

Bladzijde 49

6 a $N(\text{drie actiefilms}) = \binom{11}{3} = 165$

b $N(\text{één actie, één romantische en één thriller}) = 11 \cdot 9 \cdot 5 = 495$

c $N(\text{geen romantische film}) = \binom{16}{7} = 11\,440$

7 a $N(A \rightarrow D) = \binom{11}{4} = 330$

b $N(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D) = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} = 72$

8 a Combinatie van 5 uit 28, dus $N = \binom{28}{5} = 98\,280$.

b Herhalingscombinatie van 5 uit 28, dus $N = \binom{28-1+5}{5} = \binom{32}{5} = 201\,376$.

9 a $N(\text{top 3}) = 25P3 = 13\,800$

b $N(\text{romantische films achter elkaar bekijken}) = 17! \cdot 9! \approx 1,29 \cdot 10^{20}$

c $N(\text{van elk genre de films achter elkaar bekijken}) = 3! \cdot 11! \cdot 9! \cdot 5! \approx 1,04 \cdot 10^{16}$

10 a 4 4 4 4 2 $\binom{5}{4} = 5$ keer

4 4 4 3 3 $\binom{5}{3} = 10$ keer

$N(18 \text{ ogen}) = 5 + 10 = 15$

b 17 ogen 4 4 4 4 1 $\binom{5}{4} = 5$ keer

4 4 4 3 2 $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 20$ keer

4 4 3 3 3 $\binom{5}{2} = 10$ keer

18 ogen zie a 15 keer

19 ogen 4 4 4 4 3 $\binom{5}{4} = 5$ keer

20 ogen 4 4 4 4 4 1 keer

$N(\text{minstens 17 ogen}) = 35 + 15 + 5 + 1 = 56$

11 a $N(\text{totaal}) = \frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = 369\,600$

b $N(A's \text{ naast elkaar}) = \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 16\,800$

c De A's en de B's om en om zonder C's en D's ertussen kan op twee manieren: A B A B A B en B A B A B A.

Zo'n groep samen met 3 C's en 3 D's rangschikken kan op $\frac{7!}{3! \cdot 3!}$ manieren.

Dus $N(A's \text{ en B's om en om zonder C's en D's ertussen}) = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 3!} = 280$.

2 Discrete wiskunde

Voorkennis Haakjes wegwerken en a^0

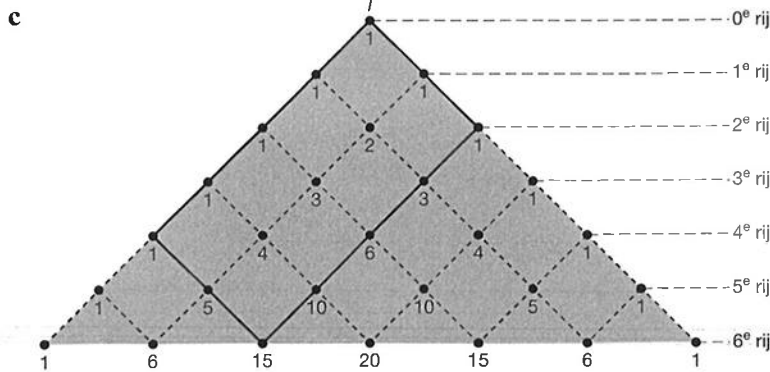
Bladzijde 52

- 1 a $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3$
 $= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$
 $= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$
 $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- b $(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2$
 $= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$
 $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- 2 $(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$
 $= (a+b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$
 $= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$
 $= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
- 3 a $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(a-b)^4 = (a-b)^2(a-b)^2$
 $= (a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= a^4 - 2a^3b + a^2b^2 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$
 $= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
 $(a-b)^5 = (a-b)(a-b)^4$
 $= (a-b)(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)$
 $= a^5 - 4a^4b + 6a^3b^2 - 4a^2b^3 + ab^4 - a^4b + 4a^3b^2 - 6a^2b^3 + 4ab^4 - b^5$
 $= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$
- b $(2a+b)^3 = (2a+b)(2a+b)^2$
 $= (2a+b)(4a^2 + 4ab + b^2)$
 $= 8a^3 + 8a^2b + 2ab^2 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3$
 $= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
- 4 a $3^0 + 3^2 + 3^4 = 1 + 9 + 81 = 91$
- b $\frac{2^0}{4^0 + 8^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
- c $f(0) = \frac{2^0}{2^0 + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
- d $g(3) = \frac{5^{3-3}}{3+1} = \frac{5^0}{4} = \frac{1}{4}$

2.1 Het binomium van Newton

Bladzijde 53

- 1 a Om van T in A te komen moet je 6 wegen doorlopen waarvan twee wegen naar rechts gaan.
Dus $\binom{6}{2}$ routes.
- b Om in het punt linksonder te komen, moet je 0 keer naar rechts, dus $\binom{6}{0}$ routes naar dit punt.
- Zo zijn er $\binom{6}{1}$ routes naar het punt daarnaast, $\binom{6}{2}$ routes naar A , enzovoort.
- Op de zesde rij staan dus de getallen $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}$ en $\binom{6}{6}$.
- De som van deze getallen is $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$.



d De getallen in de zevende rij zijn

$$1, 1 + 6 = 7, 6 + 15 = 21, 15 + 20 = 35, 20 + 15 = 35, 15 + 6 = 21, 6 + 1 = 7 \text{ en } 1.$$

De getallen in de achtste rij zijn

$$1, 1 + 7 = 8, 7 + 21 = 28, 21 + 35 = 56, 35 + 35 = 70, 35 + 21 = 56, 21 + 7 = 28, 7 + 1 = 8 \text{ en } 1.$$

e Om in de 10^e rij te komen heb je 10 keer keus tussen 'naar links' en 'naar rechts'.

Dus er zijn in totaal $2^{10} = 1024$ routes. De som van de getallen is dus 1024.

Bladzijde 55

2 a $N(S \text{ naar } T) = \binom{10}{3} = 120$

b $N(S \text{ naar } U) = \binom{10}{1} = 10$

c $N(S \text{ naar het strand}) = 2^{10} = 1024$

d $N(S \text{ naar het strand via } Y) = N(S \text{ naar } Y) \cdot N(Y \text{ naar het strand}) = \binom{5}{3} \cdot 2^5 = 320$

3 $N = 2 \cdot \binom{13}{7} \cdot 2^3 = 27456$

4 $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!}$

Omdat p een priemgetal is, kun je $k!$ en $(p-k)!$ niet delen door p , want $k!$ en $(p-k)!$ bevatten geen factor p . De teller $p!$ bevat wel een factor p .

Dus $\frac{p!}{k! \cdot (p-k)!}$ is een p -voud en dus is $\frac{p!}{k! \cdot (p-k)!}$ deelbaar door p .

Bladzijde 56

5 a $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$$= \frac{k \cdot n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdot n!}{(n-k+1) \cdot k! \cdot (n-k)!}$$

$$\boxed{k \cdot (k-1)! = k!} \rightarrow \frac{k \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} \leftarrow \boxed{(n-k+1) \cdot (n-k)! = (n-k+1)!}$$

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!}$$

b $= \frac{n! \cdot (k + n - k + 1)}{k! \cdot (n-k+1)!}$

$$= \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n-k+1)!}$$

c $= \frac{(n+1) \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!}$

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

$$= \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\text{Dus } \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

6 a $\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

b $\sum_{k=0}^4 (2k+1) = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 4 + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

c $\sum_{k=0}^3 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

d $\sum_{k=1}^4 k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$

e $\sum_{k=0}^5 (k^2 + 1) = (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) = 1 + 2 + 5 + 10 + 17 + 26 = 61$

f $\sum_{k=0}^4 \frac{k-1}{k+1} = \frac{0-1}{0+1} + \frac{1-1}{1+1} + \frac{2-1}{2+1} + \frac{3-1}{3+1} + \frac{4-1}{4+1} = -1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{13}{30}$

Bladzijde 57

7 a $5 + 8 + 11 + 14 + 17 = \sum_{k=0}^4 (3k+5)$

b $3 + 9 + 27 + 81 + 243 = \sum_{k=1}^5 3^k$

c $100 + 50 + 25 + 12\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^3 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

d $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{1}{2} + \frac{5}{9} = \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} = \sum_{k=0}^4 \frac{k+1}{k+5}$

8 a $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3$
 $= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$
 $= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$
 $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

b $(a+b)^1 = 1a + 1b$
 $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
 $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
 $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
 $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5.$

De ingevulde getallen zijn de getallen uit de driehoek van Pascal.

Bladzijde 58

9 a $(a+1)^5 = \binom{5}{0} \cdot a^5 + \binom{5}{1} \cdot a^4 \cdot 1 + \binom{5}{2} \cdot a^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{3} \cdot a^2 \cdot 1^3 + \binom{5}{4} \cdot a \cdot 1^4 + \binom{5}{5} \cdot 1^5$
 $= 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot 1 + 10 \cdot a^3 \cdot 1 + 10 \cdot a^2 \cdot 1 + 5 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1$
 $= a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$

b $(a-2)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot (-2) + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot (-2)^2 + \binom{4}{3} \cdot a \cdot (-2)^3 + \binom{4}{4} \cdot (-2)^4$
 $= 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot (-2) + 6 \cdot a^2 \cdot 4 + 4 \cdot a \cdot (-8) + 1 \cdot 16$
 $= a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$

$$\text{c } (2a+3)^5 = \binom{5}{0} \cdot (2a)^5 + \binom{5}{1} \cdot (2a)^4 \cdot 3 + \binom{5}{2} \cdot (2a)^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot (2a)^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot 2a \cdot 3^4 + \binom{5}{5} \cdot 3^5$$

$$= 1 \cdot 32a^5 + 5 \cdot 16a^4 \cdot 3 + 10 \cdot 8a^3 \cdot 9 + 10 \cdot 4a^2 \cdot 27 + 5 \cdot 2a \cdot 81 + 1 \cdot 243$$

$$= 32a^5 + 240a^4 + 720a^3 + 1080a^2 + 810a + 243$$

$$\text{d } (3a-1)^6 = \binom{6}{0} \cdot (3a)^6 + \binom{6}{1} \cdot (3a)^5 \cdot (-1) + \binom{6}{2} \cdot (3a)^4 \cdot (-1)^2 + \binom{6}{3} \cdot (3a)^3 \cdot (-1)^3 + \binom{6}{4} \cdot (3a)^2 \cdot (-1)^4 +$$

$$\binom{6}{5} \cdot 3a \cdot (-1)^5 + \binom{6}{6} \cdot (-1)^6$$

$$= 1 \cdot 729a^6 + 6 \cdot 243a^5 \cdot (-1) + 15 \cdot 81a^4 \cdot 1 + 20 \cdot 27a^3 \cdot (-1) + 15 \cdot 9a^2 \cdot 1 + 6 \cdot 3a \cdot (-1) + 1 \cdot 1$$

$$= 729a^6 - 1458a^5 + 1215a^4 - 540a^3 + 135a^2 - 18a + 1$$

10 a $(p+q)^{15}$ heeft 16 termen met de coëfficiënten $\binom{15}{0}, \binom{15}{1}, \binom{15}{2}, \dots, \binom{15}{15}$.

b De derde term is $\binom{15}{2} \cdot p^{13} \cdot q^2 = 105p^{13}q^2$.

De dertiende term is $\binom{15}{12} \cdot p^3 \cdot q^{12} = 455p^3q^{12}$.

Bladzijde 59

11 De vierde term in de herleiding van $(p+q)^{20}$ is $\binom{20}{3} \cdot p^{17} \cdot q^3 = 1140p^{17}q^3$.

Dus de coëfficiënt is 1140.

b De zevende term in de herleiding van $(2p-q)^9$ is $\binom{9}{6} \cdot (2p)^3 \cdot (-q)^6 = 672p^3q^6$.

Dus de coëfficiënt is 672.

12 a De term met x^8 in de herleiding van $(x^2+1)^8$ is $\binom{8}{4} \cdot (x^2)^4 \cdot 1^4 = 70x^8$.

Dus de coëfficiënt is 70.

b De term met x^8 in de herleiding van $(\frac{1}{2}x-2)^{11}$ is $\binom{11}{3} \cdot (\frac{1}{2}x)^8 \cdot (-2)^3 = -5\frac{5}{32}x^8$.

Dus de coëfficiënt is $-5\frac{5}{32}$.

13 a $(1+1)^6 = \binom{6}{0} \cdot 1^6 + \binom{6}{1} \cdot 1^5 \cdot 1 + \binom{6}{2} \cdot 1^4 \cdot 1^2 + \binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot 1^3 + \binom{6}{4} \cdot 1^2 \cdot 1^4 + \binom{6}{5} \cdot 1 \cdot 1^5 + \binom{6}{6} \cdot 1^6$

$$= \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64$$

b $(1+1)^6 = 2^6 = 64$

$$\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

Samen met het resultaat van a geeft dit $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = 2^6$.

14 a *

b $14641 = 10000 + 4000 + 600 + 40 + 1 = 1 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 1 =$

$$1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

c $1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1 =$

$$161051 \text{ en } 11^5 = 161051, \text{ dus het getal is gelijk aan } 11^5.$$

d Op rij 6 krijg je $1 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 15 \cdot 10^4 + 20 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 100 =$

$$1000000 + 600000 + 150000 + 20000 + 1500 + 60 + 1 = 1771561 \text{ en } 11^6 = 1771561, \text{ dus de regelmaat}$$

gaat ook op voor rij 6.

e $11^n = (10+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 10^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 10^{n-k} = \binom{n}{0} \cdot 10^n + \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 10^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot 10^0$

Bladzijde 60

- 15 a $p^7 = p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p$ kun je bij $(p + q + r)^7$ maar op één manier krijgen, dus $a_0 = 1$.
 b $a_6 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$
 c Bij $p^3 q^2 r^2$ heb je te maken met een rijtje van 7 letters met 3 p's, 2 q's en 2 r's, dus de coëfficiënt van de term met $p^3 q^2 r^2$ is $a_6 = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$.

Bladzijde 61

- 16 a $(a - b + 2c)^3 = \binom{3}{3, 0, 0} \cdot a^3 \cdot (-b)^0 \cdot (2c)^0 + \binom{3}{0, 3, 0} \cdot a^0 \cdot (-b)^3 \cdot (2c)^0 +$
 $\binom{3}{0, 0, 3} \cdot a^0 \cdot (-b)^0 \cdot (2c)^3 + \binom{3}{2, 1, 0} \cdot a^2 \cdot (-b)^1 \cdot (2c)^0 + \binom{3}{1, 2, 0} \cdot a^1 \cdot (-b)^2 \cdot (2c)^0 +$
 $\binom{3}{0, 2, 1} \cdot a^0 \cdot (-b)^2 \cdot (2c)^1 + \binom{3}{0, 1, 2} \cdot a^0 \cdot (-b)^1 \cdot (2c)^2 + \binom{3}{2, 0, 1} \cdot a^2 \cdot (-b)^0 \cdot (2c)^1 +$
 $\binom{3}{1, 0, 2} \cdot a^1 \cdot (-b)^0 \cdot (2c)^2 + \binom{3}{1, 1, 1} \cdot a^1 \cdot (-b)^1 \cdot (2c)^1 =$
 $a^3 - b^3 + 8c^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 6b^2c - 12bc^2 + 6a^2c + 12ac^2 - 12abc$
 b $N(\text{termen}) = \binom{3-1+20}{20} = \binom{22}{20} = 231$

- 17 a De term met $a^5 b^3 c^2$ is
 $\binom{10}{5, 3, 2} \cdot a^5 \cdot (-b)^3 \cdot c^2 = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot a^5 \cdot -b^3 \cdot c^2 = -2520a^5 b^3 c^2$.
 Dus de coëfficiënt is -2520.
 b De term met $a^2 b^3 c^4$ is
 $\binom{9}{2, 3, 4} \cdot (3a)^2 \cdot b^3 \cdot (-2c)^4 = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} \cdot 9a^2 \cdot b^3 \cdot 16c^4 = 181440a^2 b^3 c^4$.
 Dus de coëfficiënt is 181440.
 c De term met $a^2 b^2 c^6$ is $\binom{8}{2, 6} \cdot (ab)^2 \cdot c^6 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot a^2 b^2 \cdot c^6 = 28a^2 b^2 c^6$.
 Dus de coëfficiënt is 28.
 d De term met $a^{10} b^9$ is
 $\binom{7}{2, 3, 2} \cdot (a^2)^2 \cdot (-2a^2 b)^3 \cdot (b^3)^2 = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot a^4 \cdot -8a^6 b^3 \cdot b^6 = -1680a^{10} b^9$.
 Dus de coëfficiënt is -1680.

- 18 a De term met $a^2 b^3 c^4 d^5$ is
 $\binom{14}{2, 3, 4, 5} \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c^4 \cdot d^5 = \frac{14!}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} \cdot a^2 b^3 c^4 d^5 = 2522520a^2 b^3 c^4 d^5$.
 Dus de coëfficiënt is 2522520.
 b De term met $a^2 b^3 c^4 d^5$ is
 $\binom{14}{2, 3, 4, 5} \cdot (2a)^2 \cdot (3b)^3 \cdot c^4 \cdot (-\frac{1}{2}d)^5 = \frac{14!}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} \cdot 4a^2 \cdot 27b^3 \cdot c^4 \cdot -\frac{1}{32}d^5 = -8513505a^2 b^3 c^4 d^5$.
 Dus de coëfficiënt is -8513505.
 c De term met $a^2 b^3 c^4 d^5$ is
 $\binom{11}{1, 3, 2, 5} \cdot (a^2)^1 \cdot b^3 \cdot (c^2)^2 \cdot (-d)^5 = \frac{11!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 5!} \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c^4 \cdot -d^5 = -27720a^2 b^3 c^4 d^5$.
 Dus de coëfficiënt is -27720.
 d De term met $a^2 b^3 c^4 d^5$ is
 $\binom{8}{2, 1, 3, 2} \cdot (ab)^2 \cdot (bc)^1 \cdot (cd)^3 \cdot d^2 = \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot a^2 b^2 \cdot bc \cdot c^3 d^3 \cdot d^2 = 1680a^2 b^3 c^4 d^5$.
 Dus de coëfficiënt is 1680.

2.2 Recursieve formules

Bladzijde 63

- 19 a $10\,000 \times 1,05 - 700 = 10\,500 - 700 = 9800$
 b $9800 \times 1,05 - 700 = 10\,290 - 700 = 9590$

c

datum	1-1-2015	1-1-2016	1-1-2017	1-1-2018	1-1-2019
restschuld	10 000	9800	9590	9369,50	9137,98

Bladzijde 64

- 20 a Voer in 200 en $0,9\text{Ans} + 50$.
 Je krijgt $u_6 \approx 340,57$ en $u_7 \approx 356,51$.
 b $u_{10} \approx 395,40$ en $u_{11} \approx 405,86$.
 Vanaf de 12^e term is $u_n > 400$.
 21 a Voer in 50 en $10 + 20\sqrt{\text{Ans}}$.
 Je krijgt $u_3 = 330,07$ en $u_4 = 373,35$.
 b $u_{11} \approx 419,44$ en $u_{12} \approx 419,60$.
 Vanaf de 13^e term in $u_n > 419,5$.
 c Nee, u_n nadert tot 419,7617696... en bereikt de 420 nooit.

- 22 a Voer in 25 en $\text{Ans} + \text{Ans} / (1 + \text{Ans})$.
 Je krijgt $u_6 \approx 30,79$ en $u_7 \approx 31,76$.

- b $u_{10} \approx 34,67$ en $u_{11} \approx 35,64$.
 Dus vanaf de 12^e term is $u_n > 35$.

- c $u_n = u_{n-1} + \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}}$ geeft $u_n - u_{n-1} = \frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}}$, dus

$$\frac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}} > 0,975$$

$$u_{n-1} > 0,975 + 0,975u_{n-1}$$

$$0,025u_{n-1} > 0,975$$

$$u_{n-1} > 39$$

$$u_{14} \approx 38,56, u_{15} \approx 39,53 \text{ en } u_{16} \approx 40,51.$$

$$\text{Dus vanaf } n = 16 \text{ is } u_n - u_{n-1} > 0,975.$$

Bladzijde 65

- 23 a Het verschil is steeds 10 en de beginterm is 100, dus $u_n = u_{n-1} + 10$ met $u_0 = 100$.
 b Het verschil is steeds -20 en de beginterm is 200, dus $u_n = u_{n-1} - 20$ met $u_0 = 200$.
 c Elke term is 1,2 keer zo groot als de term ervoor en de beginterm is 1000, dus $u_n = 1,2u_{n-1}$ met $u_0 = 1000$.
 d Elke term is 0,6 keer zo groot als de term ervoor en de beginterm is 2000, dus $u_n = 0,6u_{n-1}$ met $u_0 = 2000$.

- 24 a Het verschil is steeds -73 en de beginterm is 800.

Voer in 800 en $\text{Ans} - 73$.

Je krijgt $u_{10} = 70$ en $u_{11} = -3$.

Er zijn dus 11 positieve termen.

- b Elke term is 0,75 keer zo groot als de term ervoor en de beginterm is 1024.

Voer in 1024 en $0,75\text{Ans}$.

Je krijgt $u_{16} \approx 10,26$ en $u_{17} \approx 7,70$.

Dus er zijn 17 termen groter dan 10.

- 25 a Elke term is de som van de twee termen ervoor. De volgende term is dus $21 + 34 = 55$.
 b Je kunt deze rij niet op het basisscherm doorrekenen omdat je op de GR alleen het laatste antwoord van een berekening kunt gebruiken.

Bladzijde 67**26****a** TI

Voer in

$$nMin = 0$$

$$u(n) = 0,5u(n-1) + n^2$$

$$u(nMin) = 100$$

$$u_0 = 100, u_1 = 51, u_2 = 29,5,$$

$$u_3 = 23,75, u_4 = 27,875, \dots$$

De kleinste term is u_3 .**b** $u_7 \approx 76,73$ **c** $u_{16} \approx 454$ en $u_{17} \approx 516$.Vanaf de 18^e term is $u_n > 500$.

Casio

Voer in

$$a_{n+1} = 0,5a_n + (n+1)^2$$

Start: 0

$$a_0: 100$$

$$a_0 = 100, a_1 = 51, a_2 = 29,5,$$

$$a_3 = 23,75, a_4 = 27,875, \dots$$

De kleinste term is u_3 .**27****a** $u_0 = 2$

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

$$u_3 = 2 \cdot 8 + 3 = 19$$

$$u_4 = 2 \cdot 19 + 8 = 46$$

$$u_5 = 2 \cdot 46 + 19 = 111$$

b TI

Voer in

$$nMin = 0$$

$$u(n) = 2u(n-1) + u(n-2)$$

$$u(nMin) = \{3, 2\}$$

$$u_{15} = 746\,639 \text{ en } u_{16} = 1\,802\,546.$$

Dus vanaf de 17^e term is $u_n > 1\,000\,000$.

Casio

Voer in

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

Start: 0

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 3$$

28**a** TI

Voer in

$$nMin = 0$$

$$u(n) = u(n-1) + 5n$$

$$u(nMin) = 100$$

$$v(n) = v(n-1) + n^2$$

$$v(nMin) = 10$$

$$u_9 = 325, v_9 = 295$$

$$u_{10} = 375, v_{10} = 395$$

Dus vanaf $n = 10$ is $v_n > u_n$.**b** $u_{17} = 865$ en $v_{17} = 1795$, dus $v_{17} - u_{17} = 930$.

$$u_{18} = 955 \text{ en } v_{18} = 2119, \text{ dus } v_{18} - u_{18} = 1164.$$

Dus vanaf $n = 18$ is $v_n - u_n > 1000$.**c** $u_n = 1600$ geeft $n = 24$.

$$v_{24} = 4910$$

$$v_{24} - u_{24} = 4910 - 1600 = 3310$$

Casio

Voer in

$$a_{n+1} = a_n + 5(n+1)$$

Start: 0

$$a_0 = 100$$

$$b_{n+1} = b_n + (n+1)^2$$

$$b_0 = 10$$

29**a** Hij krijgt 3% rente, dus keer 1,03.

Hij neemt €100 op, dus - 100.

De juiste formule is dus $u_n = 1,03u_{n-1} - 100$ met $u_0 = 1000$.**b** Voer de formule in op de GR en kijk in de tabel.

$$u_{12} \approx 6,56 \text{ en } u_{13} \approx -93,25.$$

Dus op 1-1-2028 is het saldo voor het eerst ontoereikend om €100 op te nemen.

Bladzijde 68**30****a** $H_n = 1,08H_{n-1} - 30$ met $H_0 = 275$ **b** Voer de formule in op de GR en kijk in de tabel.

$$u_{10} \approx 159 \text{ en } u_{11} \approx 142.$$

In 2026 zijn er op 1 juli voor het eerst minder dan 150 Schotse hooglanders.

c 8% van 275 is 22.

Dus moeten elk jaar 22 dieren worden verplaatst.

- 31 a** $B_n = 1,035B_{n-1} - 500$ met $B_0 = 17\,500$
b Voer de formule in op de GR en kijk in de tabel.
 Bij 1 januari 2026 hoort u_{11} en $u_{11} \approx 18\,978,47$.
 Er staat € 18 978,47 op haar rekening.
c $u_{16} \approx 19\,859$ en $u_{17} \approx 20\,054$.
 Op 1 januari 2032 staat er voor het eerst meer dan € 20 000 op haar rekening.
d 3,5% van € 17 500 is € 612,50.
 Ze kan ieder jaar € 612,50 opnemen.

Bladzijde 70

- 32** Van u_n is de directe formule gegeven, dus is het niet nodig om bij $u(n\text{Min})$ iets in te vullen.
 Van v_n is de recursieve formule gegeven, daarom is het wel nodig om bij $v(n\text{Min})$ iets in te vullen.

- 33 a** TI
 Voer in
 $n\text{Min} = 0$
 $u(n) = n^2 - 2n + 1$
 $v(n) = v(n-1) + u$
 $v(n\text{Min}) = 1$
 Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{15} u_k = 1016$.
 Lees af in de tabel $S_{20} = 2471$ en $S_{21} = 2871$.
 Dus vanaf $n = 21$.
- Casio
 Voer in $a_n = n^2 - 2n + 1$ en Start: 0.
 Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{15} u_k = 1016$.

- 34 a** TI
 Voer in
 $n\text{Min} = 0$
 $u(n) = 2u(n-1) - 5$
 $u(n\text{Min}) = 10$
 $v(n) = v(n-1) + u$
 $v(n\text{Min}) = 10$
 Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^8 u_k = 2600$.
- Casio
 Voer in $a_{n+1} = 2a_n - 5$
 Start: 0
 $a_0: 10$
 Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^8 u_k = 2600$.
- b** Lees af in de tabel $S_{11} = 20\,535$ en $S_{12} = 41\,020$.
 Dus vanaf $n = 12$.

- 35 a** TI
 Voer in
 $n\text{Min} = 0$
 $u(n) = n^2 + 1$
 $v(n) = v(n-1) + u$
 $v(n\text{Min}) = 1$
 Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 2891$.
- Casio
 Voer in $a_n = n^2 + 1$ en Start: 0.
 Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 2891$.
- b** TI
 Voer in
 $n\text{Min} = 0$
 $u(n) = (n+1)^2$
 $v(n) = v(n-1) + u$
 $v(n\text{Min}) = 1$
 Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 3311$.
- Casio
 Voer in $a_n = (n+1)^2$ en Start: 0.
 Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 3311$.

c TI

Voer in

$$n\text{Min} = 2$$

$$u(n) = n^2 - 2n$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(n\text{Min}) = 0$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=2}^{15} u_k = 1001$.**d** TI

Voer in

$$n\text{Min} = 6$$

$$u(n) = \frac{1}{2}n^2 - 4$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(n\text{Min}) = -14$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=6}^{30} u_k = 4600$.

Casio

Voer in $a_n = n^2 - 2n$ en Start: 2.Lees af in de tabel $\sum_{k=2}^{15} u_k = 1001$.

Casio

Voer in $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 4$ en Start: 6.Lees af in de tabel $\sum_{k=6}^{30} u_k = 4600$.**Bladzijde 71****36****a** TI

Voer in

$$n\text{Min} = 0$$

$$u(n) = \frac{1}{n+1}$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(n\text{Min}) = 1$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{10} u_k \approx 3,02$.

Casio

Voer in $a_n = \frac{1}{n+1}$ en Start: 0.Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{10} u_k \approx 3,02$.**b** TI

Voer in

$$n\text{Min} = 0$$

$$u(n) = \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(n\text{Min}) = 0$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{15} u_k \approx 2,65$.

Casio

Voer in $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ en Start: 0.Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{15} u_k \approx 2,65$.**c** TI

Voer in

$$n\text{Min} = 5$$

$$u(n) = \sqrt{n^3 + 1}$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(n\text{Min}) = \sqrt{126}$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=5}^{20} u_k \approx 744,02$.

Casio

Voer in $a_n = \sqrt{n^3 + 1}$ en Start: 5.Lees af in de tabel $\sum_{k=5}^{20} u_k \approx 744,02$.**d** TI

Voer in

$$n\text{Min} = 0$$

$$u(n) = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(n\text{Min}) = 50$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{10} u_k \approx 99,95$.

Casio

Voer in $a_n = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ en Start: 0.Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{10} u_k \approx 99,95$.Dus $\sum_{k=1}^{10} u_k \approx 99,95 - 50 = 49,95$.Dus $\sum_{k=1}^{10} u_k \approx 99,95 - 50 = 49,95$.

37 a $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + \dots + 101 = \sum_{k=0}^{25} (4k + 1)$

TI

Voer in

 $n\text{Min} = 0$ $u(n) = 4n + 1$ $v(n) = v(n-1) + u$ $v(n\text{Min}) = 1$ Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{25} u_k = 1326$.

Casio

Voer in $a_n = 4n + 1$ en Start: 0.Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{25} u_k = 1326$.

b $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{15}{16} = \sum_{k=0}^{14} \frac{k+1}{k+2}$

TI

Voer in

 $n\text{Min} = 0$ $u(n) = \frac{n+1}{n+2}$ $v(n) = v(n-1) + u$ $v(n\text{Min}) = \frac{1}{2}$ Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{14} \frac{k+1}{k+2} \approx 12,62$.

Casio

Voer in $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ en Start: 0.Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{14} \frac{k+1}{k+2} \approx 12,62$.

c $2 + 3 + 6 + 11 + 18 + 27 + 38 + \dots + 402 = \sum_{k=0}^{20} (k^2 + 2)$

TI

Voer in

 $n\text{Min} = 0$ $u(n) = n^2 + 2$ $v(n) = v(n-1) + u$ $v(n\text{Min}) = 2$ Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 2912$.

Casio

Voer in $a_n = n^2 + 2$ en Start: 0.Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 2912$.

d $768 + 384 + 192 + 96 + \dots + 3 = \sum_{k=0}^8 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

TI

Voer in

 $n\text{Min} = 0$ $u(n) = 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $v(n) = v(n-1) + u$ $v(n\text{Min}) = 768$ Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^8 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1533$.

Casio

Voer in $a_n = 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ en Start: 0.Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^8 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1533$.

- 38 a** Laag 1 bestond uit $1^2 = 1$ krat.
Laag 2 bestond uit $2^2 = 4$ kratten.
Laag 3 bestond uit $3^2 = 9$ kratten.
Enzovoort.

Dus het totale aantal gestapelde kratten was $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$ waarbij n het nummer van de onderste laag is.

TI

Voer in

 $n\text{Min} = 1$ $u(n) = n^2$ $v(n) = v(n-1) + u$ $v(n\text{Min}) = 1$ Lees af in de tabel $S_{57} = 63\,365$.

Dus de stapel bestond uit 57 lagen.

Casio

Voer in $a_n = n^2$ en Start: 1.Lees af in de tabel $S_{57} = 63\,365$.

- b De stapel in Limmen was $57 \cdot 0,25 = 14,25$ meter hoog.
De lengte was $57 \cdot 0,4 = 22,8$ meter en de breedte $57 \cdot 0,3 = 17,1$ meter.
Dus het grondvlak van het bouwwerk was $22,8 \cdot 17,1 = 389,88 \text{ m}^2$.
- c In de flesjes die in de kratten passen gaat in totaal $63\,365 \cdot 24 \cdot 0,33 = 501\,850,8$ liter.
- d Hierbij hoort de vergelijking $\sum_{k=0}^n (2k+1)^2 = 105\,995$.
- e TI
Voer in
 $n\text{Min} = 0$
 $u(n) = (2n+1)^2$
 $v(n) = v(n-1) + u$
 $v(n\text{Min}) = 1$
Lees af in de tabel $S_{42} = 105\,995$.
Dus de stapel bestond uit 43 lagen.
Bij laag 43 hoort $n = 42$, dus deze laag bestond uit $(2 \cdot 42 + 1)^2 = 85^2$ kratten.
De stapel in Satow was $43 \cdot 0,3 = 12,9$ meter hoog.
De lengte was $85 \cdot 0,4 = 34$ meter en de breedte $85 \cdot 0,3 = 25,5$ meter.
Dus het grondvlak van het bouwwerk in Satow was $34 \cdot 25,5 = 867 \text{ m}^2$.
- Casio
Voer in $a_n = (2n+1)^2$ en Start: 0.
Lees af in de tabel $S_{42} = 105\,995$.

2.3 Rekenkundige rijen

Bladzijde 73

- 39 a $u_0 = 20$, $u_1 = 26$, $u_2 = 32$, $u_3 = 38$ en $u_4 = 44$
b $a = 20$ en $b = 6$
c $u_n = 20 + 6n$
 $u_{25} = 20 + 6 \cdot 25 = 170$
- 40 a Het is een rekenkundige rij omdat het verschil van twee opeenvolgende termen steeds 5 is.
b De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 13$.
De directe formule is $u_n = 5n + 13$.
c $u_{49} = 5 \cdot 49 + 13 = 258$
d $5n + 13 = 633$
 $5n = 620$
 $n = 124$
De 125^e term is 633.

Bladzijde 74

- 41 a De directe formule is $u_n = -7n + 1023$.
 $-7n + 1023 = 246$
 $-7n = -777$
 $n = 111$
De 112^e term is 246.
- b $u_n > 0$
 $-7n + 1023 > 0$
 $-7n > -1023$
 $n < 146 \frac{1}{7}$
 $u_{146} > 0$ en $u_{147} < 0$
Er zijn 147 positieve termen.
- 42 a $u_n = u_0 + vn$ met $v = \frac{124 - 85}{8 - 5} = 13$
 $u_n = u_0 + 13n$ en $u_5 = 85$ geeft $u_0 + 13 \cdot 5 = 85$
 $u_0 + 65 = 85$
 $u_0 = 20$
Dus $u_n = 20 + 13n$.
 $v_n = v_0 + vn$ met $v = \frac{404 - 440}{8 - 5} = -12$
 $v_n = v_0 - 12n$ en $v_5 = 440$ geeft $v_0 - 12 \cdot 5 = 440$
 $v_0 - 60 = 440$
 $v_0 = 500$

$$\text{Dus } v_n = 500 - 12n.$$

$$\text{Los op } u_n > v_n.$$

$$20 + 13n > 500 - 12n$$

$$25n > 480$$

$$n > 19,2$$

$$u_{19} < v_{19} \text{ en } u_{20} > v_{20}.$$

$$\text{Dus vanaf } n = 20 \text{ geldt } u_n > v_n.$$

2

43 a $1 + 2 + 3 + \dots + 100 + 100 + 99 + \dots + 2 + 1 = 100 \cdot 101$

$$\text{Dus } 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101.$$

b $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49 + 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 1275$

Bladzijde 75

44 a $u_0 = 3 \cdot 0 + 4 = 4$ en $u_{50} = 3 \cdot 50 + 4 = 154$

$$\sum_{k=0}^{50} (3k + 4) = \frac{1}{2} \cdot 51 \cdot (4 + 154) = 4029$$

b $u_0 = 100 - 2 \cdot 0 = 100$ en $u_{40} = 100 - 2 \cdot 40 = 20$

$$\sum_{k=0}^{40} (100 - 2k) = \frac{1}{2} \cdot 41 \cdot (100 + 20) = 2460$$

c $u_5 = 6 \cdot 5 - 12 = 18$ en $u_{30} = 6 \cdot 30 - 12 = 168$

$$\sum_{k=5}^{30} (6k - 12) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (18 + 168) = 2418$$

d $u_{12} = 150 - 3 \cdot 12 = 114$ en $u_{36} = 150 - 3 \cdot 36 = 42$

$$\sum_{k=12}^{36} (150 - 3k) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (114 + 42) = 1950$$

45 a rr met $u_0 = 12$ en $v = 4$, dus $u_n = 4n + 12$.

$$u_n = 152 \text{ geeft } 4n + 12 = 152$$

$$4n = 140$$

$$n = 35$$

$$\text{Dus } 12 + 16 + \dots + 152 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot (12 + 152) = 2952.$$

b rr met $u_0 = 100$ en $v = -3$, dus $u_n = -3n + 100$.

$$u_n > 0 \text{ geeft } -3n + 100 > 0$$

$$-3n > -100$$

$$n < 33\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } u_{33} > 0 \text{ en } u_{34} < 0.$$

$$u_{33} = 100 \text{ en } u_{33} = 1$$

$$100 + 97 + 94 + \dots + 1 = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot (100 + 1) = 1717$$

c De directe formule is $u_n = 7n + 18$.

$$u_0 = 18 \text{ en } u_{24} = 7 \cdot 24 + 18 = 186$$

$$\sum_{k=0}^{24} (7k + 18) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (18 + 186) = 2550$$

Bladzijde 76

46 a Het eerste rondje duurt 28,62 seconde.

$$\text{Het laatste rondje duurt } 28,62 + 24 \cdot 0,15 = 32,22 \text{ seconde.}$$

$$\text{De eindtijd is } \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (28,62 + 32,22) = 760,5 \text{ seconde} = 12 \text{ minuten en } 40,5 \text{ seconde.}$$

b Het eerste rondje duurt 31,76 seconde.

$$\text{Het laatste rondje duurt } 31,76 - 24 \cdot 0,12 = 28,88 \text{ seconde.}$$

$$\text{De eindtijd is } \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (31,76 + 28,88) = 758 \text{ seconde} = 12 \text{ minuten en } 38 \text{ seconden.}$$

47 a De laatste term is $20 + 29 \cdot v = 20 + 29v$.

$$\text{De som is dus } \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (20 + 20 + 29v) = 15(40 + 29v).$$

$$\text{Dus } 15(40 + 29v) = 2340.$$

$$\begin{aligned} \text{b } 15(40 + 29v) &= 2340 \\ 40 + 29v &= 156 \\ 29v &= 116 \\ v &= 4 \\ \text{c } u_0 &= 20 \text{ en } u_{49} = 20 + 49 \cdot 4 = 216 \\ \text{som} &= \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (20 + 216) = 5900 \end{aligned}$$

- 48 a** Noem het verschil van de opeenvolgende termen v .
 In de 12^e seconde legt hij $4 + 11v$ meter af.
 In totaal legt hij $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (4 + 4 + 11v) = 6(8 + 11v)$ meter af.
 Dus los op $6(8 + 11v) = 147$
 $8 + 11v = 24,5$
 $11v = 16,5$
 $v = 1,5$
 In de 8^e seconde legt hij $4 + 7 \cdot 1,5 = 14,5$ meter af.
 Na 8 seconden heeft hij $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (4 + 14,5) = 74$ meter afgelegd.

- 49** Stel $u_n = u_0 + vn$.
 $u_5 = u_0 + 5v$ en $u_{14} = u_0 + 14v$
 Uit $\sum_{k=5}^{14} u_k = 535$ volgt $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (u_5 + u_{14}) = 535$.
 Dus $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (u_0 + 5v + u_0 + 14v) = 535$
 $5(2u_0 + 19v) = 535$
 $2u_0 + 19v = 107$
 $u_{20} = u_0 + 20v$ en $u_{24} = u_0 + 24v$
 Uit $\sum_{k=20}^{24} u_k = 580$ volgt $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (u_{20} + u_{24}) = 580$.
 Dus $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (u_0 + 20v + u_0 + 24v) = 580$
 $2,5(2u_0 + 44v) = 580$
 $2u_0 + 44v = 232$
 $2u_0 = 232 - 44v$
 Substitutie van $2u_0 = 232 - 44v$ in $2u_0 + 19v = 107$ geeft $232 - 44v + 19v = 107$
 $-25v = -125$
 $v = 5$
 $v = 5$ geeft $2u_0 = 232 - 44 \cdot 5 = 12$, dus $u_0 = 6$.
 Dus $u_n = 6 + 5n$.
 $u_{10} = 6 + 5 \cdot 10 = 56$
 Dus $\sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10} (6 + 5k) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (6 + 56) = 341$.

50 a $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(1 + 7n + 1) = \frac{1}{2}(n+1)(7n+2) = (n+1)(3\frac{1}{2}n+1) = 3\frac{1}{2}n^2 + 4\frac{1}{2}n + 1$

- b** Los op $3\frac{1}{2}n^2 + 4\frac{1}{2}n + 1 > 1000$.
 Voer in $y_1 = 3\frac{1}{2}x^2 + 4\frac{1}{2}x + 1$.
 De tabel geeft
 $x = 16$ en $y_1 = 969$
 $x = 17$ en $y_1 = 1089$.
 Dus vanaf $n = 17$.

51 a $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(12 + 4n + 12) = \frac{1}{2}(n+1)(4n+24) = (n+1)(2n+12) = 2n^2 + 14n + 12$

- b** Los op $2n^2 + 14n + 12 > 500$.
 Voer in $y_1 = 2x^2 + 14x + 12$.
 De tabel geeft
 $x = 12$ en $y_1 = 468$
 $x = 13$ en $y_1 = 532$.
 Dus vanaf $n = 13$.

Bladzijde 77

2

52 a $u_n = u_0 + vn$ met $v = \frac{38 - 26}{20 - 12} = 1\frac{1}{2}$

$$u_n = u_0 + 1\frac{1}{2}n \text{ en } u_{12} = 26 \text{ geeft } u_0 + 1\frac{1}{2} \cdot 12 = 26$$

$$u_0 + 18 = 26$$

$$u_0 = 8$$

Dus $u_n = 8 + 1\frac{1}{2}n$.

De som van de eerste 20 termen is $\sum_{k=0}^{19} u_k = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (8 + 8 + 1\frac{1}{2} \cdot 19) = 445$.

b $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(8 + 8 + 1\frac{1}{2}n) = \frac{1}{2}(n+1)(1\frac{1}{2}n + 16) = \frac{1}{2}(1\frac{1}{2}n^2 + 17\frac{1}{2}n + 16) =$

$$\frac{3}{4}n^2 + 8\frac{3}{4}n + 8$$

Voer in $y_1 = \frac{3}{4}x^2 + 8\frac{3}{4}x + 8$.

De tabel geeft

$x = 34$ en $y_1 = 1172,5$

$x = 35$ en $y_1 = 1233$.

Dus vanaf $n = 35$.

- 53 De directe formule van de somrij geldt alleen voor rekenkundige rijen, dus voor rijen van de vorm $u_n = u_0 + vn$. Bij opgave 33 is de formule van de rij $u_n = n^2 - 2n + 1$ en dit is geen rekenkundige rij. I de aanpak met de directe formule van de somrij werkt niet bij opgave 33b.

- 54 a rr met $u_0 = 2500$ en $v = 12$, dus $u_n = 2500 + 12n$.
 $2500 + 12n = 2800$ geeft $12n = 300$, dus $n = 25$.
 Dat is in januari 2018.

- b Van december 2015 tot en met december 2018 is 37 maanden.

$$\sum_{k=0}^{36} u_k = \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot (2500 + 2500 + 12 \cdot 36) = 100\,492$$

Dus hij ontvangt in die periode in totaal € 100 492.

c $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(2500 + 2500 + 12n) = \frac{1}{2}(n+1)(12n + 5000) = (n+1)(6n + 2500) =$

$$6n^2 + 2506n + 2500$$

Los op $6n^2 + 2506n + 2500 > 1\,000\,000$.

Voer in $y_1 = 6x^2 + 2506x + 2500$.

De tabel geeft

$x = 249$ en $y_1 = 998\,500$

$= 250$ en $y_1 = 1\,004\,000$.

Dus voor $n = 250$ overtreft het totale salaris voor het eerst de één miljoen euro.

Dat is in oktober 2036.

- 55 a rr met $u_0 = 5$ en $v = 0,2$, dus $u_n = 5 + 0,2n$.
 $5 + 0,2n > 9$
 $0,2n > 4$
 $n > 20$

Dus vanaf $n = 21$ traint zij per week meer dan 9 km.

Dus in de 22^e week traint zij voor het eerst meer dan 9 km per week.

b $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(5 + 5 + 0,2n) = \frac{1}{2}(n+1)(0,2n + 10) = (n+1)(0,1n + 5) =$

$$0,1n^2 + 5,1n + 5$$

Los op $0,1n^2 + 5,1n + 5 > 250$.

Voer in $y_1 = 0,1x^2 + 5,1x + 5$.

De tabel geeft

$x = 30$ en $y_1 = 248$

$x = 31$ en $y_1 = 259,2$.

Voor $n = 31$, dus in de 32^e week overtreft de totale door Elise afgelegde afstand voor het eerst de 250 km.

- 56 a $14,7 - 4,9 = 9,8$ en $24,5 - 14,7 = 9,8$
 rr met $u_0 = 4,9$ en $v = 9,8$, dus $u_n = 4,9 + 9,8n$.
 De eerste zes seconden is het voorwerp

$$\sum_{k=0}^5 u_k = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (4,9 + 4,9 + 9,8 \cdot 5) = 176,4 \text{ meter gevallen.}$$

- b $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(4,9 + 4,9 + 9,8n) = \frac{1}{2}(n+1)(9,8n + 9,8) = (n+1)(4,9n + 4,9) =$
 $4,9n^2 + 9,8n + 4,9$
 Los op $4,9n^2 + 9,8n + 4,9 = 1960$.
 Voer in $y_1 = 4,9x^2 + 9,8x + 4,9$ en $y_2 = 1960$.
 Intersect geeft $x = 19$.
 Dus na 20 seconden valt het voorwerp op de grond.

- 57 $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c)$
 $= a(n^2 + 2n + 1) + bn + b + c - an^2 - bn - c$
 $= an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c$
 $= a + b + 2an$

Deze rij is van de vorm $u_n = u_0 + vn$ met $u_0 = a + b$ en $v = 2a$.

Dus de verschilrij van de kwadratische rij $u_n = an^2 + bn + c$ is een rekenkundige rij.

2.4 Meetkundige rijen

Bladzijde 79

- 58 a $u_0 = 400, u_1 = 600, u_2 = 900, u_3 = 1350, u_4 = 2025$
 b $a = 400$ en $b = 1,5$

Bladzijde 80

- 59 a Het is een meetkundige rij omdat het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds 1,2 is.
 b De recursieve formule is $u_n = 1,2u_{n-1}$ met $u_0 = 1250$.
 De directe formule is $u_n = 1250 \cdot 1,2^n$.
 c Los op $1250 \cdot 1,2^n > 15\,000$.
 Voer in $y_1 = 1250 \cdot 1,2^x$.
 De tabel geeft
 $x = 13$ en $y_1 \approx 13\,374$
 $x = 14$ en $y_1 \approx 16\,049$.
 Vanaf de 15^e term is u_n groter dan 15 000.

- 60 $r^7 = \frac{118098}{54} = 2187$
 $r = 2187^{\frac{1}{7}} = 3$
 $u_0 = \frac{u_3}{r^3} = \frac{54}{3^3} = 2$
 Dus $u_n = 2 \cdot 3^n$.

- 61 a Noem het verschil v .
 $5v = 16384 - 16$
 $5v = 16368$
 $v = 3273,6$
 $u_0 = 16 - 3v = 16 - 3 \cdot 3273,6 = -9804,8$
 Dus $u_n = 3273,6n - 9804,8$.
 b Noem de factor r .
 $r^5 = \frac{16384}{16} = 1024$
 $r = 1024^{\frac{1}{5}} = 4$
 $u_0 = \frac{u_3}{r^3} = \frac{16}{4^3} = \frac{1}{4}$
 Dus $u_n = \frac{1}{4} \cdot 4^n$.

- 62 Een meetkundige rij heeft met exponentiële groei te maken.
Een rekenkundige rij heeft met lineaire groei te maken.

63 a In $\triangle BPQ$ is $PQ = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$.

$$r = \frac{PQ}{AB} = \frac{\sqrt{80}}{12}$$

b Het is een meetkundige rij met $u_0 = 12$ en $r = \frac{\sqrt{80}}{12}$.

$$\text{Dus } u_n = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^n.$$

c Los op $12 \cdot \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^n > 1$.

$$\text{Voer in } y_1 = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^x.$$

De tabel geeft

$$x = 8 \text{ en } y_1 \approx 1,14$$

$$x = 9 \text{ en } y_1 \approx 0,85.$$

$$\text{Voor } n = 0, 1, \dots, 8 \text{ geldt } 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^n > 1.$$

Dus van 9 vierkanten zijn de zijden langer dan 1 cm.

d Het is een meetkundige rij met $v_0 = 144$ en $r = \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

$$\text{Dus } v_n = 144 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n.$$

e $1 \text{ mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2$

$$\text{Los op } 144 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n > 0,01.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 144 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^x.$$

De tabel geeft

$$x = 16 \text{ en } y_1 \approx 0,012$$

$$x = 17 \text{ en } y_1 \approx 0,007.$$

$$\text{Voor } n = 0, 1, \dots, 16 \text{ geldt } 144 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n > 0,01.$$

Dus van 17 vierkanten is de oppervlakte meer dan 1 mm^2 .

Bladzijde 81

64 $-2 \cdot S_{10} = -2\,657\,190$
 $S_{10} = 1\,328\,595$

I zijde 83

65 Ga uit van de rekenkundige rij $u_n = u_0 + vn$.

$$u_1 = u_0 + v$$

$$u_2 = u_0 + 2v$$

$$u_3 = u_0 + 3v$$

$\vdots$

$$u_{n-2} = u_0 + (n-2)v$$

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)v$$

$$u_n = u_0 + nv$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_0 + v + u_0 + 2v + \dots + u_0 + (n-2)v + u_0 + (n-1)v + u_0 + nv$$

Dit geeft

$$S_n = u_0 + u_0 + v + u_0 + 2v + \dots + u_0 + (n-2)v + u_0 + (n-1)v + u_0 + nv$$

$$S_n = u_0 + nv + u_0 + (n-1)v + u_0 + (n-2)v + \dots + u_0 + 2v + u_0 + v + u_0$$

$$2S_n = 2u_0 + nv + 2u_0 + nv + \dots + 2u_0 + nv + 2u_0 + nv + 2u_0 + nv +$$

$$\text{Dus } 2S_n = (n+1)(2u_0 + nv)$$

$$2S_n = (n+1)(u_0 + u_0 + nv)$$

$$2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$$

66 a $\sum_{k=0}^{11} 0,001 \cdot 2^k = \frac{0,001(1 - 2^{12})}{1 - 2} = 4,095$

b $\sum_{k=0}^{20} 100 \cdot 0,8^k = \frac{100(1 - 0,8^{21})}{1 - 0,8} \approx 495,39$

c $\sum_{k=5}^{18} 200 \cdot 1,1^k = \frac{200 \cdot 1,1^5 - 200 \cdot 1,1^{19}}{1 - 1,1} \approx 9011$

d mr met $u_0 = 600$ en $r = 0,75$
 som = $\frac{600(1 - 0,75^{15})}{1 - 0,75} \approx 2367,9$

67 a mr met $u_0 = 2000$ en $r = 1,5$
 $u_n = 34\,171,875$ dus $u_{n+1} = 51\,257,8125$
 som = $\frac{2000 - 51\,257,8125}{1 - 1,5} = 98\,515,625$

b $1,06 + 1,06^2 + 1,06^3 + 1,06^4 + \dots + 1,06^{12} = \frac{1,06 - 1,06^{13}}{1 - 1,06} \approx 17,882$

c $1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 + \dots + 1,5^{20} = \frac{1 - 1,5^{21}}{1 - 1,5} \approx 9973,770$

d $1,2 - 1,2^2 + 1,2^3 - 1,2^4 + \dots - 1,2^{24} = \frac{1,2 - 1,2^{25}}{1 - -1,2} \approx -42,816$

68 De omzet per jaar wordt gegeven door $u_n = 11,3 \cdot 1,074^n$ met $n = 0$ in 1995.
 Bij 2015 hoort $n = 20$.

De totale omzet is $\sum_{k=0}^{20} 11,3 \cdot 1,074^k = \frac{11,3(1 - 1,074^{21})}{1 - 1,074} \approx 531,1$ miljard dollar.

69 a $5,2 \cdot 0,8^7 \approx 1,1$

De toename in de 8^e week is 11 mm.

b $5,2 + 5,2 \cdot 0,8 + 5,2 \cdot 0,8^2 + \dots + 5,2 \cdot 0,8^7 = \frac{5,2(1 - 0,8^8)}{1 - 0,8} \approx 21,6$
 De plant is 21,6 cm gegroeid.

c $5,2 + 5,2 \cdot 0,8 + \dots + 5,2 \cdot 0,8^9 = \frac{5,2(1 - 0,8^{10})}{1 - 0,8} \approx 23,2$

De hoogte na 10 weken is $18 + 23,2 = 41,2$ cm.

70 a $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{18(1 - 0,4^{n+1})}{1 - 0,4} = \frac{18(1 - 0,4^n \cdot 0,4)}{0,6} = 30(1 - 0,4 \cdot 0,4^n) = 30 - 12 \cdot 0,4^n$

b Los op $30 - 12 \cdot 0,4^n > 29,99$.

Voer in $y_1 = 30 - 12 \cdot 0,4^x$.

De tabel geeft

$x = 7$ en $y_1 \approx 29,980$

$x = 8$ en $y_1 \approx 29,992$.

Dus vanaf $n = 8$.

Bladzijde 84

71 a $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{10\,000(1 - 0,6^{n+1})}{1 - 0,6} = \frac{10\,000(1 - 0,6^n \cdot 0,6)}{0,4} = 25\,000(1 - 0,6 \cdot 0,4^n) =$

$25\,000 - 15\,000 \cdot 0,6^n$

Dus $a = 25\,000$, $b = -15\,000$ en $c = 0,6$.

b Los op $25\,000 - 15\,000 \cdot 0,6^n > 24\,999$.

Voer in $y_1 = 25\,000 - 15\,000 \cdot 0,6^x$.

De tabel geeft

$x = 18$ en $y_1 \approx 24\,998,5$

$x = 19$ en $y_1 \approx 24\,999,1$.

Dus vanaf $n = 19$.

72 a $u_n = 20 \cdot 1,1^n$

b Los op $u_n > 42$.

$$20 \cdot 1,1^n > 42$$

$$\text{Voer in } y_1 = 20 \cdot 1,1^x.$$

De tabel geeft

$$x = 7 \text{ en } y_1 \approx 38,97$$

$$x = 8 \text{ en } y_1 \approx 42,87.$$

Bij de 9^e duurloop loopt hij voor het eerst meer dan 42 km.

$$\text{Hij heeft dan } \frac{20(1 - 1,1^9)}{1 - 1,1} \approx 272 \text{ km afgelegd.}$$

c $T = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{20(1 - 1,1^{n+1})}{1 - 1,1} = \frac{20(1 - 1,1^n \cdot 1,1)}{-0,1} = -200(1 - 1,1 \cdot 1,1^n) = -200 + 220 \cdot 1,1^n$

$$\text{Dus } a = -200, b = 220 \text{ en } c = 1,1.$$

$$\text{Voer in } y_1 = -200 + 220 \cdot 1,1^x.$$

De tabel geeft

$$x = 10 \text{ en } y_1 \approx 370,6$$

$$x = 11 \text{ en } y_1 \approx 427,7.$$

Dus na 12 duurlopen heeft hij voor het eerst in totaal meer dan 400 km afgelegd.

73 a u_n is een rr met $u_0 = 100$ en $v = 15$.

$$u_n = 15n + 100$$

$$S_n = 100 + 115 + \dots + (15n + 100) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (100 + 15n + 100) = \frac{1}{2}(n+1)(15n + 200) =$$

$$(n+1)(7,5n + 100) = 7,5n^2 + 107,5n + 100$$

v_n is een mr met $v_0 = 10$ en $r = 1,5$.

$$v_n = 10 \cdot 1,5^n$$

$$T_n = 10 + 15 + \dots + 10 \cdot 1,5^n = \frac{10(1 - 1,5^{n+1})}{1 - 1,5} = \frac{10(1 - 1,5^n \cdot 1,5)}{-0,5} = -20(1 - 1,5 \cdot 1,5^n) = -20 + 30 \cdot 1,5^n$$

b Voer in $y_1 = 7,5x^2 + 107,5x + 100$ en $y_2 = -20 + 30 \cdot 1,5^x$.

De tabel geeft

$$x = 10 \text{ geeft } y_1 = 1925 \text{ en } y_2 \approx 1710$$

$$x = 11 \text{ geeft } y_1 = 2190 \text{ en } y_2 \approx 2575.$$

Dus vanaf $n = 11$ geldt $T_n > S_n$.

74 Ga uit van de meetkundige rij $u_n = u_0 \cdot r^n$ met beginterm u_0 en factor r .

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = u_0 \cdot r^{n+1} - u_0 \cdot r^n = u_0 \cdot r^n \cdot r - u_0 \cdot r^n = (u_0 \cdot r - u_0) \cdot r^n$$

Dus de verschilrij van een meetkundige rij is een meetkundige rij met beginterm $u_0 \cdot r - u_0$ en factor r^n .

Bladzijde 85

75 a Sommeerbare mr met $u_0 = 400$ en $r = \frac{3}{4}$.

$$S = \frac{u_0}{1 - r} = \frac{400}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{400}{\frac{1}{4}} = 1600$$

b Sommeerbare mr met $u_0 = 1$ en $r = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{u_0}{1 - r} = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

c Sommeerbare mr met $u_0 = 40$ en $r = 0,9$.

$$S = \frac{u_0}{1 - r} = \frac{40}{1 - 0,9} = \frac{40}{0,1} = 400$$

d Sommeerbare mr met $u_0 = 500$ en $r = \frac{2}{3}$.

$$S = \frac{u_0}{1 - r} = \frac{500}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{500}{\frac{1}{3}} = 1500$$

Bladzijde 86

76 $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots$ is een mr met $u_0 = 3$ en $r = 2$.

Deze mr is niet sommeerbaar, want $r = 2$ en dus geldt niet $-1 < r < 1$.

Floris kan voor de som $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots$ dus niet de formule $S = \frac{u_0}{1 - r}$ toepassen.

- 77 Sommeerbare mr met $u_0 = 200$ en $r = 0,8$.

$$S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{200}{1-0,8} = \frac{200}{0,2} = 1000$$

Dus de heilmachine kan de paal maximaal 10 m de grond in slaan.

- 78 Onderscheid de situaties 'bal gaat omlaag' en 'bal gaat omhoog'.

Bal gaat omlaag: Sommeerbare mr met $u_0 = 135$ en $r = 0,7$.

$$S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{135}{1-0,7} = \frac{135}{0,3} = 450$$

Bal gaat omhoog: Sommeerbare mr met $u_0 = 0,7 \cdot 135 = 94,5$ en $r = 0,7$.

$$S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{94,5}{1-0,7} = \frac{94,5}{0,3} = 315$$

Dus de bal heeft $450 + 315 = 765$ cm afgelegd als hij is uitgestuiterd.

- 79 Onderscheid de situaties 'valt naar beneden' en 'veert omhoog'.

Valt naar beneden: Sommeerbare mr met $u_0 = 40$ en $r = 0,4 \cdot 0,75 = 0,3$.

$$S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{40}{1-0,3} = \frac{40}{0,7}$$

Veert omhoog: Sommeerbare mr met $u_0 = 0,4 \cdot 40 = 16$ en $r = 0,75 \cdot 0,4 = 0,3$

$$S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{16}{1-0,3} = \frac{16}{0,7}$$

De bungeejumper legt in totaal $\frac{40}{0,7} + \frac{16}{0,7} = \frac{56}{0,7} = 80$ meter af.

- 80 a $EF = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$

De factor van de rij is dus $\frac{\sqrt{18}}{6}$.

In figuur 2.8 zijn acht kubussen getekend.

De hoogte is de som van de eerste acht termen van

de mr met $u_0 = 6$ en $r = \frac{\sqrt{18}}{6}$.

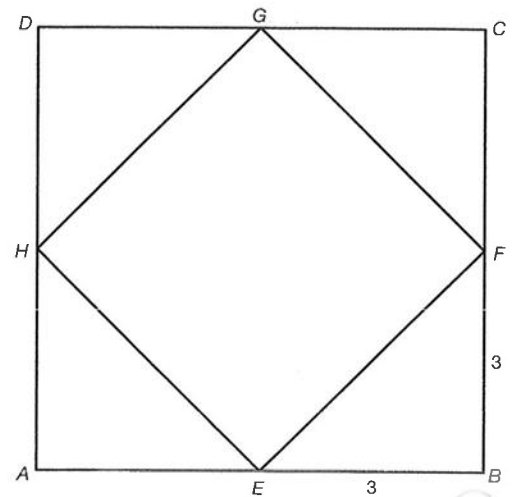
$$S_7 = \frac{6 \left(1 - \left(\frac{\sqrt{18}}{6} \right)^8 \right)}{1 - \frac{\sqrt{18}}{6}} \approx 19,2 \text{ cm} = 192 \text{ mm}$$

- b Sommeerbare mr met $u_0 = 6$ en $r = \frac{\sqrt{18}}{6}$.

$$S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{6}{1 - \frac{\sqrt{18}}{6}} \approx 20,5 \text{ cm} = 205 \text{ mm}$$

- c De inhoudten vormen een mr met $b = 6^3 = 216$ en $r = \left(\frac{\sqrt{18}}{6} \right)^3 = \frac{18\sqrt{18}}{216} = \frac{\sqrt{18}}{12}$.

Deze mr is sommeerbaar met $S = \frac{u_0}{1-r} = \frac{216}{1 - \frac{\sqrt{18}}{12}} \approx 334,134 \text{ cm}^3 = 334\,134 \text{ mm}^3$.



Diagnostische toets

Bladzijde 88

- 1 Van boven naar beneden moet je bij het vakje met T beginnen en dan moet je vier keer naar een volgende letter gaan.

Om bij de linker S te komen moet je 1 keer naar rechts, voor de middelste S is het 2 keer en voor de rechter S is dat 3 keer.

$$N(\text{totaal}) = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 14$$

- 2 a** De herleiding van $(2a - b)^{14}$ heeft 15 termen.
b De vijfde term is $\binom{14}{4} \cdot (2a)^{10} \cdot (-b)^4 = 1\,025\,024a^{10}b^4$.

De dertiende term is $\binom{14}{12} \cdot (2a)^2 \cdot (-b)^{12} = 364a^2b^{12}$.

- 3 a** De term met a^8 is $\binom{10}{6} \cdot (a^2)^4 \cdot (-1)^6 = 210a^8$, dus de coëfficiënt is 210.

- b** De term met a^8 is $\binom{10}{6} \cdot (\frac{1}{2}a^2)^4 \cdot 4^6 = 210 \cdot \frac{1}{16}a^8 \cdot 4096 = 53\,760a^8$, dus de coëfficiënt is 53 760.

- 4 a** De term met $p^4q^3r^2$ is $\binom{9}{4, 3, 2} \cdot p^4 \cdot q^3 \cdot (-r)^2 = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot p^4 \cdot q^3 \cdot r^2 = 1260p^4q^3r^2$.

Dus de coëfficiënt is 1260.

- b** De term met $p^4q^3r^2$ is $\binom{9}{4, 3, 2} \cdot (2p)^4 \cdot (-q)^3 \cdot (5r)^2 = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 16p^4 \cdot -q^3 \cdot 25r^2 = -504\,000p^4q^3r^2$.

Dus de coëfficiënt is -504 000.

- 5 a** TI

Voer in

Min = 0

$$u(n) = 1\frac{1}{2}u(n-1) + n\sqrt{n}$$

$$u(n\text{Min}) = 8$$

$$v(n) = \frac{v(n-1)}{n} + n^3$$

$$v(n\text{Min}) = 0$$

De vierde term: $u_3 \approx 38,7$ en $v_3 \approx 29,8$.

De negende term: $u_8 \approx 455,5$ en $v_8 \approx 559,1$.

- b** $u_3 \approx 38,7$, $v_3 \approx 29,8$

$$u_4 \approx 66,0$$

$$u_9 \approx 710,3$$

$$u_{10} \approx 1097,0$$

Dus voor $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ is $u_n < v_n$.

- c** $u_{13} - v_{13} \approx 3893,7 - 2339,1 \approx 1555$

$$u_{14} - v_{14} \approx 5892,9 - 2911,1 \approx 2982$$

Dus vanaf $n = 14$.

Casio

Voer in

$$a_{n+1} = 1\frac{1}{2}a_n + (n+1)\sqrt{n+1}$$

Start: 0

$$a_0 = 8$$

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} + (n+1)^3$$

$$b_0 = 0$$

- 6 a** Hij betaalt 4,5% rente per jaar, dus $\times 1,045$.

Hij lost ieder jaar 500 euro af, dus -500.

De recursieve formule voor zijn restschuld is dus

$$u_n = 1,045 \cdot u_{n-1} - 500 \text{ met } u_0 = 6000.$$

- b** $\frac{6000}{500} = 12$, dus $n = 12$.

Voer in 6000 en 1,045Ans - 500.

Je krijgt $u_{12} \approx 2443,27$.

Als hij €6000 heeft betaald is zijn restschuld €2443,27.

- c** $u_{17} \approx 309,41$ en $u_{18} \approx -176,67$.

Hij moet in totaal $18 \cdot 500 - 176,67 = €8823,33$ terugbetalen.

- 7 a** TI

Voer in

nMin = 5

$$u(n) = \frac{1}{2}n^2 + 4n + 3$$

$$v(n) = v(n-1) + u$$

$$v(n\text{Min}) = 35,5$$

Lees af in de tabel $\sum_{k=5}^{25} u_k = 4070,5$.

Casio

Voer in $a_n = \frac{1}{2}n^2 + 4n + 3$ en Start: 5.

Lees af in de tabel $\sum_{k=5}^{25} u_k = 4070,5$.

- b** Lees af in de tabel $S_{18} = 1795,5$ en $S_{19} = 2055$.

Dus vanaf $n = 19$.

- 8 a rr met $u_0 = 25$ en $v = 7$.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 7$ met $u_0 = 25$.

De directe formule is $u_n = 25 + 7n$.

- b $25 + 7n = 130$

$$7n = 105$$

$$n = 15$$

Dus de zestiende term is 130.

Bladzijde 89

- 9 a rr met $u_0 = 18$ en $v = 12$.

De directe formule is $u_n = 12n + 18$.

$$u_n = 150 \text{ geeft } 12n + 18 = 150$$

$$12n = 132$$

$$n = 11$$

$$u_0 = 18 \text{ en } u_{11} = 150.$$

$$18 + 30 + 42 + 54 + \dots + 150 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (18 + 150) = 1008$$

- b rr met $u_0 = 180$ en $v = -8$.

$$u_n = -8n + 180$$

$$u_n = 100 \text{ geeft } -8n + 180 = 100$$

$$-8n = -80$$

$$n = 10$$

$$u_0 = 180 \text{ en } u_{10} = 100$$

$$180 + 172 + 164 + 156 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (180 + 100) = 1540$$

- 10 a De eerste term is $u_0 = -5$ en de dertigste term is $u_{29} = 8 \cdot 29 - 5 = 227$.

De som van de eerste dertig termen is $\sum_{k=0}^{29} u_k = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (-5 + 227) = 3330$.

- b $u_{10} = 8 \cdot 10 - 5 = 75$ en $u_{25} = 8 \cdot 25 - 5 = 195$.

$$\sum_{k=10}^{25} u_k = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (75 + 195) = 2160$$

- c $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(-5 + 8n - 5) = \frac{1}{2}(n+1)(8n - 10) = (n+1)(4n - 5) = 4n^2 - n - 5$

Dus $a = 4$, $b = -1$ en $c = -5$.

- d Los op $4n^2 - n - 5 > 5000$.

Voer in $y_1 = 4x^2 - x - 5$.

De tabel geeft

$$x = 35 \text{ en } y_1 = 4860$$

$$x = 36 \text{ en } y_1 = 5143.$$

Dus vanaf $n = 36$.

- 11 a rr met $u_0 = 2750$ en $v = 10$, dus de directe formule is $u_n = 2750 + 10n$.

Bij januari 2025 hoort $n = 10 \cdot 12 = 120$.

$$u_{120} = 2750 + 10 \cdot 120 = 3950$$

Dus in januari 2025 is haar bruto maandsalaris €3950.

- b Van 1 januari 2015 tot en met december 2024 zijn 120 maanden.

$$u_0 = 2750 \text{ en } u_{119} = 2750 + 10 \cdot 119 = 3940.$$

$$\sum_{k=0}^{119} u_k = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot (2750 + 3940) = 401400$$

Dus tot en met december 2024 heeft zij €401400 aan salaris ontvangen.

$$c \quad \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)(2750 + 2750 + 10n) = \frac{1}{2}(n+1)(5500 + 10n) = (n+1)(5n + 2750) =$$

$$5n^2 + 2755n + 2750$$

Los op $5n^2 + 2755n + 2750 > 500\,000$.

Voer in $y_1 = 5x^2 + 2755x + 2750$.

De tabel geeft

$$x = 143 \text{ en } y_1 = 498\,960$$

$$x = 144 \text{ en } y_1 = 503\,150.$$

Bij $n = 144$ hoort 1 januari 2027.

Dus vanaf januari 2027 heeft zij in totaal meer dan een half miljoen euro aan salaris ontvangen, er vanuit gaande dat het salaris pas na elke maand werken wordt uitbetaald.

- 12 a** mr met $u_0 = 800$ en $r = 1,25$.

De recursieve formule is $u_n = 1,25 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 800$.

De directe formule is $u_n = 800 \cdot 1,25^n$.

- b** Voer in 800 en 1,25Ans.

Je krijgt $u_{14} \approx 18\,190$ en $u_{15} \approx 22\,737$.

Dus vanaf de zestiende term is $u_n > 20\,000$.

- 13 a** mr met $u_0 = 100$ en $r = 1,08$.

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{100(1 - 1,08^{11})}{1 - 1,08} \approx 1664,55$$

- b** De som van de eerste vijftien termen is $\sum_{k=0}^{14} u_k = \frac{100(1 - 1,08^{15})}{1 - 1,08} \approx 2715,21$

- 14 a** mr met $u_0 = 5$ en $r = 4$.

$u_n = 1\,310\,720$, dus $u_{n+1} = 4 \cdot 1\,310\,720 = 5\,242\,880$.

$$5 + 20 + 80 + 320 + 1280 + \dots + 1\,310\,720 = \frac{5 - 5\,242\,880}{1 - 4} = 1\,747\,625$$

- b** $1,15 + 1,15^2 + 1,15^3 + \dots + 1,15^{20} = \frac{1,15 - 1,15^{21}}{1 - 1,15} \approx 117,810$

- 15 a** mr met $u_0 = 500$ en $r = 0,75$.

De directe formule is $u_n = 500 \cdot 0,75^n$.

$$u^3 = 500 \cdot 0,75^3 = 210,9375$$

Bij de vierde keer blaast Roos ongeveer 211 cm^3 in de ballon.

$$b \quad \sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{500(1 - 0,75^{n+1})}{1 - 0,75} = \frac{500(1 - 0,75^n \cdot 0,75)}{0,25} = 2000(1 - 0,75 \cdot 0,75^n) =$$

$$2000 - 1500 \cdot 0,75^n$$

Dus $a = 2000$, $b = -1500$ en $c = 0,75$.

- c** Los op $2000 - 1500 \cdot 0,75^n > 1700$.

Voer in $y_1 = 2000 - 1500 \cdot 0,75^x$.

De tabel geeft

$$x = 5 \text{ en } y_1 \approx 1644$$

$$x = 6 \text{ en } y_1 \approx 1733.$$

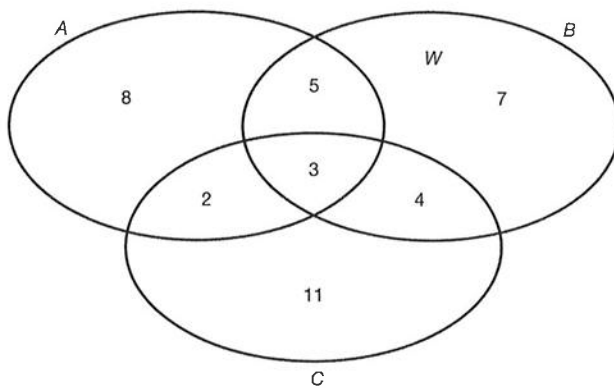
Voor $n = 6$, dus na de zevende keer blazen zit er voor het eerst meer dan 1700 cm^3 lucht in de ballon.

3 Kansrekening

Voorkennis Verzamelingen en combinatoriek

Bladzijde 92

- 1 Bij de gegevens kun je het Venn-diagram hieronder maken.



- a $\#(U) = 8 + 5 + 7 + 2 + 3 + 4 + 11 = 40$
 b $\#(\bar{A}) = \#(U) - \#(A) = 40 - 18 = 22$
 c $\#(A \cup B) = 8 + 2 + 5 + 3 + 7 + 4 = 29$
 d $\#(\overline{A \cup B}) = \#(U) - \#(A \cup B) = 40 - 29 = 11$
 e $\#(\overline{A \cap B}) = 7 + 4 + 11 + 8 + 2 = 32$
 f $\#(A \setminus (B \cap C)) = 8 + 5 + 2 = 15$
 g $\#(\overline{A \setminus (B \cap C)}) = 11 + 7 = 18$
 h $\#(\overline{A \cap B}) = \#U - \#(A \cap B) = 40 - 8 = 32$
 i $\#(A \cap B) = 11$

Bladzijde 93

- 2 a Zie het rooster.
 $N(\text{minstens 9 ogen}) = 10$
 b Zie het rooster.
 $N(\text{met elke dobbelsteen evenveel ogen}) = 6$
 c Zie het rooster.
 $N(\text{product is hoogstens 6}) = 14$
 d Zie het rooster.
 $N(\text{som is even}) = 18$

6	c	d		d		d
			a	a	a	a b
5	d	c		d		d
				a	a b	a
4	c	d		d		d
				b	a	a
3	d	c	c	d		d
			b			a
2	c	d	c	c	d	
		b				d
1	d	c	c	d	c	c
	b					
	1	2	3	4	5	6

- 3 a aantal = $5^3 = 125$
 b aantal = $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
 c aantal = $5^2 + 5^3 + 5^4 = 775$
 d aantal = $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 85$
 e aantal = $1^2 \cdot 5^3 = 125$
 f aantal = $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$
- 4 a aantal = $2^{20} = 1\,048\,576$
 b aantal = $1^{14} \cdot 2^6 = 64$
 c Per rij zijn er $\binom{4}{1} = 4$ mogelijkheden met één zwart vakje.
 aantal = $4^5 = 1024$