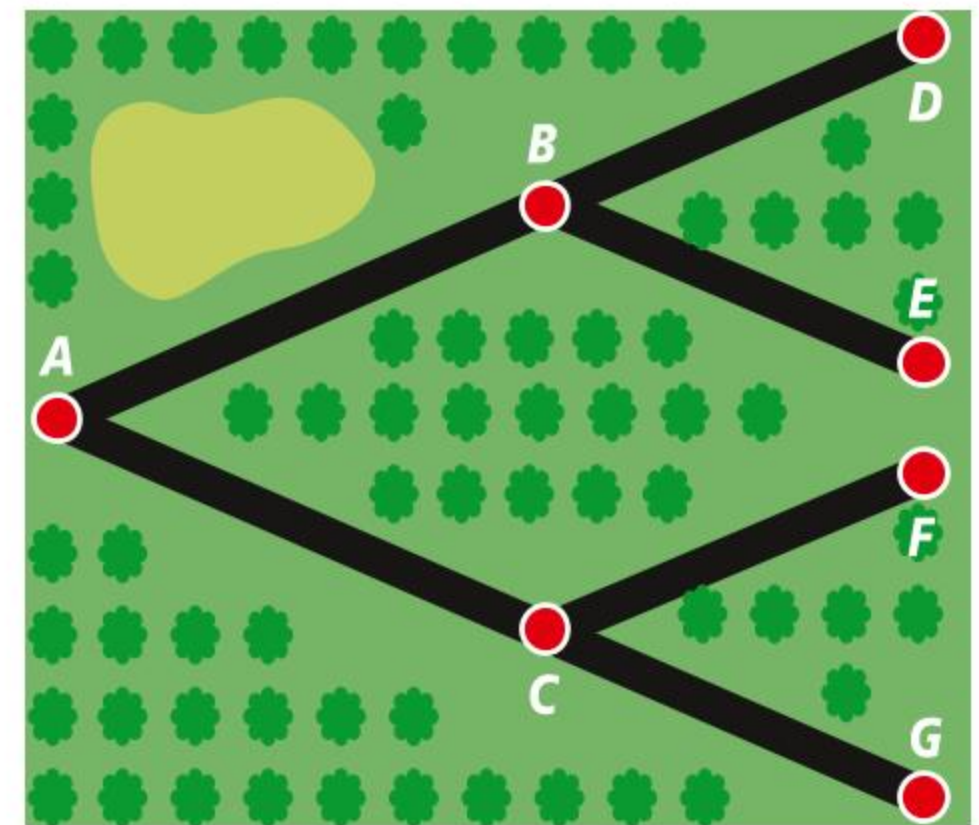
Er rijden 2000 auto's langs A . Daarvan gaat $\frac{35}{100}$ deel naar B en $\frac{65}{100}$ deel naar C . Bij B kiest $\frac{1}{4}$ deel van de auto's voor D en $\frac{3}{4}$ deel voor E . Bij C gaat $\frac{1}{5}$ deel naar F en $\frac{4}{5}$ deel naar G .

- a Hoeveel auto's komen er langs B ?
 b Bereken het aantal auto's dat naar D gaat. Doe hetzelfde ook voor E , F en G .
 c Bereken welk gedeelte van de auto's naar D gaat. Doe hetzelfde voor E , F en G en vul de tabel in.

	D	E	F	G	totaal
aantal auto's	...	...	...	...	2000
gedeelte	...	...	...	...	1

- d Een auto komt langs A . Wat is de kans dat deze auto naar E gaat?

- 8 In een vaas zitten vier rode ballen en één witte bal. Uit de vaas pak je willekeurig een bal. Nadat je de kleur hebt genoteerd leg je de bal terug en pak je een tweede bal. Ook daarvan noteer je de kleur en leg je de bal terug.
- a Eerst een rode bal en daarna een witte bal noteer je als RW . Schrijf de overige mogelijke uitkomsten op.
 b Waarom is $P(RR)$ niet gelijk aan $P(WW)$?
 c Bij twee van de vier uitkomsten hoort dezelfde kans. Welke twee zijn dat?



- 9 Het kansexperiment van opdracht 8 wordt 1000 keer herhaald. Hiernaast staat het bijbehorende boomdiagram.
- a Leg uit waarom er bij de takken met wit 0,2 staat en bij de takken met rood 0,8.
 b Leg uit dat je bij het pakken van de eerste bal theoretisch gezien 200 keer wit en 800 keer rood mag verwachten.
 c Bij het pakken van de tweede bal worden de aantallen weer verdeeld volgens de kansen 0,2 en 0,8. Leg uit dat in 40 gevallen twee keer een witte bal wordt getrokken.
 d Geef aan wat je in de lege vakjes kunt verwachten.
 e Bereken $P(RW)$.
 f Bereken ook $P(WW)$, $P(WR)$ en ook $P(RR)$.
 g Laat zien dat je de kans op een bepaalde volgorde ook kunt uitrekenen door de kansen langs de takken met elkaar te vermenigvuldigen.

Een **kansboom** is een boomdiagram met kansen langs de takken. In een kansboom kun je de **kans** op een **route** berekenen (en daarmee de kans op een uitkomst) door de kansen langs de takken met elkaar te **vermenigvuldigen**.

Voorbeeld

Op een school is 70% van de leerlingen rechtshandig en 30% linkshandig. Je wijst willekeurig 3 leerlingen aan. Hoe groot is de kans dat die drie leerlingen linkshandig zijn?

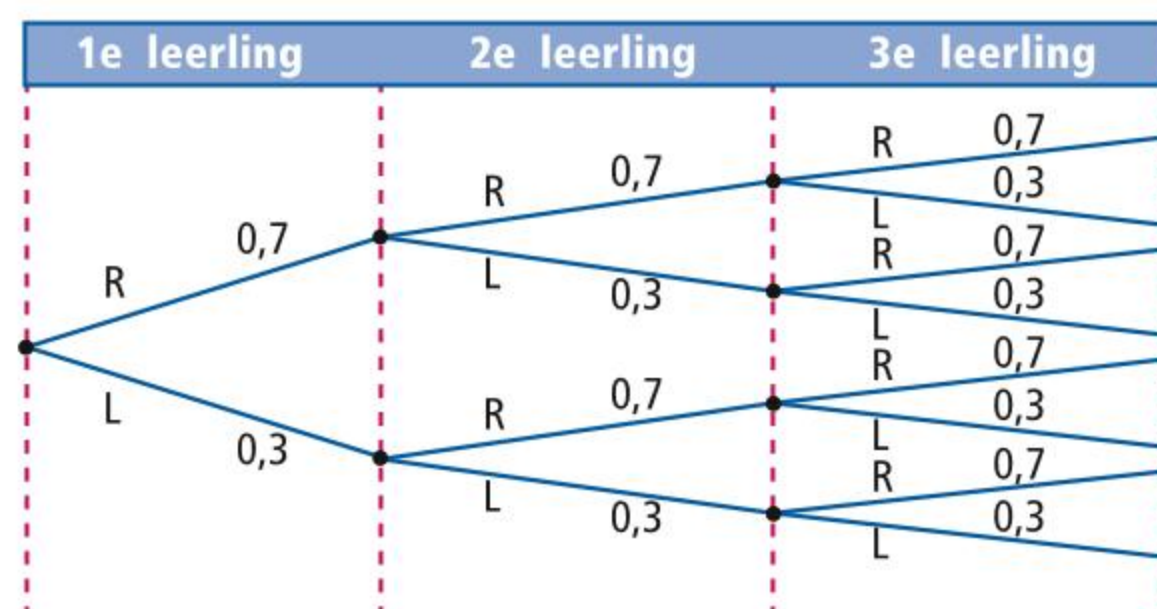
Oplossing

Je moet drie keer kiezen.

Alle keren moet je kiezen tussen rechtshandig R en linkshandig L.

De bijhorende kansboom staat hiernaast.

$$P(\text{drie linkshandigen}) = 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027$$

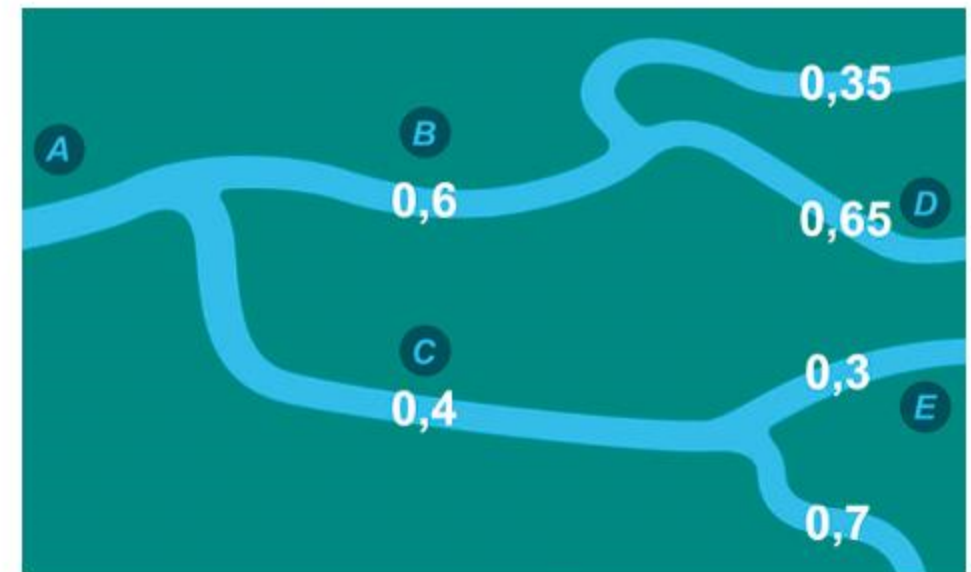


- 10** Bekijk nog eens de leerlingen uit het voorbeeld. K is de gebeurtenis dat de eerste leerling rechtshandig is en de volgende twee leerlingen linkshandig zijn. Bereken $P(K)$.
- 11** In een land is 28% van de inwoners linkshandig. In een winkel komen achter elkaar twee inwoners binnen. Met RL geef je aan dat er eerst een rechtshandig iemand binnenkomt en daarna een linkshandig iemand.
- Bereken de kansen $P(LL)$, $P(LR)$, $P(RR)$ en $P(RL)$.
 - Waarom is de som van de vier kansen in opdracht a gelijk aan 1?
 - Er komt een derde inwoner de winkel binnen. Bereken $P(LRL)$ en $P(RRL)$.
- 12** Carlijn moet van huis naar school vier verkeerslichten passeren. De kansen dat deze op rood staan zijn achtereenvolgens 0,6; 0,4; 0,7 en 0,8.
- Bereken de kans dat alle vier verkeerslichten op rood staan.
 - Bereken de kans dat de eerste op rood staat, de tweede op groen, de derde op rood en de laatste op groen.
 - Bereken de kans dat de eerste twee op rood staan en de laatste twee op groen.
- 13** Je gooit een aantal keer met een gewone dobbelsteen.
- Bereken de kans dat je na vier keer gooien nog steeds geen zes hebt gegooit.
 - Naarmate je vaker gooit neemt de kans op geen enkele zes af. Hoe vaak moet je gooien zodat de kans op geen enkele zes kleiner is dan 0,001?

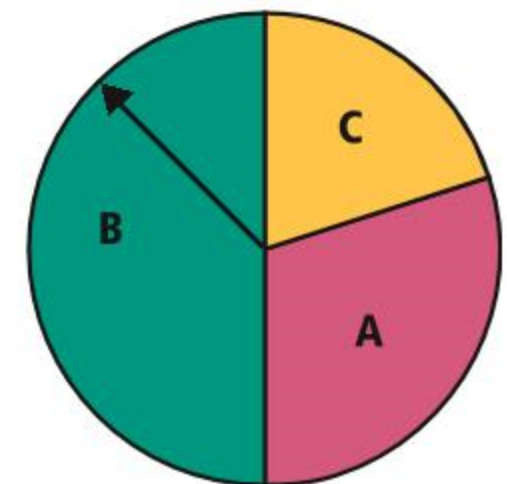
2-3

Kansen optellen

- 14 Een rivier splitst zich zoals hiernaast te zien is.
- Welk gedeelte van het water dat langs A komt, stroomt langs D? En welk gedeelte stroomt langs E?
 - Verderop komt het water dat langs D stroomt samen met het water dat langs E stroomt in een meer terecht. Bereken welk gedeelte van het water dat langs A stroomt in het meer terechtkomt.



- 15 Hiernaast staat een kanstol met $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ en $P(C) = 0,2$. Elke keer als er gedraaid is, wordt de uitkomst A, B of C genoteerd. Er wordt twee keer gedraaid.
- Teken de kansboom die hoort bij twee keer draaien.
 - $P(AB)$ is de kans dat je eerst een A draait en vervolgens een B. Bereken $P(AB)$ en $P(BA)$.
 - X is de gebeurtenis: je draait een A en een B. Laat zien dat $P(X) = 0,3$.
 - Hoe groot is de kans dat je twee keer een A draait?
 - Bereken ook $P(BB)$ en $P(CC)$.
 - Y is de gebeurtenis: je draait twee keer dezelfde letter. Bereken $P(Y)$.



Aanpak

Hoe bereken je de kans op een gebeurtenis die uit meerdere uitkomsten bestaat?

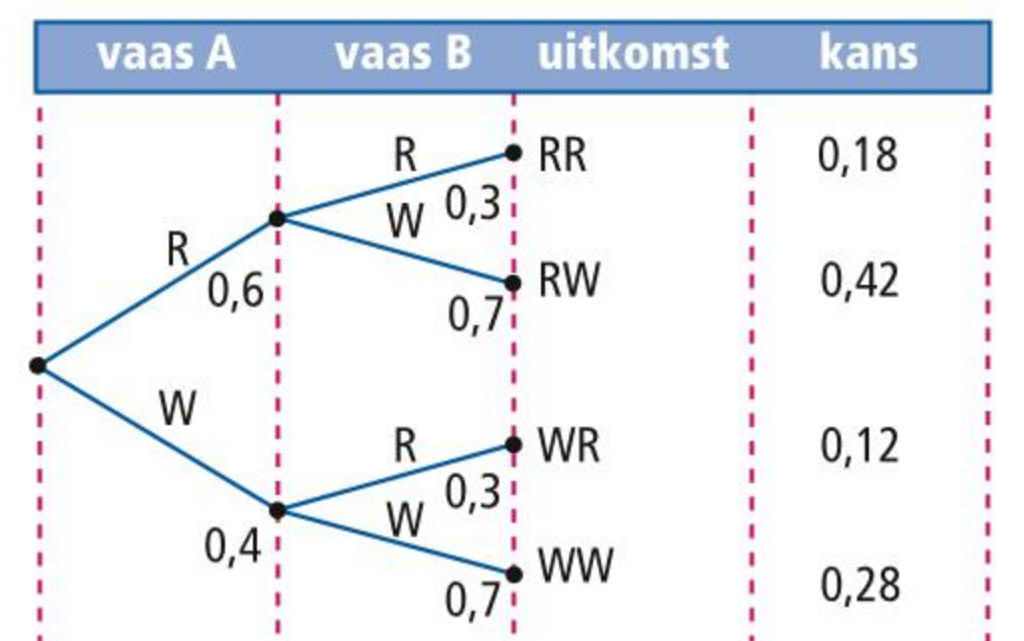
- Maak de kansboom.
- Kies de routes die je nodig hebt voor de gebeurtenis.
- Bereken de kans op elk van die routes.
- Tel de kansen bij elkaar op.

Voorbeeld

Je hebt twee vazen A en B, elk met rode en witte knikkers. Bij vaas A is de kans op een rode knikker 0,6 en bij vaas B is dat 0,3. Je trekt eerst uit vaas A een knikker en daarna één uit vaas B.

Bereken de kans op de gebeurtenis G: je trekt een rode en een witte knikker.

- De kansboom staat hiernaast.
- Het gaat hier om de uitkomsten RW en WR.
- $P(RW) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$ en $P(WR) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$.
- $P(G) = P(RW) + P(WR) = 0,42 + 0,12 = 0,54$.



- 16** Batterijen van een grote restantpartij worden getest. Als ze goed (G) zijn, worden ze verpakt. Zijn ze defect (D), dan worden ze gerecycled. Bekend is dat gemiddeld genomen 15% van de batterijen defect is. Er worden blindelings twee batterijen gepakt en getest.
- Bereken $P(DD)$ en $P(GG)$.
 - Bereken de kans op een goede en een defecte batterij.
 - Bereken de kans op minstens één defecte batterij.
- 17** Jouke weet dat hij bij het boogschieten gemiddeld zeven van de tien keer de roos raakt. In een wedstrijd mag hij drie keer schieten.
- Teken de kansboom bij drie schoten.
 - Bereken de kans dat Jouke twee keer de roos raakt.
 - Hoe groot is de kans dat hij alleen de eerste en de derde keer de roos raakt?
 - Bereken de kans dat hij hoogstens twee keer de roos raakt.

Bij vragen over 'hoogstens', 'minstens', 'meer dan' of 'minder dan' kun je gebruikmaken van de complementregel: $P(A) = 1 - P(\text{niet} - A)$. Kijk eerst of de kans op de complementaire gebeurtenis eenvoudig is uit te rekenen.

taal	symbool
meer dan	$>$
minder dan	$<$
hoogstens	$\leq$
minstens	$\geq$

Voorbeeld

Bereken bij het gooien met twee dobbelstenen de kans op de gebeurtenis G : de som van de ogen is hoogstens 10.

Oplossing

De complementaire gebeurtenis $\text{niet-}G$ is: de som van de ogen is 11 of 12.

De bijbehorende uitkomsten zijn

$(5, 6)$, $(6, 5)$ en $(6, 6)$. Omdat $P(\text{niet-}G) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ is $P(G) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

- 18** Bij een toets met vierkeuzevragen weet je op drie vragen het antwoord niet. Daarom gok je op die drie vragen telkens het antwoord.
- Teken de kansboom bij dit toevalsexperiment.
 - Bereken de kans op precies één fout en de kans op twee fouten.
 - Hoe groot is de kans op hoogstens twee fouten?
 - Hoe groot is de kans op een route met minstens twee fouten?
- 19** Een drachtige leeuwint werpt meestal twee welpen. Het komt echter ook voor dat er slechts één welp of zelfs drie welpen worden geworpen. Hoe vaak dat gemiddeld voorkomt kun je uit de tabel hiernaast aflezen. Er zijn drie leeuwinnen drachtig.
- Neem de tabel over en vul die in.

aantal welpen	relatieve frequentie in %
1	20
2	50
3	30

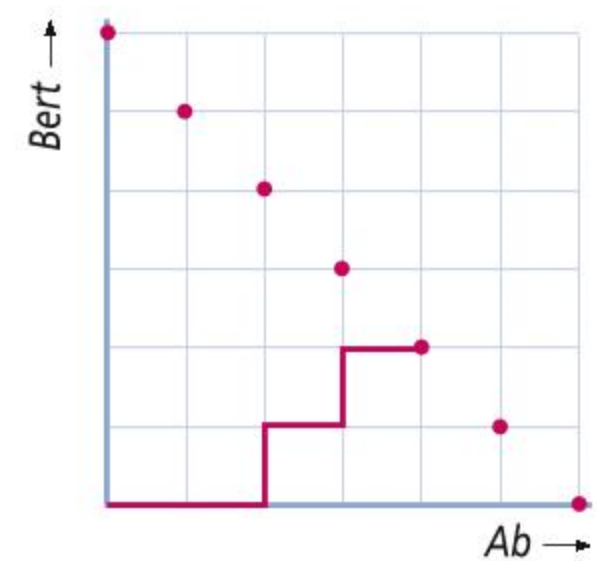
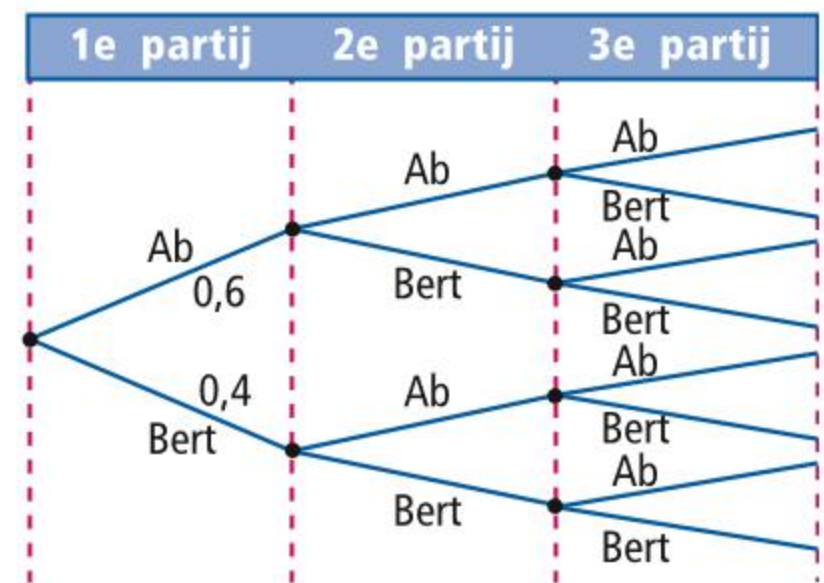
aantal welpen	3	4	5	6	7	8	9
kans	...	...	...	...	...	...	...

- Bereken de kans op hoogstens zeven welpen.
- Hoe groot is de kans op minstens vier welpen samen bij drie drachtige leeuwinnen?
- Bereken de kans dat van deze drie leeuwinnen er precies twee hetzelfde aantal welpen werpen.

2-4

Kansen en roosters

- 20** Ab en Bert spelen een biljartwedstrijd over drie partijen. De kans dat Ab een partij wint is 0,6. Een partij kan niet in remise eindigen, dus de kans dat Bert een partij wint is 0,4.
- Bereken de kans dat Ab alle partijen wint.
 - Bereken de kans op de uitslag Ab-Bert-Ab.
 - Waarom is de kans op de uitslag Bert-Ab-Ab of Ab-Ab-Bert even groot als de kans op de uitslag Ab-Bert-Ab?
- 21** Een week later spelen Ab en Bert weer tegen elkaar, nu voor een wedstrijd over zes partijen. Elke mogelijke eindstand komt overeen met één van de rode punten in het rooster hiernaast.
- Welk scoreverloop met welke eindstand is er in het rooster aangegeven?
 - Bereken de kans op de aangegeven route.
 - Hoeveel mogelijke scoreverlopen zijn er bij de eindstand 4-2?
 - Waarom is de kans op elk van die scoreverlopen hetzelfde?
 - Bereken de kans dat Ab met 4-2 wint.



Aanpak

Hoe kun je met een rooster de kans op een bepaalde uitslag berekenen?

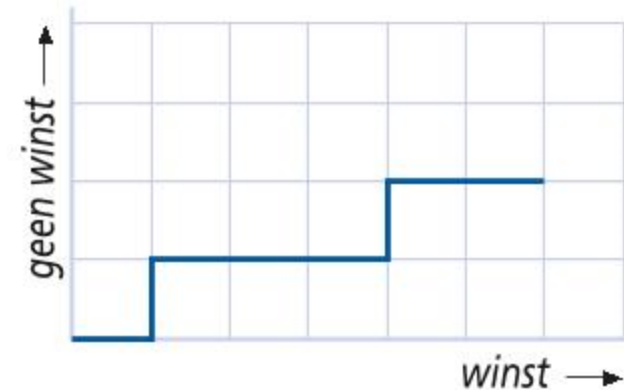
- Teken een rooster en daarin het punt dat bij de gevraagde gebeurtenis past.
- Teken één route naar dat punt.
- Bereken de kans op die route.
- Bereken het aantal routes naar die uitslag met een rooster of met de rekenmachine.
- De kans op de uitslag is het aantal routes keer de kans op één zo'n route.

Voorbeeld

Een schaakgrootmeester speelt een simultaanwedstrijd tegen acht personen. De kans dat hij een simultaanpartij wint is 0,9. Bereken de kans dat hij zes van de acht wedstrijden wint.

Oplossing

- Zes van de acht partijen komt overeen met het punt (6, 2).
- Hiernaast zie je één zo'n route.
- De kans op zo'n route is $0,9^6 \times 0,1^2$.
- Er zijn $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ verschillende routes.
- De kans op deze uitslag is $28 \times 0,9^6 \times 0,1^2 \approx 0,1488$.



- 22** Je vult een test bestaande uit twaalf vierkeuzevragen op de gok in.
- a** Bereken de kans dat je één vraag fout hebt.
 - b** Bereken de kans dat je acht vragen goed hebt.
 - c** Bereken de kans op precies drie vragen goed.
 - d** Bereken de kans dat je hoogstens drie vragen goed hebt.
 - e** Ten minste negen van de twaalf vragen moeten goed beantwoord worden om voor de test te slagen.
Bereken de kans om met uitsluitend gokken te slagen voor de test.
- 23** Voor een goed doel worden er krasloten verkocht. Van deze loten geeft 15% recht op een prijs. Willem koopt krasloten tot hij een prijs heeft.
- a** Hoe groot is de kans dat hij precies drie loten moet kopen?
 - b** Hoe groot is de kans dat hij precies zes loten moet kopen?
 - c** Hoe groot is de kans dat Willem ten minste acht loten moet kopen?
 - d** Birgit koopt in één keer zes loten.
Bereken de kans dat ze precies twee keer een prijs wint.
- 24** Een kantoorboekhandel verkoopt drie typen rekenmachines: Basic, Solar en Extra. Na verloop van tijd stelt de verkoper vast dat gemiddeld 30% van de klanten een Basic koopt, 20% een Solar en 50% een Extra.
- a** Er komen na elkaar twee klanten voor een rekenmachine binnen.
Bereken de kans dat er eerst een Basic wordt verkocht en daarna een Extra.
 - b** Hoe groot is de kans dat twee klanten na elkaar hetzelfde type rekenmachine kopen?
 - c** Er komen drie klanten voor een rekenmachine binnen.
Bereken de kans dat deze klanten achtereenvolgens een Basic, een Solar en een Extra kopen.
 - d** Bereken de kans dat aan drie klanten van elk type rekenmachine er precies één verkocht wordt.
 - e** Op een dag zijn er tien rekenmachines verkocht.
Bereken de kans dat er die dag drie keer een Basic, vijf keer een Solar en twee keer een Extra is verkocht.

In opdracht 24 is er een keus tussen drie alternatieven. Om het aantal volgorden te bepalen kun je dus geen gebruik maken van het rooster. Je zult het aantal volgorden met een ander telmodel moeten berekenen.

- 25** Dammer Wiersma speelt in een toernooi vijf partijen. De kans dat hij een partij wint is 0,60, de kans op remise is 0,25 en de kans op verlies is 0,15.
- a** Hoe groot is de kans dat hij drie partijen wint, één keer verliest en één keer remise speelt?
 - b** Bij winst krijg je twee punten, bij remise één punt en bij verlies geen punten.
Bereken de kans dat Wiersma zes punten behaalt op het toernooi.
 - c** Hoe groot is de kans dat hij minder dan negen punten haalt op het toernooi?

2-5

Het vaasmodel

- 26** In een vaas zitten twintig rode en acht witte knikkers. Wilma trekt een knikker, noteert de kleur en legt de knikker weer terug in de vaas. Vervolgens trekt zij een tweede knikker en noteert zij weer de kleur.
- Bereken $P(WW)$.
 - $P(RW \text{ of } WR)$ is de kans dat Wilma een rode en een witte knikker trekt. Bereken deze kans.
- 27** Sieb trekt ook twee keer een knikker, maar legt de eerste niet terug.
- Leg uit dat $P(WW) = \frac{8}{28} \times \frac{7}{27}$.
 - Bereken de kans dat Sieb een rode en een witte knikker trekt.
 - Tom trekt in één greep zes knikkers uit de vaas. Waarom kun je nu geen verschil maken tussen de gebeurtenissen $RRRWWW$ en $WRWRWR$?
 - Je kunt bij de trekking in opdracht c de kans uitrekenen op drie rode en drie witte knikkers. Hoe groot is die kans?



Theorie

Veel kansproblemen zijn op te lossen door ze te beschrijven met een **vaasmodel**.

In een vaasmodel wordt **aselect** (blindelings, willekeurig) uit een vaas met knikkers getrokken. Daarbij heeft elke knikker in de vaas evenveel kans om te worden getrokken.

Bij **trekken met terugleggen** zijn de kansen bij elke trekking hetzelfde.

Bij **trekken zonder terugleggen** veranderen de kansen bij elke volgende trekking.

Meer knikkers in één greep trekken komt overeen met het na elkaar trekken zonder terugleggen.

Voorbeeld

Je gokt het antwoord op acht vierkeuzevragen.

Welk vaasmodel past hierbij?

En hoe groot is de kans op de gebeurtenis G : precies vijf goed?

Oplossing

De kans dat je goed gokt, is $\frac{1}{4}$. Er zitten vier knikkers in de vaas waarvan drie rode

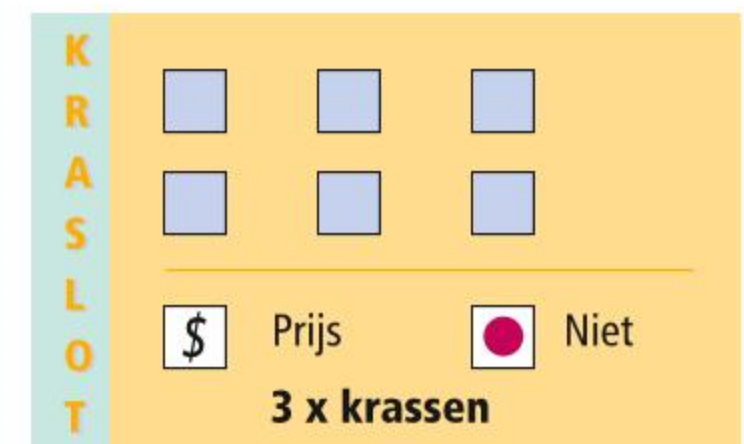
(voor een fout antwoord) en één witte (voor het goede antwoord). De kans op een goed antwoord

blijft na iedere gok $\frac{1}{4}$. Je trekt dus acht keer een knikker die je na iedere trekking weer teruglegt.

Vijf goed en drie fout komt overeen met het punt $(5, 3)$. Er zijn $\binom{8}{5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ routes naar dit punt.

Elke route heeft dezelfde kans zodat $P(G) = 56 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \approx 0,0231$.

- 28** Uit een vaas met vier rode en vijf witte knikkers worden met terugleggen zeven knikkers gepakt.
- a** Bereken de kans op twee witte en vijf rode knikkers.
 - b** Bereken de kans op twee rode en vijf witte knikkers.
- 29** Uit een vaas met acht blauwe en zes gele knikkers worden zonder terugleggen zes knikkers gepakt.
- a** Bereken de kans op zes knikkers van dezelfde kleur.
 - b** Bereken de kans op drie gele en drie blauwe knikkers.
- 30** Wendy houdt van pistoolschieten. Haar moyenne is 0,6, dat wil zeggen dat ze gemiddeld bij drie van de vijf schoten de roos treft. Voor een proef schiet ze tien keer.
- a** Leg uit dat je dit kansexperiment kunt zien als het trekken van balletjes uit een vaas met vijf knikkers waarvan er drie rood zijn.
 - b** Is dit een trekking met of zonder terugleggen?
 - c** Hoeveel verschillende series zijn er mogelijk als ze zeven keer raak schiet?
 - d** Bereken de kans op zeven keer raak.
- 31** Op een kraslot is onder de helft van de vakjes een prijsteken verborgen, onder de andere helft niet. Je krast drie keer en wilt weten hoe het met de kans op prijzen zit.
- a** Beschrijf het vaasmodel dat je hier kunt gebruiken.
 - b** Welke volgorden zijn er met twee keer prijs en één keer geen prijs?
 - c** Hoe groot is de kans op elk van deze volgorden?
 - d** Bereken de kans dat je twee prijsvakjes krast.
- 32** In een doos zitten twaalf batterijen waarvan er vier leeg zijn en acht vol. Karin heeft vier volle batterijen nodig. Zij pakt steeds aselekt zonder terugleggen een batterij uit de doos en test deze. Zodra ze vier volle batterijen heeft, stopt ze.
- a** Beschrijf het vaasmodel dat je hier kunt gebruiken.
 - b** Karin blijkt zes testen nodig te hebben. Je kunt met een rooster het aantal verschillende series tellen. Naar welk punt moet je dan het aantal routes berekenen?
 - c** Bereken de kans dat Karin precies zes testen nodig heeft.
- 33** Een container bevat 20 000 blikken met bonen. De verkoper beweert dat de partij voor 90% van kwaliteit A is. Een koper wil een steekproef van tien blikken nemen om deze bewering te controleren.
- a** Waarom kun je hier trekken zonder terugleggen benaderen door trekken met terugleggen?
 - b** Neem aan dat de verkoper gelijk heeft. Bereken de kans dat één van de blikken niet van kwaliteit A is.
 - c** Hoe groot is in dat geval de kans dat twee van de tien blikken niet van kwaliteit A zijn?

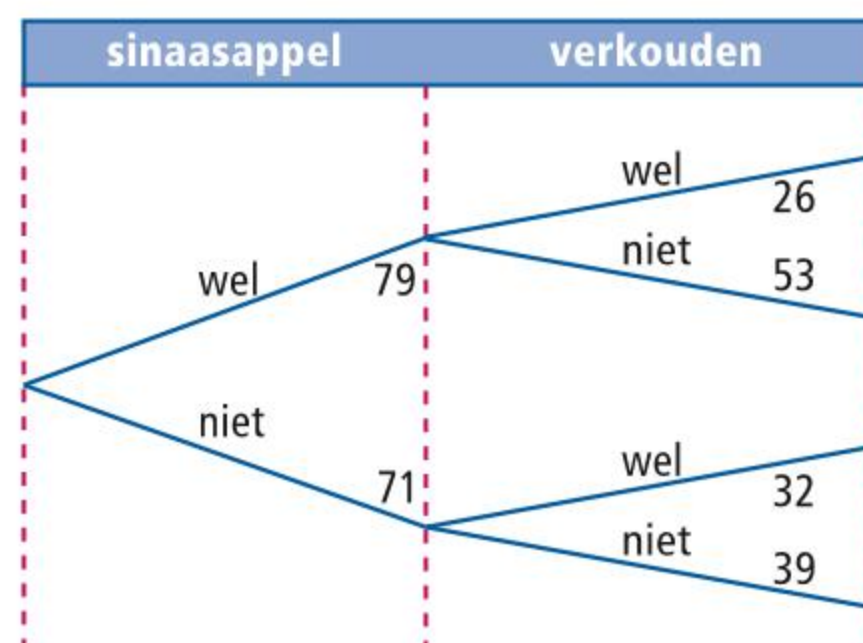


2-6

Voorwaardelijke kansen

- 34** Manuel heeft een zes gegooid met een dobbelsteen, maar laat dit niet zien. Joke moet raden of hij even, dan wel oneven gooide.
- a** Hoe groot is de kans dat zij het goed raadt?
- b** Manuel vertelt dat hij even heeft gegooid en Joke moet nu de uitkomst raden. Hoe groot is nu de kans dat zij het goed heeft?

- 35** Een bedrijf wil nagaan of er verband is tussen dagelijks een sinaasappel eten en het voorkomen van verkoudheid. Hiernaast zie je de resultaten van een steekproef van 150 personen. Je kunt bij verkoudheid onderscheid maken tussen sinaasappeleeters en geen sinaasappeleeters.
- a** Hoe groot schat je de kans dat iemand die sinaasappels eet toch verkouden wordt?
- b** Hoe groot schat je de kans dat iemand die geen sinaasappels eet verkouden wordt?
- c** Als je iemand ontmoet die aan eenzelfde proef meedoet en verkouden is, hoe groot schat je dan de kans dat hij een sinaasappeleter is?



Theorie

De kans op gebeurtenis A onder de voorwaarde dat gebeurtenis B plaatsvindt heet een **voorwaardelijke kans**. Notatie $P(A|B)$.
In kansbomen staan bij de takken van de tweede trekking eigenlijk steeds de kansen nadat de eerste trekking gedaan is: dus voorwaardelijke kansen!

Voorbeeld

In de tabel staat een overzicht van alle mogelijke worpen met twee dobbelstenen.

Gebeurtenis A : som van de ogen kleiner dan 7

Gebeurtenis B : ogen op de dobbelstenen gelijk

$$P(A|B) = \frac{3}{6} \text{ en } P(B|A) = \frac{3}{15}$$

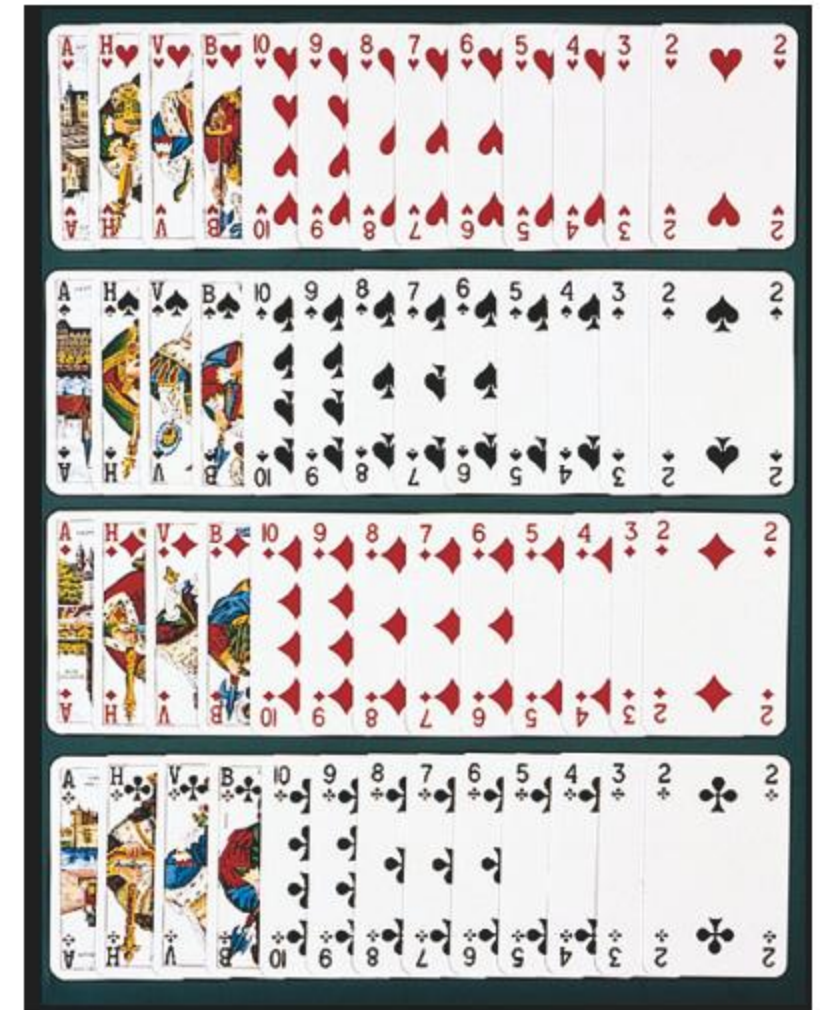
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A:

B: 2, 4, 6, 8, 10, 12

- 36** Je gooit met een dobbelsteen.
- a** Hoe groot is de kans op een drievoud onder voorwaarde dat je een even aantal ogen gooit?
- b** Gebeurtenis A : meer dan twee ogen.
Gebeurtenis B : minder dan vier ogen.
Bereken $P(A|B)$ en ook $P(B|A)$.
- 37** Je gooit met twee dobbelstenen.
- a** Bereken de kans dat je met beide stenen een even aantal ogen gooit onder de voorwaarde dat de som van het aantal ogen zes is.
- b** Bereken de kans op een som van zes als je met beide stenen een even aantal ogen gooit.

- 38** Uit een volledig spel kaarten wordt aselekt een kaart getrokken.
 Gebeurtenis A is het trekken van een aas.
 Gebeurtenis B is het trekken van een schoppenkaart.
 Gebeurtenis C is het trekken van klaveraas.
- Bereken $P(A)$ en $P(A|B)$. Waarom zijn deze kansen gelijk aan elkaar?
 - Herhaal opdracht a voor $P(B)$ en $P(B|A)$.
 - Bereken $P(C)$ en $P(C|A)$. Waarom zijn $P(C)$ en $P(C|A)$ niet gelijk aan elkaar?



Theorie

Twee gebeurtenissen A en B heten **onafhankelijk** als tegelijk $P(A|B) = P(A)$ en $P(B|A) = P(B)$. Het optreden van B heeft geen invloed op de kans dat A gebeurt en omgekeerd. Vaak is direct aan de gebeurtenissen te zien dat ze geen invloed op elkaar hebben en dus onafhankelijk zijn. In andere gevallen moet je de kansen apart berekenen en vergelijken. Gebeurtenissen die niet onafhankelijk zijn, heten **afhankelijk**.

Voorbeeld

Trek een kaart uit een volledig spel.

Zijn de gebeurtenissen: A : harten en B : vrouw onafhankelijk?

$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}$ en $P(B|A) = P(B) = \frac{1}{13}$, dus A en B zijn onafhankelijk.

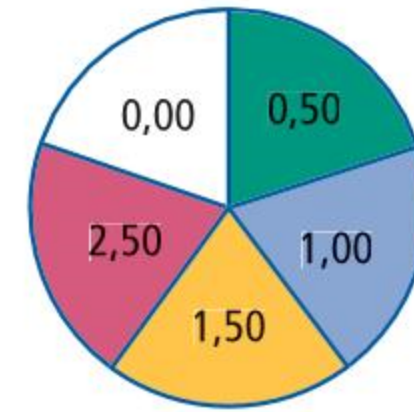
- 39** Maak een tabel voor het werpen van twee worpen achter elkaar met een dobbelsteen.
 Gebeurtenis A : de eerste worp is een 3.
 Gebeurtenis B : de tweede worp is een 5.
 Gebeurtenis C : beide worpen zijn gelijk.
- Leg uit dat je direct kunt zien dat A en B onafhankelijk zijn en controleer de onafhankelijkheid met een berekening.
 - Onderzoek of A en C onafhankelijk zijn. Kun je dat ook direct beredeneren?
- 40** In de tabel hiernaast staan voor een bepaald schoolvak de landelijke percentages voldoende en onvoldoende op het schoolexamen en het centraal examen.
- Hoe groot schat je voor dit vak de kans dat een willekeurige leerling met een voldoende op het schoolexamen een onvoldoende haalt op het centraal examen?
 - Je komt een onbekende tegen die een voldoende haalde op het centraal examen. Hoe groot schat je de kans dat hij een onvoldoende had voor het schoolexamen?
 - Leg uit dat het antwoord van opdracht b niet van toepassing hoeft te zijn op iemand die je kent.
 - Denk je dat de gebeurtenissen *onvoldoende voor het schoolexamen* en *onvoldoende voor het centraal examen* onafhankelijk zijn? Licht je antwoord toe met een berekening.

CE	SE		totaal
	onvold	vold	
onvold	18%	11%	29%
vold	5%	66%	71%
totaal	23%	77%	100%

2-7

Gemengde opdrachten

- 41** De eigenaar van een dartcafé heeft een spel bedacht. Er wordt met pijltjes naar een snel ronddraaiend dartbord gegooid. Tegen betaling van € 1,00 mag je net zolang werpen tot het bord geraakt is. Het geraakte bedrag wordt dan uitgekeerd. Alle sectoren op het bord zijn even groot.
- a** Hoe groot is de kans dat je meer dan € 0,50 verliest?
- b** Het is ook mogelijk om met een inzet van € 2,50 net zo lang te gooien tot het twee keer raak is. De geraakte bedragen worden dan opgeteld.
Neem de tabel hiernaast over en vul die verder in.
- c** Hoe groot is nu de kans om je inzet uitgekeerd te krijgen?
- d** Hoe groot is de kans op een uitkering van meer dan € 1,50?
- 42** Van een ziekte is bekend, dat 8 op de 1000 mensen eraan lijden. Een test geeft bij 85% van de zieken een juiste uitslag en bij 95% van de gezonde mensen. Dit is hiernaast in een schema weergegeven.
- a** Hoe groot is de kans dat een zieke te horen krijgt dat hij gezond is?
- b** De test wordt jaarlijks bij ongeveer 62 000 mensen uitgevoerd. Hoeveel mensen krijgen waarschijnlijk te horen dat zij ziek zijn?
- c** Hoe groot is de kans op een verkeerde uitslag?
- d** Bij een andere test is de kans op een juiste uitslag, voor zowel zieken als gezonden, 90%.
Vind je deze test betrouwbaarder?
- 43** Je gooit een aantal keer met een dobbelsteen. Daarbij let je op het verschijnen van een of meer zessen.
- a** Bereken de kans dat je vier keer moet gooien voor de eerste zes.
- b** Stel je gooit n keer en de kans op het verschijnen van de eerste zes is kleiner dan 0,01.
Hoe groot is n minimaal?
- c** Je kunt ook letten op de gebeurtenis G : het verschijnen van de tweede zes. Als je hiervoor n keer moet gooien dan is
- $$P(G) = (n-1) \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.$$
- Verklaar deze formule.
- d** De kans dat je n keer moet gooien voordat de tweede zes verschijnt, is kleiner dan 0,01.
Bereken de minimale waarde van n .



+	0,00	0,50	1,00	1,50	2,50
0,00	0,00	0,50	...	...	...
0,50	0,50	1,00	...	...	...
1,00	1,00	1,50	...	...	...
...	...	...	...	...	...

onderzochte persoon is	uitslag	
	ziek	gezond
ziek	85%	15%
gezond	5%	95%

- 44** Het volgende probleem deed zich in de Tweede Wereldoorlog voor in de Verenigde Staten, toen in korte tijd honderdduizenden rekruten medisch werden gekeurd. Onder meer moest via een bloedonderzoek worden bepaald of de rekrut drager was van de verwekker van de geslachtsziekte syfilis. Laboratoriumonderzoek kost tijd en geld. Laboranten konden natuurlijk het bloed van elke rekrut onderzoeken, maar ze dachten op de volgende wijze het aantal tests terug te kunnen brengen.



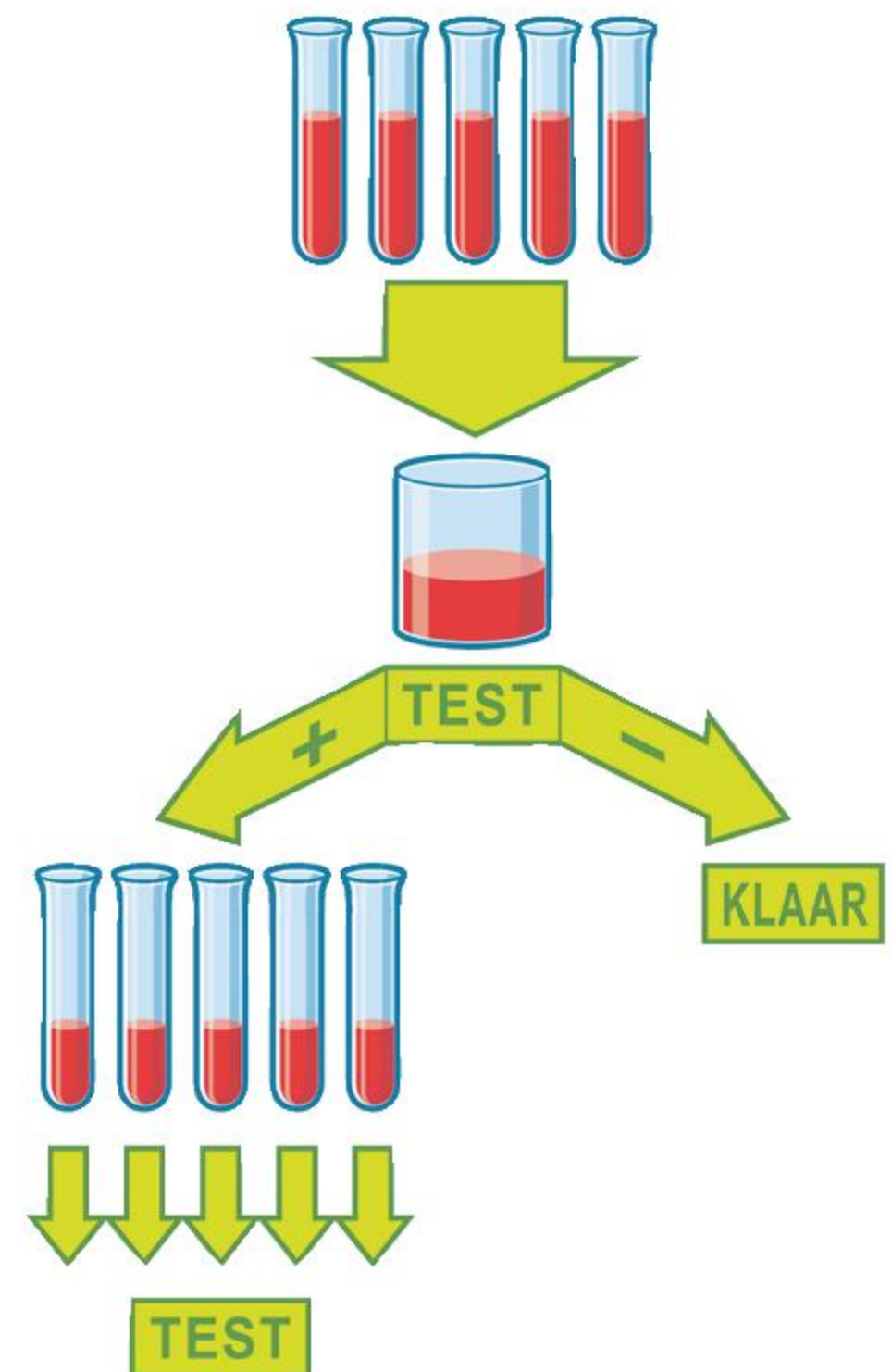
De rekruten werden in groepen verdeeld. Van een groep werd van elke rekrut een gedeelte van zijn bloedmonster genomen. Het bloed van alle rekruten uit zo'n groep werd gemengd en op dit mengsel werd de test uitgevoerd. Viel de test negatief uit (geen ziekteverwekker geconstateerd), dan was men in één keer klaar met een groep rekruten. Was de uitslag van de test positief, dan moest alsnog het bloed van alle rekruten uit de groep onderzocht worden.

- a** Stel dat er twintig groepen van vijftien rekruten getest worden en dat de test van drie van de twintig groepen positief is. Hoeveel bloedmonsters moeten er dan in totaal getest worden?

- b** Voor de rest van deze opdracht ga je uit van 10 000 rekruten. Veronderstel dat er getest werd in groepen van tien en dat de test bij 400 groepen positief was. Hoeveel bloedmonsters werden er dan in totaal getest?

- Volgens de keuringsadministratie leed 5% van de mannen aan syfilis in de jaren 1940 en 1941. Veronderstel dat de rekruten worden getest in groepen van acht.
- c** Bereken de kans dat in een groep van acht mannen geen geval van syfilis aanwezig is en ook de kans dat wel syfilis aanwezig is.
- d** Bereken bij hoeveel groepen iedere man opnieuw getest moet worden en geef een schatting van het aantal tests dat nodig is voor deze 10 000 rekruten.

- Het aantal tests is afhankelijk van de groepsgrootte n .
- e** Hoeveel tests zijn er nodig om alle groepen te controleren?
- f** Hoe groot is de kans dat er in een groep van n mannen syfilis aanwezig is?
- g** Hoeveel tests zijn er nodig om een besmette groep van n mannen te controleren?
- h** Geef een formule waarmee je het totaal aantal tests A dat naar verwachting nodig is bij een groepsgrootte van n mannen kunt berekenen.
- i** Gebruik je formule van opdracht h om vast te stellen welke groepsgrootte het meest efficiënt is.



Samenvatting

Toevalsexperiment, gebeurtenis

Bij een toevalsexperiment of kansexperiment staat de uitkomst niet van tevoren vast omdat die door het toeval wordt bepaald. De uitkomst of een aantal uitkomsten bij elkaar heet een gebeurtenis. Voor de kans op een gebeurtenis A gebruik je de notatie $P(A)$.

Experimentele en theoretische kansen

Een experimentele kans vind je door een experiment vele malen uit te voeren.

Theoretische kansen op gebeurtenissen bij een toevalsexperiment vind je door redeneren en rekenen.

Als alle N uitkomsten bij een toevalsexperiment even waarschijnlijk zijn, is de kans op een gebeurtenis G het aantal voor G gunstige uitkomsten $n(G)$, gedeeld door het totaal aantal uitkomsten N . In notatie: $P(G) = \frac{n(G)}{N}$.

Complementaire gebeurtenis

Twee gebeurtenissen heten complementair als ze samen alle uitkomsten bevatten, maar geen enkele uitkomst gemeenschappelijk hebben.

Het complement van de gebeurtenis A schrijf je als *niet- A* . Bij vragen over ‘meer dan’, ‘minder dan’, ‘hoogstens’ en ‘minstens’ kun je gebruik maken van de complementregel: $P(A) = 1 - P(\text{niet} - A)$.

Vaasmodel, aselekt, trekken met of zonder terugleggen

Bij aselekt (willekeurige) trekking van een knikker uit een vaas heeft elke knikker evenveel kans om te worden getrokken.

In een vaasmodel wordt aselekt uit een vaas met knikkers getrokken.

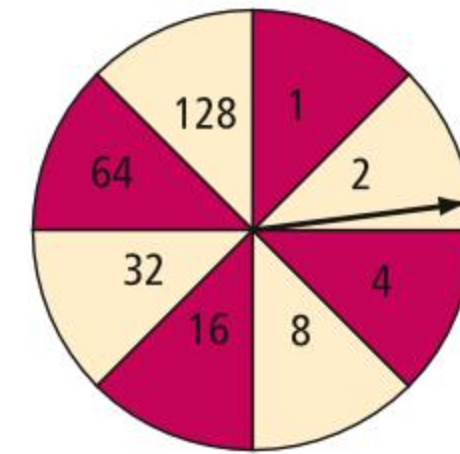
Bij trekken met terugleggen blijven de kansen bij elke trekking hetzelfde. Bij trekken zonder terugleggen veranderen de kansen bij elke volgende trekking.

Dit laatste komt overeen met trekken in één greep.

Voorwaardelijke kans en onafhankelijke gebeurtenissen

Een voorwaardelijke kans is de kans op gebeurtenis A onder de voorwaarde dat gebeurtenis B plaatsvindt. Notatie $P(A|B)$.

Twee gebeurtenissen A en B heten onafhankelijk als het optreden van A geen invloed heeft op de kans dat B gebeurt en omgekeerd.



Gebeurtenis A : De wijzer wijst 1 aan.

Gebeurtenis B : De wijzer wijst een getal groter dan 1 aan.

Gebeurtenis C : De wijzer wijst een rood vlak aan.

De gebeurtenissen A en B zijn complementair.

$$P(A) + P(B) = 1 \quad \text{dus} \quad P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{8} \quad \text{dus} \quad P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Gebeurtenissen A en C horen bij de tol hierboven.

$P(A|C) = \frac{1}{4}$ want van de vier rode vlakken is er één met 1.

$P(C|A) = 1$ want er is maar één vakje met 1 en dat is een rood vakje.

De gebeurtenissen A en C zijn niet onafhankelijk, want er geldt niet

$$P(A|C) = P(A) \quad \text{en ook niet} \quad P(C|A) = P(C).$$

Je kunt een kansboom gebruiken om een kans te berekenen

De kans op een bepaalde route bereken je door de kansen bij de takken van die route met elkaar te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

Uit een vaas met twee rode (R), vijf witte (W) en drie blauwe (B) knikkers worden twee knikkers getrokken.

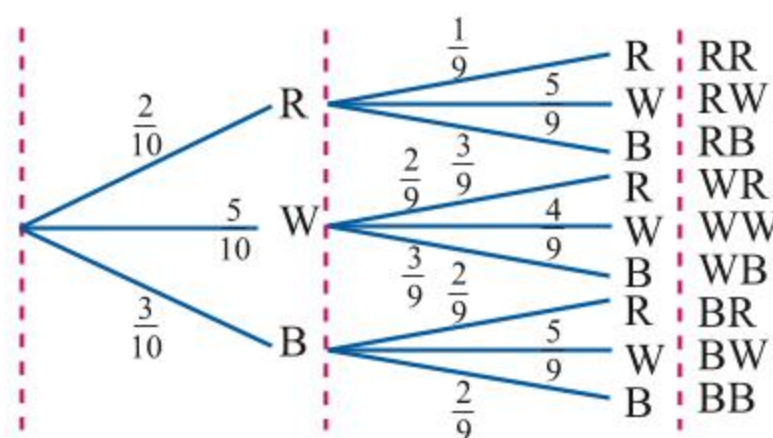
Gebeurtenis K :

De twee getrokken knikkers hebben dezelfde kleur.

Bereken de kans op gebeurtenis K .

Oplossing

Teken een kansboom



Er zijn drie routes met als uitkomst twee knikkers van dezelfde kleur, namelijk RR, WW en BB.

$$P(RR) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$$

$$P(WW) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$$

$$P(BB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

$$P(K) = \frac{2}{90} + \frac{20}{90} + \frac{6}{90} = \frac{28}{90}$$

Je kunt met een rooster de kans berekenen op een bepaalde uitkomst

De uitkomst van een kansexperiment met steeds twee mogelijkheden komt overeen met een punt in een rooster. Je kunt dan het aantal routes naar dat punt berekenen. De kans op de uitkomst bereken je door de kans op één zo'n route te vermenigvuldigen met het aantal routes.

Voorbeeld

Voor een examen is de kans om te slagen 0,92.

Hoe groot is de kans dat van de 12 kandidaten er 10 slagen?

Oplossing

De gebeurtenis komt overeen met het punt (10, 2) in een rooster.

Er zijn $\binom{12}{10} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = 66$ verschillende routes mogelijk naar dit punt.

De kans op elk van deze routes is $0,92^{10} \cdot 0,08^2$.

De kans dat 10 van de 12 kandidaten slagen is $66 \cdot 0,92^{10} \cdot 0,08^2 \approx 0,1835$.

Je kunt van twee gebeurtenissen bepalen of ze afhankelijk of onafhankelijk zijn

Twee gebeurtenissen A en B heten onafhankelijk als $P(A|B) = P(A)$ en $P(B|A) = P(B)$ beide gelden.

Voorbeeld

Je trekt een kaart uit een compleet kaartspel.

Gebeurtenis A : De kaart is een aas.

Gebeurtenis B : Je hebt een rode kaart getrokken.

Zijn de gebeurtenissen A en B onafhankelijk?

$$P(A) = \frac{4}{52}, P(A|B) = \frac{2}{26}: \text{Deze kansen zijn gelijk.}$$

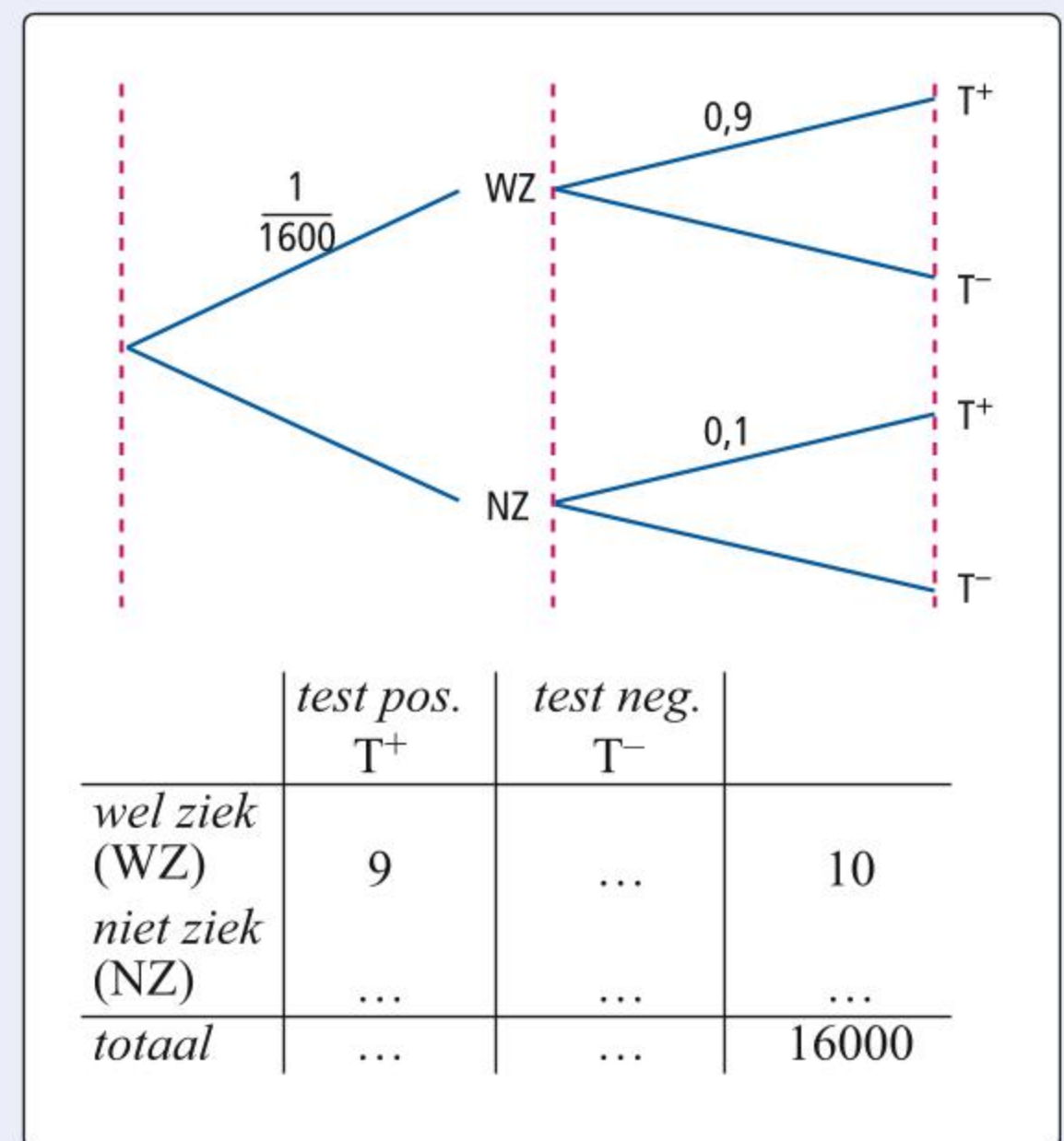
$$P(B) = \frac{26}{52}, P(B|A) = \frac{2}{4}: \text{Deze kansen zijn gelijk.}$$

Omdat $P(A) = P(A|B)$ en $P(B) = P(B|A)$, zijn A en B onafhankelijk.

Test jezelf

- T-1** Je doet één worp met een witte en een rode dobbelsteen.
- a** Hoe groot is de kans dat je met beide dobbelstenen drie gooit?
 - b** Hoe groot is de kans dat je met de witte dobbelsteen vier en met de rode vijf ogen gooit?
 - c** Bij een spel als Monopoly gaat het om de som van de ogen. Hoe groot is de kans dat de som van de ogen gelijk is aan 11?
 - d** Gebeurtenis A : de som van de ogen is 11 of minder. Welke gebeurtenis is de complementaire gebeurtenis?
 - e** Bereken $P(A)$.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-1.*
- T-2** Sollicitanten moeten bij een bedrijf door drie testen heenkomen. Na de eerste test valt 60% van de sollicitanten af. Voor de tweede test zakt 80% van de overgebleven sollicitanten en voor de laatste test zakt nog eens 95%. Je wilt weten welk percentage van de sollicitanten voor alle testen slaagt.
- a** Teken de kansboom die bij deze situatie hoort.
 - b** Bereken de kans dat een sollicitant wel door de eerste twee testen, maar niet door laatste test komt.
 - c** Bereken de kans dat een sollicitant door alle testen heen komt.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-2.*
- T-3** In West-Europa heeft 41,8% bloedgroep A, 8,5% bloedgroep B, 3% bloedgroep AB en 46,7% bloedgroep O. Van drie mensen wordt bloed geprikt en onderzocht.
- a** Bereken de kans op drie mensen met bloedgroep O.
 - b** Welke kans is groter, de kans op drie mensen met bloedgroep A, of de kans op hoogstens twee mensen met bloedgroep O?
 - c** Bereken de kans op drie mensen met de bloedgroepen A, B en AB.
 - d** Bereken de kans dat van drie mensen er minstens één is met bloedgroep O.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-3.*
- T-4** Op een gewone dobbelsteen zijn de getallen vervangen door de letters A, A, K, K, K en S. Iemand gooit een aantal keren met deze dobbelsteen en noteert steeds de letter.
- a** Bereken de kans dat na vier keer gooien het woord KAAS is ontstaan.
 - b** Bereken de kans dat na vier keer gooien twee keer een K en twee keer een A is gegooid.
 - c** Bereken de kans dat na vier keer gooien de letter S niet is gegooid.
 - d** Bereken de kans dat er na vijf keer gooien precies één keer de letter S is gegooid.
 - e** Bereken de kans dat er na vijf keer gooien hoogstens twee keer de letter S is gegooid.
- Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-4.*

- T-5** Uit een volledig spel kaarten (52 stuks) worden in één keer vier kaarten getrokken. Er wordt gelet op het aantal hartenkaarten.
- Met welk vaasmodel kun je dit experiment beschrijven?
 - Bereken de kans op precies twee hartenkaarten.
 - Je kunt de kaarten ook één voor één pakken en weer terugleggen. Bereken de kans op minstens twee hartenkaarten als je vier kaarten trekt. *Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-5.*
- T-6** Uit een volledig spel van 52 kaarten wordt een kaart getrokken. Gebeurtenis A : de kaart is een plaatje (aas, heer, vrouw of boer). Gebeurtenis B : de kaart is een schoppenkaart.
- Bereken $P(A)$.
 - Bereken $P(B|A)$.
 - Onderzoek of de gebeurtenissen A en B onafhankelijk zijn. *Deze opdracht hoort bij paragraaf 2-6.*
- T-7** Drie echtparen, Wil en Joke Karsten, Trudy en Fred Nagels en Joop en Emmy Spliet, hebben zojuist samen gegeten. Ze gaan nu loten om uit te maken wie de afwas moeten doen. In een doos zitten zes briefjes. Eén briefje met de naam van Wil erop, één briefje met de naam van Joke, enzovoort. Er worden twee briefjes uit de doos getrokken. Degenen die getrokken worden, moeten afwassen.
- Hoe groot is de kans dat het echtpaar Karsten moet afwassen?
 - Hoe groot is de kans dat één van de echtparen moet afwassen?
 - Hoe groot is de kans dat de twee mensen die moeten afwassen niet met elkaar getrouwd zijn?
- T-8** De ziekte myxoedeem (gebrekkige schildklierwerking) komt bij ongeveer 1 op de 1600 mensen voor. Artsen gebruiken een jodium-eiwittest om vast te stellen of iemand al of niet myxoedeem heeft. De test geeft in 90% van de gevallen een juiste indicatie. De indicatie wordt positief genoemd als de test aangeeft dat de ziekte aanwezig is.
- Maak een kansboom bij het afnemen van een test op een willekeurige persoon. Hiernaast zie je het begin.
 - Bij 16 000 mensen wordt een test afgenomen. Uit de tabel hiernaast lees je af dat je mag verwachten dat 9 van de 16 000 mensen de ziekte hebben én een positieve testuitslag krijgen. Leg uit hoe dit aantal van 9 wordt berekend.
 - Bereken de ontbrekende getallen in de tabel en vul deze verder in.
 - Hoe groot schat je de kans dat een willekeurige persoon met positieve indicatie toch niet ziek is?



Hoofdstuk 3

Redeneren en bewijzen

In dit hoofdstuk

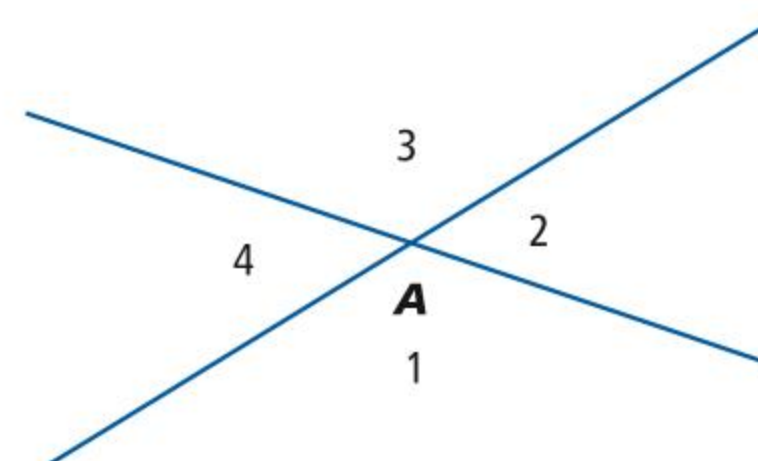
3-1	Stellingen	52
3-2	Congruentie	54
3-3	Bijzondere lijnen in een driehoek	56
3-4	Gelijkvormigheid	58
3-5	Cirkels	60
3-6	Hoe bewijs je dat?	62
3-7	Gemengde opdrachten	64
	Samenvatting	66
	Test jezelf	68



3-1

Stellingen

- 1 Je weet dat bij twee snijdende lijnen de overstaande hoeken gelijk zijn. In deze opdracht toon je dat aan.
- a Wat weet je van $\angle A_1 + \angle A_2$?
- b En van $\angle A_2 + \angle A_3$?
- c Waarom is $\angle A_1 = \angle A_3$?
- d Toon aan dat $\angle A_2 = \angle A_4$.

**Stelling**

Bij twee snijdende lijnen zijn de overstaande hoeken even groot.
Trefwoord: *overstaande hoeken*.

Stelling

Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de *F*-hoeken even groot en de *Z*-hoeken even groot.
Trefwoord: *F-hoeken, Z-hoeken*.

Theorie

Op basis van tekeningen of voorbeelden kun je vermoeden dat een bepaalde eigenschap algemeen geldt. Een **bewijs** is een juiste redenering waarmee je een vermoeden bevestigt. Daarna kun je de eigenschap formuleren als een ware bewering. Zo'n ware bewering heet een **stelling**. Een stelling die je eenmaal hebt bewezen, mag je gebruiken bij volgende bewijzen. Je verwijst naar die stelling met een **trefwoord**.

Uit de onderbouw mag je in dit hoofdstuk de stelling over F- en Z-hoeken gebruiken.

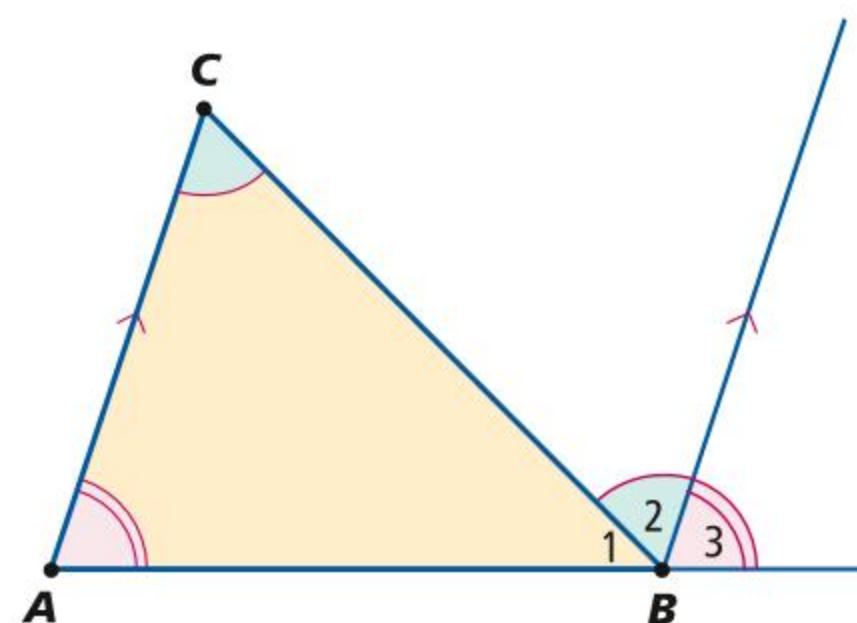
- 2 **Stelling** (trefwoord: *hoekensom driehoek*)
De som van de hoeken van een driehoek is 180° .

Om de stelling te bewijzen is zijde AB verlengd en is door B een lijn getrokken die evenwijdig is aan AC .

- a Welke hoeken zijn *Z*-hoeken? Welke zijn *F*-hoeken?
- b Toon aan dat $\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180^\circ$.
- 3 Hoek $B_{2,3}$ noem je een *buitenhoek* van $\triangle ABC$.

Stelling (trefwoord: *buitenhoek driehoek*)

De buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken.

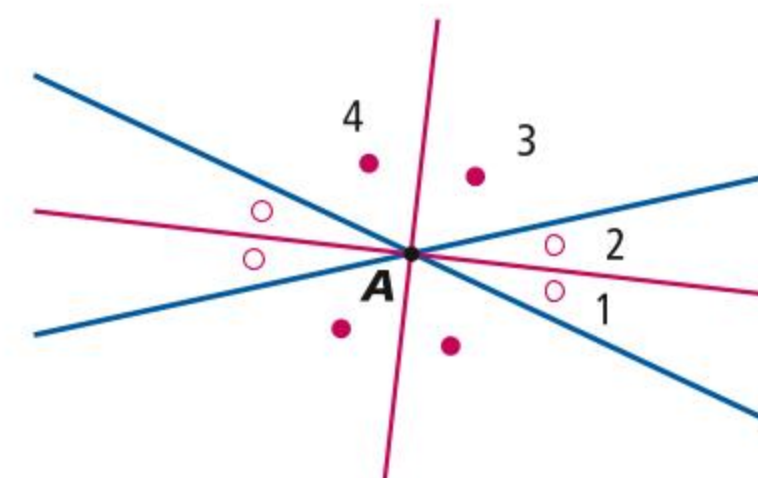


Rosa bewijst de stelling door gebruik te maken van

- de som van de hoeken van een driehoek is 180° en
- een gestrekte hoek is 180° .

Welke redenering heeft zij gevolgd?

- 4 De rode lijnen zijn de deellijnen van de hoeken bij A .
- a Neem $\angle A_{1,2} = 44^\circ$ en bereken $\angle A_{3,4}$ en $\angle A_{2,3}$.
- b Welk vermoeden heb je over de hoek tussen de deellijnen?
- c Wat kun je in het algemeen zeggen van $\angle A_{2,3}$? Waarom?
- d Welke stelling over deellijnen heb je bewezen?



Om een bewijs op te schrijven gebruik je een bewijsschema.

Aanpak

Een **bewijsschema** ziet er als volgt uit.

- 1 Schrijf de gegevens op achter *Gegeven*:
- 2 Schrijf wat je bewijzen moet op achter *Te bewijzen*:
- 3 Geef het bewijs achter *Bewijs*:

Elke bewering in het bewijs verklaar je met een trefwoord, zoals bijvoorbeeld: *F-hoeken*, *Z-hoeken*, *overstaande hoeken*, *hoekensom driehoek* en *buitenhoek*.

Voorbeeld

Gegeven is een hoek A met benen l en m . Op l ligt een punt B en op m een punt C . BD staat loodrecht op m en CE staat loodrecht op l .

Bewijs dat $\angle B_1 = \angle C_1$.

Oplossing

Gegeven: $BD \perp m$ en $CE \perp l$.

Te bewijzen: $\angle B_1 = \angle C_1$

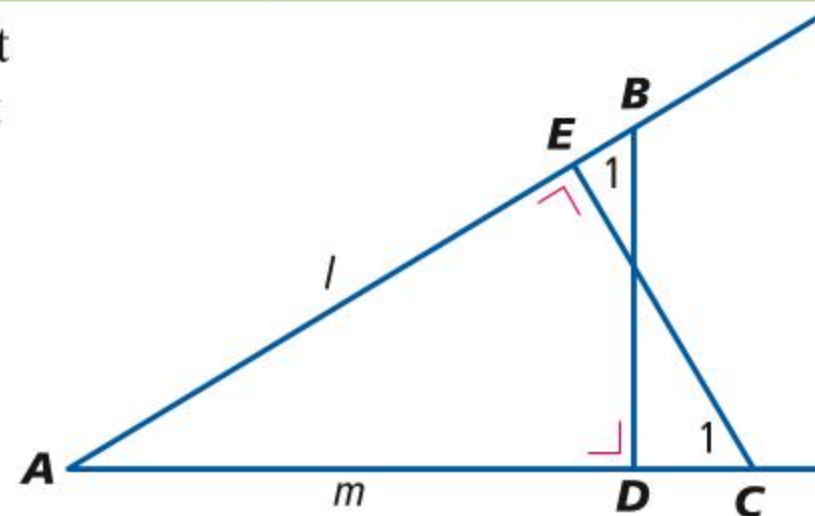
Bewijs:

$$\begin{array}{l} \text{In } \triangle ADB \text{ geldt: } \left. \begin{array}{l} \angle A + \angle D + \angle B_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle D = 90^\circ \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle B_1 = 90^\circ - \angle A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{In } \triangle AEC \text{ geldt: } \left. \begin{array}{l} \angle A + \angle E + \angle C_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle E = 90^\circ \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle C_1 = 90^\circ - \angle A \end{array}$$

Conclusie: $\angle B_1 = \angle C_1$

Opmerking: de pijl $\Rightarrow$ betekent: daaruit volgt.



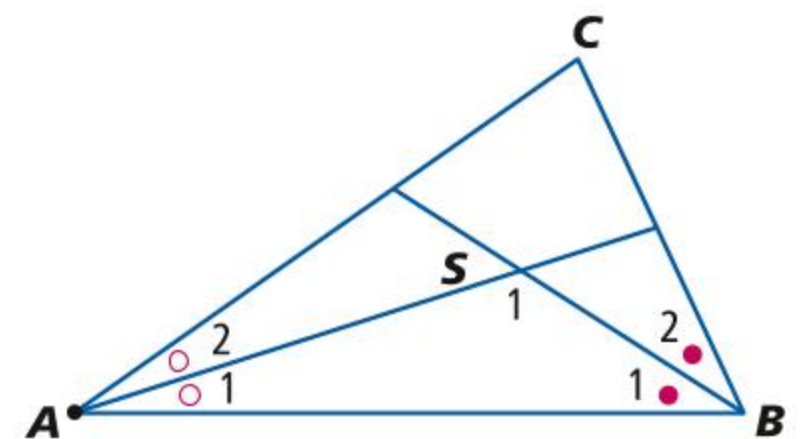
Eigenschappen vermeld je vaak in korte notaties. Voorbeelden zijn:

l staat loodrecht op m : $l \perp m$;

M is het midden van lijnstuk AB : $AM = BM$;

l is deellijn van hoek A : $\angle A_1 = \angle A_2$.

- 5 In driehoek ABC snijden de deellijnen van hoek A en hoek B elkaar in S . Je bewijst dat $\angle S_1 = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle C$.
- a Neem eerst een voorbeeld: kies $\angle C = 80^\circ$. Hoe groot is $\angle A + \angle B$? Bereken $\angle S_1$.
- b Bewijs nu het algemene geval: $\angle S_1 = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle C$. Gebruik het bewijsschema.



3-2

Congruentie

- 6 Van $\triangle ABC$ is gegeven: $AB = 5$, $\angle A = 50^\circ$ en $\angle B = 30^\circ$.
- a Teken $\triangle ABC$.
- b Krijg je bij het gebruik van deze gegevens altijd dezelfde driehoek?
- c Van $\triangle DEF$ is $\angle D = 40^\circ$, $DF = 6$ en $EF = 5$. Laat zien dat er met deze gegevens twee verschillende driehoeken mogelijk zijn.
- 7 Gegeven is $\triangle ABC$. Ga na of je bij de volgende gegevens altijd dezelfde driehoek krijgt.
- a $AB = 6$, $AC = 5$ en $BC = 4$ d $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 35^\circ$ en $\angle C = 70^\circ$
- b $AB = 6$, $\angle A = 70^\circ$ en $AC = 5$ e $AB = 6$, $AC = 5$ en $\angle C = 90^\circ$
- c $AB = 6$, $\angle A = 55^\circ$ en $\angle C = 30^\circ$

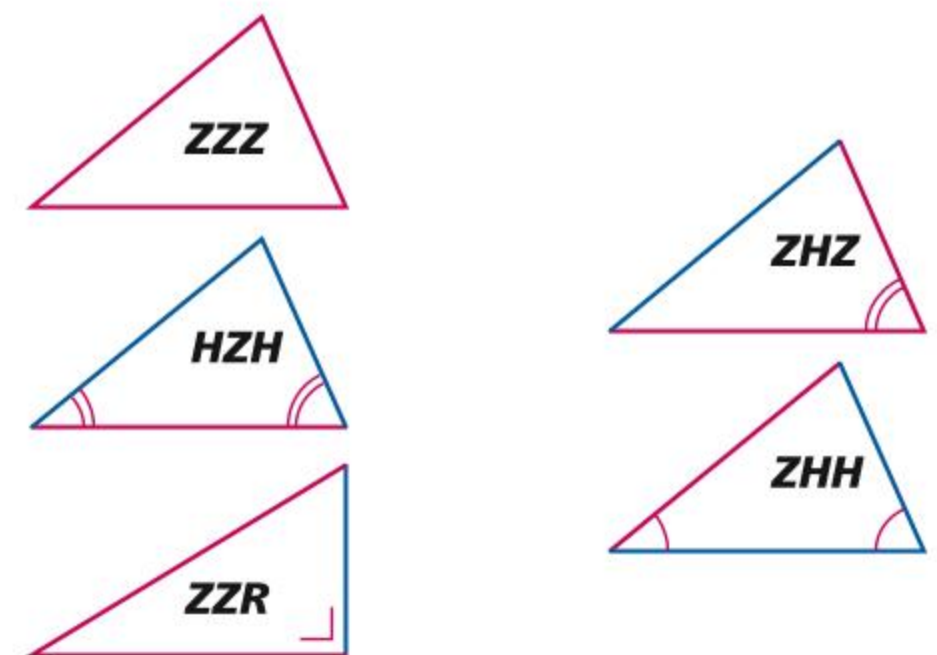
Theorie

Twee driehoeken ABC en DEF die precies op elkaar passen, noem je **congruent**. Als A terechtkomt op D , B op E en C op F , dan schrijf je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

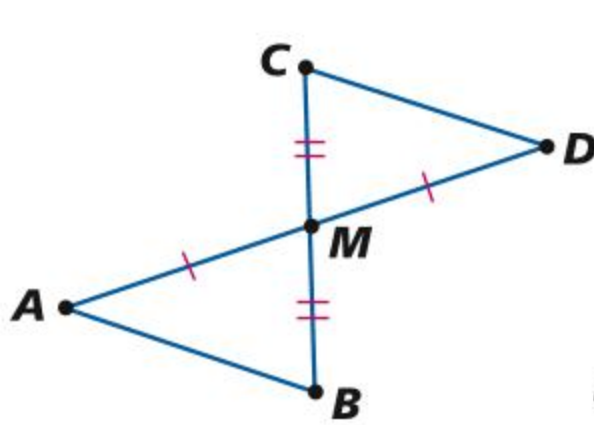
Twee driehoeken zijn congruent als ze gelijk hebben

- > alle zijden (ZZZ)
- > twee zijden en de ingesloten hoek (ZHZ)
- > een zijde en twee aanliggende hoeken (HZH)
- > een zijde, een aanliggende hoek en een tegenoverliggende hoek (ZHH)
- > twee zijden en de *rechte* hoek tegenover één van die zijden (ZZR). Let op: als de hoek niet recht is, hoeft er geen sprake te zijn van congruentie!

Dit zijn de vijf **congruentiegevallen**.

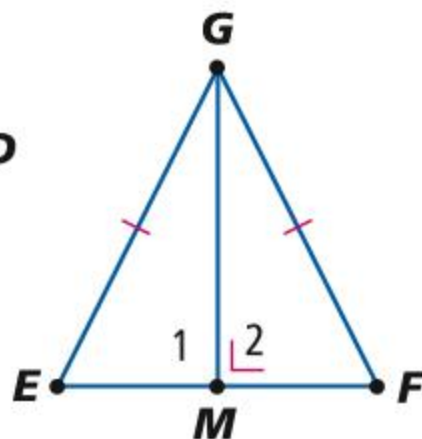


- 8 In onderstaande figuren zijn telkens twee driehoeken congruent. Schrijf bij elke figuur de congruentie op (let op de volgorde van de hoekpunten!) en geef aan welk congruentiegeval van toepassing is (soms zijn er meerdere mogelijkheden).



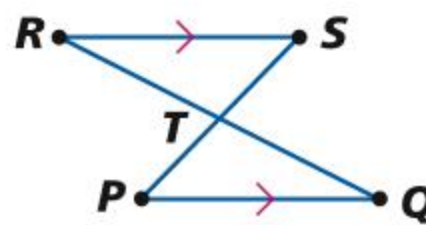
$$AM = DM$$

$$BM = CM$$



$$EG = FG$$

$$\angle M_1 = \angle M_2 = 90^\circ$$



$$PQ = RS$$

$$PQ \parallel RS$$

Vaak gebruik je congruente driehoeken om te bewijzen dat twee hoeken even groot zijn of dat twee lijnstukken even lang zijn. Hieronder staat een voorbeeld.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$, l is de lijn door C en het midden M van zijde AB . Bewijs dat A en B op gelijke afstand van l liggen.

Oplossing

Je toont aan dat de driehoeken AME en BMF congruent zijn.

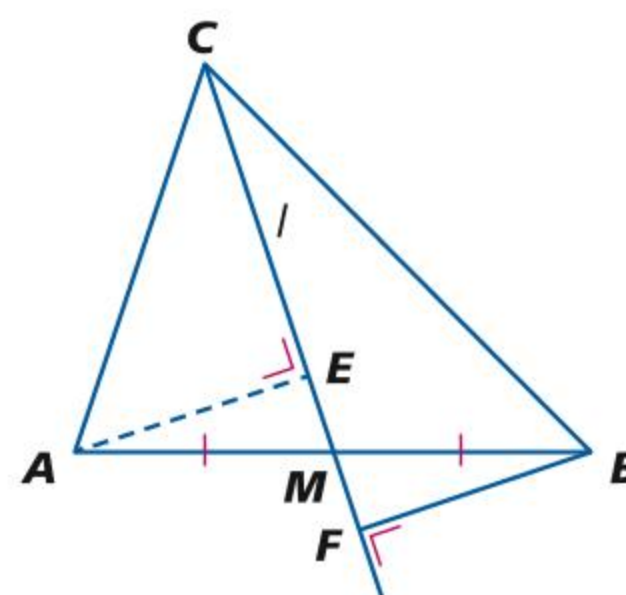
Gegeven: $AM = BM$; $AE \perp l$ en $BF \perp l$.

Te bewijzen: $AE = BF$

Bewijs:

$AM = BM$ (gegeven)

$\left. \begin{array}{l} \angle AME = \angle BMF \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle AEM = 90^\circ = \angle BFM \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEM \cong \triangle BFM \text{ (ZHH)} \Rightarrow AE = BF$



- 9 Schrijf het bewijs voor de congruenties in de figuren van opdracht 8 in een bewijsschema.
- 10a Teken $\triangle ABC$ met $AC = BC$. M is het midden van AB . Trek lijnstuk CM .
- b Bewijs met behulp van congruente driehoeken het eerste deel van de stelling hiernaast.
- c In $\triangle DEF$ is $\angle D = \angle E$. Bewijs met behulp van congruente driehoeken het tweede deel van de stelling.
- 11 Een parallellogram is een vierhoek met twee paren evenwijdige zijden (*parallellogram*).
- a Teken een parallellogram $ABCD$ met daarin de diagonaal AC .
- b Bewijs dat de overstaande zijden gelijk zijn, dus dat $AB = CD$ en $AD = BC$.
- 12 Hiernaast staat parallellogram $ABCD$. De lijnstukken DE en BF staan loodrecht op de diagonaal AC . Bewijs dat $DE = BF$. Je mag het resultaat van opdracht 11 gebruiken.
- 13 In $\triangle ABC$ snijdt de loodlijn uit A op zijde BC deze zijde in D en de loodlijn uit B op zijde AC snijdt deze zijde in E . Gegeven is dat $AD = BE$. Bewijs dat $\triangle ABC$ gelijkbenig is.

Stelling

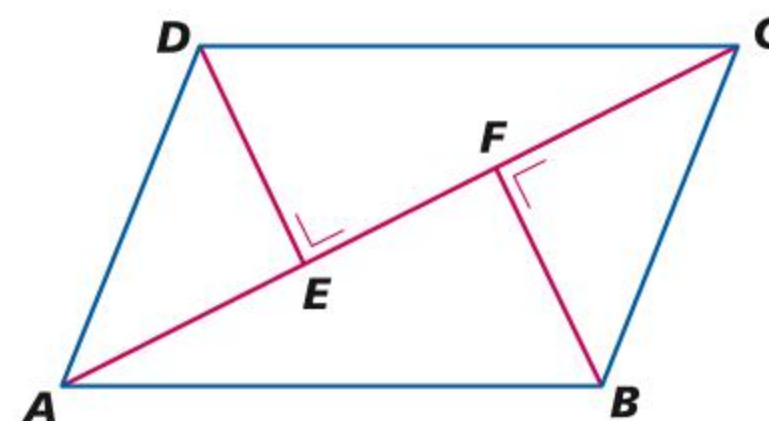
- In een gelijkbenige driehoek zijn de hoeken tegenover de even lange zijden even groot.
- Als in een driehoek twee hoeken even groot zijn, is die driehoek gelijkbenig.

Trefwoord: *gelijkbenige driehoek*

Stelling

In een parallellogram zijn de overstaande zijden gelijk.

Trefwoord: *parallellogram*



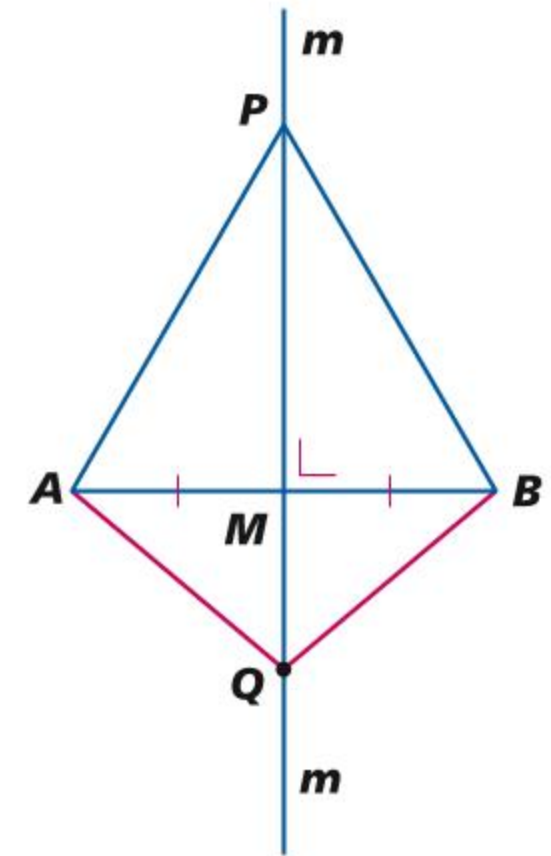
3-3

Bijzondere lijnen in een driehoek

- 14** Lijn m gaat door het midden M van lijnstuk AB en $m \perp AB$.
Op m ligt een punt P .
- a** Bewijs met behulp van congruentie dat $PA = PB$.
- b** Voor een punt Q geldt: $QA = QB$. Bewijs dat $QM \perp AB$.

Theorie

De **middelloodlijn** van een lijnstuk gaat door het midden van dat lijnstuk en staat er loodrecht op.
Een **hoogtelijn** in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en loodrecht op (het verlengde van) de overstaande zijde.

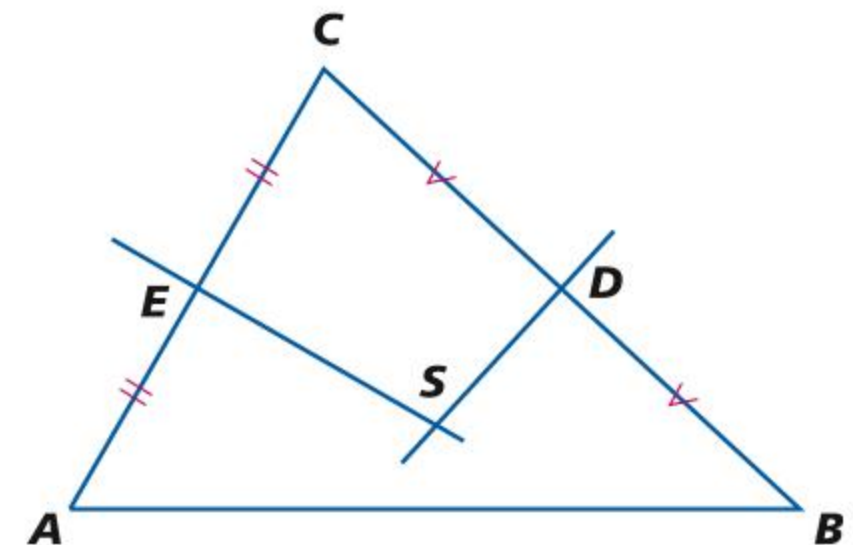


In opdracht 14 heb je de volgende stellingen bewezen.

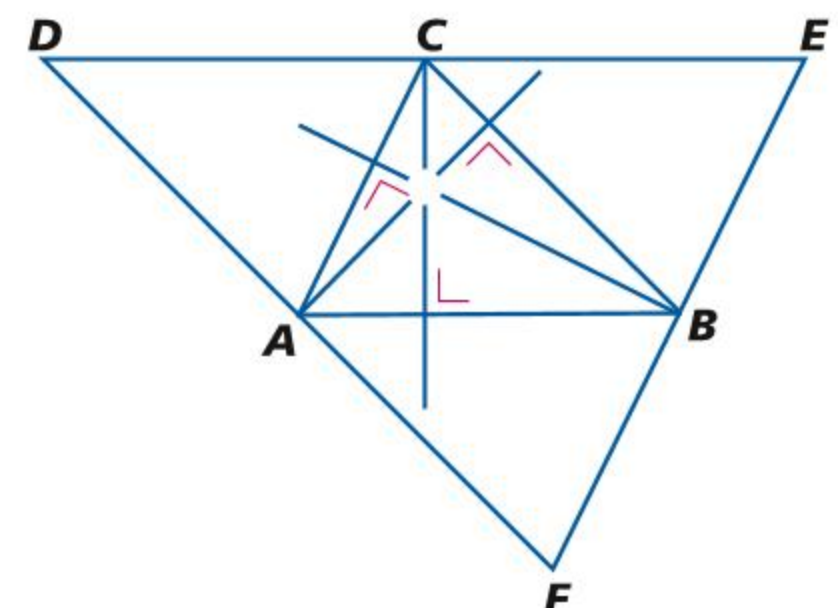
Stellingen (trefwoord: *middelloodlijn*)

- 1 Elk punt van de middelloodlijn van een lijnstuk AB heeft gelijke afstanden tot A en B .
- 2 Elk punt dat gelijke afstanden heeft tot A en B , ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB .

- 15a** Teken een driehoek ABC met daarin de middelloodlijnen van de drie zijden. Als je nauwkeurig hebt getekend zullen de drie middelloodlijnen door één punt gaan. In deze opdracht ga je bewijzen dat dit inderdaad in elke driehoek het geval is.
- b** S ligt op de middelloodlijn van AC , dus $SA = \dots\dots\dots$ (.....)
- c** S ligt op de middelloodlijn van BC , dus $SB = \dots\dots\dots$ (.....).
- d** Waarom is $SA = SB$?
- e** Gebruik de tweede stelling boven deze opdracht om het bewijs af te maken en schrijf het hele bewijs op in een schema.



- 16a** Leg uit dat er een cirkel bestaat die door de hoekpunten van $\triangle ABC$ gaat en teken deze cirkel in de figuur van 15a. Deze cirkel noem je de *omgeschreven cirkel* van $\triangle ABC$.
- b** Teken een stomphoekige driehoek en een rechthoekige driehoek, elk met de omgeschreven cirkel.
- 17** In de hiernaast getekende driehoek ABC zijn de drie hoogtelijnen getekend. De zijden van driehoek DEF zijn evenwijdig getekend aan de zijden van driehoek ABC .
- a** Wat voor figuren zijn de vierhoeken $ABCD$ en $ABEC$? Waarom?
- b** Welke bijzondere lijn is de hoogtelijn uit C in driehoek DEF ?
- c** Bewijs dat de drie hoogtelijnen van $\triangle ABC$ door één punt gaan.



De **bissectrice** of **deellijn** van een hoek is een halve lijn die de hoek in twee gelijke hoeken verdeelt.

Stellingen (trefwoord: *bissectrice*)

- 1 Elk punt op de bissectrice van een hoek heeft gelijke afstanden tot de benen van die hoek.
- 2 Elk punt dat gelijke afstanden tot de benen van een hoek heeft, ligt op de bissectrice van die hoek

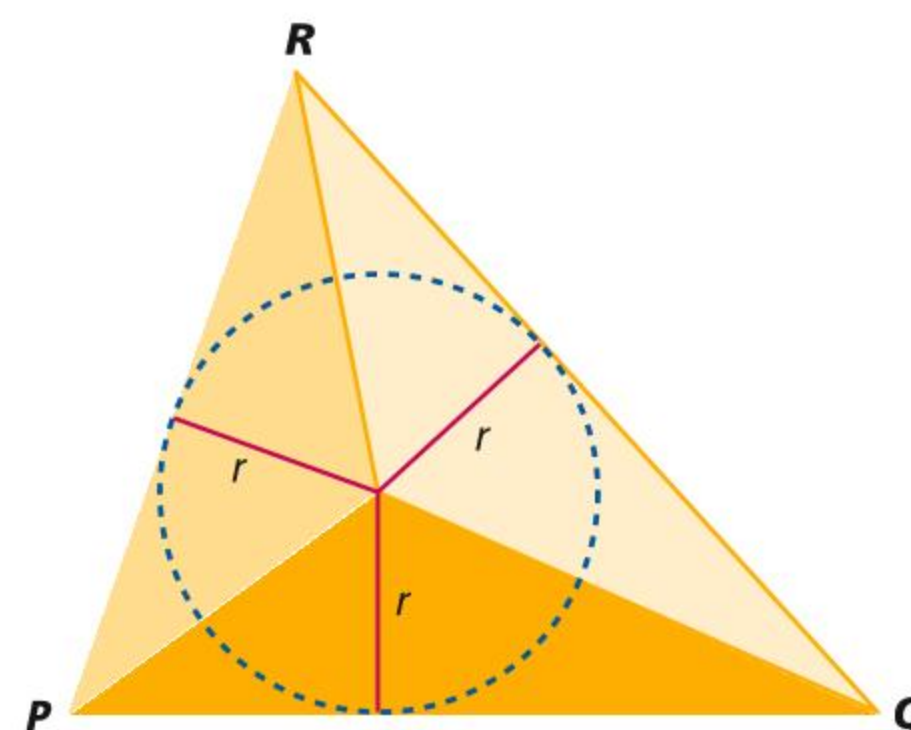
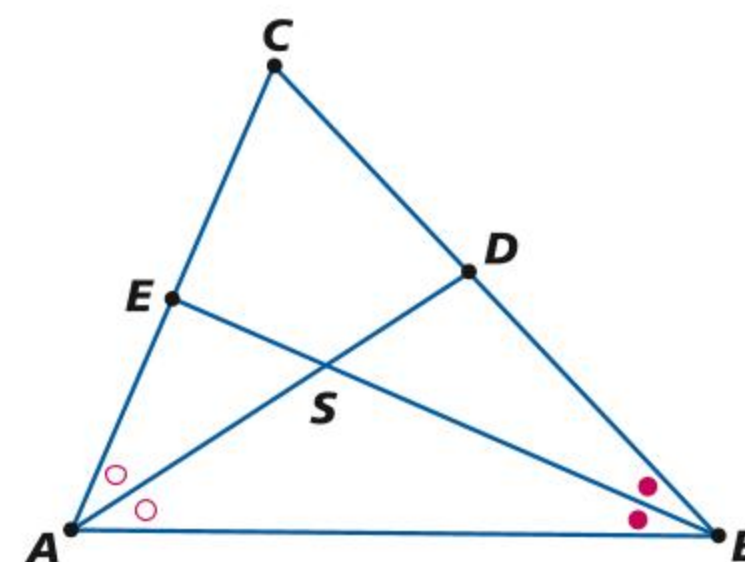
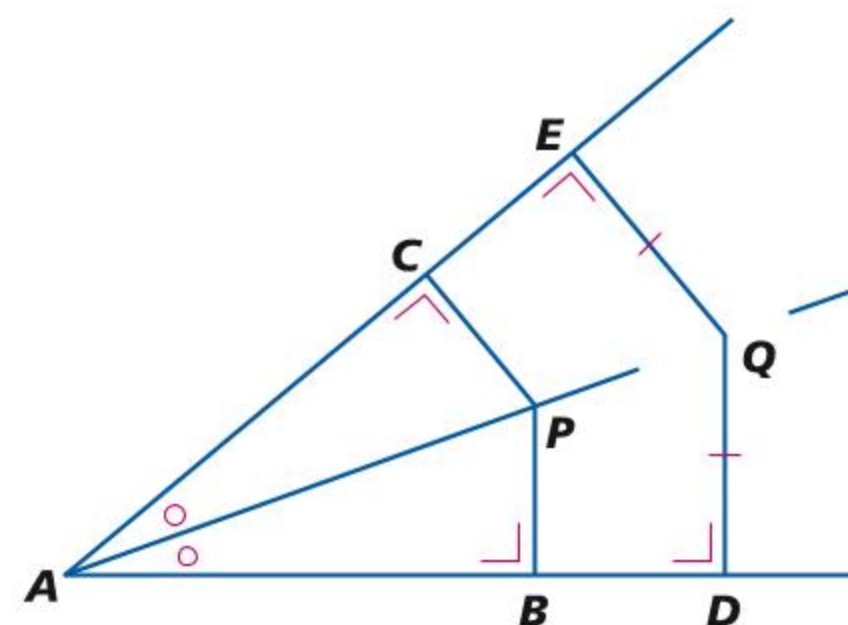
In de volgende opdracht ga je deze stellingen bewijzen.

- 18a** In de figuur hiernaast ligt punt P op de bissectrice van hoek A . Bewijs dat $PB = PC$.
- b** Voor een punt Q geldt: $QD \perp AD$, $QE \perp AE$ en $QD = QE$. Bewijs dat lijn QA hoek A middendoor deelt.
- 19** In $\triangle ABC$ snijden de bissectrices van hoek A en hoek B elkaar in S . Bewijs dat S ook op de bissectrice van hoek C ligt. Met andere woorden: de drie bissectrices van een driehoek gaan door één punt. Gebruik dezelfde aanpak als in opdracht 15.
- 20** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ en $AC = 8$.
- a** Teken $\triangle ABC$ met daarin de drie bissectrices en hun snijpunt S .
 - b** Teken de loodlijnen vanuit S op de zijden AB , AC en BC . Deze loodlijnen snijden de zijden in de punten P , Q en R .
 - c** Leg uit dat er een cirkel bestaat die raakt aan de zijden van $\triangle ABC$. Deze cirkel noem je de *ingeschreven cirkel* van $\triangle ABC$.
 - d** Teken de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.
- 21** In de figuur van opdracht 20 kun je $\triangle ABC$ verdelen in de driehoekjes SAB , SAC en SBC . Noem de straal van de ingeschreven cirkel r .
- a** Druk de oppervlakte van de driehoeken uit in r .
 - b** Samen zijn deze drie oppervlakten gelijk aan de oppervlakte van $\triangle ABC$. Bereken r .

- 22a** Ga uit van een driehoek PQR . De straal van de ingeschreven cirkel is r .

Bewijs dat geldt $r = \frac{2 \cdot \text{oppervlakte } \triangle PQR}{\text{omtrek } \triangle PQR}$

- b** Kies $PQ = 14$ en $PR = 13$; de hoogtelijn uit R is 12. Teken $\triangle PQR$ en de ingeschreven cirkel.
- c** Bereken met bovenstaande formule de straal van de ingeschreven cirkel.



3-4

Gelijkvormigheid

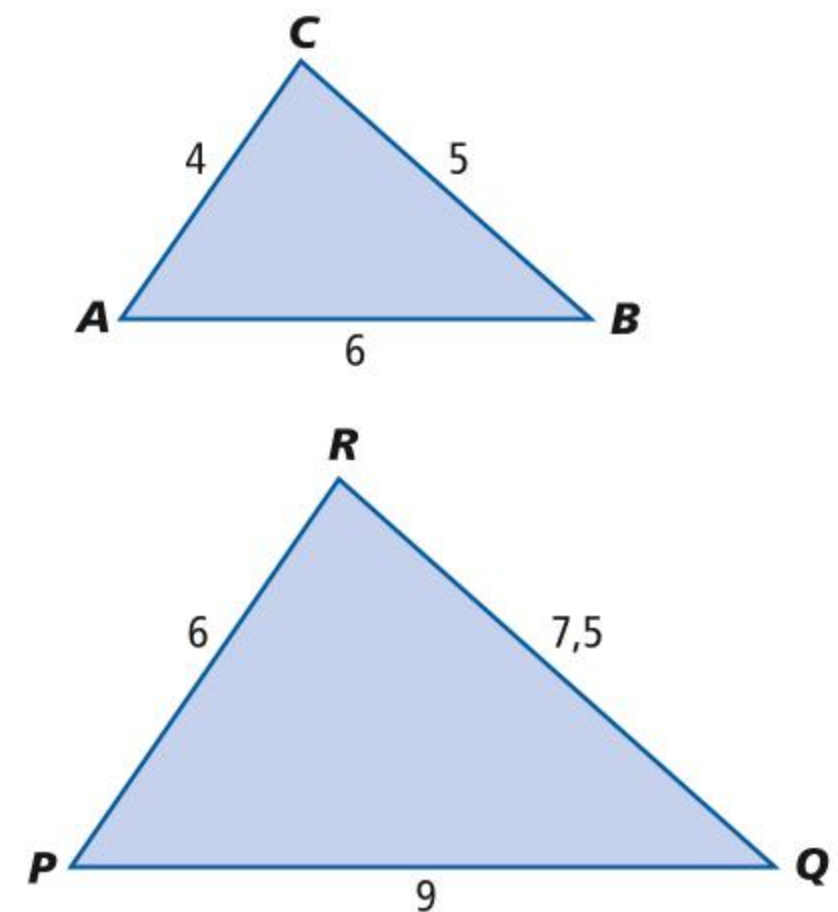
- 23a** Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 50^\circ$, $AB = 6$ en $AC = 4$.
b Teken ook $\triangle DEF$ met $\angle D = 50^\circ$, $PQ = 9$ en $PR = 6$.
c Je kunt de ene driehoek zo vergroten dat hij congruent is met de andere. Welke twee vergrotingsfactoren kun je dan nemen?

Theorie

Bij **gelijkvormige** figuren is de ene figuur een vergroting van de andere. De **overeenkomstige hoeken** zijn gelijk en tussen alle **overeenkomstige zijden** bestaat dezelfde verhouding. Voor twee driehoeken zijn de gelijkvormigheidsgevallen:

- > *hh* twee hoeken gelijk;
- > *zhz* één hoek gelijk en de verhouding van de aanliggende zijden is gelijk;
- > *zzr* de verhouding van twee paar zijden is gelijk en de niet ingesloten hoek is recht;
- > *zzz* de verhouding van alle zijden is gelijk.

De gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en PQR noteer je als $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, waarbij de overeenkomstige hoekpunten in dezelfde volgorde moeten staan.



Voorbeeld

Vierhoek $ABCD$ is een trapezium.
 Bewijs dat $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ en bereken DS .

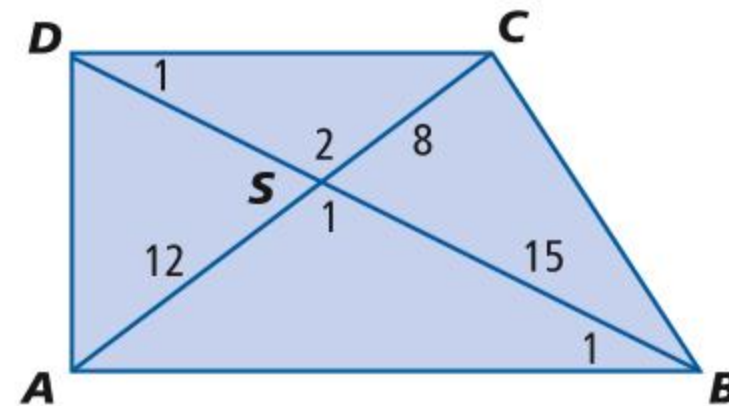
Bewijs

$\angle B_1 = \angle D_1$ (Z-hoeken)
 $\angle S_1 = \angle S_2$ (overstaande hoeken)

$\Rightarrow \triangle ABS \sim \triangle CDS$ (*hh*)

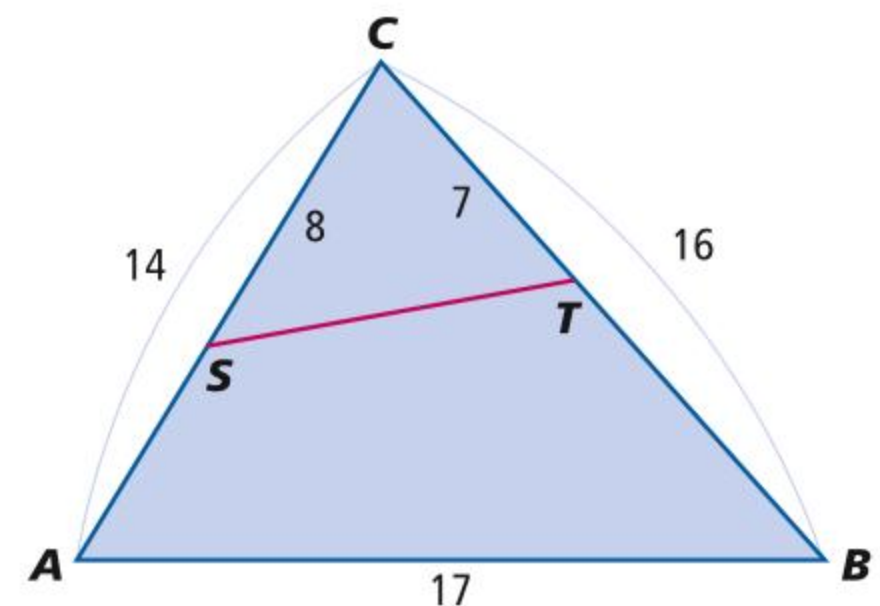
Uit de gelijkvormigheid volgt:

$$\frac{DS}{BS} = \frac{CS}{AS} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \text{ dus } DS = \frac{2}{3}BS = 10.$$



- 24** Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 17$, $AC = 14$ en $BC = 16$.
 Op AC ligt punt S zó, dat $CS = 8$ en op BC ligt punt T zó, dat $CT = 7$. Bewijs dat $\triangle ABC \sim \triangle TSC$ en bereken TS .

- 25a** Teken een $\triangle ABC$ met hoogtelijnen AD en BE .
b Bewijs dat $\triangle ADC \sim \triangle BEC$.
c Uit de gelijkvormigheid volgt $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC}$. Toon dat aan.
d Bewijs dat $\triangle CDE \sim \triangle CAB$.
e Aan welke hoek is $\angle DEC$ gelijk? En $\angle CDE$?



Theorie

Een **zwaartelij**n van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek en het midden van de tegenoverliggende zijde. De oppervlakten van $\triangle ACD$ en $\triangle BCD$ zijn gelijk (allebei de helft van een parallellogram). De driehoeken zijn als het ware 'even zwaar'.

Een lijnstuk dat de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, heet een **middenparallel** van die driehoek.

- 26 In $\triangle ABC$ is lijnstuk DE een middenparallel van $\triangle ABC$.
- Bewijs dat $\triangle CED \sim \triangle ABC$.
 - Bewijs dat $DE = \frac{1}{2} AB$ en $DE \parallel AB$ (middenparallel driehoek).
 - Formuleer in woorden de stelling die je hebt bewezen.

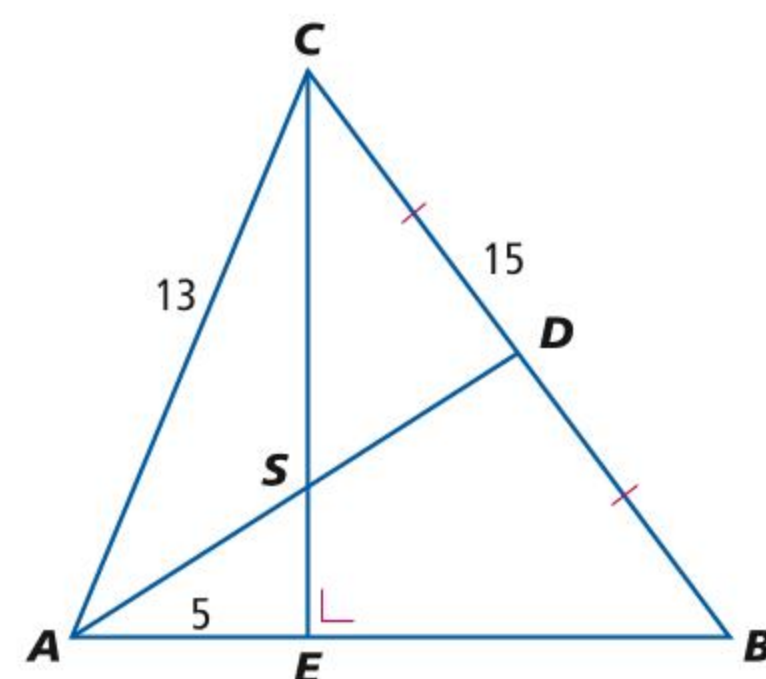
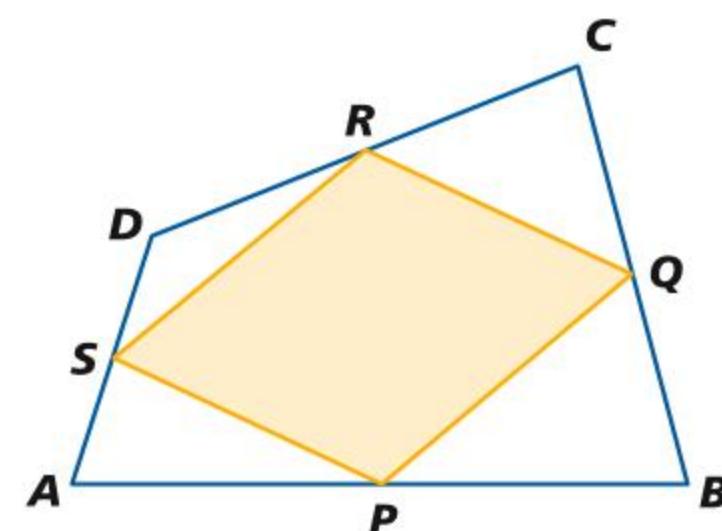
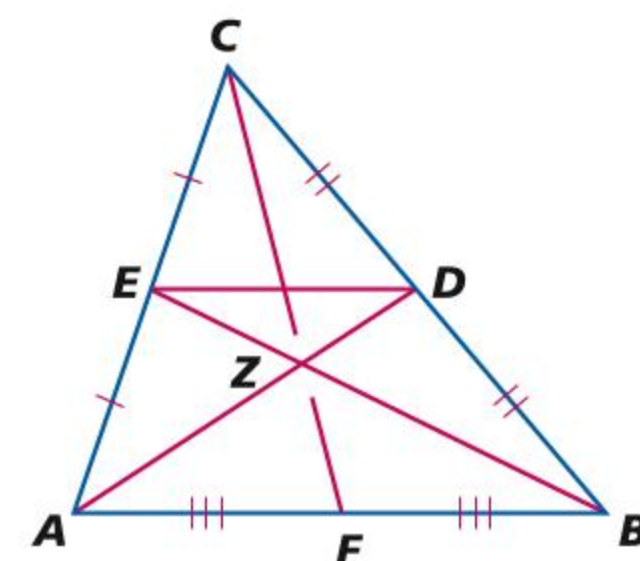
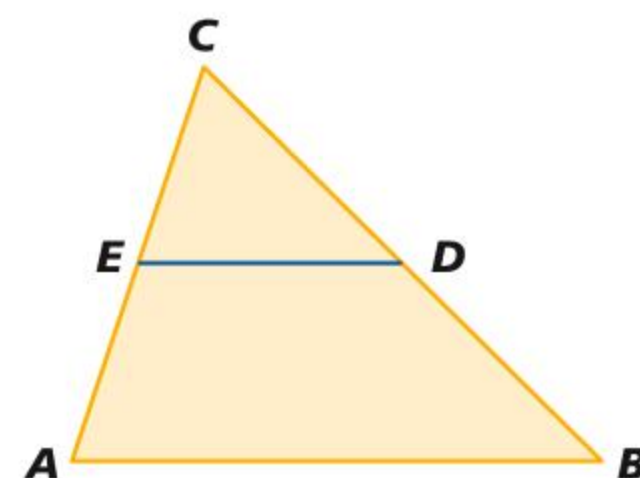
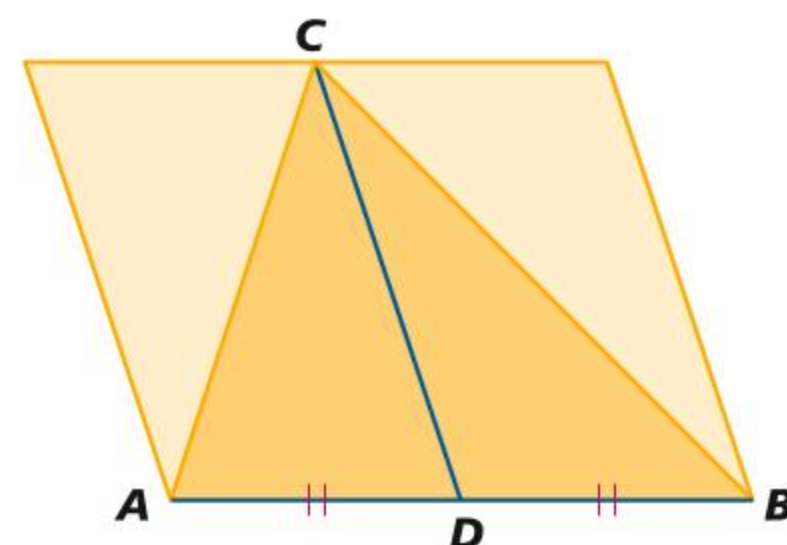
Stelling (trefwoord: zwaartelijnen driehoek)

De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, het **zwaartepunt**. Dat punt verdeelt de zwaartelijnen in twee stukken die zich verhouden als 2 : 1.

- 27 In deze opdracht bewijs je bovenstaande stelling.
- In $\triangle ABC$ snijden de zwaartelijnen AD en BE elkaar in Z .
- Bewijs dat $\triangle DEZ \sim \triangle ABZ$.
 - Bewijs dat: $AZ : ZD = BZ : ZE = 2 : 1$.
 - Stel dat de zwaartelijnen uit A en C elkaar in een punt S snijden. Wat kun je dan zeggen over $AS : SD$?
 - Waarom volgt hieruit, dat ook de zwaartelijns uit C door Z moet gaan?

- 28 In vierhoek $ABCD$ zijn P , Q , R en S de middens van de zijden.
- Toon aan dat $\triangle ASP \sim \triangle ADB$.
 - Toon aan dat $PS \parallel BD$ en $PS = \frac{1}{2} BD$.
 - Bewijs dat vierhoek $PQRS$ een parallellogram is.
 - Onderzoek welke voorwaarde moet gelden zodat vierhoek $PQRS$ een ruit is.

- ✂ 29 In $\triangle ABC$ is $AC = 13$, $BC = 15$ en $AE = 5$. De hoogtelijn uit C snijdt de zwaartelijns uit A in S .
- Bereken CE exact.
 - Trek de loodlijn uit D op zijde AB en bereken AD exact.



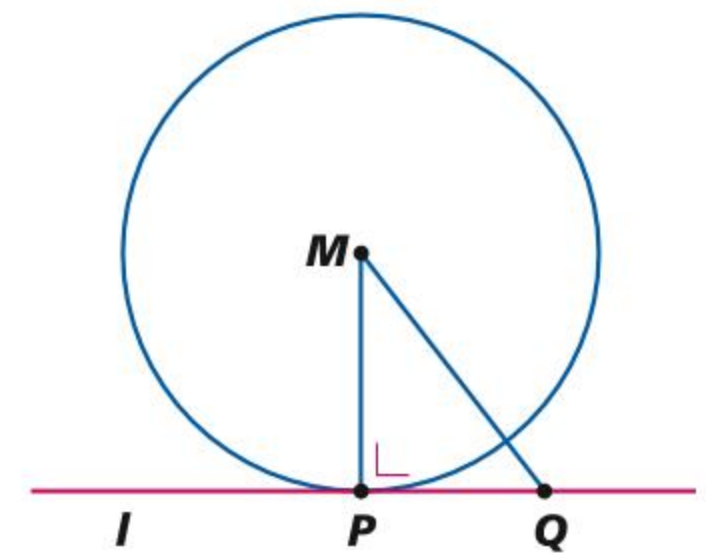
3-5

Cirkels

- 30 Punt P ligt op de cirkel met middelpunt M en l is de lijn door P loodrecht MP .
- Kies een punt $Q \neq P$ op l . Waarom is $MQ > MP$?
 - Waarom volgt daaruit dat l raakt aan de cirkel?

Stelling (trefwoord: *raaklijn*)

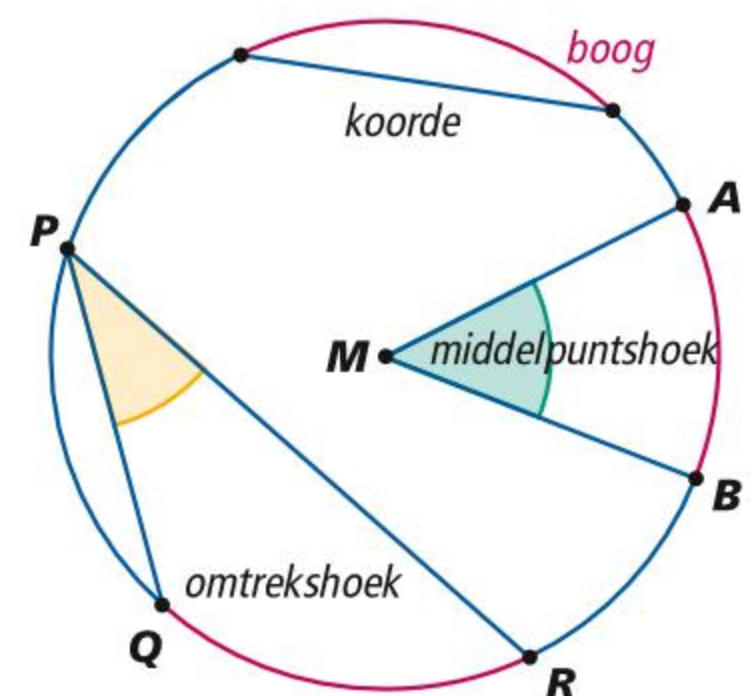
Een raaklijn aan de cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.



Theorie

Een deel van een cirkel noem je een **boog**. Een lijnstuk dat de eindpunten van een boog verbindt heet een **koorde**. Een hoek met als hoekpunt het middelpunt van een cirkel is een **middelpuntshoek**. Een hoek waarvan het hoekpunt op een cirkel ligt en de benen de cirkel snijden, noem je een **omtrekshoek**.

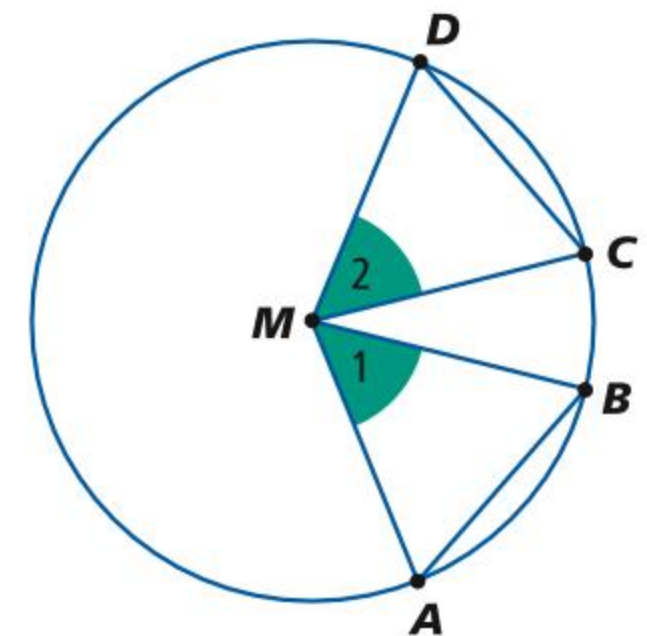
Je zegt: hoek M staat op boog AB en hoek P staat op boog QR.



- 31 In de cirkel hiernaast geldt $\angle M_1 = \angle M_2$.
- Bewijs dat $AB = CD$.
 - Draai $\triangle MAB$ om M zodat de driehoek samenvalt met $\triangle MCD$. Wat weet je nu van de bogen AB en CD ?

Stelling (trefwoord: *boog en koorde*)

In een cirkel horen bij gelijke middelpuntshoeken gelijke koorden en gelijke bogen.



- 32 Gegeven is een cirkel met middelpunt M . Op de cirkel liggen de punten A en B . Lijn l gaat door M en staat loodrecht op koorde AB . Bewijs dat l koorde AB middendoor deelt.

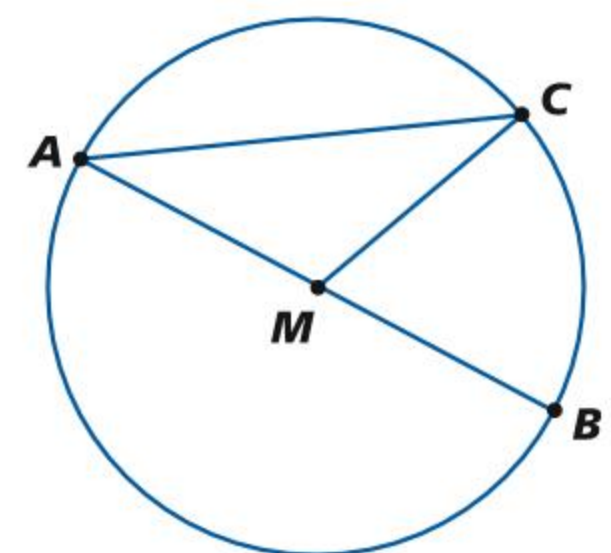
- 33 In deze opdracht bewijs je de volgende stelling.

Stelling (trefwoord: *omtrekshoek*)

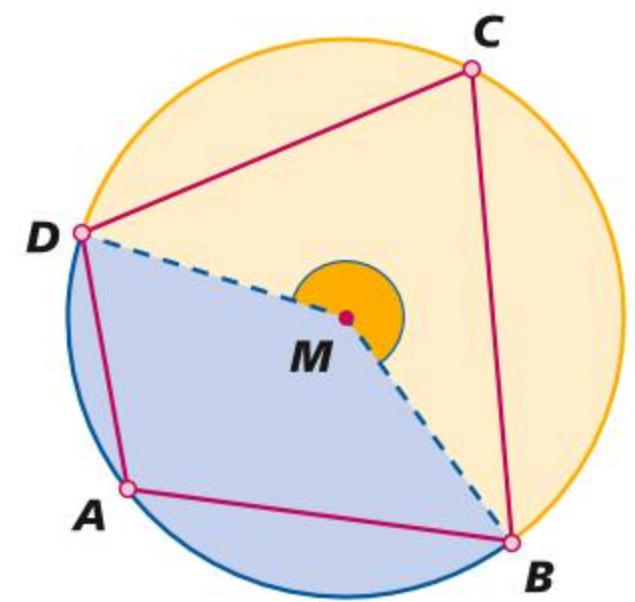
Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die op dezelfde boog staat.

Bewijs de stelling voor volgende gevallen:

- Eén been van de omtrekshoek A gaat door het middelpunt M .
- M ligt tussen de benen van de hoek A .



- 34** Bewijs de stelling van de omtrekshoek ook voor het geval dat het middelpunt M niet op of tussen de benen van hoek A ligt.
- 35** Een boog van een cirkel kan groter zijn dan een halve cirkel. In dat geval is de bijbehorende middelpuntshoek groter dan een gestrekte hoek. In de figuur is $\angle A = 108^\circ$.
- Hoe groot is de hoek bij M die hoort bij de gele boog?
 - Hoe groot is de hoek bij M die hoort bij de blauwe boog?
 - Hoe groot is hoek C ?
- 36a** Teken een cirkel met daarin een middelpunthoek van 70° . De benen van de hoek snijden de cirkel in A en B . Op boog AB ligt tussen de punten A en B een punt C .
- Bereken $\angle C$.



Uit de stelling van de omtrekshoek volgen twee andere stellingen.

Stelling (trefwoord: *constante hoek*)

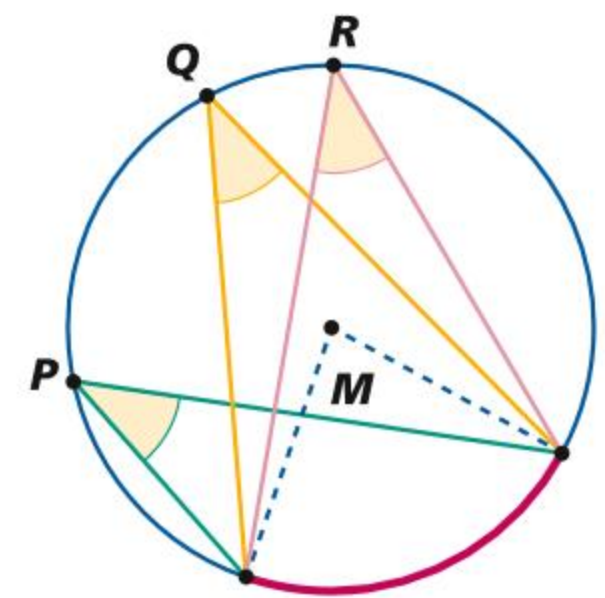
Omtrekshoeken die op dezelfde boog staan, zijn gelijk.

Stelling van Thales (trefwoord: *Thales*)

Als een punt C op de cirkel met middellijn AB ligt, is hoek ACB recht.

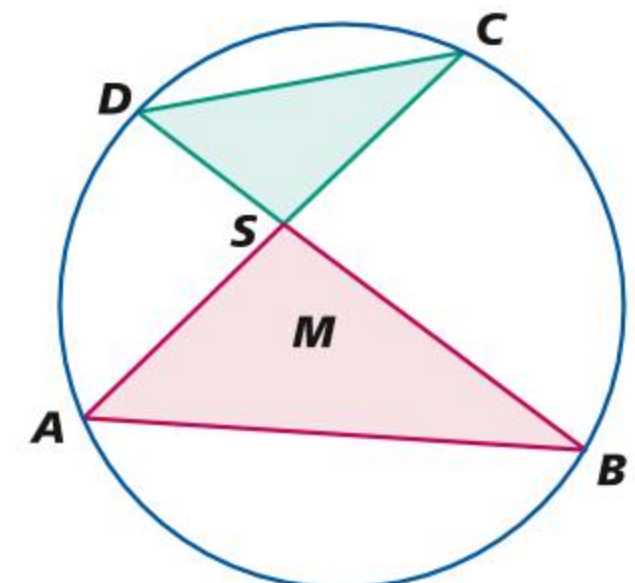
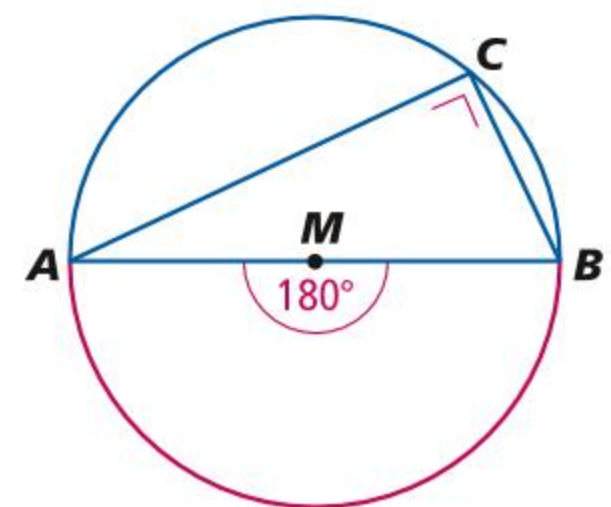
Ook geldt de **omgekeerde stelling van Thales** (trefwoord: *Thales*)

Als in $\triangle ACB$ hoek C recht is, ligt C op de cirkel met middellijn AB .



De Griekse meetkunde begint met Thales van Milete, (624 – 547 v.C.). Hij bewees als eerste de naar hem genoemde stelling.

- 37a** Leg uit hoe de stelling van de constante hoek volgt uit de stelling van de omtrekshoek.
- Verklaar de stelling van Thales.
 - Bewijs de omgekeerde stelling door aan te tonen dat M op de middelloodlijnen van de zijden AC en BC ligt.
- 38** Vier punten A , B , C en D liggen op een cirkel.
- Bewijs dat de driehoeken ABS en DCS gelijkvormig zijn.
 - Bewijs dat de driehoeken BCS en ADS gelijkvormig zijn.



3-6

Hoe bewijs je dat?

Aanpak

Hoe pak je een bewijs aan?

- > Teken een duidelijke figuur en verwerk daarin de gegevens. Gebruik streepjes, rondjes, kruisjes, boogjes, enzovoort om gelijke lijnstukken, gelijke hoeken, rechte hoeken en evenwijdige lijnen aan te geven.
- > Probeer vanuit de gegevens een volgende stap af te leiden: ga na of er stellingen zijn die je kunt gebruiken. Verwerk zo mogelijk je conclusies in de figuur.
- > Trek eventueel hulplijnen.
- > Kom je niet verder, probeer dan vanuit het 'te bewijzen' terug te redeneren: wat zou de voorlaatste stap kunnen zijn?

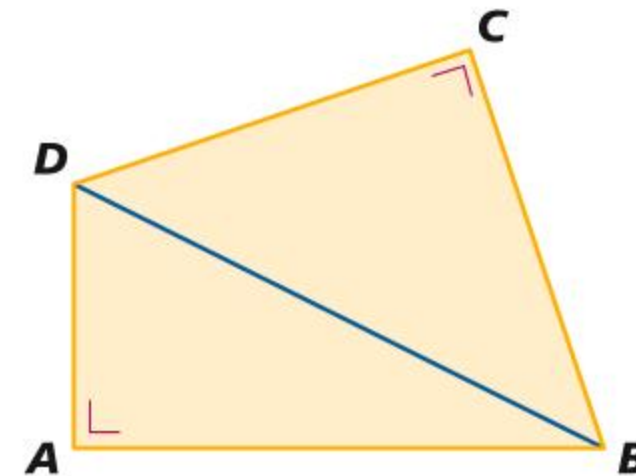
Een bewijs vinden is niet altijd eenvoudig, maar door systematisch te werk te gaan kom je vaak al een heel eind op weg.

Voorbeeld

Van vierhoek $ABCD$ zijn twee overstaande hoeken recht. Bewijs dat er een cirkel is die door A , B , C en D gaat.

Oplossing

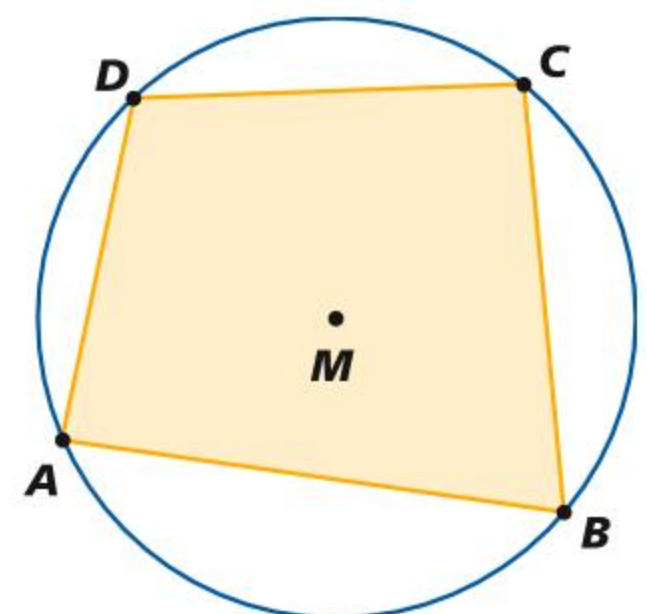
- > In de figuur geef je de rechte hoeken aan.
- > Trek als hulplijn lijnstuk BD .
- > Volgens *Thales* liggen A en C beide op de cirkel met middellijn BD , dus de cirkel met middellijn BD gaat door alle hoekpunten.



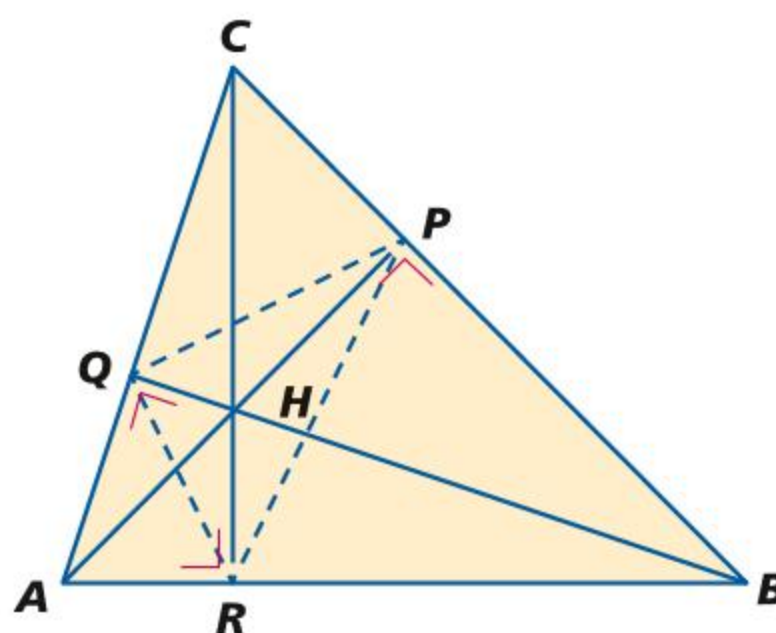
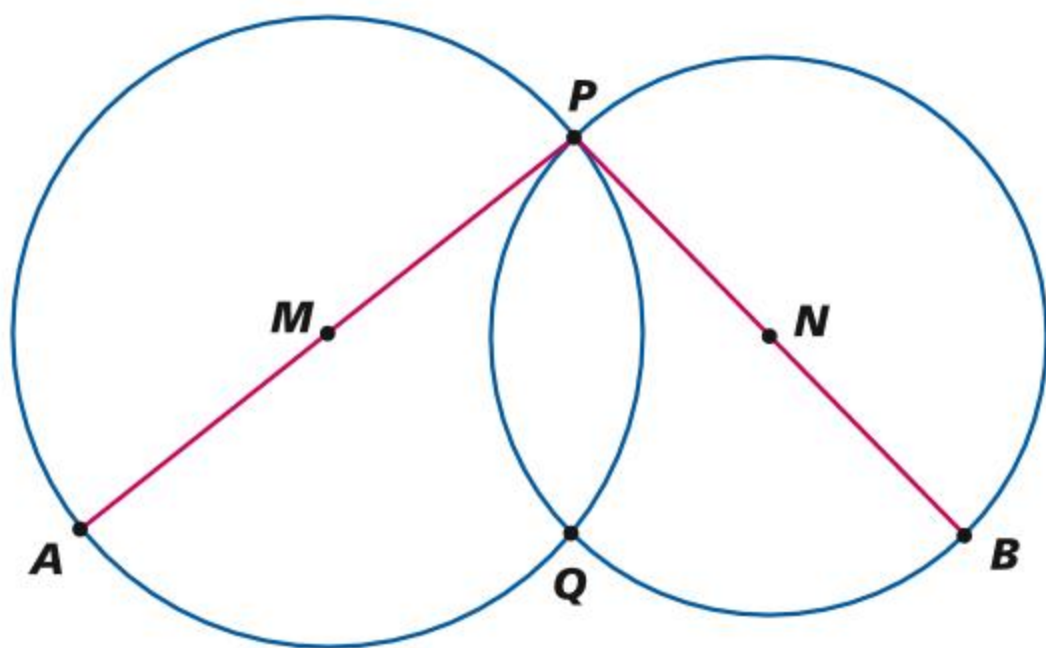
- 39 Zet de oplossing van het voorbeeld in een bewijsschema. Ook de getrokken hulplijn vermeld je in het bewijs.
- 40a Teken een cirkel c met middelpunt M en een punt P buiten de cirkel.
 b De raaklijnen vanuit P aan c raken c in A en B .
 Bewijs dat er een cirkel is die door P , A , B en M gaat.
 c Gebruik de zojuist bewezen stelling om vanuit een punt buiten een cirkel de raaklijnen aan die cirkel te construeren.
- ✂ 41 De hoekpunten van een vierhoek $ABCD$ liggen op een cirkel. Zo'n vierhoek noem je een *koordenvierhoek*.

Stelling (trefwoord: *koordenvierhoek*): In een koordenvierhoek is de som van elk paar overstaande hoeken 180° .

- a Bewijs de stelling met behulp van hulplijnen vanuit M naar de hoekpunten.
 b Bewijs de stelling met omtrekshoeken. Zie ook opdracht 35.

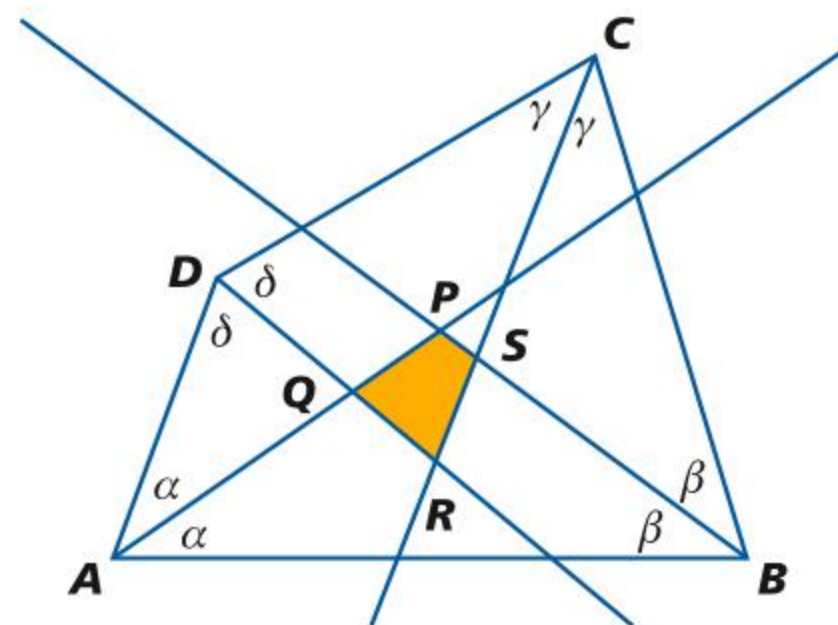


- ✂ 42 Twee cirkels met middelpunten M en N snijden elkaar in P en Q . Vanuit P is in beide cirkels een middellijn getrokken. Je gaat bewijzen dat de punten A , Q en B op één lijn liggen.
- a Begin met terugredeneren: wat kun je zeggen over hoek AQB als A , Q en B op één lijn liggen?
- b Bewijs dat A , Q en B op één lijn liggen.

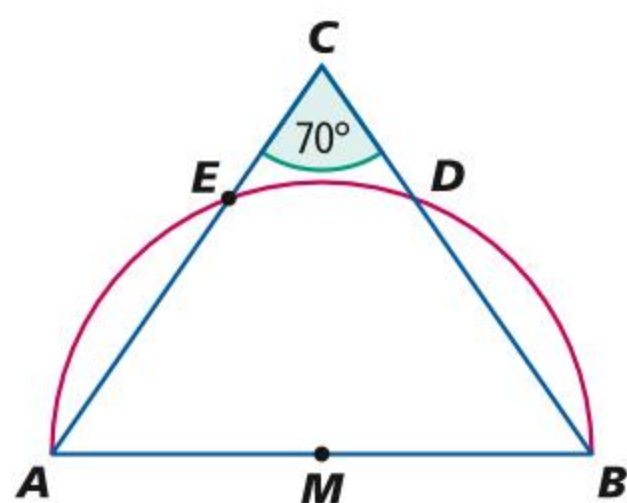
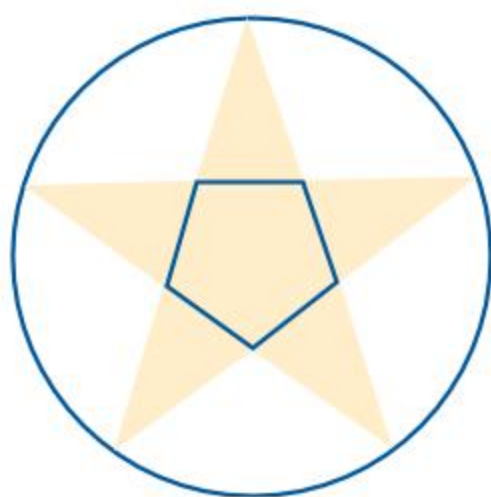


- ✂ 43 In $\triangle ABC$ snijden de hoogtelijnen de zijden in P , Q en R . Zie de figuur rechtsboven. Bewijs dat de omgeschreven cirkels van de driehoeken ARQ , BPR en CQP door één punt gaan.

- ✂ 44 De bissectrices van vierhoek $ABCD$ vormen een vierhoek $PQRS$. Bewijs dat de overstaande hoeken in vierhoek $PQRS$ samen 180° zijn.



- 45 Het pentagram linksonder verdeelt de cirkel in vijf gelijke delen. Bereken alle hoeken die in het pentagram voorkomen.



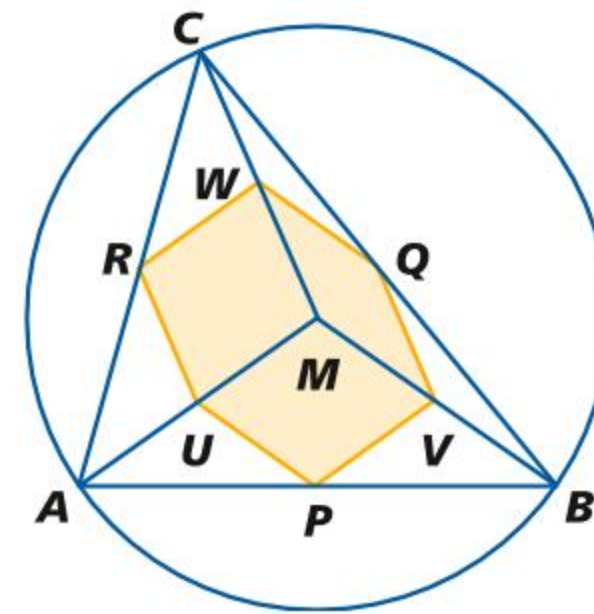
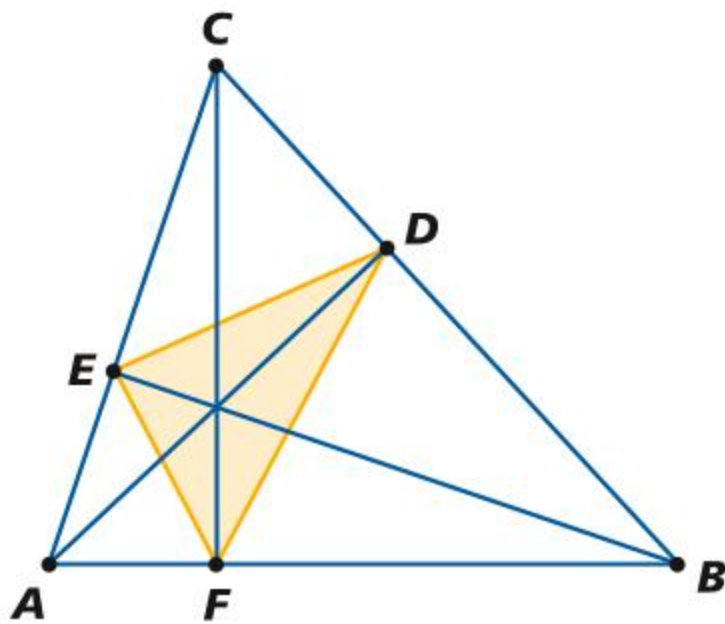
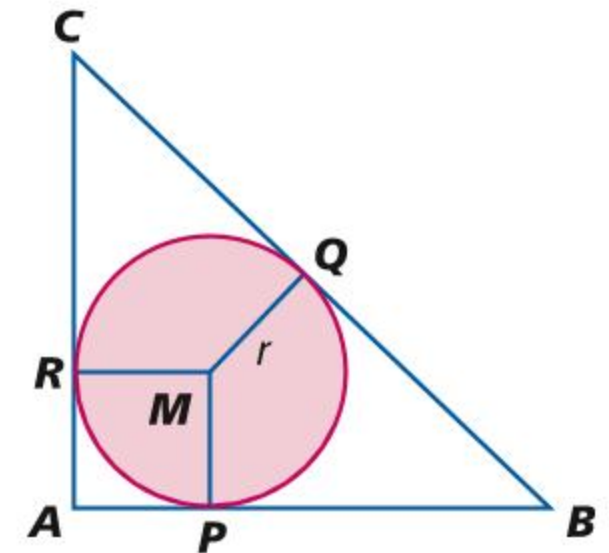
- ✂ 46 In de figuur rechtsboven is $AC = BC$. De halve cirkel met middellijn AB snijdt de opstaande zijden in D en E . M is het midden van AB .
- a $\angle C = 70^\circ$. Bereken $\angle EMD$.
- b $\angle C = \gamma$ Druk $\angle EMD$ uit in γ .

3-7

Gemengde opgaven

- ✂ 47 Gegeven is een cirkel met middelpunt M en straal r en een punt P buiten de cirkel. De raaklijnen uit P aan de cirkel raken de cirkel in de punten A en B . Maak een duidelijke tekening en bewijs dat $PA = PB$.

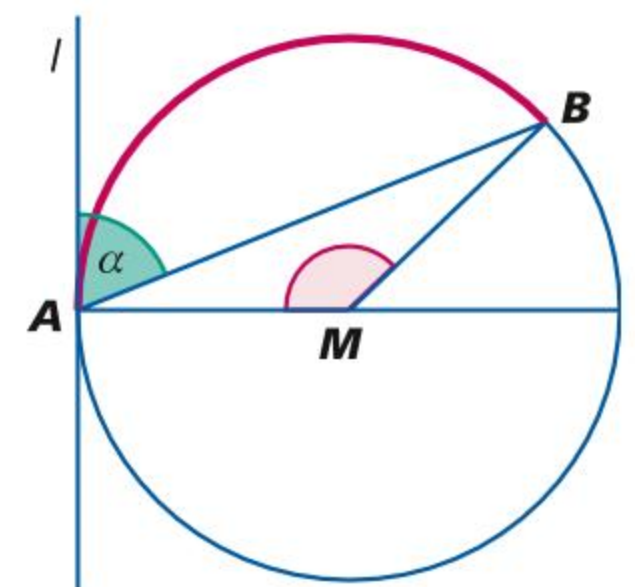
- 48 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 90^\circ$, $AB = 20$ en $AC = 21$. M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Je gaat de straal r van die cirkel berekenen met behulp van gelijke raaklijnstukken.
- Bereken BC .
 - Druk BP en CR uit in r .
 - Gebruik de stelling uit opdracht 47 en bereken r .



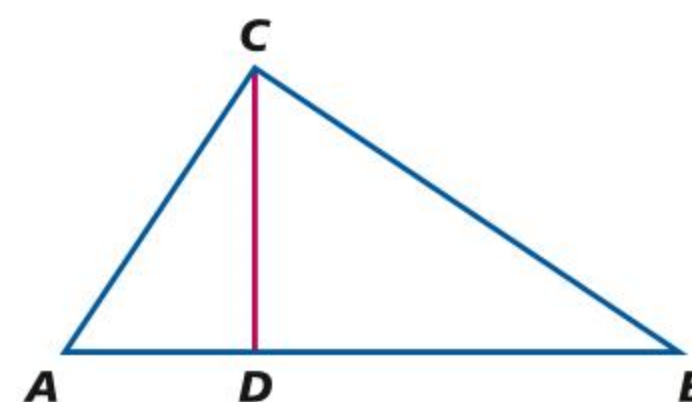
- ✂ 49 AD , BE en CF zijn de hoogtelijnen in $\triangle ABC$. Zie de figuur hierboven. Bewijs dat de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ de bissectrices van $\triangle DEF$ zijn.

- ✂ 50 M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. De middens van AB , BC en CA zijn P , Q en R ; de middens van AM , BM en CM zijn U , V en W . Bewijs dat alle zijden van zeshoek $PVQWRU$ even lang zijn.

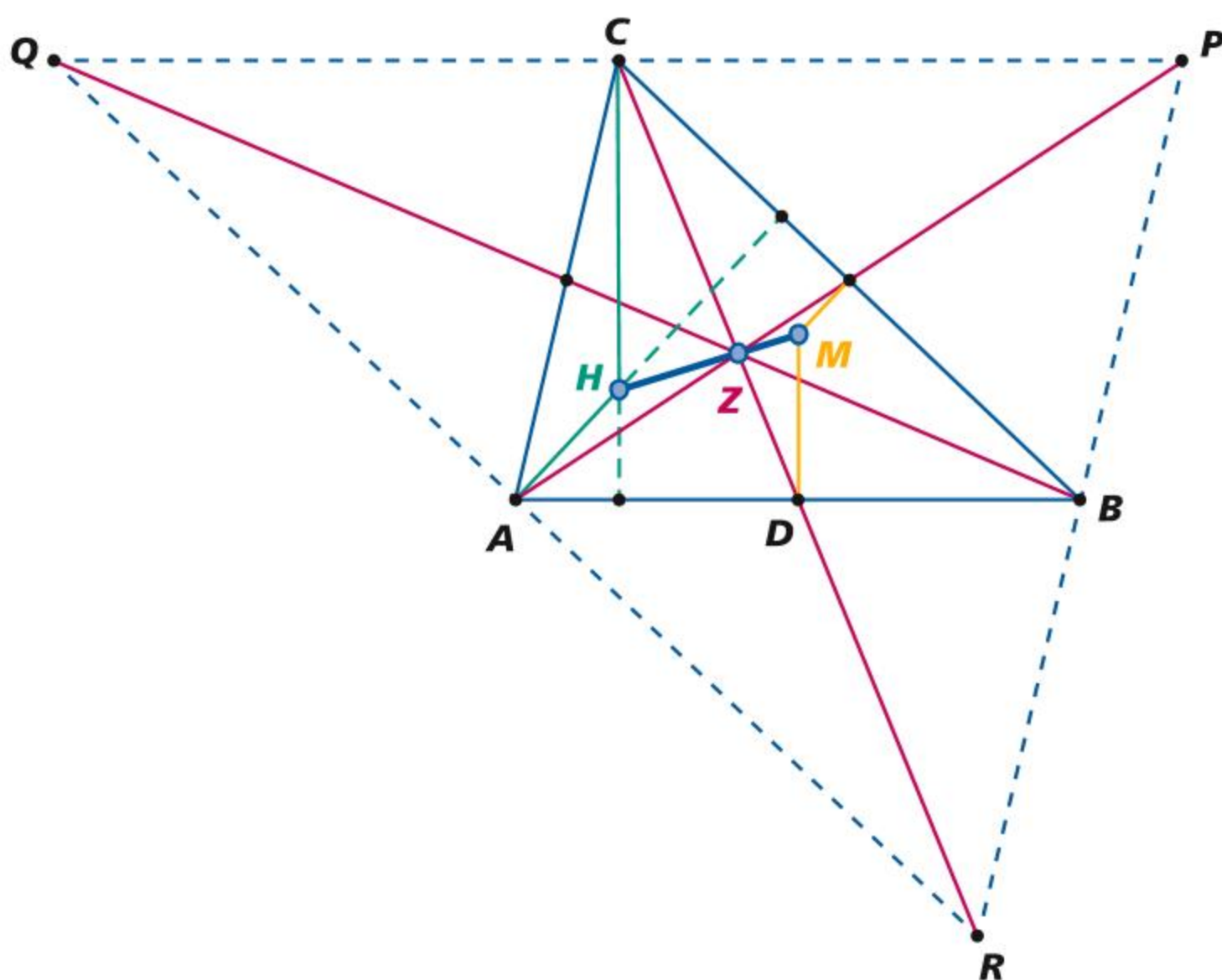
- 51a De punten A en B liggen op een cirkel met middelpunt M . l is de raaklijn in A aan de cirkel en deze lijn maakt een hoek α met koorde AB . Bewijs dat $\angle AMB = 2\alpha$.
- b Formuleer de stelling die je hebt bewezen.



- 52** In $\triangle ABC$ is $\angle C = 90^\circ$ en CD staat loodrecht op AB .
- Bewijs dat $\triangle ACD \sim \triangle CBD$
 - Toon aan dat $CD^2 = AD \cdot BD$.
 - Teken een rechthoek $PQRS$.
 - Je wilt een vierkant construeren waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van de rechthoek. Beschrijf hoe je met behulp van wat je zojuist hebt bewezen en de stelling van Thales de zijde van dat vierkant kunt construeren. Voer deze constructie uit!



- 53** In een driehoek gaan alle middelloodlijnen van de zijden door een punt M , alle zwaartelijnen door een punt Z en alle hoogtelijnen door een punt H . De Zwitserse wiskundige Leonard Euler (1707 – 1783) toonde aan dat deze drie punten op één lijn liggen. Deze lijn wordt daarom de *rechte van Euler* genoemd. In deze opgave bewijs je die stelling in een aantal stappen.



Gegeven is $\triangle ABC$. De lijnen PQ , QR en RP zijn evenwijdig aan de zijden van $\triangle ABC$.

- Bewijs dat de driehoeken BAR , PCB en CQA congruent zijn met $\triangle ABC$.
- De zwaartelijnen PA , BQ en CR van $\triangle PQR$ snijden elkaar in Z .
Waarom zijn de zwaartelijnen van $\triangle PQR$ ook de zwaartelijnen van $\triangle ABC$?
- Bewijs dat $\triangle PQR \sim \triangle ABC$.
- Omdat het hoogtepunt H van $\triangle ABC$ het snijpunt is van de middelloodlijnen van $\triangle PQR$ zijn CH en MD overeenkomstige lijnstukken.
Vul in: $CH = \dots \cdot MD$.
- Bewijs dat $\triangle CHZ \sim \triangle DMZ$.
- Bewijs dat H , Z en M op één lijn liggen.
- Bewijs bovendien dat $HZ : ZM = 2 : 1$.

Samenvatting

Stelling en bewijs

Een stelling is een bewering waarvan bewezen kan worden dat die waar is.

Een bewijs is de redenering waarmee je aantoont dat een bewering waar is.

Een bewijs noteer je in een bewijsschema:

1 Gegeven, 2 Te bewijzen, 3 Bewijs.

Congruentie en gelijkvormigheid

Twee driehoeken zijn congruent als de overeenkomstige hoeken en de overeenkomstige zijden gelijk zijn. Er zijn vijf congruentiegevallen:

ZZZ , ZHZ , HZH , ZHH en ZZR

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als de ene figuur een vergroting is van de andere. De gelijkvormigheidsgevallen zijn: hh , zhz , zrz en zzz .

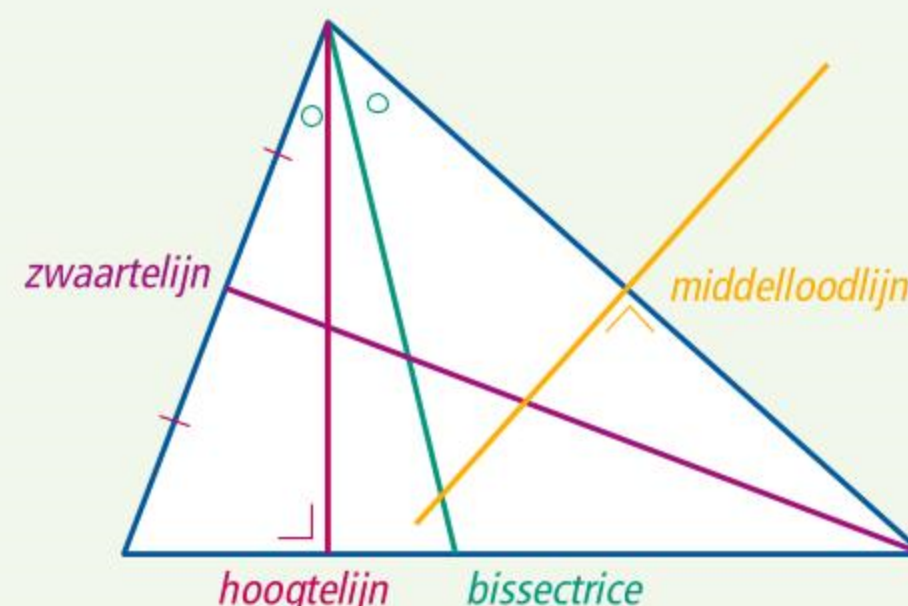
Middelloodlijn, bissectrice, hoogtelijn en zwaartelijn

De middelloodlijn van een lijnstuk gaat door het midden van dat lijnstuk en staat er loodrecht op.

De bissectrice of deellijn van een hoek verdeelt die hoek in twee gelijke hoeken.

Een hoogtelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en loodrecht op de overstaande zijde.

Een zwaartelijn in een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek en het midden van de tegenoverliggende zijde.



Boog, koorde, middelpuntshoek, omtrekshoek en koordenvierhoek

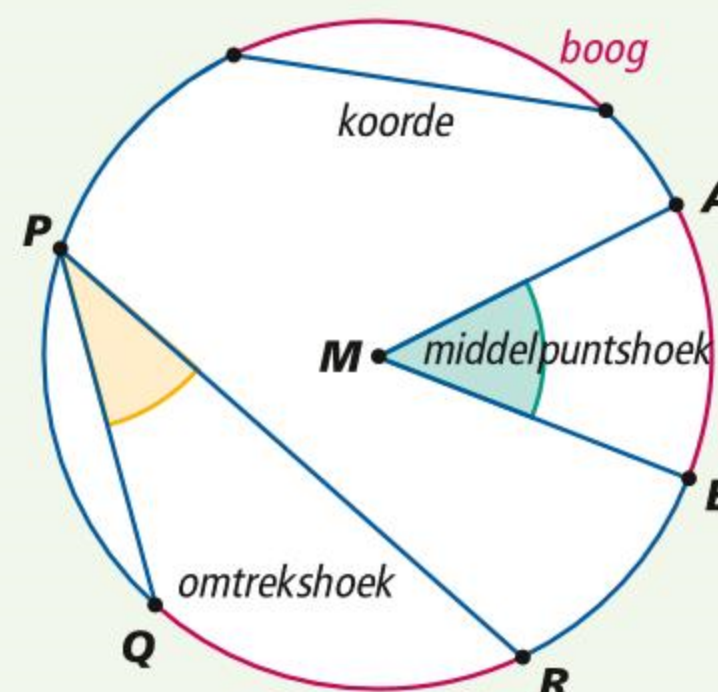
Een boog is een deel van een cirkel.

Een koorde is een lijnstuk dat de eindpunten van een boog verbindt.

Een middelpuntshoek is een hoek waarvan het hoekpunt het middelpunt van een cirkel is.

Een omtrekshoek is een hoek waarvan het hoekpunt op een cirkel ligt en de benen de cirkel snijden.

Een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen.



Stellingen

Je kent de stellingen die horen bij de volgende trefwoorden:

overstaande hoeken
F-hoeken, Z-hoeken
hoekensom driehoek
buitenhoek driehoek
gelijkbenige driehoek

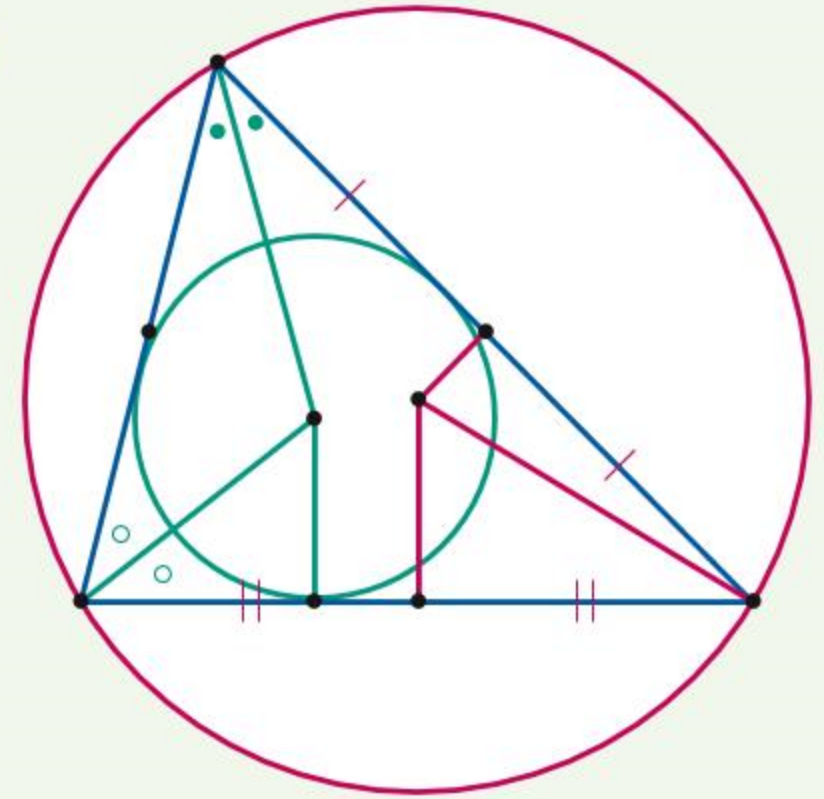
parallelogram
middelloodlijn
bissectrice
zwaartelijnen driehoek
raaklijn

boog en koorde
omtrekshoek
constante hoek
Thales
koordenvierhoek.

Je kunt de omgeschreven cirkel en de ingeschreven cirkel van een driehoek construeren

Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van die driehoek (rode cirkel).

Het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken van die driehoek (blauwe cirkel).



Je kunt stappen zetten om een bewijs te vinden en het bewijs goed opschrijven

Teken een duidelijke figuur en verwerk hierin de gegevens.

Trek eventueel hulplijnen en ga na of er stellingen zijn die je kunt gebruiken.

Geef dat zo mogelijk aan in de figuur. Als je niet verder komt vanuit de gegevens, redeneer dan terug vanuit het 'te bewijzen'.

Een bewijs zet je in een bewijsschema: Gegeven, Te bewijzen en Bewijs.

Met trefwoorden verwijst je naar bewezen stellingen.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AC = BC$. Een cirkel door A en C snijdt zijde BC in D en zijde AB in E .

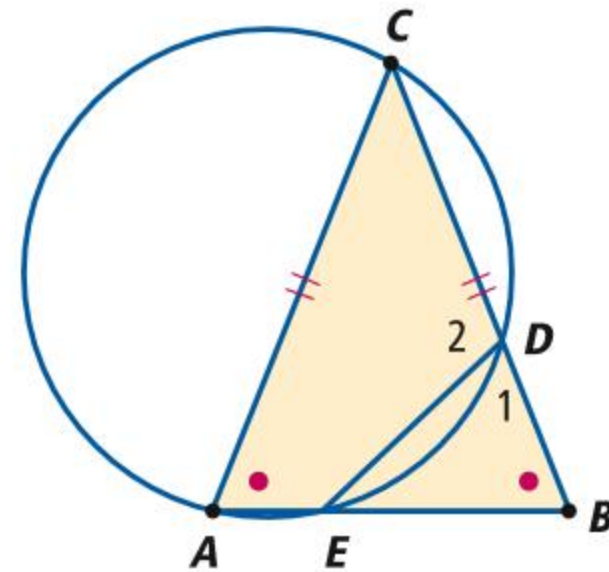
Bewijs dat $DE = BE$.

Oplossing

Geef met streepjes in de figuur aan dat $AC = BC$.

Uit $AC = BC$ volgt $\angle A = \angle B$ (gelijkbenige driehoek).

Zet rondjes in de figuur.



Terugredeneren.

Je moet bewijzen $DE = BE$. Dan moet ook $\angle B = \angle D_1$ (gelijkbenige driehoek).

$\angle D_2 + \angle D_1 = 180^\circ$ maar ook $\angle D_2 + \angle A = 180^\circ$ (koordenvierhoek).

Omdat $\angle A = \angle B$, is dus $\angle D_1 = \angle B$.

Nu moet je het bewijs nog in het bewijsschema zetten.

Gegeven: $\triangle ABC$ met $AC = BC$

Een cirkel door A en C snijdt de zijden BC en AC in D en E .

Te bewijzen: $DE = BE$

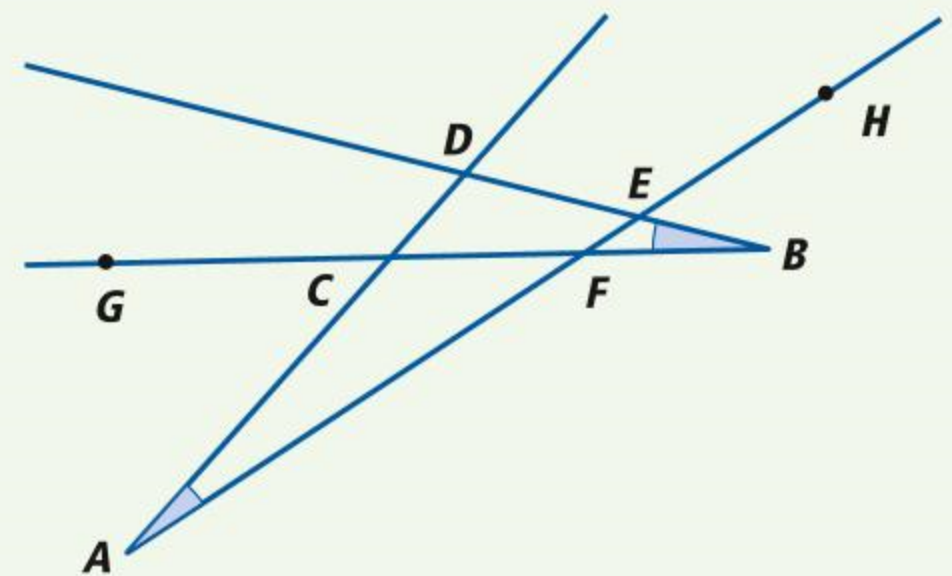
Bewijs: $AC = BC$ (gegeven) $\Rightarrow \angle A = \angle B$ (gelijkbenige driehoek)

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle D_2 = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle D_1 = \angle A = \angle B$$

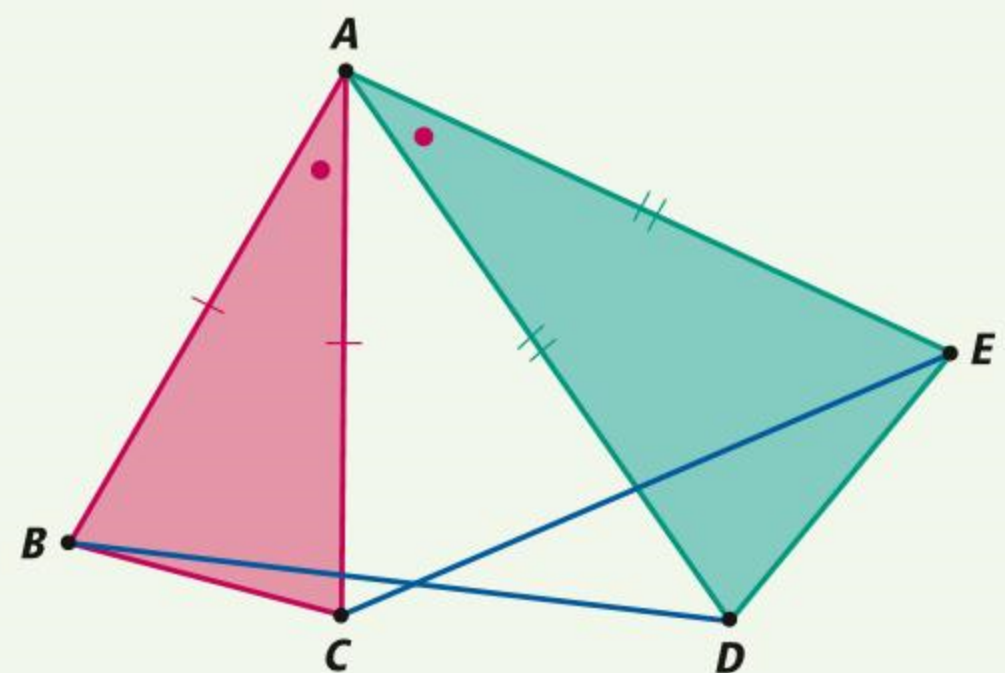
$\Rightarrow DE = BE$ (gelijkbenige driehoek)

Test jezelf

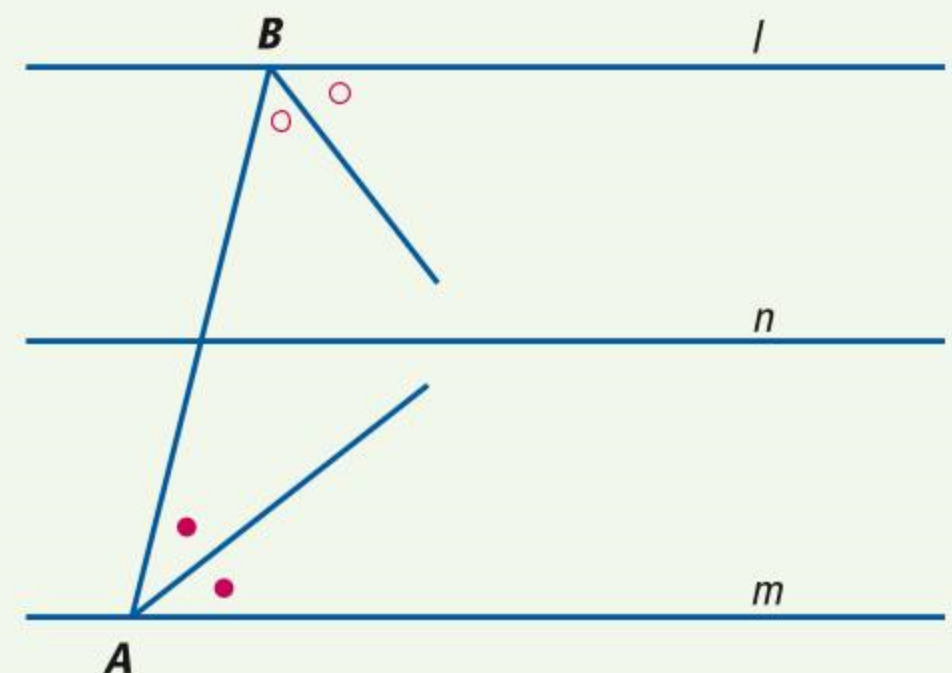
- T-1** De benen van twee gelijke hoeken A en B snijden elkaar in de punten C, D, E en F .
Bewijs dat $\angle GCD = \angle HED$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-1.



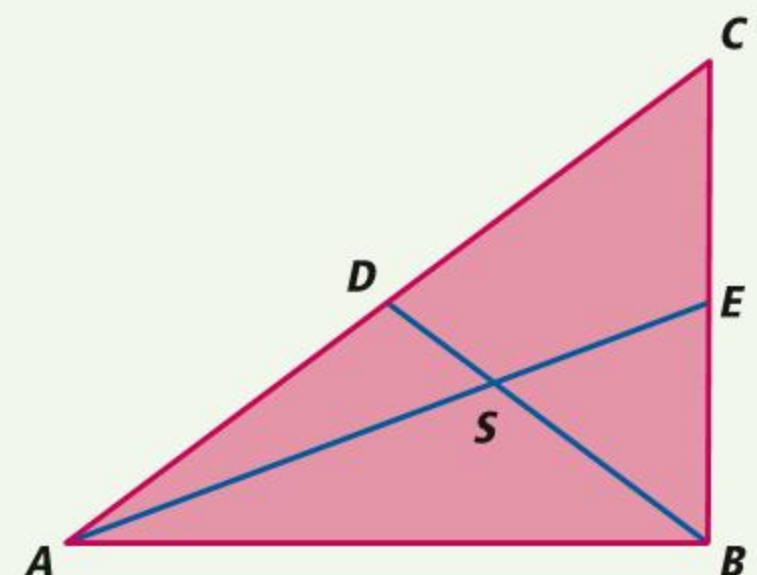
- T-2** Gegeven zijn twee gelijkbenige driehoeken ABC en ADE , beide met top A .
De driehoeken zijn niet congruent, maar hun tophoeken zijn wel gelijk.
Bewijs dat $BD = CE$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-2.



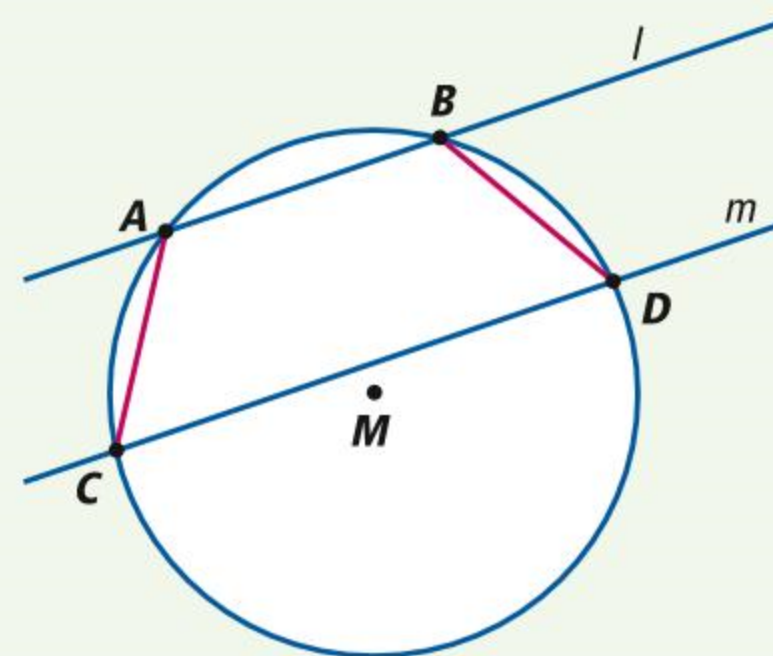
- T-3** De lijnen l en m zijn evenwijdig. De punten op lijn n liggen op gelijke afstand van l en m .
Op m ligt een punt A en op l ligt een punt B .
In de rechter hoeken bij A en bij B zijn bissectrices getekend.
Bewijs dat deze bissectrices elkaar snijden in een punt dat op lijn n ligt.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-3.



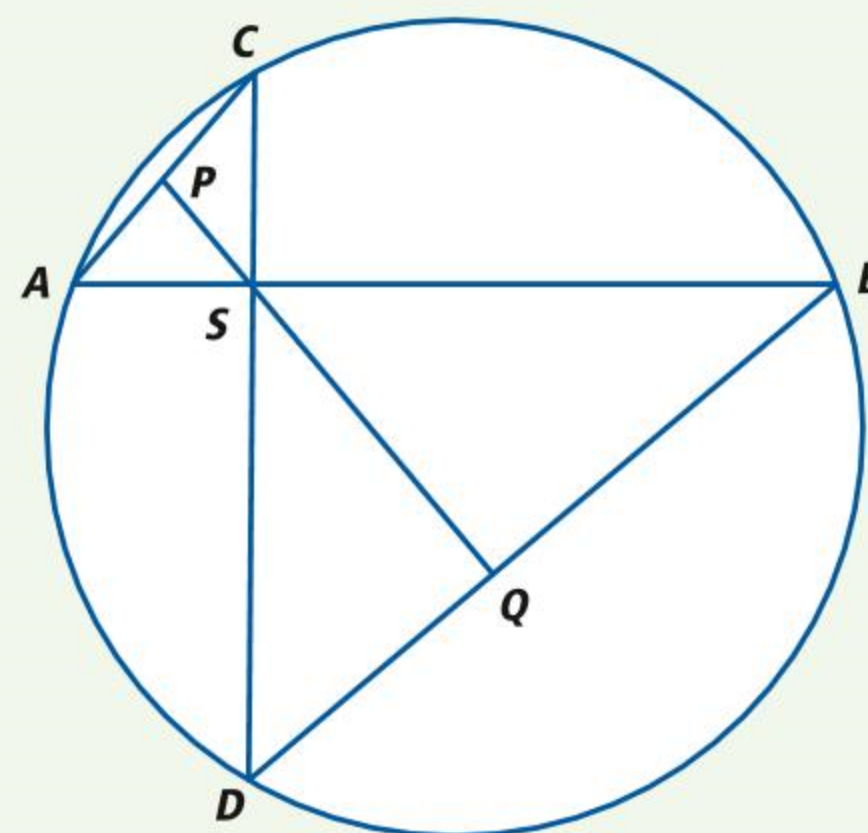
- T-4** In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90^\circ$, $AC = 10$ en $BC = 6$.
De zwaartelijnen AE en BD snijden elkaar in S .
Bereken AS exact.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-4.



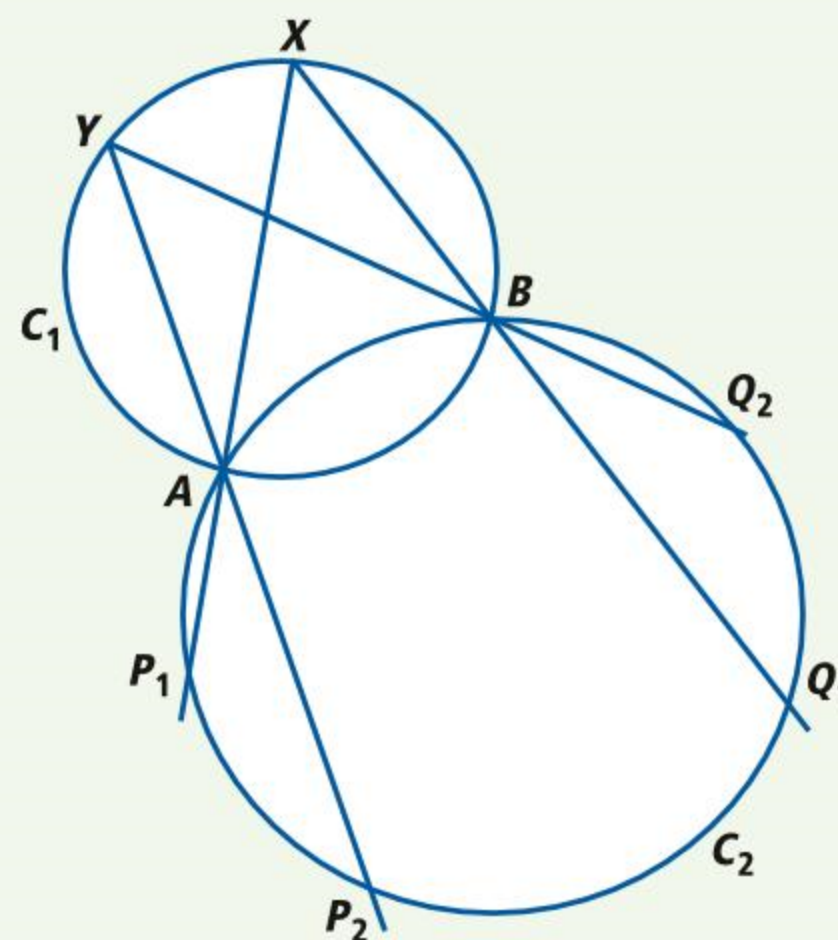
- T-5** Een cirkel met middelpunt M wordt gesneden door twee evenwijdige lijnen l en m .
Bewijs dat de koorden AC en BD even lang zijn.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-5.



- T-6** In de cirkel snijden de koorden AB en CD elkaar loodrecht in S .
 P is het midden van koorde AC .
De lijn door P en S snijdt koorde BD in Q .
Bewijs dat $PQ \perp BD$.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 3-6.



- T-7** Twee cirkels c_1 en c_2 snijden elkaar in de punten A en B .
 A en B verdelen c_1 in twee bogen: de ene boog ligt binnen c_2 , de andere boog ligt buiten c_2 .
Op de boog van c_1 buiten c_2 liggen de punten X en Y .
De lijnen AX en BX snijden c_2 ook in de punten P_1 en Q_1 .
De lijnen AY en BY snijden c_2 ook in de punten P_2 en Q_2 .
Bewijs dat $P_1P_2 = Q_1Q_2$.



Hoofdstuk 4

Redeneren met ruimtefiguren

In dit hoofdstuk

4-1	Vlakken in de ruimte	72
4-2	Lijnen in de ruimte	74
4-3	Lijnen en vlakken	76
4-4	Snijpunten	78
4-5	Doorsneden tekenen	80
4-6	Gemengde opdrachten	82
	Samenvatting	84
	Test jezelf	86

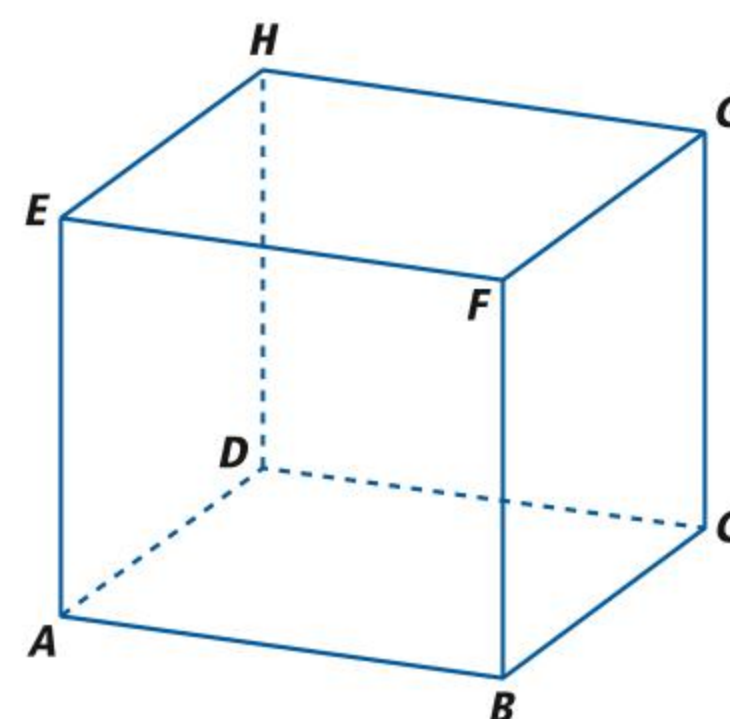
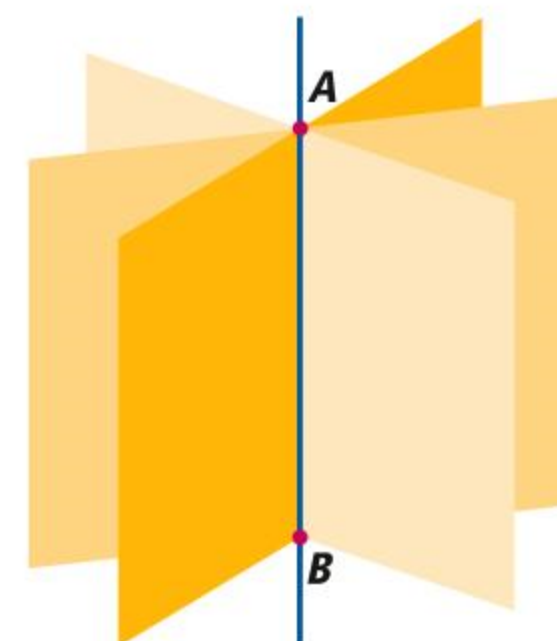
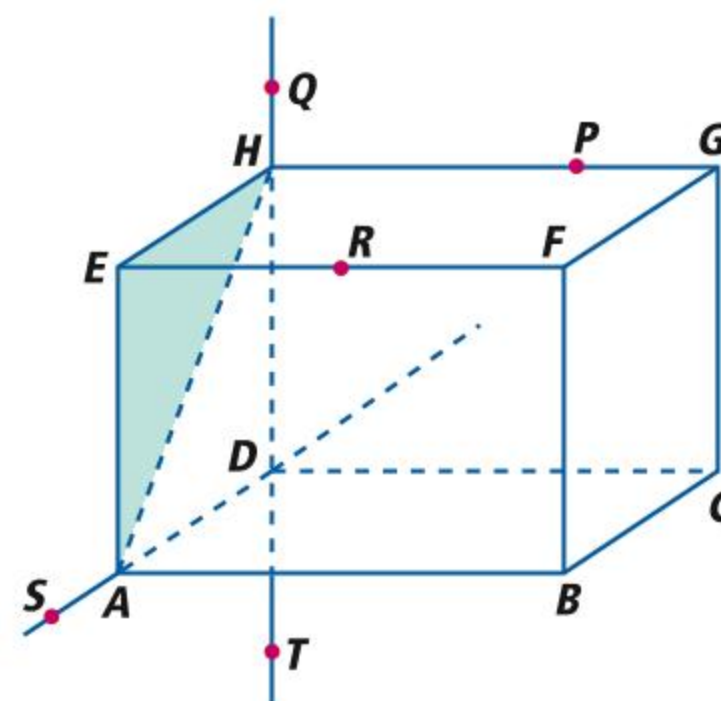
4-1

Vlakken in de ruimte

- 1 In de balk $ABCD.EFGH$ ligt punt P op ribbe HG , de punten Q en T liggen op het verlengde van ribbe DH , punt S ligt op het verlengde van ribbe DA en punt R is het midden van ribbe EF .
 - a Wat voor soort driehoek is $\triangle AEH$?
 - b Het vlak door de punten A , E en H bestaat niet alleen uit het lichtgroen gekleurde stuk, maar is onbegrensd. Welk hoekpunt van de balk behoort ook tot vlak AEH ?
 - c Noem nog een paar punten die behoren tot vlak AEH .
 - d Welke vorm heeft zijvlak $DCGH$?
 - e Zijvlak $DCGH$ is onderdeel van het onbegrensde vlak $DCGH$. Noem nog een paar punten in de tekening die tot dit vlak behoren.

- 2 Hiernaast zie je door de punten A en B drie vlakken getekend.
 - a Zijn er nog meer vlakken mogelijk door A en B ? Leg uit.
 - b Een vlak ligt niet vast door twee punten van dat vlak te geven. Is een vlak altijd vastgelegd door drie verschillende punten? Verklaar je antwoord.

- 3 Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$.
 - a Noem drie vlakken waar de lijn BC in ligt.
 - b Bestaat er een vlak waar de lijnen AB en GH beide in liggen?
 - c Is er een vlak mogelijk door de punten A , C en E ? Zo ja, is er meer dan één vlak mogelijk?
 - d Bestaat er een vlak waar de lijnen AH en GH in liggen? Zo ja, welk hoekpunt van de kubus behoort ook tot dit vlak?
 - e Bestaat er een vlak door punt F waar de lijn BD in ligt? Zo ja, welk hoekpunt van de kubus behoort ook tot dit vlak?
 - f Kun je een vlak tekenen door de snijdende lijnen AG en EC ? Zo ja, is er meer dan één vlak mogelijk?
 - g Leg uit dat er geen vlak bestaat waar de lijnen AB en CH beide in liggen.

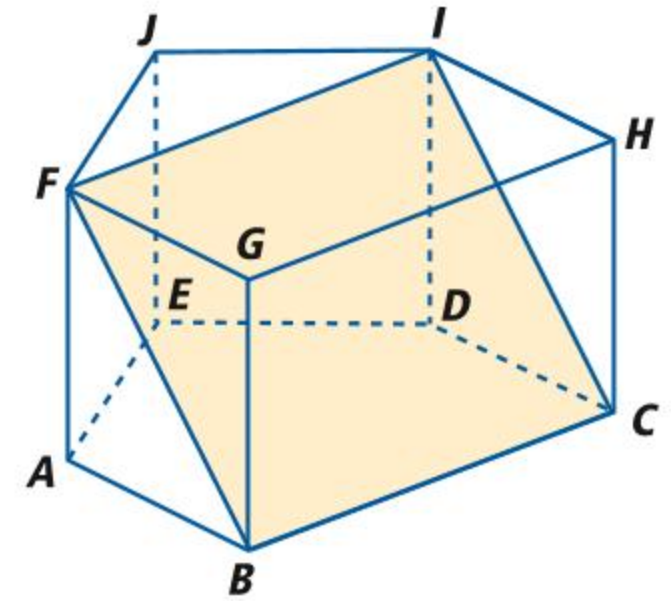

Theorie

Een vlak is vastgelegd door

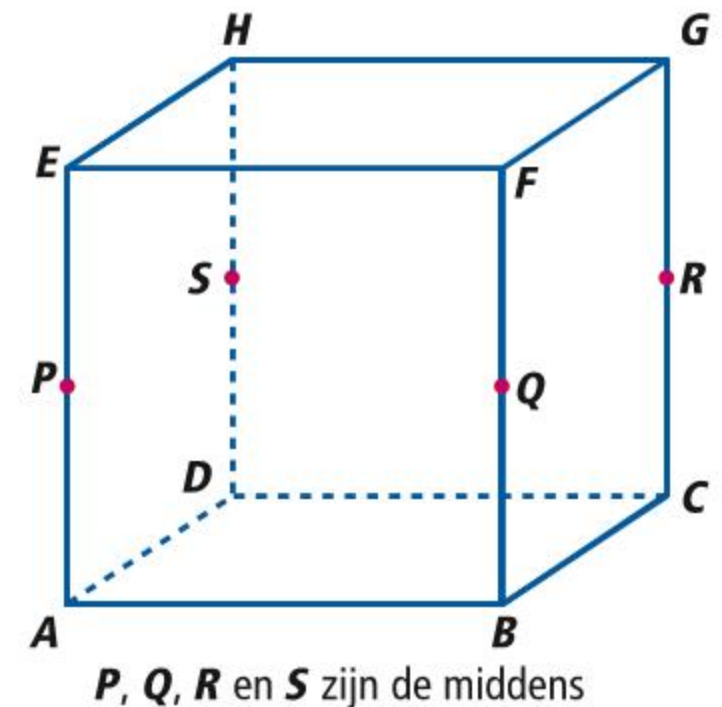
- > drie punten die niet op één lijn liggen;
- > een lijn en een punt dat niet op die lijn ligt;
- > twee snijdende lijnen;
- > twee evenwijdige lijnen.

Het vlak door de punten A , C en F noem je kortweg vlak ACF .

- 4 In het prisma $ABCDE.FGHIJ$ is het vlak door de punten B, C, I en F aangegeven.
Geef voorbeelden hoe je dit vlak kunt vastleggen door:
- drie punten die niet op één lijn liggen.
 - een lijn en een punt dat niet op die lijn ligt.
 - twee snijdende lijnen.
 - twee evenwijdige lijnen.
 - Voer de opdrachten ook uit voor het vlak door de punten C, H, J en E .



- 5 Twee vlakken kunnen evenwijdig zijn aan elkaar of elkaar snijden.
In dit vraagstuk denk je na over de onderlinge ligging van drie vlakken V, W en Z .
- Stel dat $V \parallel W$. Voor de ligging van Z ten opzichte van V en W zijn er twee mogelijkheden. Welke?
 - Kies voor V en W de vlakken $ABCD$ en $EFGH$ en geef van elke mogelijkheid uit opdracht a een voorbeeld met behulp van de kubus.
 - Stel dat V en W elkaar snijden. Noem de snijlijn l .
Een vlak Z , niet evenwijdig aan V of W , kan l snijden, l bevatten of evenwijdig zijn aan l .
Kies voor V en W de vlakken $ABCD$ en $AFGD$ en geef voor elk van de drie gevallen een voorbeeld met behulp van de kubus.

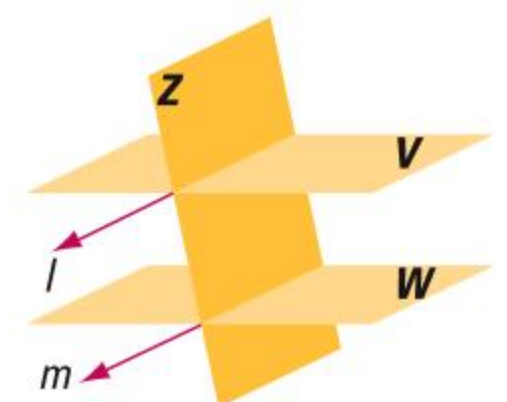


Theorie

Voor de **onderlinge ligging van drie vlakken** zijn er vijf mogelijkheden.

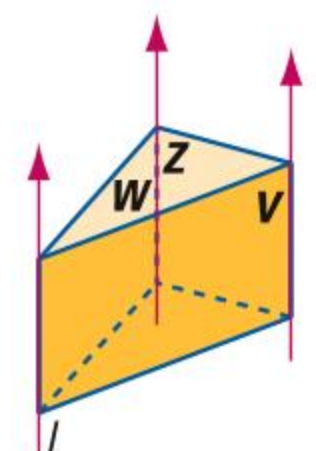
- > De drie vlakken zijn evenwijdig.
- > Twee vlakken zijn evenwijdig, het derde snijdt de andere twee.
- > Twee vlakken snijden elkaar; de snijlijn ligt in het derde vlak.
- > Twee vlakken snijden elkaar; het derde, niet evenwijdig aan een van de eerste twee vlakken, is evenwijdig aan de snijlijn.
- > Twee vlakken snijden elkaar; het derde snijdt de snijlijn: de drie vlakken gaan door één punt.

- 6 Als twee evenwijdige vlakken V en W gesneden worden door een derde vlak Z , dan zijn de snijlijnen l en m evenwijdig.



In opdracht a bewijs je deze bewering met een bewijs uit het *ongerijmde*: je veronderstelt, dat l en m elkaar wel snijden en komt dan tot een tegenspraak.

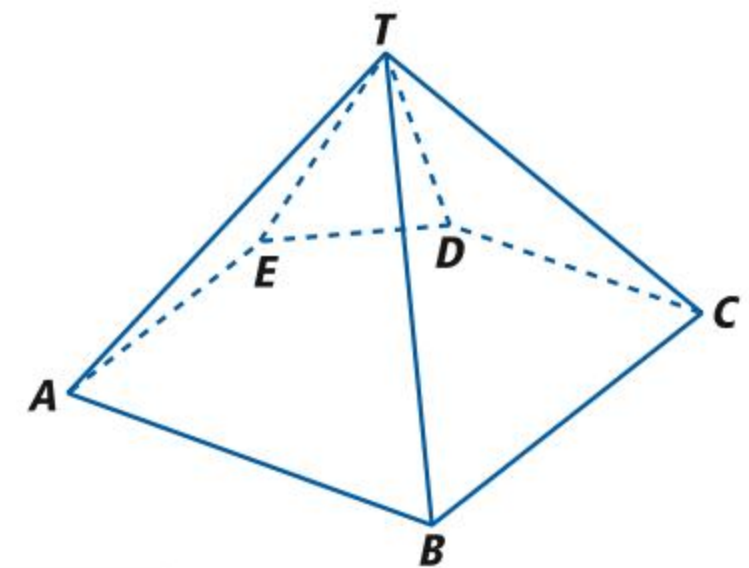
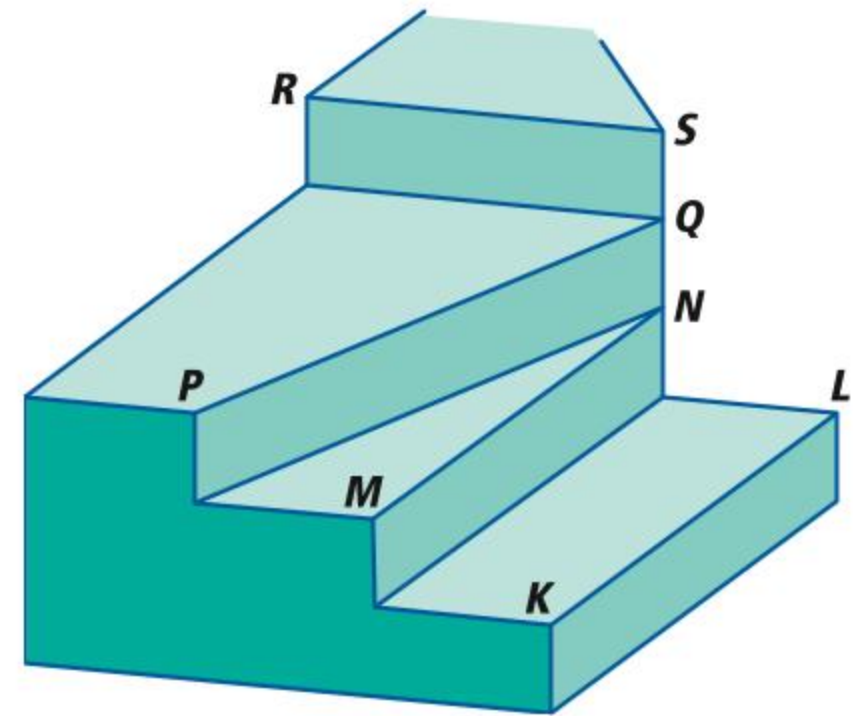
- Stel dat l en m elkaar snijden. In welke vlakken moet het snijpunt dan liggen? Waarom? En waarom kan dat niet? Wat is nu je conclusie?
 - Gegeven zijn twee snijdende vlakken V en W met snijlijn l . Vlak Z snijdt V en W en is evenwijdig aan l . Bewijs dat de drie snijlijnen evenwijdig zijn.
- 7a Waarom mag in mogelijkheid 4 van het theorievlak het derde vlak niet evenwijdig zijn aan één van de andere twee vlakken?
- In welke van de in het theorievlak genoemde gevallen hebben drie vlakken minstens een punt gemeenschappelijk?



4-2

Lijnen in de ruimte

- 8 In de trap hiernaast liggen de lijnen RS , PQ , MN en KL in verschillende horizontale vlakken.
- a Welke van deze lijnen zijn evenwijdig aan elkaar?
- b Noem drie tweetallen lijnen die niet evenwijdig zijn en elkaar ook niet snijden.
- c Is het mogelijk een plaat hout zonder te buigen te bevestigen in de punten K , L , M en N ? En in de punten P , Q , R en S ?
- 9a Teken een kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6.
Op ribbe AE ligt punt P met $AP = 2$.
- b Noem drie lijnen, elk door twee hoekpunten van de kubus, die een snijpunt hebben met de lijn CP .
- c Noem vier lijnen, elk door twee hoekpunten van de kubus, die niet evenwijdig zijn aan de lijn CP en deze ook niet snijden.
- d Waarom hebben de lijnen CP en EG een snijpunt?
- e Hebben de lijnen CP en HB een snijpunt? Leg je antwoord uit.
- 10 $T.ABCDE$ is een vijfzijdige piramide.
- a Hebben de lijnen BC en ED een snijpunt? Waarom?
- b Hebben de lijnen TB en CD een snijpunt?
- c In de tekening lijken de lijnen TB en DE elkaar te snijden. Is dit ook werkelijk zo? Verklaar je antwoord.



Theorie

Twee lijnen in de ruimte kunnen

- > in één vlak liggen: de lijnen **snijden** elkaar of zijn **evenwijdig**.
- > niet in één vlak liggen: dan zijn de lijnen niet snijdend en niet evenwijdig: de lijnen **kruisen** elkaar.

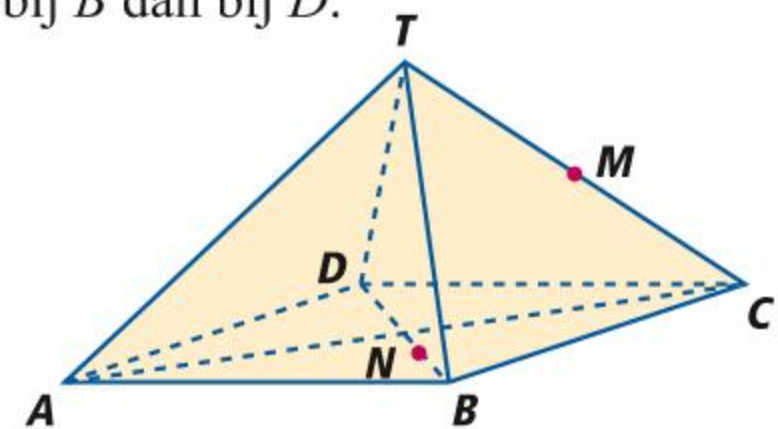
Voorbeeld

In de piramide $T.ABCD$ is $ABCD$ een vierkant en zijn de opstaande ribben even lang. Punt M ligt op TC en N op diagonaal BD . N ligt dichterbij B dan bij D . Kruisen of snijden de lijnen AM en TN elkaar?

Oplossing

De lijnen AM en TN snijden elkaar alleen als A , M , T en N in één vlak liggen.

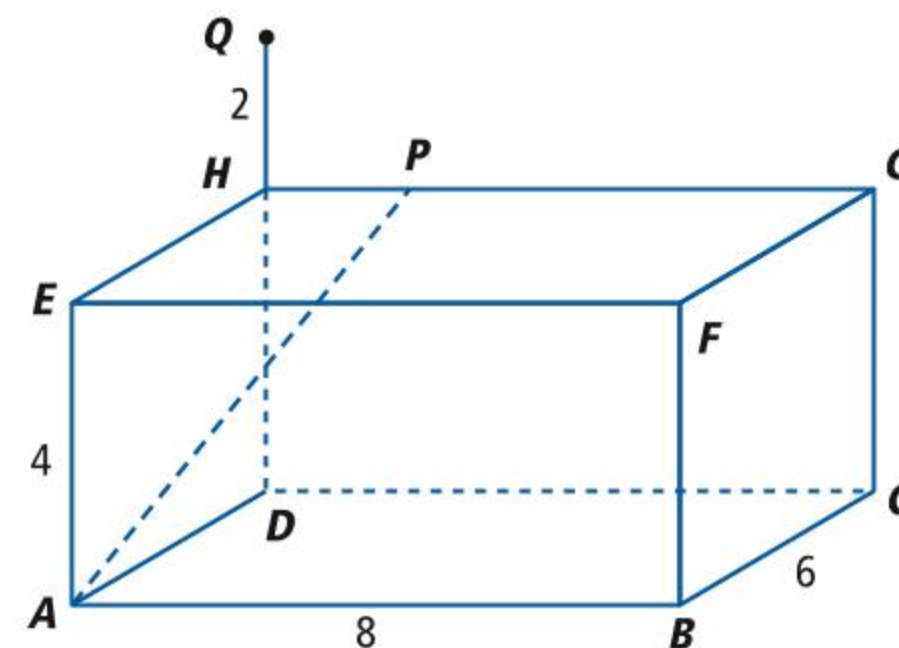
A , M en T liggen in vlak ATC en ze liggen niet op één lijn, dus het vlak ATC is het enige vlak waarin A , M en T liggen. Punt N ligt niet in dat vlak, dus AM en TN kruisen elkaar.



- 11** Bekijk het voorbeeld op de vorige bladzijde. Zeg van de volgende paren lijnen of ze elkaar snijden, kruisen of evenwijdig zijn. Licht steeds je antwoord toe.

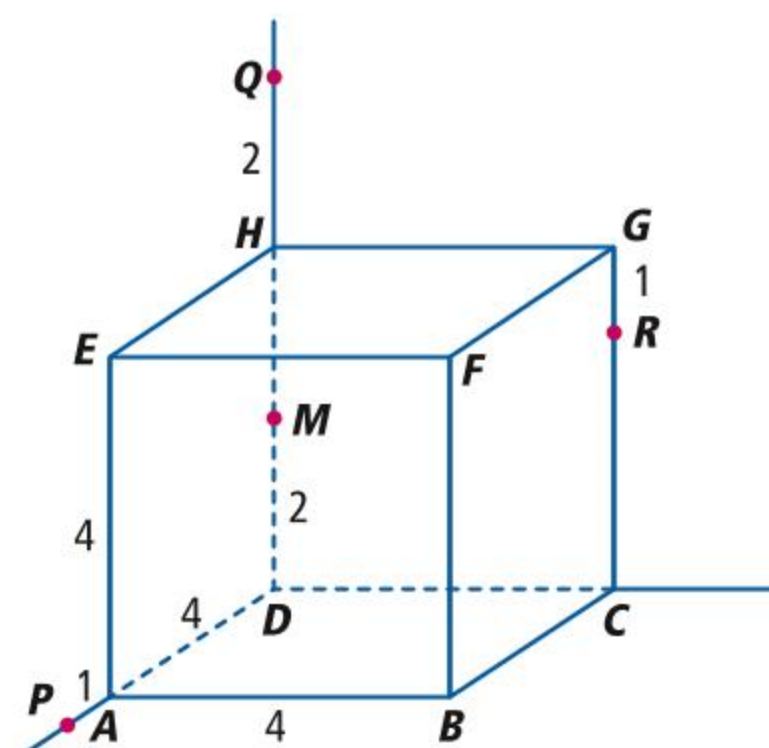
- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a BC en TN | d AT en CN |
| b BN en AC | e CN en AD |
| c BT en CM | f BM en DT |

- 12** Van balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 8$, $BC = 6$ en $AE = 4$. Op het verlengde van ribbe DH ligt punt Q met $HQ = 2$. Punt P ligt op ribbe GH . Kies eerst $HP = 2$.



- a** In de tekening lijken de lijnen AP en DH elkaar te snijden. Leg uit dat dat in werkelijkheid niet het geval is.
b Is er een vlak mogelijk door de lijnen PF en DB ?
c Lijn QP snijdt lijn DC in punt S . Bereken DS .
d Het punt P kan schuiven over de ribbe HG . Teken een vooraanzicht van de situatie waarin de lijnen EB en QP in één vlak liggen.
e Is het mogelijk P zo over lijn HG te verschuiven dat de lijnen AP en BQ elkaar snijden?

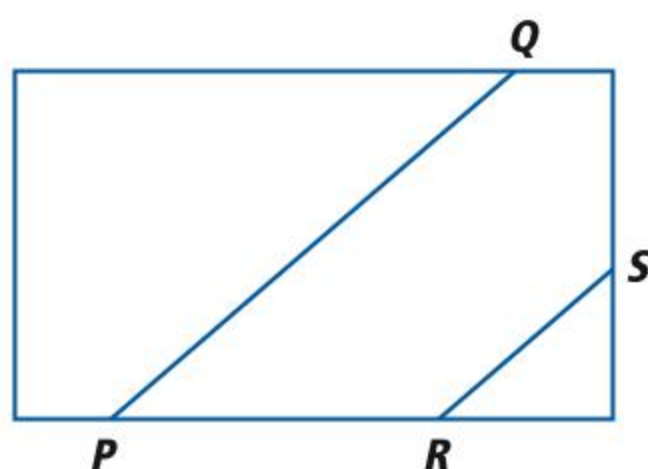
- 13** Kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribbe 4. Punt P ligt op lijn DA , Q en M liggen op lijn DH en R op ribbe CG . $DM = 2$, $HQ = 2$, $AP = 1$ en $GR = 1$.



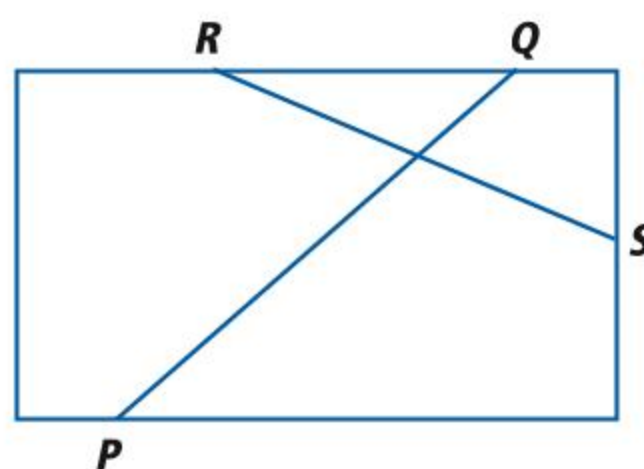
- a** Snijden of kruisen de lijnen PQ en EH elkaar? Leg uit.
b Dezelfde vraag voor de lijnen HG en PR .
c Ligt punt G in vlak PCE ? Verklaar je antwoord.
d Bereken QB .
e Leg uit waarom de lijnen EQ en AM evenwijdig zijn.

- 14** Hieronder staan drie bovenaanzichten van drie balken. P , Q , R en S liggen in de zijvlakken van de balk.

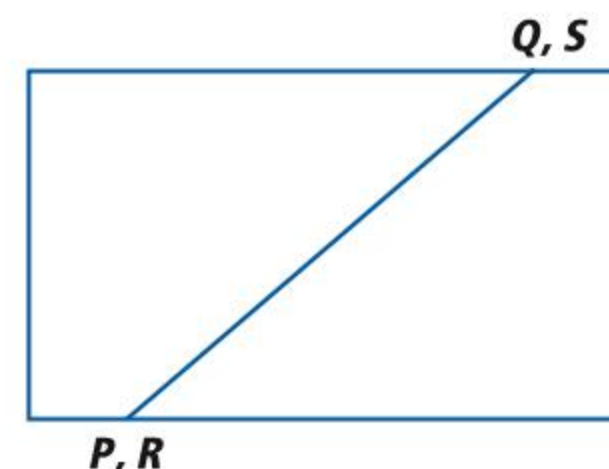
- a** Teken een balk met daarin twee lijnen zó dat je bovenaanzicht 1 krijgt. Zijn deze lijnen in jouw tekening evenwijdig, kruisend of snijdend?
b Onderzoek voor de tekeningen 2 en 3 of PQ en RS snijdende, kruisende of evenwijdige lijnen kunnen zijn.



1



2

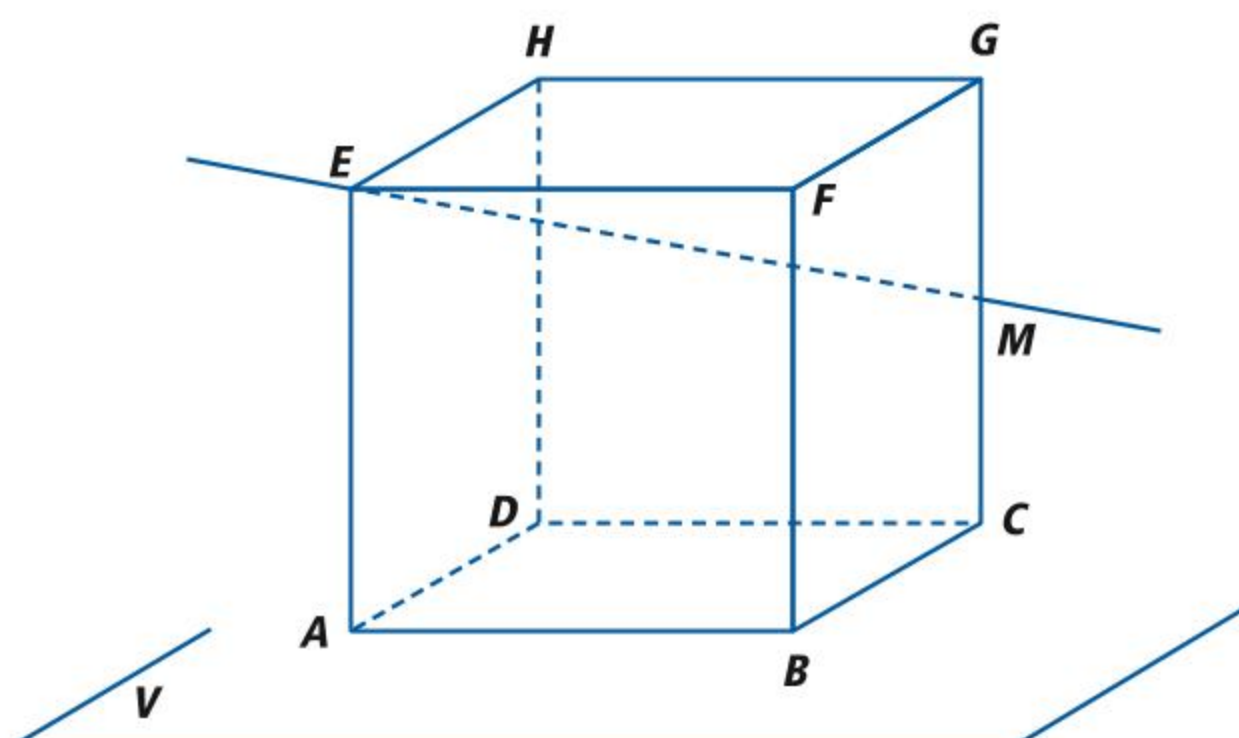


3

4-3

Lijnen en vlakken

- 15 Op vlak V staat kubus $ABCD.EFGH$. M is het midden van ribbe CG .
- Hoeveel punten heeft lijn EH gemeenschappelijk met vlak V ? En lijn EA ? En lijn EM ?
 - Noem nog twee lijnen door hoekpunten van de kubus die geen punt gemeenschappelijk hebben met V .
 - Wat kun je zeggen van lijnen die meer dan één punt gemeenschappelijk hebben met V ? Noem twee van zulke lijnen in de figuur.

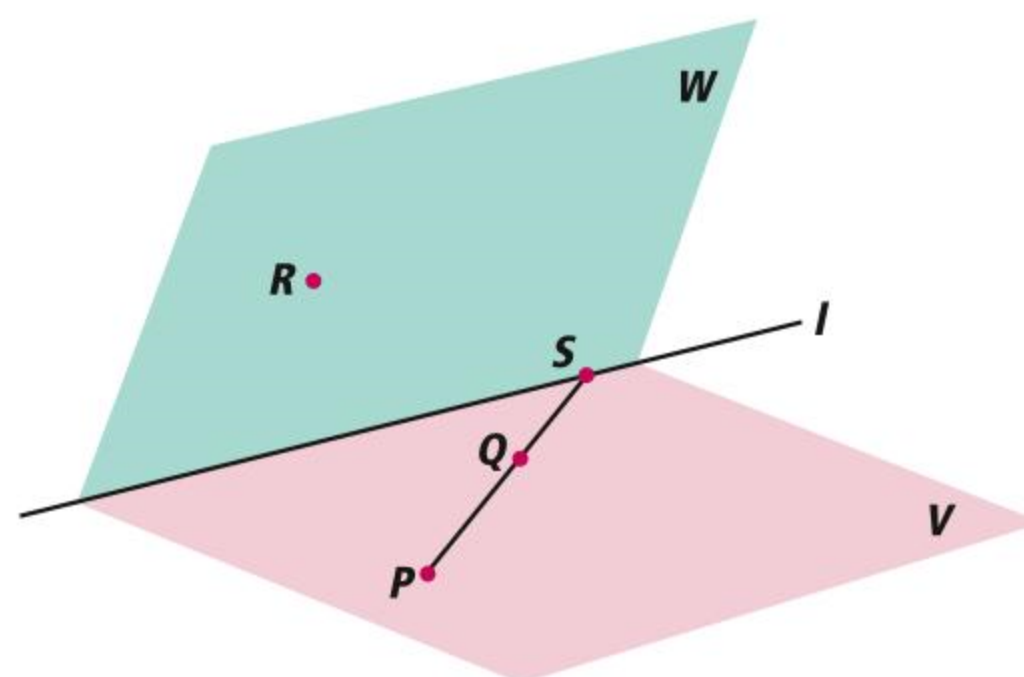


Theorie

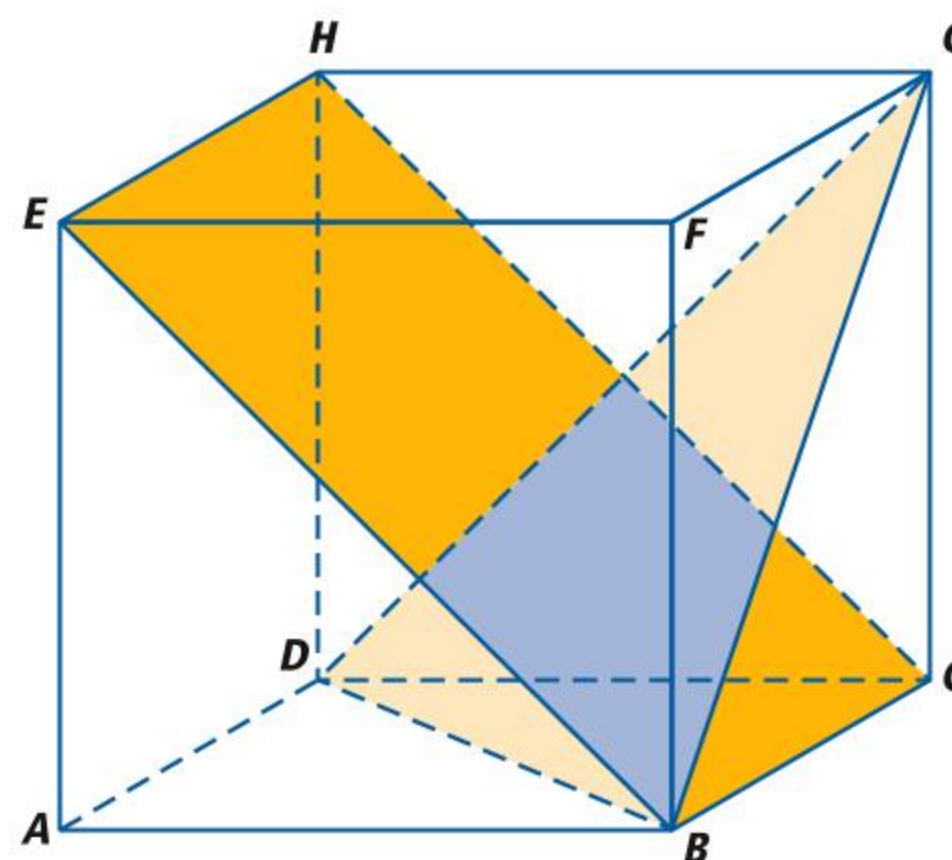
Een lijn l en een vlak V hebben

- > geen punt gemeenschappelijk: l is evenwijdig aan V .
- > één punt gemeenschappelijk: l snijdt V .
- > meer dan één punt gemeenschappelijk: l ligt in V .

- 16 Gegeven zijn twee snijdende vlakken V en W met snijlijn l . De punten P en Q liggen in V ; punt R ligt in W . Lijn PQ snijdt l in S . Beredeneer dat lijn SR de snijlijn is van vlak PQR en vlak W door antwoord te geven op de volgende vragen.
- Waarom ligt lijn SR in vlak W ?
 - Waarom ligt lijn SR in vlak PQR ?



- ✂ 17 In kubus $ABCD.EFGH$ zijn (delen van) de vlakken $BCHE$ en BGD gekleurd getekend.
- Snijden de lijnen DG en BE elkaar?
 - Leg uit waarom de lijnen DG en CH elkaar snijden.
 - Noem het snijpunt P . Waarom is P een gemeenschappelijk punt van de gekleurde vlakken?
 - Welk punt hebben de gekleurde vlakken nog meer gemeenschappelijk?
 - Welke lijn is de snijlijn van $BCHE$ en BGD ?
 - Teken ook de snijlijn van de vlakken $ACGE$ en $BFHD$.



- 18 Een lijn l is evenwijdig aan een vlak V . W is een vlak door l dat vlak V snijdt. Maak een schets van de situatie en beredeneer dat de snijlijn van V en W evenwijdig is aan l .

- 19 In een vlak V ligt een lijn l . Een lijn m die niet in V ligt, is evenwijdig aan l . Beredeneer dat m evenwijdig is aan V .

Je hebt in de opdrachten 18 en 19 de volgende eigenschappen bewezen.

- 1 Als een lijn l evenwijdig is aan een vlak V en W is een vlak door l dat V snijdt, dan is de snijlijn van V en W evenwijdig aan l .
- 2 Als een lijn m die niet in V ligt evenwijdig is aan een lijn l in V , dan is m evenwijdig aan V .

Theorie

De snijlijn van twee vlakken vind je

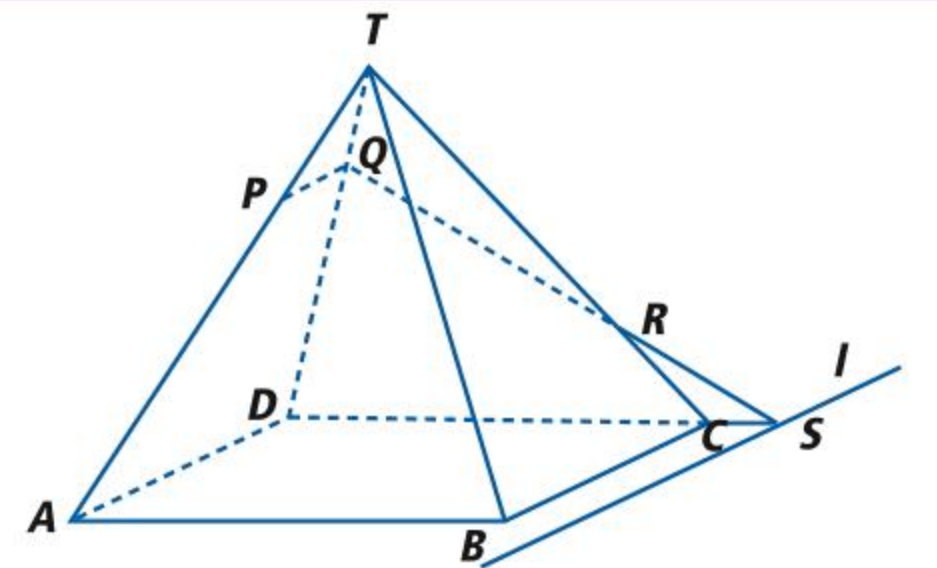
- > door twee gemeenschappelijke punten op te sporen;
- > gebruik te maken van evenwijdigheid.

Voorbeeld

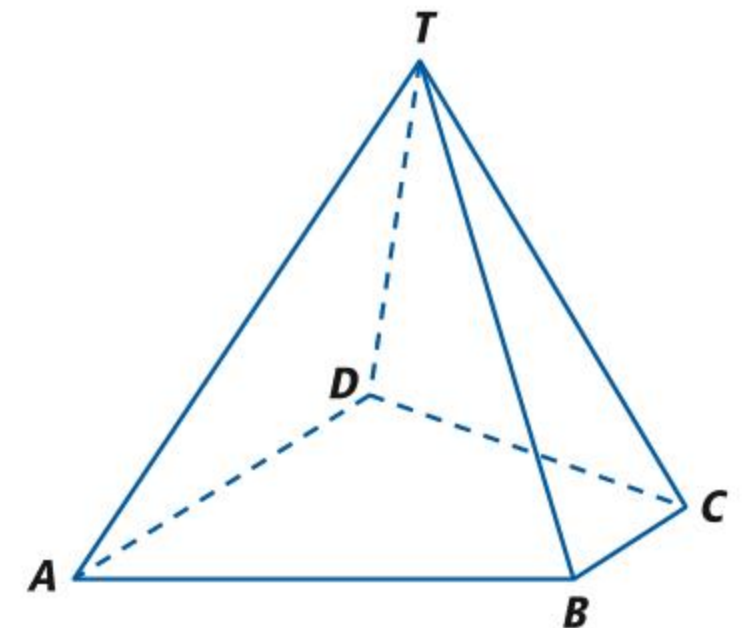
Het grondvlak van de piramide $T.ABCD$ is een parallellogram. P ligt op ribbe AT en Q op ribbe DT met $PQ \parallel AD$. R ligt op ribbe CT . Teken de snijlijn l van de vlakken PQR en $ABCD$.

Oplossing

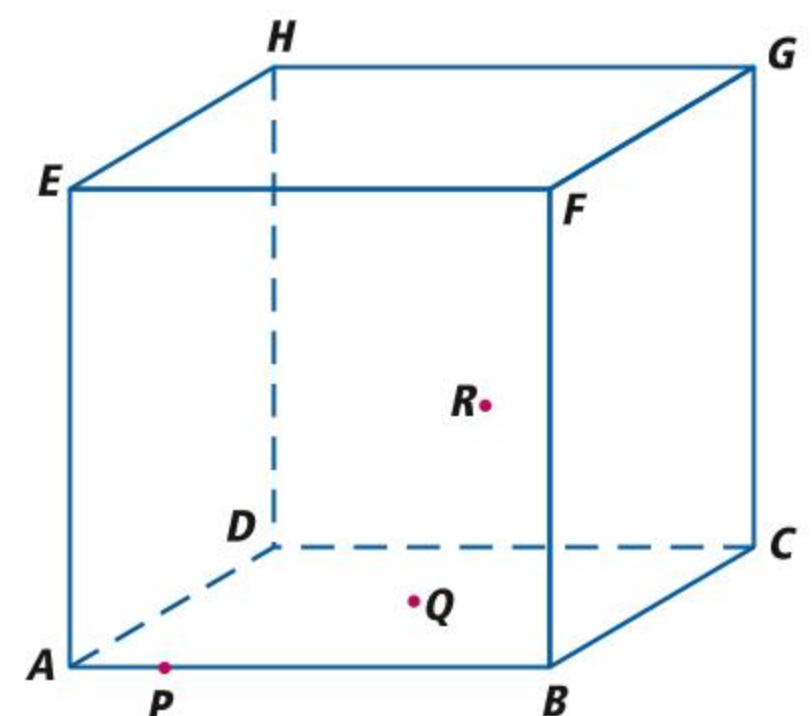
De lijnen QR en DC snijden elkaar in vlak DCT in S . Omdat $PQ \parallel AD$ is $PQ \parallel ABCD$. Dus ook $l \parallel PQ$. l is de lijn door S evenwijdig aan BC .



- ✂ 20 In piramide $T.ABCD$ is $BC \parallel AD$.
- a Teken de snijlijn van de vlakken TAC en TBD .
 - b In welk vlak ligt het snijpunt S van de lijnen AB en DC ?
 - c Teken S en de snijlijn van de vlakken TAB en TDC .
 - d De snijlijn l van de vlakken BCT en ADT gaat in elk geval door T . Beredeneer dat l evenwijdig is aan de lijnen AD en BC en teken l .



- ✂ 21 In de getekende kubus ligt punt P op ribbe AB ; Q ligt in het grondvlak en R in het achtervlak.
- a Teken de snijlijn l van vlak PQR met het grondvlak.
 - b De lijn PQ snijdt ribbe CD in S . Welke lijn is de snijlijn van vlak PQR met het achtervlak? Waarom? Teken deze lijn m .
 - c Teken ook de snijlijn n van vlak PQR met het linker zijvlak.
 - d n snijdt ribbe AE in punt U . Waarom is $UP \parallel m$?



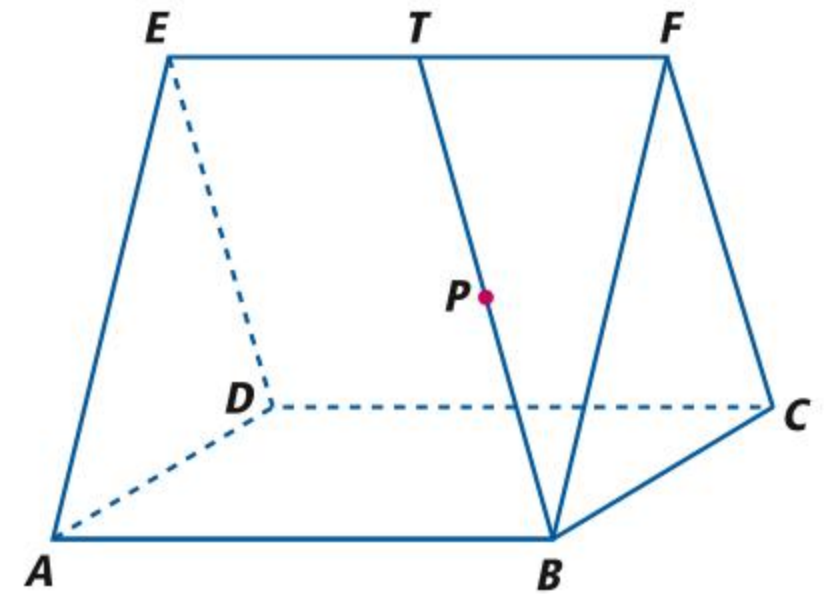
4-4

Snijpunten

- ✂ 22 Het prisma $ADE.BCF$ wordt begrensd door vierkanten en gelijkzijdige driehoeken. Punt T is het midden van ribbe EF en punt P is het midden van lijnstuk BT .

Je gaat op zoek naar het snijpunt van lijn DP met vlak ACT .

- Leg uit, waarom lijn DP in het vlak DBT ligt.
- Teken de snijlijn s van de vlakken ACT en BDT .
- Teken het snijpunt van lijn DP met vlak ACT .



Aanpak

Hoe vind je het snijpunt van een lijn l met een vlak V ?

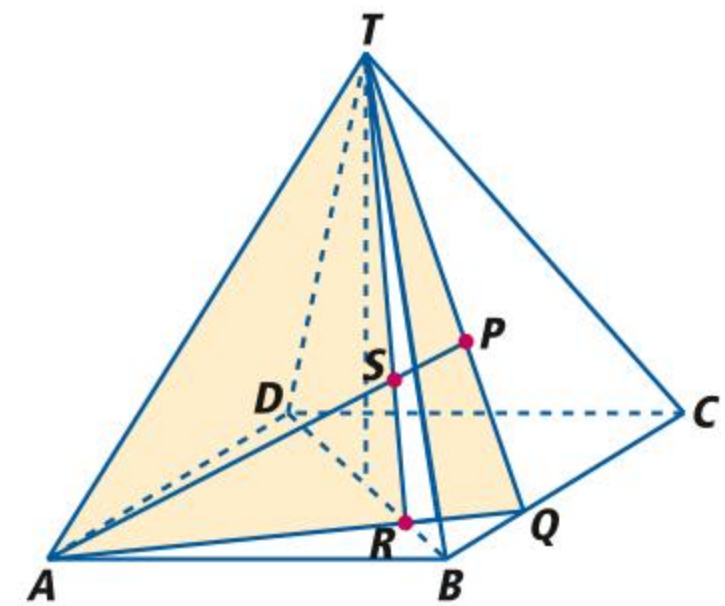
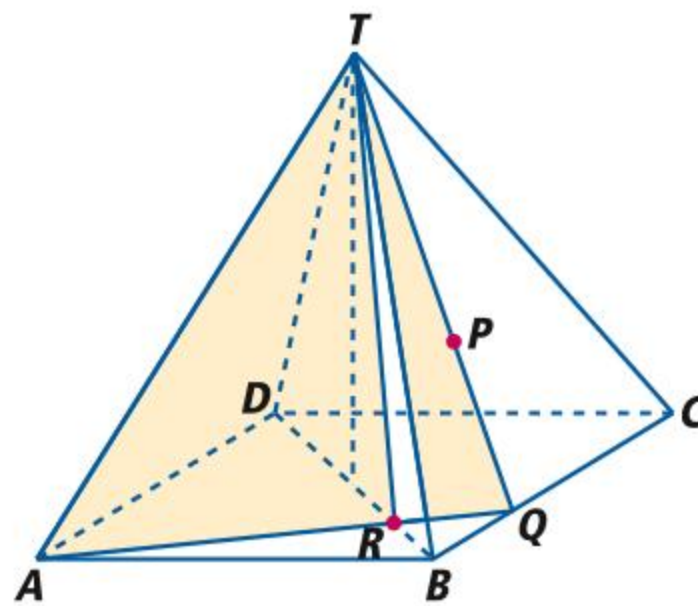
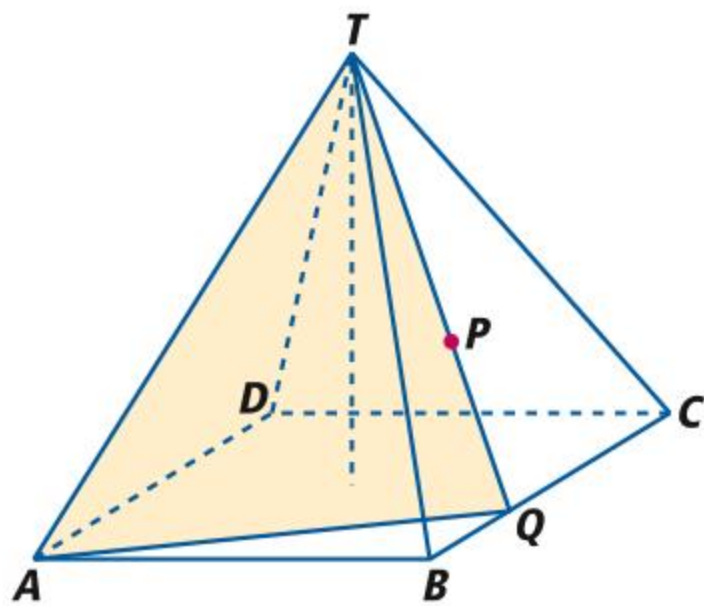
- 1 Zoek een hulpvlak H waar de lijn l in ligt.
- 2 Teken de snijlijn s van de vlakken H en V .
- 3 Teken het snijpunt van de lijnen l en s .
Dit is het gevraagde punt.

Voorbeeld

In de piramide $T.ABCD$ is P een punt in vlak BCT . Teken het snijpunt van AP met vlak BDT .

Oplossing

- 1 Als hulpvlak neem je het vlak door T , A en P . Je breidt dit vlak uit tot TQA door TP te snijden met BC .
- 2 Het snijpunt van QA met BD is R . R ligt zowel in BDT als in TQA . RT is de snijlijn van BDT en TQA .
- 3 Het snijpunt S van AP met RT is het snijpunt van AP met vlak BDT .

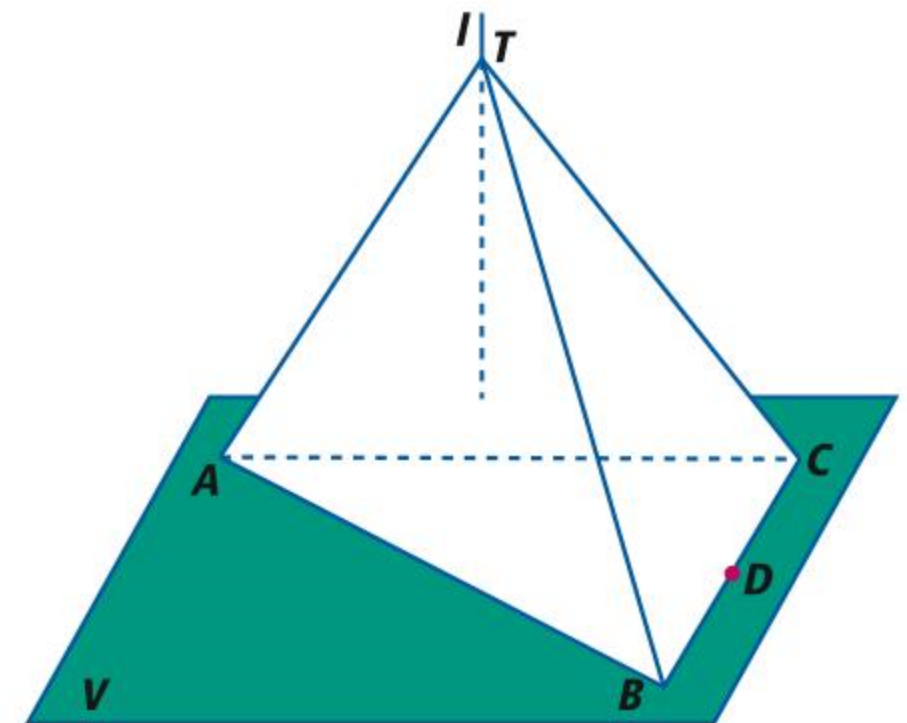


- ✂ 23 De punten P en Q zijn de middens van de ribben TA en TC van een regelmatige piramide $T.ABCD$.

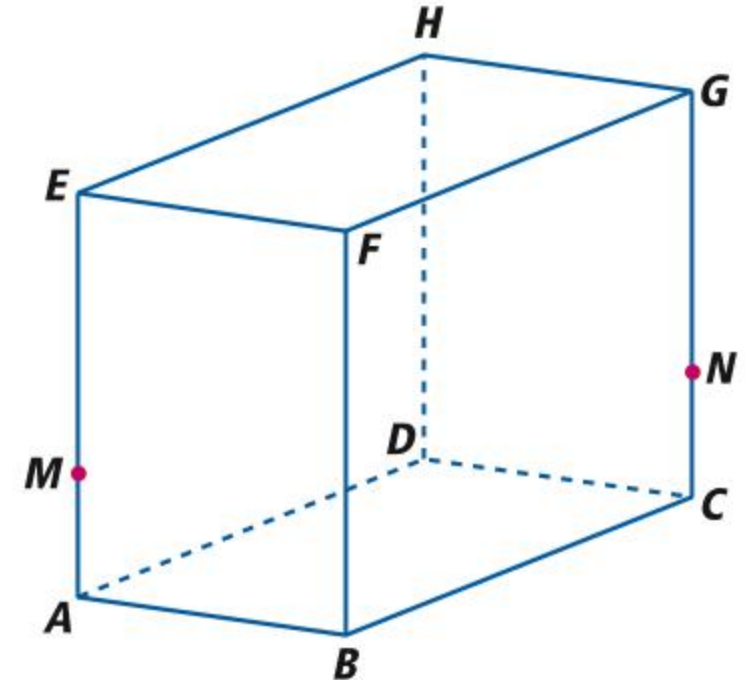
- Teken in de piramide het snijpunt van lijn PQ met vlak BDT . Welk hulpvlak en welke snijlijn kun je daarbij gebruiken?
- Waarom heeft lijn PQ geen snijpunt met vlak $ABCD$?

- ✂ 24 Kijk nog eens naar het prisma van opdracht 22.
- Teken het snijpunt van lijn EP met vlak $ABCD$.
 - Teken het snijpunt van lijn CP met vlak BFD .
- ✂ 25 $T.ABC$ is een driezijdige piramide. Het grondvlak ligt in vlak V . Door de top T loopt een lijn l . In de tekening is de richting van l niet duidelijk te zien.
- Teken het snijpunt van l en V als gegeven is dat l in vlak TAB ligt.
 - D is een punt op ribbe BC . Teken het snijpunt van l en V als gegeven is dat l in vlak TAD ligt.

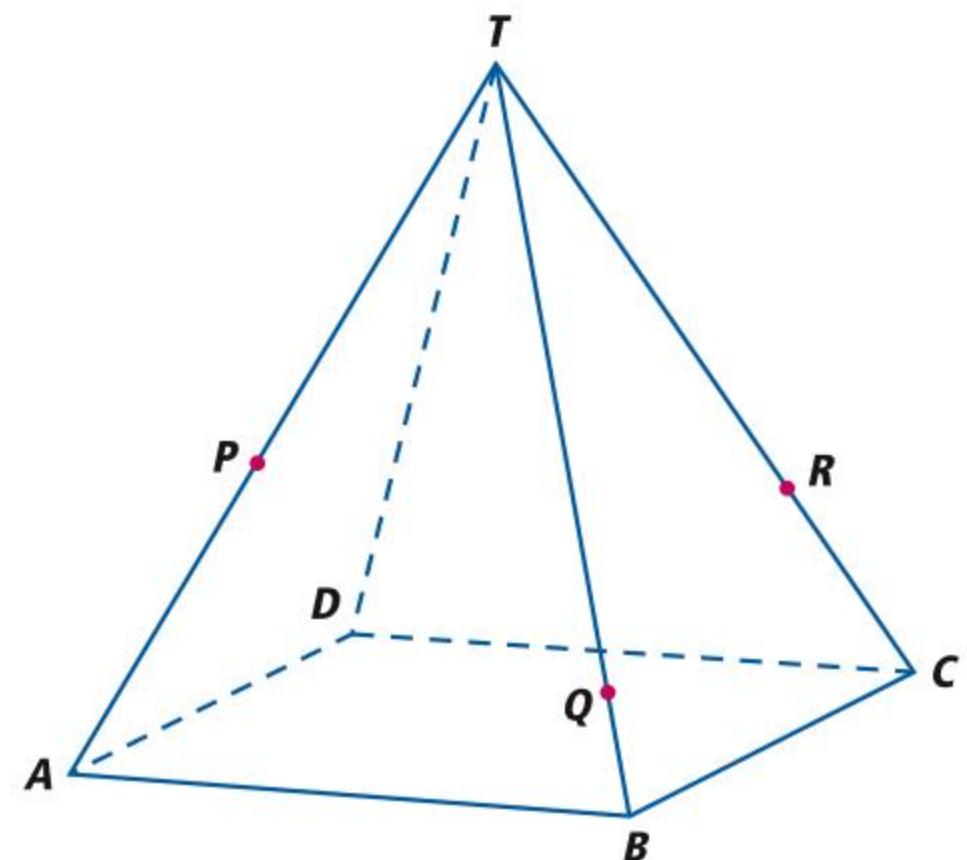
De exacte plaats van een punt in een ruimtelijke tekening is niet altijd duidelijk. Soms moet je hulplijnen tekenen om de exacte plaats aan te geven,



- 26 In een kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6 is M het midden van ribbe AE . Verder is N het midden van ribbe BF .
- Teken deze kubus.
 - P is het snijpunt van de lijn GN met het grondvlak $ABCD$. Teken P .
 - Teken ook het snijpunt Q van de lijn GM met $ABCD$.
 - Leg uit dat PQ de snijlijn is van de vlakken GMN en $ABCD$.
- ✂ 27 Op de balk $ABCD.EFGH$ ligt punt M op ribbe AE zo, dat $EM = 2 \cdot AM$. Op dezelfde hoogte ligt punt N op ribbe CG .
- Teken het snijpunt van lijn FM met het grondvlak.
 - Teken de snijlijn van vlak MFN met het grondvlak.



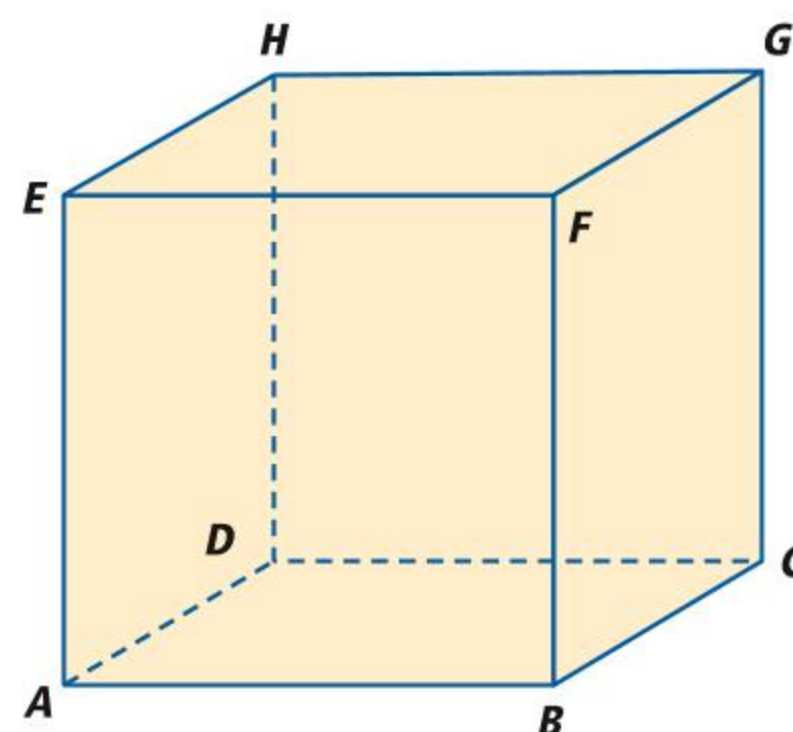
- ✂ 28 In de piramide $T.ABCD$ liggen de punten P , Q en R op de ribben AT , BT en CT .
- Teken de lijnstukken PQ en QR .
 - Teken het snijpunt van lijn PQ met het grondvlak $ABCD$. Teken ook het snijpunt van lijn QR met $ABCD$.
 - Teken de lijn door de twee snijpunten die je bij opdracht b hebt gevonden. Noem deze lijn l .
 - Verleng ribbe DC en gebruik lijn l om het snijpunt van vlak PQR met lijn DT te tekenen. Noem dit snijpunt S .
 - Leg uit waarom het snijpunt van de lijnen SP en DA op l ligt.



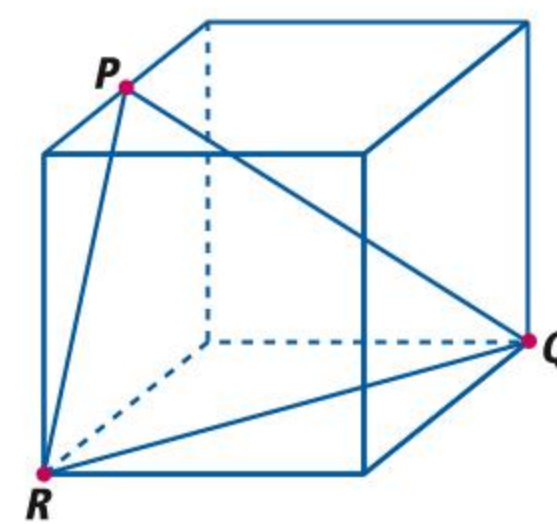
4-5

Doorsneden tekenen

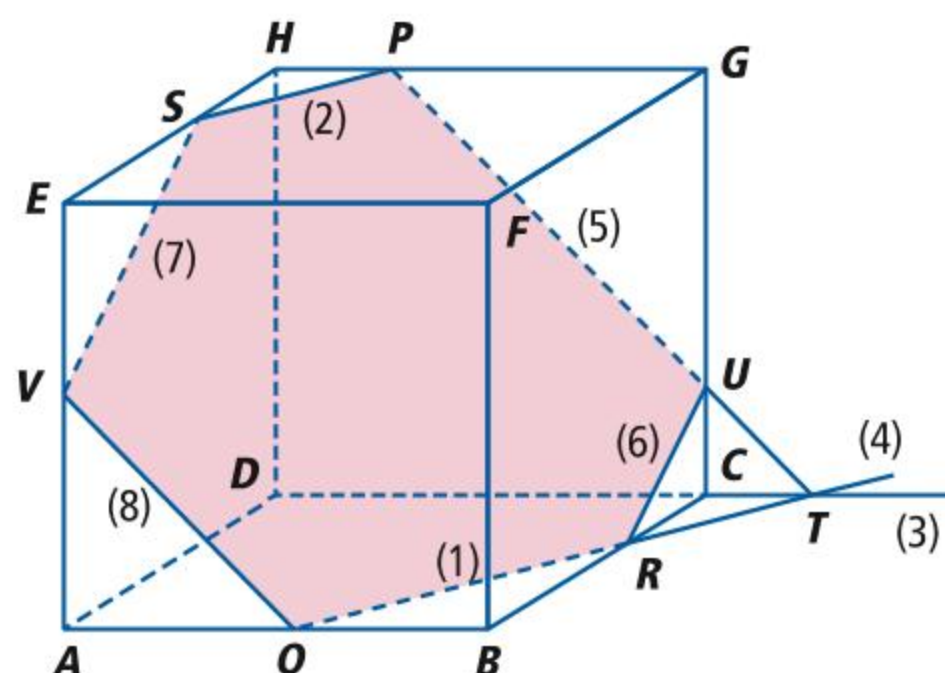
- ✂ 29 Een kubusvormig blokje kaas heeft ribben van 2 cm.
- a Je snijdt het blokje door langs het diagonaalvlak $ACGE$.
Teken de doorsnijdingsfiguur in de kubus.
Teken de doorsnijdingsfiguur ook op ware grootte.
- b Snijd van het blokje een hoek af langs vlak FAC .
Teken de doorsnijdingsfiguur in de kubus en op ware grootte.



- ✂ 30 Je snijdt de kubus hiernaast door langs het vlak door P , Q en R .
- a Hoe loopt de snijlijn met het bovenvlak?
- b Teken de doorsnijdingsfiguur in de kubus.



- 31 In de kubus liggen de punten P , Q en R op de ribben HG , AB en BC . In de figuur zie je hoe je de doorsnijdingsfiguur van de kubus met vlak PQR kunt tekenen. De volgorde van werken is met nummers aangegeven.
- a Welk lijnstuk is als eerste getekend?
- b Hoe is punt S gevonden?
- c Hoe is punt T gevonden? En punt U ?
Waarom liggen die punten in het snijvlak?
- d Verklaar de stappen 7 en 8.



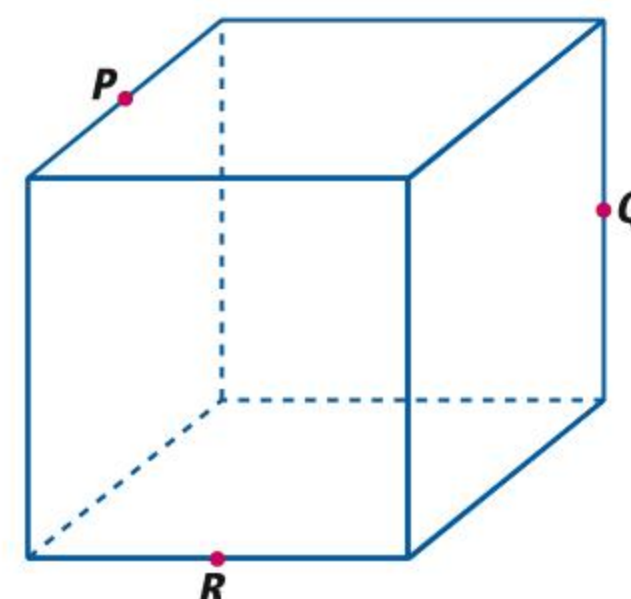
Theorie

Een ruimtefiguur wordt ook wel een **lichaam** genoemd. De doorsnijdingsfiguur van een vlak met een lichaam heet een **doorsnede**.

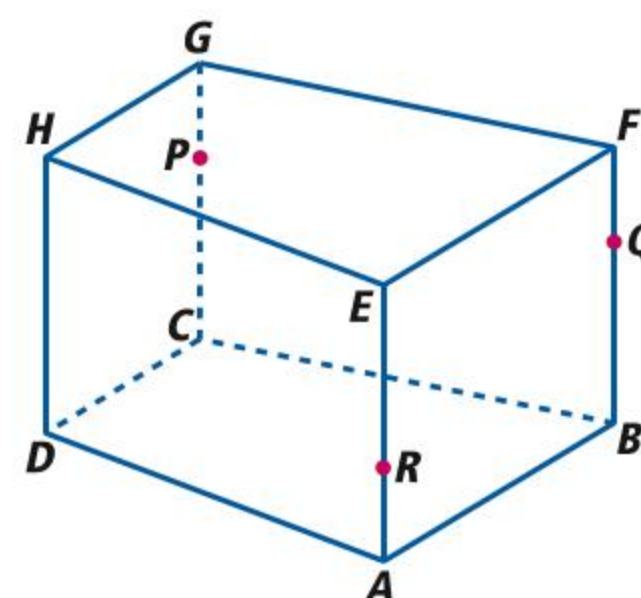
Bij het tekenen van een doorsnede gaat het erom de snijlijnen met de grensvlakken van het lichaam te vinden. Je kunt hierbij gebruik maken van:

- > evenwijdigheid: als twee evenwijdige vlakken door een derde vlak worden gesneden, zijn de snijlijnen evenwijdig.
- > snijpunten in een grensvlak: door ribben en lijnstukken te verlengen kun je snijpunten in een grensvlak vinden. Vaak zoek je eerst de snijlijn met het grondvlak, de grondlijn.
- > Geef met nummers de volgorde van werken aan.

- 32** Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven dat $AB = 7$, $AD = 5$ en $AE = 4$. Punt P is het midden van ribbe BF en punt Q het midden van ribbe AD .
- Teken deze balk.
 - Teken de doorsnede van vlak GPQ met de balk. Geef daarbij de volgorde van werken aan.



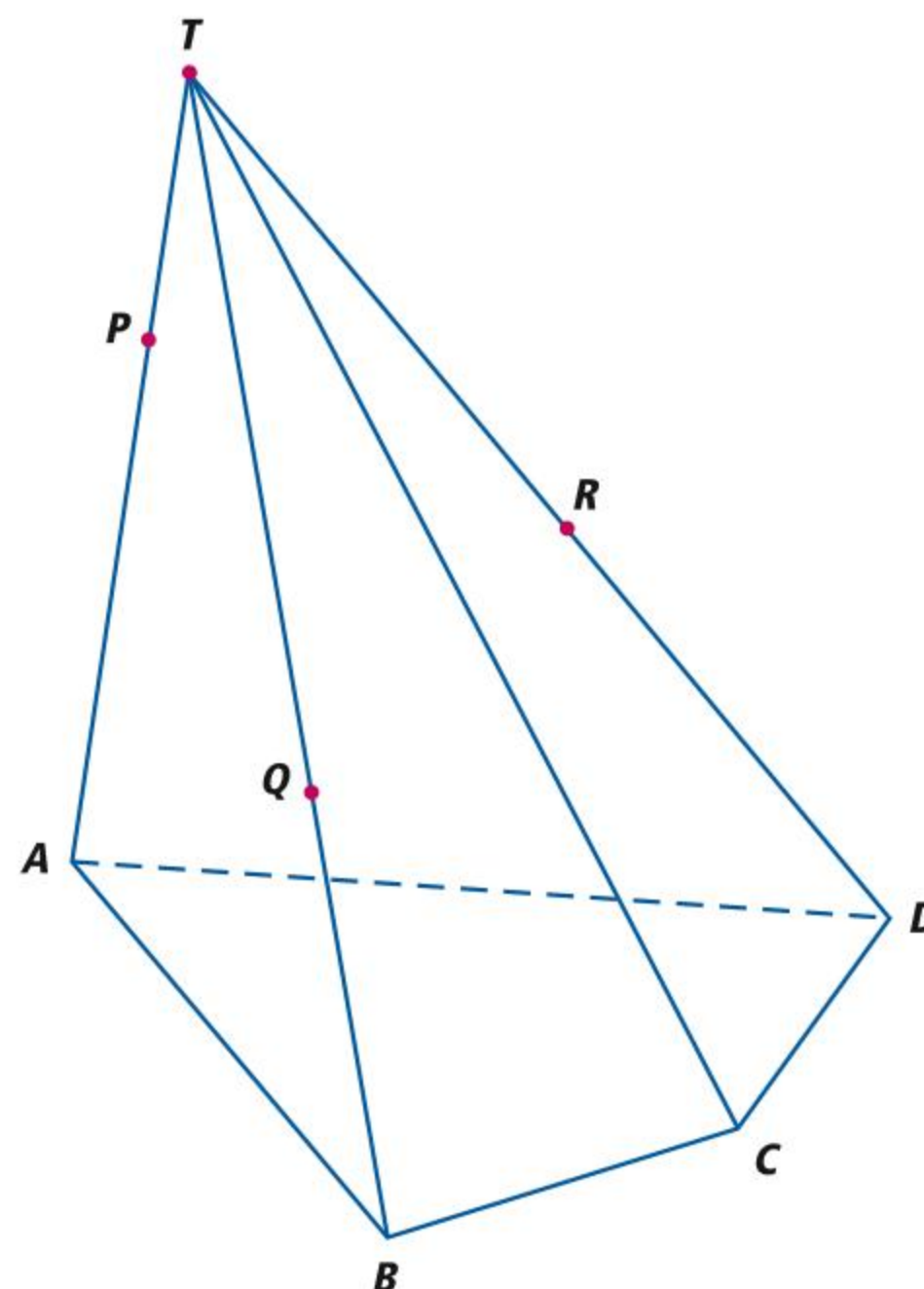
- 33** Bij de kubus in de figuur hiernaast wordt de doorsnede van de kubus met het vlak door P , Q en R gevraagd. Je kunt nu niet direct gebruik maken van evenwijdigheid van vlakken.
- Teken een verticaal vlak door de punten P en Q en teken in dit vlak het snijpunt X van de lijn PQ met het grondvlak.
 - Waarom kun je nu de snijlijn van vlak PQR met het grondvlak tekenen? Teken deze snijlijn.
 - De zojuist getekende snijlijn snijdt de ribbe rechtsonder in een punt Y .
Waarom is QY een deel van de gevraagde doorsnede?
 - Maak nu de doorsnede af. Gebruik daarbij evenwijdigheid en geef aan in welke volgorde je werkt.



- 34** Hiernaast zie je het prisma $ABCD.EFGH$. In dit prisma is $PQ \parallel BC$. Je gaat de doorsnede van vlak PQR met het prisma tekenen.
- Teken het snijpunt van lijn QR met het grondvlak.
 - Waarom loopt de snijlijn van vlak PQR met het grondvlak evenwijdig aan ribbe BC ?
 - Teken deze snijlijn en maak de doorsnede af. Geef aan in welke volgorde je werkt.

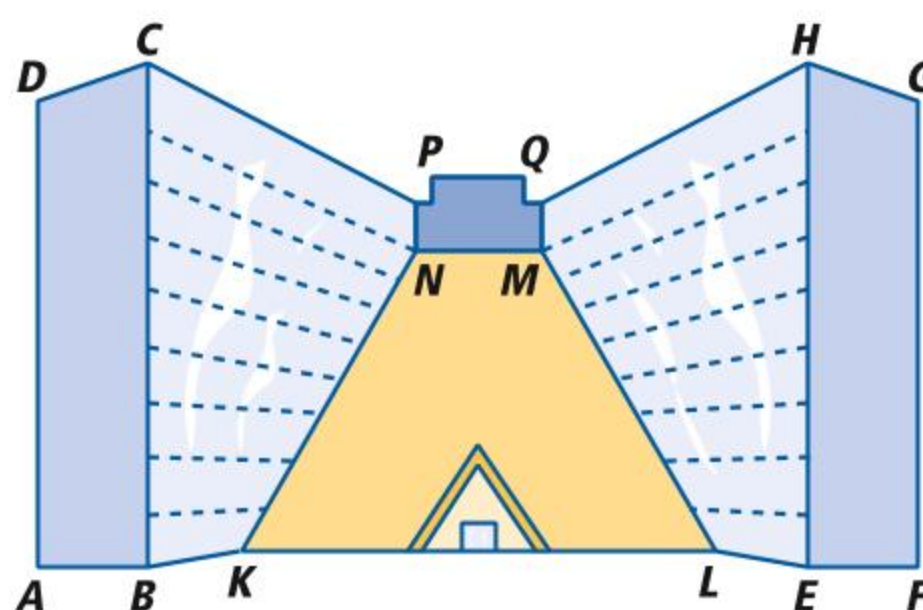
- 35** Gegeven is de piramide $T.ABCD$ met op de ribben TA , TB en TD de punten P , Q en R .
- Teken de snijpunten van de lijnen PQ en PR met het grondvlak.
 - Teken de snijlijn van vlak PQR met het grondvlak.
 - Teken de doorsnede van vlak PQR met de piramide.

- 36** Je kunt de doorsnede van de vorige opdracht ook 'inwendig' construeren.
- Teken de snijlijn l van de vlakken TBD en TAC .
 - Waarom snijden de lijnen QR en l elkaar?
Teken het snijpunt S .
 - Hoe vind je nu het snijpunt van ribbe TC en vlak PQR ?
 - Teken de doorsnede van vlak PQR met de piramide.



4-6

Gemengde opdrachten



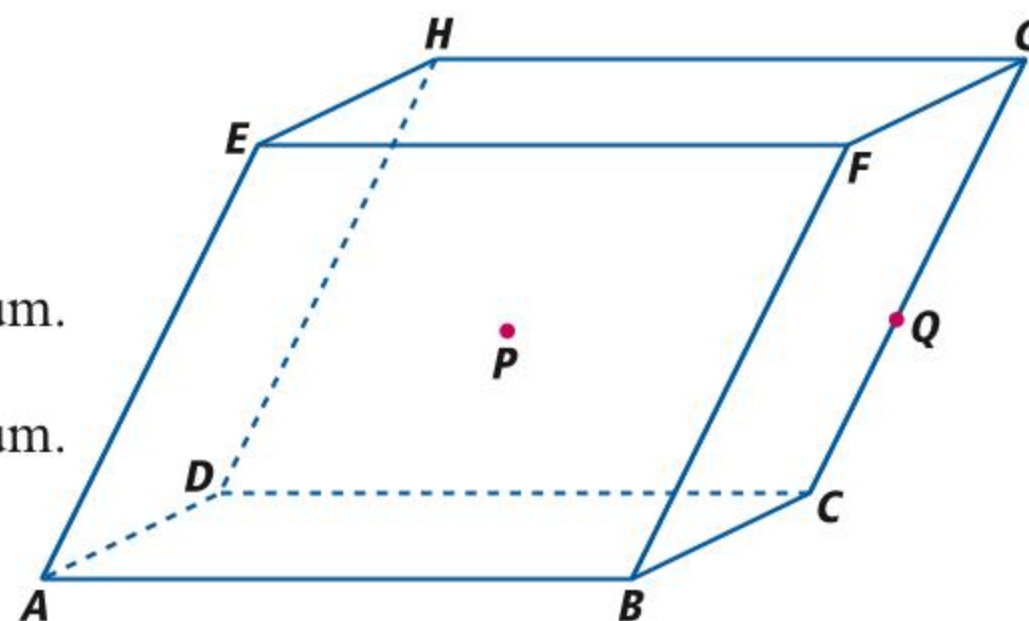
- 37** Je ziet hier een schets van het Meerwold-gebouw in Groningen. Het gebouw bestaat uit twee rechthoekige blokken, die loodrecht op elkaar staan. Ertussen is een groot schuin aflopend glazen vlak aangebracht, waarin zich de hoofdingang bevindt.

- Schets een bovenaanzicht van het Meerwold-gebouw.
- Welke lijnen zijn evenwijdig aan AB ?
- Snijden de lijnen AB en EF elkaar? Waarom?
- Ligt het punt N in het vlak door EH en punt K ?
- Snijden of kruisen de lijnen KN en EH elkaar? Waarom?
- Hoe liggen de lijnen KN en LM ten opzichte van elkaar?

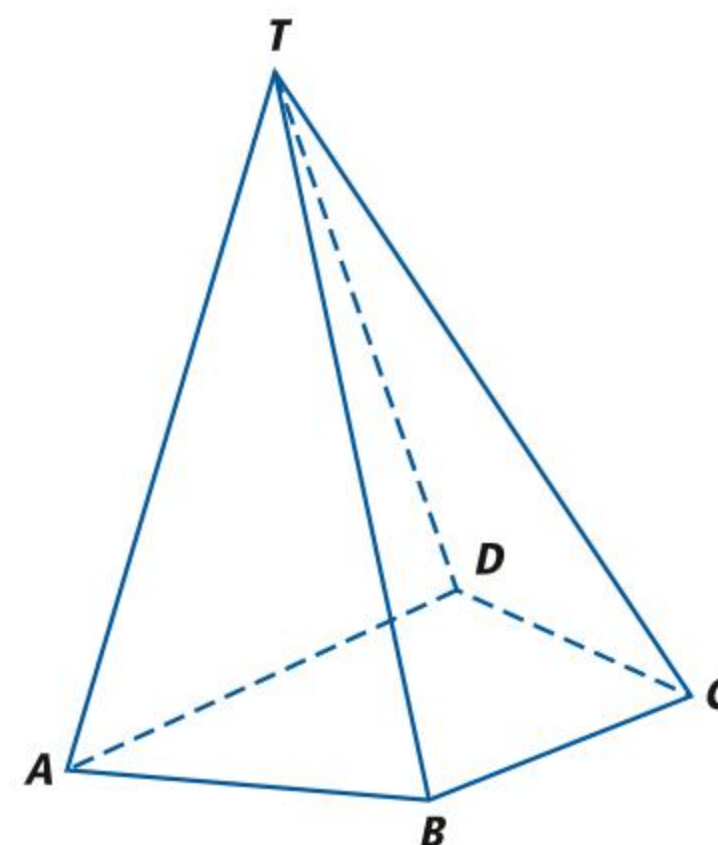
- 38** In het scheve prisma $ABCD.EFGH$ zijn alle zijvlakken parallellogrammen. Zo'n prisma wordt ook wel een *parallelepipedum* genoemd.

Punt P ligt in vlak ABF en Q ligt op ribbe CG .

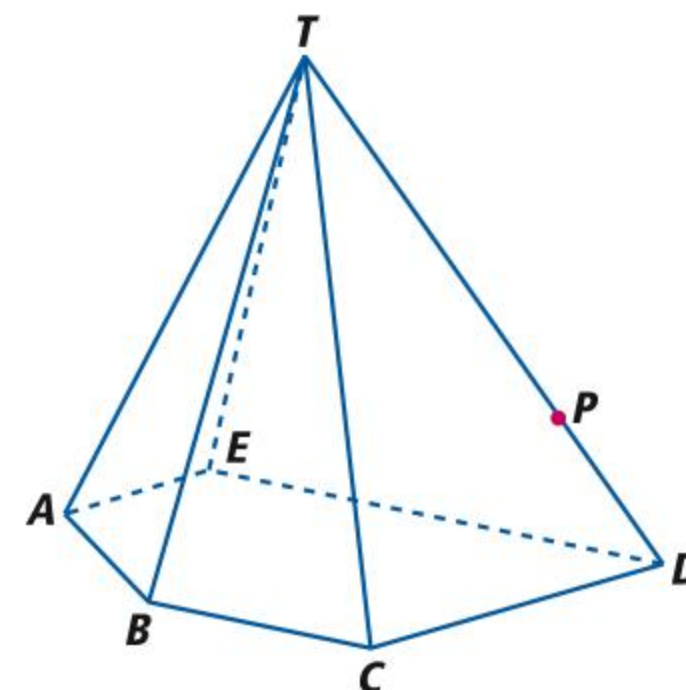
- Teken de doorsnede van vlak HPD met het parallellepipedum.
- Teken het snijpunt van de lijn DP met het vlak $ACGE$.
- Teken de doorsnede van vlak HPQ met het parallellepipedum. Geef hierbij de volgorde van werken aan.
- Teken het snijpunt van de lijn AG met vlak HPQ .



- 39** Gegeven is een piramide $T.ABCD$. De snijlijn l van de vlakken TAB en TCD snijdt het grondvlak in E . Op de lijn TE ligt een punt F zo, dat $TF = \frac{1}{4} \cdot TE$. Construeer de doorsnede van het vlak FAD met de piramide.



40 Van een piramide $T.ABCDE$ is gegeven dat AE evenwijdig is aan CD . Punt P ligt op TD . Het vlak door de punten A , E en P noem je V .



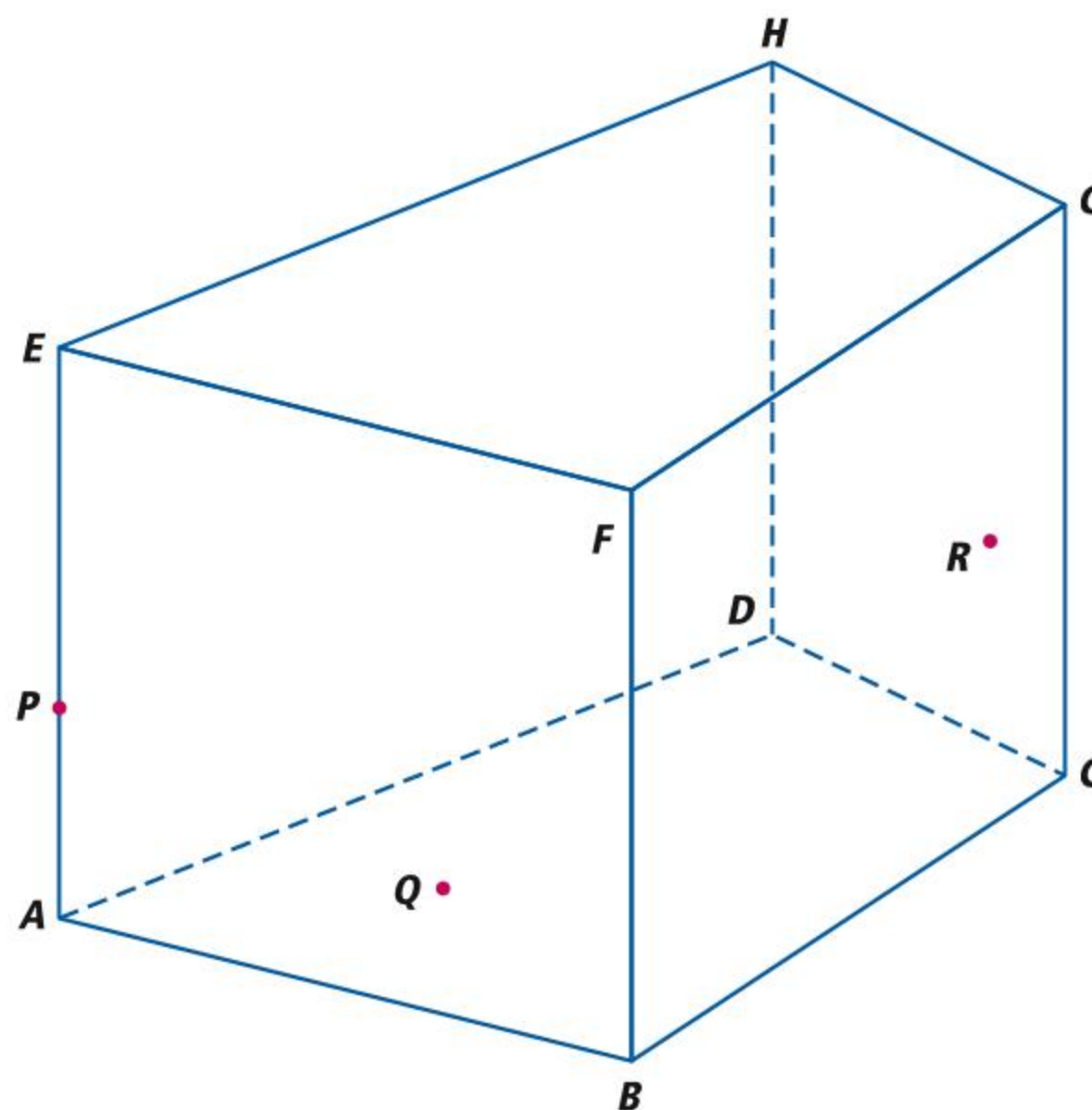
- Wat kun je zeggen over de onderlinge ligging van de volgende drie vlakken: vlak V , vlak ADE en vlak TCD ?
- Teken de snijlijn van V met vlak TCD .
- Welke lijn is de snijlijn van V met het grondvlak?
- Welke ribbe moet je verlengen om de doorsnede van V met de piramide te kunnen tekenen?
- Maak de doorsnede af. Geef aan in welke volgorde je werkt.

41 Als je een regelmatige vierzijdige piramide met een vlak V doorsnijdt kun je verschillende figuren als doorsnede krijgen.

- Wat weet je van V als de doorsnede een vierkant is?
- Teken een situatie waarbij de doorsnede een gelijkbenige driehoek is.
- Kun je als doorsnede ook een gelijkzijdige driehoek krijgen? Zo ja, geef daarvan een voorbeeld.
- Onderzoek of een vijfhoekige of een zeshoekige doorsnede ook mogelijk is.
- Beantwoord de opdrachten a tot en met d voor het geval je een kubus met een vlak V doorsnijdt.

42 Op het vierzijdige prisma $ABCD.EFGH$ liggen de punten P , Q en R . P ligt op ribbe AE , Q in vlak ABF en R in vlak BCG .

- Teken de doorsnede van vlak PQR met het prisma.
- Teken in vlak $ADHE$ een punt X met de volgende eigenschappen:
 - X ligt in vlak PQR ;
 - de lijn RX is evenwijdig aan het grondvlak.



Samenvatting

Vlakken in de ruimte

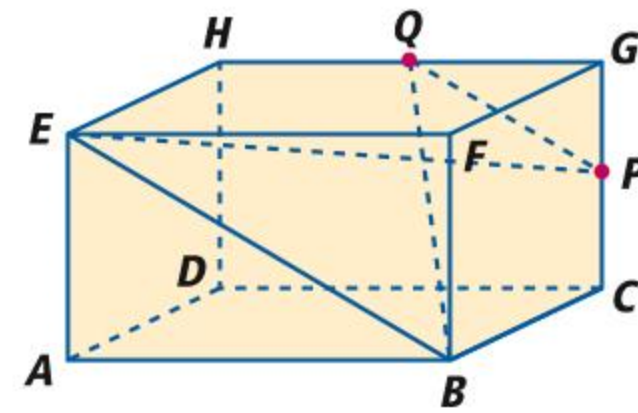
Een vlak kun je benoemen door drie punten die in dat vlak liggen. Een vlak is vastgelegd door:

- > drie punten die niet op één lijn liggen;
- > een lijn en een punt dat niet op die lijn ligt;
- > twee snijdende lijnen;
- > twee evenwijdige lijnen.

Onderlinge ligging van drie vlakken

Er zijn er vijf mogelijkheden waarop drie vlakken ten opzichte van elkaar kunnen liggen:

- > de drie vlakken zijn evenwijdig.
- > twee vlakken zijn evenwijdig, de derde snijdt de andere twee.
- > twee vlakken snijden elkaar; het derde gaat door de snijlijn.
- > twee vlakken snijden elkaar; het derde, niet evenwijdig aan een van de eerste twee vlakken, is evenwijdig aan de snijlijn.
- > twee vlakken snijden elkaar; het derde snijdt de snijlijn: de drie vlakken gaan door één punt.



In de balk $ABCD, EFGH$ zijn P en Q de middens van CG en GH . Omdat BE en PQ evenwijdig zijn, is $BPQE$ een vlak. BQ en EP zijn lijnen in dat vlak die niet evenwijdig zijn, dus snijden ze elkaar.

Lijnen in de ruimte

Twee lijnen in de ruimte kunnen

- > in één vlak liggen: de lijnen snijden elkaar of zijn evenwijdig.
- > niet in één vlak liggen: de lijnen kruisen elkaar.

Je kunt de onderlinge ligging van twee lijnen vaststellen

Onderzoek of er een vlak is waarin de twee lijnen liggen, dan kunnen de lijnen elkaar snijden of evenwijdig zijn. Als de lijnen niet in één vlak liggen, kruisen ze elkaar.

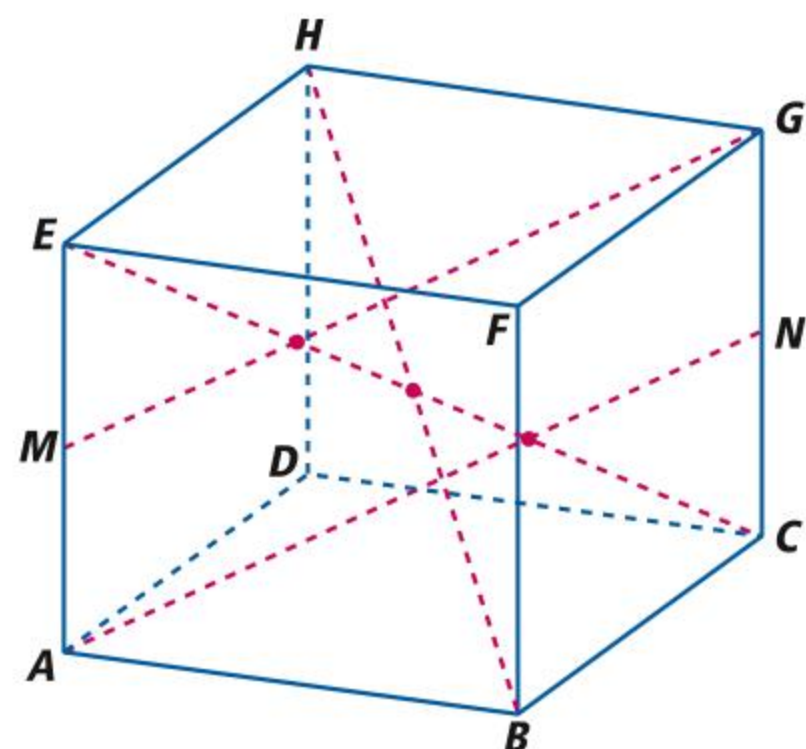
Voorbeeld

In een kubus zijn M en N de middens van AE en CG . Wat is de onderlinge ligging van:

- MG en AN ,
- MG en EC ,
- MG en HB ?

Oplossing

- Omdat AM en NG even lang en evenwijdig zijn, is $ANGM$ een parallellogram. Dus zijn MG en AN evenwijdig.
- MG en EC liggen beide in vlak $ACGE$, deze snijden elkaar.
- B, G en H liggen in vlak $ABGH$. M ligt niet in dit vlak, dus snijdt MG de lijn EB niet. MG en EB zijn kruisende lijnen.



Je kunt de snijlijn van twee vlakken construeren

De snijlijn van twee vlakken vind je door twee gemeenschappelijke punten op te sporen of door gebruik te maken van evenwijdigheid.

Je kunt daarbij gebruik maken van de volgende stellingen.

- Als een lijn l evenwijdig is aan een vlak V , is de snijlijn van V met ieder vlak door l evenwijdig aan l
- Als een lijn m die niet in een vlak V ligt, evenwijdig is aan een lijn l in V , dan is m evenwijdig aan V .

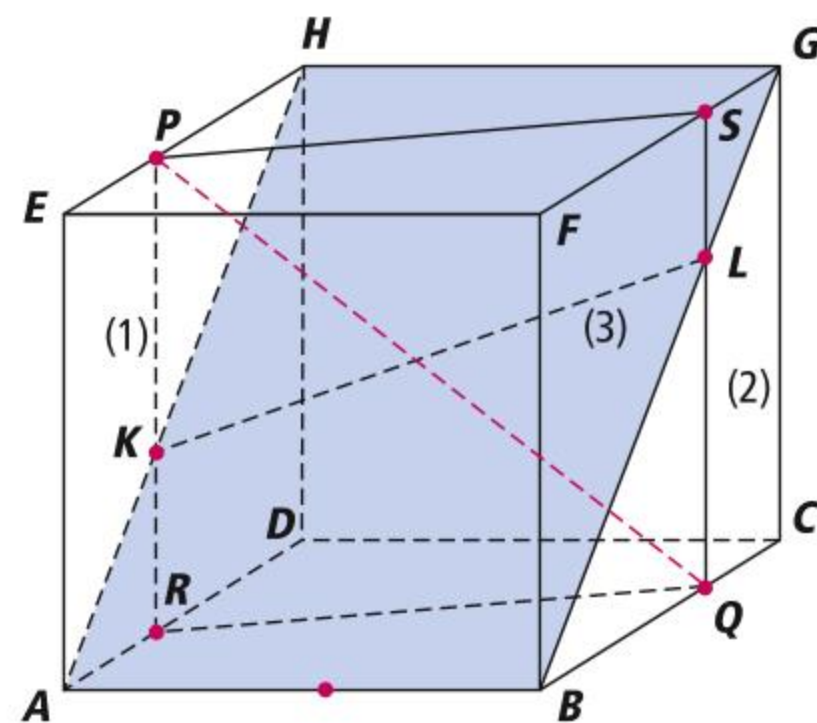
Je kunt het snijpunt van een lijn l met een vlak V construeren

- > Breng een hulpvlak H aan door l .
- > Bepaal de snijlijn s van V en H .
- > Het snijpunt van l en s is het gevraagde punt.

Voorbeeld

In kubus $ABCD.EFGH$ ligt punt P op ribbe EH en Q op ribbe BC . Construeer het snijpunt van lijn PQ met vlak $ABGH$.

- > Breng een hulpvlak aan door de lijn PQ : trek lijnen door P en Q die evenwijdig zijn aan ribbe AE . Deze snijden de ribben AD en BC in R en S .
- > Lijn KL is de snijlijn van de vlakken $PRQS$ en $ABGH$.
- > Het snijpunt van de lijnen PQ en KL is het gevraagde punt.



Je kunt de doorsnede van een vlak met een lichaam construeren

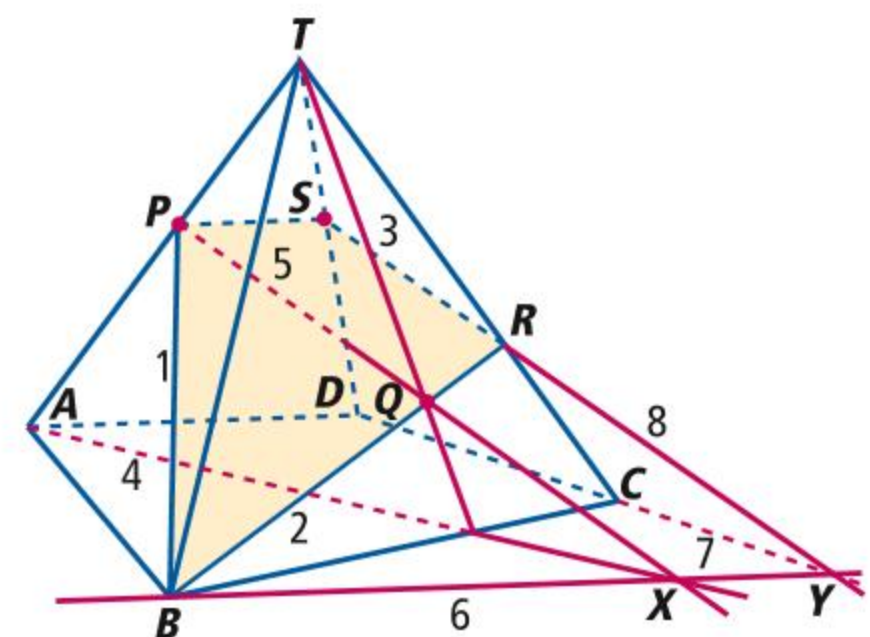
Bij een doorsnede moet je de snijlijnen van een vlak met de grensvlakken van een gegeven lichaam zien te vinden. Maak daarbij gebruik van evenwijdigheid en van snijpunten van (hulp)lijnen met een grensvlak.

Voorbeeld

Bij piramide $T.ABCD$ ligt P op AT en Q in vlak BCT . Construeer de doorsnede van vlak BPQ met de piramide.

Oplossing

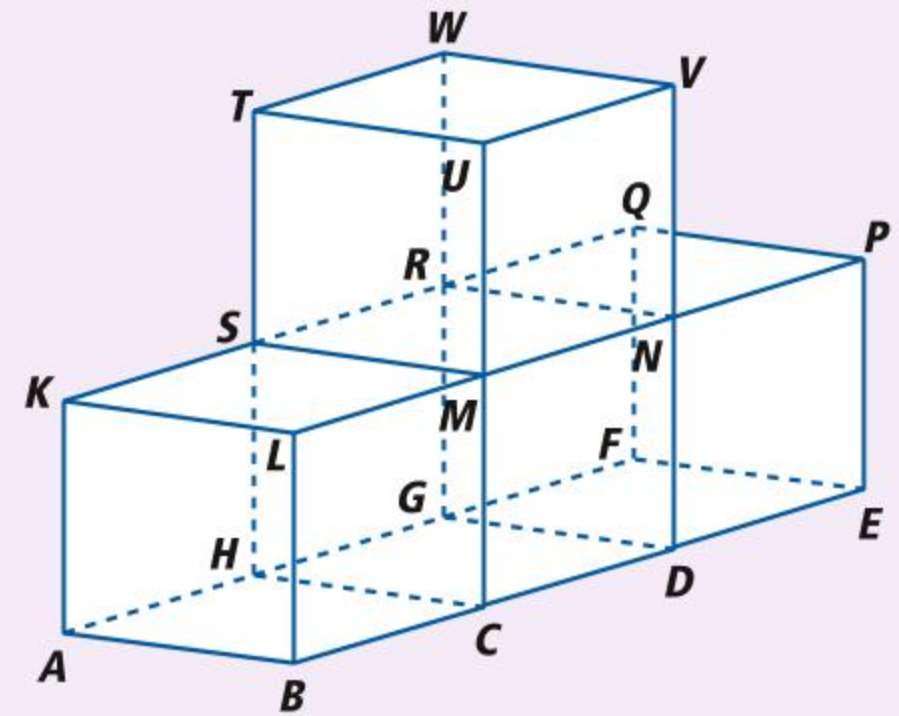
- BR door Q en BP kun je meteen tekenen (stap 1 en 2).
- Verleng TQ en gebruik hulpvlak TPQ om het snijpunt X van PQ met het grondvlak te construeren. BX is de snijlijn van BPQ met het grondvlak (stap 3, 4, 5 en 6).
- Verleng DC om punt Y te vinden (stap 7)
- Teken nu YR , waarmee snijpunt S op DT wordt gevonden (stap 8).
- De doorsnede is $BRSP$.



Test jezelf

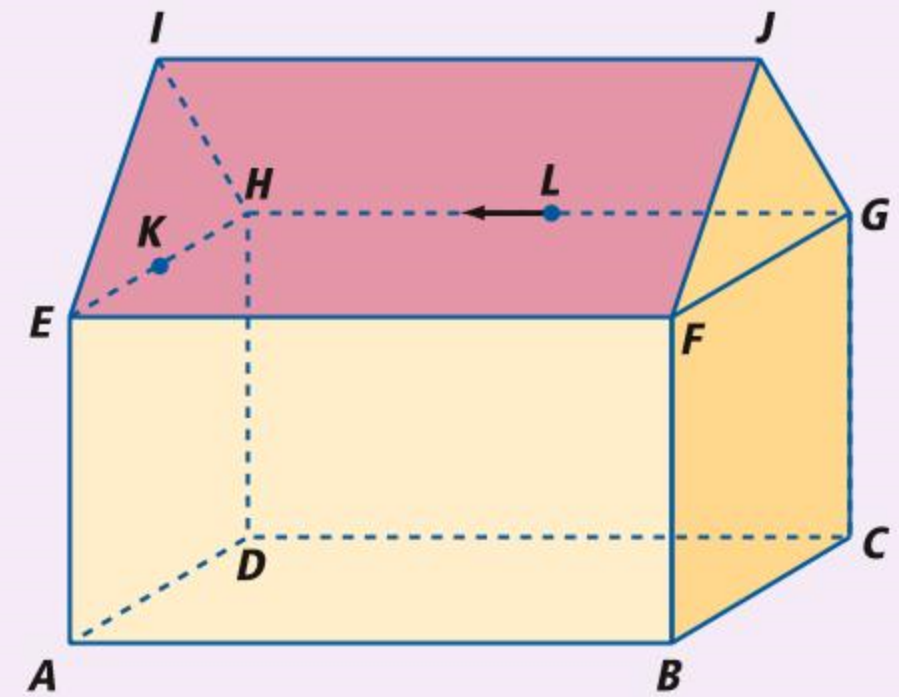
T-1 Dit bouwwerk bestaat uit vier kubussen.

- Schrijf de letters op van alle punten die in vlak ACN liggen.
- Is er een vlak mogelijk door de lijnen SW en DP ?
- Bestaat er een vlak, waar de lijnen AR en DP beide in liggen?
- Is er een vlak waarin de lijnen BT en DW beide liggen?
- Onderzoek of de lijn SN in vlak ACW ligt.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-1.

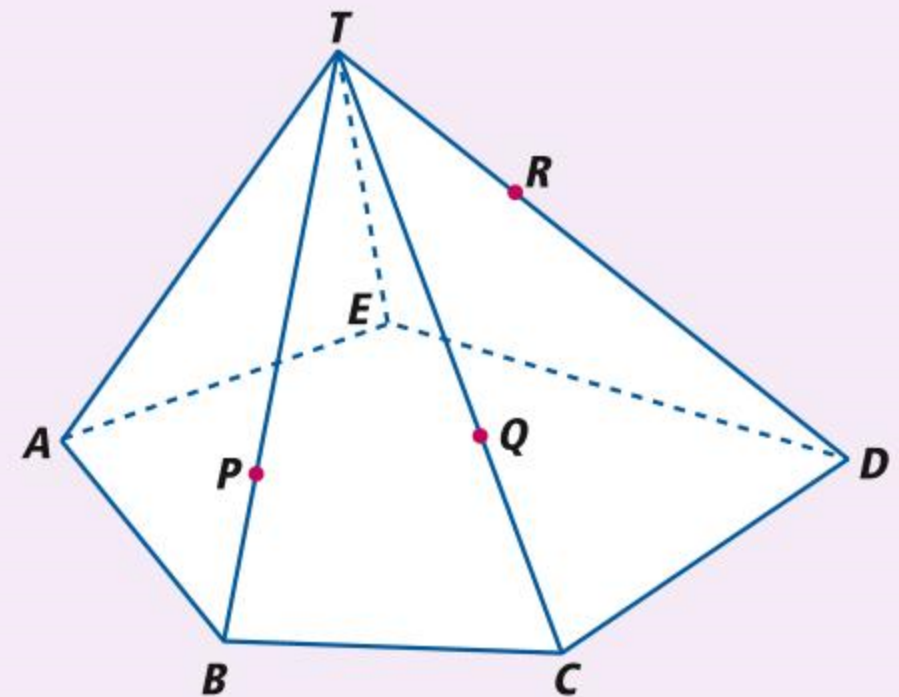


T-2 In een vijfzijdig prisma $ADHIE.BCGJF$ is punt K het midden van lijnstuk EH . Over de ribbe GH 'loopt' een punt L van G naar H .

- Waar moet L liggen, zodat de lijnen AK en CL elkaar snijden? Maak een tekening van deze situatie.
- De lijnen FJ en BC snijden elkaar in een punt S op het verlengde van ribbe BC . Teken het punt S .
- Zeg van de volgende paren lijnen of ze snijdend, kruisend of evenwijdig zijn:
 FI en AB ; BK en CH ; HI en GJ ; GK en BH .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-2.



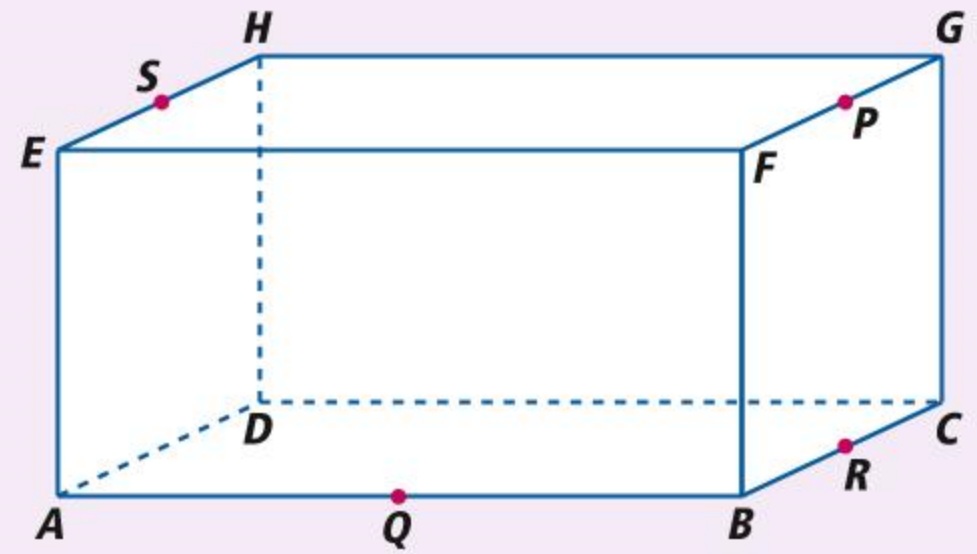
- ✂ **T-3** Gegeven is de vijfzijdige piramide $T.ABCDE$.
- Teken de snijlijn van de vlakken TAD en TBE .
 - Teken de snijlijn van de vlakken TAB en TCD .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-3.



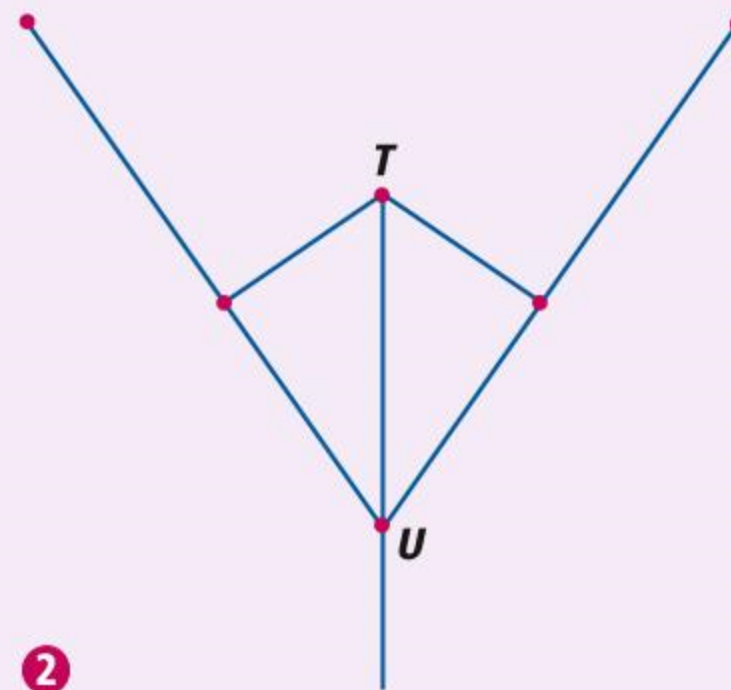
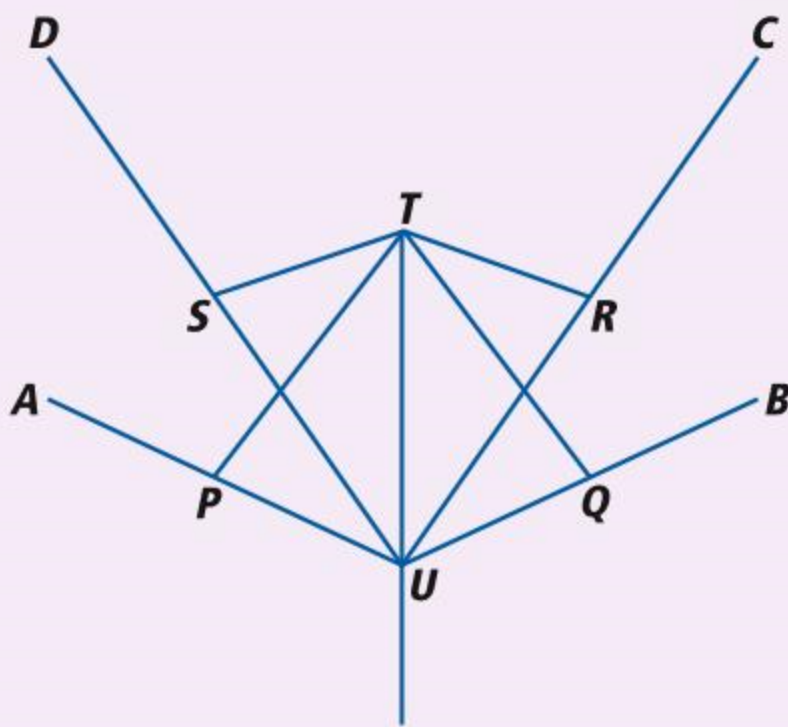
- ✂ **T-4** Op de vijfzijdige piramide $T.ABCDE$ van opgave T-3 liggen de punten P , Q en R op de opstaande ribben BT , CT en DT .
- Teken het snijpunt van lijn PR met het grondvlak.
 - Teken het snijpunt van lijn PR met vlak TAC .
 - Teken de snijlijn van vlak PQR met het grondvlak $ABCDE$.
 - Wat moet er aan de ligging van de punten P en Q worden veranderd om te zorgen, dat de snijlijn van opdracht c evenwijdig loopt met lijn PQ ?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-4.

T-5 In de balk $ABCD.EFGH$ zijn de punten P , Q , R en S de middens van de ribben zoals in de figuur aangegeven.

- Teken in de balk de doorsnede met vlak PQR . Geef de volgorde van werken aan.
- Teken de doorsnede van de balk met het vlak door het punt S en de lijn PQ .
- Teken het snijpunt van de lijn SR met het vlak QCG . Deze opdracht hoort bij paragraaf 4-5.



T-6 In figuur 1 zie je een droogmolen, waarvan de draden zijn verwijderd. De punten A , B , C , D en T liggen in één horizontaal vlak. De stangen mogen als lijnen worden opgevat.



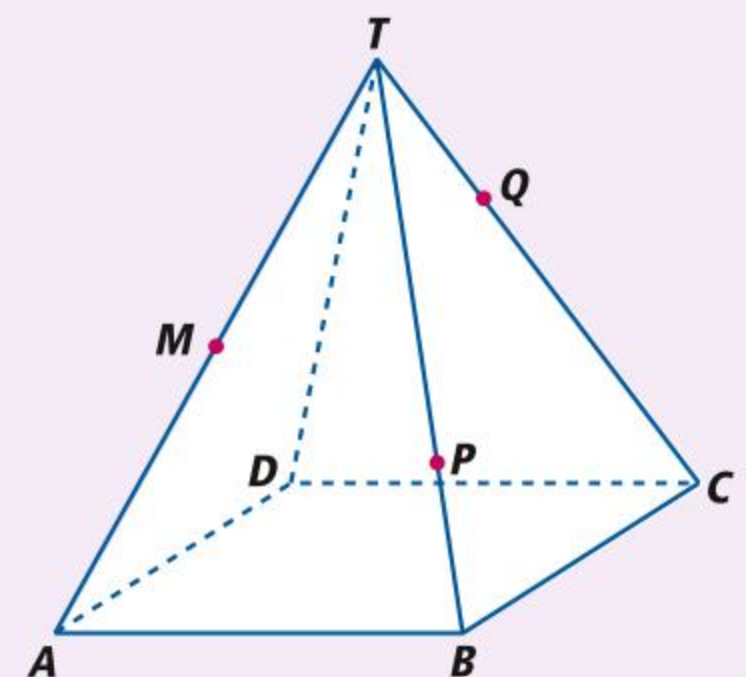
- Snijden of kruisen de lijnen AC en PQ elkaar? Waarom?
- Noem alle lijnen van de constructie die PQ kruisen.
- In de figuur 2 staat een aanzicht van de droogmolen in de richting van AC . Neem dit aanzicht over en zet alle letters op de juiste plaats.

T-7 De regelmatige piramide $T.ABCD$ heeft een vierkant grondvlak. Punt M is het midden van AT . Verder ligt P op ribbe BT en Q op ribbe CT .

Teken de doorsnede van vlak MPQ met de piramide. Geef de volgorde van werken duidelijk aan.

T-8a Kunnen vier vlakken één snijlijn hebben? En twee snijlijnen? Of meer snijlijnen? Zo ja, hoeveel kunnen er maximaal zijn?

- Je kunt beredeneren of twee lijnen evenwijdig zijn, elkaar snijden of kruisen. Kun je dezelfde redenering gebruiken bij drie lijnen?

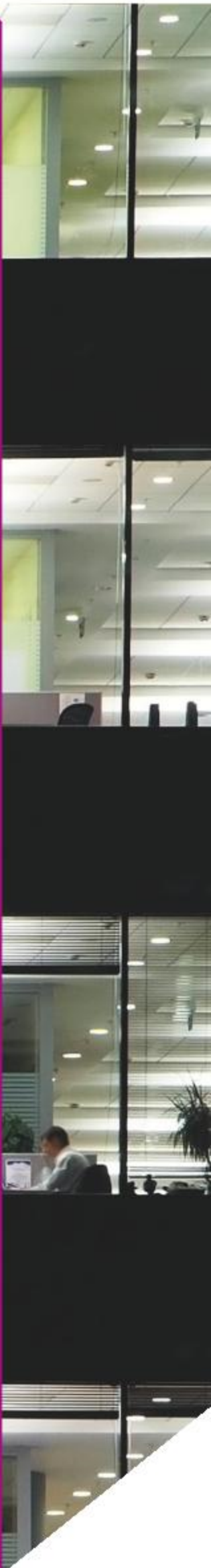


Hoofdstuk 8

Lineair programmeren

In dit hoofdstuk

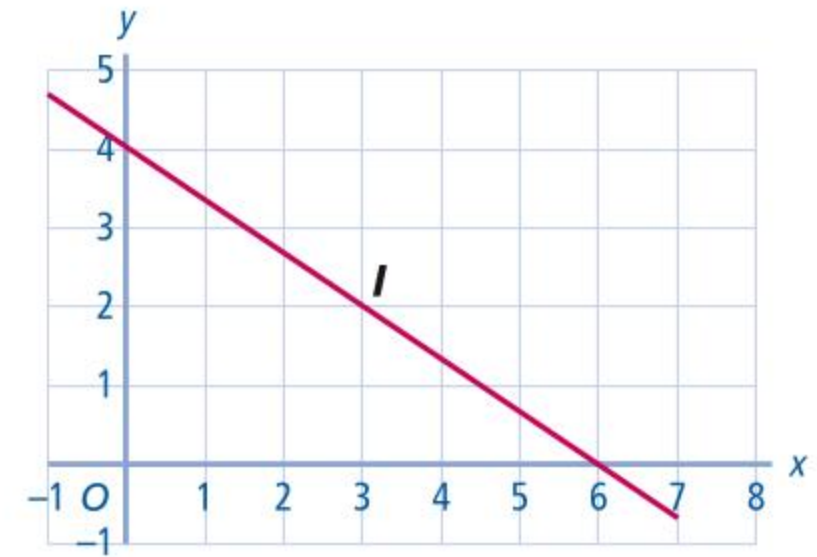
8-1	Lineaire ongelijkheden	146
8-2	Lineair programmeren	148
8-3	Randenwandelmethode	150
8-4	Drie variabelen	152
8-5	Lineair programmeren met Excel	154
8-6	Gemengde opdrachten	156
	Samenvatting	158
	Test jezelf	160



8-1

Lineaire ongelijkheden

- 1 In de figuur is de lijn l met vergelijking $2x + 3y = 12$ getekend.
 - a Geef de coördinaten van drie roosterpunten die op l liggen.
 - b Kies twee punten A en B boven de lijn l en bereken voor beide punten de waarde van $2x + 3y$.
 - c Kies twee punten C en D onder de lijn l en bereken voor beide punten de waarde van $2x + 3y$.
 - d Waar liggen de punten (x, y) waarvoor geldt $2x + 3y \geq 12$?
 - e Waar liggen de punten (x, y) waarvoor geldt $2x + 3y > 12$?



- 2 Alex besteedt in een schoolweek € 6,- aan koffie en thee.
 - a Voor dit bedrag kan Alex bijvoorbeeld 8 koppen koffie kopen. Noteer alle andere manieren waarop hij dat bedrag aan koffie en thee kan uitgeven.
 - b Alex wil in de toekomst niet meer dan € 6,- per week uitgeven. Stel dat hij in een schoolweek k koppen koffie en t koppen thee koopt. Dan kun je met de gegevens van de prijslijst zien dat de volgende ongelijkheid geldt: $3k + 2t \leq 24$. Leg dit uit.
 - c Teken in een assenstelsel de lijn met vergelijking $3k + 2t = 24$. Neem de t -as horizontaal.
 - d Teken alle roosterpunten die voor Alex een keuzemogelijkheid voorstellen.

– Prijslijst –

Thee	€ 0,50
Koffie	€ 0,75
Frisdrank	€ 0,80

Theorie

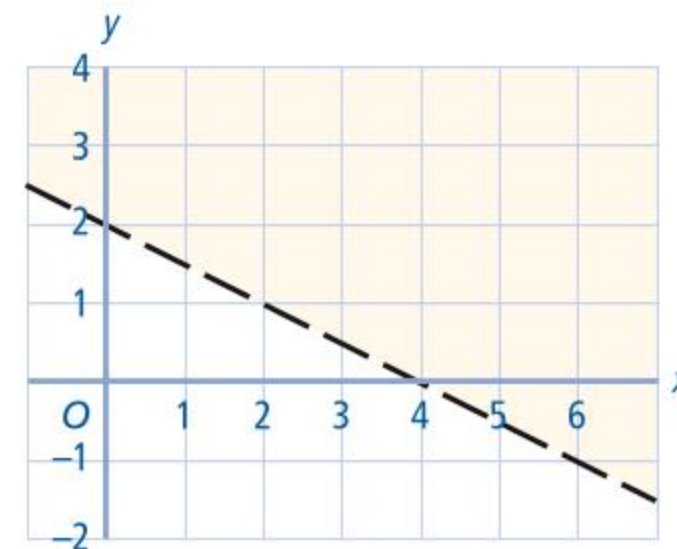
Een lijn l met vergelijking $ax + by = c$ verdeelt het platte vlak in twee **halfvlakken**. In het ene halfvlak geldt $ax + by > c$.

In het andere halfvlak geldt $ax + by < c$.

Lijn l heet de grenslijn van de halfvlakken.

$ax + by > c$ en $ax + by < c$ heten **lineaire ongelijkheden**.

Het gebied bij de ongelijkheid $ax + by \geq c$ bestaat uit de punten van het halfvlak en de grenslijn.



Voorbeeld

Arceer het halfvlak dat hoort bij de lineaire ongelijkheid $x + 2y > 4$.

Oplossing

De lijn met vergelijking $x + 2y = 4$ gaat door de punten $(4, 0)$ en $(0, 2)$.

Kies een punt buiten de lijn en bereken de bijbehorende waarde van $x + 2y$. Bijvoorbeeld $(0, 0)$.

Je ziet dat $(0, 0)$ niet aan de ongelijkheid $x + 2y > 4$ voldoet, want $0 > 4$ klopt niet.

Het gevraagde halfvlak ligt boven de lijn $x + 2y = 4$. Hierboven zie je het resultaat.

Als x en y alleen gehele waarden kunnen aannemen, bevat de oplossing van de ongelijkheid alleen de roosterpunten in het bijbehorende halfvlak.

Toch arceer je dan het hele gebied. Uit de context moet blijken of je alleen maar gehele waarden mag gebruiken.

- 3** Arceer bij elk van de volgende lineaire ongelijkheden het bijbehorende halfvlak. Neem de t -as horizontaal. Stippel de grenslijn wanneer deze niet tot het gebied behoort.
- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| a $3t + 8k \leq 36$ | c $500t + 750k < 2000$ |
| b $t - 4k > 8$ | d $0,02k - 0,03t \geq 1$ |
- 4a** Teken de lijn $x = 6$ en arceer het halfvlak dat hoort bij $x < 6$.
b Teken in dezelfde figuur de lijn $y = 4$ en arceer het halfvlak dat hoort bij $y > 4$.
c In welk gebied liggen de punten waarvoor geldt $x < 6$ én $y > 4$?
- 5** Gegeven zijn de lineaire ongelijkheden $4x + 9y \leq 36$ en $2x - 3y \geq -6$.
a Arceer het halfvlak dat gegeven wordt door de eerste ongelijkheid.
b Arceer in dezelfde figuur, met een andere kleur, het halfvlak dat hoort bij de tweede ongelijkheid.
c Waar liggen de punten die voldoen aan beide ongelijkheden?
d De ongelijkheden $x \geq 0$ en $y \geq 0$ worden toegevoegd.
 In welk gebied liggen de punten die voldoen aan alle vier ongelijkheden?
- 6** Femke wil een boeket samenstellen uit gele en oranje rozen. Een gele roos kost € 0,40 en een oranje roos kost € 0,35. Ze kan hooguit € 6,- uitgeven.
- a** Noem het aantal gele rozen in het boeket p en het aantal oranje rozen q . Schrijf de voorwaarde van Femke als een ongelijkheid.
- b** Aan welke vanzelfsprekende voorwaarden moeten p en q verder nog voldoen?
- c** Bij het samenstellen wil Femke nog met de volgende voorwaarden rekening houden:
- > het boeket moet minimaal één roos van elke kleur bevatten
 - > het aantal gele rozen mag niet meer dan één verschillen van het aantal oranje rozen.
- Teken in een assenstelsel de punten die aan alle voorwaarden voldoen. Neem de p -as horizontaal.
- d** Hoeveel keuzemogelijkheden heeft Femke?
- 7a** Teken het gebied dat door de volgende ongelijkheden wordt vastgelegd.
 $2x + y \geq 8$, $-4x + y \leq 2$, $2x - 3y \leq 0$, $x \geq 0$ en $y \geq 3$.
- b** Welke ongelijkheid is overbodig?



8-2

Lineair programmeren

- 8** Een marktkoopman heeft een partij sokken gekocht, bestaande uit 250 paar katoenen sokken en 140 paar wollen sokken. Hij stelt pakketten samen die hij voor een vast bedrag per pakket verkoopt. Zie de aanbieding hiernaast. Hij vraagt zich af hoeveel pakketten van elke soort hij moet verkopen om een zo hoog mogelijke opbrengst te behalen.
- a** Hij maakt een tabel met verschillende aantallen pakketten. Neem de tabel over, vul deze in en voeg zelf op de laatste rij nog een combinatie toe. Heb je al een idee?
- b** Niet alle in de tabel genoemde combinaties zijn mogelijk. Welke niet en waarom niet?
- 9** In deze opdracht onderzoek je het probleem van de marktkoopman met behulp van algebra.
- a** Stel x is het aantal pakketten 1 en y het aantal pakketten 2. Omdat de marktkoopman slechts 250 paar katoenen sokken heeft, geldt de voorwaarde $4x + 6y \leq 250$. Leg dit uit.
- b** Bereken de andere ongelijkheden die volgen uit het probleem van de marktkoopman en teken het bijbehorende gebied.
- c** Leg uit dat voor de totale opbrengst geschreven kan worden $TO = 7x + 12y$.
- d** Teken in het gebied van vraag b de grafiek van de lijn $7x + 12y = 420$ en geef de coördinaten van drie roosterpunten op die lijn. Wat is de betekenis van die roosterpunten in verband met de aantallen pakketten en de opbrengst?
- e** Leg met behulp van je tekening uit dat de koopman een hogere opbrengst kan behalen dan 420 euro.
- f** Onderzoek wat de hoogst mogelijke opbrengst is. Hoeveel pakketten van € 7,- en € 12,- euro moet hij daarvoor maken?

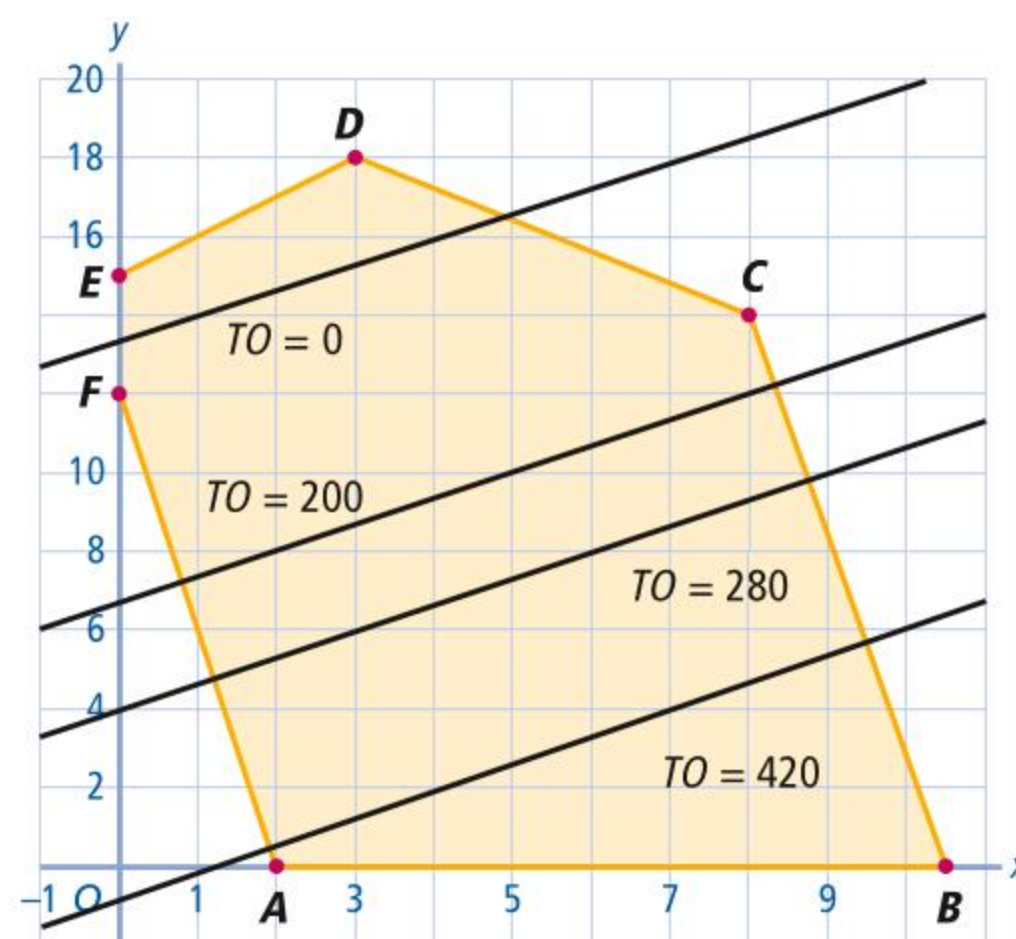
Pakket 1
4 paar katoen, 2 paar wol, samen € 7,-

Pakket 2
6 paar katoen, 4 paar wol, samen € 12,-

Pakket 1	Pakket 2	Opbrengst
10	20	€ 310
20	20	...
20	30	...
25	25	...
...	...	...

Theorie

Lineair programmeren is een methode om de grootste (of kleinste) waarde van een lineaire functie (waarmee je bijvoorbeeld een opbrengst berekent) te bepalen. Deze functie wordt **doelfunctie** genoemd. De grafiek die hoort bij een vaste waarde van de doelfunctie heet **isolijn**. De variabelen van de doelfunctie heten **beslissingsvariabelen**. De voorwaarden die aan de beslissingsvariabelen worden gesteld heten de **beperkende voorwaarden**. Vertaald in lineaire ongelijkheden en getekend in een assenstelsel geven ze het gebied aan dat aan alle beperkende voorwaarden voldoet. Dit heet het **toegestane gebied**. Als je een getekende isolijn verschuift, dan verandert de waarde van die isolijn. Daarbij zie je in welke richting je de isolijn moet verschuiven om de maximale of minimale waarde van de doelfunctie te vinden.



Voorbeeld

Gevraagd wordt het maximum van de doelfunctie $TO = 20x - 30y + 400$, met beslissingsvariabelen x en y op het toegestane gebied dat naast het theorievlak is getekend.

Oplossing

Kies een punt in het toegestane gebied, bijvoorbeeld $(2, 8)$. Daar geldt: $TO = 20 \cdot 2 - 30 \cdot 8 + 400 = 200$. Teken de isolijn $20x - 30y + 400 = 200$. Teken nog een isolijn, bijvoorbeeld door $(3, 6)$. De waarde van de doelfunctie op die isolijn is $TO = 280$. Je ziet nu dat waarde van de doelfunctie toeneemt als je de isolijnen naar beneden verschuift. De isolijn door punt B heeft nog één punt in het toelaatbaar gebied. In punt $B(10\frac{1}{2}, 0)$ heeft de doelfunctie dus de maximale waarde, namelijk $20 \cdot 10\frac{1}{2} - 30 \cdot 0 + 400 = 610$.

- 10** Laat zien dat je een ander maximum vindt als de beslissingsvariabelen in het voorbeeld gehele getallen moeten zijn en bereken dat maximum.

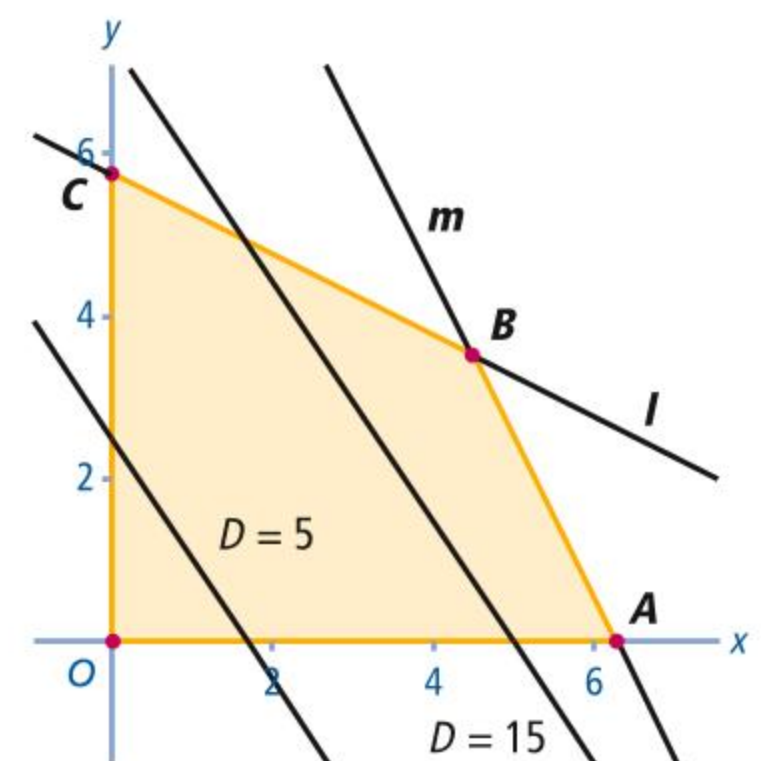
- 11** Een boer heeft voor het verbouwen van tarwe en maïs 48 hectare akkerland ter beschikking. De investeringskosten en de geschatte winst per ha maïs en per ha tarwe staan in de tabel. Boeren zijn verplicht om minstens tweemaal zoveel tarwe te verbouwen als maïs. Onze boer kan hoogstens € 12.000,- uitgeven aan investeringskosten en niet meer dan 40 ha aan tarwe beplanten. De vraag is bij welke verdeling aan ha maïs en ha tarwe de winst maximaal is.

	kosten	winst
tarwe 1 ha	€ 200	€ 80
maïs 1 ha	€ 400	€ 120
totaal	€ 12.000 hoogstens	zo hoog mogelijk

- a** De doelfunctie bij dit probleem wordt gegeven door $W = 80T + 120M$. Geef de betekenis van W en van de beslissingsvariabelen T en M .
- b** Bovenstaand probleem heeft zes beperkende voorwaarden. De ongelijkheden bij drie ervan staan hiernaast. Ga bij elke ongelijkheid na wat de betekenis is en geef de ongelijkheden die horen bij de overige drie voorwaarden.
- c** Teken het toegestane gebied en daarin twee isolijnen.
- d** Bepaal met behulp van lineair programmeren bij welke aantallen ha maïs en tarwe de opbrengst het grootst is.

$$\begin{aligned} T &\geq 0 \\ T &\geq 2M \\ T + M &\leq 48 \end{aligned}$$

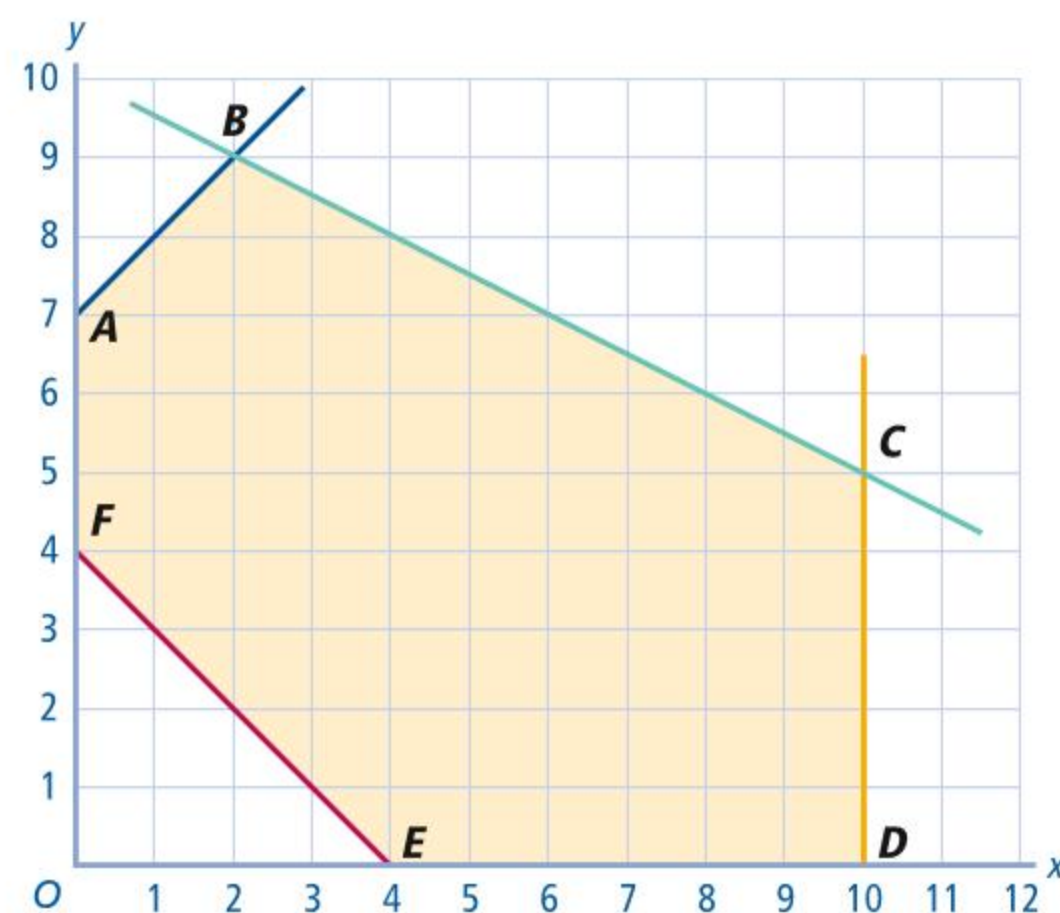
- 12** Het toegestane gebied hiernaast wordt beschreven door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 4y \leq 23$ en $4x + 2y \leq 25$. Er zijn twee isolijnen getekend, met waarden 5 en 15, die horen bij een doelfunctie D .
- a** Welke vergelijking hoort bij lijn l ? En welke bij lijn m ?
- b** In welk hoekpunt van het toegestane gebied heeft D de maximale waarde?
- c** In welk hoekpunt heeft D de minimale waarde?
- d** Teken in de figuur isolijnen die horen bij een doelfunctie E die de uiterste waarden heeft in de hoekpunten A en C .
- e** Het is ook mogelijk om isolijnen te tekenen die horen bij een doelfunctie F die de uiterste waarden heeft in O en in alle punten gelegen op het lijnstuk AB . Teken twee van dergelijke isolijnen.



8-3

Randenwandelmethode

- 13** Hiernaast is het toegestane gebied getekend voor de variabelen x en y . De doelfunctie is $W = 20y - 10x + 15$. Extreme waarden van de doelfunctie zullen optreden in een hoekpunt of een rand van het toegestane gebied (mits de variabelen alle waarden kunnen aannemen). Om de extreme waarde te vinden kies je een hoekpunt en je berekent de waarde van de doelfunctie in dat punt. Daarna wandel je langs de rand van het domein naar een volgend hoekpunt om te onderzoeken of de waarde van de doelfunctie daar groter is.
- Wat gebeurt er met de waarde van W als x toeneemt?
 - Wat gebeurt er met de waarde van W als y toeneemt?
 - In welke hoekpunten kan W de grootste waarde aannemen?
 - In welk hoekpunt is W maximaal en hoe groot is W dan?
 - In welk hoekpunt zal W de minimale waarde hebben? Controleer je antwoord.



Theorie

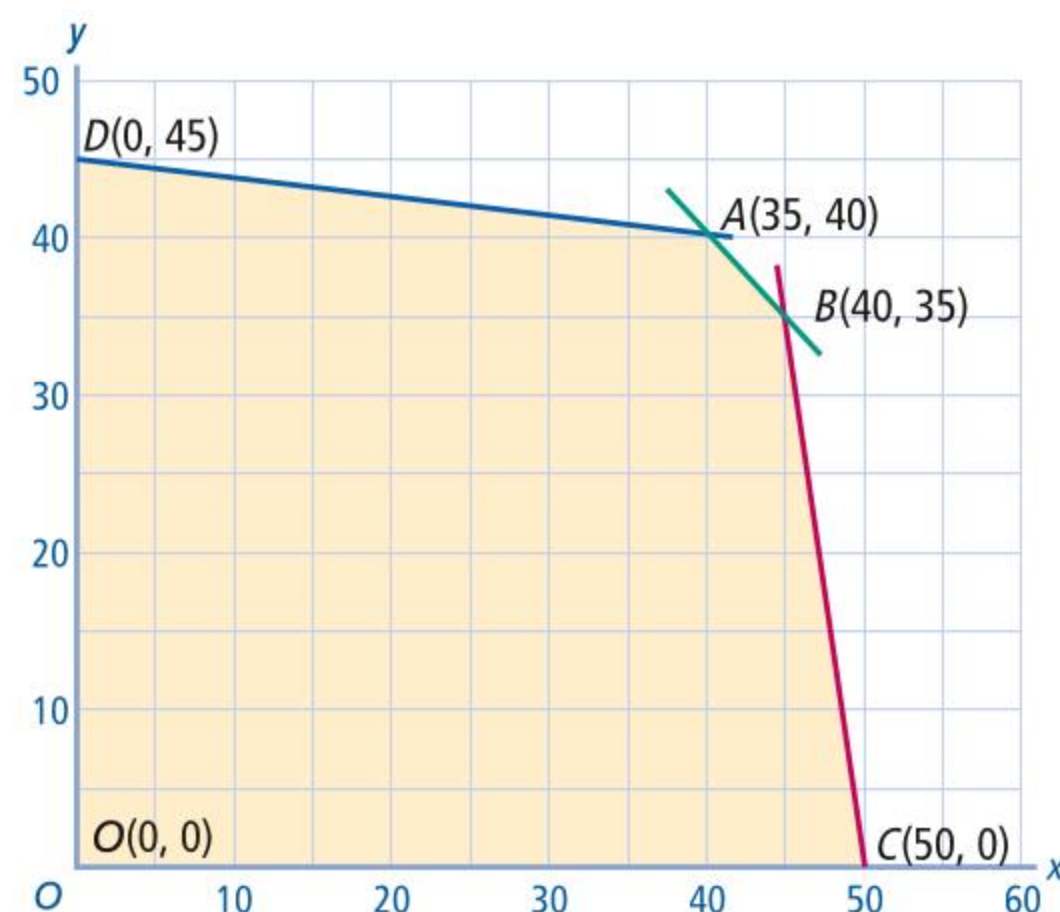
Om de uiterste waarde van een doelfunctie te vinden, kun je met isolijnen werken, maar je kunt ook de **randenwandelmethode** gebruiken. Je kiest een hoekpunt waarvan je denkt dat die de grootste waarde van de doelfunctie zal opleveren. Je berekent die waarde en vergelijkt die met de (berekende) waarden in de nabijgelegen hoekpunten. Zijn die kleiner, dan heb je de grootste waarde gevonden. Vind je een grotere waarde, dan herhaal je de procedure met de volgende naastgelegen hoekpunten.

Voorbeeld

Bereken het maximum van de doelfunctie $TW = 20x + 30y$ op het hiernaast gegeven toegestane gebied.

Oplossing

Stel de hoogste waarde is in B .
 De nabijgelegen hoekpunten zijn A en C .
 In B is $TW = 20 \cdot 40 + 30 \cdot 35 = 1850$
 In A is $TW = 20 \cdot 35 + 30 \cdot 40 = 1900$, dus hoger.
 Dan ook punt D proberen:
 In D is $TW = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 45 = 1350$.
 Conclusie: het maximum van TW is 1900.



- 14** In het voorbeeld hierboven wordt de doelfunctie gewijzigd in $TW = 25x + 25y$.
- In welke hoekpunten treedt nu het maximum op?
 - Stel een lineaire vergelijking op van de lijn door deze hoekpunten.
 - Geef het maximum van de doelfunctie en geef minstens vier mogelijke combinaties van x en y waarvoor de doelfunctie dit maximum heeft.

- 15** Algen kunnen helpen bij de productie van coatings, zoals lak en verf. Deze worden nu doorgaans bereid uit minerale olie. Aangezien deze bronnen uitgeput raken en het productieproces niet CO_2 -neutraal is, zijn algen een ideaal alternatief. Het voordeel van algen is dat zij juist CO_2 opslaan. In het bedrijf dat deze soorten levert, wordt per maand hoogstens 7 ton algen gekweekt. Deze bestaan uit maximaal 6 ton chlorella en/of 3,5 ton sargassum. Per maand wordt nooit meer sargassum geproduceerd dan chlorella. De productie van 1 kg sargassum kost 8 minuten en duurt twee keer zo lang als de productie van 1 kg chlorella. Per maand is maximaal 450 uur beschikbaar. De winst op 1 kg chlorella bedraagt € 0,75 en op 1 kg sargassum € 0,60.
- a** Het is lastig om een overzicht te krijgen over veel gegevens. Het verwerken van de gegevens in een tabel kan daarbij helpen. Zet de variabelen in de eerste kolom, zoals hieronder. Neem de tabel over en vul verder in.



1 ton = 1000 kg

<i>variabelen in kg</i>	<i>maximum hoeveelheid in kg</i>	<i>tijd nodig in minuten per kg</i>	<i>winst per kg</i>
<i>c (chlorella)</i>			0,75
<i>s (sargassum)</i>	3500	8	

- b** Geef de beperkende voorwaarden en de formule van de doelfunctie.
c Bereken met de randenwandelmethode de maximale winst.

Het vinden van een maximum of minimum van een doelfunctie op een toegestaan gebied is mogelijk als je te maken hebt met twee beslissingsvariabelen. Soms kun je drie beslissingsvariabelen terug brengen tot twee variabelen. De volgende opdracht is daarvan een voorbeeld.

- 16** Arjen wil € 30.000,- beleggen in drie soorten fondsen: opties (hoog risico), aandelen (gemiddeld risico) en obligaties (laag risico). Het verwachte jaarlijkse rendement van opties is 10% van het hierin geïnvesteerde bedrag. Voor aandelen en obligaties zijn deze percentages achtereenvolgens 8% en 6%. Arjen wil in elk fonds minstens € 3.000,- beleggen en het bedrag aan opties niet meer laten zijn dan het dubbele van het bedrag aan obligaties. De vraag is hoe Arjen moet beleggen om een zo hoog mogelijk rendement (R) te krijgen.
- a** Ga na dat hier drie beslissingsvariabelen x , y en z in het spel zijn en verwerk de gegevens in een tabel.
b Geef de formule van de doelfunctie R .
c Schrijf de beperkende voorwaarden als ongelijkheden met maximaal drie variabelen.
d Omdat $x + y + z = 30000$ kun je de variabele z uitdrukken in x en y . Schrijf de beperkende voorwaarden met ten hoogste twee variabelen.
e Toon aan dat je de in vraag a gevonden doelfunctie R kunt herschrijven tot $R = 0,04x + 0,02y + 1800$.
f Teken het toegestane gebied en bereken het maximale rendement.

8-4

Drie variabelen

- 17** Hiernaast staat een vraagstuk dat met behulp van lineair programmeren kan worden opgelost.

a Ga na of er per dag 8 banken, 28 stoelen en 17 tafels geproduceerd kunnen worden.

b Kies de volgende beslissingsvariabelen:
 b het aantal per dag geproduceerde banken
 s het aantal per dag geproduceerde stoelen
 t het aantal per dag geproduceerde tafels.

De ongelijkheden zijn:

- > $b \geq 0$, $s \geq 0$ en $t \geq 0$
- > $b \leq 10$, $s \leq 30$ en $t \leq 20$
- > $2b + s + 2t \leq 70$

Leg uit hoe je deze ongelijkheden uit de beperkende voorwaarden kunt afleiden.

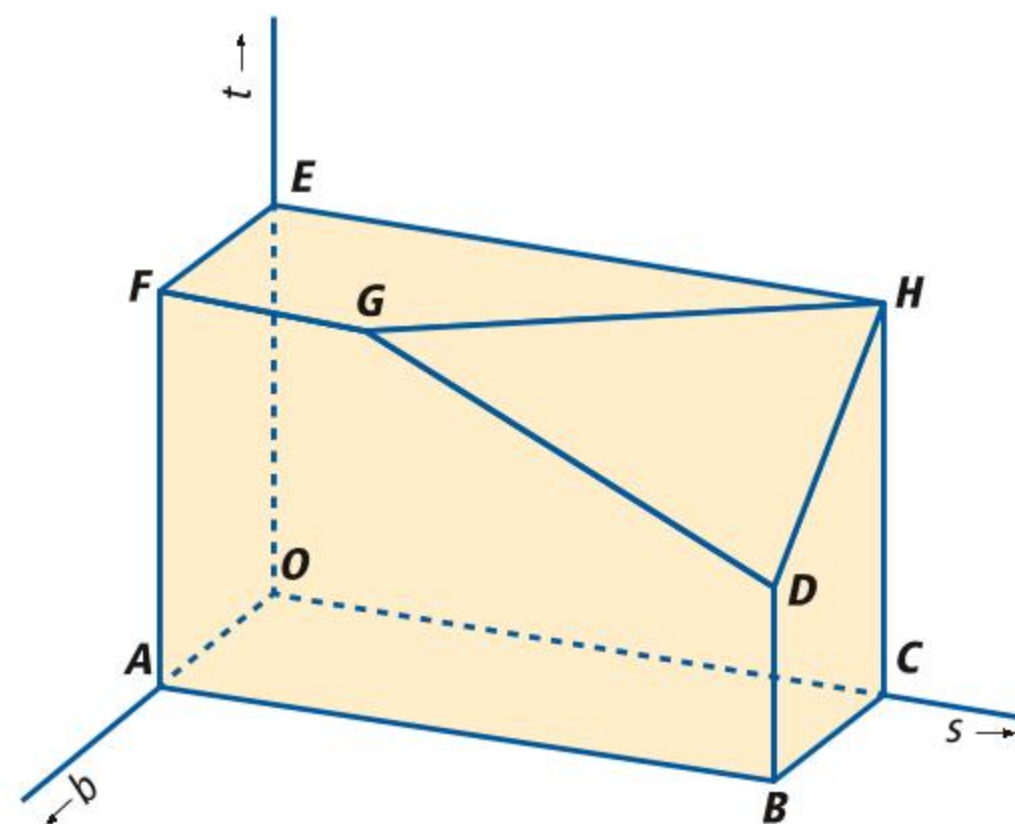
Als je drie beslissingsvariabelen niet kunt terugbrengen tot twee beslissingsvariabelen, dan is het toelaatbaar gebied een ruimtefiguur. In de volgende opdrachten zie je hoe zo'n ruimtefiguur eruit ziet.

In een meubelfabriek kunnen per dag maximaal 10 banken, 30 stoelen en 20 tafels gefabriceerd worden. De geproduceerde meubels worden tijdelijk opgeslagen in een ruimte en aan het eind van de dag afgevoerd. De capaciteit van de opslagruimte bedraagt maximaal 70 stoelen. Een bank neemt tweemaal zoveel ruimte in als een stoel, dat geldt ook voor een tafel. Op een bank wordt 30 euro winst gemaakt, op een stoel 10 euro en op een tafel 25 euro. De probleemstelling is hoe de productie georganiseerd moet worden om maximale winst te behalen.

- 18** Bij opdracht 17 zijn er drie beslissingsvariabelen. Hiernaast zie je het toegestane gebied van het probleem van opdracht 17. Het is het binnengebied van een 'afgeknotte' balk.

Bij punt A hoort $b = 10$, $s = 0$ en $t = 0$. Punt A heeft dus de coördinaten $(10, 0, 0)$.

- a** Geef de coördinaten van de punten C , E , B en F .
- b** Welke productieplanning hoort bij punt H ?
- c** Bereken de coördinaten van de punten G en D .
- d** Wat geldt voor elk punt in het vlak door $ABDGF$?
- e** De vergelijking $b = 10$ hoort bij vlak $ABDGF$. Welke vergelijkingen horen bij de vlakken $BCHD$ en $EFGH$?
- f** Leg uit dat bij de punten in het vlak door GDH de voorwaarde van de maximale opslagcapaciteit hoort.
- g** Wat is de vergelijking van vlak GDH ?



- 19a** Schrijf de winstfunctie W die hoort bij het probleem van opdracht 17 als functie van b , s en t .
- b** Bereken met de randenwandelmethode het productieschema in geval van maximale winst. Hoe groot is die winst?
- c** De winst op een stoel wordt 20 euro en de overige winsten blijven gelijk. Bereken bij welke productie nu de maximale winst wordt bereikt.

Ook bij een lineair programmeringsprobleem met drie beslissingsvariabelen wordt het minimum of het maximum bereikt in de rand van het toegestane gebied. Dat kan een punt zijn, een lijnstuk of een vlakdeel. Het minimum of maximum vind je met de randenwandelmethode.

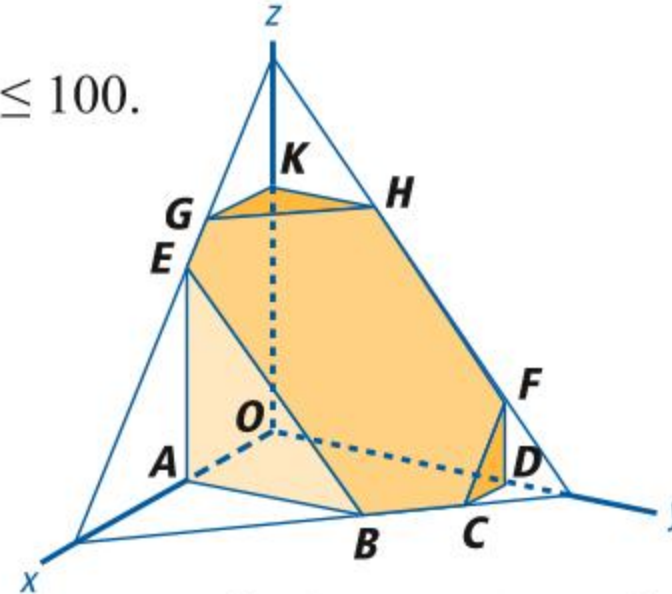
Voorbeeld

Een toegestaan gebied wordt gegeven door de voorwaarden $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 80$, $0 \leq z \leq 60$ en $x + y + z \leq 100$. Hiernaast zie je een tekening van het toegestane gebied. Bereken het maximum van de doelfunctie $W = 2x - y + 3z$.

Oplossing

Om W zo groot mogelijk te maken moeten x en z zo groot mogelijk zijn en y moet binnen het toelaatbaar gebied zo klein mogelijk zijn.

De punten G en E komen dan in aanmerking. De coördinaten van E zijn $(50, 0, 50)$ en die van G $(40, 0, 60)$. De waarde van W is 250 in E en 260 in G . Wandel nu vanuit G naar de hoekpunten H en K : in beide punten vind je een lagere waarde voor W . Het maximum van W is dus 260.



- 20** Bekijk het voorbeeld hierboven.
- Waarom moeten x en z zo groot mogelijk en y zo klein mogelijk zijn bij de gegeven doelfunctie W ?
 - Bereken bij hetzelfde toelaatbare gebied het maximum van de doelfunctie $T = 3x + y - 4z$.
 - In welk punt is de doelfunctie T minimaal? En hoe groot is dat minimum?
- 21** Een meubelfabriek maakt drie typen boekenkasten A, B en C. In de tabel is aangegeven hoeveel m^2 hout voor elk van de kasten nodig is, hoeveel kasten van elk type er per week hoogstens gemaakt kunnen worden en hoe groot de winst per kast in euro is. Vanwege afzetmogelijkheden van de kasten moet het aantal kasten van type C gelijk zijn aan de aantallen van de typen A en B tezamen. De meubelfabriek heeft voor de kasten $750 m^2$ hout per week beschikbaar.

type	variabele	maximaal te maken	hout per kast	winst per kastje
A	a	100	3	50
B	b	150	1,5	25
C	c	200	2,5	35

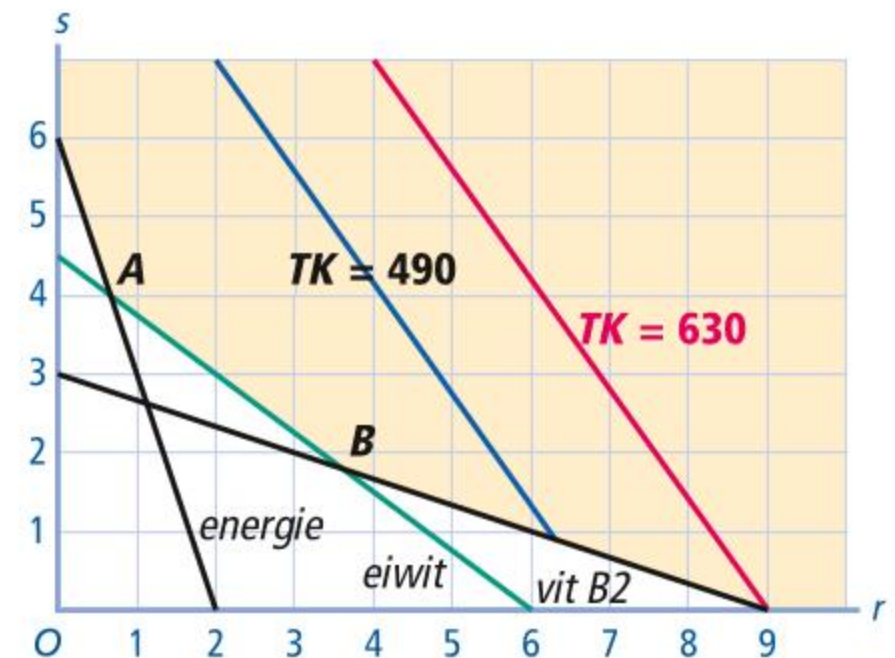
Bereken hoeveel kasten van elk type per week gemaakt moeten worden zodat de winst maximaal is.

8-5

Lineair programmeren met Excel

- 22** De regering van een arm land wil een menu van rijst en sojabonen vaststellen dat zo goedkoop mogelijk is en toch aan alle eisen voldoet wat betreft voedingswaarde, gehalte aan eiwit en vitamine B2. De gegevens zijn: Een kop rijst kost 70 cent en levert 3360 kilojoules energie, 15 gram eiwit en 0,1 mg vitamine B2. Een kop sojabonen kost 50 cent en levert 1120 kilojoules energie, 20 gram eiwit en 0,3 mg vitamine B2.

De regering neemt aan dat de minimumbehoefte van een volwassene 6720 kilojoules energie, 90 gram eiwit en 0,9 mg vitamine B2 per dag bedraagt.



- Geef de beperkende voorwaarden.
- Hiernaast staat een tekening van het toegestane gebied. Bereken de samenstelling van het menu dat het goedkoopst is.
- Hoeveel mg vitamine B2 zit er in de samenstelling van dit menu meer dan nodig is?

Het rekenprogramma Excel heeft een invoegtoepassing, waarmee je lineaire programmeringsproblemen, ook met meer dan drie variabelen, kunt oplossen. De naam van deze toepassing is 'Oplosser'. In het hulpboek is beschreven hoe je deze macro in Excel kunt activeren.

- 23** Hieronder zie je hoe de gegevens van opdracht 22 zijn ingevoerd in Excel.

C4		f_x		= \$B\$2*C2+\$B\$3*C3		
	A	B	C	D	E	F
1	Variabelen	Aantal	Energie	Eiwitten	Vitamine B2	Kosten
2	r (koppen rijst)		3360	15	0,1	0,7
3	s (koppen soja)		1120	20	0,3	0,5
4	Totaal		0	0	0	0

Vul in kolom B in bij B2 : 3 en B3 : 2.

- Verklaar de getallen die berekend worden in de cellen C4, D4 en E4. Let bijvoorbeeld op de formules die zijn ingevoerd in die cellen.
 - Voldoet de ingevulde combinatie in vraag a aan de beperkende voorwaarden? In welke cellen moet je kijken om dat te controleren?
- 24a** Laat de invoegtoepassing 'Oplosser' het probleem van de opdrachten 22 en 23 oplossen. Wat is volgens de berekening de gewenste samenstelling van het menu en wat zijn de kosten?
- Bedenk een mogelijke prijs van een kop rijst en een kop sojabonen zó, dat in B(3,6; 1,8) het optimum wordt bereikt. Controleer je antwoord met Excel.

Het algoritme dat door de 'Oplosser' gebruikt wordt om een lineair programmeringsprobleem op te lossen heet de Simplex methode. Het is gebaseerd op het randenwandelen. Daarmee kunnen ook problemen met meer dan drie variabelen worden opgelost. Bij deze problemen is het tekenen van een toelaatbaar gebied niet mogelijk.

- 25** In Israël werken de kibboetsen A en B samen op het gebied van de landbouw. Het coördinatiebureau dat zich bezighoudt met de planning van de productie van A en B voor het komende jaar beschikt over de volgende gegevens. Kibboets A heeft 150 ha landbouwgrond en kibboets B 225 ha. Vanwege het droge woestijnklimaat moet de grond bevoeid worden. A heeft voor irrigatie 250 miljoen liter beschikbaar, B 300 miljoen liter. De twee kibboetsen verbouwen alleen suikerbieten en katoen. Het ministerie van landbouw heeft bepaald dat beide kibboetsen tezamen maximaal 200 ha suikerbieten en 190 ha katoen mogen produceren. Suikerbieten hebben per ha 3 miljoen liter water nodig, katoen 2 miljoen liter per ha. Het coördinatiebureau wil voor elk van de producten bepalen hoeveel elke kibboets ervan moet verbouwen om een maximale opbrengst te krijgen. De opbrengst op suikerbieten is 950 dollar per ha, op katoen 700 dollar per ha.
- Ga na dat hier sprake is van vier beslissingsvariabelen en geef de formule van de doelfunctie.
 - Geef alle beperkende voorwaarden.
 - Open het Excelbestand. Dit is gedeeltelijk ingevuld. Zo wordt in cel C6 de totale oppervlakte berekend die in kibboets A besteed wordt. Controleer dat door een aantal ha in kolom B in te vullen.
 - Vul de ontbrekende getallen en formules in.
 - Los het probleem van het coördinatiebureau op.
 - Kibboets A is niet tevreden over de oplossing. Leg uit waarom niet.
- 26** In het geval van de vorige opdracht wordt niet alle beschikbare landbouwgrond benut. A en B spreken af dat de te produceren hoeveelheden 'eerlijk' verdeeld worden. Dat wil zeggen dat elke kibboets naar verhouding hetzelfde gedeelte van zijn landbouwgrond kan beplanten. Hierbij wordt geen onderscheid tussen de gewassen gemaakt.
- Leg uit dat deze afspraak leidt tot de voorwaarde $SB + KB = 1,5SA + 1,5KA$. Hierin zijn SB , KB , SA en KA de aantallen ha te verbouwen suikerbieten en katoen in B, respectievelijk A.
 - Verwerk deze extra voorwaarde in Excel door een kolom in te voegen tussen 'irrigatie kibboets B' en 'opbrengst per ha'. Noem deze kolom 'eerlijk verdelen' en vul de coëfficiënten in. Lees de extra voorwaarde als:
 $SB + KB + (-1,5)SA + (-1,5)KA = 0$
 - Met welke oplossing komt het coördinatiebureau nu?
 - Kibboets B heeft de mogelijkheid om 50 miljoen liter water voor irrigatie aan te kopen. De kosten hiervan bedragen 250 dollar per miljoen liter. Het coördinatiebureau berekent wat de gevolgen van een eventuele aankoop van water door B zijn voor het productieschema en de opbrengst van A en B. Is het voordelig voor B om het water te kopen?

8-6

Gemengde opdrachten

- 27** De aardkorst bevat gemiddeld 70 gram koper per ton gewicht. De totale koperbelasting van de bodem stijgt in Nederland jaarlijks met ongeveer 2300 ton, waarvan 1400 ton afkomstig is van dierlijke mest. Het is voorstelbaar dat de overheid de volgende milieueis uitvaardigt: 'teelaarde mag per ton gewicht ten hoogste 60 gram koper bevatten'.

De voorraad van een leverancier bestaat uit teelaarde van drie kwaliteiten, volgens het schema dat hiernaast staat. Kwaliteit 3 voldoet niet aan de hierboven gestelde milieueis.

De leverancier besluit een nieuwe kwaliteit 4 te maken door de hele partij kwaliteit 3 te mengen met een deel van de andere soorten.

<i>kwaliteit</i>	<i>kopergehalte in gram per ton gewicht</i>	<i>prijs per ton in euro's</i>	<i>voorraad in tonnen</i>
1	33	57	15
2	45	51	25
3	90	46	10

- a** Veronderstel dat kwaliteit 4 bestaat uit 20% van kwaliteit 1 en 30% van kwaliteit 2.
Bereken de prijs per ton teelaarde van kwaliteit 4.
- b** Voldoet kwaliteit 4 aan de milieueis?
- c** De leverancier wil zo weinig mogelijk van kwaliteit 1 en kwaliteit 2 gebruiken en toch aan de milieueis voldoen. Bovendien wil hij dat het mengsel niet meer kost dan € 50,- per ton. Bereken hoeveel procent van kwaliteit 1 en kwaliteit 2 het nieuwe mengsel moet bevatten.

$a\%$ van kwaliteit 1
 $b\%$ van kwaliteit 2
 $(100 - a - b)\%$ van kwaliteit 3

- 28** Een verffabriek maakt twee soorten verf: binnenverf en buitenverf, waarbij p liter verf geproduceerd wordt met bereidingswijze 1 en q liter met bereidingswijze 2. Bij bereidingswijze 1 kan de fabriek per maand ten hoogste 1200 liter verf produceren en bij bereidingswijze 2 is dat 1500 liter. Bij bereidingswijze 1 worden de grondstoffen A, B en C gebruikt in de verhouding 3 : 2 : 1 en wordt er evenveel binnenverf als buitenverf geproduceerd. Bij bereidingswijze 2 worden de grondstoffen A, B en C gebruikt in de verhouding 5 : 1 : 2 en worden binnenverf en buitenverf geproduceerd in de verhouding 2 : 1. De fabriek moet per maand minstens 540 liter binnenverf en 335 liter buitenverf leveren. De bereidingswijzen 1 en 2 kosten gemiddeld 10 euro en 8 euro per liter geproduceerde verf. Per maand is ten hoogste achtereenvolgens 1020, 420 en 400 liter van A, B en C beschikbaar. De bedrijfsleiding wil de totale kosten per maand van het produceren van verf minimaliseren. Stel een advies op over de productieplanning.



- 29** De hulporganisatie *Help!* moet vanuit havenplaats Hilim haar hulpposten in de plaatsen Ayeh en Biopa bevoorraden. In Ayeh is wekelijks 120 ton rijst nodig, in Biopa is wekelijks 100 ton rijst nodig (1 ton = 1000 kg). Aanvankelijk kan men voor het vervoer slechts beschikken over vrachtauto's. Door diefstal en andere oorzaken bereikt slechts $\frac{4}{5}$ deel van de rijst die vanuit Hilim verstuurd wordt de hulpposten. Vanuit Hilim kan *Help!* per week maximaal 260 ton naar Ayeh en Biopa versturen.

- a** Laat met een berekening zien dat het niet mogelijk is zowel Ayeh als Biopa met vrachtauto's wekelijks van voldoende rijst te voorzien.

Help! krijgt de beschikking over een klein vliegtuig. Bij luchttransport gaat geen rijst verloren. Daardoor is het nu wel mogelijk beide hulpposten van voldoende rijst te voorzien. Een nadeel echter is dat de transportkosten per ton veel hoger zijn. In het kaartje en in de tabel staan deze kosten aangegeven. Elke in Hilim aangevoerde ton rijst kost \$ 300.

- b** Bereken hoeveel duurder het afleveren van 1 ton rijst in Ayeh bij vervoer per vliegtuig is vergeleken met het vervoer per vrachtwagen.

Hiernaast zie je het transportschema vanuit Hilim. De aantallen x , y , u en v zijn in tonnen ($x, y, u, v \geq 0$). Zowel tussen x en u als tussen y en v bestaat een direct verband. Met behulp hiervan kunnen de totale kosten in dollars per week (K) voor rijst en vervoer uitgedrukt worden in x en y .

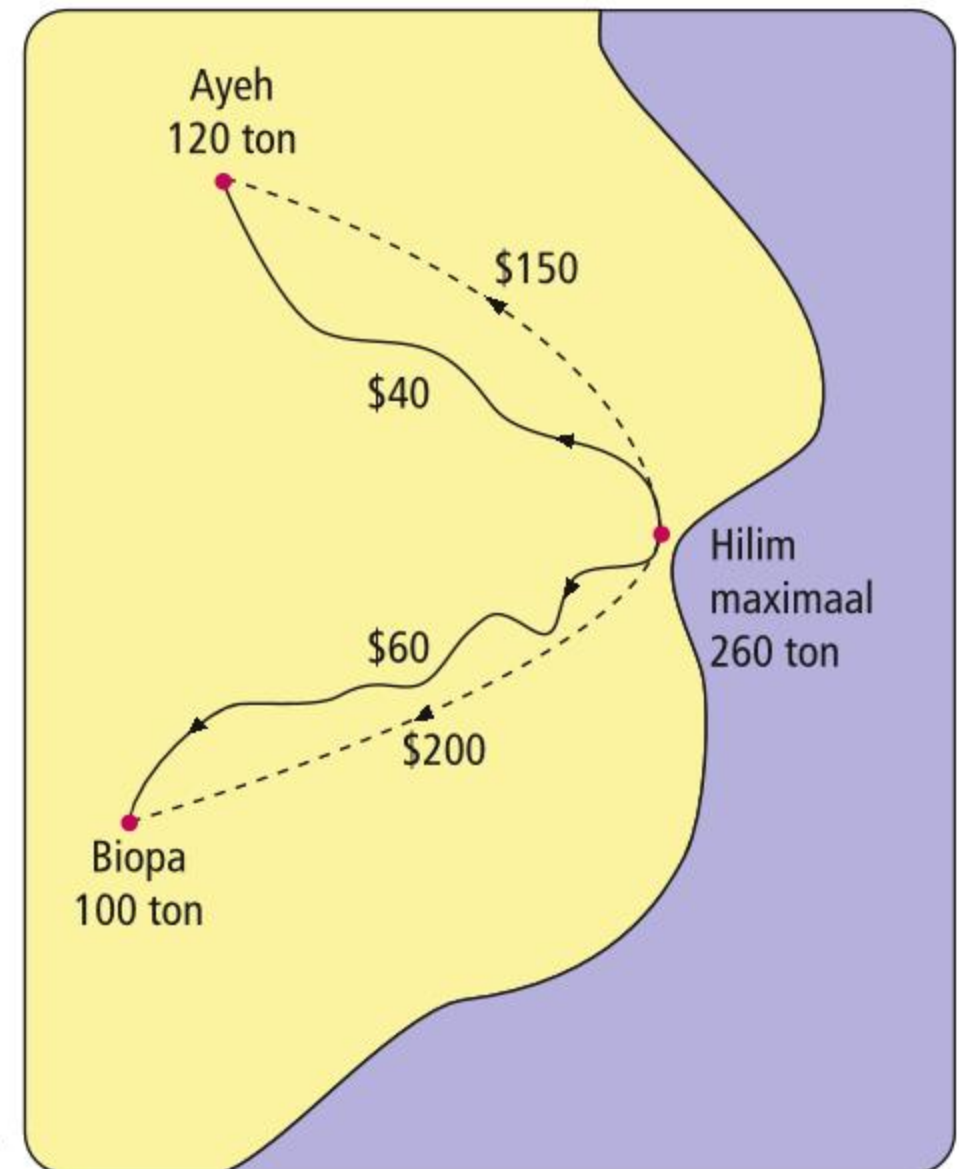
- c** Toon aan dat dit leidt tot $K = 104000 - 20x - 40y$.
d Waarom geldt: $x \leq 150$ en $y \leq 125$?

Help! wil het transport zo regelen dat de totale kosten zo laag mogelijk zijn. Daarbij moet ook rekening worden gehouden met de capaciteit van het vliegtuig. Hiermee kan wekelijks ten hoogste 80 ton rijst worden vervoerd.

- e** Bereken voor deze situatie hoeveel tonnen rijst er per vrachtauto en per vliegtuig vanuit Hilim wekelijks naar Ayeh en Biopa vervoerd moeten worden.

Ontleend aan Centraal Examen vwo wiskunde A 1995-I

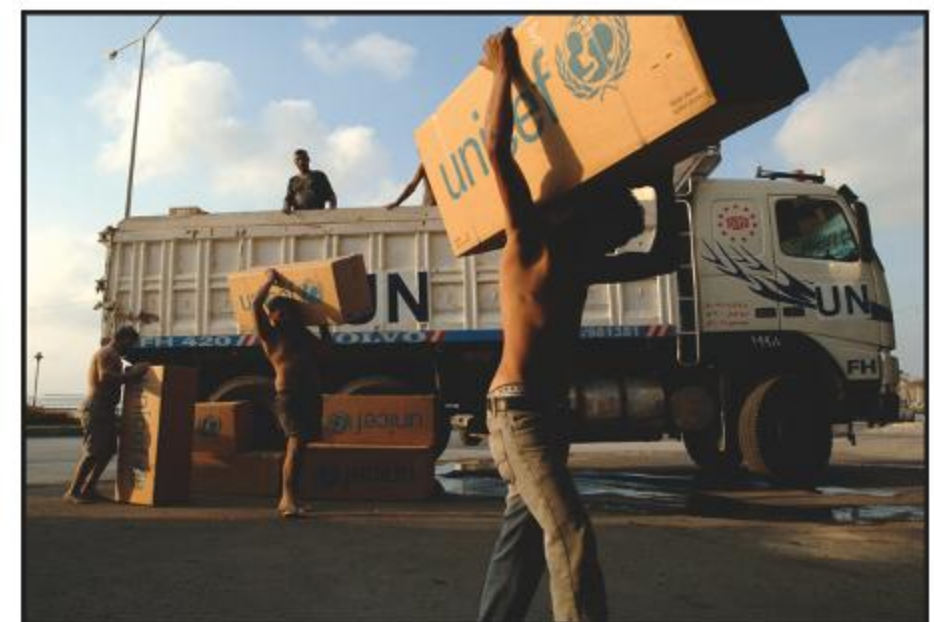
-  **30a** Teken het toegestane gebied dat hoort bij de voorwaarden $p \geq 0$, $0 \leq q \leq 5$ en $5p - 2q \leq 0$. De doelfunctie is $W = (p - 1)^2 - q + 5$
- b** Hoe weet je dat de isolijnen geen rechte lijnen zijn?
- c** Welke vorm hebben de isolijnen?
- d** Bereken het minimum en het maximum van W op het toegestane gebied.



Transportkosten per ton uit Hilim verzonden rijst in dollars

	naar Ayeh	naar Biopa
per vrachtwagen	\$ 40	\$ 60
per vliegtuig	\$ 150	\$ 200

	naar Ayeh	naar Biopa
per vrachtwagen	x	y
per vliegtuig	u	v

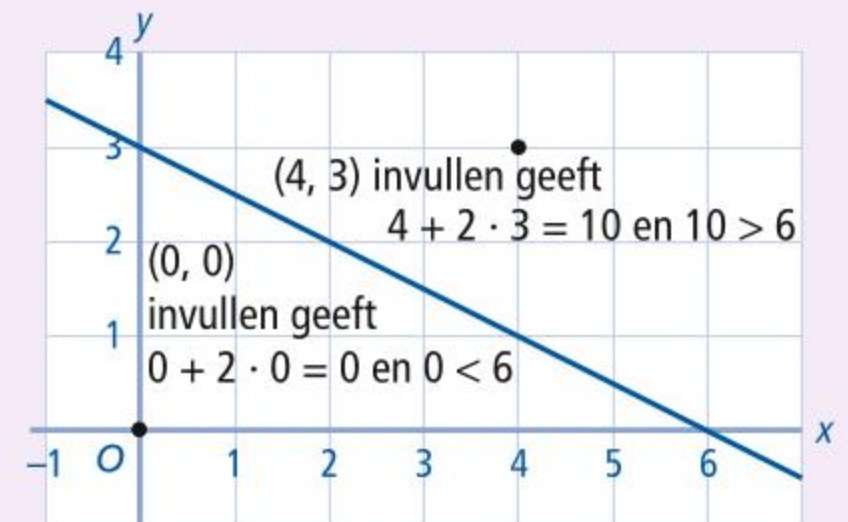


Samenvatting

Halfvlakken en lineaire ongelijkheden

Een lijn l met vergelijking $ax + by = c$ verdeelt het platte vlak in twee halfvlakken. In het ene halfvlak geldt $ax + by > c$. In het andere halfvlak geldt $ax + by < c$. Lijn l heet de grenslijn van de halfvlakken. $ax + by > c$ en $ax + by < c$ heten lineaire ongelijkheden. Het gebied bij de ongelijkheid $ax + by \geq c$ bestaat uit de punten van het halfvlak en de grenslijn.

Om te controleren welke ongelijkheid tot een halfvlak behoort, vul je de coördinaten van een punt uit dat halfvlak in.



Voor punten op de grenslijn geldt: $x + 2y = 6$

Voor punten onder de grenslijn geldt: $x + 2y < 6$

Voor punten boven de grenslijn geldt: $x + 2y > 6$

Lineair programmeren, doelfunctie, isolijn, beslissingsvariabelen, beperkende voorwaarden en toegestane gebied

Lineair programmeren is een methode om de grootste (of kleinste) waarde van een doelfunctie te bepalen. De grafiek die hoort bij een vaste waarde van de doelfunctie heet isolijn. De variabelen van de doelfunctie heten beslissingsvariabelen. De voorwaarden die aan de beslissingsvariabelen worden gesteld heten de beperkende voorwaarden. Vertaald in lineaire ongelijkheden en getekend in een assenstelsel geven ze het gebied aan dat aan alle beperkende voorwaarden voldoet. Dit heet het toegestane gebied.

Je kunt met isolijnen een maximum of minimum van een doelfunctie vinden

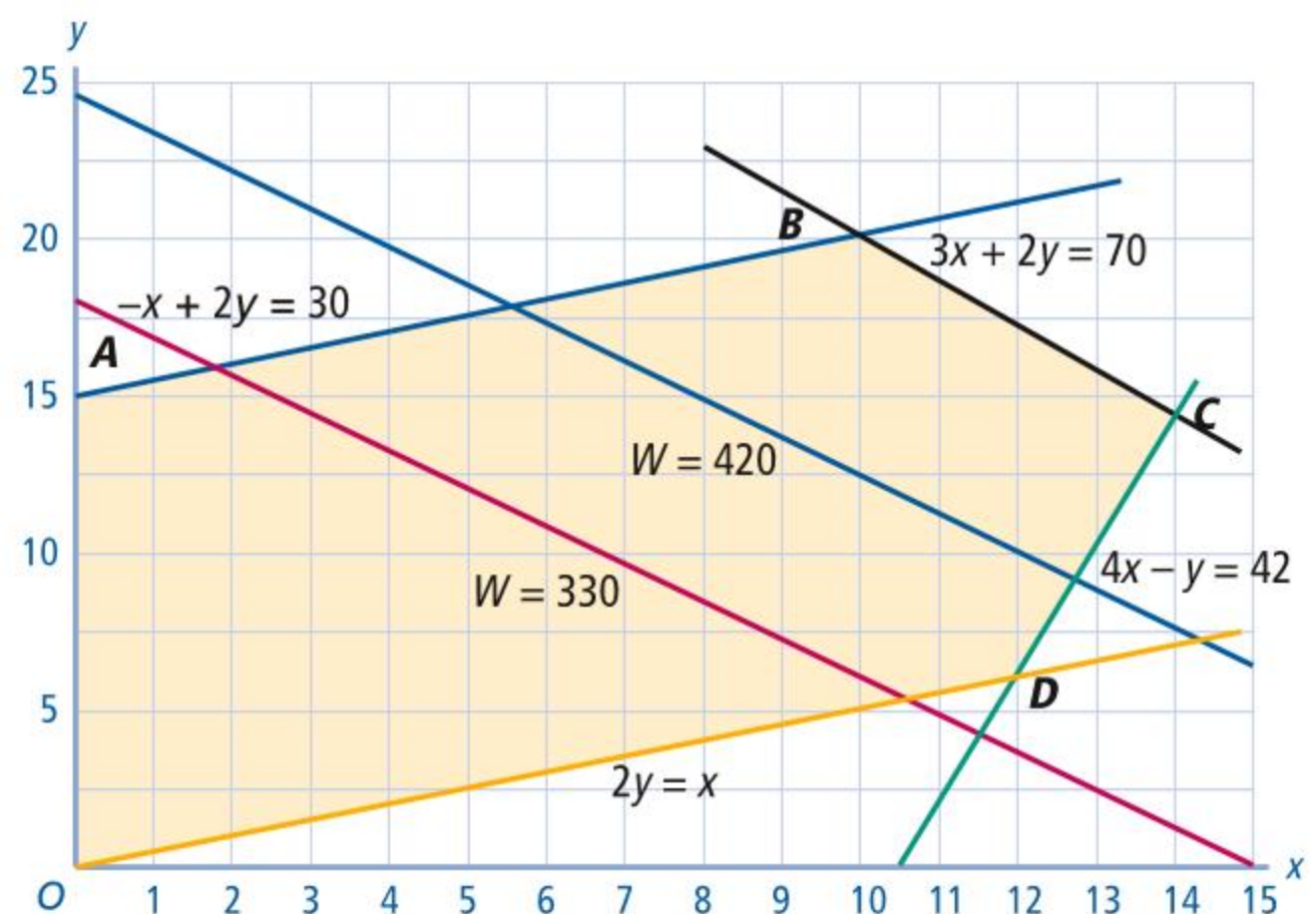
Als je een isolijn verschuift, dan verandert de waarde van die isolijn. Daarbij zie je in welke richting je de isolijn moet verschuiven om de maximale of minimale waarde van de doelfunctie te vinden.

Voorbeeld

Bereken met hulp van isolijnen het maximum van de doelfunctie $W = 18x + 15y + 60$ op het toegestane gebied dat hiernaast is getekend.

Oplossing

De lijn door (0, 18) en (15, 0) hoort bij de isolijn $W = 330$. Teken deze isolijn. Teken nog een isolijn, bijvoorbeeld door (0, 24). Voor deze lijn geldt $W = 420$, dus in dit geval geeft een hoger liggende isolijn een hogere uitkomst. W is maximaal in $B(10, 20)$. De maximale waarde is $W = 18 \cdot 10 + 15 \cdot 20 + 60 = 540$



Je kunt met behulp van de randenwandelmethode een maximum of een minimum van een doelfunctie vinden

Vergelijk de waarde van de doelfunctie in een hoekpunt met de waarde in de nabijgelegen hoekpunten.

Voorbeeld

De beperkende voorwaarden:

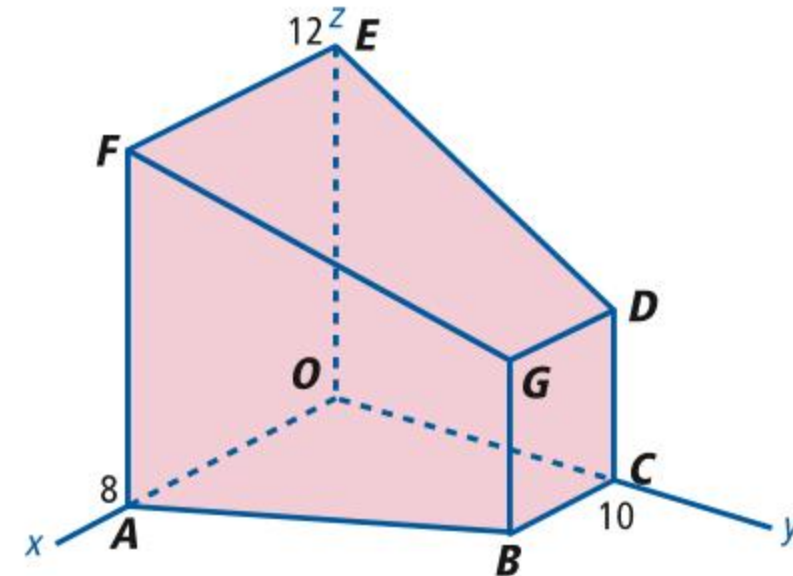
$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y \leq 10$$

$$5x + 2y \leq 40, 3y + 5z \leq 60$$

De doelfunctie:

$$W = 16x + 12y + 10z$$

Voor welke waarden van x , y en z is W maximaal?



Oplossing

Begin in een punt met een hoge x , y en z , bijvoorbeeld in punt F .

$$\text{In } F(8, 0, 12) \text{ is } W = 248$$

$$\text{In } G(4, 10, 6) \text{ is } W = 244, \text{ in } E(0, 0, 12) \text{ is } W = 120$$

$$\text{In } A(8, 0, 0) \text{ is } W = 144$$

Naar welk punt je ook wandelt vanuit F , de waarde van W neemt dan steeds af.

In F is W maximaal, dus voor $x = 8$, $y = 0$ en $z = 12$

Je kunt in Excel de invoegtoepassing 'Oplosser' gebruiken om een lineair programmeringsprobleem op te lossen

Je moet eerst zorgen dat de invoegtoepassing 'Oplosser' is geïnstalleerd.

Voorbeeld

Gevraagd wordt het minimum te bepalen van de doelfunctie $TK = 400x + 150y - 30z$ met als beperkende voorwaarden : $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x \leq 3$ en $2x \geq y + z$ (voorwaarde 1), $3x + y - z \geq 6$ (voorwaarde 2) en $z = 9 - x - y$ ((voorwaarde 3).

Oplossing

De voorwaarden 1 en 3

herschrijf je tot

$$2x - y - z \geq 0 \text{ en}$$

$$x + y + z = 9.$$

Nu kun je de coëfficiënten van

de voorwaarden 1, 2 en 3 en van de doelfunctie TK invullen in de cellen C2 t/m E4.

In cel C5 zet je de formule $=\$B\$2*\$C2+\$B\$3*\$C3+\$B\$4*\$C4$ en vervolgens kopieer je deze formule naar de cellen D5, E5 en F5. Vervolgens druk je op 'Oplosser' in tabblad 'Gegevens' en vul je de voorwaarden als volgt in: $B2 \leq 3, C5 \geq 0, D5 \geq 6, E5 = 9$.

Standaard staat ingesteld dat de variabelen niet negatief zijn.

De minimale waarde van de doelfunctie is 1290 en wordt bereikt voor $x = 3, y = 1,5$ en $z = 4,5$.

F5		fx				
		= \$B\$2*\$F2+\$B\$3*\$F3+\$B\$4*\$F4				
	A	B	C	D	E	F
1	Variabelen	Aantal	Voorwaarde 1	Voorwaarde 2	Voorwaarde 3	Doelfunctie
2	x	3	2	3	1	400
3	y	1,5	-1	1	1	150
4	z	4,5	-1	-1	1	-30
5	Totaal		-8,88178E-16	6	9	1290

Test jezelf

T-1 Gegeven zijn de volgende ongelijkheden.

$$x + 2y \leq 12$$

$$x + 2y \geq 3$$

$$x \leq 7$$

$$x - 2y \leq 5$$

$$x \geq -4$$

$$y \leq 7$$

Teken het gebied dat aan deze ongelijkheden voldoet.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-1.

T-2 Hiernaast is het toegestane gebied gekleurd behorende bij een aantal beperkende voorwaarden. Bij de lijnen in de tekening horen de vergelijkingen $5x + 8y = 40$, $-5x + 4y = 8$ en $y = -2,5x + 12,5$.

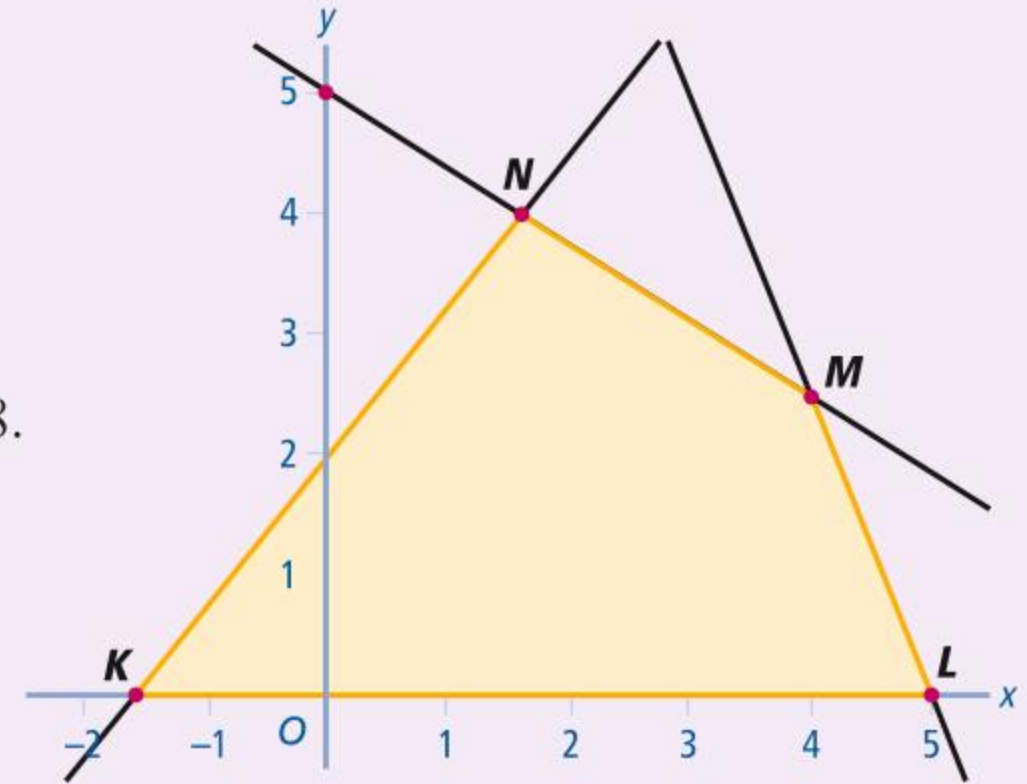
a Geef de ongelijkheden bij het toegestane gebied.

De doelfunctie is $D = 10 - 2x + y$.

b Neem de tekening over en teken de isolijnen $D = 6$ en $D = 8$.

c Bereken voor welke waarde van x en y de doelfunctie maximaal is. Hoe groot is die maximale waarde?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-2.



T-3 Bereken met de randenwandelmethode het minimum van de doelfunctie $H = 20 - 4x - 3y$ op het toegestane gebied van de tekening in de vorige opdracht.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-3.

T-4 Een vrachtrijder vervoert in opdracht van een meubelfabriek stoelen, kasten en bijzettafeltjes. Zijn auto kan maximaal vijf stoelen bevatten, hoogstens vier kasten of een combinatie waarbij het aantal kasten en stoelen tezamen niet meer dan zes kan zijn. Het aantal te vervoeren kasten, stoelen en bijzettafeltjes tezamen kan niet groter zijn dan twaalf. De transportkosten per stoel bedragen € 4,-, per kast € 5,- en per bijzettafeltje € 2,50.

a Hiernaast zie je het toegestane gebied dat hoort bij dit probleem. Als beslissingsvariabelen zijn gekozen: het aantal stoelen s , het aantal kasten k en het aantal bijzettafeltjes b .

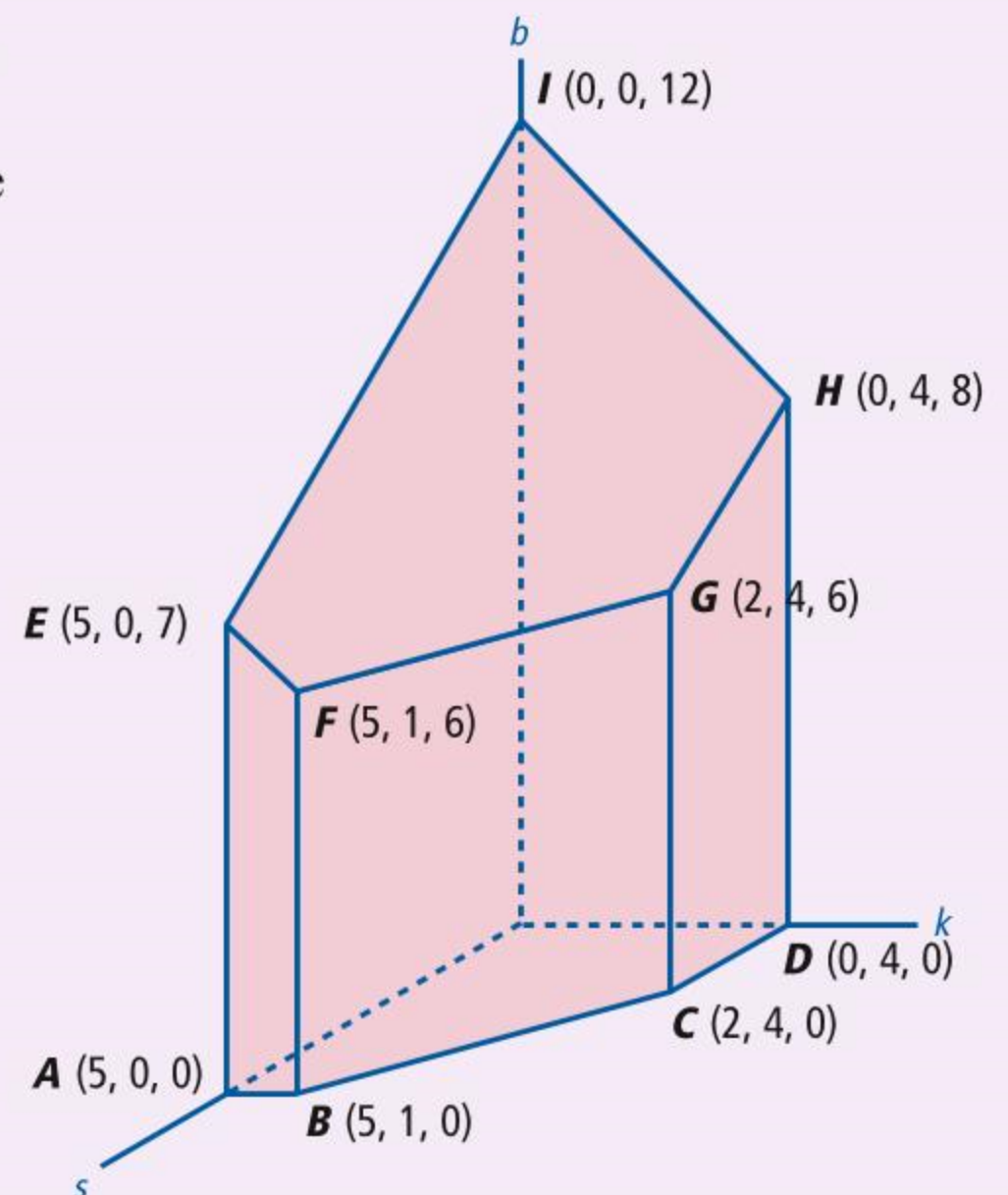
Schrijf de beperkende voorwaarden op in ongelijkheden.

b De punten A , B , F en E horen bij de maximale hoeveelheid stoelen. Leg dit uit.

c Bij welke voorwaarde horen de punten C , D , G en H ? En welke bij de punten E , F , G , H en I ?

d Bereken hoe de vrachtrijder zijn wagen moet beladen om een maximale opbrengst te hebben.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-4.

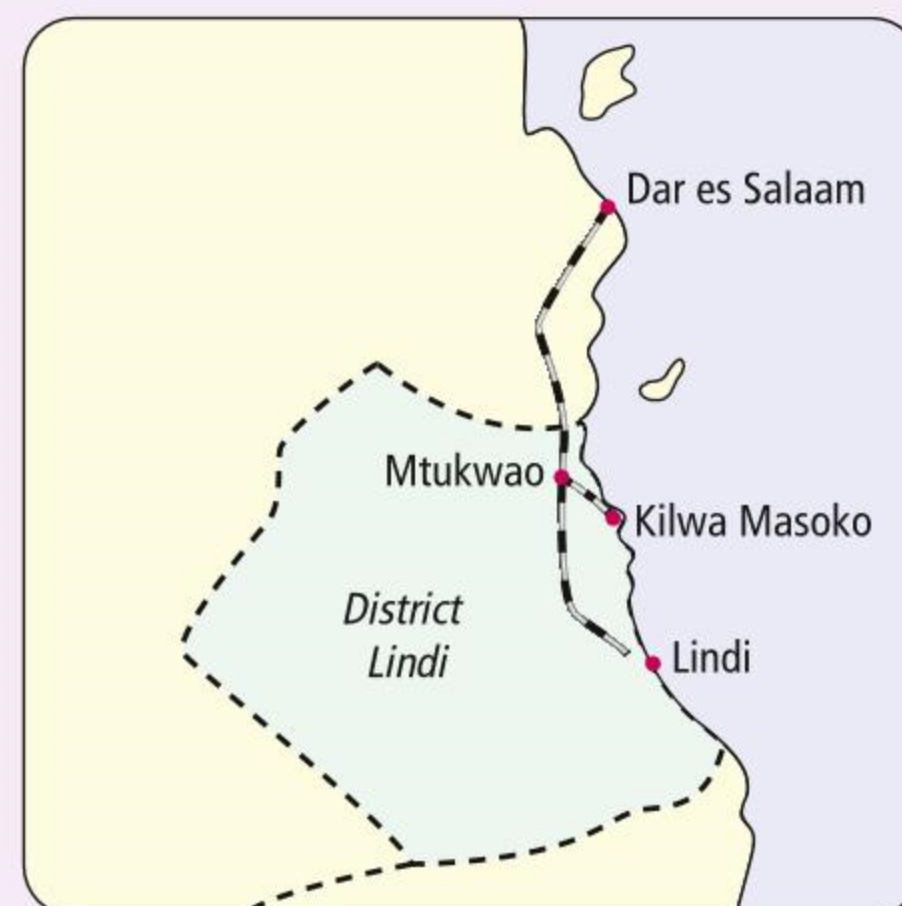


- T-5** Een pensioenfonds gaat een bedrag ter waarde van 30 miljoen euro beleggen in de fondsen aandelen, obligaties, onroerend goed en groene energie. De regels die in acht genomen moeten worden staan in een folder. Een deel hiervan is afgedrukt. De verwachte jaarlijkse opbrengst van aandelen is 8% van het hierin geïnvesteerde bedrag. Voor obligaties, onroerend goed en groene energie zijn deze percentages achtereenvolgens 7%, 9% en 11%. Bereken bij welke verdeling van het te investeren bedrag over aandelen, obligaties, onroerend goed en groene energie de verwachte opbrengst van het fonds maximaal is en geef de te verwachten maximale opbrengst.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 8-5.

- Minstens drie miljoen euro moet in elk van de fondsen worden belegd.
- Ten minste 10 miljoen euro moet worden geïnvesteerd in aandelen en obligaties samen.
- Het bedrag dat aan aandelen wordt besteed mag niet het dubbele van het bedrag aan obligaties overschrijden.
- Het bedrag dat aan groene energie wordt besteed, mag niet meer zijn dan het totale bedrag voor de overige drie fondsen.

- T-6** Deze opdracht gaat over het pensioenfonds van opdracht T-5.
- Veronderstel dat de opbrengst van de aandelen zakt naar 4%, terwijl de verwachte opbrengsten van de overige fondsen gelijk blijven.
Verandert daardoor de verdeling van het te investeren bedrag?
 - Wat is de maximale opbrengst bij het veranderde rendement van de aandelen?
 - Ga weer uit van de verwachte opbrengsten in opdracht T-5. Het pensioenfonds is wat huiverig voor de beleggingen in groene energie en wil niet meer dan 12 miljoen aan dat fonds besteden.
Onderzoek of en met hoeveel euro de te verwachten totale opbrengst zal afnemen.

- T-7** Het district Lindi is bekend om zijn kokosnoten. In het plaatsje Mtukwao worden op een gegeven moment 200 zakken kokosnoten voor de verkoop bijeengebracht. De kokosnoten worden meestal verkocht in Dar es Salaam, Kilwa Masoko of in Lindi. In elke zak zitten 120 kokosnoten. De verkoopprijs van een kokosnoot verschilt per plaats. In Dar es Salaam is de verkoopprijs 1 shilling per stuk, in Kilwa Masoko 60 cent en in Lindi 80 cent (1 shilling is 100 cent). De kosten van het vervoer per vrachtwagen naar Dar es Salaam, Kilwa Masoko en Lindi zijn per zak respectievelijk 13 shilling, 1 shilling en 10 shilling. De inwoners van Mtukwao hebben voor de transportkosten maximaal 1700 shilling ter beschikking, liever geven ze minder uit. Wel moeten alle 200 zakken met kokosnoten verkocht worden.
Bereken bij welke verdeling de winst maximaal is.



Hoofdstuk 9

Matrices

In dit hoofdstuk

9-1	Matrices	252
9-2	Matrices vermenigvuldigen	254
9-3	Overgangsmatrices	256
9-4	Machten van matrices	258
9-5	De inverse matrix	260
9-6	Gemengde opdrachten	262
	Samenvatting	264
	Test jezelf	266

Op de computer

Bij vrijwel iedere basisparagraaf en de voorkennis is ICT:

- interactieve applets voor inzicht in de theorie
- interactieve applets met feedback om te oefenen

Bij ieder hoofdstuk is ook een digitale Test jezelf die per paragraaf feedback geeft.

9-1

Matrices

- 1 Een importeur van auto's heeft magazijnen in Amsterdam en in Rotterdam. Zijn verkoopcentra staan in Alkmaar, Utrecht en Zwolle. Op een gegeven moment zijn er van het type DL in de magazijnen in Amsterdam 300 en Rotterdam 200 op voorraad. De aantallen auto's van dit type die wekelijks vanuit de magazijnen naar de verkoopcentra gaan staan in de tabel hiernaast.
- a Hoe groot is de voorraad in Amsterdam na vier weken? En in Rotterdam?
- b Welk magazijn is het eerst door zijn voorraad heen?

	Al	Ut	Zw
Amsterdam	12	7	6
Rotterdam	0	8	4

Theorie

Een **matrix** is een rechthoekig schema met getallen. Deze zijn gerangschikt in **rijen** (horizontaal) en **kolommen** (verticaal). Om het schema worden haken gezet.

De **afmetingen van een matrix** geef je door eerst het aantal rijen en daarna het aantal kolommen te noemen.

Een $p \times q$ -matrix (spreek uit: p bij q matrix) heeft p rijen en q kolommen. Het aantal rijen hoeft niet gelijk te zijn aan het aantal kolommen.

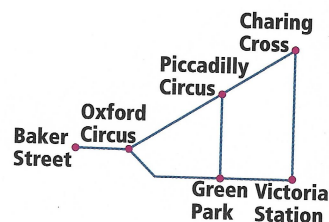
Bij een **vierkante matrix** is het aantal rijen wel gelijk aan het aantal kolommen.

3	5	1	2	← rij
0	7	3	0	
2	5	10	4	

↑ kolom

Deze matrix is een 3×4 -matrix

- 2 Hiernaast staat een deel van het metronet in Londen schematisch weergegeven. De afstand tussen twee stations wordt uitgedrukt in haltes. Zo is de afstand van Victoria Station naar Baker Street drie haltes.
- a Geef in een matrix de onderlinge afstanden tussen de stations weer.
- b Waarom moet hier wel sprake zijn van een vierkante matrix?



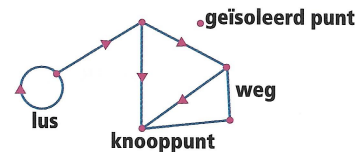
- 3 Op het kaartje van de Londense metro van de vorige opdracht is te zien dat er geen directe verbinding is tussen Oxford Circus en Victoria Station, of tussen Green Park en Charing Cross.

- a Geef in de matrix hiernaast met een 1 aan of twee stations direct met elkaar verbonden zijn. Als er geen directe verbinding is, geef je dit aan met een 0.
- b Waarom heb je in dit geval aan een halve matrix voldoende? Welke helft moet je kiezen?
- c Hoe zie je aan de matrix welke stations het meest centraal liggen?

		van					
		BS	OC	GP	PC	VS	CC
naar	BS	0	1	...	...	...	...
	OC	1	0	...	...	...	0
	GP	...	...	0	...	...	0
	PC	...	...	...	...	...	...
	VS	...	...	...	...	...	...
	CC	...	0	0	...	...	...

Theorie

Een **graaf** is een schema met een aantal punten en eventueel lijnstukken tussen die punten. De lijnstukken heten **wegen**. Soms kunnen wegen slechts in één richting worden doorlopen. Je hebt dan een **gerichte graaf**. Een **lus** in een graaf is een weg die een punt met zichzelf verbindt. Een **geïsoleerd punt** is een punt dat met geen enkel ander punt is verbonden.



- 4 Hieronder staan twee onvolledige matrices van de plaatsen A, B, C en D. De linker matrix geeft aan of er wel of niet een directe verbinding is tussen twee plaatsen. In de rechter matrix staat van elk tweetal plaatsen de kortste afstand tussen die twee plaatsen vermeld.

		van			
		A	B	C	D
naar	A	0	...	0	...
	B	...	...	1	...
	C	...	1	...	...
	D	0	0	...	...

		van			
		A	B	C	D
naar	A	0	5	8	...
	B	5	...	...	7
	C	6	...	...	...
	D	10	7	...	...

Teken een graaf bij deze situatie en vul de ontbrekende getallen in.

- 5 De auto's van de importeur van opdracht 1 zijn elk € 12.400,- waard.

- a Geef in een matrix een overzicht van de bedragen die de verkoopcentra elke week moeten overmaken naar de importeur.
- b Van een ander model auto, de XDL, zie je hiernaast de wekelijkse aantallen die naar de verkoopcentra gaan. Geef in één matrix de aantallen auto's DL en XDL die naar de verkoopcentra gaan.

	Al	Ut	Zw
Amsterdam	5	4	3
Rotterdam	11	2	2

Theorie

Twee matrices kun je **optellen** of van elkaar **aftrekken** door de getallen op overeenkomstige plaatsen op te tellen of af te trekken. Dit kan alleen als de twee matrices dezelfde afmetingen hebben en is alleen zinvol als de getallen op de overeenkomstige plaatsen dezelfde betekenis hebben.

Een matrix **vermenigvuldigen** je met een getal door alle getallen in de matrix met dat getal te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

Bereken $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ en $2 \times \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Oplossing

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 & -3+0 \\ 2-5 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

- 6 Bereken:

a $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

b $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9-2

Matrices vermenigvuldigen

- 7 Een groothandel gebruikt bij het berekenen van de weekopbrengst de volgende matrices.

$$\begin{array}{l} \text{Amsterdam} \\ \text{Rotterdam} \end{array} \begin{array}{c} \text{hamer} \text{ beitel} \text{ zaag} \\ \begin{pmatrix} 35 & 15 & 30 \\ 50 & 20 & 25 \end{pmatrix} \end{array} = V \quad \begin{array}{l} \text{hamer} \\ \text{beitel} \\ \text{zaag} \end{array} \begin{array}{c} \text{voor} \text{ na} \\ \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 21 & 23 \\ 29 & 32 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

In de verkoopmatrix V staat hoeveel gereedschappen de groothandel gemiddeld per week verkoopt in twee plaatsen. In de prijzenmatrix P staan de prijzen in euro's voor en na een prijsverhoging. De groothandel maakt een schema om de weekopbrengst te berekenen.

- Ga na dat vermenigvuldigen van de getallen in de tweede rij en de eerste kolom het getal 1995 oplevert.
- Wat is de betekenis van het getal 1995?
- Neem het schema over en bereken de andere getallen.
- Bereken de weekopbrengst vóór de prijsverhoging voor de twee plaatsen samen.
- Hoeveel euro extra levert de prijsverhoging op?

$V \times P$	ha	vo	na
	be	21	23
	za	29	32
	ha	be	za
Am	35	15	30
Ro	50	20	25
		vo	na
Am	...	...	
Ro	1995	...	

$$50 \times 17 + 20 \times 21 + 25 \times 29 = \dots$$

Aanpak

Hoe bereken je het product $A \times B$ van twee matrices A en B ?

- Maak een schema waarbij je de matrices zo invult dat boven de kolommen van matrix A hetzelfde staat als vóór de rijen van matrix B .
- Vermenigvuldig de getallen in elke rij van matrix A met de overeenkomstige getallen in de kolommen van matrix B en tel op.
- Bij de productmatrix staan boven de kolommen dezelfde variabelen als boven de kolommen van matrix B , en vóór de rijen staan dezelfde variabelen als voor de rijen van matrix A .

Voorbeeld

Bereken het product van de matrices.

$$A = \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} k \quad l \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} k \\ l \end{array} \begin{array}{c} p \quad q \quad r \quad s \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Schema

$$A \times B = \begin{array}{c} k \quad l \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} p \quad q \quad r \quad s \\ \begin{pmatrix} 17 & 13 & 8 & 9 \\ 23 & 26 & 7 & 3 \\ 16 & 20 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Oplossing

$$A \times B = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} p \quad q \quad r \quad s \\ \begin{pmatrix} 17 & 13 & 8 & 9 \\ 23 & 26 & 7 & 3 \\ 16 & 20 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

8 Bereken.

a
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \end{pmatrix}$$

c
$$(2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} (2 \ -1 \ 3 \ 2)$$

d
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

9 Een handelaar in sportkleding bestelt nieuwe trainingspakken van de merken Olympix en Super en in de maten small, medium en large. In de prijzenmatrix P staan de prijzen in euro's. In de bestelmatrix B staat de bestelgrootte.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \text{small} & \text{medium} & \text{large} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{olympix} \\ \text{super} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 60 & 75 & 90 \\ 75 & 85 & 95 \end{pmatrix} = P \end{array}$$

- a Maak een schema en bereken daarmee PB . Wat zet je boven de kolommen en voor de rijen van de productmatrix PB ?
 b Welke getallen in PB hebben een betekenis? Geef de betekenis van die getallen.
 c Hoeveel is de handelaar aan inkoopkosten kwijt?
 d Bereken nu BP en leg uit welke getallen in BP een zinvolle betekenis hebben. Bereken daarmee de totale kosten.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \text{olympix} & \text{super} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{small} \\ \text{medium} \\ \text{large} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

10 Gegeven zijn de matrices K , L , M en N .

- a Bereken KL en LK .
 b Is KL gelijk aan LK ? Geef een verklaring.
 c Waarom kun je MK niet berekenen?
 d Bereken, indien mogelijk, KM , LM en ML .
 e Wat blijkt als je NM berekent?
 f Bereken NN .

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = K \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix} = L$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} = M \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N$$

Instructie rekenmachine 6-3 Matrices vermenigvuldigen

Theorie

Een vierkante matrix die op de hoofddiagonaal (linksboven naar rechtsonder) uitsluitend uit enen bestaat en voor het overige uit nullen, heet een **eenheidsmatrix**. Vaak wordt een $n \times n$ eenheidsmatrix met de letter I_n aangegeven.

Als het mogelijk is om een matrix A met een eenheidsmatrix I te vermenigvuldigen geldt: $A \times I_n = A$ of $I_n \times A = A$.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11a Bedenk twee matrices waarvan het product de 3×3 -eenheidsmatrix is.

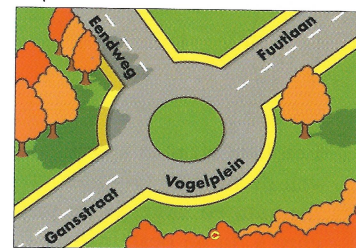
b Met welke matrix X moet je $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ vermenigvuldigen om $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

te krijgen? Bedenk eerst welke afmetingen de matrix X moet hebben.

9-3

Overgangsmatrices

- 12 Op het Vogelplein komen drie wegen samen: de Eendweg, de Fuutlaan en de Gansstraat. De gemeente overweegt om de Eendweg te verbreden. Bij een verkeerstelling wordt genoteerd waar de auto's vandaan komen en waar ze heen gaan. In de matrix zie je het resultaat van de telling van een dag.



- a Hoeveel auto's komen vanaf de Eendweg en verlaten het plein via de Gansstraat?

En hoeveel auto's komen totaal vanaf de Eendweg?

- b Hoeveel auto's zijn op deze dag het Vogelplein gepasseerd?
 c Het deel van de auto's die het plein oprijden van de Eendweg en het plein via de Gansstraat verlaten is 0,552. Reken dit na.
 d Neem de onderste matrix hiernaast over en vul hem verder in.
 e Door op verschillende dagen te tellen blijkt dat de percentages op andere dagen ongeveer hetzelfde zijn. Op een dag werden 5000 auto's geteld op het Vogelplein. Er kwamen 1200 auto's van de Eendweg, 1550 van de Fuutlaan en 2250 van de Gansstraat.

Bereken hoeveel auto's het Vogelplein via elk van de drie wegen verlaten.

		van		
		E	F	G
naar	E	8	538	941
	F	395	10	1053
	G	497	552	6

		van		
		E	F	G
naar	E	...	...	...
	F	...	...	...
	G	0,55	...	...

Theorie

Een **datamatrix** is een matrix waarin gegevens zijn verzameld.

Een datamatrix met frequenties kun je omrekenen naar een matrix met relatieve frequenties, een **relatieve frequentie matrix**.

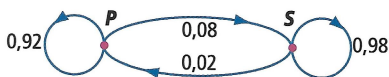
Voorbeeld

		van				relatieve frequentiematrix	
		P	Q			P	Q
naar	P	108	217	naar	P	0,36	0,71
	Q	193	88		Q	0,64	0,29

88

217 + 88

- 13 In een land is een behoorlijke trek van platteland naar stad en omgekeerd. Een sociaal-geograaf heeft enkele jaren gegevens hierover verzameld en komt tot het hieronder getekende jaarlijkse model.



- a De onderzoeker houdt in zijn model geen rekening met geboorte, sterfte, immigratie en emigratie. Waaraan zie je dat?
 b Vul matrix A in.
 c In matrix B zie je de verdeling van de inwoners aan het begin van 2003. Bereken AB.
 d Welke betekenis hebben de getallen van de productmatrix?

		van				aantal inwoners	
		S	P			S	P
naar	S	$\left(\begin{array}{cc} \dots & \dots \end{array} \right)$	$= A$			S	$\left(\begin{array}{cc} 60\,000 & \dots \end{array} \right)$
	P	$\left(\begin{array}{cc} \dots & \dots \end{array} \right)$				P	$\left(\begin{array}{cc} \dots & 40\,000 \end{array} \right)$
						$= B$	

In een **overgangsmatrix** staan de kansen om in een bepaalde periode van de ene categorie in een andere te komen. In elke periode zijn de overgangskansen gelijk. Daarom kan deze matrix worden gebruikt om de populatieverdeling in een volgende periode te vinden.

Voorbeeld

Gegeven is de overgangsmatrix M en de populatieverdeling P_0 op tijdstip $t = 0$.

Bereken de populatieverdeling bij $t = 1$ en $t = 2$.

$$\begin{matrix} & E & T \\ E & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \end{pmatrix} \\ T & \begin{pmatrix} 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \end{matrix} = M \quad \begin{matrix} & E & T \\ E & \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix} \\ T & \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix} \end{matrix} = P_0$$

Oplossing

$$t = 1 \quad P_1 = M \times P_0 = \begin{pmatrix} 68 \\ 132 \end{pmatrix}$$

$$t = 2 \quad P_2 = M \times P_1 = \begin{pmatrix} 60,8 \\ 139,2 \end{pmatrix}$$

- 14 In november 2003 is er onderzoek gedaan naar de populariteit van Sinterklaas. In de tabel hiernaast is ondermeer te zien dat 546 personen die in 2002 Sinterklaas vierden dit ook in 2003 deden.

- a Hoeveel personen vierden in 2002 Sinterklaas?
En hoeveel personen uit deze groep vierden het niet in 2003?
- b Maak met behulp van de tabel een overgangsmatrix.
- c Veronderstel dat de overgangsmatrix voor de jaren na 2003 niet veranderd is.
Hoeveel personen uit de groep die onderzocht is zullen in 2004 Sinterklaas hebben gevierd? En in 2005?

		Sinterklaas in 2002	
		wel	niet
Sinterklaas in 2003	wel	546	67
	niet	104	268

- 15 In een dorp zijn twee concurrerende tankstations. Het verloop tussen beide tankstations is nogal groot. Hiernaast is dat verloop beschreven. In het dorp maken op een bepaald moment 300 mensen gebruik van de 'Witte Pomp' en 300 van 'Quick Tank'.

- a Geef de overgangskansen weer in een graaf.
- b Maak een overgangsmatrix bij deze situatie.
- c Waarom noem je de overgangsmatrix een model?
- d Hoeveel mensen zullen er na één maand tanken bij de 'Witte Pomp'? En hoeveel na twee maanden?

Concurrentieslag

In ons dorp heerst een hevige concurrentiestrijd op het bezinefront. Aangelokt door stuntprizen laat elke maand de helft van de klanten van Quick Tank de tank bij de Witte Pomp volgooien. Quick Tank voert een actie met spaarzegels waardoor ze elke maand 25% van de klanten van de Witte Pomp weet te krijgen.

- 16 Op een school is jarenlang het aantal zittenblijvers in de Tweede Fase van het VWO bijgehouden. Het blijkt dat de percentages zittenblijvers per leerjaar ongeveer gelijk blijven. De percentages, gedeeld door 100, staan in matrix M hiernaast.

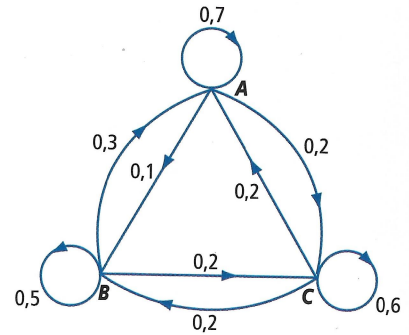
- a Teken de graaf van het overgangsmodel met de kansen.
- b Hoe groot is het percentage zittenblijvers in 4 VWO?
- c Hoe groot is het percentage geslaagden in 6 VWO?
- d In de matrix staat op een aantal plaatsen een nul.
Kan er op één van die plaatsen ook een ander getal dan nul staan?
- e De som van elk van de eerste twee kolommen is gelijk aan 1.
Welke informatie geeft dat over de school?
- f Bereken M^2 en M^3 en geef de betekenis van de getallen in deze matrices.

		van		
		4	5	6
naar	4	0,08	0	0
	5	0,92	0,10	0
	6	0	0,90	0,07

9-4

Machten van matrices

- 17 Het autoverhuurbedrijf Rent-a-Car heeft op een eiland op drie plaatsen auto's gestationeerd. Auto's die in één van de drie plaatsen worden gehuurd kunnen in elk van de drie plaatsen weer worden ingeleverd. In de graaf zie je de overgangskansen.
- Stel de overgangsmatrix M op.
 - Rent-a-Car heeft 90 auto's om te verhuuren, in elke plaats 30. Op een dag worden alle auto's één keer verhuurd en 's avonds terugbezorgd. Welke verdeling over de plaatsen verwacht je aan het eind van de dag?
 - Bereken ook de verdeling van de gehele aantallen auto's over de verschillende plaatsen na twee, drie, vier, vijf en zes dagen.
 - Na hoeveel dagen verandert de verdeling over de verschillende plaatsen niet meer?



Theorie

Als een verdeling V na vermenigvuldiging met de overgangsmatrix M niet meer verandert dan heet de verdeling **stabiel**. Als er een stabiele verdeling bestaat, kun je deze vinden door de verdeling van een volgende periode steeds weer met de overgangsmatrix M te vermenigvuldigen. De verdeling zal dan steeds meer op de stabiele verdeling gaan lijken. Je kunt de verdeling na n periodes ook vinden door de beginverdeling met de matrix M^n te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

Gegeven zijn de overgangsmatrix $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,15 \\ 0,6 & 0,85 \end{pmatrix} = M$

Oplossing

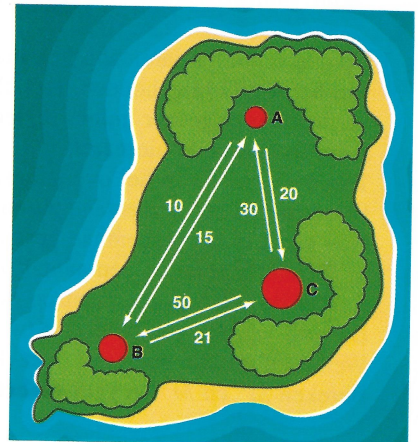
$$M^5 \cdot V \text{ geeft } \begin{pmatrix} 20 \\ 80 \end{pmatrix} = V_5 \text{ en } M \begin{pmatrix} 20 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 80 \end{pmatrix},$$

en de verdeling $\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = V$.

dus $\begin{pmatrix} 20 \\ 80 \end{pmatrix}$ is een stabiele verdeling.

Bereken de stabiele verdeling.

- 18 Op een eiland liggen drie dorpen A, B en C. Begin 2007 wonen er respectievelijk 200, 300 en 500 inwoners in de dorpen. In de figuur zie je welke aantallen er in dat jaar zijn verhuisd.
- Stel de overgangsmatrix M op.
 - Neem aan dat de kansen ongewijzigd blijven in de loop van de volgende jaren. Bereken het te verwachten aantal inwoners van elk dorp begin 2009 en begin 2011.
 - Geef de stabiele verdeling.



- 19** Gegeven is de overgangsmatrix hiernaast.
- Teken een graaf bij deze matrix.
 - Op den duur zal er een stabiele situatie ontstaan.
Leg uit dat daarbij moet gelden: $8K = 6L$.
 - De totale populatie $K + L$ is gelijk aan 1400.
Hoe groot zijn K en L in geval van een stabiele verdeling?
 - Op het tijdstip $t = 0$ is de populatie verdeeld in $K = 700$ en $L = 700$.
Na hoeveel perioden zal de situatie stabiel zijn?

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ K \quad L \\ \text{naar} \end{array} \begin{pmatrix} K & L \\ 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}$$

- 20** Gegeven zijn de matrices M en N hiernaast.
- Bereken M^2 .
 - Ga met een berekening na of $M \cdot N = N \cdot M$.
 - Ga met een berekening na of $M \cdot M^3 = M^2 \cdot M^2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M \text{ en } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = N$$

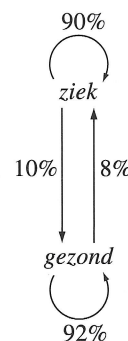
- 21** Van een bepaalde dierpopulatie is een aantal gegevens bekend, die verwerkt zijn in de matrix M hiernaast. Je kunt bijvoorbeeld zien dat van de nuljarigen 60% éénjarig wordt. Ook zie je dat van de tweejarigen 50% driejarig wordt en dat deze tweejarigen per individu gemiddeld twee jongen krijgen.
- Hoeveel nakomelingen krijgt een éénjarige gemiddeld?
 - Bereken M^2 en geef de betekenis van de getallen in deze matrix.
 - Hiernaast staat de matrix V met de beginverdeling van de populatie.
Hoe is de leeftijdsopbouw na één jaar en na twee jaar?
Hoe groot is het totaal aantal dieren na één jaar en na twee jaar?
 - Met het product $M^n \cdot V = V_n$ bereken je de aantallen per leeftijdsklasse na n jaar.
Geef een matrix A zodat $A \cdot V_n = T_n$ de totale populatie na n jaar geeft.
 - Onderzoek door een aantal waarden van T_n te berekenen of de totale populatie exponentieel groeit.

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ 0 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0,9 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V$$

- 22** In het model hiernaast is het verloop van epidemie weergegeven. Je kunt onder meer aflezen dat 10% van de zieken één periode later weer gezond is.
- Hoe kun je zien dat er in dit model van uitgegaan is dat je voor deze ziekte niet immuun kunt worden?
 - Z_n en G_n zijn de percentages zieken en gezonden in periode n .
Leg uit dat $Z_{n+1} = 0,08G_n + 0,9Z_n$ en druk vervolgens G_{n+1} uit in Z_n en G_n .
 - Op den duur stabiliseert het percentage zieken tot een waarde Z . Dan geldt $Z_{n+1} = Z_n = Z$ en $G_{n+1} = G_n = G$. Gebruik de vergelijkingen uit opdracht b en het gegeven dat $Z + G = 100$ om de waarden voor Z en G te berekenen.
 - Stel bij het model een overgangsmatrix M op en bereken met behulp van machten van deze matrix de waarden van Z en G .
 - Leg uit dat in de stabiele situatie geldt

$$M \cdot \begin{pmatrix} G \\ 100 - G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ 100 - G \end{pmatrix} \text{ en bereken op deze manier } Z \text{ en } G.$$



9-5

De inverse matrix

- 23** Een school met 2030 leerlingen hield tijdens een griep epidemie het aantal zieke leerlingen bij. Matrix V beschrijft het verloop van de griep epidemie per twee dagen.

- a** Geef de betekenis van de getallen in de matrix.
b In matrix B zie je dat er op 10 januari 1803 gezonde en 227 zieke leerlingen waren.

Hoeveel zieke leerlingen waren er op 12 januari?

- c** Om te weten hoeveel leerlingen op 8 januari ziek waren, moet je terugrekenen. In matrix W is g het aantal gezonde leerlingen op 8 januari en is z het aantal zieke leerlingen op 8 januari.

Laat zien dat bij het aantal gezonde leerlingen op 10 januari de vergelijking $0,90g + 0,6z = 1803$ past.

- d** Bereken het aantal zieke leerlingen op 8 januari. Gebruik hierbij de vergelijking uit opdracht c en het gegeven dat $g + z = 2030$.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ G \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ G \\ Z \end{array} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,6 \\ 0,10 & 0,4 \end{pmatrix} = V$$

$$\begin{pmatrix} 1803 \\ 227 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix} g \\ z \end{pmatrix} = W$$



- 24** De vorige opdracht kun je ook maken met behulp van je rekenmachine. Voor het terugrekenen gebruik je de matrix V^{-1} .

- a** Ga na dat je rekenmachine voor V^{-1} de matrix hiernaast geeft en bereken $V^{-1} \cdot B$. Klopt dit met opdracht 23d?

- b** Bereken $V \cdot V^{-1}$ en $V^{-1} \cdot V$.

- c** Bereken $V \cdot (V^{-1} \cdot B)$ en $V^{-1} \cdot (V \cdot B)$.

Geef een verklaring voor het antwoord.

Instructie rekenmachine 6-5 Inverse matrix

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.33 & -2.00 \\ -.33 & 3.00 \end{bmatrix}$$

Theorie

De **inverse matrix** A^{-1} van de matrix A is de matrix waarvoor geldt dat $A \cdot A^{-1} = I_n$ en $A^{-1} \cdot A = I_n$ waarbij I_n een eenheidsmatrix is.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ -1,25 & 0,5 & 0,625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 1

Geef de inverse van de matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Oplossing

Voer C in op de rekenmachine; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & -0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

Voorbeeld 2

Geef de inverse van de matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Oplossing

Voer C in op de rekenmachine;
 Je krijgt een foutmelding, dus C^{-1} bestaat niet.

De inverse van een matrix M wordt aangegeven met M^{-1} .
Deze notatie komt overeen met de notatie bij getallen:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ waarbij } a \cdot a^{-1} = 1.$$

Niet elke matrix heeft een inverse: Als niet elke getallencombinatie kan ontstaan door een matrix toe te passen, dan is er ook geen matrix te vinden waarmee je kunt terugrekenen.



- 25 In een woonwijk zijn drie elkaar beconcurrerende supermarkten gevestigd. Er is onderzocht hoe trouw klanten blijven aan een supermarkt. In de overgangsmatrix S hiernaast zie je de veranderingen per maand. In matrix V staan de aantallen klanten in de eerste week van oktober.

- a Hoeveel klanten zullen de supermarkten hebben in de eerste week van november? En hoeveel klanten zullen de drie supermarkten per week hebben na vijf maanden?
- b Hoeveel klanten waren er in iedere supermarkt in de eerste week van september?

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ \text{naar} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = S$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4500 \\ 5600 \\ 3900 \end{pmatrix} = V$$

26 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

In deze opdracht ga je A^{-1} , de inverse matrix van A berekenen.

- a Veronderstel dat $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Gebruik dat $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en leid hieruit een stelsel van vier vergelijkingen met vier onbekenden af.
- b Bereken a , b , c en d en laat zien dat $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
- c Toon algemeen aan dat voor de matrix $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ de inverse matrix gelijk is aan $M^{-1} = \frac{1}{ps - qr} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$.
- d Aan welke eis moeten de getallen van M voldoen om te zorgen dat de inverse matrix bestaat?

27a De matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ is de inverse van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

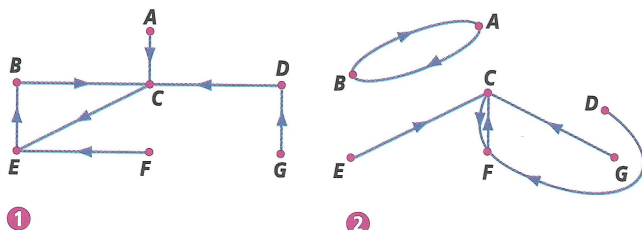
Het product $A \cdot A^{-1} = I_3$ levert een stelsel met negen vergelijkingen op. Stel deze vergelijkingen op en geef de oplossing van het stelsel.

- b Geef de inverse matrix van A .

c Voer de opdrachten a en b ook uit voor de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

9-6

Gemengde opdrachten



- 28 Zeven personen kiezen uit hun midden een vertegenwoordiger. In de linkergraaf zie je wie door wie wordt gekozen.
- Op wie zou de keuze volgens deze graaf vallen?
 - Tegen deze keuze wordt bezwaar gemaakt door Els. Ze vindt de gekozen persoon totaal ongeschikt en ze vermoedt dat ze niet de enige is die dat vindt. Ze stelt voor dat iedereen aangeeft wie hij zeker *niet* als vertegenwoordiger van de groep ziet. Het resultaat van deze keuze staat in de rechtergraaf weergegeven. Welke persoon is volgens deze graaf het minst geschikt?
 - Er moet toch een keuze worden gemaakt. Een positieve keuze wordt voorgesteld door het getal 1 en een negatieve door het getal -1 . Stel met behulp van deze afspraken een matrix op waarmee je de uiteindelijke keuze zou kunnen bepalen.
 - Wie wordt op basis van deze matrix de vertegenwoordiger van de groep?

- 29 Een arm land wordt geteisterd door droogte en tekort aan voedingsmiddelen. De regering probeert iedereen toch te voorzien van een dagelijks menu dat aan bepaalde minimeisen voldoet. De hoofdbestanddelen van dit menu zijn sojabonen en rijst. In de matrix S staat de samenstelling per 100 gram. Vitamine B2 is in mg, eiwit in gram en energie in kJ.

$$\begin{array}{l} \text{vitamine B2} \\ \text{eiwit} \\ \text{energie} \end{array} \begin{array}{cc} \text{rijst} & \text{sojabonen} \\ \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 15 & 20 \\ 3400 & 1000 \end{pmatrix} & = S \end{array}$$

In de matrix P staat de prijs in eurocenten per 100 gram.

In matrix B staat de behoefte aan voedingsstoffen per dag.

De regering heeft de keuze uit het leveren van de vier menu's in 100 gram product zoals in matrix M staat.

$$\begin{array}{l} \text{rijst} \\ \text{sojabonen} \end{array} \begin{array}{c} \text{prijs} \\ \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \end{pmatrix} = P \end{array}$$

- Geef aan welke matrices vermenigvuldigd moeten worden om de prijs van elk menu uit te rekenen en voer die vermenigvuldiging uit.
- Dezelfde opdracht voor de voedingsstoffen per menu.
- Welke menu's leveren voldoende voedingsstoffen op voor een volwassene en welke voor een kind?
- Zoek de goedkoopste uitbreiding van menu 4 zodat aan de minimeisen voor een volwassene voldaan wordt.
- Wat kost het dagelijks menu voor een volwassene, dat aan de minimum eisen voldoet, als er alleen maar rijst beschikbaar is?

$$\begin{array}{l} \text{vitamine B2} \\ \text{eiwit} \\ \text{energie} \end{array} \begin{array}{cc} \text{volwassene} & \text{kind} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 \\ 90 & 75 \\ 7000 & 4000 \end{pmatrix} & = B \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{rijst} \\ \text{sojabonen} \end{array} \begin{array}{c} \text{menu} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = M \end{array} \end{array}$$



30 Veronderstel dat het weer met zekere regelmaat verandert zoals in de matrix is weergegeven.

- a Wat is de betekenis van het getal 0,7 in de matrix M ?
- b Bereken de kans dat het overmorgen bewolkt is als het vandaag zonnig is.
- c Bereken M^2 en schrijf de betekenis van de getallen in deze matrix op.
- d Hoe zal de verhouding tussen het aantal zonnige dagen en het aantal bewolkte dagen op den duur worden?
- e Hoeveel dagen zon per jaar kun je volgens dit model verwachten?

$$\begin{array}{cc} & \text{vandaag} \\ & \text{zonnig bewolkt} \\ \text{morgen} \begin{array}{c} \text{zonnig} \\ \text{bewolkt} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

31a Gegeven is de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = F$.

Bereken $F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $F^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- b Verklaar dat je op deze manier de getallen uit de rij van Fibonacci vindt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- c f_n is het n -de getal uit de rij van Fibonacci. Gebruik machten van de matrix F om f_{16} en f_{17} te berekenen.
- d Bereken de inverse matrix F^{-1} . Gebruik deze matrix en je antwoorden van opdracht c om f_{15} te berekenen.
- e Voor de rij van Fibonacci geldt $f_0 = 0$ en $f_1 = 1$. Bereken f_{-1} , f_{-2} en f_{-3} .

32a Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Laat zien dat je dit stelsel kunt schrijven als

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- b Bereken de inverse matrix van $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- c Leg uit dat $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ de oplossing van het stelsel geeft.
- d Los het volgende stelsel vergelijkingen op: $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 18 \end{cases}$
- e Bereken de oplossing van het stelsel vergelijkingen: $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

Samenvatting

Matrix, rijen en kolommen

Een matrix is een rechthoekig schema met getallen, die gerangschikt zijn in rijen en kolommen. De afmetingen van een matrix geef je door het aantal rijen en kolommen te noemen. Een $p \times q$ -matrix heeft p rijen en q kolommen. Een datamatrix is een matrix waarin gegevens zijn verzameld. Een datamatrix met frequenties kun je omrekenen naar een relatieve frequentiematrix.

$$\begin{pmatrix} 6 & 22 & 1 \\ 5 & 10 & 8 \\ 3 & 11 & 7 \\ 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

4 rijen, 3 kolommen.
Dit is een 4×3 -matrix

Vierkante matrix, eenheidsmatrix

Bij een vierkante matrix zijn de aantallen rijen en kolommen gelijk.

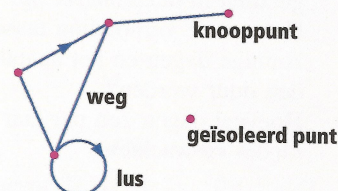
Een eenheidsmatrix is een vierkante matrix met uitsluitend enen op de hoofddiagonaal en verder overal nullen.

De hoofddiagonaal loopt van linksboven naar rechtsonder.

Graaf, knooppunten, wegen

Een graaf bestaat uit een aantal punten en lijnstukken tussen die punten.

De plaatsen in een graaf heten (knoop)punten en de lijnstukken verbindingen of wegen.



Gerichte graaf, geïsoleerd punt, lus

Een gerichte graaf bevat één of meerdere wegen die slechts in één richting doorlopen kunnen worden. Een geïsoleerd punt is een punt dat met geen ander punt verbonden is.

Een lus is een weg van een punt naar datzelfde punt.

Overgangsmatrix, inverse matrix

In een overgangsmatrix staan de kansen om gedurende één periode van de ene categorie in een andere te komen. In elke periode is sprake van dezelfde overgangskansen. Met een overgangsmatrix A bereken je de verdeling in de volgende periode. De inverse matrix A^{-1} is de matrix waarmee je één tijdseenheid terugrekent.

Meer algemeen is de inverse matrix de matrix waarvoor geldt $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1,6 & -0,4 \\ -0,6 & 1,4 \end{pmatrix}$$

Stabiele verdeling

Een verdeling over verschillende categorieën heet stabiel als deze na vermenigvuldiging met de overgangsmatrix niet meer verandert.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Je kunt matrices optellen, aftrekken en met een getal vermenigvuldigen

Tel de getallen op de overeenkomstige plaatsen bij elkaar op of trek ze van elkaar af. Bedenk wel of het zinvol is om ze op te tellen of van elkaar af te trekken.

Voorbeeld

$$\text{Bereken } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -6 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Je kunt vaststellen of het mogelijk is om twee matrices te vermenigvuldigen en je kunt de productmatrix berekenen

Voor het vermenigvuldigen van twee matrices kun je gebruik maken van het vermenigvuldigingschema of van je rekenmachine.

Voorbeeld

$$\text{Bereken } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 8 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Oplossing

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 8 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -2 \\ -2 & 74 \end{pmatrix}$$

Je kunt de inverse matrix berekenen

Om de inverse matrix A^{-1} van een vierkante matrix A te berekenen maak je gebruik van de rekenmachine of van de eis dat $A \times A^{-1} = I_n$ en $A^{-1} \times A = I_n$.

Je kunt een stabiele verdeling vinden

Een verdeling over verschillende populaties is stabiel als deze verdeling niet meer verandert na vermenigvuldiging met de overgangsmatrix.

Voorbeeld

Onderzoek of er een stabiele verdeling ontstaat bij de overgangsmatrix M en de beginsituatie B :

Oplossing

$$t = 2 : M^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 27 \\ 73 \end{pmatrix} \quad t = 5 : M^5 \cdot B = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix}$$

$$t = 6 : M^6 \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix}$$

van
A B
naar A $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} = M$ en $\begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} = B$ dus is $\begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix}$ een stabiele verdeling.

Test jezelf

- T-1** Hiernaast zie je in de matrix P van drie artikelen A , B en C de prijzen in euro's op 1 januari 2005 in vier verschillende winkels $W1$, $W2$, $W3$ en $W4$.
Onder matrix P staat matrix Q met daarin de prijzen in euro's van A , B en C op 1 januari 2006.
- Bereken de verschilmatrix $Q - P$.
 - Geef de betekenis van de getallen in de matrix $Q - P$.
 - Op 1 januari 2007 zijn alle prijzen met 15% verhoogd. Geef in één matrix de prijzen van de artikelen A , B en C in de vier verschillende winkels per 1 januari 2007.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-1.

$$\begin{matrix} & W1 & W2 & W3 & W4 \\ A & \begin{pmatrix} 25,- & 27,- & 31,- & 28,- \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 12,- & 11,- & 9,- & 10,50 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 98,- & 99,50 & 89,- & 92,- \end{pmatrix} \end{matrix} = P$$

$$\begin{matrix} & W1 & W2 & W3 & W4 \\ A & \begin{pmatrix} 26,- & 30,- & 31,- & 29,50 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 15,- & 11,- & 13,- & 12,50 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 99,50 & 99,50 & 95,- & 98,- \end{pmatrix} \end{matrix} = Q$$

- T-2** Een rijwielhandel heeft drie winkels waarin drie modellen jeugdfietsen worden verkocht. De aantallen die in de maand januari zijn verkocht staan in matrix A . De inkoopprijs in euro's per model staat in matrix I .
- Vermenigvuldig de matrices A en I zodat de uitkomst betekenis heeft en geef de betekenis van het product.
 - In matrix V staan de verkoopprijzen in euro's per model. De winst per fiets is gelijk aan de verkoopprijs verminderd met de inkoopprijs en verminderd met een vast bedrag van € 30,- aan kosten. Welke winkel maakte in januari de meeste winst?
 - In februari worden de prijzen veranderd zodat de winst wordt: $J8GL$ € 150,-, $C46L$ € 75,- en $F46L$ € 250,-. Neem aan dat matrix A ook voor februari geldt. Bereken de winst per winkel voor februari.
Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-2.

$$\begin{matrix} & \text{winkel} \\ & I & 2 & 3 \\ J8GL & \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 \end{pmatrix} \\ C46L & \begin{pmatrix} 14 & 10 & 8 \end{pmatrix} \\ F46L & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} = A$$

$$\begin{matrix} & \text{prijs} \\ J8GL & \begin{pmatrix} 200 \end{pmatrix} \\ C46L & \begin{pmatrix} 150 \end{pmatrix} \\ F46L & \begin{pmatrix} 600 \end{pmatrix} \end{matrix} = I$$

$$\begin{matrix} & \text{prijs} \\ J8GL & \begin{pmatrix} 370 \end{pmatrix} \\ C46L & \begin{pmatrix} 250 \end{pmatrix} \\ F46L & \begin{pmatrix} 860 \end{pmatrix} \end{matrix} = V$$

- T-3** Twee merken A en B beconcurreren elkaar. Er is onderzoek gedaan naar het koopgedrag van 1125 consumenten over twee perioden. Hierbij is aangenomen dat de duur van een aankoopperiode voor elke consument gelijk is en dat elke consument in iedere periode één van de twee merken koopt.
- Maak een relatieve frequentiematrix die het verband geeft tussen de aankopen in de eerste en in de tweede periode.
 - Neem aan dat de voorkeuren van de consumenten in de komende perioden op dezelfde wijze veranderen. Hoe zal de verdeling van de aankopen over de twee merken zijn na de derde periode?
Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-3.

$$\begin{matrix} & \text{periode 1} \\ & A & B \\ \text{periode 2} & A & \begin{pmatrix} 375 & 100 \end{pmatrix} \\ & B & \begin{pmatrix} 250 & 400 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

T-4 In een dorp zijn twee tankstations. In matrix W staat hoe de klanten per week van tankstation wisselden. In de week van 15 mei had S 940 klanten en E 460 klanten. Neem aan dat de aantallen klanten elke week met dezelfde percentages veranderen.

$$\begin{matrix} & \text{van} \\ & S & E \\ \text{naar} & S & E \\ & E \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} = W$$

- Hoe was de verdeling van de klanten in de week van 22 mei? En in de week van 29 mei?
- Na hoeveel weken had S 1088 klanten?
- Bereken hoe de verdeling in de week van 8 mei was.

De eigenaar van het tankstation van E verwacht dat hij op den duur onvoldoende klanten zal overhouden. Hij neemt als model de verdeling V hiernaast.

- Ga na dat na een half jaar de verdeling vrijwel niet meer zal veranderen.
- Hoeveel klanten heeft hij dan?

$$\begin{matrix} \text{aantal} \\ \text{klanten} \\ S \\ E \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = V$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-4.

T-5 Bereken de inverse matrix van:

$$\text{a} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 9-5.

T-6 Op een conferentie zijn vijf diplomaten M_1, M_2, M_3, M_4 en M_5 aanwezig. In matrix A staat welke diplomaat welke talen beheerst. Een 1 (0) geeft aan dat een diplomaat die taal wel (niet) beheerst.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
<i>Engels</i>	1	1	1	1	1
<i>Frans</i>	1	0	1	1	0
<i>Duits</i>	0	1	0	1	0
<i>Swahili</i>	1	0	0	0	1

- Is er een diplomaat die Swahili in Duits kan vertalen?
- Door de rijen en de kolommen van de tabel te verwisselen ontstaat de matrix B die hiernaast staat. Bereken de matrix $B \cdot A$ en geef aan welke informatie dit resultaat bevat.
- Bereken ook de matrix $A \cdot B$ en geef ook hiervan aan welke informatie dit resultaat bevat.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T-7 Leg uit dat als voor twee matrices A en B geldt dat $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, de matrices A en B vierkante matrices zijn met n rijen en kolommen.



Hoofdstuk 10

Matrices

toepassen

In dit hoofdstuk

10-1	Lesliematrices	270
10-2	Populaties voorspellen	272
10-3	Lineaire stelsels	274
10-4	Stelsels oplossen	276
10-5	Afbeeldingen	278
10-6	Lineaire transformaties	280
10-7	Afbeeldingen samenstellen	282
	Samenvatting	284
	Test jezelf	286

Op de computer

Bij vrijwel iedere basisparagraaf en de voorkennis is ICT:

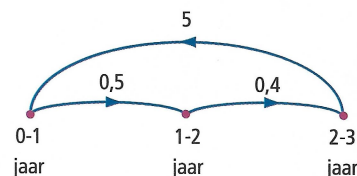
- interactieve applets voor inzicht in de theorie
- interactieve applets met feedback om te oefenen

Bij ieder hoofdstuk is ook een digitale Test jezelf die per paragraaf feedback geeft.

10-1

Lesliematrices

- 1 Van een diersoort is bekend dat het geboortecijfer per individu en de overlevingskansen per leeftijdsgroep constant zijn. De aantallen dieren per leeftijdsgroep vertonen echter grote schommelingen.
In de graaf hiernaast zijn de geboortecijfers en de overlevingskansen gegeven. Deze dieren planten zich uitsluitend in het derde levensjaar voort. Het geboortecijfer is vijf, wat betekent dat er per individu gemiddeld vijf jongen worden geboren.
- a De aantallen dieren zijn in een bepaald jaar verdeeld over de drie leeftijdsgroepen met aantallen 1200, 450, 160. Bereken hoeveel dieren er een jaar later in elk van de leeftijdsgroepen zijn.
- b Teken een grafiek van het totale aantal dieren afhankelijk van de tijd voor een periode van zes jaar.



Theorie

De gegevens met betrekking tot overleving en geboorte in een populatie kunnen worden samengevat in een **populatievoorspellingsmatrix** of **Lesliematrix**. Voor een populatie met drie leeftijdsgroepen heeft die

matrix de vorm
$$L = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}.$$

De getallen g_i zijn de gemiddelde aantallen nakomelingen per individu. De getallen h_i zijn de overlevingskansen in een bepaalde leeftijdsgroep. Door de matrix L te vermenigvuldigen met de matrix die de populatieverdeling in een bepaalde periode weergeeft, krijg je de populatieverdeling van de volgende periode.

Voorbeeld

Bij een diersoort hoort de volgende Lesliematrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 1,4 & 1 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

De overgangskansen zijn per jaar.

Er zijn vier leeftijdsklassen met respectievelijk 1250, 2580, 1760 en 640 dieren. Bereken de aantallen dieren in de verschillende leeftijdsklassen één per jaar later.

Oplossing

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 1,4 & 1 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1250 \\ 2580 \\ 1760 \\ 640 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4652 \\ 1000 \\ 1290 \\ 896 \end{pmatrix}$$

Dat wil zeggen dat er 4652 nuljaren, 1000 éénjarigen, 1290 twee jarigen en 896 dieren van drie jaar en ouder zullen zijn.



- 2 L is de Lesliematrix van de populatie van opdracht 1.
- a Bereken L^2 en L^3 . Wat is de betekenis van deze matrices voor de populatie?
- b Hoe ontwikkelt de populatie zich in de loop van de tijd?

- 3 Door vervuiling veranderde de vruchtbaarheid van de diersoort uit de vorige opdrachten, waardoor het aantal nakomelingen per individu 50% kleiner werd. De overlevingskansen bleven gelijk.
- a Geef de Lesliematrix bij de nieuwe gegevens.
- b Op een bepaald moment waren er 3000 nuljarigen, 2500 éénjarigen en 400 tweejarigen. Bereken de populatieverdelingen voor de eerstvolgende drie jaren.
- c Teken de grafiek van het verwachte totale aantal van deze dieren voor de volgende negen jaren. Wat is je conclusie?

- 4 Op een eiland komt een bepaald soort planteneter voor. Een bioloog heeft in maart 2007 en in maart 2008 de aantallen dieren per vier leeftijdsgroepen geteld. De dieren uit de vier leeftijdsgroepen van maart 2007 brachten naar schatting respectievelijk 2500, 9600, 2200 en 450 jongen voort die in maart 2008 nog in leven waren.

leeftijdsklasse	aantal dieren in maart 2007	aantal dieren in maart 2008
0-1	12 500	14 750
1-2	6400	7500
2-3	2750	3200
3-4	900	1100

- a Stel met behulp van deze gegevens een Lesliematrix op waarbij je ervan uit mag gaan dat de dieren niet ouder worden dan 4 jaar.
- b Bereken de populatieverdeling van maart 2009 en maart 2010.
- c In de tabel hiernaast zie je het totale aantal dieren in een aantal jaren. Onderzoek of de totale populatie exponentieel groeit en zo ja, met welke groeifactor dat gebeurt.

jaar	aantal
2007	22 550
2008	26 550
2009	
2010	
2011	

- 5 Een andere dierpopulatie wordt ingedeeld in drie leeftijdsklassen. De eerste leeftijdsklasse is van 0 – 1 jaar en de tweede van 1 – 2 jaar. De jaarlijkse bevolkingsgroei wordt gegeven door de Lesliematrix L ,

$$\text{waarbij } L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

- a Wat betekent het getal linksboven voor de populatie?
- b Wat is de betekenis van het getal rechtsonder?
- c Wat kun je zeggen van de derde leeftijdsklasse?
- d Hoe groot is de kans dat een pasgeboren dier in de derde leeftijdsklasse komt?



10-2

Populatiegrootte voorspellen

- 6 Aan de westkust van de Verenigde Staten tref je over een oppervlakte van ongeveer 2000 vierkante kilometer een vegetatie aan van groenblijvende struiken. Deze vegetatie heet Chaparral. Een onderzoeker onderscheidt bij deze vegetatie vier leeftijdsklassen: klasse 1 van 0 - 10 jaar, klasse 2 van 10 - 20 jaar, klasse 3 van 20 - 30 jaar en klasse 4 van 30 jaar en ouder. In de tabel hiernaast staat aangegeven hoe groot de oppervlakte in km^2 is die door de vegetatie in de verschillende klassen wordt bedekt op het begintijdstip $t = 0$ en op $t = 1$ tien jaar later. Door spontane branden verbrandt elke tien jaar per klasse een gedeelte van de struiken waarvoor vrijwel direct jonge struiken in de plaats komen.
- a De matrix M die bij de Chaparral-vegetatie hoort is hiernaast gedeeltelijk gegeven. Bereken met behulp van de gegevens uit de tabel de getallen g_1 en g_2 .
- b Waarom kun je g_3 en g_4 niet met de tabel berekenen?
- c De onderzoeker berekent met een computer de matrices M^n voor allerlei positieve gehele waarden van n . Hij constateert dat die matrices voor $n > 20$ allemaal gelijk zijn aan de matrix hiernaast. Welke conclusie kun je uit dit gegeven trekken ten aanzien van de Chaparral-vegetatie?
- d Geef de oppervlakte in km^2 van de vier vegetatieklassen zoals die op de lange duur ontstaat.
- Ontleend aan: Centraal examen vwo wiskunde A, 1994*

klasse	op $t = 0$	op $t = 1$
1	302	462
2	284	300
3	314	278
4	1100	960

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & g_4 \end{bmatrix}$$

$$M^n = \begin{bmatrix} 0,19 & 0,19 & 0,19 & 0,19 \\ 0,19 & 0,19 & 0,19 & 0,19 \\ 0,18 & 0,18 & 0,18 & 0,18 \\ 0,44 & 0,44 & 0,44 & 0,44 \end{bmatrix}$$

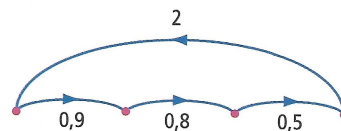
Theorie

Als L een matrix is waarbij vanaf een zekere waarde van n op elke rij van de matrix L^n de getallen gelijk zijn, dan verandert de verhouding tussen de aantallen exemplaren in de verschillende leeftijdsklassen op den duur niet meer. Er is dan sprake van een **stabiele verhouding**.

- 7 De Lesliematrix hiernaast hoort bij een populatie van een bepaalde diersoort. Er zijn drie leeftijdsklassen: 0 - 1 jaar, 1 - 2 jaar en minstens 2 jaar.
- a De verdeling van de dieren over de drie leeftijdsklassen is als volgt: 240, 120, 80. Bereken de aantallen dieren na tien jaar en na 25 jaar.
- b Is er op de lange duur sprake van stabiele verhoudingen?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1,0 & 0,6 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = L$$

- 8 De geboortecijfers en de overlevingskansen van een vogelpopulatie die in vier leeftijdsklassen is verdeeld, staat in de graaf hiernaast.
- a Stel een Lesliematrix L op voor deze populatie.
- b Bereken L^4 en leg met behulp van deze matrix uit dat deze populatie op den duur zal uitsterven.
- c De daling van het aantal vogels wordt volgens onderzoekers vooral veroorzaakt door milieuvervuiling. Door het milieu te verbeteren blijkt het geboortecijfer 2,5 te zijn geworden. De overlevingskansen blijven ongewijzigd. Ga na of de vogelsoort op de lange duur toch uitsterft.
- d Ga uit van de beginpopulatie 100, 72, 36, 8. Hoe groot moet het geboortecijfer minstens zijn, opdat de totale populatie niet uitsterft?



- 9 Een bioloog heeft in een natuurgebied de populatie van een beschermde salamandersoort bestudeerd. Hij verdeelde de dieren in vier leeftijdsklassen van één jaar en stelde op grond van zijn ervaringen de Lesliematrix hiernaast op.
- a Bereken de matrices L^2 , L^3 en L^4 . Wat valt je op?
- b Op een bepaald moment zijn in de vier leeftijdsklassen van jong naar oud de volgende aantallen geteld: 410, 160, 95 en 100. Bereken voor de volgende vier jaren het totale aantal dieren zoals dat zich volgens de Lesliematrix zal ontwikkelen.
- c Beschrijf in woorden hoe de populatie zich ontwikkelt.
- d Verwerk de gegevens van het totale aantal dieren van de komende vijf jaren in een grafiek met de tijd op de horizontale as.
- e Het totale aantal dieren is bij benadering een exponentiële functie van de tijd in jaren. Geef een passend functievoorschrift van deze functie.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$



- 10 In de matrix hiernaast staan gegevens over de klanten van een drietal supermarkten. In verband met gewijzigde openingstijden, waarbij supermarkten ook 's avonds open kunnen zijn, is het voor een aantal klanten aantrekkelijk om van supermarkt te veranderen. In de matrix zie je bijvoorbeeld dat 7,3% van de klanten van supermarkt I een maand later klant is geworden van supermarkt II.
- a Verklaar met behulp van de matrix dat minder dan 20% van het totaal aantal klanten een maand later van supermarkt is veranderd, maar dat je niet kunt berekenen hoe groot dat percentage precies is.
- b Voordat de winkeltijden werden veranderd hadden supermarkt I, II en III respectievelijk 4000, 5000 en 6000 klanten. Bereken het aantal klanten van elke supermarkt één maand later.
- c Ontstaat er op de lange duur een stabiele verhouding in het aantal klanten van de drie supermarkten, als de gegevens van de matrix ook voor elke volgende maand kloppen?

		van		
		I	II	III
naar	I	0,801	0,001	0,001
	II	0,073	0,920	0,001
	III	0,126	0,079	0,998

10-3

Lineaire stelsels

- 11 Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 7 \\ x + y + z = 2 \\ -x + 3y - z = -3 \end{cases}$$
- Welke vergelijking krijg je als je de eerste twee vergelijkingen optelt?
 - Als je de tweede vergelijking met -3 vermenigvuldigt en er de derde vergelijking bij optelt krijg je
 $-3(x + y + z) + (-x + 3y - z) = -3 \cdot 2 + -3$.
 Schrijf deze vergelijking zo eenvoudig mogelijk.
 - De opdrachten a en b geven elk een vergelijking zonder y . Deze twee vergelijkingen vormen een stelsel vergelijkingen in de variabelen x en z .
 Los dit stelsel op en bereken x en z .
 - Kies een van de vergelijkingen van het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen en bereken de waarde van y .
 - Controleer of de gevonden waarden van x , y en z voldoen.

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 2x - y - 2z = 7 & \\ x + y + z = 2 & -3 \\ -x + 3y - z = -3 & 1 \end{array} \right.$$

Theorie

Een stelsel vergelijkingen als
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
 of
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 heet **een stelsel lineaire vergelijkingen**.

Het oplossen van dergelijke stelsels kan met de substitutiemethode. Je kunt ook één of meer vergelijkingen met een getal vermenigvuldigen of erdoor delen. Dat getal kun je zo kiezen dat er een onbekende verdwijnt als je vervolgens de vergelijkingen bij elkaar optelt of van elkaar aftrekt.

Deze methode heet **lineair combineren**.

- 12 Gegeven is het stelsel
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - 3y = 1 \\ 4y - z = 13 \end{cases}$$
- Combineer de eerste en de derde vergelijking om een vergelijking te krijgen zonder z .
 - Los het stelsel op en controleer de oplossing.

Voorbeeld

Los op
$$\begin{cases} 2x - y - z = 11 \\ x + 2y - 2z = 38 \\ -x + y + 3z = -13 \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 11 \\ -x + y + 3z & = & -13 \\ \hline x + 2z & = & -2 \Rightarrow x = -2z - 2^{(1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 2x - y - z = 11 & 2 & 4x - 2y - 2z = 22 \\ x + 2y - 2z = 38 & 1 & x + 2y - 2z = 38 \\ \hline & & 5x - 4z = 60 \end{array}$$

Vul het resultaat (1) in bij de laatste vergelijking:

$$5(-2z - 2) - 4z = 60 \Rightarrow -10z - 10 - 4z = 60 \Rightarrow -14z = 70 \Rightarrow z = -5.$$

Door invullen in vergelijking (1) vind je $x = 8$ en door invullen in één van de oorspronkelijke vergelijkingen $y = 10$.

13 Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a
$$\begin{cases} 4x - 3y = -7 \\ 2x + 7y = 22 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}y = 10 \end{cases}$$

e
$$\begin{cases} x + y + 2z = -5 \\ x - 3y + z = -8 \\ 2x + y - z = -6 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 3x - 5y = -8 \\ 5x = 3y \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2y + z = -2 \\ x - y + 2z = 13 \end{cases}$$

Theorie

Een **vector** is een matrix met één kolom en wordt genoteerd als een kleine letter met een pijltje erboven, bijvoorbeeld $\vec{a}$.

De getallen van een vector noem je **kentallen**.

Je kunt een stelsel lineaire vergelijkingen noteren als een **matrixvergelijking** van de vorm $A\vec{x} = \vec{b}$. Hierbij is A de **coëfficiëntenmatrix**, $\vec{x}$ is de vector waarvan de kentallen de onbekenden zijn en $\vec{b}$ is een vector met bekende getallen. Je kunt de vergelijking oplossen door het linkerlid en het rechterlid met de inverse matrix van A , dus met A^{-1} te vermenigvuldigen.

Je krijgt als oplossing $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Los het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ 2x + y = -9 \end{cases}$ op met behulp van matrixvermenigvuldiging.

Oplossing

Schrijf het stelsel als $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. Daaruit volgt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Met je rekenmachine vind je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ dus $x = 3$ en $y = 3$.

14 Los de volgende stelsels vergelijkingen op door gebruik te maken van de inverse matrix.

a
$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ x + 3y = -4 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} x + 4y = -10 \\ -3x + 8y = -30 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ -2y - z = -3 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} 2p - 3q + 5r - s = 13 \\ 3p - q - 2r + 2s = 7 \\ p + q + 4r - 3s = 9 \\ -p + 2q - 3r + 4s = 14 \end{cases}$$

10-4

Bijzondere stelsels

- 15 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 11z = 7 \end{cases}$
- Geef de coëfficiëntenmatrix van dit stelsel.
 - Voer de matrix in je rekenmachine in. Wat merk je als je probeert de inverse matrix te berekenen?
 - Het is niet zo dat er geen waarden van x , y en z zijn die aan het stelsel voldoen. Ga na dat $(x, y, z) = (1, -6, 3)$ een oplossing van het stelsel is.
 - Probeer nog een andere oplossing van het stelsel te vinden.

- 16 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x - 3y + 4z = 7 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x - 2y + 5z = 6 \end{cases}$
- Ga met je rekenmachine na of de coëfficiëntenmatrix van het gegeven stelsel een inverse matrix heeft.
 - Tel de eerste twee vergelijkingen bij elkaar op en vergelijk het resultaat met de derde vergelijking. Welke conclusie kun je trekken?

Theorie

Als de coëfficiëntenmatrix van een stelsel vergelijkingen een inverse heeft, is er één oplossing van dat stelsel. Niet iedere coëfficiëntenmatrix heeft een inverse en dus heeft niet ieder stelsel precies één oplossing.

Zo heeft het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases}$ geen oplossing, want de eerste vergelijking links en rechts vermenigvuldigen met 2 geeft $4x + 2y = 10$ en dat klopt niet met de tweede vergelijking. Het stelsel is een **strijdig stelsel**.

Het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ heeft oneindig veel oplossingen, want alle getallen x en y waarvoor geldt dat $2x + y = 5$ voldoen ook aan de tweede vergelijking. Dit stelsel is een **afhankelijk stelsel**.

- 17 Ga van de volgende stelsels na welk stelsel strijdig is, welk stelsel afhankelijk is en welk stelsel precies één oplossing heeft.

a $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = -15 \\ x + 3y + 3z = 11 \end{cases}$

b $\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ 13x + 14y - 4z = 0 \\ 11x + 13y - 3z = 0 \end{cases}$

c $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

18a Laat zien dat de matrixvergelijking $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ geen

oplossing heeft.

b Controleer dat $(x, y, z) = (3, 2, 2)$ een oplossing is van

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

c Ga na dat bij opdracht b ook $(x, y, z) = (1, 4, 4)$ en $(x, y, z) = (9, 0, -2)$ oplossingen zijn.

d Laat zien dat de punten $(x, y, z) = (3 - \lambda, 2 + \lambda, 2 + \lambda)$ voor elke waarde van λ tot de oplossing van de matrixvergelijking in opdracht b behoren.

19 Gegeven is de vergelijking $\begin{pmatrix} 3 & -a \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ b \end{pmatrix}$.

a Voor welke waarden van a is er precies één oplossing?

b Voor welke a en b zijn er geen oplossingen?

c Voor welke a en b zijn er oneindig veel oplossingen?

Een stelsel heeft alleen één oplossing als de coëfficiëntenmatrix A een inverse matrix A^{-1} heeft.

20 Gegeven is het stelsel $\begin{pmatrix} 9 & a \\ 2a & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a Waarom heeft deze vergelijking voor elke waarde van a tenminste één oplossing?

b Voor welke waarden van a is er precies één oplossing?

c Voor welke waarden van a zijn er oneindig veel oplossingen?

d Geef de oplossingen voor die waarden van a die je bij opdracht c hebt gevonden.

21 Ga van elk van de volgende stelsels na of er geen oplossingen zijn, precies één oplossing of oneindig veel oplossingen.

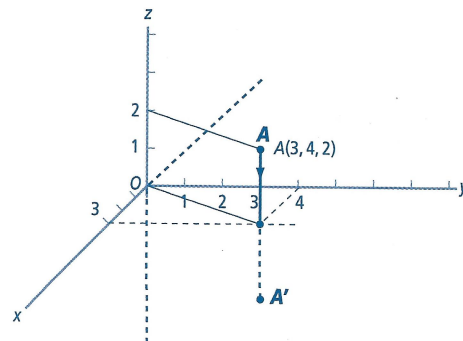
$$\text{a} \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = -8 \\ 3x + 6z = -12 \\ -2x - 8y + 4z = -8 \end{cases}$$

$$\text{b} \quad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \\ 6x - y - 5z = 0 \\ 7x - 3y - 4z = 1 \end{cases}$$

10-5

Afbeeldingen

- 22 Hiernaast staat een ruimtelijk assenstelsel, met een x -as, een y -as en een z -as.
- Voor punten (x, y, z) in het vlak door de x -as en de y -as geldt $z = 0$. Als je $A(3, 4, 2)$ spiegelt in het vlak $z = 0$ krijg je als spiegelbeeld het punt A' . Geef de coördinaten van A' .
 - Bereken ook de coördinaten van B' als je $B(b_1, b_2, b_3)$ spiegelt in het vlak $z = 0$.
 - Je kunt ook spiegelen in een lijn. Geef de coördinaten van het beeldpunt C' als je $C(2, 4, 3)$ spiegelt in de y -as.
 - Geef het beeldpunt X' van $X(x, y, z)$ als je spiegelt in de y -as.



- 23 Bij een afbeelding is $X'(x', y', z')$ het beeld van $X(x, y, z)$. Beschrijf de afbeelding, in welk vlak of welke lijn wordt er gespiegeld, in elk van de volgende gevallen.

- $x' = -x, y' = -y$ en $z' = z$
- $x' = 2 - x, y' = 4 - y$ en $z' = 6 - z$
- $x' = 2x, y' = 2y$ en $z' = 2z$
- $x' = x + 1, y' = y - 1$ en $z' = z$

Theorie

Bij vrijwel alle afbeeldingen van de vorige opdrachten horen **afbeeldingsformules** van de

$$\text{vorm } \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

Of in een notatie met matrices:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Hierin heet $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ **de afbeeldingsmatrix**.

Voorbeeld

Geef de afbeeldingsmatrix van de afbeelding puntspiegeling in de oorsprong $O(0, 0, 0)$.

Oplossing

Als $P'(x', y', z')$ het beeld is van het punt $P(x, y, z)$ dan geldt

$$x' = -x, y' = -y \text{ en } z' = -z.$$

De afbeeldingsmatrix is dus

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 24a Teken een ruimtelijk assenstelsel en geef daarin de punten $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ en $(1, 1, 2)$ aan.
- Leg uit dat alle punten waarvoor geldt: $x = y$ in een vlak liggen. Je noemt dit het vlak met vergelijking $x = y$.
 - Geef van het punt $P(x, y, z)$ het beeld als je spiegelt in het vlak $x = y$.
 - Geef de afbeeldingsmatrix van de afbeelding spiegelen in het vlak $x = y$.

- 25** Geef de afbeeldingsmatrix van de volgende afbeeldingen in $\mathbb{R}_3$.
- a** Loodrecht projecteren op het vlak $z = 0$, dat is het vlak door de x -as en de y -as.
 - b** Roteren om de z -as over 90° waarbij $(1, 0, 0)$ het punt $(0, 1, 0)$ als beeld heeft.
 - c** Vermenigvuldiging met factor 3 ten opzichte van de oorsprong.

- 26** Gegeven de afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bereken de beeldpunten van de volgende punten.

- a** $P(1, 1, 0)$
- b** $Q(2, -1, 1)$
- c** $R(0, 0, 3)$
- d** $S(a, b, c)$

- 27** Gegeven is de afbeelding A met de afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a** Welke meetkundige betekenis heeft deze afbeelding?

- b** Beantwoord dezelfde vraag voor de afbeelding B met matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 28** De afbeelding L heeft afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

- a** Bereken het beeld van $(1, 0, 0)$ onder de afbeelding L .
- b** Bereken ook de beelden van $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ en $(0, 0, 0)$.
- c** Welke conclusie kun je trekken uit de resultaten van de opdrachten a en b?

Theorie Als een afbeelding wordt gegeven door een 3×3 matrix dan geldt dat de eerste, tweede en derde kolom bestaan uit de coördinaten van de beelden van de punten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$.

Bij elke afbeelding die door een matrix wordt gegeven wordt de oorsprong $O(0, 0, 0)$ op zichzelf afgebeeld.

- 29** Gegeven is een $Oxyz$ -assenstelsel.
- Geef de afbeeldingsmatrix van de volgende spiegelingen.
- a** Spiegeling in het vlak gevormd door de x -as en z -as.
 - b** Spiegeling in het vlak gevormd door de y -as en de bissectrice van de hoek tussen de x -as en z -as.

10-6

Lineaire afbeeldingen

- 30 Een afbeelding L heeft afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Toon aan dat voor elk tweetal vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ geldt:

$L(\vec{v} + \vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$ en $L(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot L(\vec{v})$ voor elke reële λ .

Theorie

Een afbeelding A heet een **lineaire** afbeelding als:

$A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ én $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$ voor alle vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ en elk reëel getal λ .

Elke afbeelding die een afbeeldingsmatrix heeft is een lineaire afbeelding. Omgekeerd heeft elke lineaire afbeelding een afbeeldingsmatrix.

Voorbeeld

Door afbeelding P worden alle punten loodrecht geprojecteerd op vlak $z = 1$. Laat zien dat P geen lineaire afbeelding is.

Oplossing

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } P \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ maar } 2 \cdot P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dus $P(2 \cdot \vec{x}) \neq 2 \cdot P$ is geen lineaire afbeelding.

- 31 Gegeven is het punt $O(0, 0, 0)$.
Toon aan dat voor elke lineaire afbeelding L geldt $L(O) = O$.
- 32 Van een lineaire afbeelding L is gegeven: $L(3, 0) = (12, -3)$ en $L(0, 2) = (-16, 2)$. Gebruik dat L een lineaire afbeelding is en bereken:
- | | | | |
|---|-----------|---|-----------|
| a | $L(1, 0)$ | c | $L(1, 1)$ |
| b | $L(0, 1)$ | d | $L(0, 3)$ |
- 33 De afbeelding S is de spiegeling in het vlak door de x -as en de bissectrice van de hoek tussen de y -as en z -as.
- Leg uit dat voor punten (x, y, z) in dit vlak geldt $y = z$.
 - Geef de beelden van $P(4, 0, 0)$, $Q(0, 4, 0)$ en $R(0, 5, 2)$.
 - Geef de afbeeldingsmatrix van S .

34 Onderzoek of de afbeelding P gegeven door $P(x, y, z) = (x - 2, y + 3, 4z)$ lineair is.

35 Gegeven is de afbeelding L met de afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$.

- Bereken de beeldpunten van $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$ en $D(-1, 1)$ onder de afbeelding L .
- Teken de punten A , B , C en D en de beeldpunten in één assenstelsel.
- Alle beeldpunten kun je vinden door te draaien om $O(0, 0)$ over dezelfde hoek.

Bereken deze hoek in hele graden nauwkeurig.

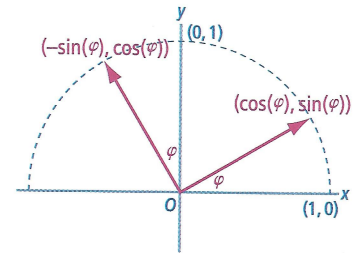
36 Met de rotatie R om O over een hoek φ in $\mathbb{R}_2$ wordt bedoeld: een draaiing over een hoek φ om O tegen de wijzers van de klok.

Met behulp van de figuur hiernaast kun je

inzien dat $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ de bijbehorende afbeeldingsmatrix is.

Gegeven is de lijn $l: x + 2y = 5$. Deze wordt geroteerd om O over een hoek φ .

- Geef de afbeeldingsmatrix van deze afbeelding als $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.
- Kies twee punten op lijn l en bereken hiervan de beeldpunten met behulp van de afbeeldingsmatrix van opdracht a en stel een vergelijking van de beeldlijn l' op.
- Hoe kun je een vergelijking van l' berekenen zonder de afbeeldingsmatrix te gebruiken?
- Bereken een vergelijking van l'' , de beeldlijn van l als je roteert om O over $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$.
- Lijn l wordt geroteerd om het punt $P(2, 3)$ over $\frac{1}{2}\pi$.
Waarom is hier geen sprake van een lineaire afbeelding?

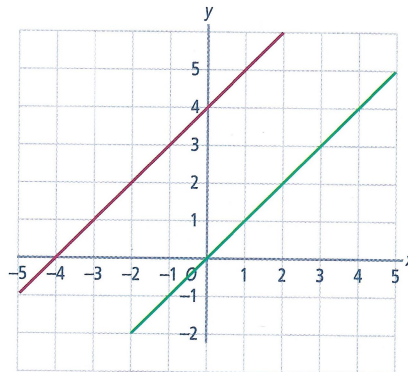


- 37** In een ruimtelijk assenstelsel is A is de rotatie om de z -as over 60° . De richting van de draaiing is van de positieve x -as naar de positieve y -as.
- Gebruik de matrix van opdracht 36 en stel de afbeeldingsmatrix van A op.
 - Bereken de coördinaten van het beeldpunt van het punt $P(\sqrt{3}, 1, -1)$ onder de afbeelding A .

10-7

Afbeeldingen samenstellen

- 38 Hiernaast zijn in een assenstelsel de lijnen $l: y = x$ en $m: y = x + 4$ getekend. Afbeelding S_l is de spiegeling in lijn l en afbeelding S_m is de spiegeling in lijn m .
- Welke coördinaten heeft het beeldpunt van $P(a, b)$ onder de afbeelding S_l ?
 - Toon aan dat $Q(b - 4, a + 4)$ het beeldpunt van P is onder de afbeelding S_m .
 - Punt $P(a, b)$ wordt gespiegeld in lijn m . Het beeldpunt van P is punt Q . Vervolgens wordt punt Q gespiegeld in lijn l . Het beeldpunt van Q is punt R . Bereken de coördinaten van R .
 - Bij welke verschuiving heeft P als beeldpunt R ?



Theorie

Als S en T twee afbeeldingen zijn kun je afbeelding S toepassen op het resultaat van afbeelding T . Je spreekt dan van een **samengestelde afbeelding** die je noteert als $S \circ T$. De volgorde waarin de afbeeldingen worden uitgevoerd is van belang, want in het algemeen geldt niet dat $S \circ T$ dezelfde afbeelding is als $T \circ S$.

- 39 In het platte vlak is de afbeelding S_m : spiegelen in de lijn $m: y = x$ en afbeelding S_n is spiegelen in de lijn $n: y = -2x$.
- Geef de beeldingsmatrix B van de afbeelding S_m .
 - De beeldingsmatrix van S_n is $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.
Toon dit aan door de beeldvectoren van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ te berekenen.
 - Bereken de beeldingsmatrix C van de samengestelde afbeelding $S_n \circ S_m$ door de beeldvectoren van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ te berekenen.
 - Controleer dat $A \times B = C$.
 - Onderzoek of $S_m \circ S_n$ dezelfde afbeelding is als $S_n \circ S_m$.

Voorbeeld

In het platte vlak is S de afbeelding spiegeling in de x -as en T is de spiegeling in de lijn $y = -x$. Welke beeldingsmatrix heeft de afbeelding $S \circ T$?

Oplossing

$S \circ T(1, 0) = S(0, -1) = (0, 1)$ en $S \circ T(0, 1) = S(-1, 0) = (-1, 0)$. De beeldingsmatrix is dus

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als de afbeelding S de afbeeldingsmatrix A heeft en de afbeelding T heeft de afbeeldingsmatrix B dan is de afbeeldingsmatrix C van de samengestelde afbeelding $S \circ T$ het product van de afbeeldingsmatrices van de afbeeldingen S en T , dus $C = A \times B$.

In het algemeen geldt niet dat $A \times B$ gelijk is aan $B \times A$.

- 40** De afbeelding R is de rotatie om O in het platte vlak over α radialen.
- De afbeeldingsmatrix van R is $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.
- a** De afbeelding S is de rotatie om O over β radialen. Geef de afbeeldingsmatrix van S .
- b** Waarom is $\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$ de afbeeldingsmatrix van de samengestelde afbeelding $R \circ S$?
- c** De afbeeldingsmatrix van de afbeelding $R \circ S$ kun je ook vinden door de afbeeldingsmatrices van R en S met elkaar te vermenigvuldigen. Bereken op deze manier de afbeeldingsmatrix van de afbeelding $R \circ S$.
- d** Gebruik het resultaat van de opdrachten b en c om te laten zien dat $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.
- e** Geef ook de andere goniometrische formule die je met deze matrixvermenigvuldiging hebt gevonden.
- f** Leid met behulp van de afbeeldingsmatrices van de rotaties om O over de hoeken α en $-\beta$ formules af voor $\sin(\alpha - \beta)$ en $\cos(\alpha - \beta)$.

- 41** De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ is de afbeeldingsmatrix van de afbeelding S en

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ is de afbeeldingsmatrix van de afbeelding T .

Voor de afbeelding V geldt $V = S \circ T$.

- a** Bereken de afbeeldingsmatrix van V .
- b** Welke meetkundige betekenis heeft de afbeelding V ?
- 42** Voor de lineaire afbeelding W geldt $W = S \circ R$. Daarbij is S de spiegeling in het vlak met vergelijking $x = y$ en R de rotatie om de z -as over $\frac{1}{2}\pi$ waarbij $R(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$.
- a** Bereken de afbeeldingsmatrices van de afbeeldingen S en R .
- b** Bereken de afbeeldingsmatrix van de afbeelding W .

Samenvatting

Lesliematrix

In een Lesliematrix of populatievoorspellingsmatrix staan de overlevingskansen en de geboortecijfers van de verschillende leeftijdsgroepen van een populatie.

Inverse matrix

Als voor twee matrices A en B geldt $A \cdot B = B \cdot A = I$, waarbij I een eenheidsmatrix is, dan zijn A en B elkaars inverse, dus $B = A^{-1}$ en $A = B^{-1}$.

Stelsel lineaire vergelijkingen, matrixvergelijking, vector

Als er meerdere lineaire vergelijkingen zijn waarin verschillende variabelen tegelijk voorkomen, spreek je van een stelsel lineaire vergelijkingen.

Een strijdig stelsel vergelijkingen heeft geen oplossingen en een afhankelijk stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

Een vector is een matrix met één kolom.

De getallen van een vector noem je kentallen.

Je kunt een stelsel lineaire vergelijkingen noteren als een matrixvergelijking van de vorm $A\vec{x} = \vec{b}$. Hierbij is A de coëfficiëntenmatrix, $\vec{x}$ is de vector waarvan de kentallen de onbekenden zijn en $\vec{b}$ is een vector met bekende getallen. Dan is de oplossing $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ mits A^{-1} bestaat.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ of } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ of } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Lineaire afbeelding

Een lineaire afbeelding is een afbeelding met de eigenschappen:

$A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ én $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$ voor alle vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ en elk reëel getal λ . Een afbeelding die door een afbeeldingsmatrix wordt gegeven is een lineaire afbeelding. Omgekeerd heeft elke lineaire afbeelding een afbeeldingsmatrix.

Je kunt een Lesliematrix opstellen

De populatie moet verdeeld zijn in klassen met gelijke klassebreedte.

Voorbeeld

Van een bevolking is een aantal gegevens in een tabel gezet.

Stel de Lesliematrix op.

Oplossing

De kans dat iemand uit de klasse 0–24 in de klasse 25–49

terecht komt is gelijk aan $\frac{148\,000}{168\,000} \approx 0,881$. De kans dat iemand

uit de klasse 25–49 in klasse 50–74 komt is $\frac{113\,000}{127\,000} \approx 0,890$

en de kans dat iemand van de klasse 50–74 naar de klasse

75–100 overgaat is $\frac{52\,000}{93\,000} \approx 0,559$.

De vruchtbaarheidscijfers zijn voor de eerste klasse $\frac{11\,000}{168\,000} \approx 0,065$,

voor de tweede klasse $\frac{115\,000}{127\,000} \approx 0,906$, voor de derde klasse 0,009

en voor de vierde klasse 0. Hiernaast staat de Lesliematrix.

leeftijd	aantal (in 1975)	aantal kinderen (1975-2000)	aantal (in 2000)
0-24	168 000	11 000	126 800
25-49	127 000	115 000	148 000
50-74	93 000	800	113 000
75-100	38 000	-	52 000

$$\begin{pmatrix} 0,065 & 0,906 & 0,009 & 0 \\ 0,881 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,890 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,559 & 0 \end{pmatrix}$$

Je kunt een stelsel vergelijkingen oplossen

Je kunt een stelsel vergelijkingen oplossen met behulp van de inverse van de coëfficiëntenmatrix. Als de inverse van de coëfficiëntenmatrix niet bestaat is het stelsel strijdig of afhankelijk en heeft het stelsel nul of oneindig veel oplossingen.

Voorbeeld

Onderzoek hoeveel oplossingen het volgende stelsel vergelijkingen heeft:

$$\begin{cases} 2p + q - r = 1 \\ p - 2q + r = 0 \\ 5q - 3r = 1 \end{cases}$$

Oplossing

De coëfficiëntenmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ heeft geen inverse.

Je krijgt de onderste vergelijking van het stelsel door twee keer de middelste vergelijking van de bovenste vergelijking af te trekken. Het stelsel is dus afhankelijk en er zijn oneindig veel oplossingen.

Je kunt de afbeeldingsmatrix van een lineaire afbeelding opstellen

De kolommen van de matrix bij een lineaire afbeelding zijn de

beeldvectoren van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ of van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Voorbeeld

In het vlak V ligt de y -as. Ook is V evenwijdig aan de lijn door de punten $A(2, 0, 0)$ en $B(0, 0, 2)$. Geef de afbeeldingsmatrix van de loodrechte projectie op het vlak V .

Oplossing

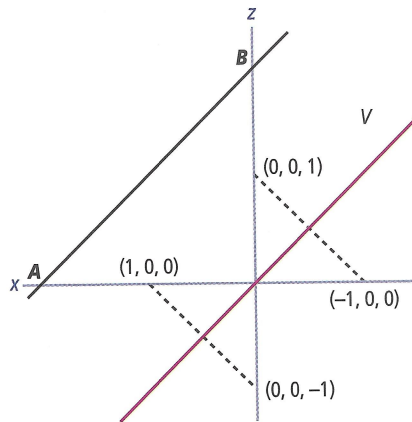
De projectie van $(0, 1, 0)$ is weer $(0, 1, 0)$ want dit punt ligt op de y -as en dus in V . Dit geeft de middelste kolom van de afbeeldingsmatrix.

Voor de eerste en de derde kolom heb je de projecties van de punten $(1, 0, 0)$ en $(0, 0, 1)$ op V nodig.

Hiernaast staat een zij-aanzicht, het vlak door de x -as en de z -as.

Gebruik de tekening om na te gaan dat de projecties $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ respectievelijk $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ zijn.

Dus is de afbeeldingsmatrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Test jezelf

T-1 Een populatie is te verdelen in drie leeftijdsklassen.

De bijbehorende Lesliematrix L staat hiernaast.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1000 \\ 0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} = L$$

- Bereken de matrix L^3 . Wat valt je op?
- Hoe ontwikkelt de populatie zich op den duur, als je uitgaat van een beginpopulatie met 100 exemplaren in elke leeftijdsklasse?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 10-1.

T-2 De verandering per jaar in de bevolkingsopbouw van een diersoort wordt gegeven door de Lesliematrix hiernaast.

$$\begin{array}{c} \text{jong} \\ \text{volw} \\ \text{oud} \end{array} \begin{pmatrix} \text{jong} & \text{volw} & \text{oud} \\ 0,1 & 0,5 & 0,01 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wat is de betekenis van het getal 0,25?
- Op een zeker tijdstip zijn er 12 000 jonge, 12 000 volwassen en 6 000 oude dieren. Bereken de bevolkingsopbouw na vijf jaar.
- Is er op de lange duur sprake van stabiliteit?

Deze opdracht hoort bij paragraaf 10-2.

T-3 Gegeven is het stelsel vergelijkingen
$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

- Trek de derde vergelijking af van de eerste vergelijking, zodat je een vergelijking zonder de variabele y krijgt.
- Elimineer de variabele y door de eerste en de tweede vergelijking lineair te combineren.
- Je hebt nu een stelsel van twee vergelijkingen in x en z maar zonder de variabele y . Los dit stelsel op.
- Bereken de waarde van y .
- Controleer de oplossing die je hebt gevonden.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 10-3.

T-4 Los de volgende stelsels op.

$$\text{a} \quad \begin{cases} 15x + 5y + 8z = 37 \\ 9x - 10y - 5z = 71 \\ 12x + 10y - 8z = 26 \end{cases}$$

$$\text{b} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 9 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 10-4.

T-5 Welk van de volgende drie stelsels is afhankelijk?
Welk stelsel is strijdig?

$$\text{a} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = -5 \\ 2x - y - z = 8 \end{cases}$$

$$\text{b} \quad \begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ x - 2y - 2z = -3 \\ 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$\text{c} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ x - y - 3z = 8 \\ 5x + 7y = 31 \end{cases}$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 10-4.

T-6 De afbeelding A is gegeven door de afbeeldingsmatrix hiernaast.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- a** Bereken de beelden van $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Wat valt je op als je deze vectoren vergelijkt met hun beeldvector?

- b** Geef nog een paar vectoren die dezelfde eigenschap hebben.
c Alle vectoren die op zichzelf worden afgebeeld liggen in een vlak V . Geef een beschrijving van de ligging van dit vlak V .
Deze opdracht hoort bij paragraaf 10-5.

T-7 De lineaire afbeelding A is gegeven door de gegevens hiernaast.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a** Bereken de beeldpunten van $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$. Gebruik daarbij de eigenschappen van een lineaire transformatie.
b Stel de afbeeldingsmatrix van A op.
c Leg uit waarom de lineaire transformatie B niet bepaald wordt door

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deze opdracht hoort bij paragraaf 10-6.

T-8 De afbeeldingsmatrix hiernaast hoort bij de afbeelding L .

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- a** Toon aan dat voor elke waarde van t geldt $L \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- b** Toon aan dat voor elk punt (x, y, z) geldt

$$(L \circ L) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- c** De afbeelding L is de loodrechte projectie op een vlak W . Toon aan dat de punten $(2, 2, 0)$ en $(5, 1, -4)$ tot het vlak W behoren.

Deze opdracht hoort bij paragraaf 10-7.

T-9 Het stelsel vergelijkingen hiernaast heeft oneindig veel oplossingen. Bereken de waarde van a .

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 8ay + z = 8 + 5a \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$