

Inhoud

- 9** Meetkundige plaatsen en raaklijneigenschappen 4
- 10** Complexe getallen 33
- 11** Lineaire algebra 69
- 12** Continue kansverdelingen 105

Kangoeroe-opgaven 128

Gemengde opgaven 133

Voor sommige (computer)opgaven is geen uitwerking opgenomen.

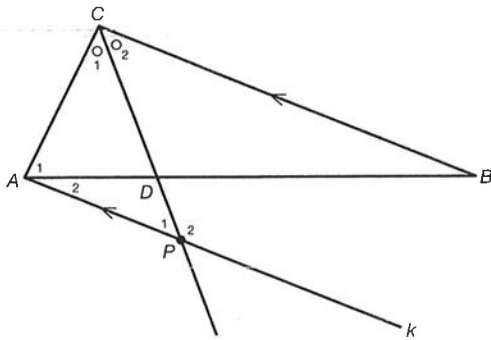
Deze zijn aangegeven met een *.

9 Meetkundige plaatsen en raaklijneigenschappen

Voorkennis Middelloodlijn en bissectrice

Bladzijde 8

- 1 $AC = BC = BD = AD$ (gegeven), dus $ABCD$ is een ruit (ruit).
In een ruit delen de diagonalen elkaar middendoor, en in een ruit snijden de diagonalen elkaar loodrecht.
Dus CD is de middelloodlijn van AB .
- 2 $\angle B = 90^\circ$, dus B ligt op de cirkel met middellijn AC (Thales).
 M is het midden van AC , dus M is het middelpunt van de cirkel door A , B en C .
Dus $AM = BM = CM$.
In driehoek ABC is $\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (hoekensom driehoek).
 $BM = CM$, dus $\angle MBC = \angle MCB = 60^\circ$ (gelijkbenige driehoek).
 $\angle BCE = 60^\circ : 2 = 30^\circ$ (bissectrice)
In $\triangle BCE$ is $\angle E = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ (hoekensom driehoek).
Dus $CD \perp BM$.
- 3 Teken door A een hulplijn k evenwijdig met BC . Het snijpunt van k en CD is P .



$$\begin{aligned}
 &k \parallel BC, \text{ dus } \angle P_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\
 &k \parallel BC, \text{ dus } \angle A_2 = \angle B \text{ (Z-hoeken)} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &k \parallel BC, \text{ dus } \angle P_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ &k \parallel BC, \text{ dus } \angle A_2 = \angle B \text{ (Z-hoeken)} \end{aligned}} \right\} \triangle APD \sim \triangle BCD \text{ (hh)} \\
 &\text{Dus } \frac{AD}{BD} = \frac{AP}{BC} \\
 &k \parallel BC, \text{ dus } \angle P_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\
 &\angle C_1 = \angle C_2 \text{ (bissectrice)} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &k \parallel BC, \text{ dus } \angle P_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ &\angle C_1 = \angle C_2 \text{ (bissectrice)} \end{aligned}} \right\} \angle P_1 = \angle C_1, \text{ dus } AP = AC \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\
 &\left. \begin{aligned} &\frac{AD}{BD} = \frac{AP}{BC} \\ &AP = AC \end{aligned} \right\} \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}
 \end{aligned}$$

9.1 Meetkundige plaatsen met GeoGebra

Bladzijde 9

- 1 a *
- b *
- c *
- d $d(P, M) = r$, $d(Q, M) = r$, $d(P, N) = r$ en $d(Q, N) = r$, dus P en Q hebben gelijke afstanden tot M en N .
- e De punten die gelijke afstanden hebben tot M en N liggen op de middelloodlijn van het lijnstuk MN .
- f *
- g De meetkundige plaats van de punten waarvan de afstand tot M twee keer zo groot is als de afstand tot N is een cirkel.

- 2 a *
- b *
- c *
- d *
- e Vermoeden: de baan van P is een parabool.
- f $d(P, F) = d(P, V)$ (middelloodlijn)
 $d(P, l) = d(P, V)$ (afstand punt tot lijn) $\left. \vphantom{\begin{matrix} d(P, F) = d(P, V) \\ d(P, l) = d(P, V) \end{matrix}} \right\} d(P, F) = d(P, l)$

Bladzijde 10

- 3 a *
- b *
- c *
- d *
- e *
- f Vermoeden: de middelloodlijn van FV is raaklijn van de parabool met raakpunt P .

Bladzijde 11

- 4 a *
- b Vermoeden: als het snijpunt van twee raaklijnen van een parabool op de richtlijn van de parabool ligt, dan staan de raaklijnen loodrecht op elkaar.
- 5 a *
- b *
- c *
- d *
- e *
- f *
- g Vermoeden: als twee raaklijnen van een parabool loodrecht op elkaar staan, dan ligt het snijpunt van de raaklijnen op de richtlijn van de parabool.
- 6 a *
- b *
- c *
- d De raaklijnen gaan door P .
- e De poollijn van een punt P ten opzichte van de parabool p is de lijn door de raakpunten van de raaklijnen aan p die door P gaan.
- f *
- g Als twee raaklijnen van een parabool elkaar snijden tussen de richtlijn en de parabool, dan is de hoek tussen de raaklijnen groter dan 90° .

Bladzijde 12

- 7 a *
- b *
- c *
- d *
- e Vermoeden: de lijn CM is evenwijdig met de symmetrieas van de parabool.
- f Vermoeden: de raaklijn aan de parabool in C is evenwijdig met het lijnstuk AB .
- 8 a *
- b *
- c *
- d *
- e $d(P, F) = d(P, V)$ (middelloodlijn)
 $d(P, c) = d(P, V)$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} d(P, F) = d(P, V) \\ d(P, c) = d(P, V) \end{matrix}} \right\} d(P, F) = d(P, c)$
- f Ook nu is de middelloodlijn van FV een raaklijn van de meetkundige plaats.
- g Als je F naar een punt buiten de cirkel versleept, dan krijg je een andere meetkundige figuur. De middelloodlijn van FV is dan wel nog steeds een raaklijn van de meetkundige plaats.

Bladzijde 13

- 9 a *
- b *
- c $d(P, A) + d(P, B) = r + 10 - r = 10$
- d Je herkent een ellips.
- e *
- f *
- g *
- h In het algebravenster zie je dat steeds geldt $d(P, A) + d(P, B) = 10$.
- i Voor zowel de ellips van vraag e als de ellips van vraag f geldt dat de som van de afstanden van een punt van de ellips tot de punten A en B gelijk is aan 10. Dus bij de vragen e en f heb je dezelfde ellips getekend.

Bladzijde 14

- 10 a *
- b *
- c $d(P, A) - d(P, B) = r - (r - 2) = r - r + 2 = 2$
- d Je herkent een hyperbooltak.
- e *
- f *
- g *
- h In het algebravenster zie je dat steeds geldt $d(P, A) - d(P, B) = 2$.
- i Voor zowel de punten van de hyperbooltak van vraag e als van de hyperbooltak van vraag f geldt dat het niet-negatieve verschil van de afstanden van een punt van de hyperbooltak tot de punten A en B gelijk is aan 2. Dus bij vraag e heb je een van de hyperbooltakken van vraag f getekend.

- 11 a *
- b *
- c *
- d De lijnen CP en DP zijn raaklijnen aan de ellips in de punten C en D .
- e Als P op de ellips ligt, dan zijn de lijnen CP en DP beide raaklijn aan de ellips in P , en vallen dus samen.
- f *

9.2 Meetkundige plaatsen**Bladzijde 15**

- 12 a Ga uit van lijn m loodrecht op AB .

$$\left. \begin{array}{l} AP = BP \text{ (gegeven)} \\ DP = DP \\ \angle ADP = \angle BDP = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ADP \cong \triangle BDP \text{ (ZZR)}$$

Uit $\triangle ADP \cong \triangle BDP$ volgt $AD = BD$.

$\left. \begin{array}{l} D \text{ is het midden van } AB \\ DP \text{ staat loodrecht op } AB \end{array} \right\} P \text{ ligt op de middelloodlijn } m \text{ van het lijnstuk } AB$

- b Omkering: elk punt op de middelloodlijn van het lijnstuk AB heeft gelijke afstanden tot de punten A en B .

$$\left. \begin{array}{l} AS = BS \text{ (gegeven)} \\ PS = PS \\ \angle ASP = \angle BSP = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ASP \cong \triangle BSP \text{ (ZHZ)}$$

Uit $\triangle ASP \cong \triangle BSP$ volgt $AP = BP$.

- 13 a $\left. \begin{array}{l} AP = AP \\ PQ = PR \text{ (gegeven)} \\ \angle AQP = \angle ARP = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle APQ \cong \triangle APR \text{ (ZZR)}$

Uit $\triangle APQ \cong \triangle APR$ volgt $\angle PAQ = \angle PAR$, dus P ligt op de bissectrice van A .

- b** Omkering: elk punt op de bissectrice van een hoek heeft gelijke afstanden tot de benen van die hoek.

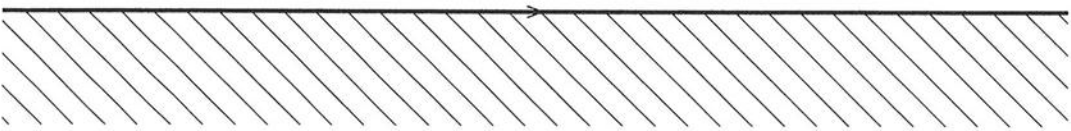
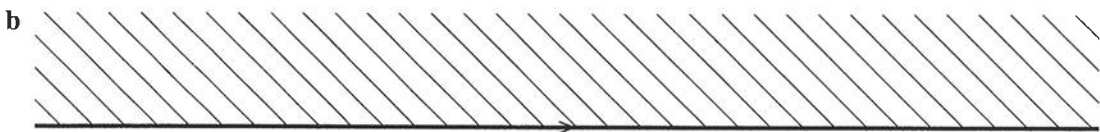
$$\left. \begin{array}{l} AB = AB \\ \angle CAB = \angle DAB \text{ (gegeven)} \\ \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ABC \cong \triangle ABD \text{ (ZHH)}$$

Uit $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ volgt $BC = BD$, dus B heeft gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$.

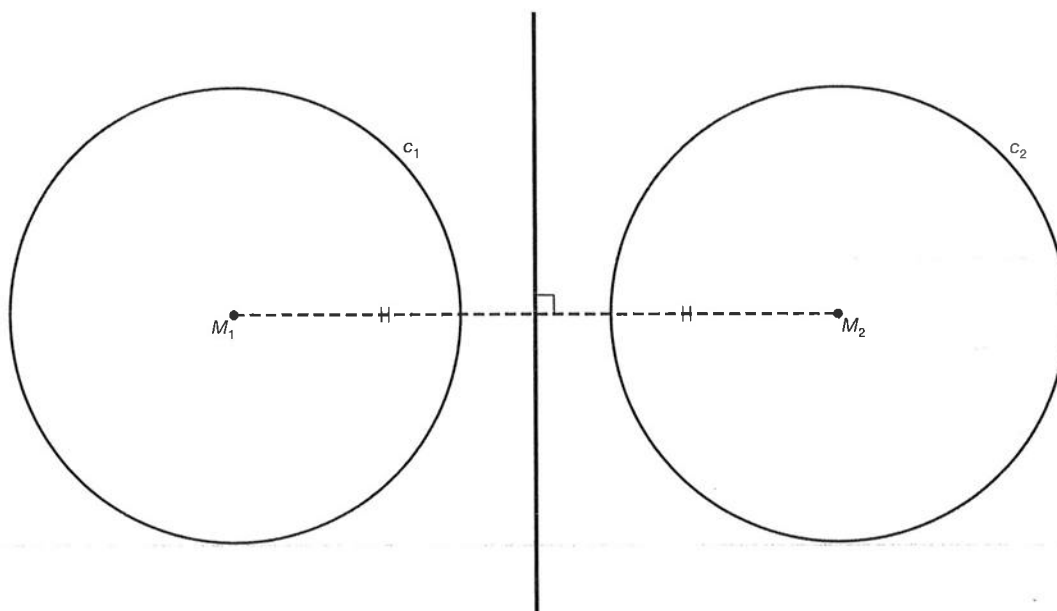
- 14 a** Op de middelloodlijn van het lijnstuk AB .
b De twee bissectrices van de hoeken tussen de lijnen k en l .
c Op de lijn evenwijdig met m en n , die gelijke afstanden heeft tot m en tot n .
d Op de cirkel met middelpunt M en straal 3.

Bladzijde 17

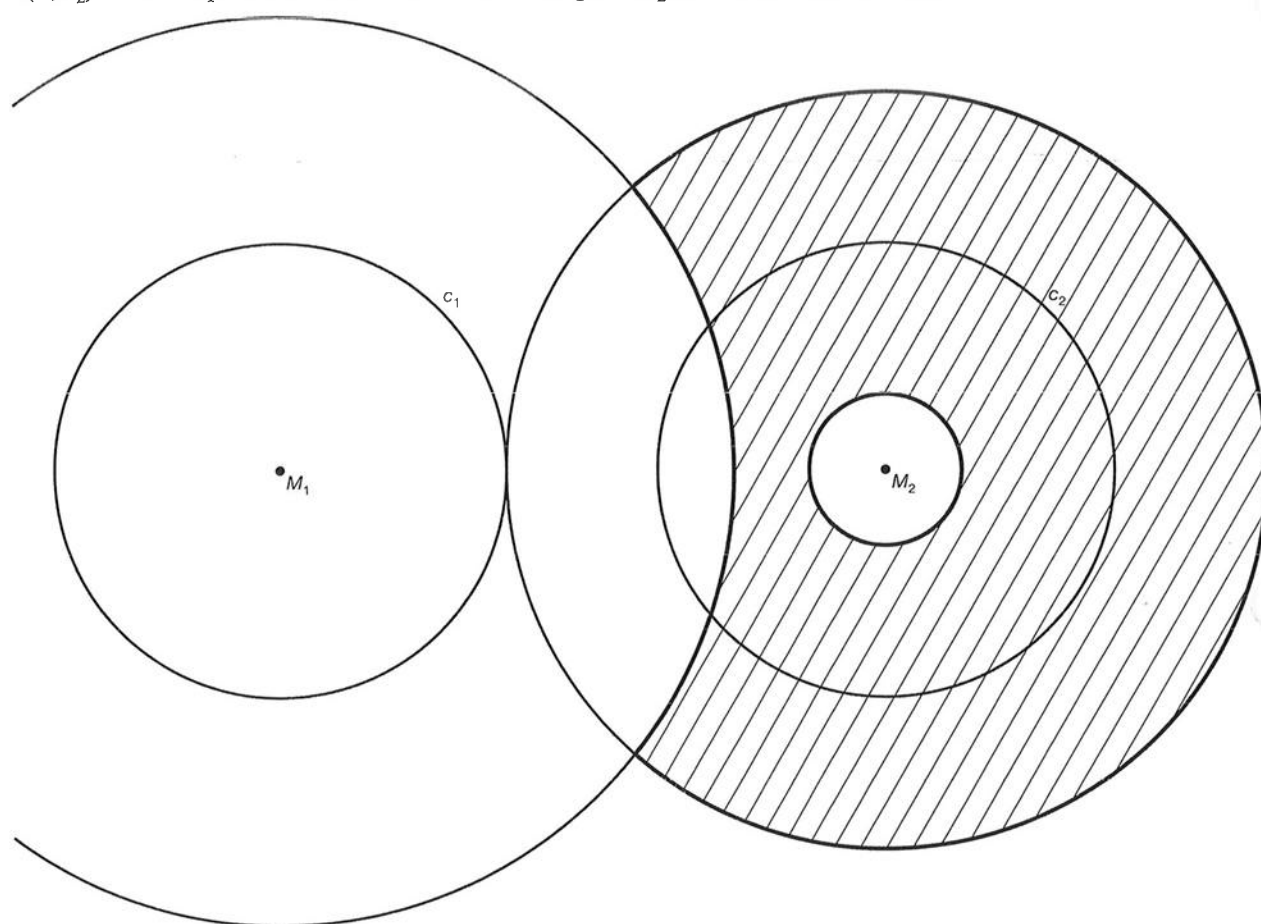
- 15 a** 



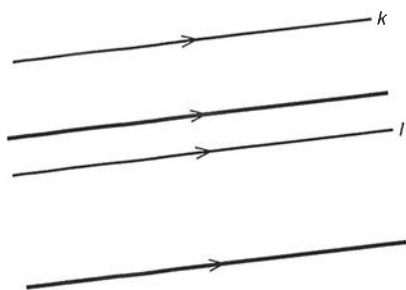
16 a



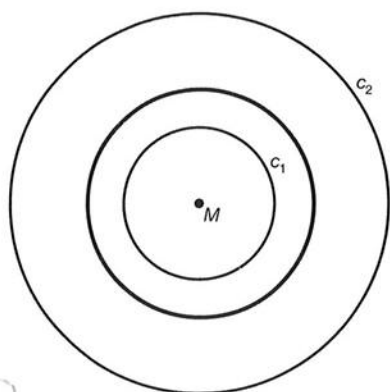
- b $d(P, c_1) \geq 3$ cm: M_1 en alle punten op of buiten de cirkel met middelpunt M_1 en straal 6 cm.
 $d(P, c_2) \leq 2$ cm: op of tussen de cirkels met middelpunt M_2 en stralen 1 cm en 5 cm.



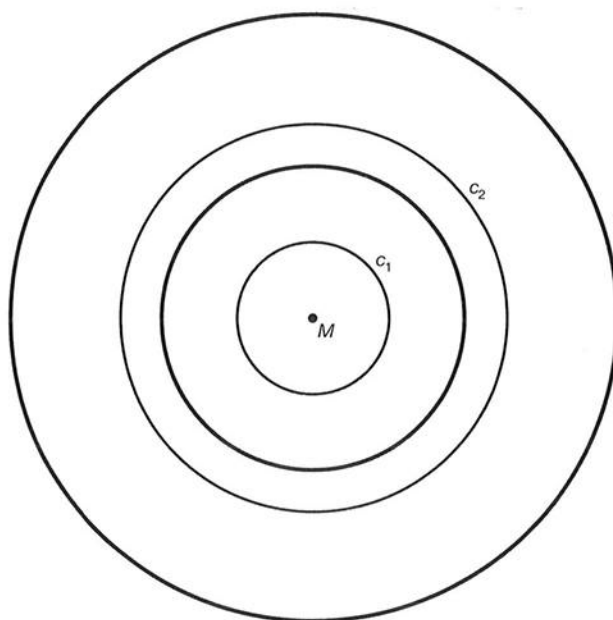
17



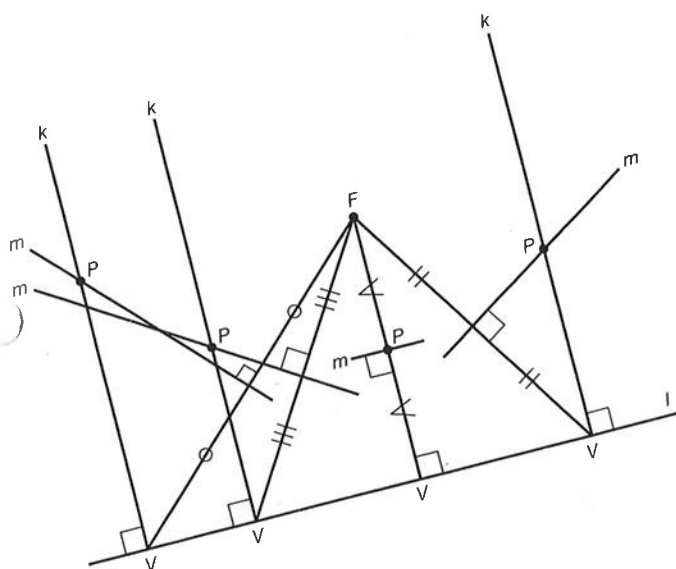
18 a



b



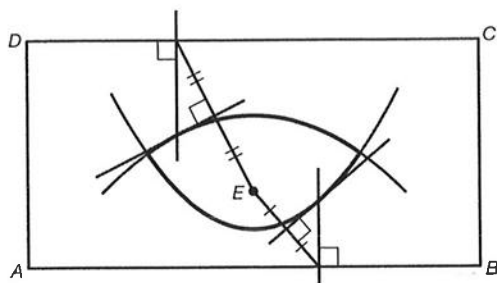
19 a



b
$$\left. \begin{aligned} d(P, F) &= d(P, V) \text{ (middelloodlijn)} \\ d(P, l) &= d(P, V) \text{ (afstand punt tot lijn)} \end{aligned} \right\} d(P, F) = d(P, l)$$

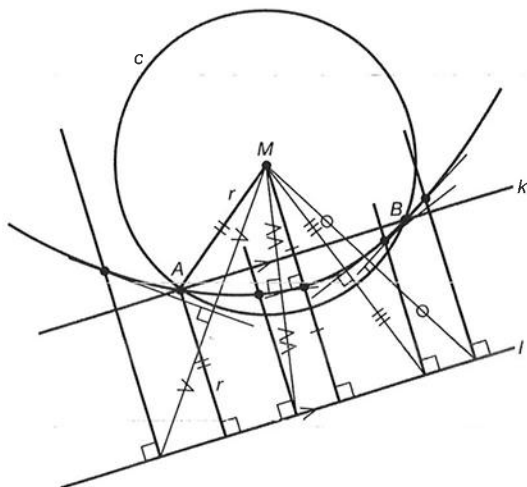
Bladzijde 19

- 20** De meetkundige plaats bestaat uit delen van de parabolen met brandpunt E en richtlijnen AB , BC , CD en AD .



Bij het tekenen blijkt het voldoende te zijn de parabolen met brandpunt E en richtlijnen AB en CD te tekenen.

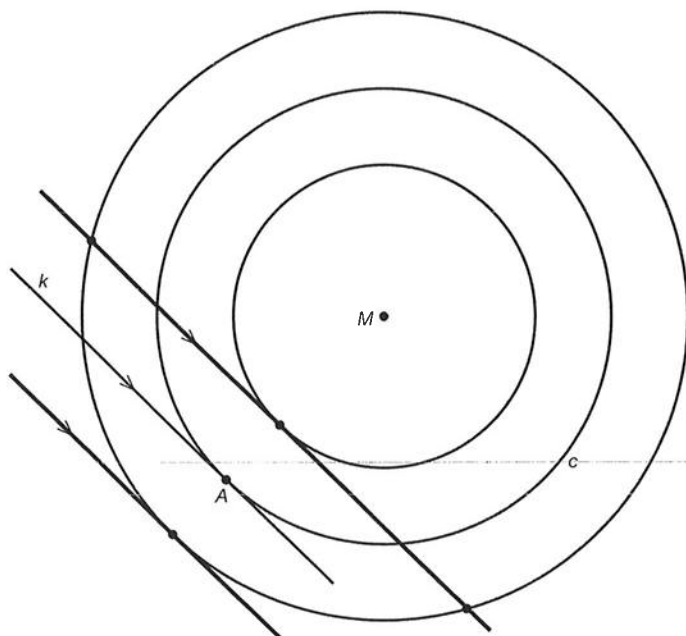
- 21 a**



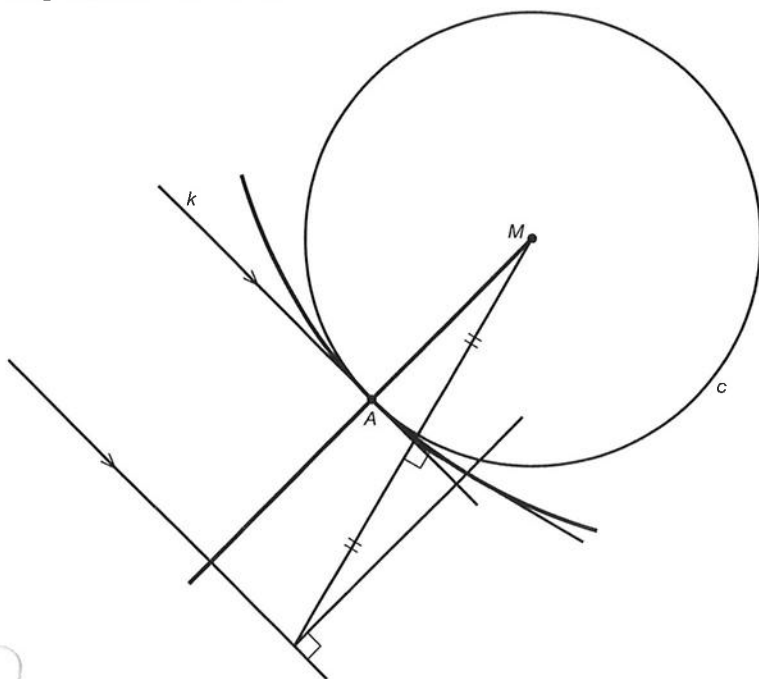
$$\left. \begin{array}{l} d(P, k) = r - d(P, l) \\ d(P, M) = d(P, l) \end{array} \right\} d(P, k) = r - d(P, M) \left\} d(P, k) = d(P, \text{cirkelboog } AB) \right.$$

$$d(P, M) = r - d(P, \text{cirkelboog } AB)$$

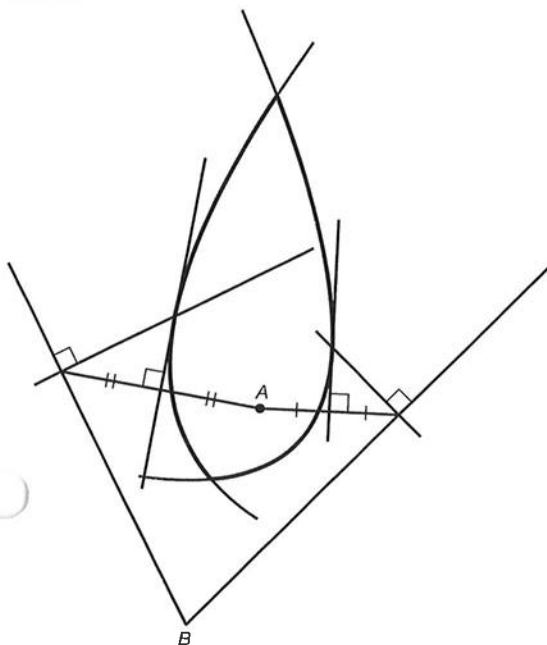
- 22 a** Teken twee lijnen evenwijdig met k op afstand 1 cm van k , de cirkel met middelpunt M en straal 2 cm en de cirkel met middelpunt M en straal 4 cm. In de figuur hieronder zijn de vier gevraagde punten als dikke stippen getekend.



- b** De meetkundige plaats is de halve lijn MA en de parabool met brandpunt M en richtlijn de lijn evenwijdig met k op afstand 3 cm van k .



- 23 a** De meetkundige plaats bestaat uit delen van de parabolen met brandpunt A en richtlijnen de benen van hoek B .



- b** Punt C is een knik op de meetkundige plaats.

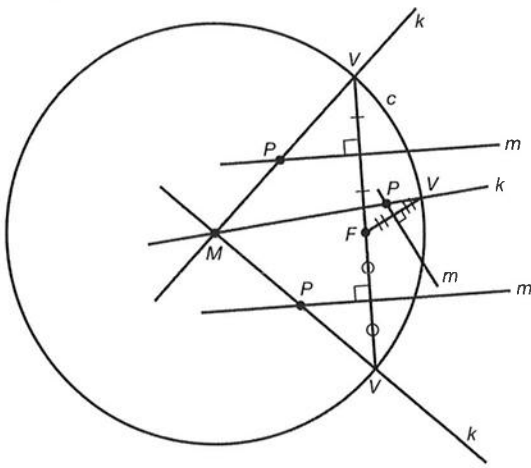
C op de parabool met brandpunt A en richtlijn het linkerbeen van hoek B ,
dus $d(C, A) = d(C, \text{linkerbeen}) \dots (1)$

C op de parabool met brandpunt A en richtlijn het rechterbeen van hoek B ,
dus $d(C, A) = d(C, \text{rechterbeen}) \dots (2)$

Uit (1) en (2) volgt $d(C, \text{linkerbeen}) = d(C, \text{rechterbeen})$, dus C ligt op de bissectrice van hoek B .

Bladzijde 20

24 a



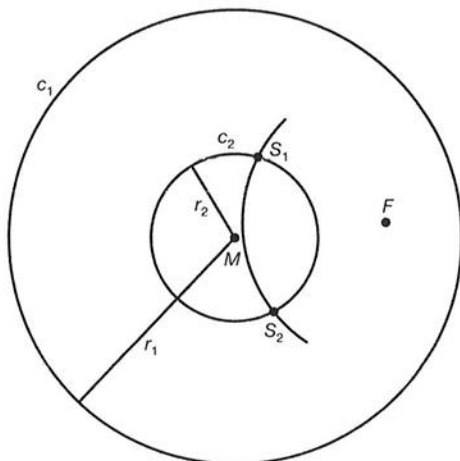
b $\left. \begin{aligned} d(P, F) &= d(P, V) \text{ (middelloodlijn)} \\ d(P, c) &= d(P, V) \end{aligned} \right\} d(P, F) = d(P, c)$

Bladzijde 22

- 25** a A is een punt op de ellips, en dus geldt $d(A, F_1) + d(A, F_2) = r$.
 b $d(A, F_1) = a - c$ en $d(A, F_2) = a + c$, dus $d(A, F_1) + d(A, F_2) = a - c + a + c = 2a$.
 $d(A, F_1) + d(A, F_2) = r$ en $d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a$, dus $r = 2a$.
 Dus de straal van de richtcirkel is gelijk aan de lengte van de lange as van de ellips.
 c C op de ellips, dus $d(C, F_1) + d(C, F_2) = 2a \dots (1)$
 Uit de symmetrie volgt dat $d(C, F_1) = d(C, F_2) \dots (2)$
 Uit (1) en (2) volgt dat $d(C, F_1) = a$.
 De lange en de korte as van de ellips staan loodrecht op elkaar, dus de stelling van Pythagoras geeft
 $a^2 = b^2 + c^2$.

- 26** a $2c = 4$, dus $c = 2$.
 $r = 2a = 5$, dus $a = 2,5$.
 $a^2 = b^2 + c^2$ ofwel $b^2 = a^2 - c^2$ geeft $b^2 = 2,5^2 - 2^2 = 2,25$, dus $b = \sqrt{2,25} = 1,5$.
 De lengte van de korte as van de ellips is $2b = 3$.
- b $2a = 8$, dus $a = 4$.
 $2b = 6$, dus $b = 3$.
 $a^2 = b^2 + c^2$ ofwel $c^2 = a^2 - b^2$ geeft $c^2 = 4^2 - 3^2 = 7$, dus $c = \sqrt{7}$.
 De brandpuntsafstand is $2c = 2\sqrt{7}$.
- c Toppen $A(-5, 0)$ en $B(5, 0)$, dus $a = 5$.
 Toppen $C(0, 3)$ en $D(0, -3)$, dus $b = 3$.
 $a^2 = b^2 + c^2$ ofwel $c^2 = a^2 - b^2$ geeft $c^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, $c = \sqrt{16} = 4$.
 Dus $F_1(-4, 0)$ en $F_2(4, 0)$.

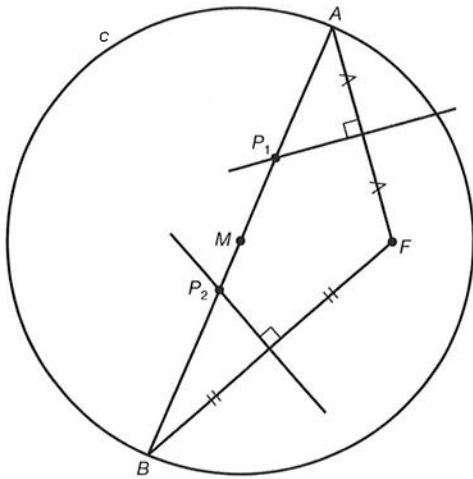
- 27 a** Teken een cirkelboog met middelpunt F en straal $r_1 - r_2$ zo, dat de cirkelboog de cirkel c_2 snijdt in de punten S_1 en S_2 . Nu geldt $d(S_1, M) + d(S_1, F) = d(S_2, M) + d(S_2, F) = r_2 + r_1 - r_2 = r_1$. En dus liggen S_1 en S_2 op e .



- b** $BA = BF$ (ellips), dus $\angle MAF = \angle BFA$ (gelijkbenige driehoek)
 $\left. \begin{array}{l} \angle ABF = 180^\circ - \angle MAF - \angle BFA \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle ABF = 180^\circ - 2 \cdot \angle MAF \\ \angle MBF = 180^\circ - \angle ABF \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle ABF = 180^\circ - 2 \cdot \angle MAF \\ \angle MBF = 2 \cdot \angle MAF \end{array}$

Bladzijde 23

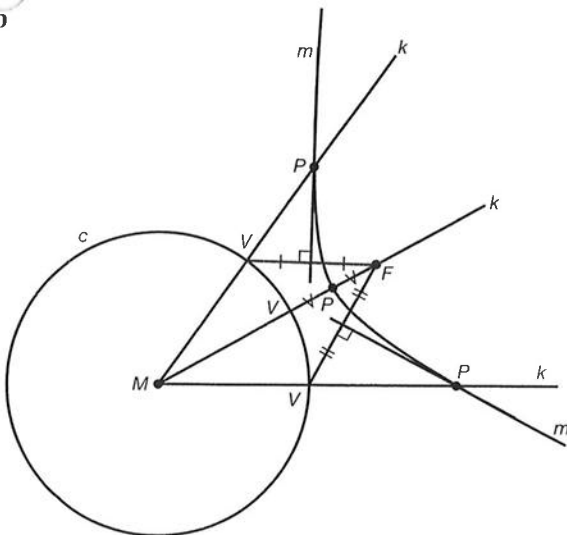
28 a



- $\angle F = \angle PX$ (ellips), dus $\angle PFX = \angle PFX$ (gelijkbenige driehoek) ... (1)
 $\angle QF = \angle QY$ (ellips), dus $\angle QFY = \angle QFY$ (gelijkbenige driehoek) ... (2)
 In driehoek FXY is $\angle PFX + \angle PFX + \angle PFQ + \angle QFY + \angle QFY = 180^\circ$ (hoekensom driehoek) ... (3)
 Uit (1), (2) en (3) volgt $2 \cdot \angle PFX + \angle PFQ + 2 \cdot \angle QFY = 180^\circ$... (4)
 $\angle XFY = \angle PFX + \angle PFQ + \angle QFY$, dus $\angle PFX + \angle QFY = \angle XFY - \angle PFQ$ ofwel
 $2 \cdot \angle PFX + 2 \cdot \angle QFY = 2 \cdot \angle XFY - 2 \cdot \angle PFQ$... (5)
 Uit (4) en (5) volgt $2 \cdot \angle XFY - 2 \cdot \angle PFQ + \angle PFQ = 180^\circ$
 $2 \cdot \angle XFY = 180^\circ + \angle PFQ$
 $\angle XFY = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle PFQ$

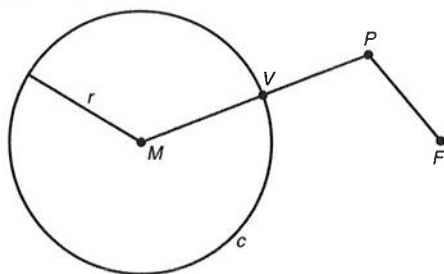
- 29** Als $a > b$ dan is AB de lange as van de ellips met lengte $2a$, en liggen de brandpunten op het lijnstuk AB . In dat geval geldt $a^2 = b^2 + c^2$ (zie opgave 25).
Als $a < b$ dan is CD de lange as van de ellips met lengte $2b$, en liggen de brandpunten op het lijnstuk CD . In dat geval geldt:
 A op de ellips, dus $d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2b$.
Uit de symmetrie volgt $d(A, F_1) = d(A, F_2)$, dus $d(A, F_1) = b$.
De lange en de korte as van de ellips staan loodrecht op elkaar, dus de stelling van Pythagoras geeft $b^2 = a^2 + c^2$ ofwel $a^2 = b^2 - c^2$.

30 a,b



Bladzijde 25

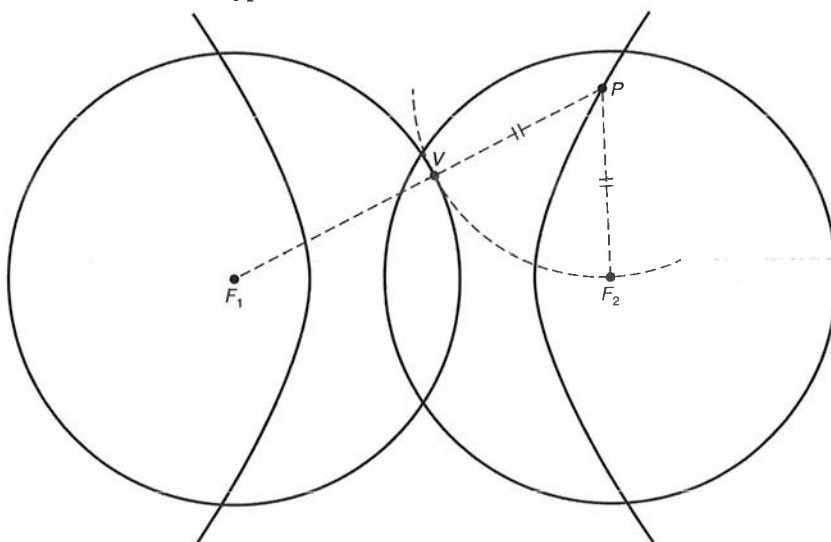
31 a



$$\left. \begin{array}{l} d(P, F) = d(P, c), \text{ dus } PF = PV \\ d(P, M) - d(P, F) = MV + PV - PF \end{array} \right\} d(P, M) - d(P, F) = MV + PV - PV = MV = r$$

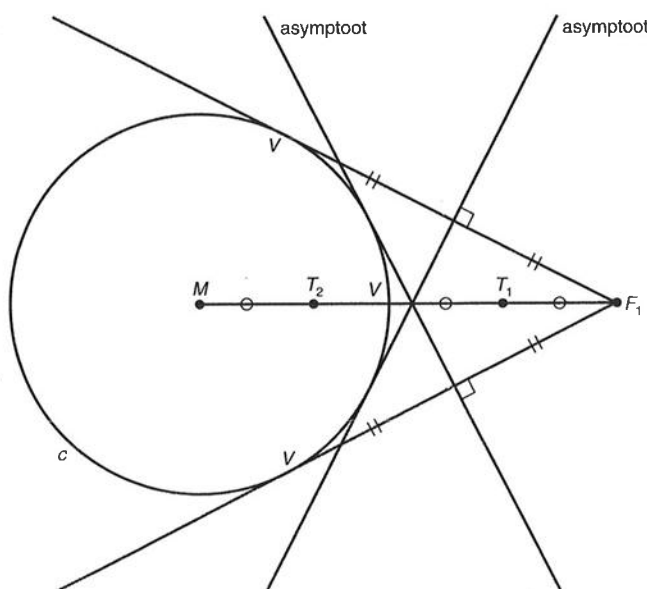
$$\left. \begin{array}{l} d(P, M) - d(P, F) = r, \text{ dus } d(P, M) = r + d(P, F) \\ d(P, M) = MV + PV = r + d(P, c) \end{array} \right\} d(P, F) = d(P, c)$$

- 32 Kies een punt P op de hyperbooltak. Het punt V op PF_1 met $PV = PF_2$ ligt op de richtcirkel met middelpunt F_1 . De cirkel met middelpunt F_1 en straal F_1V en de cirkel met middelpunt F_2 en straal F_2V zijn de twee richtcirkels van de hyperbool.



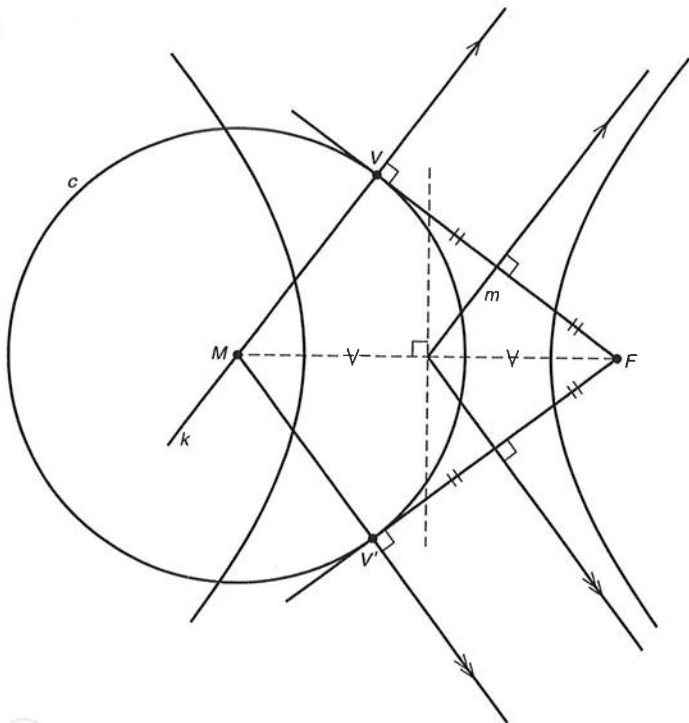
- 33 a $\left. \begin{array}{l} MV \perp FV \text{ (raaklijn)} \\ m \perp FV \text{ (middelloodlijn)} \end{array} \right\} MV \parallel m, \text{ dus } MV \text{ en } m \text{ snijden elkaar niet}$

b,d



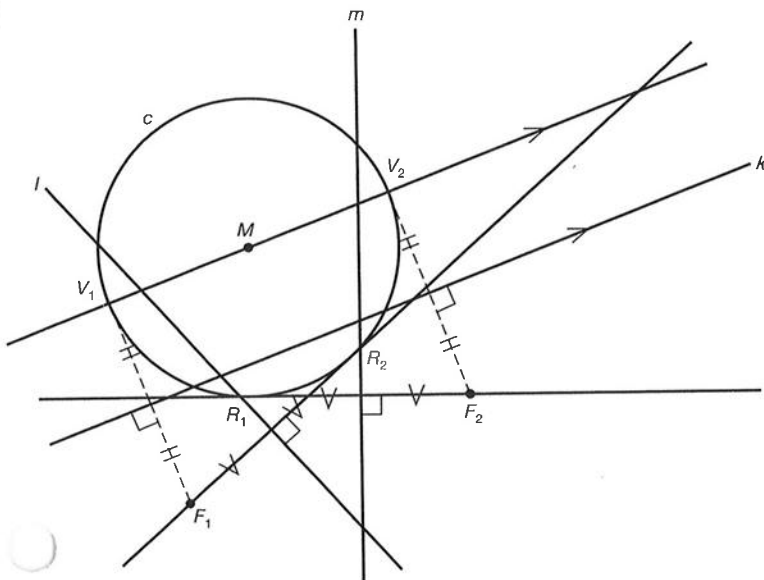
- c De lijn MF en de middelloodlijn van het lijnstuk MF zijn de symmetrieassen.

34



Bladzijde 26

35



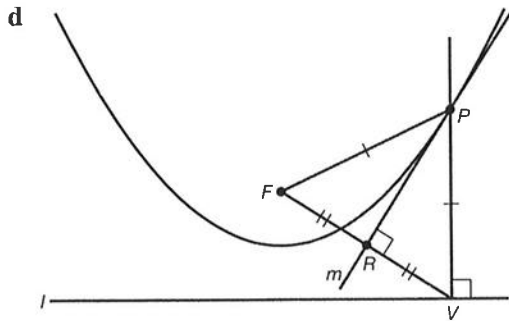
De ene hyperbool heeft brandpunten M en F_1 en asymptoten k en l .
De andere hyperbool heeft brandpunten M en F_2 en asymptoten k en m .

- 36 a Ja, de meetkundige plaats van de punten P met $d(P, F) = d(P, c)$ valt geheel samen met de ellips met brandpunt F en richtcirkel c .
b Nee, de meetkundige plaats van de punten P met $d(P, F) = d(P, c)$ geeft maar één tak van de hyperbool met brandpunten F en middelpunt M van richtcirkel c .

9.3 Raaklijneigenschappen

Bladzijde 28

- 37 a $\left. \begin{array}{l} d(Q, l) < d(Q, V) \text{ (afstand punt tot lijn)} \\ d(Q, V) = d(Q, F) \text{ (middelloodlijn)} \end{array} \right\} d(Q, l) < d(Q, F)$
b Alle punten op de parabool hebben gelijke afstanden tot l en F ... (1)
 $d(Q, l) < d(Q, F)$... (2)
Uit (1) en (2) volgt dat Q buiten de parabool ligt.
c Punt P ligt op de parabool en op m , alle andere punten van m liggen buiten de parabool, dus m raakt de parabool.

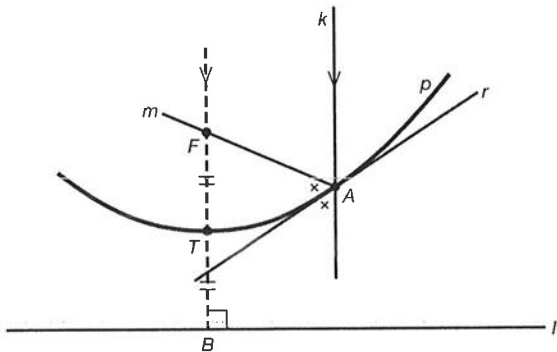


$$\left. \begin{array}{l} PF = PV \text{ (parabool)} \\ FR = VR \text{ (middelloodlijn)} \\ PR = PR \end{array} \right\} \triangle PFR \cong \triangle PVR \text{ (ZZZ)}$$

Uit $\triangle PFR \cong \triangle PVR$ volgt $\angle FPR = \angle VPR$, dus m maakt gelijke hoeken met PF en PV .

Bladzijde 29

38



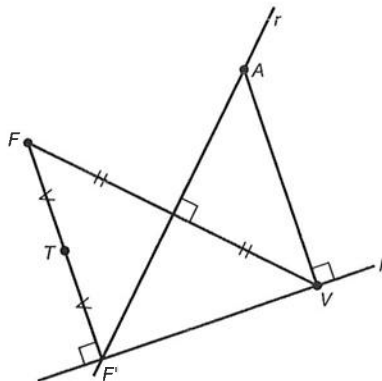
k is de lijn door A evenwijdig met de symmetrieas.

$$\angle(k, r) = \angle(AF, r)$$

$$FT = BT$$

l door B , loodrecht op de symmetrieas.

39



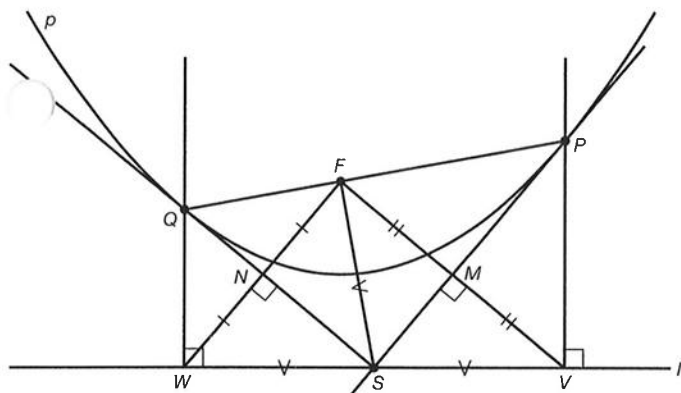
F spiegelen in r geeft V .

l door V , loodrecht op AV .

FF' loodrecht op l met F' op l .

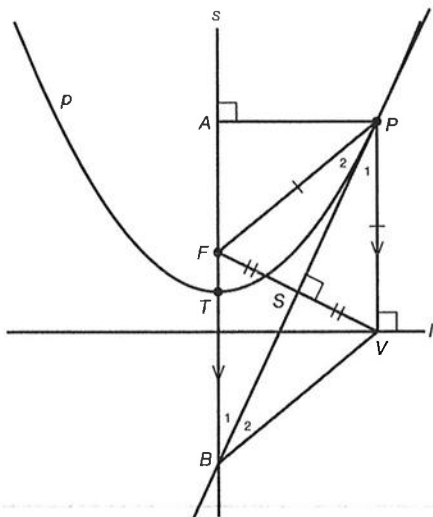
T is het midden van FF' .

41 Teken $PV \perp l$ en $QW \perp l$.
Teken QF, FS, VF en WF .


$$\left. \begin{array}{l} \angle W F V = 90^{\circ} \\ \angle M = 90^{\circ} \text{ (middelloodlijn)} \\ \angle N = 90^{\circ} \text{ (middelloodlijn)} \\ \angle W F V + \angle M + \angle N + \angle P S Q = 360^{\circ} \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array} \right\} \angle P S Q = 90^{\circ}$$

Rechtszide 30

b Teken FV en het snijpunt S van BP en FV .

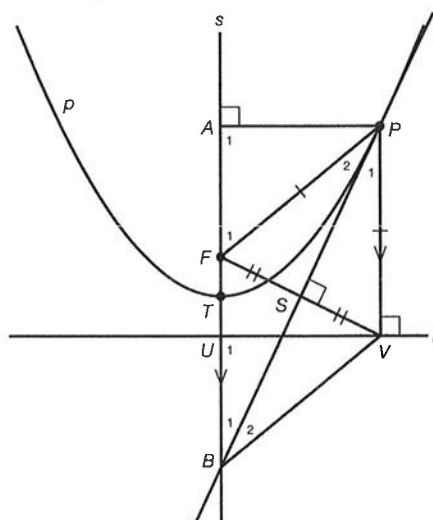


$$\left. \begin{array}{l} FS = VS \text{ (middelloodlijn)} \\ \angle BSF = \angle PSV = 90^\circ \\ \angle B_1 = \angle P_1 \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle BSF \cong \triangle PSV \text{ (ZHH)}$$

Uit $\triangle BSF \cong \triangle PSV$ volgt $BF = PV$.

$$\left. \begin{array}{l} PF = PV \text{ (parabool)} \\ BF = BV \text{ (middelloodlijn)} \\ BF = PV \end{array} \right\} PF = PV = BF = BV, \text{ dus } BVPF \text{ is een ruit}$$

c Het snijpunt van l en s is U .



$$\left. \begin{array}{l} AP = UV \text{ (rechthoek)} \\ \angle A_1 = \angle U_1 = 90^\circ \\ \angle F_1 = \angle B_{12} \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle APF \cong \triangle UVB \text{ (ZHH)}$$

Uit $\triangle APF \cong \triangle UVB$ volgt $AF = UB$.

$$\left. \begin{array}{l} AF = BU \\ FT = UT \text{ (parabool)} \end{array} \right\} AT = BT$$

-

Meetkundige plaatsen en raaklijneigenschappen 19

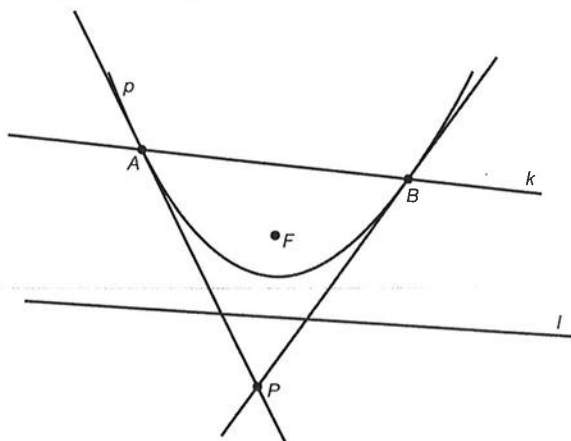
$$\left. \begin{array}{l} RV_2 = RF \text{ (middelloodlijn)} \\ \angle PRV_2 = \angle PRF = 90^\circ \text{ (middelloodlijn)} \\ PR = PR \end{array} \right\} \triangle PRV_2 \cong \triangle PRF \text{ (ZHZ)}$$

Uit $\triangle PRV_2 \cong \triangle PRF$ volgt $PV_2 = PF \dots (2)$

Uit (1) en (2) volgt $PV_1 = PV_2 = PF$, dus V_1 en V_2 liggen op de cirkel met middelpunt P en straal PF .

- b** Teken door P de raaklijnen aan p met raakpunten A en B .

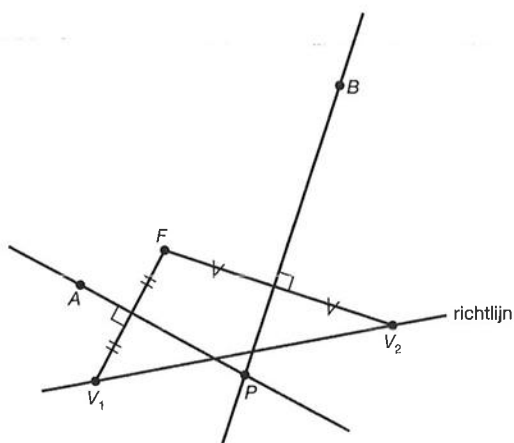
De lijn AB is de poollijn k van P .



- c** Teken de lijnen AP en BP .

Teken de punten V_1 en V_2 zo, dat AP middelloodlijn van het lijnstuk FV_1 en BP middelloodlijn van het lijnstuk FV_2 is.

De lijn V_1V_2 is de richtlijn van p .



- 45** $\left. \begin{array}{l} QR < QV \text{ (afstand punt tot cirkel)} \\ QV = QF_2 \text{ (middelloodlijn)} \end{array} \right\} QR < QF_2, \text{ dus } Q \text{ ligt buiten de ellips}$

$$\left. \begin{array}{l} MF_2 = MV \text{ (middelloodlijn)} \\ \angle PMF_2 = \angle PMV = 90^\circ \\ PM = PM \end{array} \right\} \triangle PMF_2 \cong \triangle PMV \text{ (ZHZ)}$$

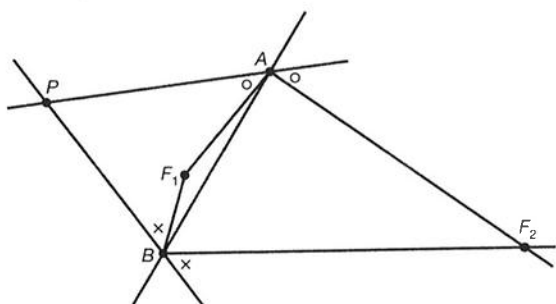
Uit $\triangle PMF_2 \cong \triangle PMV$ volgt $\angle P_3 = \angle P_4 \dots (1)$

$\angle P_1 = \angle P_4$ (overstaande hoeken) $\dots (2)$

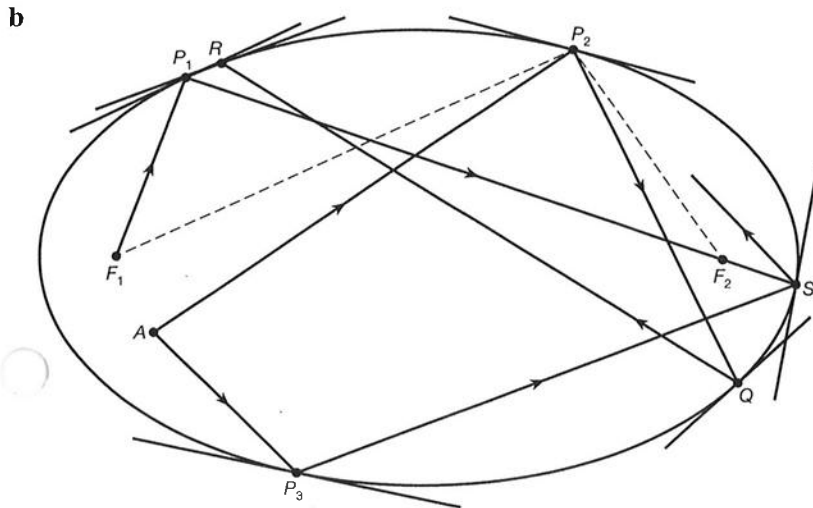
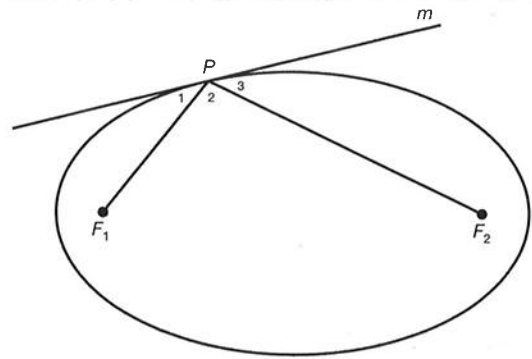
Uit (1) en (2) volgt $\angle P_1 = \angle P_3$.

Bladzijde 32

46



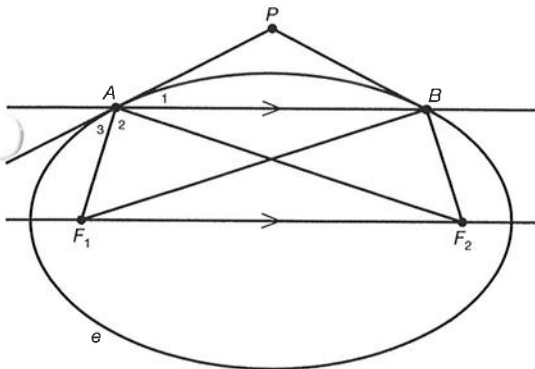
- 47 a** Zie de figuur met de ellips met brandpunten F_1 en F_2 en een punt P op de ellips.
De lijnstukken PF_1 en PF_2 zijn getekend.
 $\angle P_1 = \angle P_3$ (raaklijneigenschap ellips)
Dus een lichtstraal van F_1 naar P wordt na spiegeling in de ellips een lichtstraal van P naar F_2 .



- c** Zie de figuur bij b.
 $\angle(AP_2, \text{raaklijn in } P_2) > \angle(F_1P_2, \text{raaklijn in } P_2)$, dus
 $\angle(QP_2, \text{raaklijn in } P_2) > \angle(F_2P_2, \text{raaklijn in } P_2)$, dus
 P_2Q gaat tussen de brandpunten door, enzovoort.
d AP_3 gaat niet tussen de brandpunten door, dus alle vervolgspegelingen gaan ook niet tussen de brandpunten door.

Bladzijde 33

- 48 a** Teken AF_1 , BF_2 , AF_2 en BF_1 en verleng AP aan de kant van A .



$$\left. \begin{array}{l} \angle PAF_2 = \angle A_3 \text{ (raaklijneigenschap ellips)} \\ \angle PAF_2 = \angle PBF_1 \text{ (symmetrie)} \\ \angle A_{123} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle PAF_1 + \angle PBF_1 = 180^\circ$$

Dus $APBF_1$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

- b** Vanwege de symmetrie is ook $APBF_2$ een koordenvierhoek.
 $APBF_1$ is koordenvierhoek, dus F_1 op de cirkel door A, B en P ... (1)
 $APBF_2$ is koordenvierhoek, dus F_2 op de cirkel door A, B en P ... (2)
Uit (1) en (2) volgt dat F_1 en F_2 op de omgeschreven cirkel van driehoek ABP liggen.

- 49 $\left. \begin{array}{l} QR < QV \text{ (afstand punt tot cirkel)} \\ QV = QF_2 \text{ (middelloodlijn)} \end{array} \right\} QR < QF_2, \text{ dus } Q \text{ ligt buiten de hyperbool}$

$$\left. \begin{array}{l} MF_2 = MV \text{ (middelloodlijn)} \\ \angle PMF_2 = \angle PMV = 90^\circ \\ PM = PM \end{array} \right\} \triangle PMF_2 \cong \triangle PMV \text{ (ZHZ)}$$

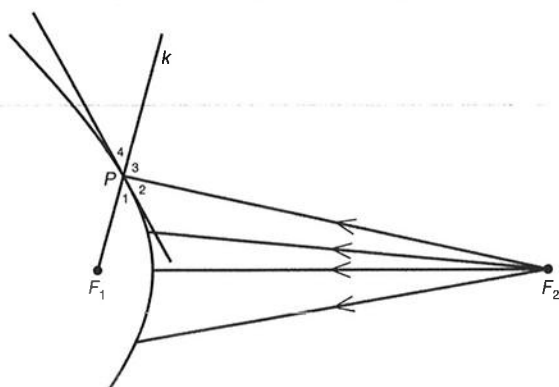
Uit $\triangle PMF_2 \cong \triangle PMV$ volgt $\angle P_3 = \angle P_4 \dots (1)$

$\angle P_1 = \angle P_4$ (overstaande hoeken) ... (2)

Uit (1) en (2) volgt $\angle P_1 = \angle P_3$.

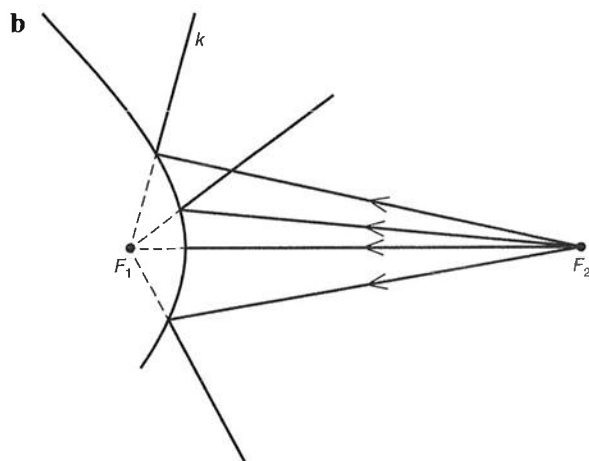
Bladzijde 34

- 50 a P is het punt van waaruit k wordt teruggekaatst.
Teken PF_1 en de raaklijn aan de hyperbool in P .

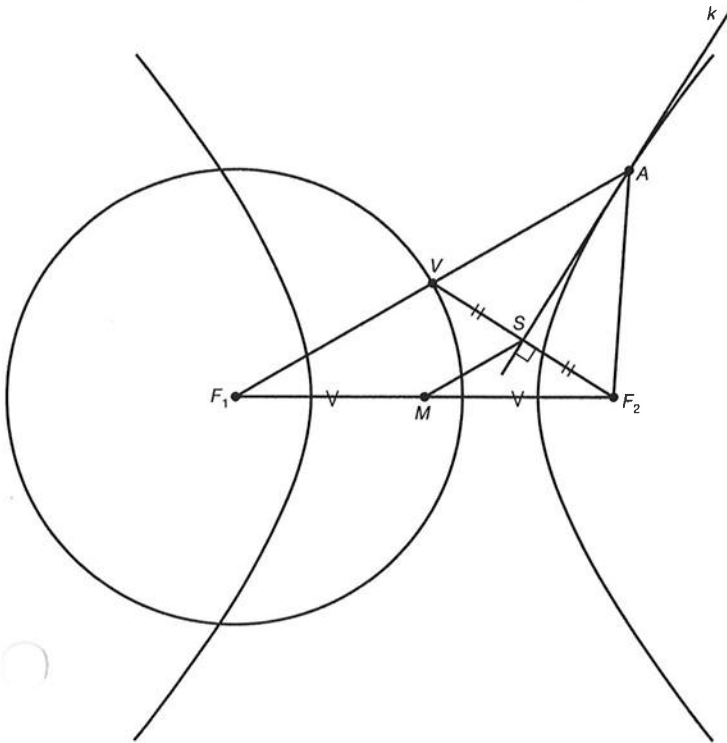


$$\left. \begin{array}{l} \angle P_1 = \angle P_2 \text{ (raaklijneigenschap hyperbool)} \\ \angle P_2 = \angle P_4 \text{ (hoek van inval is gelijk aan hoek van weerkaatsing)} \\ \angle P_{234} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array} \right\} \angle P_{123} = 180^\circ$$

Dus F_1 ligt op het verlengde van k .



- 51 F_2 spiegelen in k geeft V op de richtcirkel.
Teken de richtcirkel met middelpunt F_1 en straal F_1V .

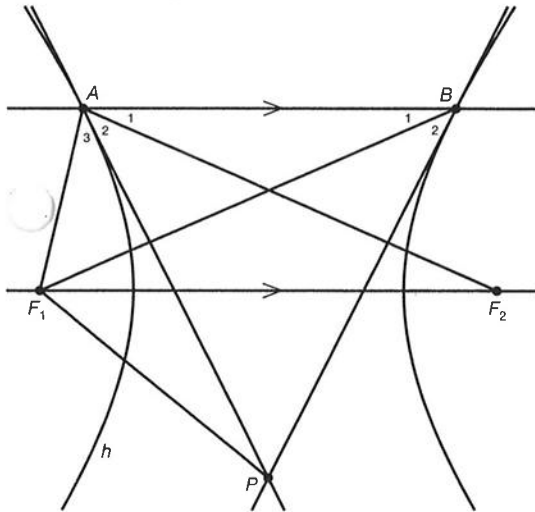


$$\left. \begin{aligned} \frac{MF_2}{F_1F_2} &= \frac{SF_2}{VF_2} = \frac{1}{2} \\ \angle MF_2S &= \angle F_1F_2V \end{aligned} \right\} \triangle MF_2S \sim \triangle F_1F_2V \text{ (zhz)}$$

Uit bovenstaande volgt $MS = \frac{1}{2}F_1V$.

En omdat F_1V de straal van de richtcirkel is, is $d(M, S)$ onafhankelijk van de plaats van A .

- 52 Teken AF_1 , AF_2 en BF_1 .



$\angle A_{12} = \angle B_{12}$ (symmetrie), dus $\angle APB = 180^\circ - 2 \cdot \angle A_{12}$ (hoekensom driehoek).

$\left. \begin{aligned} \angle A_1 &= \angle B_1 \text{ (symmetrie)} \\ \angle A_2 &= \angle A_3 \text{ (raaklijneigenschap hyperbool)} \end{aligned} \right\} \angle A_{12} = \angle B_1 + \angle A_3$

$\left. \begin{aligned} \angle A_{12} &= \angle B_1 + \angle A_3 \\ \angle AF_1B &= 180^\circ - \angle A_{123} - \angle B_1 \text{ (hoekensom driehoek)} \end{aligned} \right\} \angle AF_1B = 180^\circ - 2 \cdot \angle A_{12}$

Dus $\angle APB = \angle AF_1B$, en hieruit volgt dat P en F_1 op dezelfde cirkelboog AB liggen (constante hoek).

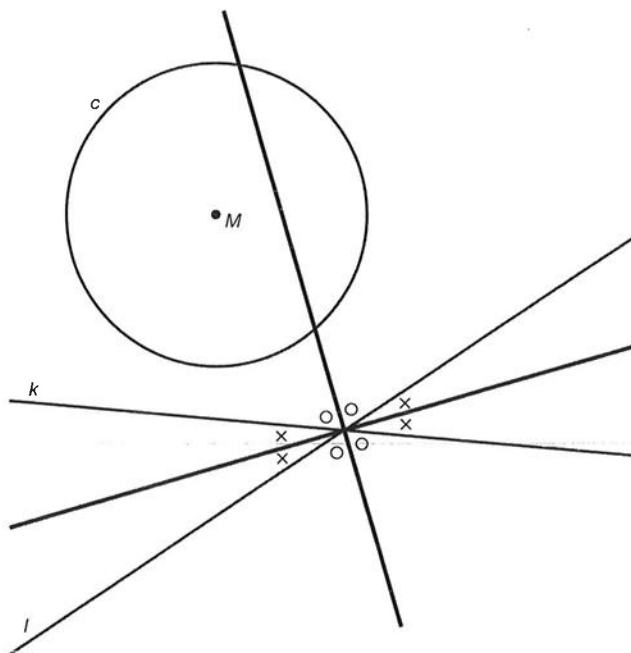
Op dezelfde manier kun je bewijzen dat P en F_2 op dezelfde cirkelboog AB liggen.

Dus F_1 en F_2 liggen op de omgeschreven cirkel van driehoek ABP .

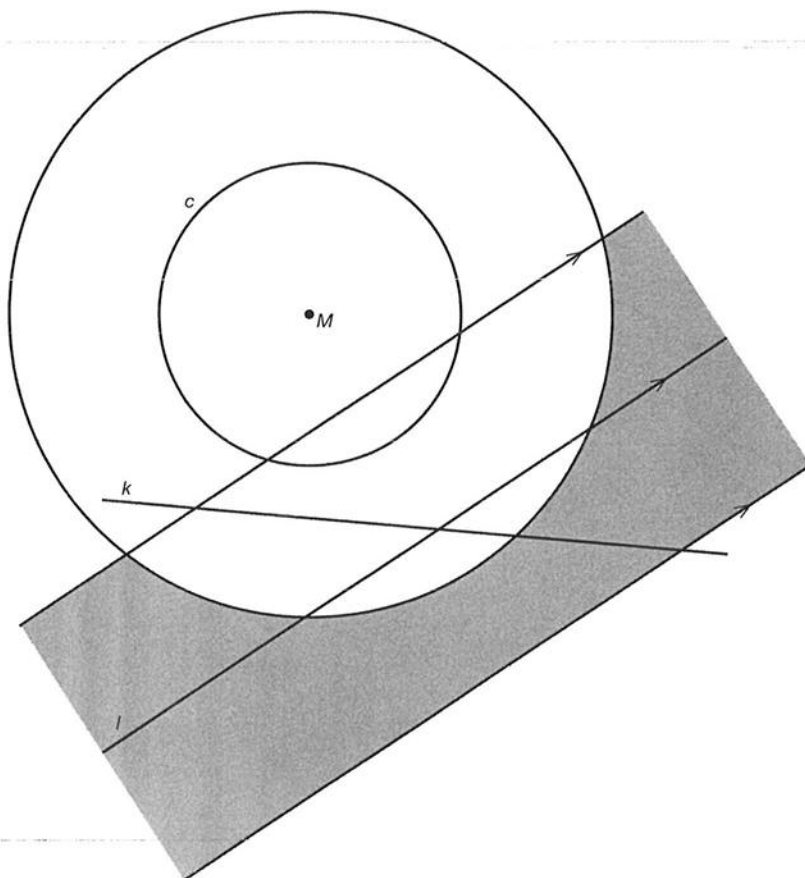
Diagnostische toets

Bladzijde 36

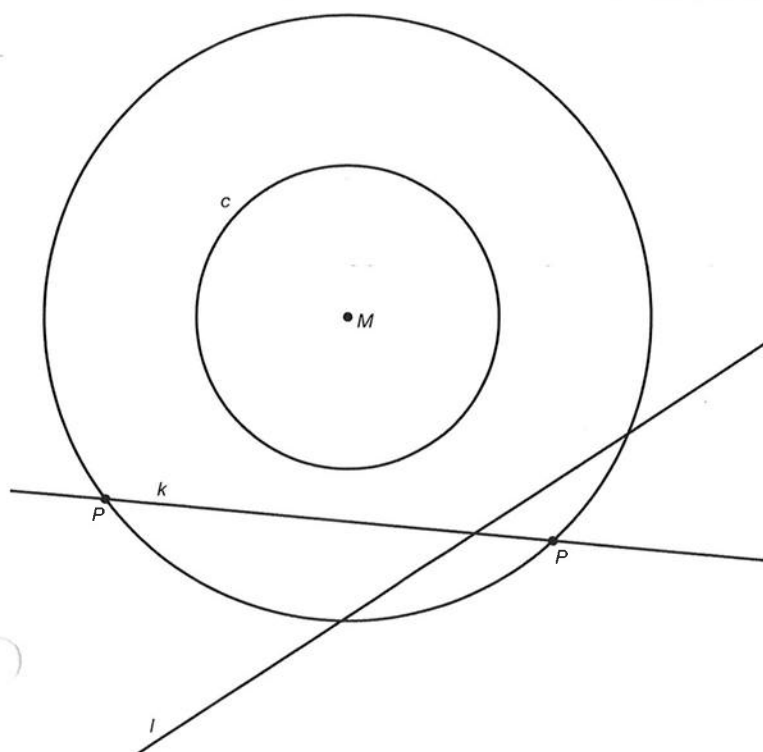
1 a



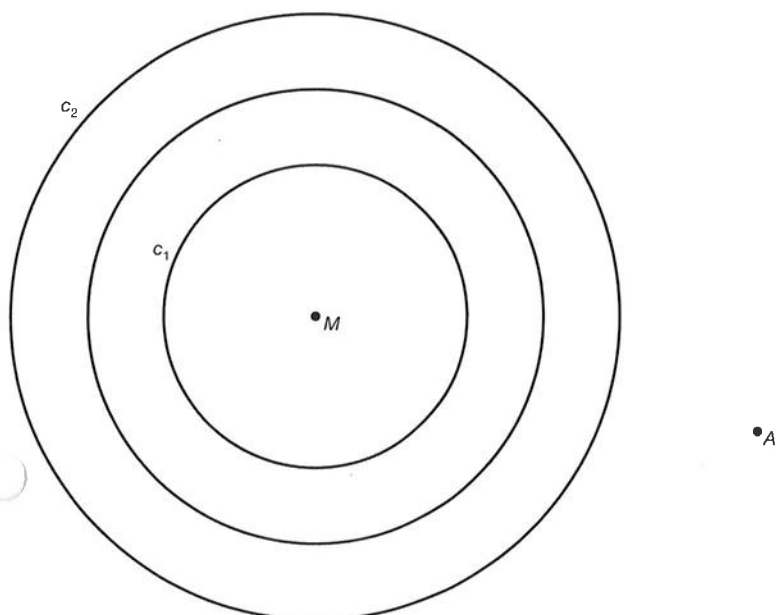
- b Teken de cirkel met middelpunt M en straal $2r$, en twee lijnen evenwijdig met l op afstand r van l . Het grijze gebied is de gevraagde meetkundige plaats.



- c Teken de cirkel met middelpunt M en straal $2r$.
De getekende dikke stippen zijn de gevraagde meetkundige plaats.

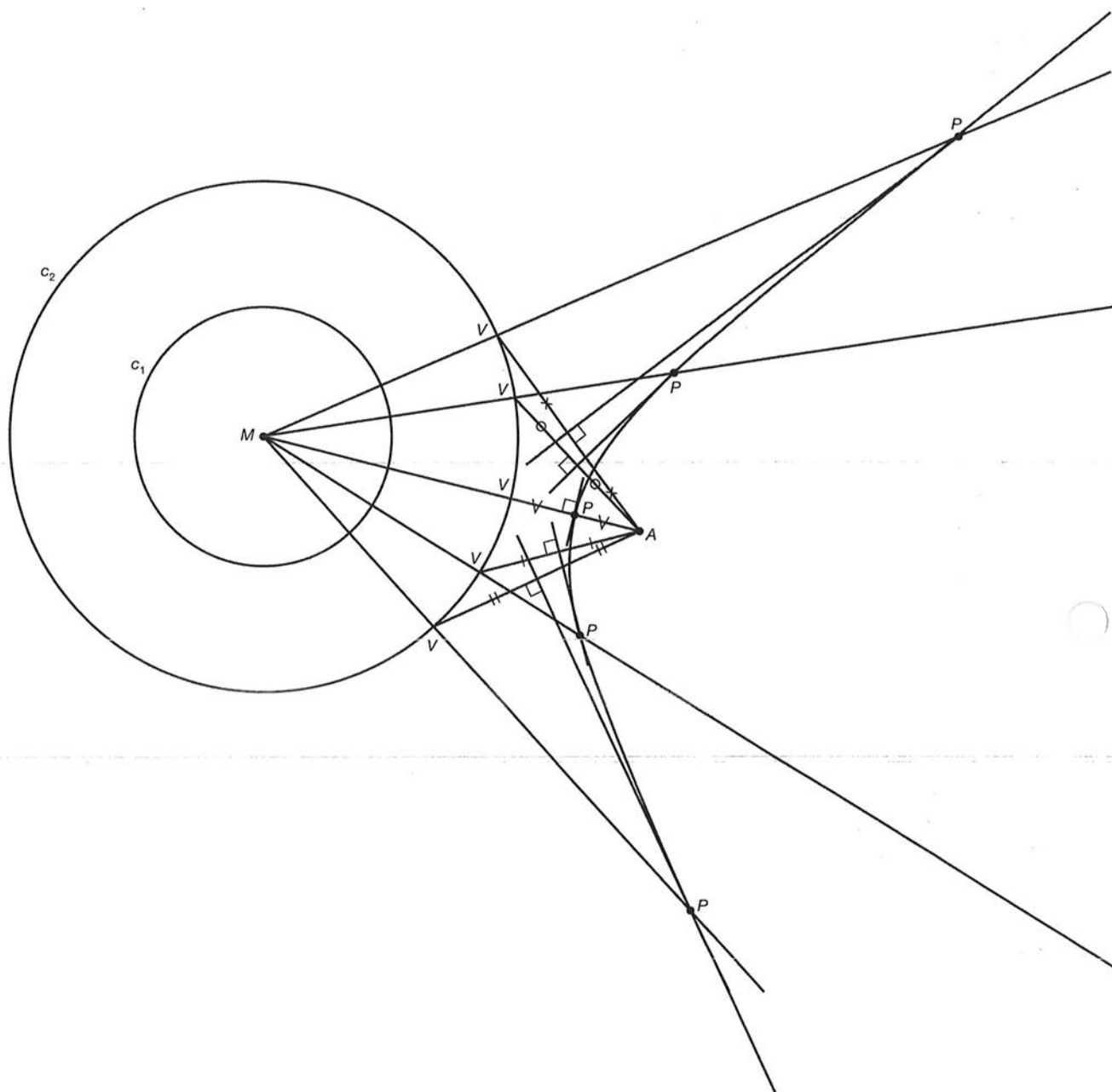


2 a



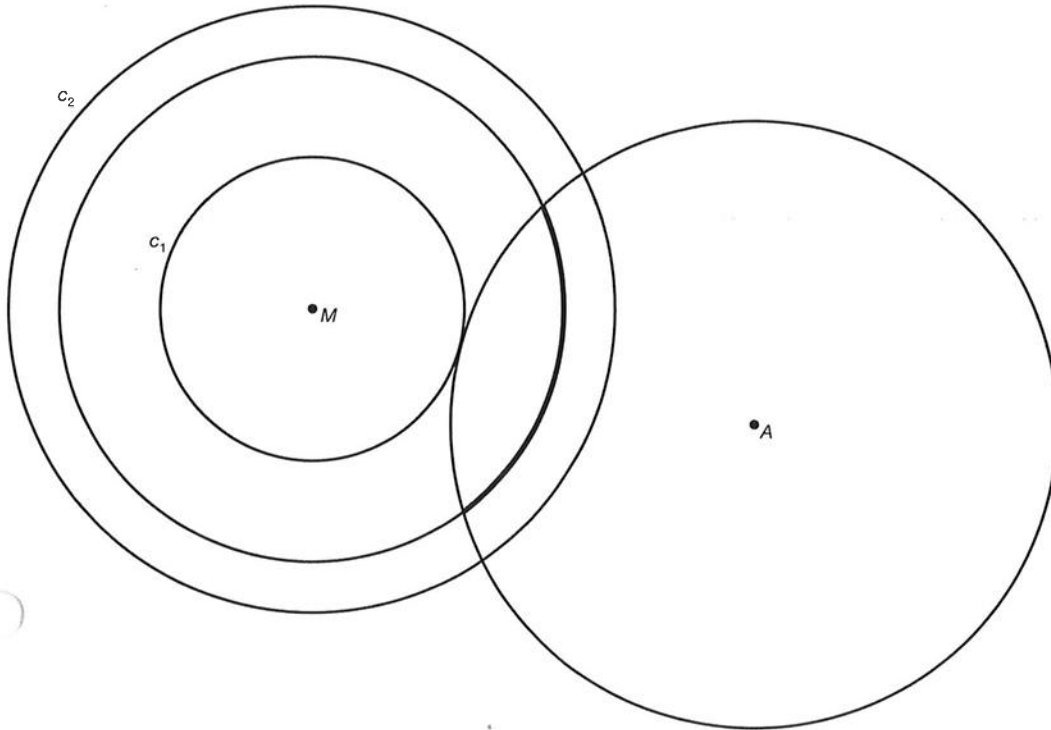
De gevraagde meetkundige plaats is de cirkel met middelpunt M en straal 3 cm.

b

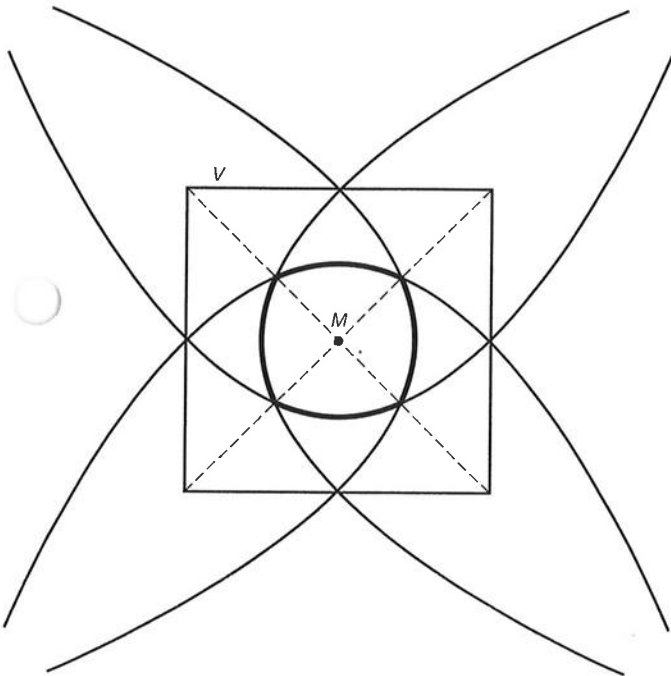


De gevraagde meetkundige plaats is de hyperbooltak met brandpunt A en richtcirkel c_2 .

- c Teken de cirkel met middelpunt M en straal $3\frac{1}{3}$ cm en de cirkel met middelpunt A en straal 4 cm. De gevraagde meetkundige plaats is het dik getekende gedeelte van de cirkel met middelpunt M en straal $3\frac{1}{3}$ cm.



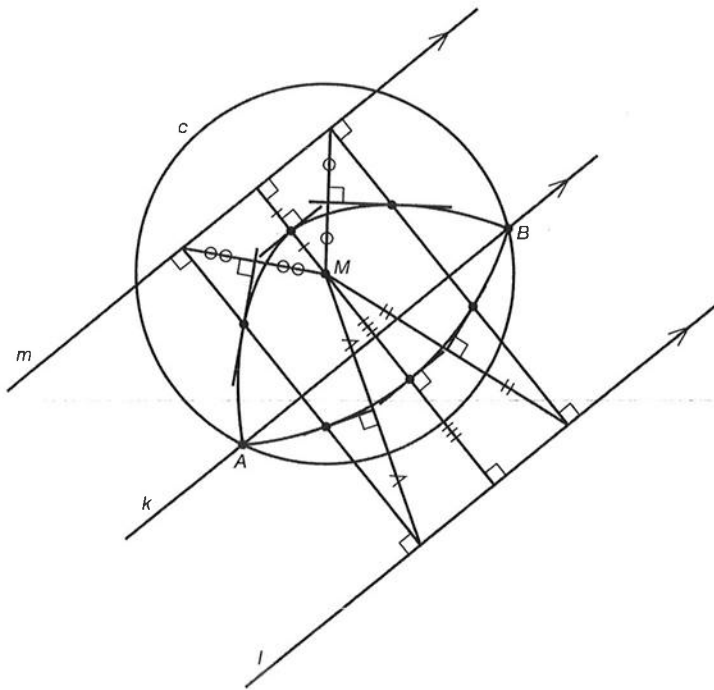
- 3 Teken volgens het werkschema op bladzijde 18 van het leerboek de parabolen met brandpunt M en richtlijnen de zijden van het vierkant. In de figuur hieronder zijn, om het overzichtelijk te houden, de lijnen die nodig zijn om de parabolen te kunnen tekenen weggelaten. De gevraagde meetkundige plaats is het dikgetekende gedeelte.



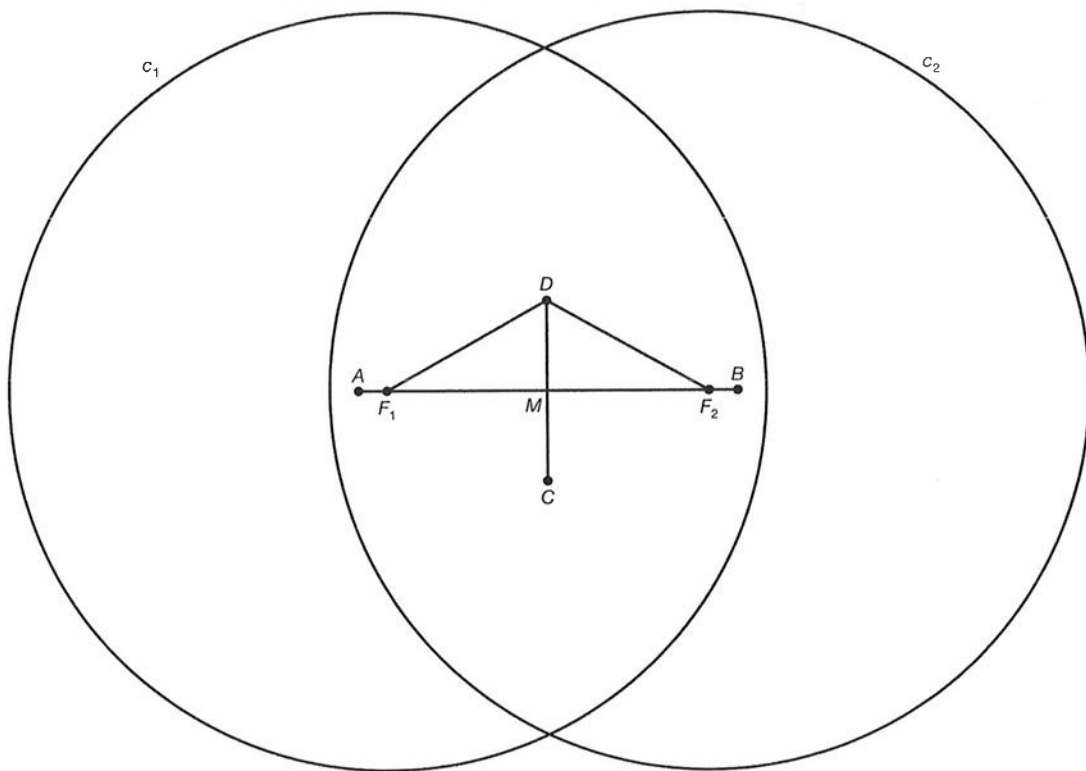
- 4 De straal van de cirkel is r .

Teken de lijnen l en m evenwijdig met k , op afstand r van k .

De gevraagde meetkundige plaats is het gedeelte van de parabool met brandpunt M en richtlijn l dat binnen of op de c ligt samen het gedeelte van de parabool met brandpunt M en richtlijn m dat binnen of op de c ligt.



- 5 a Teken de brandpunten F_1 en F_2 zo, dat geldt $d(D, F_1) = d(D, F_2) = d(A, M)$.



- b Teken de richtcirkels met middelpunten F_1 en F_2 en straal $d(A, B)$. Zie de figuur bij onderdeel a.

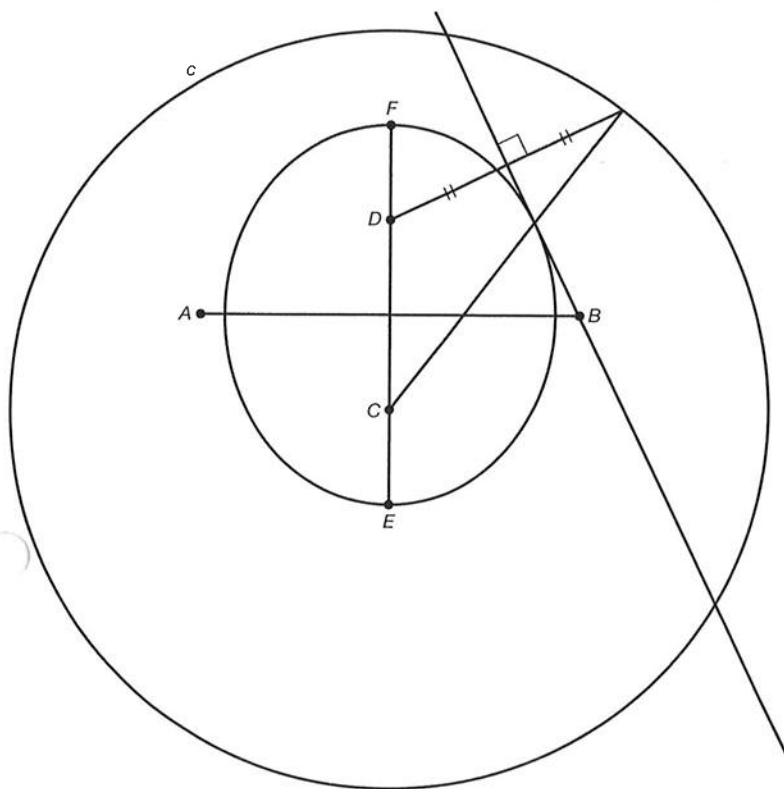
- c De gevraagde meetkundige plaats is een ellips.

De brandpunten van de ellips zijn C en D .

De lange as van de ellips is het lijnstuk EF waarbij geldt $d(E, F) = d(A, B)$ en $d(C, E) = d(D, F)$.

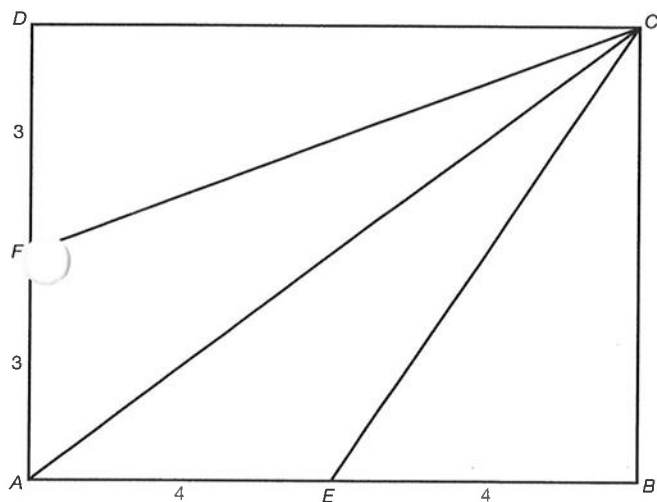
Een richtcirkel van de ellips is c met middelpunt C en straal $d(E, F)$.

Zie de figuur hieronder waarin de ellips is getekend met brandpunt D en richtcirkel c .



Bladzijde 37

- 6 Zie de figuur met E het midden van AB en F het midden van AD .

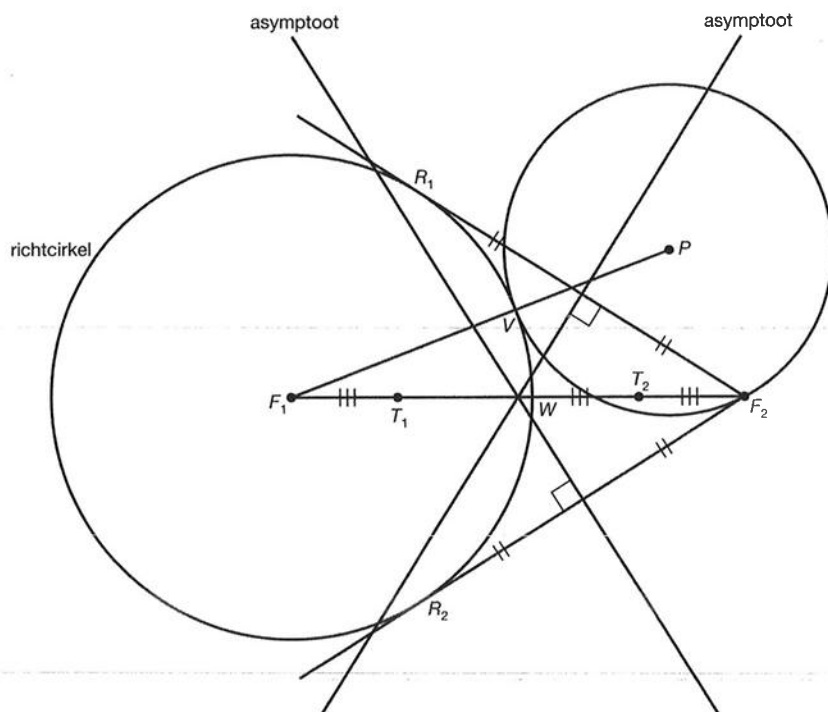


E ligt op e met brandpunten A en C , dus voor alle punten P op e geldt $d(P, A) + d(P, C) = AE + CE = 4 + \sqrt{4^2 + 6^2} = 4 + \sqrt{52} = 4 + 2\sqrt{13}$.

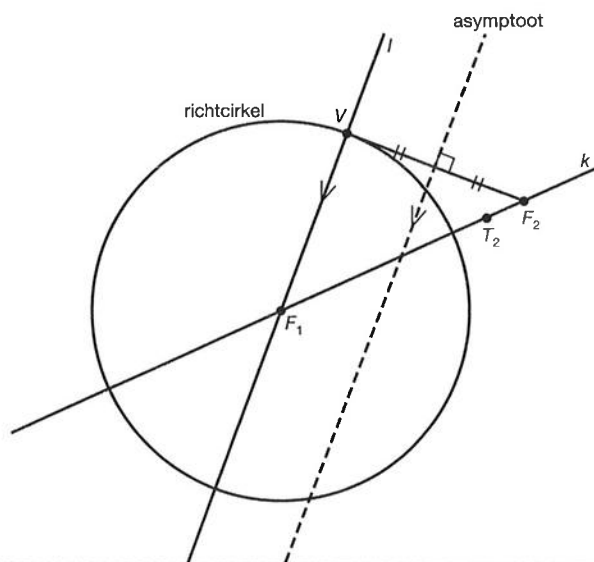
Voor F geldt $d(F, A) + d(F, C) = 3 + \sqrt{3^2 + 8^2} = 3 + \sqrt{73}$, en dat is niet gelijk aan $4 + 2\sqrt{13}$.

Dus e gaat niet door de middens van AD en BC .

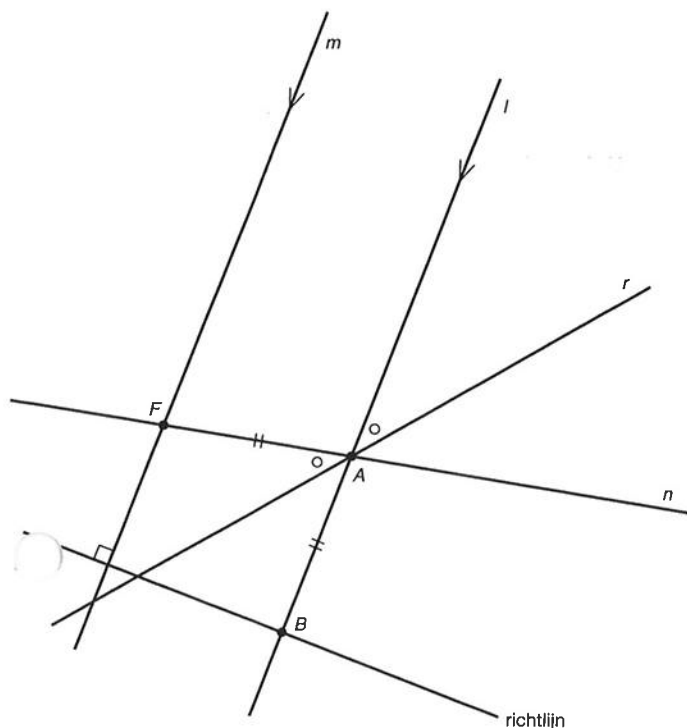
- 7 De cirkel met middelpunt P en straal PF_2 snijdt PF_1 in V .
 De richtcirkel heeft middelpunt F_1 en straal F_1V .
 De middelloodlijnen van de raaklijnen F_2R_1 en F_2R_2 zijn de asymptoten.
 Het snijpunt van F_1F_2 en de richtcirkel is W .
 Het midden van F_2W is top T_2 .
 Voor top T_1 geldt $F_1T_1 = F_2T_2$.



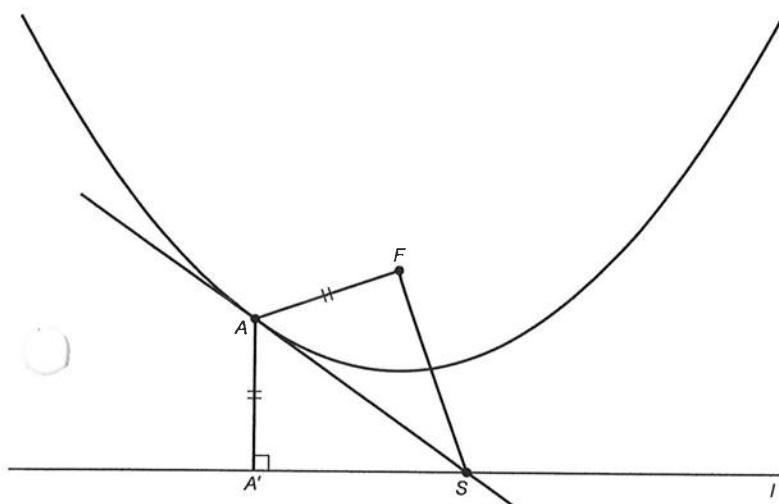
- 8 k is de symmetrieas van h door de toppen en de brandpunten van h .
 Spiegelning van F_2 in de asymptoot geeft V .
 Lijn l door V evenwijdig met de asymptoot snijdt k in F_1 .
 De richtcirkel met middelpunt F_1 heeft straal F_1V .



- 9 Teken de lijn l door A evenwijdig met m .
 Spiegel l in r , dit geeft de lijn n .
 Het snijpunt van m en n is het brandpunt F .
 Cirkel AF om vanuit A , dit geeft het punt B op l .
 De lijn door B loodrecht op m is de richtlijn.



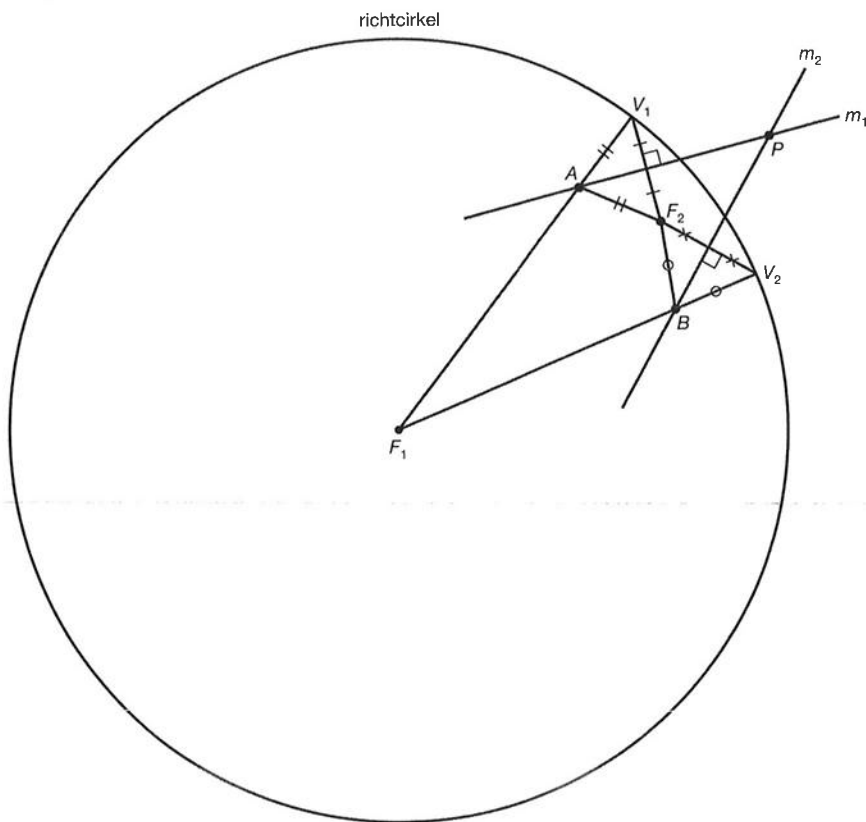
- 10 Teken het lijnstuk AA' loodrecht op de richtlijn en teken AF en FS .



$$\left. \begin{array}{l} AA' = AF \text{ (parabool)} \\ AS = AS \\ \angle A'AS = \angle FAS \text{ (raaklijneigenschap parabool)} \end{array} \right\} \triangle AA'S \cong \triangle AFS \text{ (ZHZ)}$$

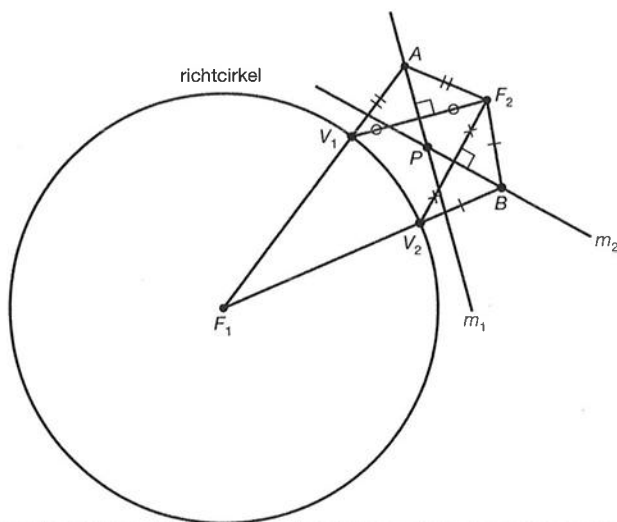
Uit $\triangle AA'S \cong \triangle AFS$ volgt $\angle SA'A = \angle SFA$.
 Dus $\angle SFA = 90^\circ$.

- 11 a** A op e , dus de straal van de richtcirkel met middelpunt F_1 is gelijk aan $d(A, F_1) + d(A, F_2)$.



- b** V_1 ligt op het verlengde van F_1A op de richtcirkel.
De middelloodlijn m_1 van lijnstuk F_2V_1 is raaklijn aan e in A .
 V_2 ligt op het verlengde van F_1B op de richtcirkel.
De middelloodlijn m_2 van lijnstuk F_2V_2 is raaklijn aan e in B .
Het snijpunt van m_1 en m_2 is de pool P van de lijn AB .
Zie de figuur bij onderdeel a.

- 12 a** A op h , dus de straal van de richtcirkel met middelpunt F_1 is gelijk aan $d(A, F_1) - d(A, F_2)$.



- b** F_1A snijdt de richtcirkel in V_1 .
De middelloodlijn m_1 van lijnstuk F_2V_1 is raaklijn aan h in A .
 F_1B snijdt de richtcirkel in V_2 .
De middelloodlijn m_2 van lijnstuk F_2V_2 is raaklijn aan h in B .
Het snijpunt van m_1 en m_2 is de pool P van de lijn AB .
Zie de figuur bij onderdeel a.