

Inhoud

13	Kegelsneden	4
14	Mathematische statistiek	35
15	Continue dynamische modellen	55
16	Complexe functies	94
	Gemengde opgaven	138

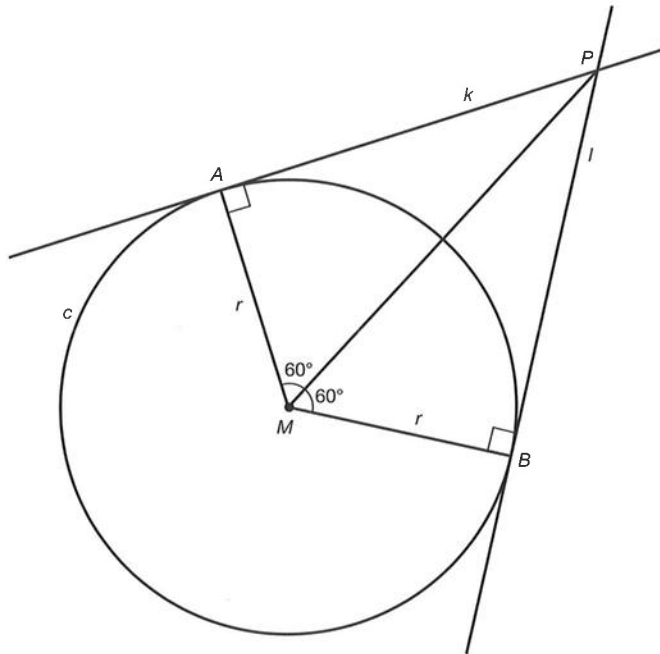
13 Kegelsneden

13

Voorkennis Meetkundige plaatsen

Bladzijde 9

1 a

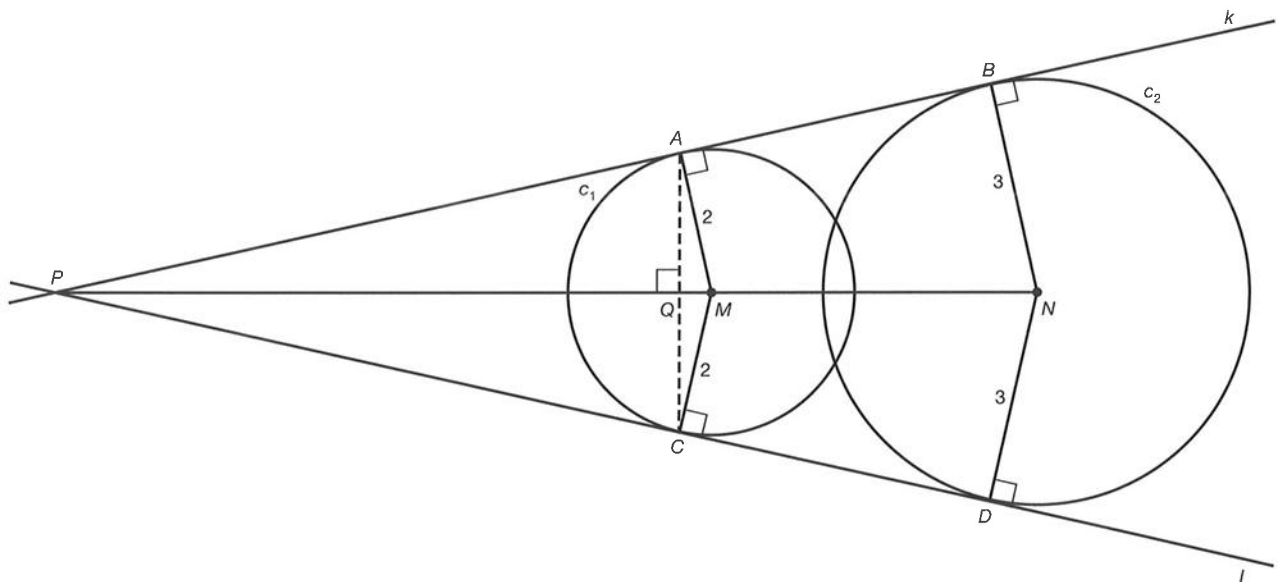


$$\left. \begin{array}{l} AM = BM = r \\ MP = MP \\ \angle PAM = \angle PBM = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle PAM \cong \triangle PBM \text{ (ZZR)}$$

Dus $\angle AMP = \angle BMP = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

b $AP = BP = r\sqrt{3}$
 $O(AMBP) = 2 \cdot O(\triangle PAM) = 2 \cdot \frac{1}{2} AP \cdot AM = r\sqrt{3} \cdot r = r^2\sqrt{3}$

2 a



b Zie de figuur van vraag a waarin een aantal hulplijnstukken zijn getekend.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B = 90^\circ \\ \angle APM = \angle BPN \end{array} \right\} \triangle APM \sim \triangle BPN \text{ (hh)}$$

$$\frac{MP}{2} = \frac{MP + 4\frac{1}{2}}{3} \text{ geeft } 3MP = 2MP + 9, \text{ dus } MP = 9.$$

$$\sin(\angle APM) = \frac{2}{9} \text{ geeft } \angle APM = 12,83\dots^\circ$$

Uit de symmetrie volgt $\angle(k, l) = 2 \cdot 12,83\dots^\circ \approx 25,7^\circ$.

c De stelling van Pythagoras in $\triangle AMP$ geeft $AP = \sqrt{MP^2 - AM^2} = \sqrt{81 - 4} = \sqrt{77}$.

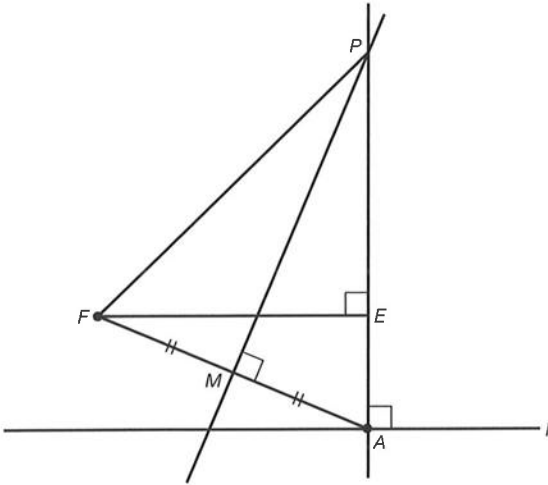
In $\triangle APQ$ is $\sin(\angle APM) = \frac{AQ}{AP}$. Dit geeft $\frac{2}{9} = \frac{AQ}{\sqrt{77}}$ ofwel $AQ = \frac{2}{9}\sqrt{77}$.

Uit de symmetrie volgt $d(A, C) = 2 \cdot \frac{2}{9}\sqrt{77} \approx 3,90$.

d $d(P, AC) = d(P, Q)$

De stelling van Pythagoras in $\triangle APQ$ geeft $PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \sqrt{77 - \frac{4}{81} \cdot 77} \approx 8,56$.
Dus $d(P, AC) \approx 8,56$.

3 a



b In de figuur van vraag a zijn de hulplijnstukken FP en EF loodrecht op AP getekend.

$$\left. \begin{array}{l} \angle FAE = \angle MAP \\ \angle FEA = \angle PMA = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle AEF \sim \triangle AMP \text{ (hh)}$$

$$\frac{AF}{AP} = \frac{AE}{AM} \text{ geeft } \frac{\sqrt{5}}{AP} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}, \text{ dus } AP = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2\frac{1}{2}.$$

$$\text{Dus } d(P, A) = 2\frac{1}{2}.$$

Bladzijde 10

4 a Uit de eigenschappen van de parabool volgt

$$PA = PF = 3 \text{ en}$$

k is de middelloodlijn van het lijnstuk AF .

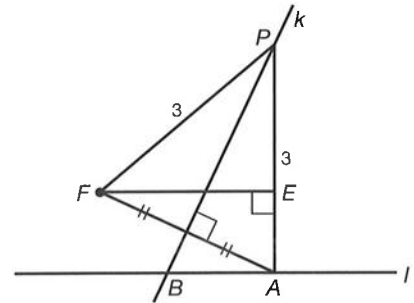
Verder is APF een gelijkbenige driehoek, en dus is k symmetrieas van driehoek AFP .

Zie de figuur hiernaast.

$$\angle APB = \angle FPB = 25^\circ$$

$$\text{In } \triangle ABP \text{ is } \tan(25^\circ) = \frac{AB}{3}, \text{ dus } AB = 3 \tan(25^\circ) \approx 1,40.$$

$$\text{Dus } d(A, B) \approx 1,40.$$



b In $\triangle EFP$ is $\cos(50^\circ) = \frac{PE}{3}$, dus $PE = 3 \cos(50^\circ)$.

$$\text{Dus } d(F, l) = AE = AP - PE = 3 - 3 \cos(50^\circ) \approx 1,07.$$

Bladzijde 12

$$\left. \begin{array}{l} d(P, F_1) + d(P, V) = r \\ d(P, F_2) = d(P, c) \\ d(P, c) = d(P, V) \end{array} \right\} d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$$

6 a C op de ellips, dus $d(C, F_1) + d(C, F_2) = 2a \dots (1)$.

Uit de symmetrie volgt dat $d(C, F_1) = d(C, F_2) \dots (2)$.

Uit (1) en (2) volgt dat $d(C, F_1) = a$.

De lange en de korte as van de ellips staan loodrecht op elkaar, dus de stelling van Pythagoras geeft $a^2 = b^2 + c^2$.

- b $r = 2a = 8$, dus $a = 4$.
 $2b = 4,8$, dus $b = 2,4$.
 $a^2 = b^2 + c^2$ geeft $4^2 = 2,4^2 + c^2$ ofwel $c^2 = 10,24$, dus $c = \sqrt{10,24} = 3,2$.
 De brandpuntsafstand is $2c = 6,4$.

- 7 a Als $d(P, F_2) = d(P, c_1)$ dan ligt P buiten c_1 .
 In dat geval geldt $d(P, F_1) = d(P, c_1) + r$ ofwel $r = d(P, F_1) - d(P, c_1) = d(P, F_1) - d(P, F_2)$.
 Als $d(P, F_1) = d(P, c_2)$ dan ligt P buiten c_2 .
 In dat geval geldt $d(P, F_2) = d(P, c_2) + r$ ofwel $r = d(P, F_2) - d(P, c_2) = d(P, F_2) - d(P, F_1)$.
 b Een hyperbooltak is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een cirkel en een punt buiten de cirkel. Bij vraag a heb je dus te maken met twee hyperbooltakken.
 Uit $d(P, F_1) - d(P, F_2) = r$ en $d(P, F_2) - d(P, F_1) = r$ volgt $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = r$.
 De punten P liggen dus op de hyperbool met de brandpunten F_1 en F_2 en waarvoor geldt $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = r$.

Bladzijde 13

- 8 a $M(1, -2)$ is het middelpunt van c .
 Stel $k: y = ax + b$.
 m door M en A met $rc_m = \frac{-2 - 0}{1 - 3} = 1$, dus $a = rc_k = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ \text{door } A(3, 0) \end{array} \right\} -3 + b = 0, \text{ dus } b = 3.$$
 Dus $k: y = -x + 3$.
 b $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 3 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
 $M(2, 3)$ is het middelpunt van c .
 Stel $l: y = ax + b$.
 n door M en B met $rc_n = \frac{3 - 4}{2 - -1} = -\frac{1}{3}$, dus $a = rc_l = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } B(-1, 4) \end{array} \right\} 3 \cdot -1 + b = 4, \text{ dus } b = 7.$$
 Dus $l: y = 3x + 7$.
 c $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 5 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 - 5 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$
 $M(2, 1)$ is het middelpunt van c .
 Stel $r: y = ax + b$.
 p door M en C met $rc_p = \frac{1 - 4}{2 - 1} = -3$, dus $a = rc_r = \frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } C(1, 4) \end{array} \right\} \frac{1}{3} \cdot 1 + b = 4, \text{ dus } b = 3\frac{2}{3}.$$
 Dus $r: y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.
 Stel $s: y = ax + b$.
 q door M en D met $rc_q = \frac{1 - 2}{2 - 5} = \frac{1}{3}$, dus $a = rc_s = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } D(5, 2) \end{array} \right\} -3 \cdot 5 + b = 2, \text{ dus } b = 17.$$
 Dus $s: y = -3x + 17$.
 r en s snijden geeft $\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3} = -3x + 17$

$$3\frac{1}{3}x = 13\frac{1}{3}$$

$$x = 4$$
 $x = 4$ geeft $y = -3 \cdot 4 + 17 = 5$
 Dus $P(4, 5)$.

13.1 Kegelsneden en de vergelijking van de parabool

Bladzijde 14

- 1 a Deze doorsnede heeft de vorm van een cirkel.

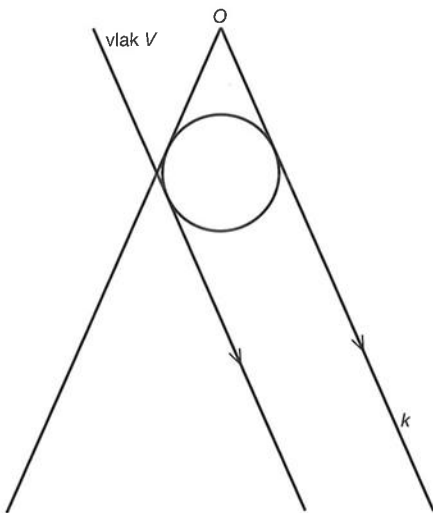
Bladzijde 15

- 2 a Als V niet door O gaat en er kleine $0 < \varphi < \alpha$ dan krijg je de tweede situatie van figuur 13.25 uit het leerboek. De doorsnede van V met het kegelvlak is in dat geval dus een ellips.
 b Voor $\varphi = \alpha$ is de doorsnede een parabool.
 Voor $\alpha < \varphi < 90$ is de doorsnede een hyperbool.
- 3 a PF_1 ligt in V en V raakt de kleine bol in F_1 , dus de lijn door P en F_1 raakt de kleine bol in F_1 .
 De lijn door O en P raakt de kleine bol in A .
 PF_1 en PA zijn raaklijnstukken aan de kleine bol.
 Raaklijnstukken vanuit een punt buiten een bol aan een bol zijn even lang.
 Dus $PF_1 = PA$.
 Evenzo is te beredeneren dat $PF_2 = PB$.
 b $\left. \begin{array}{l} PF_1 = PA \\ PF_2 = PB \end{array} \right\} PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB$
 Bij een gegeven kegel en een (snij)vlak V liggen de bollen van Dandelin vast en daarmee de punten A en B , dus AB is constant. Dus $PF_1 + PF_2 = \text{constant}$ en daarmee wordt voldaan aan de definitie van een ellips.
 Dus P ligt op een ellips.

Bladzijde 16

- 4 a PF_1 ligt in V en V raakt de grote bol in F_1 , dus de lijn door P en F_1 raakt de grote bol in F_1 .
 De lijn door O en P raakt de grote bol in A .
 PF_1 en PA zijn raaklijnstukken aan de grote bol.
 Raaklijnstukken vanuit een punt buiten een bol aan een bol zijn even lang.
 Dus $PF_1 = PA$.
 Evenzo is te beredeneren dat $PF_2 = PB$.
 b $\left. \begin{array}{l} PF_1 = PA \\ PF_2 = PB \end{array} \right\} PF_2 - PF_1 = PB - PA = AB$
 Bij een gegeven kegel en een (snij)vlak V liggen de bollen van Dandelin vast en daarmee de punten A en B , dus AB is constant. Dus $PF_2 - PF_1 = \text{constant}$ en daarmee wordt voldaan aan de definitie van een hyperbool.
 Dus P ligt op een hyperbool.

5 a



Uit de figuur volgt dat er slechts één bol is met middelpunt op de as van het kegelvlak, die zowel het vlak V als het kegelvlak raakt.

Dus is er maar één bol van Dandelin.

- b PF en PA zijn raaklijnstukken vanuit P aan de bol, dus $PF = PA$.
 c Je kunt k wentelen om de as van de kegel zo, dat B met A en Q met P samenvalt.
 Dus $PA = QB$.
 d S ligt in het vlak PQR en B en C liggen in het vlak W .
 En omdat $k \parallel SC$ is $QB = SC$.
 e $l \parallel$ vlak PQR en $PD \parallel SC$ en $\angle C = \angle D = 90^\circ$, dus $CDPS$ is een rechthoek en dus geldt $SC = PD$.

$$f \quad \left. \begin{array}{l} PF = PA \\ PA = QB \\ QB = SC \\ SC = PD \end{array} \right\} PF = PD$$

$PF = PD$ en PD loodrecht l , dus $d(P, F) = d(P, l)$.

Dus P ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn l .

Bladzijde 17

- 6 a De stelling van Pythagoras geeft

$$d(P, F) = PF = \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}.$$

$$d(P, l) = d(P, y\text{-as}) + d(l, y\text{-as}) = x + \frac{1}{2}p$$

b $\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2} = x + \frac{1}{2}p$

kwadrateren geeft

$$(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2$$

$$x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 + y^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$$

$$y^2 = 2px$$

Bladzijde 18

- 7 a P is een punt van de parabool met brandpunt $F(0, \frac{1}{2}p)$ en richtlijn $l: y = -\frac{1}{2}p$. Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras geeft

$$d(P, F) = PF = \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{1}{2}p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2}p)^2}.$$

$$d(P, l) = d(P, x\text{-as}) + d(l, x\text{-as}) = y + \frac{1}{2}p$$

P op de parabool geeft

$$d(P, F) = d(P, l)$$

$$\sqrt{x^2 + (y - \frac{1}{2}p)^2} = y + \frac{1}{2}p$$

kwadrateren geeft

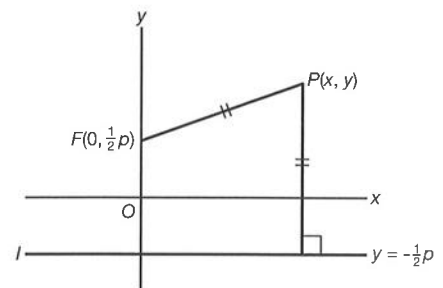
$$x^2 + (y - \frac{1}{2}p)^2 = (y + \frac{1}{2}p)^2$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{1}{4}p^2 = y^2 + py + \frac{1}{4}p^2$$

$$x^2 = 2py$$

- b $x^2 = 2py$ is te schrijven als $y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$.

$p > 0$ dus $\frac{1}{2p} > 0$, dus je hebt te maken met een dalparabool ofwel een staande parabool met de opening naar boven.



- 8 a Brandpunt $F(1\frac{1}{2}, 0)$ en richtlijn $l: y = -1\frac{1}{2}$, dus top $(0, 0)$ en $p = 3$.
Een vergelijking is $y^2 = 6x$.
b Brandpunt $F(0, -\frac{3}{8})$ en richtlijn $l: y = \frac{3}{8}$, dus top $(0, 0)$ en $p = -\frac{3}{4}$.
Een vergelijking is $x^2 = -1\frac{1}{2}y$.
c Brandpunt $F(3, 1)$ en richtlijn $l: x = 1$, dus top $(2, 1)$ en $p = 2$.
Een vergelijking is $(y - 1)^2 = 4(x - 2)$.
d Brandpunt $F(1, 4)$ en richtlijn $l: y = 3$, dus top $(1, 3\frac{1}{2})$ en $p = 1$.
Een vergelijking is $(x - 1)^2 = 2(y - 3\frac{1}{2})$.

- 9 a $y^2 + 10y = 4x - 1$
 $(y + 5)^2 - 25 = 4x - 1$
 $(y + 5)^2 = 4x + 24$
 $(y + 5)^2 = 4(x + 6)$
 $T(-6, -5)$
 $F(1 - 6, -5) = F(-5, -5)$
as $k: y = -5$
richtlijn $l: x = -1 - 6$, dus $l: x = -7$

- b** $x^2 - 6x = 2y - 3$
 $(x - 3)^2 - 9 = 2y - 3$
 $(x - 3)^2 = 2y + 6$
 $(x - 3)^2 = 2(y + 3)$
 $T(3, -3)$
 $F(3, \frac{1}{2} - 3) = F(3, -2\frac{1}{2})$
 as $k: x = 3$
 richtlijn $l: y = -\frac{1}{2} - 3$, dus $l: y = -3\frac{1}{2}$
- c** $y^2 + 5x + 4y = 1$
 $y^2 + 4y = -5x + 1$
 $(y + 2)^2 - 4 = -5x + 1$
 $(y + 2)^2 = -5x + 5$
 $(y + 2)^2 = -5(x - 1)$
 $T(1, -2)$
 $F(-1\frac{1}{4} + 1, -2) = F(-\frac{1}{4}, -2)$
 as $k: y = -2$
 richtlijn $l: x = 1\frac{1}{4} + 1$, dus $l: x = 2\frac{1}{4}$
- d** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 6$
 $\frac{1}{4}x^2 - 3x = -y - 6$
 $x^2 - 12x = -4y - 24$
 $(x - 6)^2 - 36 = -4y - 24$
 $(x - 6)^2 = -4y + 12$
 $(x - 6)^2 = -4(y - 3)$
 $T(6, 3)$
 $F(6, -1 + 3) = F(6, 2)$
 as $k: x = 6$
 richtlijn $l: y = 1 + 3$, dus $l: y = 4$

- 10 a** $y^2 + ay = ax + a^2$
 $(y + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 = ax + a^2$
 $(y + \frac{1}{2}a)^2 = ax + 1\frac{1}{4}a^2$
 $(y + \frac{1}{2}a)^2 = a(x + 1\frac{1}{4}a)$
 $2p = a$, dus $p = \frac{1}{2}a$
 top $(-1\frac{1}{4}a, -\frac{1}{2}a)$
 brandpunt $(\frac{1}{4}a - 1\frac{1}{4}a, -\frac{1}{2}a) = \text{brandpunt}(-a, -\frac{1}{2}a)$
- b** Substitutie van $x = -a$ en $y = -\frac{1}{2}a$ in $x^2 + y^2 = 10$ geeft
 $(-a)^2 + (-\frac{1}{2}a)^2 = 10$
 $a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 10$
 $1\frac{1}{4}a^2 = 10$
 $a^2 = 8$
 $a = \sqrt{8} \vee a = -\sqrt{8}$
 $a = 2\sqrt{2} \vee a = -2\sqrt{2}$

13.2 Vergelijkingen van ellips en hyperbool

Bladzijde 20

- 11 a** $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$
 kwadrateren geeft
 $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$
 $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$
 $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$
 $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$
- b** kwadrateren geeft
 $a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
 $a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
 $a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
 $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$
 $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$
 $a^2 - c^2 = b^2$ geeft $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Bladzijde 21

$$12 \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2b$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2b$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2b - \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

kwadrateren geeft

$$x^2 + (y+c)^2 = 4b^2 - 4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + (y-c)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2cy + c^2 = 4b^2 - 4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

$$4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 4b^2 - 4cy$$

$$b\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = b^2 - cy$$

kwadrateren geeft

$$b^2(x^2 + (y-c)^2) = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$$

$$b^2x^2 + b^2(y-c)^2 = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$$

$$b^2x^2 + b^2(y^2 - 2cy + c^2) = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$$

$$b^2x^2 + b^2y^2 - 2b^2cy + b^2c^2 = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$$

$$b^2x^2 + b^2y^2 - c^2y^2 = b^4 - b^2c^2$$

$$b^2x^2 + (b^2 - c^2)y^2 = (b^2 - c^2)b^2$$

Verder geldt $c^2 = b^2 - a^2$ ofwel $b^2 - c^2 = a^2$.

Samen met $b^2x^2 + (b^2 - c^2)y^2 = (b^2 - c^2)b^2$ geeft dit $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$13 \quad a \quad a = 5 \text{ en } b = 3 \text{ geeft } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$b \quad a = 6, c = 5 \text{ en } b^2 = a^2 - c^2 \text{ geeft } b^2 = 36 - 25 = 11, \text{ dus } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1.$$

$$c \quad b = 4, c = 5 \text{ en } a^2 = b^2 + c^2 \text{ geeft } a^2 = 16 + 25 = 41, \text{ dus } \frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$d \quad a = 3 \text{ geeft } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{9} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{b^2} = \frac{8}{9} \\ b^2 = 4\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Dus $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4\frac{1}{2}} = 1$ ofwel $x^2 + 2y^2 = 9$.

$$e \quad \text{Stel } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$d((2, \sqrt{2}), (-3, 0)) = \sqrt{(2+3)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$d((2, \sqrt{2}), (3, 0)) = \sqrt{(2-3)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

Liggende ellips, dus $2a = 4\sqrt{3}$ ofwel $a = 2\sqrt{3}$.

$$a = 2\sqrt{3}, c = 3 \text{ en } b^2 = a^2 - c^2 \text{ geeft } b^2 = 12 - 9 = 3, \text{ dus } \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

- 14 a Het middelpunt van de richtcirkel $(x+3)^2 + y^2 = 100$ is het andere brandpunt van de ellips. De brandpunten zijn dus $F_1(-3, 0)$ en $F_2(3, 0)$. Het middelpunt van de ellips is het midden van lijnstuk F_1F_2 en dat is de oorsprong.

$$b \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) = r \text{ en } r = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Liggende ellips, dus } d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a. \end{array} \right\} 2a = 10, \text{ dus } a = 5.$$

$$a = 5, c = 3 \text{ en } c^2 = a^2 - b^2 \text{ ofwel } b^2 = a^2 - c^2 \text{ geeft } b^2 = 25 - 9 = 16, \text{ dus } b = 4.$$

$$15 \quad a \quad \text{Stel } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$d((3, 2\frac{2}{5}), (-4, 0)) = \sqrt{(3+4)^2 + (2\frac{2}{5})^2} = 7\frac{2}{5}$$

$$d((3, 2\frac{2}{5}), (4, 0)) = \sqrt{(3-4)^2 + (2\frac{2}{5})^2} = 2\frac{3}{5}$$

Liggende ellips, dus $2a = 10$ ofwel $a = 5$.

$$a = 5, c = 4 \text{ en } b^2 = a^2 - c^2 \text{ geeft } b^2 = 25 - 16 = 9, \text{ dus } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b } x^2 + y^2 - 8y - 84 &= 0 \\ x^2 + (y - 4)^2 - 16 - 84 &= 0 \\ x^2 + (y - 4)^2 &= 100 \end{aligned}$$

Dit is de cirkel met middelpunt $(0, 4)$ en straal 10.

Het andere brandpunt van de ellips is $(0, 4)$ en het middelpunt is $(0, 0)$.

$$\text{Stel } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= r \text{ en } r = 10 \\ \text{Staande ellips, dus } d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2b. \end{aligned} \right\} 2b = 10, \text{ dus } b = 5.$$

$$b = 5, c = 4 \text{ en } a^2 = b^2 - c^2 \text{ geeft } a^2 = 25 - 16 = 9, \text{ dus } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

$$\text{16 } A(2, 2\sqrt{3}) \text{ op de ellips } px^2 + qy^2 = 60 \text{ geeft } 4p + 12q = 60 \text{ ofwel } p + 3q = 15.$$

$$B(4, \sqrt{3}) \text{ op de ellips } px^2 + qy^2 = 60 \text{ geeft } 16p + 3q = 60.$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p + 3q = 15 \\ 16p + 3q = 60 \end{array} \right. \\ -15p \quad \quad = -45 \\ \hline p \quad \quad = 3 \\ p + 3q = 15 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3 + 3q &= 15 \\ 3q &= 12 \\ q &= 4 \end{aligned}$$

Dit geeft de ellips $3x^2 + 4y^2 = 60$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2}{60} + \frac{4y^2}{60} &= \frac{60}{60} \\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} &= 1 \end{aligned}$$

$$a > b, \text{ dus } c^2 = a^2 - b^2 = 20 - 15 = 5.$$

De brandpunten van de ellips zijn $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ en $F_2(\sqrt{5}, 0)$.

Bladzijde 22

$$\text{17 a } 9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

De toppen van e_1 zijn $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $(0, -3)$ en $(0, 3)$.

$$25x^2 + 9y^2 = 225$$

$$\frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

De toppen van e_2 zijn $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -5)$ en $(0, 5)$.

b Bij de translatie $(5, 6)$ vervang je x door $x - 5$ en y door $y - 6$.

$$\text{Dus } 9x^2 + 25y^2 = 225 \xrightarrow{\text{translatie } (5, 6)} 9(x - 5)^2 + 25(y - 6)^2 = 225.$$

De toppen van deze ellips zijn

$$(-5 + 5, 0 + 6) = (0, 6), (5 + 5, 0 + 6) = (10, 6), (0 + 5, -3 + 6) = (5, 3) \text{ en } (0 + 5, 3 + 6) = (5, 9).$$

$$\text{c } 25x^2 + 9y^2 = 225 \xrightarrow{\text{translatie } (5, 6)} 25(x - 5)^2 + 9(y - 6)^2 = 225$$

De toppen van deze ellips zijn

$$(-3 + 5, 0 + 6) = (2, 6), (3 + 5, 0 + 6) = (8, 6), (0 + 5, -5 + 6) = (5, 1) \text{ en } (0 + 5, 5 + 6) = (5, 11).$$

$$25x^2 + 9y^2 = 225 \text{ ofwel } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ geeft } c^2 = b^2 - a^2 = 25 - 9 = 16, \text{ dus } c = 4.$$

Dus van $9x^2 + 25y^2 = 225$ zijn de brandpunten $(0, -4)$ en $(0, 4)$ en van $25(x - 5)^2 + 9(y - 6)^2 = 225$ zijn de brandpunten $(0 + 5, -4 + 6) = (5, 2)$ en $(0 + 5, 4 + 6) = (5, 10)$.

Bladzijde 23

18 $9x^2 + 4y^2 = 36$

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$b > a$, dus $c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$, dus $c = \sqrt{5}$.

Dus staande ellips met brandpunten $(0, -\sqrt{5})$ en $(0, \sqrt{5})$.

19 a $5x^2 + y^2 = 5 \xrightarrow{\text{translatie } (2, -3)} 5(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

Van $5x^2 + y^2 = 5$ ofwel $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$ zijn de toppen $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -\sqrt{5})$ en $(0, \sqrt{5})$

en de brandpunten $(0, -2)$ en $(0, 2)$.

Dus van $5(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ zijn de toppen $(1, -3)$, $(3, -3)$, $(2, -3 - \sqrt{5})$ en $(2, -3 + \sqrt{5})$

en de brandpunten $(2, -5)$ en $(2, -1)$.

b $4x^2 + 25y^2 + 16x - 84 = 0$

$$4x^2 + 16x + 25y^2 - 84 = 0$$

$$4(x^2 + 4x) + 25y^2 - 84 = 0$$

$$4((x+2)^2 - 4) + 25y^2 - 84 = 0$$

$$4(x+2)^2 - 16 + 25y^2 - 84 = 0$$

$$4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$$

$$4x^2 + 25y^2 = 100 \xrightarrow{\text{translatie } (-2, 0)} 4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$$

Van $4x^2 + 25y^2 = 100$ ofwel $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ zijn de toppen $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $(0, -2)$ en $(0, 2)$

en de brandpunten $(-\sqrt{21}, 0)$ en $(\sqrt{21}, 0)$.

Dus van $4(x+2)^2 + 25y^2 = 100$ zijn de toppen $(-7, 0)$, $(3, 0)$, $(-2, -2)$ en $(-2, 2)$

en de brandpunten $(-2 - \sqrt{21}, 0)$ en $(-2 + \sqrt{21}, 0)$.

c $9x^2 + 10y^2 - 80y - 200 = 0$

$$9x^2 + 10(y^2 - 8y) - 200 = 0$$

$$9x^2 + 10((y-4)^2 - 16) - 200 = 0$$

$$9x^2 + 10(y-4)^2 - 160 - 200 = 0$$

$$9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$$

$$9x^2 + 10y^2 = 360 \xrightarrow{\text{translatie } (0, 4)} 9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$$

Van $9x^2 + 10y^2 = 360$ ofwel $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$ zijn de toppen $(-2\sqrt{10}, 0)$, $(2\sqrt{10}, 0)$, $(0, -6)$

en $(0, 6)$ en de brandpunten $(-2, 0)$ en $(2, 0)$.

Dus van $9x^2 + 10(y-4)^2 = 360$ zijn de toppen $(-2\sqrt{10}, 4)$, $(2\sqrt{10}, 4)$, $(0, -2)$ en $(0, 10)$

en de brandpunten $(-2, 4)$ en $(2, 4)$.

20 $10x^2 + ay^2 - 80x + 4ay + 160 - 6a = 0$

$$10x^2 - 80x + ay^2 + 4ay + 160 - 6a = 0$$

$$10(x^2 - 8x) + a(y^2 + 4y) + 160 - 6a = 0$$

$$10((x-4)^2 - 16) + a((y+2)^2 - 4) + 160 - 6a = 0$$

$$10(x-4)^2 - 160 + a(y+2)^2 - 4a + 160 - 6a = 0$$

$$10(x-4)^2 + a(y+2)^2 = 10a$$

$$\frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{10} = 1 \xrightarrow{\text{translatie } (4, -2)} \frac{(x-4)^2}{a} + \frac{(y+2)^2}{10} = 1$$

$(4, -2)$ is het middelpunt van de ellips en $(7, -2)$ is een brandpunt, dus het is een liggende ellips met $c^2 = 9$ en $b^2 = 10$.

Dus $a = 10 + 9 = 19$.

21 a $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

kwadrateren geeft

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

b kwadrateren geeft

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2((x - c)^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2) + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

c $c^2 - a^2 = b^2$ geeft $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bladzijde 24

22 $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2b$

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} - \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2b$$

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2b + \sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

kwadrateren geeft

$$x^2 + (y + c)^2 = 4b^2 + 4b\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + (y - c)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2cy + c^2 = 4b^2 + 4b\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

$$4cy - 4b^2 = 4b\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

$$cy - b^2 = b\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

kwadrateren geeft

$$c^2y^2 - 2b^2cy + b^4 = b^2(x^2 + (y - c)^2)$$

$$c^2y^2 - 2b^2cy + b^4 = b^2(x^2 + y^2 - 2cy + c^2)$$

$$c^2y^2 - 2b^2cy + b^4 = b^2x^2 + b^2y^2 - 2b^2cy + b^2c^2$$

$$-b^2x^2 + c^2y^2 - b^2y^2 = b^2c^2 - b^4$$

$$-b^2x^2 + (c^2 - b^2)y^2 = (c^2 - b^2)b^2$$

Stel $c^2 - b^2 = a^2$.

Dit geeft $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$\frac{-b^2x^2}{-a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{-a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

23 a $a = 2$ en $c = 3$ en $b^2 = c^2 - a^2$ geeft $b^2 = 9 - 4 = 5$, dus $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

b $b = 3, c = 4$ en $a^2 = c^2 - b^2$ geeft $a^2 = 16 - 9 = 7$, dus $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$.

$$\text{c } a = 4 \text{ geeft } \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{door } (12, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{144}{16} - \frac{16}{b^2} = 1 \\ 9 - \frac{16}{b^2} = 1 \\ b^2 = 2 \end{array}$$

Dus $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{2} = -1$.

d Stel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$d((4, 3), (-5, 0)) = \sqrt{(4 + 5)^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$d((4, 3), (5, 0)) = \sqrt{(4 - 5)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Liggende hyperbool, dus $2a = 3\sqrt{10} - \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$ ofwel $a = \sqrt{10}$.

$a = \sqrt{10}$, $c = 5$ en $b^2 = c^2 - a^2$ geeft $b^2 = 25 - 10 = 15$, dus $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$.

24 a $3x^2 - 5y^2 = 30$ ofwel $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$

$a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{6}$ en $c^2 = a^2 + b^2 = 10 + 6 = 16$, dus $c = 4$.

De toppen zijn $(-\sqrt{10}, 0)$ en $(\sqrt{10}, 0)$ en de brandpunten zijn $(-4, 0)$ en $(4, 0)$.

b $x + y = 8$ geeft $y = 8 - x$

Substitutie in $3x^2 - 5y^2 = 30$ geeft

$$3x^2 - 5(8 - x)^2 = 30$$

$$3x^2 - 5(64 - 16x + x^2) = 30$$

$$3x^2 - 320 + 80x - 5x^2 = 30$$

$$-2x^2 + 80x - 350 = 0$$

$$x^2 - 40x + 175 = 0$$

$$(x - 5)(x - 35) = 0$$

$$x = 5 \vee x = 35$$

$$x = 5 \text{ geeft } y = 3 \text{ en } x = 35 \text{ geeft } y = -27$$

Dus de snijpunten zijn $(5, 3)$ en $(35, -27)$.

Bladzijde 25

25 a Een van de brandpunten van de hyperbool is het middelpunt van de richtcirkel, dus $(-4, 0)$ is een brandpunt.

Omdat $(-4, 0)$ een brandpunt is en $(3, 0)$ een top, ligt het middelpunt van de hyperbool op de x -as en geldt $2a = r = 6$, dus $a = 3$. Dus de afstand van het middelpunt van de hyperbool tot zijn toppen is 3. Hieruit volgt dat de punten $(0, 0)$ en $(6, 0)$ het middelpunt zouden kunnen zijn.

Omdat $(-4, 0)$ een brandpunt is kan $(6, 0)$ niet het middelpunt zijn.

Dus de oorsprong is het middelpunt van de hyperbool en omdat de toppen en de brandpunten op de x -as liggen, is de vergelijking van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b $a = 3$, $c = 4$ en $b^2 = c^2 - a^2$ geeft $b^2 = 16 - 9 = 7$.

Dus $b = \sqrt{7}$.

26 a $d(P, F) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{x} - 2\right)^2}$

b $M(-2, -2)$ is het middelpunt van c .

$$d(P, c) = d(P, M) - d(M, c) = \sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2} - 4$$

c $d(P, F) = d(P, c)$ geeft $\sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{x} - 2\right)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2} - 4$

kwadrateren geeft

$$(x-2)^2 + \left(\frac{2}{x} - 2\right)^2 = (x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2 - 8\sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2} + 16$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x} + 4 = x^2 + 4x + 4 + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x} + 4 - 8\sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2} + 16$$

$$-8x - \frac{16}{x} - 16 = -8\sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 = \sqrt{(x+2)^2 + \left(\frac{2}{x} + 2\right)^2}$$

d Stellen van $\frac{2}{x} + 2 = p$ geeft $x + p = \sqrt{(x+2)^2 + p^2}$

kwadrateren geeft

$$x^2 + 2px + p^2 = (x+2)^2 + p^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 + 4x + 4 + p^2$$

$$2px = 4x + 4$$

$$px = 2x + 2$$

$p = \frac{2}{x} + 2$ geeft $\left(\frac{2}{x} + 2\right)x = 2x + 2$

$$2 + 2x = 2x + 2 \text{ klopt}$$

Hiermee is het bewijs geleverd dat voor elke x ongelijk 0 geldt $d(P, F) = d(P, c)$, dus dat de grafiek van de functie $f(x) = \frac{2}{x}$ de hyperbool is met brandpunt $F(2, 2)$ en richtcirkel $c: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$.

$$\begin{aligned} 27 \quad x^2 + y^2 + 10y - 39 &= 0 \\ x^2 + (y + 5)^2 - 25 - 39 &= 0 \\ x^2 + (y + 5)^2 &= 64 \end{aligned}$$

Een van de brandpunten van de hyperbool is $(0, -5)$. Omdat $(0, -5)$ een brandpunt is en $(0, 4)$ een top, ligt het middelpunt van de hyperbool op de y -as en geldt $2b = r = 8$, dus $b = 4$. Hieruit volgt dat de

oorsprong het middelpunt van de hyperbool is, dus dat de vergelijking van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ is.

$$b = 4, c = 5 \text{ en } a^2 = c^2 - b^2 \text{ geeft } a^2 = 25 - 16 = 9.$$

$$\text{Dus de vergelijking is } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1.$$

$$\begin{aligned} 28 \quad A(5, 2) \text{ op de hyperbool } px^2 - qy^2 = 80 \text{ geeft } 25p - 4q &= 80. \\ B(10, -8) \text{ op de hyperbool } px^2 - qy^2 = 80 \text{ geeft } 100p - 64q &= 80 \text{ ofwel } 25p - 16q = 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 25p - 4q = 80 \\ 25p - 16q = 20 \end{cases} & \quad - \\ \hline 12q &= 60 \\ q &= 5 \\ \begin{cases} 25p - 4q = 80 \\ 25p = 100 \end{cases} & \quad - \\ \hline p &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Dit geeft de hyperbool } 4x^2 - 5y^2 = 80 \text{ ofwel } \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, b = 4 \text{ en } c^2 = a^2 + b^2 = 20 + 16 = 36, \text{ dus } c = 6.$$

De toppen zijn $(-2\sqrt{5}, 0)$ en $(2\sqrt{5}, 0)$ en de brandpunten zijn $(-6, 0)$ en $(6, 0)$.

$$29 \quad a \quad 16x^2 - 9y^2 = 144 \text{ ofwel } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25, \text{ dus } c = 5.$$

De toppen zijn $(-3, 0)$ en $(3, 0)$ en de brandpunten zijn $(-5, 0)$ en $(5, 0)$.

b Bij de translatie $(1, 5)$ vervang je x door $x - 1$ en y door $y - 5$.

$$\text{Dus } 16x^2 - 9y^2 = 144 \xrightarrow{\text{translatie } (1, 5)} 16(x - 1)^2 - 9(y - 5)^2 = 144.$$

De toppen van deze hyperbool zijn $(-3 + 1, 0 + 5) = (-2, 5)$ en $(3 + 1, 0 + 5) = (4, 5)$,

de brandpunten van deze hyperbool zijn $(-5 + 1, 0 + 5) = (-4, 5)$ en $(5 + 1, 0 + 5) = (6, 5)$.

$$c \quad 16(x - 1)^2 - 9(y - 5)^2 = 144$$

$$16(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 10y + 25) = 144$$

$$16x^2 - 32x + 16 - 9y^2 + 90y - 225 = 144$$

$$16x^2 - 9y^2 - 32x + 90y - 353 = 0$$

$$\text{Dus } a = 16, b = -9, c = -32, d = 90 \text{ en } e = -353.$$

Bladzijde 26

$$30 \quad a \quad 5x^2 - 3y^2 = 30 \xrightarrow{\text{translatie } (-1, 3)} 5(x + 1)^2 - 3(y - 3)^2 = 30$$

$$\text{Bij } 5x^2 - 3y^2 = 30 \text{ ofwel } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} = 1 \text{ is } c^2 = a^2 + b^2 = 6 + 10 = 16.$$

De toppen van $5x^2 - 3y^2 = 30$ zijn $(-\sqrt{6}, 0)$ en $(\sqrt{6}, 0)$ en de brandpunten $(-4, 0)$ en $(4, 0)$.

Dus van $5(x + 1)^2 - 3(y - 3)^2 = 30$ zijn de toppen $(-1 - \sqrt{6}, 3)$ en $(-1 + \sqrt{6}, 3)$ en de brandpunten $(-5, 3)$ en $(3, 3)$.

$$b \quad 11x^2 - 5y^2 + 44x - 10y - 16 = 0$$

$$11x^2 + 44x - 5y^2 - 10y - 16 = 0$$

$$11(x^2 + 4x) - 5(y^2 + 2y) - 16 = 0$$

$$11((x + 2)^2 - 4) - 5((y + 1)^2 - 1) - 16 = 0$$

$$11(x + 2)^2 - 44 - 5(y + 1)^2 + 5 - 16 = 0$$

$$11(x + 2)^2 - 5(y + 1)^2 = 55$$

$$11x^2 - 5y^2 = 55 \xrightarrow{\text{translatie } (-2, -1)} 11(x + 2)^2 - 5(y + 1)^2 = 55$$

$$\text{Bij } 11x^2 - 5y^2 = 55 \text{ ofwel } \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{11} = 1 \text{ is } c^2 = a^2 + b^2 = 5 + 11 = 16.$$

De toppen van $11x^2 - 5y^2 = 55$ zijn $(-\sqrt{5}, 0)$ en $(\sqrt{5}, 0)$ en de brandpunten $(-4, 0)$ en $(4, 0)$.

Dus van $11(x + 2)^2 - 5(y + 1)^2 = 55$ zijn de toppen $(-2 - \sqrt{5}, -1)$ en $(-2 + \sqrt{5}, -1)$ en de brandpunten $(-6, -1)$ en $(2, -1)$.

c $7x^2 - 2y^2 - 28x + 16y + 10 = 0$

$$7x^2 - 28x - 2y^2 + 16y + 10 = 0$$

$$7(x^2 - 4x) - 2(y^2 - 8y) + 10 = 0$$

$$7((x-2)^2 - 4) - 2((y-4)^2 - 16) + 10 = 0$$

$$7(x-2)^2 - 28 - 2(y-4)^2 + 32 + 10 = 0$$

$$7(x-2)^2 - 2(y-4)^2 = -14$$

$$7x^2 - 2y^2 = -14 \xrightarrow{\text{translatie } (2, 4)} 7(x-2)^2 - 2(y-4)^2 = -14$$

Bij $7x^2 - 2y^2 = -14$ ofwel $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = -1$ is $c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 7 = 9$.

De toppen van $7x^2 - 2y^2 = -14$ zijn $(0, -\sqrt{7})$ en $(0, \sqrt{7})$ en de brandpunten $(0, -3)$ en $(0, 3)$.

Dus van $7(x-2)^2 - 2(y-4)^2 = -14$ zijn de toppen $(2, 4 - \sqrt{7})$ en $(2, 4 + \sqrt{7})$ en de brandpunten $(2, 1)$ en $(2, 7)$.

31 a $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 1$$

b Bij $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 1$ delen door $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ geeft $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{y}{3}}$.

Als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow \infty$, dan is de limiet van $\frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{y}{3}}$ gelijk aan 0.

Dit geeft $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0$

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2}$$

$$2y = 3x$$

$$y = \frac{3}{2}x$$

c Bij $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 1$ delen door $\frac{x}{2} - \frac{y}{3}$ geeft $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{\frac{x}{2} - \frac{y}{3}}$.

Als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow -\infty$, dan is de limiet van $\frac{1}{\frac{x}{2} - \frac{y}{3}}$ gelijk aan 0.

Dit geeft $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$

$$\frac{y}{3} = -\frac{x}{2}$$

$$2y = -3x$$

$$y = -\frac{3}{2}x$$

d Uit b volgt: als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow \infty$ nadert de hyperbool de lijn $y = \frac{3}{2}x$.

Uit c volgt: als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow -\infty$ nadert de hyperbool de lijn $y = -\frac{3}{2}x$.

Dus de lijnen $y = \frac{3}{2}x$ en $y = -\frac{3}{2}x$ zijn de scheve asymptoten van de hyperbool $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Bladzijde 27

32 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ofwel $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$

Bij $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$ delen door $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ geeft $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$.

Als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow -\infty$, dan is de limiet van $\frac{1}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$ gelijk aan 0.

Dit geeft $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a}$$

$$ay = -bx$$

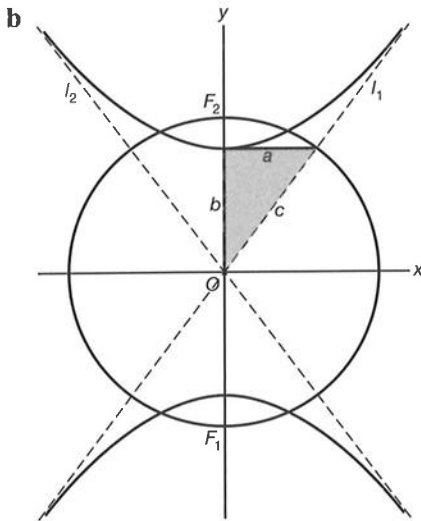
$$y = -\frac{b}{a}x$$

Als $x \rightarrow \infty$ en $y \rightarrow -\infty$ nadert de hyperbool de lijn $y = -\frac{b}{a}x$.

Dus de lijn $y = -\frac{b}{a}x$ is scheve asymptoot van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Bladzijde 28

- 33 a** De toppen zijn $T_1(-a, 0)$ en $T_2(a, 0)$. Vanuit T_2 verticaal omhoog betekent snijden van de asymptoot $y = \frac{b}{a}x$ met de lijn $x = a$. Dit geeft $y = \frac{b}{a} \cdot a = b$. De verticale afstand van een top tot een asymptoot is dus b .



Dus de asymptoten van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ zijn de lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$.

- 34 a** $a = 4$ en $b = 3$, dus $y = \frac{3}{4}x$ en $y = -\frac{3}{4}x$.

b $16x^2 - 25y^2 = 400$ ofwel $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a = 5$ en $b = 4$, dus $y = \frac{4}{5}x$ en $y = -\frac{4}{5}x$.

c $x^2 - 9y^2 + 9 = 0$

$$x^2 - 9y^2 = -9$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$$

$a = 3$ en $b = 1$, dus $y = \frac{1}{3}x$ en $y = -\frac{1}{3}x$.

d $a = 4$, $c = 5$ en $b^2 = c^2 - a^2$ geeft $b^2 = 25 - 16 = 9$, dus $b = 3$.

Dus $y = \frac{3}{4}x$ en $y = -\frac{3}{4}x$.

e $b = 2$, $c = 3$ en $a^2 = c^2 - b^2$ geeft $a^2 = 9 - 4 = 5$, dus $a = \sqrt{5}$.

Dus $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x = \frac{2}{5}x\sqrt{5}$ en $y = -\frac{2}{5}x\sqrt{5}$.

- 35 a** $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, dus $a = 2b$.

Substitutie in $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ geeft $\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

door $(10, 4)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{100}{4b^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \\ \frac{25}{b^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{b^2} = 1 \\ b^2 = 9 \end{array} \right.$

Dus $b = 3$ en $a = 2b = 6$.

b $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 9 = 45$, dus $c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

De toppen zijn $(-6, 0)$ en $(6, 0)$ en de brandpunten zijn $(-3\sqrt{5}, 0)$ en $(3\sqrt{5}, 0)$.

36 a $\frac{b}{a} = 3$, dus $b = 3a$.

$$\text{Substitutie in } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ geeft } \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9a^2} = 1 \\ \text{door } (3, 3\sqrt{5}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{9}{a^2} - \frac{45}{9a^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} - \frac{5}{a^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} = 1 \\ a^2 = 4 \end{array}$$

Dus $a = 2$ en $b = 3a = 6$.

Dit geeft $h_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Ga je uit van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, dan krijg je $a^2 = -4$ en dat kan niet.

b $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 4 = 40$, dus $c = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

De brandpunten van h_1 zijn $(-2\sqrt{10}, 0)$ en $(2\sqrt{10}, 0)$.

c $a = b = 2\sqrt{10}$, dus $h_2: \frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{40} = 1$.

37 I is een parabool door het ontbreken van een term met x^2 .

II is een cirkel door de gelijke coëfficiënten van x^2 en y^2 .

III is een ellips door de gelijke tekens van de verschillende coëfficiënten van x^2 en y^2 .

IV is een hyperbool door de verschillende tekens van de coëfficiënten van x^2 en y^2 .

Bladzijde 29

38 a $y^2 - 6x + 8y + 28 = 0$

$$y^2 + 8y - 6x + 28 = 0$$

$$(y + 4)^2 - 16 - 6x + 28 = 0$$

$$(y + 4)^2 = 6x - 12$$

$$(y + 4)^2 = 6(x - 2)$$

Parabool met top $(2, -4)$ en brandpunt $F(\frac{3}{2} + 2, -4) = F(3\frac{1}{2}, -4)$.

b $x^2 + 9y^2 + 2x - 8 = 0$

$$x^2 + 2x + 9y^2 - 8 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + 9y^2 - 8 = 0$$

$$(x + 1)^2 + 9y^2 = 9$$

$$\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Ellips met middelpunt $(-1, 0)$ en toppen $(-3 - 1, 0) = (-4, 0)$, $(3 - 1, 0) = (2, 0)$, $(-1, -1)$ en $(-1, 1)$.

$$a^2 > b^2, \text{ dus } c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8.$$

De brandpunten zijn $(-2\sqrt{2} - 1, 0)$ en $(2\sqrt{2} - 1, 0)$.

c $x^2 - 9y^2 + 4x - 5 = 0$

$$x^2 + 4x - 9y^2 - 5 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 4 - 9y^2 - 5 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 9y^2 = 9$$

$$\frac{(x + 2)^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$$

Hyperbool met middelpunt $(-2, 0)$ en toppen $(-3 - 2, 0) = (-5, 0)$ en $(3 - 2, 0) = (1, 0)$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10$$

De brandpunten zijn $(-\sqrt{10} - 2, 0)$ en $(\sqrt{10} - 2, 0)$.

De asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{1}{3}(x + 2)$ en $y = -\frac{1}{3}(x + 2)$, ofwel $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ en $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

Bladzijde 30

39 a $4x^2 + 4y^2 + 2x - 12y - 15 = 0$

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - 3y - 3\frac{3}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 - 3y - 3\frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} - 3\frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{97}{16}$$

Cirkel met middelpunt $\left(-\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}\right)$ en straal $\frac{1}{4}\sqrt{97}$.

b $4x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$

$$4x^2 - 8x + y^2 + 8y + 16 = 0$$

$$4(x^2 - 2x) + (y + 4)^2 = 0$$

$$4((x - 1)^2 - 1) + (y + 4)^2 = 0$$

$$4(x - 1)^2 - 4 + (y + 4)^2 = 0$$

$$4(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 4)^2}{4} = 1$$

Ellips met middelpunt $(1, -4)$ en toppen $(-1 + 1, -4) = (0, -4)$, $(1 + 1, -4) = (2, -4)$,

$(1, -2 - 4) = (1, -6)$ en $(1, 2 - 4) = (1, -2)$.

$$a^2 < b^2, \text{ dus } c^2 = b^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$$

De brandpunten zijn $(1, -\sqrt{3} - 4)$ en $(1, \sqrt{3} - 4)$.

c $x^2 - y^2 + 4x + 8y - 20 = 0$

$$x^2 + 4x - y^2 + 8y - 20 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 4 - (y^2 - 8y) - 20 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 4 - ((y - 4)^2 - 16) - 20 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 4 - (y - 4)^2 + 16 - 20 = 0$$

$$(x + 2)^2 - (y - 4)^2 = 8$$

$$\frac{(x + 2)^2}{8} - \frac{(y - 4)^2}{8} = 1$$

Orthogonale hyperbool met middelpunt $(-2, 4)$ en toppen $(-2\sqrt{2} - 2, 4)$ en $(2\sqrt{2} - 2, 4)$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16$$

De brandpunten zijn $(-4 - 2, 4) = (-6, 4)$ en $(4 - 2, 4) = (2, 4)$.

De asymptoten zijn de lijnen $y - 4 = x + 2$ en $(y - 4) = -(x + 2)$, ofwel $y = x + 6$ en $y = -x + 2$.

13.3 Raaklijnen en poollijnen**Bladzijde 32**

40 a $y(x) = \sqrt{10 - x^2}$ geeft $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{10 - x^2}} \cdot -2x = \frac{-x}{\sqrt{10 - x^2}} = -\frac{x}{y}$

b $y'(x) = -\frac{x}{y}$

$$y \cdot y'(x) = -x$$

$$x + y \cdot y'(x) = 0$$

$$2x + 2y \cdot y'(x) = 0$$

Bladzijde 33

41 a $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 15 = 0$ geeft $2x + 2y \cdot y'(x) - 8 + 6 \cdot y'(x) = 0$

$$(2y + 6) \cdot y'(x) = -2x + 8$$

$$y'(x) = \frac{-x + 4}{y + 3}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{-1 + 4}{-2 + 3} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } A(1, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 + b = -2 \\ b = -5 \end{array}$$

Dus $k: y = 3x - 5$ ofwel $k: 3x - y = 5$.

- b** De lijn l raakt de cirkel in B .

$$rc_l = \frac{-7+4}{-2+3} = -3, \text{ dus } rc_n = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} n: y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } B(7, -2) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot 7 + b &= -2 \\ \frac{7}{3} + b &= -2 \\ b &= -4\frac{1}{3} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Dus } n: y = \frac{1}{3}x - 4\frac{1}{3} \text{ ofwel } n: x - 3y = 13.$$

- 42 a** $(x-1)^2 + 2(y+3)^2 = 18$ geeft $2(x-1) + 4(y+3) \cdot y'(x) = 0$

$$4(y+3) \cdot y'(x) = -2(x-1)$$

$$y'(x) = \frac{-2(x-1)}{4(y+3)} = \frac{-x+1}{2(y+3)}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{-5+1}{2 \cdot (-4+3)} = \frac{-4}{2 \cdot -1} = 2.$$

$$\begin{aligned} y = 2x + b \\ \text{door } A(5, -4) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 2 \cdot 5 + b &= -4 \\ 10 + b &= -4 \\ b &= -14 \end{aligned} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = 2x - 14 \text{ ofwel } k: 2x - y = 14.$$

- b** $2x^2 + 5y^2 + 8x - 30y + 16 = 0$ geeft $4x + 10y \cdot y'(x) + 8 - 30 \cdot y'(x) = 0$

$$(10y - 30) \cdot y'(x) = -4x - 8$$

$$y'(x) = \frac{-4x-8}{10y-30} = \frac{-2x-4}{5y-15}$$

De lijn l raakt de ellips in B .

$$rc_l = \frac{-2 \cdot -6 - 4}{5 \cdot 4 - 15} = \frac{12-4}{20-15} = \frac{8}{5}, \text{ dus } rc_n = -\frac{5}{8}.$$

$$\begin{aligned} n: y = -\frac{5}{8}x + b \\ \text{door } B(-6, 4) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -\frac{5}{8} \cdot -6 + b &= 4 \\ \frac{15}{4} + b &= 4 \end{aligned} \right.$$

$$b = \frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } n: y = -\frac{5}{8}x + \frac{1}{4} \text{ ofwel } n: 5x + 8y = 2.$$

- 43 a** $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 15 = 0$

$$4x^2 + 8x - y^2 + 4y - 15 = 0$$

$$4(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) - 15 = 0$$

$$4((x+1)^2 - 1) - ((y-2)^2 - 4) - 15 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 - (y-2)^2 + 4 - 15 = 0$$

$$4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 15$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{15}{4}} - \frac{(y-2)^2}{15} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{15}{4} + 15 = \frac{75}{4}$$

Middelpunt $(-1, 2)$, toppen $(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{15}, 2)$ en $(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{15}, 2)$ en brandpunten $(-1 - 2\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2)$ en $(-1 + 2\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2)$.

- b** Van $4x^2 - y^2 = 15$ ofwel $\frac{x^2}{\frac{15}{4}} - \frac{y^2}{15} = 1$ zijn de asymptoten $y = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{15}{4}}}x = \frac{1}{2}\sqrt{15}x = 2x$ en $y = -2x$.

Dus van $4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 15$ zijn de asymptoten $y-2 = 2(x+1)$ en $y-2 = -2(x+1)$, ofwel $y = 2x+4$ en $y = -2x$.

- c** $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 15 = 0$ geeft $8x - 2y \cdot y'(x) + 8 + 4 \cdot y'(x) = 0$

$$(-2y+4) \cdot y'(x) = -8x-8$$

$$y'(x) = \frac{-8x-8}{-2y+4} = \frac{-4x-4}{-y+2}$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{-4 \cdot 3 - 4}{-9+2} = \frac{-16}{-7} = 2\frac{2}{7}.$$

$$\begin{aligned} y = 2\frac{2}{7}x + b \\ \text{door } A(3, 9) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 2\frac{2}{7} \cdot 3 + b &= 9 \\ 6\frac{6}{7} + b &= 9 \end{aligned} \right.$$

$$b = 2\frac{1}{7}$$

$$\text{Dus } k: y = 2\frac{2}{7}x + 2\frac{1}{7} \text{ ofwel } k: -16x + 7y = 15.$$

d De lijn l raakt de hyperbool in B .

$$rc_l = \frac{-4 \cdot 1 - 4}{-3 + 2} = \frac{-4 - 4}{-1} = 8, \text{ dus } rc_n = -\frac{1}{8}.$$

$$\begin{aligned} n: y = -\frac{1}{8}x + b \\ \text{door } B(1, 3) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{8} \cdot 1 + b &= 3 \\ b &= 3\frac{1}{8} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Dus } n: y = -\frac{1}{8}x + 3\frac{1}{8} \text{ ofwel } n: x + 8y = 25.$$

Bladzijde 34

44 a $x^2 + y^2 = r^2$ geeft $2x + 2y \cdot y'(x) = 0$
 $2y \cdot y'(x) = -2x$
 $y'(x) = -\frac{x}{y}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = -\frac{x_A}{y_A}$.

$$\begin{aligned} y = -\frac{x_A}{y_A}x + b \\ \text{door } A(x_A, y_A) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} -\frac{x_A}{y_A} \cdot x_A + b &= y_A \\ b &= y_A + \frac{x_A^2}{y_A} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{x_A}{y_A}x + y_A + \frac{x_A^2}{y_A}.$$

b $k: y = -\frac{x_A}{y_A}x + y_A + \frac{x_A^2}{y_A}$

$$k: y_A y = -x_A x + y_A^2 + \frac{x_A^2}{y_A}$$

$$k: x_A x + y_A y = x_A^2 + y_A^2$$

$$A(x_A, y_A) \text{ is een punt van } c: x^2 + y^2 = r^2, \text{ dus } x_A^2 + y_A^2 = r^2.$$

$$\text{En zo krijg je de vergelijking } k: x_A x + y_A y = r^2.$$

Bladzijde 36

45 a $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ geeft $2ax + 2by \cdot y'(x) + c + d \cdot y'(x) = 0$
 $(2by + d) \cdot y'(x) = -2ax - c$
 $y'(x) = \frac{-2ax - c}{2by + d}$

$$k \text{ raakt } K \text{ in } A(x_A, y_A) \text{ geeft } rc_k = \frac{-2ax_A - c}{2by_A + d}.$$

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = \frac{-2ax_A - c}{2by_A + d}$.

$$\begin{aligned} y = \frac{-2ax_A - c}{2by_A + d}x + b \\ \text{door } A(x_A, y_A) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{-2ax_A - c}{2by_A + d} \cdot x_A + b &= y_A \\ b &= y_A + \frac{2ax_A + c}{2by_A + d} \cdot x_A \end{aligned} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{-2ax_A - c}{2by_A + d}x + y_A + \frac{2ax_A + c}{2by_A + d} \cdot x_A.$$

$$\text{Dit geeft } y(2by_A + d) = x(-2ax_A - c) + y_A(2by_A + d) + x_A(2ax_A + c)$$

$$2by_A y + dy = -2ax_A x - cx + 2by_A^2 + dy_A + 2ax_A^2 + cx_A$$

$$2ax_A x + 2by_A y - cx_A + cx - dy_A + dy = 2by_A^2 + 2ax_A^2$$

$$2ax_A x + 2by_A y - cx_A + cx - dy_A + dy = 2(ax_A^2 + by_A^2) \dots (1)$$

$$A(x_A, y_A) \text{ op } K \text{ geeft } ax_A^2 + by_A^2 = -cx_A - dy_A - e \dots (2)$$

$$\text{Uit (1) en (2) volgt } 2ax_A x + 2by_A y - cx_A + cx - dy_A + dy = 2(-cx_A - dy_A - e)$$

$$2ax_A x + 2by_A y - cx_A + cx - dy_A + dy = -2cx_A - 2dy_A - 2e$$

$$2ax_A x + 2by_A y + cx_A + cx + dy_A + dy + 2e = 0$$

$$ax_A x + by_A y + \frac{1}{2}cx_A + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}dy_A + \frac{1}{2}dy + e = 0$$

- 46 a** De poollijn van A is $x_A x + y_A y - 2x_A - 2x - y_A - y = 0$.
 $A(1, 4)$ geeft $x + 4y - 2 - 2x - 4 - y = 0$ ofwel $x = 3y - 6$.
 Substitutie van $x = 3y - 6$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ geeft
 $(3y - 6)^2 + y^2 - 4(3y - 6) - 2y = 0$
 $9y^2 - 36y + 36 + y^2 - 12y + 24 - 2y = 0$
 $10y^2 - 50y + 60 = 0$
 $y^2 - 5y + 6 = 0$
 $(y - 2)(y - 3) = 0$
 $y = 2 \vee y = 3$
 $y = 2$ geeft $x = 0$ en $y = 3$ geeft $x = 3$.
 Raaklijn in $(0, 2)$ is $0 + 2y - 0 - 2x - 2 - y = 0$ ofwel $-2x + y = 2$.
 Raaklijn in $(3, 3)$ is $3x + 3y - 6 - 2x - 3 - y = 0$ ofwel $x + 2y = 9$.
- b** De poollijn van B is $y_B y - y_B - y = \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{2}x - 10$.
 $B(0, 1)$ geeft $y - 1 - y = \frac{1}{2}x - 10$ ofwel $x = 6$.
 Substitutie van $x = 6$ in $y^2 - 2y = 3x - 10$ geeft $y^2 - 2y = 18 - 10$
 $y^2 - 2y - 8 = 0$
 $(y + 2)(y - 4) = 0$
 $y = -2 \vee y = 4$
 Raaklijn in $(6, -2)$ is $-2y + 2 - y = 9 + \frac{1}{2}x - 10$ ofwel $x + 2y = 2$.
 Raaklijn in $(6, 4)$ is $4y - 4 - y = 9 + \frac{1}{2}x - 10$ ofwel $-x + 2y = 2$.
- c** De poollijn van C is $x_C x + 8y_C y = 24$.
 $C(8, -1)$ geeft $8x - 8y = 24$ ofwel $x = y + 3$.
 Substitutie van $x = y + 3$ in $x^2 + 8y^2 = 24$ geeft
 $(y + 3)^2 + 8y^2 = 24$
 $y^2 + 6y + 9 + 8y^2 = 24$
 $9y^2 + 6y - 15 = 0$
 $3y^2 + 2y - 5 = 0$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$
 $y = \frac{-2 - 8}{6} = -1\frac{2}{3} \vee y = \frac{-2 + 8}{6} = 1$
 $y = -1\frac{2}{3}$ geeft $x = 1\frac{1}{3}$ en $y = 1$ geeft $x = 4$.
 Raaklijn in $(1\frac{1}{3}, -1\frac{2}{3})$ is $\frac{1}{3}x - 13\frac{1}{3}y = 24$ ofwel $x - 10y = 18$.
 Raaklijn in $(4, 1)$ is $4x + 8y = 24$ ofwel $x + 2y = 6$.
- d** De poollijn van D is $2x_D x - 3y_D y = 20$.
 $D(-10, -10)$ geeft $-20x + 30y = 20$ ofwel $x = \frac{1}{2}y - 1$.
 Substitutie van $x = \frac{1}{2}y - 1$ in $2x^2 - 3y^2 = 20$ geeft
 $2(\frac{1}{2}y - 1)^2 - 3y^2 = 20$
 $2(\frac{1}{4}y^2 - 3y + 1) - 3y^2 = 20$
 $\frac{1}{2}y^2 - 6y + 2 - 3y^2 = 20$
 $\frac{1}{2}y^2 - 6y - 18 = 0$
 $y^2 - 12y - 36 = 0$
 $(y + 2)(y - 6) = 0$
 $y = -2 \vee y = 6$
 $y = -2$ geeft $x = -4$ en $y = 6$ geeft $x = 8$.
 Raaklijn in $(-4, -2)$ is $-8x + 6y = 20$ ofwel $-4x + 3y = 10$.
 Raaklijn in $(8, 6)$ is $16x - 18y = 20$ ofwel $8x - 9y = 10$.

- 47 a** De poollijn van A is $x_A x + y_A y = r^2$.
 $A(r\sqrt{2}, 0)$ geeft $r\sqrt{2} \cdot x + 0 = r^2$ ofwel $x = \frac{r^2}{r\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$.
 Substitutie van $x = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ in $x^2 + y^2 = r^2$ geeft $(\frac{1}{2}r\sqrt{2})^2 + y^2 = r^2$
 $\frac{1}{2}r^2 + y^2 = r^2$
 $y^2 = \frac{1}{2}r^2$
 $y = \frac{1}{2}r\sqrt{2} \vee y = -\frac{1}{2}r\sqrt{2}$
 Raaklijn in $(\frac{1}{2}r\sqrt{2}, \frac{1}{2}r\sqrt{2})$ is $\frac{1}{2}r\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}r\sqrt{2} \cdot y = r^2$ ofwel $x + y = r\sqrt{2}$.
 Raaklijn in $(\frac{1}{2}r\sqrt{2}, -\frac{1}{2}r\sqrt{2})$ is $\frac{1}{2}r\sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2}r\sqrt{2} \cdot y = r^2$ ofwel $x - y = r\sqrt{2}$.

(Je kunt opgave 47a ook maken met behulp van een gelijkbenige rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden lengte r hebben.)

- b** De poollijn van B is $x_B x + y_B y = r^2$.
 $B(r, 2r)$ geeft $rx + 2ry = r^2$ ofwel $x = r - 2y$.
 Substitutie van $x = r - 2y$ in $x^2 + y^2 = r^2$ geeft
 $(r - 2y)^2 + y^2 = r^2$
 $r^2 - 4ry + 4y^2 + y^2 = r^2$
 $5y^2 - 4ry = 0$
 $y(5y - 4r) = 0$
 $y = 0 \vee y = \frac{4}{5}r$
 $y = 0$ geeft $x = r$ en $y = \frac{4}{5}r$ geeft $x = r - 1\frac{3}{5}r = -\frac{3}{5}r$.
 Raaklijn in $(r, 0)$ is $rx + 0 = r^2$ ofwel $x = r$.
 Raaklijn in $(-\frac{3}{5}r, \frac{4}{5}r)$ is $-\frac{3}{5}rx + \frac{4}{5}ry = r^2$ ofwel $-3x + 4y = 5r$.

- 48 a** $k: y = -2x + 5$ geeft $2x + y = 5$
 $4x + 2y = 10$
- b** Bij de cirkel $x^2 + y^2 = 10$ is $x_P x + y_P y = 10$ een vergelijking van de poollijn van $P(x_P, y_P)$.
 Als $k: 4x + 2y = 10$ de poollijn van een punt P ten opzichte van de cirkel $x^2 + y^2 = 10$ is, dan is $P(4, 2)$.
- c** $l: y = -x - 4$ geeft $x + y = -4$
 $-2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y = 10$
 Dus $Q(-2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$.
- 49 a** De poollijn van P is ook $y_P y = 2x_P + 2x$.
 $k: y = -x + 3$ ofwel $k: -2y = -6 + 2x$
 Dus $y_P = -2$ en $2x_P = -6$ ofwel $x_P = -3$.
 Dus $P(-3, -2)$.
- b** De poollijn van Q is ook $2x_Q x + 3y_Q y = 30$.
 $l: y = -1\frac{1}{5}x + 2$ geeft $1\frac{1}{5}x + y = 2$
 $18x + 15y = 30$
 Dus $2x_Q = 18$ ofwel $x_Q = 9$ en $3y_Q = 15$ ofwel $y_Q = 5$.
 Dus $Q(9, 5)$.

Bladzijde 37

- 50 a** Stel het raakpunt is $A(x_A, y_A)$. Dit geeft raaklijn $x_A x - a^2 y_A y = -80$.
 $k: x + y = 10$ ofwel $k: -8x - 8y = -80$, dus $x_A = -8$ en $a^2 y_A = 8$.
 A op k , dus $-8 + y_A = 10$ ofwel $y_A = 18$.
 Uit $a^2 y_A = 8$ en $y_A = 18$ volgt $18a^2 = 8$, dus $a^2 = \frac{4}{9}$.
- b** Stel het raakpunt is $B(x_B, y_B)$. Dit geeft raaklijn $b^2 x_B x - 8y_B y = 100$.
 $l: 3x - 4y = 10$ ofwel $l: 30x - 40y = 100$, dus $b^2 x_B = 30$ en $8y_B = 40$, dus $y_B = 5$.
 B op l , dus $3x_B - 4 \cdot 5 = 10$
 $3x_B - 20 = 10$
 $3x_B = 30$
 $x_B = 10$
 Uit $b^2 x_B = 30$ en $x_B = 10$ volgt $10b^2 = 30$, dus $b^2 = 3$.
- 51** De poollijn van P is ook $x_P x - a^2 y_P y = 6$.
 $P(1, \frac{1}{5})$ geeft $x - \frac{1}{5}a^2 y = 6$.
 $x - 2y = c$ en $x - \frac{1}{5}a^2 y = 6$ geeft $\frac{1}{5}a^2 = 2$ ofwel $a^2 = 10$ en $c = 6$.
 $x - 2y = 6$ ofwel $x = 2y + 6$ snijden met $x^2 - 10y^2 = 6$ geeft
 $(2y + 6)^2 - 10y^2 = 6$
 $4y^2 + 24y + 36 - 10y^2 = 6$
 $-6y^2 + 24y + 30 = 0$
 $y^2 - 4y - 5 = 0$
 $(y + 1)(y - 5) = 0$
 $y = -1 \vee y = 5$
 $y = -1$ geeft $x = 4$ en $y = 5$ geeft $x = 16$.
 De snijpunten zijn $(4, -1)$ en $(16, 5)$.

- 52 De poollijn van P is ook $px + (y - q)(y - q) = 52$.

$$P(5, 1) \text{ geeft } 5px + (1 - q)(y - q) = 52$$

$$5px + (1 - q)y - (1 - q)q = 52$$

$$5px + (1 - q)y = 52 + q - q^2$$

Deze lijn valt samen met l : $15x - 4y = 32$, dus $\frac{5p}{15} = \frac{1 - q}{-4} = \frac{52 + q - q^2}{32}$.

Uit $\frac{1 - q}{-4} = \frac{52 + q - q^2}{32}$ volgt $-4(52 + q - q^2) = 32(1 - q)$

$$-208 - 4q + 4q^2 = 32 - 32q$$

$$4q^2 + 28q - 240 = 0$$

$$q^2 + 7q - 60 = 0$$

$$(q - 5)(q + 12) = 0$$

$$q = 5 \vee q = -12$$

Uit $\frac{5p}{15} = \frac{1 - q}{-4}$ met $q = 5$ volgt $\frac{5p}{15} = \frac{1 - 5}{-4}$

$$\frac{5p}{15} = 1$$

$$p = 3$$

Uit $\frac{5p}{15} = \frac{1 - q}{-4}$ met $q = -12$ volgt $\frac{5p}{15} = \frac{1 - (-12)}{-4}$

$$\frac{5p}{15} = \frac{13}{-4}$$

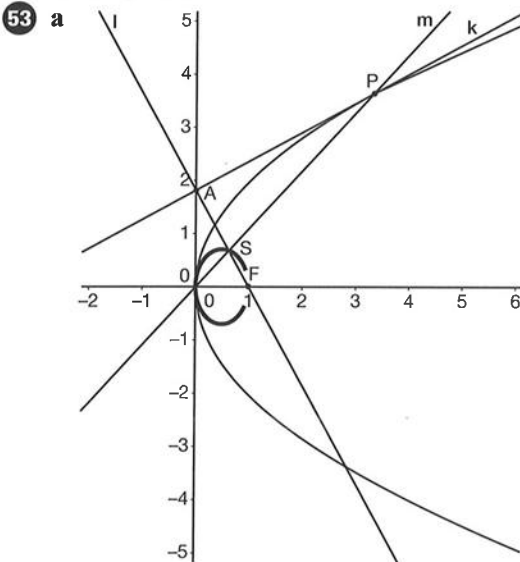
$$-20p = 195$$

$$p = -9\frac{3}{4}$$

Dus $(p = 3 \wedge q = 5) \vee (p = -9\frac{3}{4} \wedge q = -12)$.

13.4 Variabele punten en omwentelingsoppervlakken

Bladzijde 39



Vermoenen: de kromme waarop alle punten S liggen als P over de parabool beweegt is een ellips.

- b De raaklijn k in P is $k: y_P y = 2x_P + 2x$.

$$P(\frac{1}{4}\lambda^2, \lambda) \text{ geeft } k: \lambda y = 2 \cdot \frac{1}{4}\lambda^2 + 2x \text{ ofwel } k: \lambda y = 2x + \frac{1}{2}\lambda^2.$$

- c k snijden met de y -as geeft $\lambda y = 2 \cdot 0 + \frac{1}{2}\lambda^2$

$$\lambda y = \frac{1}{2}\lambda^2$$

$$y = \frac{1}{2}\lambda$$

$$\text{Dus } A(0, \frac{1}{2}\lambda).$$

Het brandpunt van $y^2 = 2x$ is $F(1, 0)$.

$$l \text{ door } A \text{ en } F \text{ geeft } rc_l = \frac{-\frac{1}{2}\lambda}{1} = -\frac{1}{2}\lambda.$$

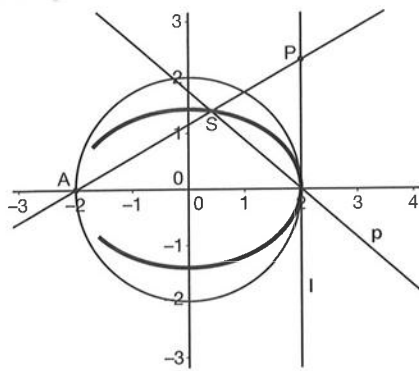
$$\text{Dus } l: y = -\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda.$$

$$m \text{ door } O \text{ en } P \text{ geeft } rc_m = \frac{\lambda}{\frac{1}{4}\lambda^2} = \frac{4}{\lambda}.$$

$$\text{Dus } m: y = \frac{4}{\lambda}x.$$

Bladzijde 40

54 a



Vermoeden: de kromme waarop alle punten S liggen als P over l beweegt is een ellips.

b $P(2, \lambda)$ op l .

$$p: 2x + \lambda y = 4 \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{4 - 2x}{y} \dots (1).$$

$$AP: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\lambda - 0}{2 - (-2)} = \frac{1}{4}\lambda.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{4}\lambda x + b \\ \text{door } A(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4}\lambda \cdot (-2) + b = 0 \\ b = \frac{1}{2}\lambda \end{array}$$

$$\text{Dus } AP: y = \frac{1}{4}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{y}{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}} \dots (2).$$

$$\text{Uit (1) en (2) volgt } \frac{4 - 2x}{y} = \frac{y}{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$$

$$y^2 = (4 - 2x)\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$$

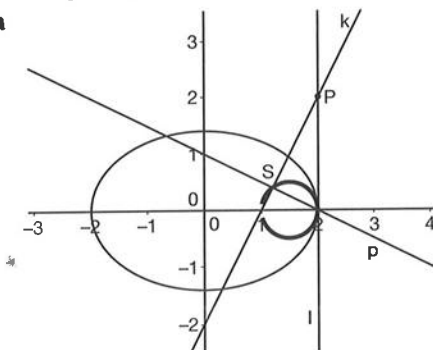
$$y^2 = x + 2 - \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 2$$

$$\text{Dus } K: x^2 + 2y^2 = 4.$$

Bladzijde 41

55 a



Vermoeden: de kromme K is een cirkel.

b $P(2, \lambda)$ op l .

$$p: 2x + 2\lambda y = 4 \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{-x+2}{y} \dots (1).$$

$$p: 2x + 2\lambda y = 4 \text{ ofwel } p: y = \frac{-1}{\lambda}x + \frac{2}{\lambda}.$$

$$k \perp p, \text{ dus } rc_k \cdot rc_p = -1$$

$$rc_k \cdot \frac{-1}{\lambda} = -1$$

$$rc_k = \lambda$$

$$k: y = ax + b \text{ met } a = rc_k = \lambda.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \lambda x + b \\ \text{door } P(2, \lambda) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\lambda + b = \lambda \\ b = -\lambda \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \lambda x - \lambda \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{y}{x-1} \dots (2).$$

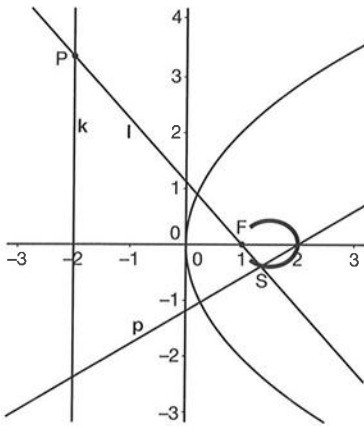
$$\text{Uit (1) en (2) volgt } \frac{y}{x-1} = \frac{-x+2}{y}$$

$$y^2 = (x-1)(-x+2)$$

$$y^2 = -x^2 + 2x + x - 2$$

$$\text{Dus } K: x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0.$$

56 a

Vermoeden: de kromme K is een ellips.

$$\text{b } p: \lambda y = -4 + 2x \text{ en dit geeft } \lambda = \frac{-4+2x}{y} \dots (1).$$

$$P(-2, \lambda) \text{ op } k \text{ en } F(1, 0) \text{ is het brandpunt van } y^2 = 4x.$$

$$k: y = ax + b \text{ door } P \text{ en } F \text{ geeft } a = \frac{-\lambda}{1-2} = \frac{1}{3}\lambda.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}\lambda x + b \\ \text{door } P(-2, \lambda) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3}\lambda \cdot 2 + b = \lambda \\ \frac{2}{3}\lambda + b = \lambda \\ b = \frac{1}{3}\lambda \end{array}$$

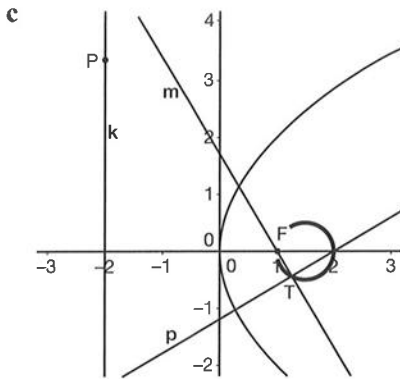
$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{3}\lambda x + \frac{1}{3}\lambda \text{ ofwel } \lambda = \frac{3y}{1-x} \dots (2).$$

$$\text{Uit (1) en (2) volgt } \frac{3y}{1-x} = \frac{-4+2x}{y}$$

$$3y^2 = (-4+2x)(1-x)$$

$$3y^2 = -4 + 4x + 2x - 2x^2$$

$$\text{Dus } K: 2x^2 + 3y^2 - 6x + 4 = 0.$$



Vermoeden: de kromme L is een cirkel.

d $p: \lambda y = -4 + 2x$ ofwel $p: y = \frac{2}{\lambda}x - \frac{4}{\lambda}$.

$m \perp p$, dus $rc_m \cdot rc_p = -1$

$$rc_m \cdot \frac{2}{\lambda} = -1$$

$$rc_m = -\frac{1}{2}\lambda$$

$m: y = ax + b$ met $a = rc_m = -\frac{1}{2}\lambda$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}\lambda x + b \\ \text{door } F(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\lambda \cdot 1 + b = 0 \\ b = \frac{1}{2}\lambda \end{array}$$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{2}\lambda$ ofwel $\lambda = \frac{2y}{1-x}$... (3).

Uit (1) en (3) volgt $\frac{2y}{1-x} = \frac{-4+2x}{y}$
 $2y^2 = (-4+2x)(1-x)$
 $2y^2 = -4 + 4x + 2x - 2x^2$

Dus $L: x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$.

57 $l: x - 2y + 4 = 0$ ofwel $l: y = \frac{1}{2}x + 2$, dus $rc_l = \frac{1}{2}$.
 $x = \lambda$ geeft $y = \frac{1}{2}\lambda + 2$, dus $P(\lambda, \frac{1}{2}\lambda + 2)$.

$p: \lambda x + 4(\frac{1}{2}\lambda + 2)y = 16$

$$\lambda x + 2\lambda y + 8y = 16$$

$$(2\lambda + 8)y = -\lambda x + 16$$

$$y = \frac{-\lambda}{2\lambda + 8}x + \frac{16}{2\lambda + 8}$$

Dus $rc_p = \frac{-\lambda}{2\lambda + 8}$.

$l \perp p$, dus $rc_l \cdot rc_p = -1$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-\lambda}{2\lambda + 8} = -1$$

$$\frac{\lambda}{2\lambda + 8} = 2$$

$$4\lambda + 16 = \lambda$$

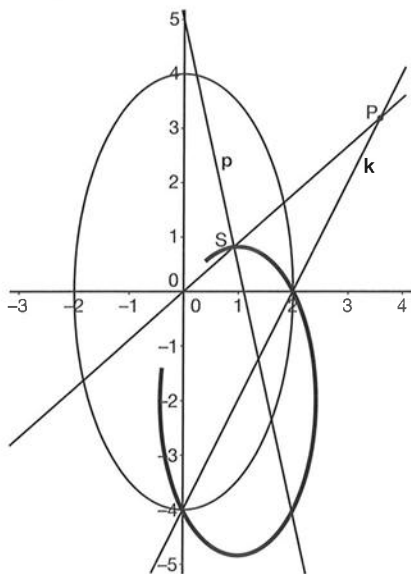
$$3\lambda = -16$$

$$\lambda = -5\frac{1}{3}$$

Dit geeft $P(-5\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Bladzijde 42

58 a



Vermoeden: de kromme K is een ellips.

b $x = \lambda$ geeft $y = 2\lambda - 4$, dus $P(\lambda, 2\lambda - 4)$.

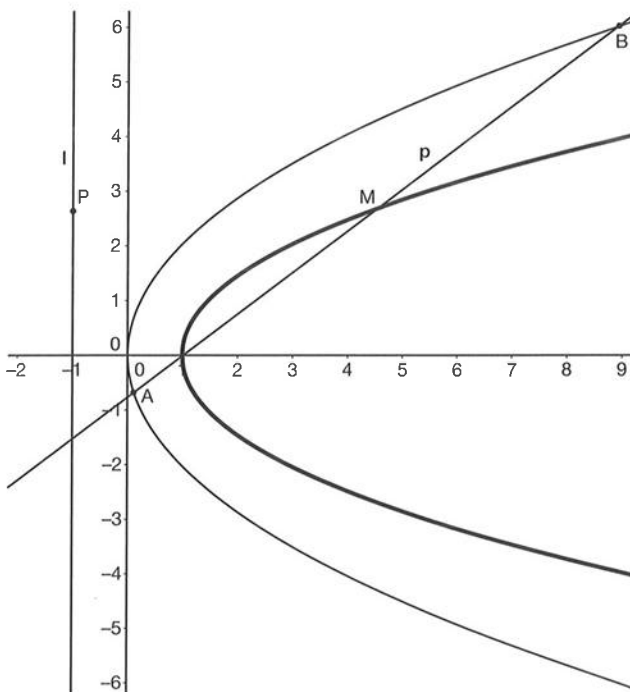
$$\begin{aligned} p: 4\lambda x + (2\lambda - 4)y &= 16 \text{ geeft } 4\lambda x + 2\lambda y - 4y = 16 \\ \lambda(4x + 2y) &= 4y + 16 \\ \lambda &= \frac{2y + 8}{2x + y} \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OP: y &= \frac{2\lambda - 4}{\lambda}x \text{ geeft } \lambda y = (2\lambda - 4)x \\ \lambda y &= 2\lambda x - 4x \\ 2\lambda x - \lambda y &= 4x \\ \lambda(2x - y) &= 4x \\ \lambda &= \frac{4x}{2x - y} \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Uit (1) en (2) volgt } \frac{2y + 8}{2x + y} &= \frac{4x}{2x - y} \\ 4x(2x + y) &= (2y + 8)(2x - y) \\ 8x^2 + 4xy &= 4xy - 2y^2 + 16x - 8y \end{aligned}$$

$$\text{Dus } K: 4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0.$$

59 a



Vermoeden: de kromme K is een parabool.

b Richtlijn $l: x = -1$.

$P(-1, \lambda)$ op l .

$p: \lambda y = -2 + 2x$ ofwel $4x = 2\lambda y + 4$.

$y^2 = 4x$ snijden met p geeft $y^2 = 2\lambda y + 4$

$$y^2 - 2\lambda y - 4 = 0$$

$$D = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 4\lambda^2 + 16$$

$$y = \frac{2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 + 16}}{2} \vee y = \frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 16}}{2}$$

$$y = \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4} \vee y = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}$$

$$y_M = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4} + \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} = \lambda$$

Substitutie van $\lambda = y$ in $4x = 2\lambda y + 4$ geeft $4x = 2y^2 + 4$ ofwel $y^2 = 2x - 2$.

Dus $K: y^2 = 2(x - 1)$.

60 a $\lambda = 2$ geeft het punt $(0, 4, 2)$, dus $A(0, 4, 2)$ ligt in het kegelvlak.

Wentel je de lijn zodat deze in het Oxy -vlak komt te liggen, dan geldt

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en geeft } \lambda = 3 \text{ het punt } (3, 6, 0) \text{ en geeft } \lambda = -7 \text{ het punt } (-7, -14, 0).$$

Dus $B(3, 6, 0)$ en $D(-7, -14, 0)$ liggen in het kegelvlak.

$$\text{Wentel je de lijn over } 180^\circ, \text{ dan geldt } l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en geeft } \lambda = -5 \text{ het punt } (0, -10, 5),$$

dus $C(0, -10, 5)$ ligt in het kegelvlak.

b $A(0, 4, 2)$ geeft $4 \cdot 0^2 - 4^2 + 4 \cdot 2^2 = 0 - 16 + 16 = 0$ klopt.

$B(3, 6, 0)$ geeft $4 \cdot 3^2 - 6^2 + 4 \cdot 0^2 = 36 - 36 + 0 = 0$ klopt.

$C(0, -10, 5)$ geeft $4 \cdot 0^2 - (-10)^2 + 4 \cdot 5^2 = 0 - 100 + 100 = 0$ klopt.

$D(-7, -14, 0)$ geeft $4 \cdot (-7)^2 - (-14)^2 + 4 \cdot 0^2 = 196 - 196 + 0 = 0$ klopt.

Dus de coördinaten van de punten A, B, C en D voldoen aan de vergelijking

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0.$$

Bladzijde 43

61 a De doorsnede van het vlak $y = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $M(0, \lambda, 0)$ en straal 2λ .

Voor een punt $P(x, \lambda, z)$ van deze cirkel geldt dus $y = \lambda \wedge x^2 + z^2 = 4\lambda^2$ en hieruit volgt $x^2 + z^2 = 4y^2$.

Dus een vergelijking van het kegelvlak is $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$.

b De doorsnede van het vlak $z = 2\lambda$ en het omwentelingsoppervlak is de cirkel met middelpunt $M(0, 0, 2\lambda)$ en straal λ .

Voor een punt $P(x, y, 2\lambda)$ van deze cirkel geldt dus $z = 2\lambda \wedge x^2 + y^2 = \lambda^2$.

Dit geeft $z = 2\lambda \wedge 4x^2 + 4y^2 = 4\lambda^2$ en hieruit volgt $4x^2 + 4y^2 = z^2$.

Dus een vergelijking van het kegelvlak is $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.

62 a $A(0, \lambda, \frac{1}{2}\lambda^2)$ is een punt van de parabool $x = 0 \wedge z = \frac{1}{2}y^2$.

Voor een punt $P(x, y, \frac{1}{2}\lambda^2)$ van de cirkel met middelpunt $M(0, 0, \frac{1}{2}\lambda^2)$ in het vlak $z = \frac{1}{2}\lambda^2$ geldt $x^2 + y^2 = \lambda^2 \wedge z = \frac{1}{2}\lambda^2$ ofwel $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 \wedge z = \frac{1}{2}\lambda^2$.

Hieruit volgt dat de gevraagde vergelijking $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ is.

b $A(0, 2\lambda^2, \lambda)$ is een punt van de parabool $x = 0 \wedge y = 2z^2$.

Voor een punt $P(x, 2\lambda^2, z)$ van de cirkel met middelpunt $M(0, 2\lambda^2, 0)$ in het vlak $y = 2\lambda^2$ geldt $x^2 + z^2 = \lambda^2 \wedge y = 2\lambda^2$ ofwel $2x^2 + 2z^2 = 2\lambda^2 \wedge y = 2\lambda^2$.

Hieruit volgt dat de gevraagde vergelijking $y = 2x^2 + 2z^2$ is.

63 a $y = \lambda$ geeft $\lambda^2 + 4z^2 = 16$

$$4z^2 = 16 - \lambda^2$$

$$z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2$$

$$z = \sqrt{4 - \frac{1}{4}\lambda^2} \vee z = -\sqrt{4 - \frac{1}{4}\lambda^2}$$

Dus de doorsnede van het omwentelingsoppervlak met het vlak $y = \lambda$ is de cirkel met middelpunt

$$M(0, \lambda, 0) \text{ en straal } \sqrt{4 - \frac{1}{4}\lambda^2}.$$

Voor deze cirkel, die in het vlak $y = \lambda$ ligt, geldt $x^2 + z^2 = r^2$, dus $x^2 + z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2$.

b Voor een punt $P(x, \lambda, z)$ van de cirkel $x^2 + z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2$ geldt $x^2 + z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2 \wedge y = \lambda$.

Dit geeft $x^2 + z^2 = 4 - \frac{1}{4}\lambda^2$.

Dus een vergelijking van de ellipsoïde is $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

c De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is een cirkel met middelpunt

$$M(0, 0, \lambda). \text{ Uit } z = \lambda \text{ en } y^2 + 4z^2 = 16 \text{ volgt } y^2 = 16 - 4\lambda^2$$

$$y = \sqrt{16 - 4\lambda^2} \vee y = -\sqrt{16 - 4\lambda^2}$$

Dus de straal van de cirkel is $y = \sqrt{16 - 4\lambda^2}$.

Voor een punt $P(x, y, \lambda)$ van deze cirkel geldt $x^2 + y^2 = 16 - 4\lambda^2 \wedge z = \lambda$.

Dit geeft $x^2 + y^2 = 16 - 4z^2$.

Dus de gevraagde vergelijking is $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

Bladzijde 44

64 a De doorsnede van het vlak $z = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is een cirkel met middelpunt $M(0, 0, \lambda)$.

Uit $z = \lambda$ en $y^2 - 4z^2 = 4$ volgt $y^2 - 4\lambda^2 = 4$

$$y^2 = 4 + 4\lambda^2$$

$$y = \sqrt{4 + 4\lambda^2} \vee y = -\sqrt{4 + 4\lambda^2}$$

Dus de straal van de cirkel is $\sqrt{4 + 4\lambda^2}$.

Voor een punt $P(x, y, \lambda)$ van de cirkel geldt $x^2 + y^2 = 4 + 4\lambda^2 \wedge z = \lambda$.

Dit geeft $x^2 + y^2 = 4 + 4z^2$.

Dus de gevraagde vergelijking is $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$.

b De doorsnede van het vlak $y = \lambda$ en het omwentelingsoppervlak is een cirkel met middelpunt $M(0, \lambda, 0)$.

Uit $y = \lambda$ en $y^2 - 4z^2 = 4$ volgt $\lambda^2 - 4z^2 = 4$

$$4z^2 = \lambda^2 - 4$$

$$z^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 - 1$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - 1} \vee z = -\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - 1}$$

Dus de straal van de cirkel is $\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - 1}$.

Voor een punt $P(x, \lambda, z)$ van deze cirkel geldt $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 - 1 \wedge y = \lambda$.

Dit geeft $x^2 + z^2 = \frac{1}{4}y^2 - 1$.

Dus de gevraagde vergelijking is $4x^2 - y^2 + 4z^2 = -4$.

Diagnostische toets

Bladzijde 46

1 a Top $O(0, 0)$ en brandpunt $F(8, 0)$, dus $p = 16$.

Een vergelijking is $y^2 = 32x$.

b Brandpunt $F(6, 0)$ en top $T(10, 0)$ dus $p = 8$.

Een vergelijking is $y^2 = -16(x - 10)$.

c Brandpunt $F(4, 2)$ en richtlijn $l: x = -6$, dus top $(-1, 2)$ en $p = 10$.

Een vergelijking is $(y - 2)^2 = 20(x + 1)$.

d Richtlijn $l: y = 4$ en top $T(8, 3)$, dus $p = 2$.

Een vergelijking is $(x - 8)^2 = -4(y - 3)$.

2 a $y^2 - 10y = 2x + 1$

$$(y - 5)^2 - 25 = 2x + 1$$

$$(y - 5)^2 = 2x + 26$$

$$(y - 5)^2 = 2(x + 13)$$

$$T(-13, 5)$$

$$F\left(\frac{1}{2} - 13, 5\right) = F\left(-12\frac{1}{2}, 5\right)$$

$$\text{as } k: y = 5$$

$$\text{richtlijn } l: x = -\frac{1}{2} - 13, \text{ dus } l: x = -13\frac{1}{2}$$

b $y = \frac{1}{8}x^2 + 2x - 4$
 $8y = x^2 + 16x - 32$
 $8y = (x+8)^2 - 64 - 32$
 $(x+8)^2 = 8y + 96$
 $(x+8)^2 = 8(y+12)$
 $T(-8, -12)$
 $F(-8, 2-12) = F(-8, -10)$
 as $k: x = -8$
 richtlijn $l: y = -2 - 12$ dus $l: y = -14$

3 a $a = 3$ en $b = 2$ geeft $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b $a = 6 - 4 = 2$ en $b = 3 - 2 = 1$, dus $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$.

c Het middelpunt is $(8, 2)$.

$a = 2, c = 1$ en $b^2 = a^2 - c^2$ geeft $b^2 = 4 - 1 = 3$, dus $\frac{(x-8)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$.

4 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$
 $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 11 = 0$
 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

Dit is de cirkel met middelpunt $(2, -1)$ en straal 4.

Het andere brandpunt van de ellips is $(2, -1)$.

Het middelpunt van de ellips is $(2, 0)$.

Staande ellips, dus $2b = 4$ geeft $b = 2$.

$c = 1$ en $a^2 = b^2 - c^2$ geeft $a^2 = 4 - 1 = 3$, dus $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

5 a $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y - 71 = 0$
 $4x^2 + 32x + 9y^2 - 18y - 71 = 0$
 $4(x^2 + 8x) + 9(y^2 - 2y) - 71 = 0$
 $4((x+4)^2 - 16) + 9((y-1)^2 - 1) - 71 = 0$
 $4(x+4)^2 - 64 + 9(y-1)^2 - 9 - 71 = 0$
 $4(x+4)^2 + 9(y-1)^2 = 144$

$4x^2 + 9y^2 = 144 \xrightarrow{\text{translatie } (-4, 1)} 4(x+4)^2 + 9(y-1)^2 = 144$

Van $4x^2 + 9y^2 = 144$ ofwel $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ zijn de toppen $(-6, 0)$, $(6, 0)$, $(0, -4)$ en $(0, 4)$ en de brandpunten $(-2\sqrt{5}, 0)$ en $(2\sqrt{5}, 0)$.

Dus van $4(x+4)^2 + 9(y-1)^2 = 144$ zijn de toppen $(-10, 1)$, $(2, 1)$, $(-4, -3)$ en $(-4, 5)$ en de brandpunten $(-4 - 2\sqrt{5}, 1)$ en $(-4 + 2\sqrt{5}, 1)$.

b $6x^2 + y^2 = 30 \xrightarrow{\text{translatie } (-3, 2)} 6(x+3)^2 + (y-2)^2 = 30$

Van $6x^2 + y^2 = 30$ ofwel $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{30} = 1$ zijn de toppen $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$, $(0, -\sqrt{30})$ en $(0, \sqrt{30})$ en de brandpunten $(0, -5)$ en $(0, 5)$.

Dus van $6(x+3)^2 + (y-2)^2 = 30$ zijn de toppen $(-3 - \sqrt{5}, 2)$, $(-3 + \sqrt{5}, 2)$, $(-3, 2 - \sqrt{30})$ en $(-3, 2 + \sqrt{30})$ en de brandpunten $(-3, -3)$ en $(-3, 7)$.

6 a $a = 5$ en $c = 6$ en $b^2 = c^2 - a^2$ geeft $b^2 = 36 - 25 = 11$, dus $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$.

b $a = 1, c = 3$ en $b^2 = c^2 - a^2$ geeft $b^2 = 9 - 1 = 8$, dus $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{c } a = 3 \text{ geeft } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{144}{9} - \frac{36}{b^2} = 1 \\ 16 - \frac{36}{b^2} = 1 \\ \frac{36}{b^2} = 15 \\ b^2 = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} \end{array} \right. \\ \text{door } (12, 6) \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{12}{5}} = 1 \text{ ofwel } 4x^2 - 15y^2 = 36.$$

$$7 \text{ a } 3x^2 - 5y^2 = -30 \xrightarrow{\text{translatie } (2, -2)} 3(x-2)^2 - 5(y+2)^2 = -30$$

$$\text{Bij } 3x^2 - 5y^2 = -30 \text{ ofwel } \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = -1 \text{ is } c^2 = a^2 + b^2 = 10 + 6 = 16.$$

De toppen van $3x^2 - 5y^2 = -30$ zijn $(0, -\sqrt{6})$ en $(0, \sqrt{6})$ en de brandpunten $(0, -4)$ en $(0, 4)$.

Dus van $3(x-2)^2 - 5(y+2)^2 = -30$ zijn de toppen $(2, -2 - \sqrt{6})$ en $(2, -2 + \sqrt{6})$ en de brandpunten $(2, -6)$ en $(2, 2)$.

$$b \quad 2x^2 - 7y^2 - 16x + 28y - 10 = 0$$

$$2x^2 - 16x - 7y^2 + 28y - 10 = 0$$

$$2(x^2 - 8x) - 7(y^2 - 4y) - 10 = 0$$

$$2((x-4)^2 - 16) - 7((y-2)^2 - 4) - 10 = 0$$

$$2(x-4)^2 - 32 - 7(y-2)^2 + 28 - 10 = 0$$

$$2(x-4)^2 - 7(y-2)^2 = 14$$

$$2x^2 - 7y^2 = 14 \xrightarrow{\text{translatie } (4, 2)} 2(x-4)^2 - 7(y-2)^2 = 14$$

$$\text{Bij } 2x^2 - 7y^2 = 14 \text{ ofwel } \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1 \text{ is } c^2 = a^2 + b^2 = 7 + 2 = 9.$$

De toppen van $2x^2 - 7y^2 = 14$ zijn $(-\sqrt{7}, 0)$ en $(\sqrt{7}, 0)$ en de brandpunten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.

Dus van $2(x-4)^2 - 7(y-2)^2 = 14$ zijn de toppen $(4 - \sqrt{7}, 2)$ en $(4 + \sqrt{7}, 2)$ en de brandpunten $(1, 2)$ en $(7, 2)$.

$$8 \text{ a } 4x^2 - 9y^2 = 36 \text{ ofwel } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a = 3 \text{ en } b = 2, \text{ dus } y = \frac{2}{3}x \text{ en } y = -\frac{2}{3}x.$$

$$b \quad b = 4, c = 5 \text{ en } a^2 = c^2 - b^2 \text{ geeft } a^2 = 25 - 16 = 9, \text{ dus } a = 3.$$

$$\text{Dus } y = \frac{1}{3}x \text{ en } y = -\frac{1}{3}x.$$

Bladzijde 47

$$9 \text{ a } x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 2y + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

Cirkel met middelpunt $(-2, -1)$ en straal 1.

$$b \quad x^2 + 8x + 12y = 0$$

$$x^2 + 8x = -12y$$

$$(x+4)^2 - 16 = -12y$$

$$(x+4)^2 = -12y + 16$$

$$(x+4)^2 = -12(y - \frac{4}{3})$$

Parabool met top $(-4, \frac{4}{3})$ en brandpunt $F(-4, -3 + \frac{4}{3}) = F(-4, -\frac{8}{3})$.

$$c \quad 16x^2 - 9y^2 + 32x - 128 = 0$$

$$16x^2 + 32x - 9y^2 - 128 = 0$$

$$16(x^2 + 2x) - 9y^2 - 128 = 0$$

$$16((x+1)^2 - 1) - 9y^2 - 128 = 0$$

$$16(x+1)^2 - 16 - 9y^2 - 128 = 0$$

$$16(x+1)^2 - 9y^2 = 144$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Hyperbool met middelpunt $(-1, 0)$ en toppen $(-3 - 1, 0) = (-4, 0)$ en $(3 - 1, 0) = (2, 0)$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$$

De brandpunten zijn $(-5 - 1, 0) = (-6, 0)$ en $(5 - 1, 0) = (4, 0)$.

De asymptoten zijn de lijnen $y = \frac{1}{3}(x+1)$ en $y = -\frac{1}{3}(x+1)$, ofwel $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ en $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{d } 3x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 50 &= 0 \\ 3x^2 - 30x + 5y^2 + 10y + 50 &= 0 \\ 3(x^2 - 10x) + 5(y^2 + 2y) + 50 &= 0 \\ 3((x-5)^2 - 25) + 5((y+1)^2 - 1) + 50 &= 0 \\ 3(x-5)^2 - 75 + 5(y+1)^2 - 5 + 50 &= 0 \\ 3(x-5)^2 + 5(y+1)^2 &= 30 \end{aligned}$$

Het is een ellips met middelpunt $(5, -1)$.

De toppen zijn $(\sqrt{10} + 5, -1)$, $(-\sqrt{10} + 5, -1)$, $(5, -\sqrt{6} - 1)$ en $(5, \sqrt{6} - 1)$.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 10 - 6 = 4$$

De brandpunten zijn $(-2 + 5, -1) = (3, -1)$ en $(2 + 5, -1) = (7, -1)$.

- 10 a** De raaklijn in A is $x_A x + y_A y + x_A + x + 3y_A + 3y - 10 = 0$.
 $A(1, 1)$ geeft $x + y + 1 + x + 3 + 3y - 10 = 0$ ofwel $2x + 4y = 6$.
 Dus $k: x + 2y = 3$.
- b** De poollijn van B is $x_B x + y_B y + x_B + x + 3y_B + 3y - 10 = 0$.
 $B(3, -6)$ geeft $3x - 6y + 3 + x - 18 + 3y - 10 = 0$ ofwel $4x - 3y = 25$ ofwel $x = \frac{3}{4}y + 6\frac{1}{4}$.
 Substitutie van $x = \frac{3}{4}y + 6\frac{1}{4}$ in $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 10 = 0$ geeft
 $(\frac{3}{4}y + 6\frac{1}{4})^2 + y^2 + 2(\frac{3}{4}y + 6\frac{1}{4}) + 6y - 10 = 0$
 $\frac{9}{16}y^2 + 9\frac{3}{8}y + 39\frac{1}{16} + y^2 + 1\frac{1}{2}y + 12\frac{1}{2} + 6y - 10 = 0$
 $1\frac{9}{16}y^2 + 16\frac{7}{8}y + 41\frac{9}{16} = 0$
 $5y^2 + 54y + 133 = 0$
 $D = 54^2 - 4 \cdot 5 \cdot 133 = 256$
 $y = \frac{-54 \pm 16}{10} = -7 \vee y = \frac{-54 + 16}{10} = -3\frac{4}{5}$
 $y = -7$ geeft $x = 1$ en $y = -3\frac{4}{5}$ geeft $x = 3\frac{2}{5}$.
 Raaklijn in $(1, -7)$ is $m_1: x - 7y + 1 + x - 21 + 3y - 10 = 0$ ofwel $m_1: x - 2y = 15$.
 Raaklijn in $(3\frac{2}{5}, -3\frac{4}{5})$ is $m_2: 3\frac{2}{5}x - 3\frac{4}{5}y + 3\frac{2}{5} + x - 11\frac{2}{5} + 3y - 10 = 0$ ofwel $m_2: 11x - 2y = 45$.
- 11 a** $(x-1)^2 + 10(y+2)^2 = 46$
 $x^2 - 2x + 1 + 10(y^2 + 4y + 4) = 46$
 $x^2 - 2x + 1 + 10y^2 + 40y + 40 = 46$
 $x^2 + 10y^2 - 2x + 40y - 5 = 0$
 De raaklijn in A is $x_A x + 10y_A y - x_A - x + 20y_A + 20y - 5 = 0$.
 $A(7, -3)$ geeft $7x - 30y - 7 - x - 60 + 20y - 5 = 0$ ofwel $6x - 10y = 72$.
 Dus $k: 3x - 5y = 36$.
- b** $4x^2 + 12y^2 + 16x - 24y - 96 = 0$ ofwel $x^2 + 3y^2 + 4x - 6y - 24 = 0$
 De raaklijn in B is $x_B x + 3y_B y + 2x_B + 2x - 3y_B - 3y - 24 = 0$.
 $B(0, 4)$ geeft $12y + 2x - 12 - 3y - 24 = 0$ ofwel $2x + 9y = 36$.
 n snijdt de lijn $2x + 9y = 36$ loodrecht geeft $n: 9x - 2y = c$.
 n door $B(0, 4)$ geeft $c = 9 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -8$.
 Dus $n: 9x - 2y = -8$.
- 12** De poollijn van P is $x_P x - 32y_P y = 112$.
 $P(4, -2)$ geeft $4x + 64y = 112$ ofwel $x = 28 - 16y$.
 Substitutie van $x = 28 - 16y$ in $x^2 - 32y^2 = 112$ geeft
 $(28 - 16y)^2 - 32y^2 = 112$
 $784 - 896y + 256y^2 - 32y^2 = 112$
 $224y^2 - 896y + 672 = 0$
 $y^2 - 4y + 3 = 0$
 $(y-1)(y-3) = 0$
 $y = 1 \vee y = 3$
 $y = 1$ geeft $x = 12$ en $y = 3$ geeft $x = -20$.
 Raaklijn in $(12, 1)$ is $12x - 32y = 112$ ofwel $3x - 8y = 28$.
 Raaklijn in $(-20, 3)$ is $-20x - 96y = 112$ ofwel $5x + 24y = -28$.
- 13** De poollijn van P is ook $4x_P x + 9y_P y = 36$.
 $k: y = -\frac{2}{3}x + 1$ ofwel $k: 2x + 3y = 3$ ofwel $k: 24x + 36y = 36$
 Dus $4x_P = 24$ ofwel $x_P = 6$, en $9y_P = 36$ ofwel $y_P = 4$.
 Dus $P(6, 4)$.

14 $P(\lambda, 6 - \lambda)$ op l .

$$p: \lambda x + (6 - \lambda)y = 12 \text{ geeft } \lambda x + 6y - \lambda y = 12$$

$$\lambda(x - y) = 12 - 6y$$

$$\lambda = \frac{12 - 6y}{x - y} \dots (1)$$

$$OP: y = \frac{6 - \lambda}{\lambda}x \text{ geeft } \lambda y = (6 - \lambda)x$$

$$\lambda y = 6x - \lambda x$$

$$\lambda y + \lambda x = 6x$$

$$\lambda(x + y) = 6x$$

$$\lambda = \frac{6x}{x + y} \dots (2)$$

$$\text{Uit (1) en (2) volgt } \frac{12 - 6y}{x - y} = \frac{6x}{x + y}$$

$$(12 - 6y)(x + y) = 6x(x - y)$$

$$12x + 12y - 6xy - 6y^2 = 6x^2 - 6xy$$

$$\text{Dus } K: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

15 $P(\lambda^2, 2\lambda)$ op $y^2 = 4x$.

$$\text{Raaklijn in } P \text{ is } k: y_P y = 2x_P + 2x.$$

$$\text{Dus } k: 2\lambda y = 2\lambda^2 + 2x \text{ ofwel } k: y = \frac{1}{\lambda}x + \lambda.$$

$$m \perp k, \text{ dus } rc_m \cdot rc_k = -1$$

$$rc_m \cdot \frac{1}{\lambda} = -1$$

$$rc_m = -\lambda$$

$$m: y = ax \text{ met } a = rc_m = -\lambda \text{ geeft } m: y = -\lambda x \text{ en hieruit volgt } \lambda = -\frac{y}{x}.$$

$$k \text{ en } m \text{ snijden geeft } \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{\lambda}x + \lambda \\ \lambda = -\frac{y}{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -\frac{x}{y} \cdot x - \frac{y}{x} \\ xy^2 = -x^3 - y^2 \end{array}$$

$$\text{Dus } K: x^3 + xy^2 + y^2 = 0.$$

16 a $A(0, \lambda^2, 2\lambda)$ is een punt van de parabool $x = 0 \wedge z^2 = 4y$.

Voor een punt $P(x, \lambda^2, z)$ van de cirkel met middelpunt $P(0, \lambda^2, 0)$ in het vlak $y = \lambda^2$

geldt $x^2 + z^2 = 4\lambda^2 \wedge y = \lambda^2$.

Dit geeft $x^2 + z^2 = 4y$.

De gevraagde vergelijking is $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}z^2$.

b $A(0, \lambda^2, 2\lambda)$ is een punt van de parabool $x = 0 \wedge z^2 = 4y$.

Voor een punt $P(x, y, 2\lambda)$ van de cirkel met middelpunt $M(0, 0, 2\lambda)$ in het vlak $z = 2\lambda$

geldt $x^2 + y^2 = \lambda^4 \wedge z = 2\lambda$ ofwel $16x^2 + 16y^2 = 16\lambda^4 \wedge z = 2\lambda$.

Hieruit volgt dat de gevraagde vergelijking $16x^2 + 16y^2 - z^4 = 0$ is.