

12 Continue kansverdelingen

Voorkennis Discrete stochasten

Bladzijde 123

- 1 U = de uitbetaling per spel in euro's.

$$P(U = 3000) = P(5 \text{ vieren}) = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

$$P(U = 200) = P(4 \text{ vieren}) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{1024}$$

$$P(U = 30) = P(3 \text{ vieren}) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{1024}$$

$$P(U = 0) = P(\text{overige gevallen}) = 1 - \frac{1}{1024} - \frac{15}{1024} - \frac{90}{1024} = \frac{918}{1024}$$

u	3000	200	30	0
$P(U = u)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{918}{1024}$

$$E(U) = 3000 \cdot \frac{1}{1024} + 200 \cdot \frac{15}{1024} + 30 \cdot \frac{90}{1024} + 0 \cdot \frac{918}{1024} \approx 8,50$$

L winstverwachting per spel van een speler is $8,50 - 10 = -1,50$ euro, dus per spel kan een speler gemiddeld een verlies van € 1,50 verwachten.

Bladzijde 124

- 2 a 3,0% van de Nederlanders heeft bloedgroep AB, dus 97,0% heeft niet bloedgroep AB.

$$P(\text{niemand heeft bloedgroep AB}) = 0,970^{100} \approx 0,048$$

- b X = het aantal met bloedgroep AB.

X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,03$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \text{binomcdf}(100, 0,03, 2) \approx 0,580$$

- c Y = het aantal met bloedgroep 0.

Y is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,467$.

$$P(Y > 50) = 1 - P(Y \leq 50) = 1 - \text{binomcdf}(100, 0,467, 50) \approx 0,223$$

- d 3,0% + 46,7% = 49,7% heeft bloedgroep AB of bloedgroep 0.

Z = het aantal met bloedgroep AB of bloedgroep 0.

Z is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,497$.

$$P(Z < 40) = P(Z \leq 39) = \text{binomcdf}(100, 0,497, 39) \approx 0,020$$

- 3 a V = het aantal met overgewicht.

V is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = 0,47$.

$$P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80) = 1 - \text{binomcdf}(150, 0,47, 80) \approx 0,051$$

- b 47% + 12% = 59% heeft overgewicht of ernstig overgewicht.

Y = het aantal met overgewicht of ernstig overgewicht.

Y is binomiaal verdeeld met $n = 320$ en $p = 0,59$.

$$P(Y < 180) = P(Y \leq 179) = \text{binomcdf}(320, 0,59, 179) \approx 0,145$$

- c 12% heeft ernstig overgewicht, dus 88% heeft geen ernstig overgewicht.

$$P(\text{niemand heeft ernstig overgewicht}) = 0,88^{30} \approx 0,022$$

Bladzijde 125

- 4 a X = het aantal aardbevingen in een jaar van meer dan 2,0 op de schaal van Richter.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 8$.

$$P(X = 2) = e^{-8} \cdot \frac{8^2}{2!} = \frac{32}{e^8}$$

- b Los op $P(X = n) > 0,10$ ofwel $\text{poissonpdf}(8, n) > 0,10$.

Voer in $y_1 = \text{poissonpdf}(8, x)$.

De tabel geeft

$$x = 5 \text{ en } y_1 = 0,091...$$

$$x = 6 \text{ en } y_1 = 0,122...$$

$$x = 9 \text{ en } y_1 = 0,124...$$

$$x = 10 \text{ en } y_1 = 0,099...$$

Dus $n = 6, 7, 8$ of 9 .

- c $P(X \leq 10) = \text{poissoncdf}(8, 10) \approx 0,816$
 d $P(X \leq 7) = \text{poissoncdf}(8, 7) = 0,452\dots$
 $P(\text{de komende drie jaar elk jaar hoogstens 7 van deze aardbevingen}) = 0,452\dots^3 \approx 0,093$
 e $Y = \text{het aantal aardbevingen in de komende vier jaar van meer dan 2,0 op de schaal van Richter.}$
 Y is poissonverdeeld met $\lambda = 4 \cdot 8 = 32$.
 $P(Y \leq 30) = \text{poissoncdf}(32, 30) \approx 0,406$

12.1 Kansdichtheid en verdelingsfunctie

Bladzijde 126

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int_1^{10} f(x) dx &= \int_1^{10} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{10} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_1^{10} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = \frac{9}{10} = 0,9 \\ \int_1^{100} f(x) dx &= \int_1^{100} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{100} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_1^{100} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{100} = -\frac{1}{100} + 1 = \frac{99}{100} = 0,99 \\ \int_1^{1000} f(x) dx &= \int_1^{1000} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{1000} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_1^{1000} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{1000} = -\frac{1}{1000} + 1 = \frac{999}{1000} = 0,999 \end{aligned}$$

Bladzijde 127

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ a } \int_{\frac{1}{9}}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{9}}^t x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-2x^{\frac{1}{2}}]_{\frac{1}{9}}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_{\frac{1}{9}}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{9}}}\right) = \frac{2}{3} = 6 \\ \text{b } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2 \cdot 1}\right) = \frac{1}{2} \\ \text{c } \int_{-\infty}^3 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^3 (4-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [-1 \cdot 2 \cdot (4-x)^{\frac{1}{2}}]_t^3 = \lim_{t \rightarrow -\infty} [-2\sqrt{4-x}]_t^3 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-2 + 2\sqrt{4-t}) \\ &\text{en deze limiet bestaat niet.} \\ \text{d } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-3)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 (2x-3)^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot -1 \cdot (2x-3)^{-1}\right]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2(2x-3)}\right]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{4x-6}\right]_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4t-6}\right) = \frac{1}{6} \\ \text{e } \int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left(\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t (x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{5\sqrt{x}}\right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{5\sqrt{t}} + \frac{2}{1} + \frac{2}{5 \cdot 1 \cdot 1}\right) = 2 + \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5} \\ \text{f } \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{e^x}\right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^t} + \frac{1}{1}\right) = 1 \\ \textcircled{3} \text{ a } F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \text{ geeft } F'(x) &= -\frac{1}{2}e^{-x^2} \cdot -2x = xe^{-x^2} \\ F'(x) &= f(x), \text{ dus } F \text{ is een primitieve van } f. \\ \text{b } \int_0^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t xe^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2e^{t^2}} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \\ \text{Dus } O(V) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 4 - (0 + 0) = 1$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 0 dx = 0 \text{ en } \int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t 0 dx = 0$$

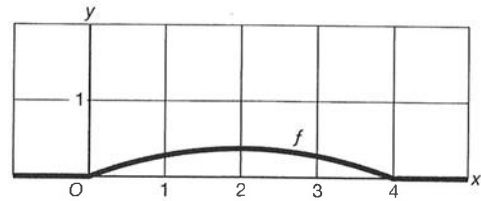
$$\text{Dit geeft } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{\infty} f(x) dx = 0 + \int_0^2 f(x) dx + 0 = \int_0^2 f(x) dx.$$

Bladzijde 129

$\textcircled{5}$ Er geldt $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, zie de figuur hiernaast.

$$\int_0^4 \left(-\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{8}x\right) dx = \left[-\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2\right]_0^4 = -\frac{1}{32} \cdot 64 + \frac{3}{16} \cdot 16 - 0 = 1,$$

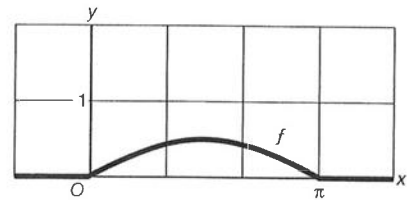
dus f is een kansdichtheid.



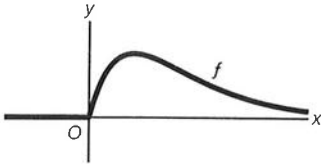
$\textcircled{6}$ Er geldt $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, zie de figuur hiernaast.

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin(x) dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi) + \frac{1}{\pi} \cos(0) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} = 1,$$

dus f is een kansdichtheid.

**Bladzijde 130**

$\textcircled{7}$ a



b $G(x) = (-x - 1)e^{-x}$ geeft $G'(x) = -1 \cdot e^{-x} + (-x - 1) \cdot -e^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$

$G'(x) = g(x)$, dus G is een primitieve van g .

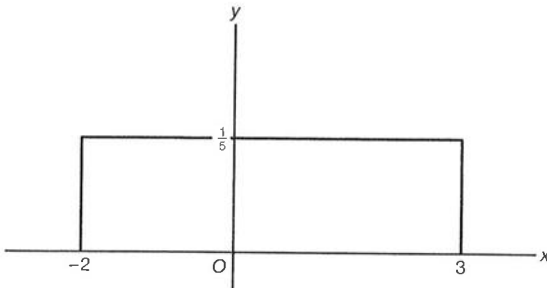
c Voor $x \geq 0$ is $x \geq 0$ en $e^{-x} > 0$, dus $xe^{-x} \geq 0$. Zie verder de figuur van vraag a.

Dus er geldt $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

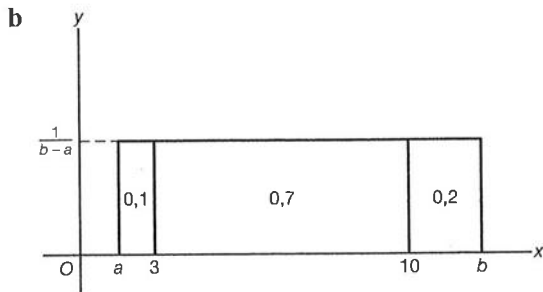
$$\int_0^{\infty} xe^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t xe^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [(-x - 1)e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} ((-t - 1)e^{-t} - (0 - 1)e^0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t} + 1\right) = 1,$$

dus f is een kansdichtheid.

$\textcircled{8}$ a $a = -2$ en $b = 3$ geeft $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < -2 \\ \frac{1}{5} & \text{voor } -2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{voor } x > 3 \end{cases}$



$$P(X \leq 0) = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$



Dus $P(3 \leq X \leq 10) = 0,7$.

De lengte van $[3, 10]$ is 7, dus per eenheid van intervallengte is de kans 0,1.

Dus $a = 3 - 1 = 2$ en $b = 10 + 2 = 12$.

9 a Er moet gelden $\int_p^\infty 2e^{-x} dx = 1$.

$$\int_p^\infty 2e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_p^t 2e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-2e^{-x}]_p^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (-2e^{-t} + 2e^{-p}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{e^t} + \frac{2}{e^p} \right) = \frac{2}{e^p}$$

$\frac{2}{e^p} = 1$ geeft $e^p = 2$, dus $p = \ln(2)$.

b $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq \ln(2) \\ 2e^{-x} & \text{voor } x > \ln(2) \end{cases}$

$\frac{1}{2} < \ln(2)$, dus $P(X < \frac{1}{2}) = 0$.

c $P(X < 1) = \int_{\ln(2)}^1 2e^{-x} dx = [-2e^{-x}]_{\ln(2)}^1 = \left[-\frac{2}{e^x} \right]_{\ln(2)}^1 = -\frac{2}{e} + \frac{2}{2} = 1 - \frac{2}{e}$

10 a Er moet gelden $\int_0^2 \frac{p}{(x+2)^2} dx = 1$.

$$\int_0^2 \frac{p}{(x+2)^2} dx = \int_0^2 p(x+2)^{-2} dx = [-p(x+2)^{-1}]_0^2 = \left[-\frac{p}{x+2} \right]_0^2 = -\frac{1}{4}p + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}p$$

$\frac{1}{4}p = 1$ geeft $p = 4$

b $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \leq 0 \\ \frac{4}{(x+2)^2} & \text{voor } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{voor } x \geq 2 \end{cases}$

$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{4}{(x+2)^2} dx = \left[-\frac{4}{(x+2)} \right]_1^2 = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

11 a $G(x) = \frac{1}{4}x^2$ geeft $G'(x) = \frac{1}{2}x$
 $G'(x) = g(x)$, dus G is een primitieve van g .

b $P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^1 f(x) dx = F(1)$

c $P(X > 0,8) = 1 - P(X \leq 0,8) = 1 - F(0,8) = 1 - \frac{1}{4} \cdot 0,8^2 = 0,84$

Bladzijde 132

12 a $F(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

Schets, zie hiernaast.

Voor de functie F geldt:

- domein $\mathbb{R}$
- bereik $[0, 1)$
- niet dalend
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Dus F is inderdaad een verdelingsfunctie.

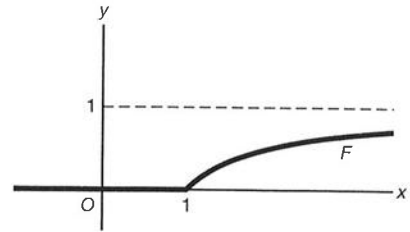
- b** Voor $x < 4$ is H gegeven door $H(x) = 0$.

Omdat H bereik $[0, 1]$ heeft moet gelden $H(4) = 0$ ofwel $K(4) = 0$.

Is $H(4) \neq 0$ ofwel $K(4) \neq 0$ dan is het bereik van H niet $[0, 1]$ en is H geen verdelingsfunctie.

- c** Bij een verdelingsfunctie F van X moet gelden $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, dus in het geval van het voorbeeld moet

geldend $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 1$. Dit geeft $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{16}{x^2} + c\right) = 1$ ofwel $0 + c = 1$, dus $c = 1$.



13 a $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) = 1$$

Schets, zie hiernaast.

Voor de functie F geldt:

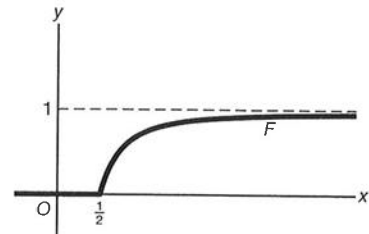
- domein $\mathbb{R}$
- bereik $[0, 1)$
- niet dalend
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Dus F is inderdaad een verdelingsfunctie.

b $G(x) = 1 - \frac{1}{4x^2} = 1 - \frac{1}{4}x^{-2}$ geeft $g(x) = \frac{1}{2}x^{-3} = \frac{1}{2x^3}$

dus de kansdichtheid is $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x^3} & \text{voor } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

c $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$



14 a Voor $0 \leq x < 2$ is $\frac{1}{4}x \geq 0$.

Voor $2 \leq x < 5$ is $\frac{1}{18}(x-5)^2 \geq 0$.

Dus $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^2 \frac{1}{4}x \, dx = \left[\frac{1}{8}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{8} \cdot 4 - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_2^5 \frac{1}{18}(x-5)^2 \, dx = \left[\frac{1}{54}(x-5)^3\right]_2^5 = 0 - \frac{1}{54} \cdot (-3)^3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 f(x) \, dx + \int_0^2 f(x) \, dx + \int_2^5 f(x) \, dx + \int_5^{\infty} f(x) \, dx = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

Dus f is inderdaad een kansdichtheid.

- b De primitieven van $g(x) = \frac{1}{4}x$ zijn $G(x) = \frac{1}{8}x^2 + c$.
 Er moet gelden $G(0) = 0$, dus $\frac{1}{8} \cdot 0^2 + c = 0$ en dit geeft $c = 0$.
 De primitieven van $h(x) = \frac{1}{18}(x-5)^2$ zijn $H(x) = \frac{1}{54}(x-5)^3 + d$.
 Er moet gelden $H(5) = 1$, dus $\frac{1}{54} \cdot 0^3 + d = 1$ en dit geeft $d = 1$.

$$\text{Dus } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{voor } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{54}(x-5)^3 + 1 & \text{voor } 2 \leq x < 5 \\ 1 & \text{voor } x \geq 5 \end{cases}$$

c $P(X \leq 3) = F(3) = \frac{1}{54}(3-5)^3 + 1 = -\frac{4}{27} + 1 = \frac{23}{27}$

Bladzijde 133

- 15 a f is een kansdichtheid, dus er moet gelden $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^{1\frac{1}{3}} \left(-\frac{3}{4}x + b\right) dx = \left[-\frac{3}{8}x^2 + bx\right]_1^{1\frac{1}{3}} = -\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}b\right)^2 + b \cdot \frac{1}{3}b - \left(-\frac{3}{8} + b\right) = -\frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{3}{8} - b = \frac{2}{3}b^2 - b + \frac{3}{8}$$

Er moet dus gelden $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}b^2 - b + \frac{3}{8} = 1$

$$\frac{2}{3}b^2 - b - \frac{7}{24} = 0$$

$$16b^2 - 24b - 7 = 0$$

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 16 \cdot -7 = 1024$$

$$b = \frac{24 - 32}{32} = -\frac{1}{4} \vee b = \frac{24 + 32}{32} = 1\frac{3}{4}$$

vold. niet

vold.

Dus $b = 1\frac{3}{4}$.

b $b = 1\frac{3}{4}$ geeft $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ x^2 & \text{voor } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4} & \text{voor } 1 \leq x < 2\frac{1}{3} \\ 0 & \text{voor } x \geq 2\frac{1}{3} \end{cases}$

De primitieven van $g(x) = x^2$ zijn $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$.

Er moet gelden $G(0) = 0$, dus $\frac{1}{3} \cdot 0 + c = 0$ ofwel $c = 0$.

De primitieven van $h(x) = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$ zijn $H(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 1\frac{3}{4}x + d$.

Er moet gelden $H(2\frac{1}{3}) = 1$, dus $-\frac{3}{8} \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^2 + 1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} + d = 1$ en dit geeft $d = -1\frac{1}{24}$.

$$\text{Dus } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 & \text{voor } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{3}{8}x^2 + 1\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{24} & \text{voor } 1 \leq x < 2\frac{1}{3} \\ 1 & \text{voor } x \geq 2\frac{1}{3} \end{cases}$$

c $P(X \geq \frac{1}{2}) = 1 - P(X < \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{23}{24}$

12

- 16 a $G(x) = 0,0025x^2$ geeft $G'(x) = 0,005x$, dus de kansdichtheid is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 0,005x & \text{voor } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{voor } x > 20 \end{cases}$$

- b $P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - F(15) = 1 - 0,0025 \cdot 15^2 = 0,4375$
 De gevraagde kans is $0,4375^2 \approx 0,191$.

- 17 a Er moet gelden $\int_0^{100} ax^3(100-x) dx = 1$.

$$\int_0^{100} ax^3(100-x) dx = \int_0^{100} (100ax^3 - ax^4) dx = \left[25ax^4 - \frac{1}{5}ax^5 \right]_0^{100} = 2,5a \cdot 10^9 - 2a \cdot 10^9 - 0 = 5a \cdot 10^8$$

$$5a \cdot 10^8 = 1 \text{ geeft } a = 2 \cdot 10^{-9}$$

b $a = 2 \cdot 10^{-9}$ geeft $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 2 \cdot 10^{-9} \cdot x^3(100 - x) & \text{voor } 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{voor } x > 100 \end{cases}$

De primitieven van $g(x) = 2 \cdot 10^{-9} \cdot x^3(100 - x) = 2 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 2 \cdot 10^{-9} \cdot x^4$ zijn
 $G(x) = 5 \cdot 10^{-8} \cdot x^4 - 4 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 + c$.

Er moet gelden $G(0) = 0$, dus $5 \cdot 10^{-8} \cdot 0 - 4 \cdot 10^{-10} \cdot 0 + c = 0$ ofwel $c = 0$.

Dus $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 4 \cdot 10^{-10} \cdot x^4(125 - x) & \text{voor } 0 \leq x \leq 100 \\ 1 & \text{voor } x > 100 \end{cases}$

$P(X \geq 80) = 1 - P(X < 80) = 1 - F(80) = 1 - 4 \cdot 10^{-10} \cdot 80^4 \cdot (125 - 80) \approx 0,263$

c $P(50 \leq X < 90) = P(X < 90) - P(X < 50) = F(90) - F(50) = 4 \cdot 10^{-10} \cdot (90^4 \cdot 35 - 50^4 \cdot 75) = 0,73104$

De gevraagde kans is $0,73104^2 \approx 0,534$.

d $F(t) = 0,5$ geeft $4 \cdot 10^{-10} \cdot t^4(125 - t) = 0,5$

Voer in $y_1 = 4 \cdot 10^{-10} \cdot x^4(125 - x)$ en $y_2 = 0,5$.

Intersect geeft $x = 68,62\dots$

Dus $t = 68$ jaar en 7 maanden.

12.2 De normale verdeling

Bladzijde 135

- 18 De spreiding is het grootst in 5V-B en het kleinst in 5V-C.

Bladzijde 136

- 19 a Voer in lijst 1 = {0, 1, 2, 3, 5, 6, 64} en lijst 2 = {15, 5, 3, 1, 2, 1, 1}.
 1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft het gemiddelde aantal ziekte-dagen $\bar{x} \approx 3,4$ en de standaardafwijking $\sigma \approx 11,8$.
 b Nee, 24 van de 28 keer is het aantal ziekte-dagen minder dan het gemiddelde 3,4.
 Dit komt door de uitschieter 64 ziekte-dagen, die voor een hoog gemiddelde zorgt.
 c Nee, de standaardafwijking geeft alleen zinnige informatie als het gemiddelde een goede indruk van de verdeling geeft en dat is hier niet het geval.

Bladzijde 137

- 20 Voer in lijst 1 = {1, 2, 3, 4, 5} en lijst 2 = {0.05, 0.15, 0.60, 0.15, 0.05}.
 1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft $E(X) = \bar{x} = 3$ en $\sigma_X \approx 0,84$.

21 a

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

- b Voer in lijst 1 = {0, 1, 2, 3, 4} en lijst 2 = $\{\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}\}$.
 1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft $E(X) = \bar{x} = 2$ en $\sigma_X = 1$.

Bladzijde 138

- 22 a $P(X \geq 35) = 1 - P(X \leq 34) = 1 - \text{binomcdf}(180, \frac{1}{6}, 34) \approx 0,183$
 b Door als ondergrens 34,5 te nemen, heffen het stukje oppervlakte onder de kromme tussen 34,5 en 35, dat te veel wordt meegerekend, en het deel van het kanshistogram tussen 35 en 35,5 dat zich boven de kromme bevindt en dat dus te weinig wordt meegerekend, elkaar vrijwel op. Dit geeft dus een goede benadering van de kans $P(X \geq 35)$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-30}{5})^2}$.

De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft $\int_{34,5}^{180} y_1 dx \approx 0,184$.

$1 - \text{binomcdf}(180, \frac{1}{6}, 34) - \int_{34,5}^{180} y_1 dx \approx -0,001$, dus de uitkomst verschilt 0,001 van de werkelijke kans.

c De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft $\int_0^{180} y_1 dx = 1$.

Omdat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $\int_0^{180} f(x) dx = 1$ en dus ook $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, is f een kansdichtheid.

Bladzijde 140

23 Voer in $y_1 = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-180}{12}\right)^2}$

De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft

$$P(170 \leq X \leq 185) = \int_{170}^{185} y_1 dx \approx 0,459$$

$$P(X \leq 175) = \int_{120}^{175} y_1 dx \approx 0,338$$

$$P(X \geq 185) = \int_{185}^{245} y_1 dx \approx 0,338$$

24 a Voer in $y_1 = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{10}\right)^2}$ en $y_2 = \frac{1}{13\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-115}{13}\right)^2}$.

Intersect geeft $x \approx 108,71$, dus $a = 108,71$.

b De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft $P(X \geq 108,71) = \int_{108,71}^{160} y_1 dx \approx 0,192$.

De optie fnInt (TI) of $\int dx$ (Casio) geeft $P(Y \leq 108,71) = \int_{50}^{108,71} y_2 dx \approx 0,314$.

25 $P(8 \leq X \leq 14) = \text{normalcdf}(8, 14, 16, 3)$

$P(X \leq 12) = \text{normalcdf}(-3, 12, 16, 3)$

$P(X \geq 18) = \text{normalcdf}(18, 33, 16, 3)$

Bladzijde 141

26 a $P(6,1 \leq X \leq 6,4) = \text{normalcdf}(6.1, 6.4, 5.8, 0.4) \approx 0,160$

b $P(X < 5,1) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 5.1, 5.8, 0.4) \approx 0,040$

c $P(X > 5,25) = \text{normalcdf}(5.25, 10^{99}, 5.8, 0.4) \approx 0,915$

27 a $\mu = 10$ en $\sigma = 2$ geeft $P(8 \leq X \leq 12) = \text{normalcdf}(8, 12, 10, 2) \approx 0,683$

$\mu = 120$ en $\sigma = 50$ geeft $P(70 \leq X \leq 170) = \text{normalcdf}(70, 170, 120, 50) \approx 0,683$

$\mu = -15$ en $\sigma = 25$ geeft $P(-40 \leq X \leq 10) = \text{normalcdf}(-40, 10, -15, 25) \approx 0,683$

De uitkomst is steeds bij benadering 0,683.

b figuur 12.15a: $10 - 7 = 3$ is een schatting van σ .

figuur 12.15b: $600 - 500 = 100$ is een schatting van 2σ , dus een schatting van σ is 50.

figuur 12.15c: $105 - 15 = 90$ is een schatting van μ .

Bladzijde 143

28 a $a = \text{invNorm}(0.3, 16, 2) \approx 15,0$

b opp links van a is $1 - 0,7 = 0,3$.

$a = \text{invNorm}(0.3, 50, 8) \approx 45,8$

c $a = \text{invNorm}(0.86, 600, 70) \approx 676$

d opp links van a is $1 - 0,08 = 0,92$.

$a = \text{invNorm}(0.92, 0.8, 0.2) \approx 1,08$

Bladzijde 144

29 a opp links van a is $\frac{1 - 0,5}{2} = 0,25$.

$a = \text{invNorm}(0.25, 18, 2) \approx 16,7$

$b \approx 18 + (18 - 16,7) = 19,3$

b opp links van a is $\frac{1 - 0,82}{2} = 0,09$.

$a = \text{invNorm}(0.09, 150, 12) \approx 133,9$

$b \approx 150 + (150 - 133,9) = 166,1$

c opp links van a is $\frac{0,12}{2} = 0,06$.

$a = \text{invNorm}(0,06, 58, 6) \approx 48,7$

$b \approx 58 + (58 - 48,7) = 67,3$

30 a De vergelijking $\text{normalcdf}(-10^{99}, 450, 400, \sigma) = 0,78$.

b Een schatting is $\sigma = 60$.

c Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 450, 400, x)$ (TI) of $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 450, x, 400)$ (Casio) en $y_2 = 0,78$.

Intersect geeft $x \approx 64,8$, dus $\sigma \approx 64,8$.

31 a Een schatting is $\mu = 200$.

b Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 170, x, 12)$ (TI) of $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 170, 12, x)$ (Casio) en $y_2 = 0,08$.

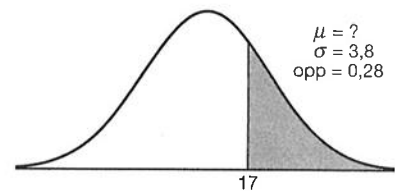
Intersect geeft $x \approx 187$, dus $\mu \approx 187$.

32 a $\text{normalcdf}(17, 10^{99}, \mu, 3,8) = 0,28$

Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(17, 10^{99}, x, 3,8)$ (TI) of

$y_1 = \text{NormCD}(17, 10^{99}, 3,8, x)$ (Casio) en $y_2 = 0,28$.

Intersect geeft $x \approx 14,8$, dus $\mu \approx 14,8$.

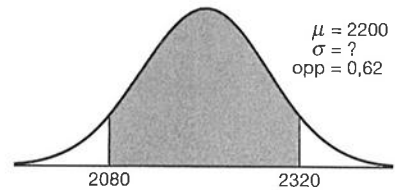


i $\text{normalcdf}(2080, 2320, 2200, \sigma) = 0,62$

Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(2080, 2320, 2200, x)$ (TI) of

$y_1 = \text{NormCD}(2080, 2320, x, 2200)$ (Casio) en $y_2 = 0,62$.

Intersect geeft $x \approx 137$, dus $\sigma \approx 140$.



33 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 980, 1050, \sigma) = \text{normalcdf}(980, 1000, 1050, \sigma)$

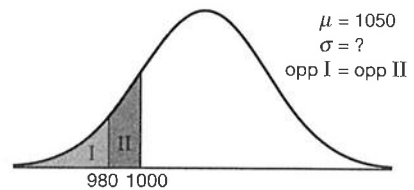
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 980, 1050, x)$ (TI) of

$y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 980, x, 1050)$ (Casio) en

$y_2 = \text{normalcdf}(980, 1000, 1050, x)$ (TI) of

$y_2 = \text{NormCD}(980, 1000, x, 1050)$ (Casio).

Intersect geeft $x \approx 49$, dus $\sigma \approx 49$.



34 $\text{normalcdf}(2,18, a, 2,3, 0,08) = \text{normalcdf}(a, 2,36, 2,3, 0,08)$

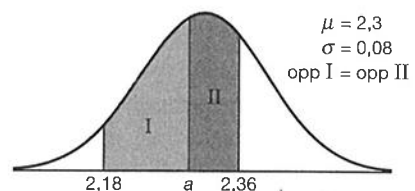
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(2,18, x, 2,3, 0,08)$ (TI) of

$y_1 = \text{NormCD}(2,18, x, 0,08, 2,3)$ (Casio) en

$y_2 = \text{normalcdf}(x, 2,36, 2,3, 0,08)$ (TI) of

$y_2 = \text{NormCD}(x, 2,36, 0,08, 2,3)$ (Casio).

Intersect geeft $x \approx 2,284$, dus $a \approx 2,284$.



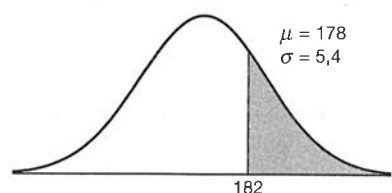
12.3 Toepassingen van de normale verdeling

Bladzijde 146

35 a opp = $\text{normalcdf}(182, 10^{99}, 178, 5,4) \approx 0,229$

b Van de jongens is 22,9% langer dan 182 cm.

c De gevraagde kans is 0,229.

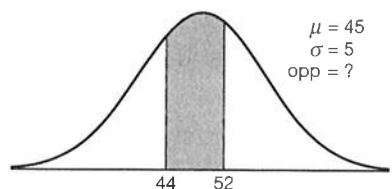


Bladzijde 147

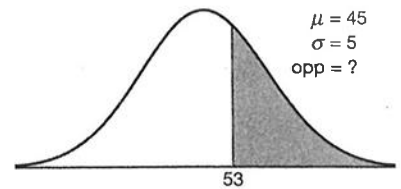
36 a Normale verdeling met $\mu = 45$ en $\sigma = 5$.

opp = $\text{normalcdf}(44, 52, 45, 5) \approx 0,499$

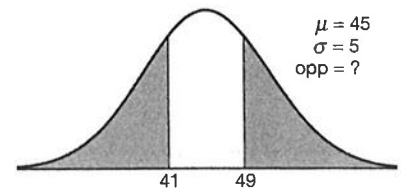
De kans is 0,499.



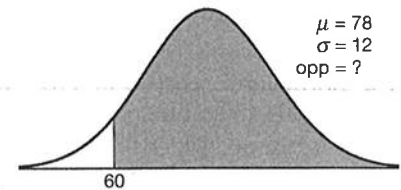
- b** $\text{opp} = \text{normalcdf}(53, 10^{99}, 45, 5) = 0,054...$
Je verwacht $0,054... \cdot 240 \approx 13$ forellen.



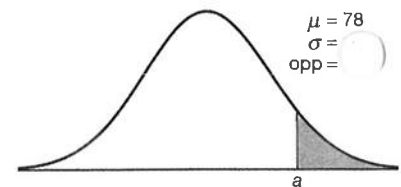
- c** $\text{opp} = 2 \cdot \text{normalcdf}(-10^{99}, 41, 45, 5) \approx 0,424$
Dus 42,4%.



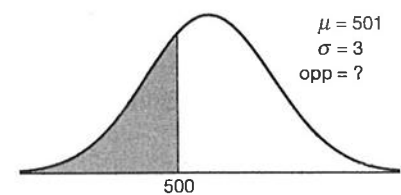
- 37 a** Normale verdeling met $\mu = 78$ en $\sigma = 12$.
 $\text{opp} = \text{normalcdf}(60, 10^{99}, 78, 12) = 0,933...$
Dus $0,933... \cdot 1600 \approx 1493$ mannen zijn naar verwachting zwaarder dan 60 kg.
 $\text{opp} = \text{normalcdf}(-10^{99}, 65, 78, 12) = 0,139...$
Dus $0,139... \cdot 1600 \approx 223$ mannen zijn naar verwachting lichter dan 65 kg.



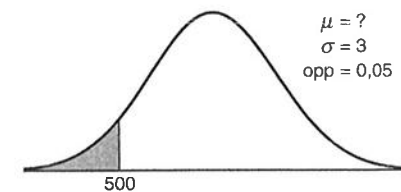
- b** opp links van a is $1 - 0,1 = 0,9$.
 $a = \text{invNorm}(0,9, 78, 12) \approx 93,4$
Dus vanaf 94 kg.



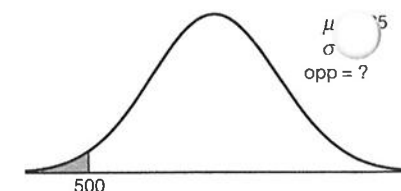
- 38 a** Normale verdeling met $\mu = 501$ en $\sigma = 3$.
 $\text{opp} = \text{normalcdf}(-10^{99}, 500, 501, 3) \approx 0,369$
Dus 36,9%.



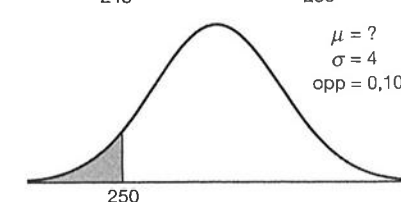
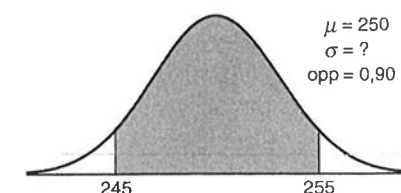
- b** Normale verdeling met onbekende μ en $\sigma = 3$.
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 500, \mu, 3) = 0,05$
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 500, x, 3)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 500, 3, x)$ (Casio) en $y_2 = 0,05$.
Intersect geeft $x = 504,93...$
Dus op een gemiddelde van minstens 505,0 gram.



- c** Normale verdeling met $\mu = 505$ en $\sigma = 3$.
 $\text{opp} = \text{normalcdf}(-10^{99}, 500, 505, 3) \approx 0,048$
Bij een gemiddeld instelgewicht van 505 gram bevat 4,8% van de pakken minder dan 500 gram koffie.
Dus de fabrikant kan de bewering niet waarmaken.

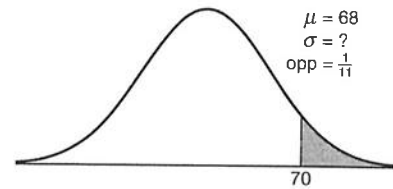


- 39 a** Normale verdeling met $\mu = 250$ en onbekende σ .
 $\text{normalcdf}(245, 255, 250, \sigma) = 0,90$
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(245, 255, 250, x)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormdCD}(245, 255, x, 250)$ (Casio) en $y_2 = 0,90$.
Intersect geeft $x = 3,039...$
Dus maximaal $\sigma \approx 3,03$ gram.
- b** Normale verdeling met onbekende μ en $\sigma = 4$.
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 250, \mu, 4) = 0,10$
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 250, x, 4)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 250, 4, x)$ (Casio) en $y_2 = 0,10$.
Intersect geeft $x = 255,1...$
Dus op een gemiddelde van 256 gram.

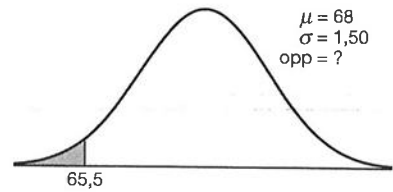


Bladzijde 148

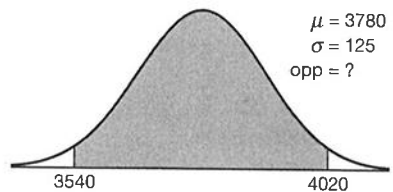
- 40 a** Normale verdeling met $\mu = 68$ en onbekende σ .
 $\text{normalcdf}(70, 10^{99}, 68, \sigma) = \frac{1}{11}$
 Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(70, 10^{99}, 68, x)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(70, 10^{99}, x, 68)$ (Casio) en $y_2 = \frac{1}{11}$.
 Intersect geeft $x \approx 1,50$, dus $\sigma \approx 1,50\%$.



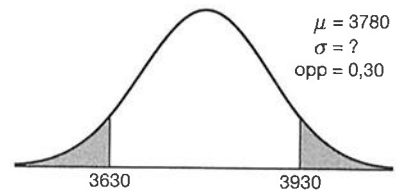
- b** Normale verdeling met $\mu = 68$ en $\sigma = 1,50$.
 $\text{opp} = \text{normalcdf}(-10^{99}, 65,5, 68, 1,50) = 0,047...$
 Dat zijn er naar verwachting $0,047... \cdot 500 \approx 24$.



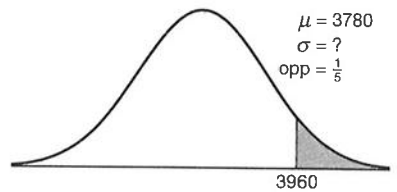
- 41 a** $\mu = 1$ uur en 3 minuten $= 63 \cdot 60 = 3780$ seconden
 Normale verdeling met $\mu = 3780$ en $\sigma = 125$.
 4 minuten $= 240$ seconden
 $3780 - 240 = 3540$
 $3780 + 240 = 4020$
 $\text{opp} = \text{normalcdf}(3540, 4020, 3780, 125) \approx 0,945$
 De kans is 0,945.



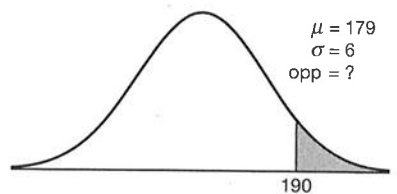
- b** Normale verdeling met $\mu = 3780$ en onbekende σ .
 5 minuten $= 150$ seconden
 $3780 - 150 = 3630$
 $3780 + 150 = 3930$
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 3630, 3780, \sigma) = 0,15$
 Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 3630, 3780, x)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 3630, x, 3780)$ (Casio) en $y_2 = 0,15$.
 Intersect geeft $x \approx 145$, dus $\sigma \approx 145$ seconden.



- c** Normale verdeling met $\mu = 3780$ en onbekende σ .
 66 minuten $= 66 \cdot 60 = 3960$ seconden
 $\text{normalcdf}(3960, 10^{99}, 3780, \sigma) = \frac{1}{5}$
 Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(3960, 10^{99}, 3780, x)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(3960, 10^{99}, x, 3780)$ (Casio) en $y_2 = \frac{1}{5}$.
 Intersect geeft $x \approx 214$, dus $\sigma \approx 214$ seconden.



- 42 a** Normale verdeling met $\mu = 179$ en $\sigma = 6$.
 $\text{opp} = \text{normalcdf}(190, 10^{99}, 179, 6) = 0,033...$
 Dus $0,033... \cdot 260 \approx 9$ wielrenners waren naar verwachting langer dan 190 cm.



- b** Normale verdeling met $\mu = 21,0$ en $\sigma = 1,2$.

$$\frac{60}{260} = \frac{3}{13}$$

opp links van a is $1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$.

$$a = \text{invNorm}\left(\frac{10}{13}, 21,0, 1,2\right) \approx 21,9$$

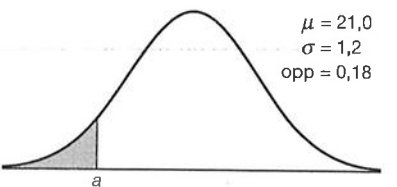
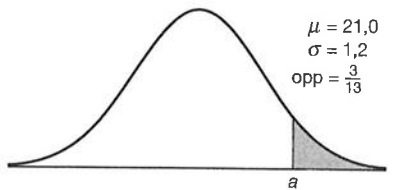
Dus van de 60 renners met de grootste BMI is de BMI minstens 21,9.

- c** $a = \text{invNorm}(0,18, 21,0, 1,2) = 19,9...$, dus de BMI van renner A is 19,9...

$$BMI = \frac{G}{L^2} \text{ geeft } 19,9... = \frac{60}{L^2} \text{ ofwel } L^2 = \frac{60}{19,9...}, \text{ dus}$$

$$L = \sqrt{\frac{60}{19,9...}} \approx 1,74.$$

Dus de lengte van A is 1,74 meter.



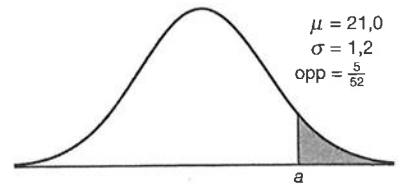
d $\frac{25}{260} = \frac{5}{52}$

opp links van a is $1 - \frac{5}{52} = \frac{47}{52}$.

$a = \text{invNorm}\left(\frac{47}{52}, 21.0, 1.2\right) = 22,5\dots$, dus de BMI van renner B is 22,5...

$BMI = \frac{G}{L^2}$ geeft $22,5\dots = \frac{G}{1,85^2}$ ofwel $G = 22,5\dots \cdot 1,85^2 \approx 77,2$.

Dus het gewicht van B is 77,2 kg.



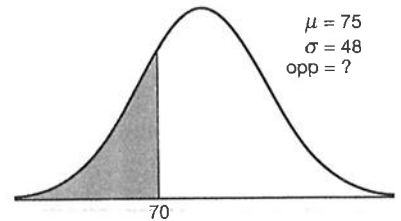
Bladzijde 149

- 43 a Normale verdeling met $\mu = 75$ en $\sigma = 48$.

$P(\text{conifeer kleiner dan } 70 \text{ cm}) =$

$\text{normalcdf}(-10^{99}, 70, 75, 48) = 0,390\dots \approx 0,391$

- b $P(\text{alle drie kleiner dan } 70 \text{ cm}) = 0,390\dots^3 \approx 0,060$



Bladzijde 150

- 44 a Normale verdeling met $\mu = 130$ en $\sigma = 5$.

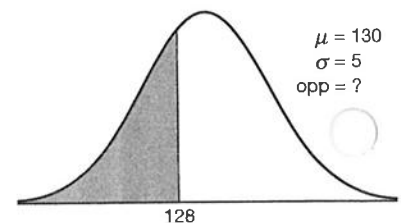
$P(\text{pak weegt minder dan } 128 \text{ gram}) =$

$\text{normalcdf}(-10^{99}, 128, 130, 5) = 0,344\dots$

$X =$ het aantal pakken dat minder dan 128 gram weegt.

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,344\dots$

$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \text{binomcdf}(50, 0,344\dots, 7) \approx 0,999$



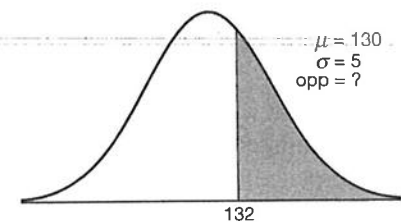
- b $P(\text{pak weegt meer dan } 132 \text{ gram}) =$

$\text{normalcdf}(132, 10^{99}, 130, 5) = 0,344\dots$

$X =$ het aantal pakken dat meer dan 132 gram weegt.

X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,344\dots$

$P(X = 8) = \text{binompdf}(50, 0,344\dots, 8) \approx 0,002$



- 45 a Normale verdeling met $\mu = 2\frac{2}{3}$ en $\sigma = \frac{1}{4}$.

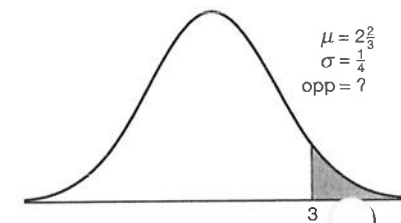
$P(\text{handeling duurt langer dan } 3 \text{ minuten}) =$

$\text{normalcdf}(3, 10^{99}, 2\frac{2}{3}, \frac{1}{4}) = 0,091\dots$

$X =$ het aantal handelingen dat langer dan 3 minuten duurt.

X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = 0,091\dots$

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \text{binomcdf}(80, 0,091\dots, 9) \approx 0,192$

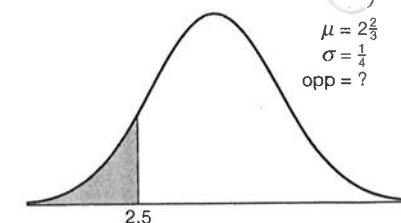


- b $P(\text{handeling duurt minder dan } 2,5 \text{ minuten}) =$

$\text{normalcdf}(-10^{99}, 2,5, 2\frac{2}{3}, \frac{1}{4}) = 0,252\dots$

Van 180 handelingen duren naar verwachting

$180 \cdot 0,252\dots \approx 45$ handelingen minder dan 2,5 minuten.



- c $P(\text{handeling duurt meer dan } 2 \text{ minuten en } 45 \text{ seconden}) =$

$\text{normalcdf}(2,75, 10^{99}, 2\frac{2}{3}, \frac{1}{4}) = 0,369\dots$

$Y =$ het aantal handelingen dat meer dan 2 minuten en 45 seconden duurt

$P(Y \geq 5) > 0,99$

$1 - P(Y \leq 4) > 0,99$

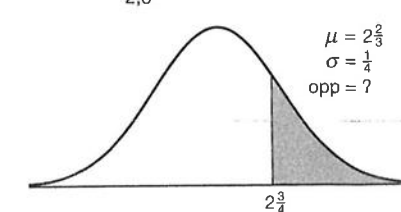
Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(x, 0,369\dots, 4)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(4, x, 0,369\dots)$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 27$ geeft $y_1 \approx 0,989$

$x = 28$ geeft $y_1 \approx 0,992$.

De werknemer moet dus minstens 28 van deze handelingen verrichten.



12.4 Som en verschil van toevalsvariabelen

Bladzijde 152

- 46 a $1 + 3 = 4$, $2 + 2 = 4$ en $3 + 1 = 4$, dus het aantal gunstige uitkomsten is 3.
Het totale aantal uitkomsten is $6^2 = 36$.
De gevraagde kans is $P(Z = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

b

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Voer in lijst 1 = $\{2, 3, 4, \dots, 11, 12\}$ en lijst 2 = $\{\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \dots, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}\}$.
1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft $E(Z) = \bar{z} = 7$.

c

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Voer in lijst 1 = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en lijst 2 = $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$.
1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft $E(X) = \bar{x} = 3,5$.

Evenzo is $E(Y) = 3,5$.

$$\left. \begin{aligned} E(X + Y) &= E(Z) = 7 \\ E(X) + E(Y) &= 3,5 + 3,5 = 7 \end{aligned} \right\} \text{ dus } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- 47 a $E(T) = E(X) + E(Y) = 16 + 30 = 46$ seconden

b $\sigma_T = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,6$ seconden

- 48 a De som $X + Y$ is steeds 7, dus de standaardafwijking is 0.
b X en Y zijn niet onafhankelijk.

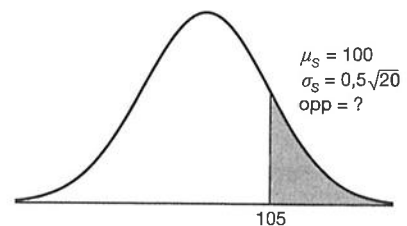
Bladzijde 153

- 49 a $P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39) = 1 - \text{poissoncdf}(36, 39) \approx 0,274$
b $P(X \geq 40) \approx \text{normalcdf}(39,5, 10^{99}, 36, 6) \approx 0,280$
c $1 - \text{poissoncdf}(36, 39) - \text{normalcdf}(39,5, 10^{99}, 36, 6) \approx -0,006$
Dus de uitkomst van vraag b verschilt 0,006 van de werkelijke kans.

Bladzijde 155

- 50 a $\mu_S = E(S) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = E(X) + E(X) + \dots + E(X) = n \cdot E(X)$
b $\sigma_S = \sigma_{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_X^2 + \dots + \sigma_X^2} = \sqrt{n \cdot \sigma_X^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$
c of $\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{S}{n}$ geldt $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_S}{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_X}{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_X}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

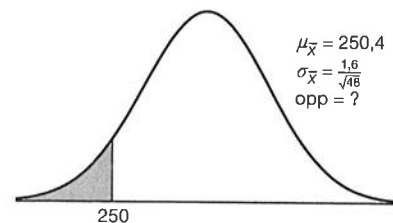
- 51 S = de dikte in mm van 20 tegels in een doos.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 20 \cdot 5 = 100$ en
 $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot 0,5 = 0,5\sqrt{20}$.
 $P(S \geq 105) = \text{normalcdf}(105, 10^{99}, 100, 0,5\sqrt{20}) \approx 0,013$



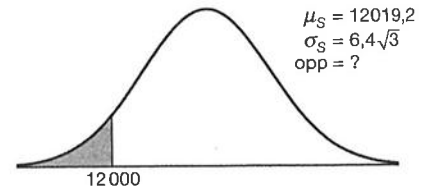
- 52 a $\bar{X}$ = het gemiddelde gewicht in gram van 48 pakjes in een doos.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 250,4$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{1,6}{\sqrt{48}}$.

$$P(\bar{X} < 250) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 250, 250,4, \frac{1,6}{\sqrt{48}}) \approx 0,042$$

Dus 4,2% van de dozen heeft een gemiddeld gewicht per pakje van minder dan 250 gram.



- b S = het gewicht in gram van 48 pakjes in een doos.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 48 \cdot 250,4 = 12\,019,2$ en
 $\sigma_S = \sqrt{48} \cdot 1,6 = 6,4\sqrt{3}$.
 $P(S < 12\,000) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 12\,000, 12\,019,2, 6,4\sqrt{3}) \approx 0,042$
 Dus 4,2% van de dozen bevat minder dan 12 kg boter.



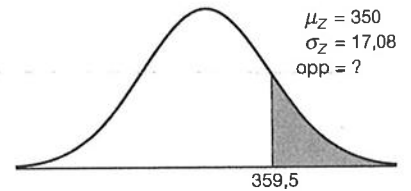
Bladzijde 156

53 a

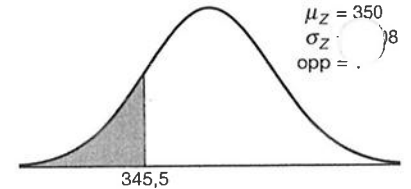
x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Voer in lijst 1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} en lijst 2 = $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$.
 1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft $\sigma_X \approx 1,708$.

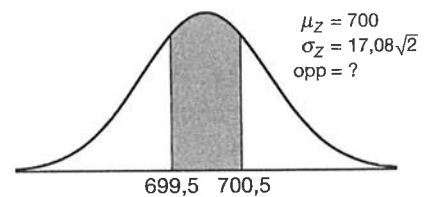
- b Z is normaal verdeeld met $\mu_Z = 100 \cdot 3,5 = 350$ en
 $\sigma_Z \approx \sqrt{100} \cdot 1,708 = 17,08$.
 $P(Y \geq 360) = P(Z \geq 359,5) \approx$
 $\text{normalcdf}(359,5, 10^{99}, 350, 17,08) \approx 0,289$



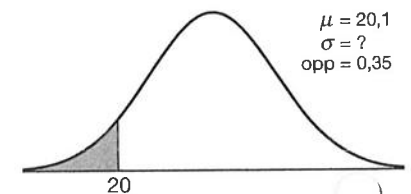
- c $P(Y \leq 345) = P(Z < 345,5) \approx$
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 345,5, 350, 17,08) \approx 0,396$



- d Y = de som van de gegooide aantallen ogen.
 Y is te benaderen door de normaal verdeelde toevalsvariabele Z met
 $\mu_Z = 200 \cdot 3,5 = 700$ en $\sigma_Z \approx \sqrt{200} \cdot 1,708 = 17,08\sqrt{2}$.
 $P(Y = 700) = P(699,5 \leq Z < 700,5) \approx$
 $\text{normalcdf}(699,5, 700,5, 700, 17,08\sqrt{2}) \approx 0,017$

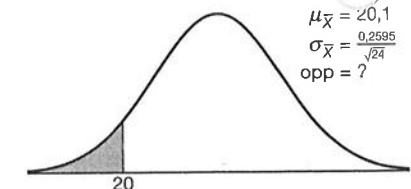


- 54 a Normale verdeling met $\mu = 20,1$ en onbekende σ .
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 20, 20,1, \sigma) = 0,35$
 Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 20, 20,1, x)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 20, x, 20,1)$ (Casio) en $y_2 = 0,35$.
 Intersect geeft $x \approx 0,2595$, dus $\sigma \approx 0,2595$.



- b $\bar{X}$ = de gemiddelde inhoud in cL van 24 flesjes.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 20,1$ en $\sigma_{\bar{X}} \approx \frac{0,2595}{\sqrt{24}}$.

$$P(\bar{X} < 20) = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 20, 20,1, \frac{0,2595}{\sqrt{24}}\right) = 0,0295... \approx 0,030$$



- c Y = het aantal kratten waarin de gemiddelde inhoud per flesje minder dan 20 cL is.
 $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \text{binompdf}(25, 0,0295..., 0) \approx 0,527$

- 55 $\bar{X}$ = het gemiddelde gewicht in gram van de bonbons in een doos.
Er zitten n bonbons in een doos.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 37$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{5}{\sqrt{n}}$.

$$P(\bar{X} \geq 35) > 0,98, \text{ dus } \text{normalcdf}\left(35, 10^{99}, 37, \frac{5}{\sqrt{n}}\right) > 0,98.$$

$$\text{Voer in } y_1 = \text{normalcdf}\left(35, 10^{99}, 37, \frac{5}{\sqrt{x}}\right) \text{ (TI)}$$

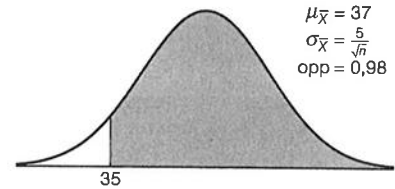
$$\text{of } y_1 = \text{NormCD}\left(35, 10^{99}, \frac{5}{\sqrt{x}}, 37\right) \text{ (Casio).}$$

Uit de tabel volgt

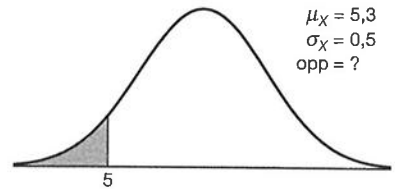
$$x = 26 \text{ geeft } y_1 \approx 0,979$$

$$x = 27 \text{ geeft } y_1 \approx 0,981.$$

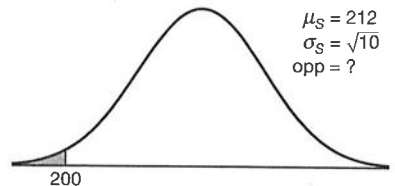
Dus de leverancier stopt minstens 27 bonbons in een doos.



- 56 a X = het gewicht in gram van een theezakje.
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 5,3$ en $\sigma_X = 0,5$.
 $P(X < 5) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 5, 5,3, 0,5) \approx 0,274$

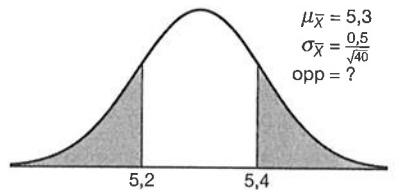


- b S = het gewicht in gram van 40 theezakjes in een pakje.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 40 \cdot 5,3 = 212$ en
 $\sigma_S = \sqrt{40} \cdot 0,5 = \sqrt{10}$.
 $P(S < 200) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 200, 212, \sqrt{10}) \approx 7,4 \cdot 10^{-5}$



- c $\bar{X}$ = het gemiddelde gewicht in gram van een theezakje in een pakje.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 5,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,5}{\sqrt{40}}$.

$$P(\bar{X} < 5,2 \vee \bar{X} > 5,4) = 2 \cdot \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 5,2, 5,3, \frac{0,5}{\sqrt{40}}\right) \approx 0,206$$



- d $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 5,3$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,5}{\sqrt{n}}$.
 $P(\bar{X} < 5) \leq 0,02, \text{ dus } \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 5, 5,3, \frac{0,5}{\sqrt{n}}\right) \leq 0,02.$

$$\text{voer in } y_1 = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 5, 5,3, \frac{0,5}{\sqrt{x}}\right) \text{ (TI)}$$

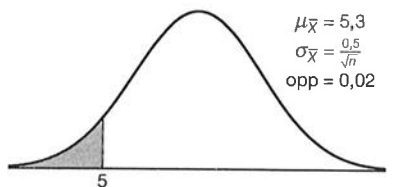
$$\text{of } y_1 = \text{NormCD}\left(-10^{99}, 5, \frac{0,5}{\sqrt{x}}, 5,3\right) \text{ (Casio).}$$

Uit de tabel volgt

$$x = 11 \text{ geeft } y_1 \approx 0,023$$

$$x = 12 \text{ geeft } y_1 \approx 0,019.$$

Dus de fabrikant zou minstens 12 theezakjes in een pakje moeten doen.

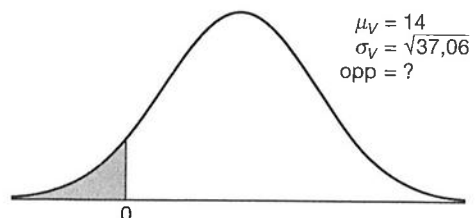


Bladzijde 157

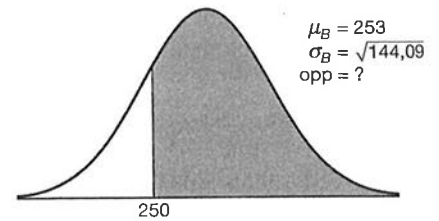
- 57 a Ja, $-X$ is ook normaal verdeeld.
b Ja, zie de post-it.
c Nee, er geldt $\sigma_{-X} = \sigma_X$. Zie de post-it.

Bladzijde 158

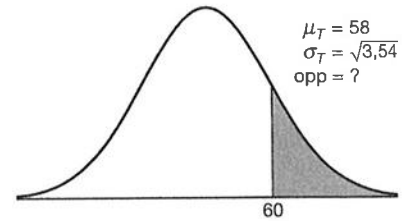
- 58 De dame is langer dan de heer als $H < D$ ofwel $H - D < 0$, dus $V < 0$ met $V = H - D$.
 V is normaal verdeeld met $\mu_V = 186 - 172 = 14$ cm en
 $\sigma_V = \sqrt{4,1^2 + 4,5^2} = \sqrt{37,06}$ cm.
 $P(\text{dame is langer dan heer}) = P(V < 0) =$
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 0, 14, \sqrt{37,06}) \approx 0,011$



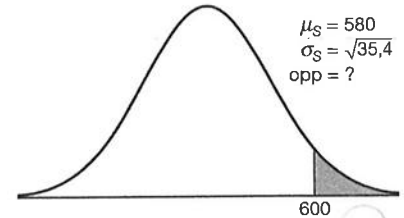
- 59** Het brutogewicht is $B = X + Y$.
 B is normaal verdeeld met $\mu_B = 5 + 248 = 253$ gram en
 $\sigma_B = \sqrt{0,3^2 + 12^2} = \sqrt{144,09}$ gram.
 $P(\text{brutogewicht is meer dan } 250 \text{ gram}) = P(B > 250) =$
 $\text{normalcdf}(250, 10^{99}, 253, \sqrt{144,09}) \approx 0,599$
 Dus in 59,9% van de gevallen.



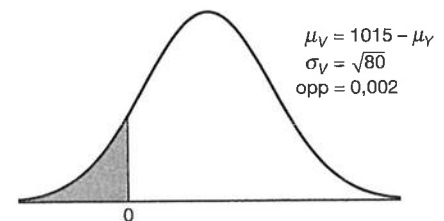
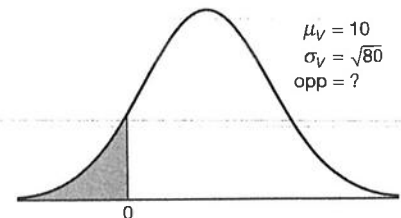
- 60 a** De totale productietijd is $T = A + B + C + D$.
 T is normaal verdeeld met $\mu_T = 12 + 8 + 20 + 18 = 58$ s en
 $\sigma_T = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2 + 0,8^2 + 1,6^2} = \sqrt{3,54}$ s.
 $P(\text{produceren van één artikel duurt langer dan een minuut}) =$
 $P(T > 60) = \text{normalcdf}(60, 10^{99}, 58, \sqrt{3,54}) \approx 0,144$
 Dus in 14,4% van de gevallen.



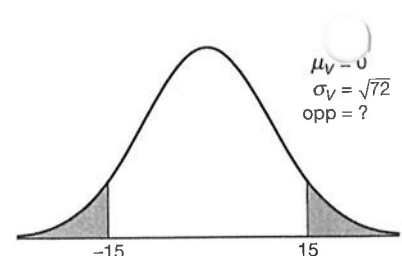
- b** S = de tijd in seconden die nodig is voor het produceren van tien artikelen.
 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 10 \cdot 58 = 580$ en
 $\sigma_S = \sqrt{10} \cdot \sqrt{3,54} = \sqrt{35,4}$ s.
 $P(\text{het produceren van 10 artikelen duurt langer dan 10 minuten}) =$
 $P(S > 600) = \text{normalcdf}(600, 10^{99}, 580, \sqrt{35,4}) \approx 3,9 \cdot 10^{-4}$.
 Dus in 0,04% van de gevallen.



- 61 a** Er gaat limonade verloren als $X < Y$ ofwel $X - Y < 0$, dus $V < 0$ met $V = X - Y$.
 V is normaal verdeeld met $\mu_V = 1015 - 1005 = 10$ mL en
 $\sigma_V = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$ mL.
 $P(\text{er gaat limonade verloren}) = P(V < 0) =$
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 0, 10, \sqrt{80}) \approx 0,132$
 Dus in 13,2% van de gevallen.
- b** Er gaat limonade verloren als $X < Y$, dus als $V < 0$ met $V = X - Y$.
 V is normaal verdeeld met $\mu_V = 1015 - \mu_Y$ en $\sigma_V = \sqrt{80}$ mL.
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 0, 1015 - \mu_Y, \sqrt{80}) = 0,002$
 Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 0, 1015 - x, \sqrt{80})$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 0, \sqrt{80}, 1015 - x)$ (Casio) en $y_2 = 0,002$.
 Intersect geeft $x \approx 989,26$.
 Dus de vulmachine moet worden afgesteld op een gemiddelde van 989,2 mL of lager.



- 62** Het onderlinge lengteverschil V van een tweetal is normaal verdeeld met $\mu_V = 178 - 178 = 0$ cm en $\sigma_V = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$ cm.
 $P(\text{twee mannen verschillen meer dan 15 cm}) =$
 $P(V > 15 \text{ of } V < -15) = P(V > 15) + P(V < -15) =$
 $\text{normalcdf}(15, 10^{99}, 0, \sqrt{72}) + \text{normalcdf}(-10^{99}, -15, 0, \sqrt{72}) = 0,077...$
 Y = het aantal tweetallen met een onderling lengteverschil van meer dan 15 cm.
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 12$ en $p = 0,077...$
 $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - \text{binomcdf}(12, 0,077..., 1) \approx 0,235$



12.5 De exponentiële verdeling

Bladzijde 160

- 63 a** $P(X = 1) = e^{-2} \cdot \frac{2^1}{1!} = \frac{2}{e^2}$
- b** $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} - e^{-2} \cdot \frac{2^1}{1!} = 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{3}{e^2}$
- c** $P(X \leq 2) = \text{poissoncdf}(2, 2) \approx 0,677$

Bladzijde 162

- 64 a** De gemiddelde reparatietijd is drie uur, dus het gemiddelde aantal successen op $[0, t]$ met $t = 3$ uren is 1.
 Dus X is poissonverdeeld met $\lambda = 1$.
 Als een reparatie drie uur duurt vindt er gedurende drie uur 1 succes plaats.
 Als een reparatie korter dan drie uur duurt vinden er dus 1 of meer successen plaats gedurende drie uur.
 Dus $P(T < 3) = P(X \geq 1)$.
- b** De gemiddelde reparatietijd is drie uur, dus het gemiddelde aantal successen op $[0, t]$ met $t = 1\frac{1}{2}$ uren is $\frac{1}{2}$.
 Dus X is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{1}{2}$.
 Als een reparatie anderhalf uur duurt vindt er gedurende $1\frac{1}{2}$ uur 1 succes plaats.
 Als een reparatie langer dan anderhalf uur duurt vindt er dus minder dan 1 succes plaats gedurende anderhalf uur.
 Dus $P(T > 1\frac{1}{2}) = P(X < 1) = P(X = 0)$.

Bladzijde 163

- 65 a** $\lambda = 10$
 $P(T < \frac{1}{2}) = 1 - e^{-10 \cdot \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{e^5}$
- b** 5 seconden = $\frac{1}{12}$ minuut
 $P(T < \frac{1}{12}) = 1 - e^{-10 \cdot \frac{1}{12}} \approx 0,565$
- c** 10 seconden = $\frac{1}{6}$ minuut
 $P(T > \frac{1}{6}) = 1 - P(T \leq \frac{1}{6}) = 1 - (1 - e^{-10 \cdot \frac{1}{6}}) \approx 0,189$
- 66 a** $\mu = 2$, dus $\lambda = 10$
 $P(T < 2) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 2} = 1 - \frac{1}{e}$
- b** $P(T > 4) = 1 - P(T \leq 4) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 4}) \approx 0,135$
- c** $P(T < x) = 0,75$ geeft $1 - e^{-\frac{1}{2}x} = 0,75$
 $e^{-\frac{1}{2}x} = 0,25$
 $-\frac{1}{2}x = \ln(0,25)$
 $x = -2 \ln(0,25) = 2,772...$
 Dus 2 minuten en 46 seconden.

- 67 a** X = het aantal telefoontjes per 5 minuten.
 5 minuten = $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ uur.
 X is poissonverdeeld met $\lambda = 40 \cdot \frac{1}{12} = 3\frac{1}{3}$.
 $P(X = 0) = \text{poissonpdf}(3\frac{1}{3}, 0) \approx 0,036$
- b** Y = het aantal telefoontjes per 3 minuten.
 3 minuten = $\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$ uur.
 Y is poissonverdeeld met $\lambda = 40 \cdot \frac{1}{20} = 2$.
 $P(Y = 2) = \text{poissonpdf}(2, 2) \approx 0,271$
- c** $\lambda = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$
 $P(T < x) = 0,9$ geeft $1 - e^{-\frac{2}{3}x} = 0,9$
 $e^{-\frac{2}{3}x} = 0,1$
 $-\frac{2}{3}x = \ln(0,1)$
 $x = -1\frac{1}{2} \ln(0,1) = 3,453...$
 Dus 3 minuten en 27 seconden.

- 68 a** $P(X > a + b) = 1 - P(X \leq a + b) = 1 - (1 - e^{-\lambda(a+b)}) = e^{-\lambda(a+b)}$
 $P(X > a) \cdot P(X > b) = (1 - P(X \leq a)) \cdot (1 - P(X \leq b)) = (1 - (1 - e^{-\lambda a})) \cdot (1 - (1 - e^{-\lambda b})) = e^{-\lambda a} \cdot e^{-\lambda b} = e^{-\lambda(a+b)}$
 Dus $P(X > a + b) = P(X > a) \cdot P(X > b)$.
- b** $P(X > n) = P(X > \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ keer}}) = \underbrace{P(X > 1) \cdot P(X > 1) \cdot \dots \cdot P(X > 1)}_{n \text{ keer}} = (P(X > 1))^n$

Bladzijde 164

- 69 a $P(T < 1) = 0,20$ geeft $1 - e^{-\lambda \cdot 1} = 0,20$
 $e^{-\lambda} = 0,80$
 $-\lambda = \ln(0,80)$
 $\lambda = -\ln(0,80)$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{-\ln(0,80)} \approx 4,48$$

Dus de gemiddelde levensduur is 4,48 jaar.

- b $\mu = 2$, dus $\lambda = \frac{1}{2}$

$$P(T \geq \frac{500}{365}) = 1 - P(T < \frac{500}{365}) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{500}{365}}) = 0,504...$$

De gevraagde kans is $0,504...^2 \approx 0,254$.

- c $P(T > 3) = 1 - P(T \leq 3) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 3}) = e^{-1,5}$

Dus $10000 \cdot e^{-1,5} \approx 2231$ van deze tandenborstels hebben naar verwachting een levensduur langer dan 3 jaar.

- d $P(T \geq x) = \frac{100}{10000}$ ofwel $P(T < x) = 0,01$ geeft $1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}x}) = 0,01$
 $e^{-\frac{1}{2}x} = 0,01$
 $-\frac{1}{2}x = \ln(0,01)$
 $x = -2 \ln(0,01) = 9,210...$

Dus $9,210... \cdot 365 \approx 3362$ dagen.

- 70 a X_A = het aantal keer dat A op een dag defect raakt.
 X_A is poissonverdeeld met $\lambda_A = \frac{1}{7}$.

$$P(X_A = 1) = \text{poissonpdf}(\frac{1}{7}, 1) = 0,123...$$

X_B = het aantal keer dat B op een dag defect raakt.

X_B is poissonverdeeld met $\lambda_B = \frac{1}{14}$.

$$P(X_B = 1) = \text{poissonpdf}(\frac{1}{14}, 1) = 0,066...$$

De gevraagde kans is $0,123... \cdot 0,066... \approx 0,008$.

- b Y_A = het aantal keer dat A in twee weken defect raakt.

Y_A is poissonverdeeld met $\lambda_A = 2$.

$$P(Y_A = 0) = \text{poissonpdf}(2, 0) = 0,135...$$

Y_B = het aantal keer dat B in twee weken defect raakt.

Y_B is poissonverdeeld met $\lambda_B = 1$.

$$P(Y_B = 0) = \text{poissonpdf}(1, 0) = 0,367...$$

De gevraagde kans is $0,135... \cdot 0,367... \approx 0,050$.

- c T_A = de tijd in weken tussen twee defecten bij A.

T_A is exponentieel verdeeld met $\lambda = 1$.

$$P(T_A < 1) = 1 - e^{-1 \cdot 1} = 1 - e^{-1}$$

T_B = de tijd in weken tussen twee defecten bij B.

T_B is exponentieel verdeeld met $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$P(T_B < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1} = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

De gevraagde kans is $(1 - e^{-1}) \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \approx 0,249$.

- 71 a $\mu = 8$, dus $\lambda = \frac{1}{8}$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ 1 - \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}t} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$$

- b $\int_2^4 f(t) dt = F(4) - F(2) = 1 - \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8} \cdot 4} - (1 - \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8} \cdot 2}) \approx 0,022$

Dit is de kans dat de machine na meer dan 2 maar minder dan 4 dagen moet worden bijgesteld.

- c $P(T > 10) = 1 - P(T \leq 10) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{8} \cdot 10}) \approx 0,287$

- d X = het aantal keer per acht dagen dat de machine moet worden bijgesteld.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 1$.

$$P(X = 2) = \text{poissonpdf}(1, 2) \approx 0,184$$

- e Y = het aantal keer per dag dat de machine moet worden bijgesteld.

Y is poissonverdeeld met $\lambda = \frac{1}{8}$.

Los op $\text{poissonpdf}(\frac{1}{8}, 1)^x > 0,0001$.

Voer in $y_1 = \text{poissonpdf}(\frac{1}{8}, 1)^x$.

Uit de tabel volgt

$x = 4$ geeft $y_1 \approx 0,00015$

$x = 5$ geeft $y_1 \approx 0,000016$.

Dus x kan de waarden 1, 2, 3 of 4 aannemen.

Bladzijde 165

- 72 a De gemiddelde levensduur is 2500 uur, dus gemiddeld gaat er gedurende 2500 uur één lamp kapot, dus $\lambda = 1$.
Als twee lampen hoogstens 2500 uur branden gaan er dus gedurende 2500 uur twee of meer lampen kapot.
Dus $P(T + T \leq 2500) = P(Y \geq 2)$.
- b $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - \text{poissoncdf}(1, 1) \approx 0,264$
 $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} - e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$
- c $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \text{poissoncdf}(1, 2) \approx 0,080$
 $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} - e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} - e^{-1} \cdot \frac{1^2}{2!} = 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} = 1 - 2\frac{1}{2}e^{-1}$

Bladzijde 167

- 73 a X = het aantal televisies dat binnen één uur wordt gerepareerd.
 X is poissonverdeeld met $\lambda = 1\frac{1}{2}$, want $\mu = \frac{2}{3}$.
 $P(T + T < 1) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1\frac{1}{2})^0}{0!} - e^{-1\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1\frac{1}{2})^1}{1!} = 1 - e^{-1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}e^{-1\frac{1}{2}} = 1 - 2\frac{1}{2}e^{-1\frac{1}{2}}$
- b Y = het aantal televisies dat binnen vier uur wordt gerepareerd.
 Y is poissonverdeeld met $\lambda = 4 \cdot 1\frac{1}{2} = 6$.
 $P(T + T + T + T + T + T < 4) = P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - \text{poissoncdf}(6, 5) \approx 0,554$
- c Z = het aantal televisies dat in a uur wordt gerepareerd.
 Z is poissonverdeeld met $\lambda = a \cdot 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}a$.
 $P(T + T + T + T < a) = P(Z \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - \text{poissoncdf}(1\frac{1}{2}a, 3)$.
Los op $1 - \text{poissoncdf}(1\frac{1}{2}a, 3) = 0,95$.
Voer in $y_1 = 1 - \text{poissoncdf}(1\frac{1}{2}x, 3)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{PoissonCD}(3, 1\frac{1}{2}x)$ (Casio) en $y_2 = 0,95$.
Intersect geeft $x = 5,169...$
Dus $a = 5,169...$ uur ≈ 5 uur en 10 minuten.

- 74 a $f'_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$ geeft
 $f_\lambda(x) = F'_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} + \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$ ofwel
 $f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$

- b $P(X \leq x) = P(T + T + T \leq x) = P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) =$

$$1 - e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^0}{0!} - e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^1}{1!} - e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^2}{2!} = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} - \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}$$

Hierin is Y de poissonverdeelde toevalsvariabele met gemiddeld λ successen op $[0, 1]$.

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} - \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases} \text{ geeft}$$

$$f_\lambda(x) = F'_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} + \lambda^2 x e^{-\lambda x} - \lambda^2 x e^{-\lambda x} + \frac{1}{2} \lambda^3 x^2 e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases} \text{ ofwel}$$

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2} \lambda^3 x^2 e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

- 75 a $P(2 < T < 5) = P(T \leq 5) - P(T \leq 2) = 1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 5} - (1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 2}) = 1 - e^{-\frac{5}{4}} - 1 + e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{5}{4}}$
 b $P(T + T > 6) = 1 - P(T + T \leq 6) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 6} - \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 6}) = 1 - 1 + e^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}} = 2\frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}}$
 c $P(T + T + T < 10) = 1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 10} - \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 10} - \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4})^2 \cdot 10^2 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 10} = 1 - e^{-\frac{5}{2}} - 2\frac{1}{2} e^{-\frac{5}{2}} - 3\frac{1}{8} e^{-\frac{5}{2}} = 1 - 6\frac{5}{8} e^{-\frac{5}{2}} \approx 0,456$

- 76 a T_w = de tijd in seconden die een klant moet wachten voordat hij aan de beurt is.
 $\mu_w = 200$, dus $\lambda_w = \frac{1}{200}$

$$P(T_w + T_w < 300) = 1 - e^{-\frac{1}{200} \cdot 300} - \frac{1}{200} \cdot 300 \cdot e^{-\frac{1}{200} \cdot 300} = 1 - e^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}} = 1 - 2\frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}}$$

- b T_k = de tijd in seconden die de kassamedewerker nodig heeft om een klant te helpen.

$$\mu_k = 100, \text{ dus } \lambda_k = \frac{1}{100}$$

$$P(T_w < 100) = 1 - e^{-\frac{1}{200} \cdot 100} = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

$$P(T_k > 100) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{100} \cdot 100}) = e^{-1}$$

$$\text{De gevraagde kans is } (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \cdot e^{-1} \approx 0,145.$$

- c X = het aantal klanten dat de kassamedewerker in 5 minuten helpt.

$$X \text{ is poissonverdeeld met } \lambda = 300 \cdot \frac{1}{100} = 3.$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \text{poissoncdf}(3, 5) \approx 0,084$$

- d Y = het aantal klanten dat de kassamedewerker binnen a minuten helpt.

$$Y \text{ is poissonverdeeld met } \lambda = 60a \cdot \frac{1}{100} = \frac{3}{5}a.$$

$$P(T + T + T + T + T + T + T + T + T + T < a) = P(Y \geq 10) = 1 - P(Y \leq 9) = 1 - \text{poissoncdf}(\frac{3}{5}a, 9).$$

$$\text{Los op } 1 - \text{poissoncdf}(\frac{3}{5}a, 9) = 0,6.$$

$$\text{Voer in } y_1 = 1 - \text{poissoncdf}(\frac{3}{5}x, 9) \text{ (TI) of } y_1 = 1 - \text{PoissonCD}(9, \frac{3}{5}x) \text{ (Casio) en } y_2 = 0,6.$$

$$\text{Intersect geeft } x = 17,459...$$

$$\text{Dus } a = 17,459... \text{ uur} \approx 17 \text{ uur en } 28 \text{ minuten.}$$

Bladzijde 168

- 77 a $n = 1$ geeft $f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \lambda^1 \cdot x^0 \cdot e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$

Dat klopt, dit is de kansdichtheid van de exponentiële verdeling.

$$n = 2 \text{ geeft } f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{\lambda^2}{1!} \cdot x^1 \cdot e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

Zie het resultaat van opgave 74a, het klopt.

$$n = 3 \text{ geeft } f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{\lambda^3}{2!} \cdot x^2 \cdot e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2} \lambda^3 x^2 e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

Zie het resultaat van opgave 74b, het klopt.

- b Invullen van $n = 10$ in de formule geeft $f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{\lambda^{10}}{9!} \cdot x^9 \cdot e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$

$$P(a < X_1 + X_2 + \dots + X_{10} < b) = \int_a^b f_\lambda(x) dx = \int_a^b \frac{\lambda^{10}}{9!} \cdot x^9 \cdot e^{-\lambda x} dx$$

c $\mu = 1200$, dus $\lambda = \frac{1}{1200}$

$$n = 20 \text{ geeft } f_{\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{\left(\frac{1}{1200}\right)^{20}}{19!} \cdot x^{19} \cdot e^{-\frac{1}{1200}x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{kans} = \int_{15000}^{20000} \frac{\left(\frac{1}{1200}\right)^{20}}{19!} \cdot x^{19} \cdot e^{-\frac{1}{1200}x} dx$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{\left(\frac{1}{1200}\right)^{20}}{19!} \cdot x^{19} \cdot e^{-\frac{1}{1200}x}.$$

$$\text{De optie fnInt (TI) of } \int dx \text{ (Casio) geeft kans} = \int_{15000}^{20000} y_1 dx \approx 0,207.$$

d X = het aantal lampen dat in 20 000 uur defect gaat.

X is poissonverdeeld met $\lambda = 20\,000 \cdot \frac{1}{1200} = 16\frac{2}{3}$.

$$P(X = 15) = \text{poissonpdf}(16\frac{2}{3}, 15) \approx 0,094.$$

Diagnostische toets

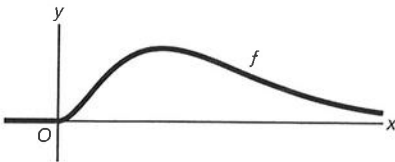
I zijde 170

1 a $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(3x-1)^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 (3x-1)^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \cdot -1 \cdot (3x-1)^{-1} \right]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{3(3x-1)} \right]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{9x-3} \right]_t^0 =$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{-3} + \frac{1}{9t-3} \right) = \frac{1}{3}$$

b $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-2x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2e^{2t}} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2e^{2t}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

2 a



b $G(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x - 1\right)e^{-x}$ geeft
 $G'(x) = (-x-1) \cdot e^{-x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x - 1\right) \cdot (-e^{-x}) = (-x-1 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1)e^{-x} = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$
 $G'(x) = g(x)$, dus G is een primitieve van g .

c $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{2}x^2 e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 - x - 1\right)e^{-x} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{x^2}{2e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right]_0^t =$
 $0 - 0 - 0 + 1 = 1$

Er geldt $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, dus f is een kansdichtheid.

3 a $\frac{1}{16}x \geq 0$ voor $0 \leq x \leq 4$

$$\frac{1}{36}(x-7)^2 \geq 0 \text{ voor } 4 \leq x < 10$$

Dus $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^4 \frac{1}{16}x dx = \left[\frac{1}{32}x^2 \right]_0^4 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_4^{10} \frac{1}{36}(x-7)^2 dx = \left[\frac{1}{108}(x-7)^3 \right]_4^{10} = \frac{1}{108} \cdot 3^3 - \frac{1}{108} \cdot (-3)^3 = \frac{27}{108} + \frac{27}{108} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

Er geldt $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, dus f is inderdaad een kansdichtheid.

- b De primitieven van $g(x) = \frac{1}{16}x$ zijn $G(x) = \frac{1}{32}x^2 + c$.
 Er moet gelden $G(0) = 0$, dus $\frac{1}{32} \cdot 0^2 + c = 0$, dus $c = 0$.
 De primitieven van $h(x) = \frac{1}{36}(x-7)^2$ zijn $H(x) = \frac{1}{108}(x-7)^3 + d$.
 Er moet gelden $H(10) = 1$, dus $\frac{1}{108} \cdot 3^3 + d = 1$ ofwel $\frac{1}{4} + d = 1$, dus $d = \frac{3}{4}$.

$$\text{Dus } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{32}x^2 & \text{voor } 0 \leq x < 4 \\ \frac{1}{108}(x-7)^3 + \frac{3}{4} & \text{voor } 4 \leq x < 10 \\ 1 & \text{voor } x \geq 10 \end{cases}$$

c $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) = 1 - \frac{1}{108}(6-7)^3 - \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{108} - \frac{3}{4} = \frac{7}{27}$

- 4 Voer in lijst 1 = {4, 5, 6, 7, 8, 9} en lijst 2 = {0.10, 0.15, 0.27, 0.24, 0.16, 0.08}.
 1-Var Stats (TI) of 1VAR (Casio) geeft $E(X) = \bar{x} = 6,45$ en $\sigma_X \approx 1,40$.

- 5 a opp links van a is $\frac{1 - 0,75}{2} = 0,125$.

$$a = \text{invNorm}(0,125, 158, 12) \approx 144,2$$

- b $\text{normalcdf}(112, 10^{99}, \mu, 16) = 0,71$

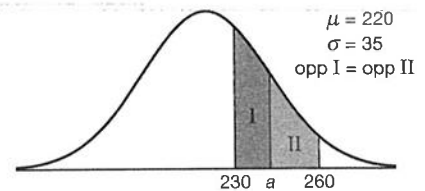
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(112, 10^{99}, x, 16)$ (TI) of $y_1 = \text{NormCD}(112, 10^{99}, 16, x)$ (Casio) en $y_2 = 0,71$.
 Intersect geeft $x \approx 121$, dus $\mu \approx 121$.

- c $\text{normalcdf}(14, 22, 18, \sigma) = 0,74$

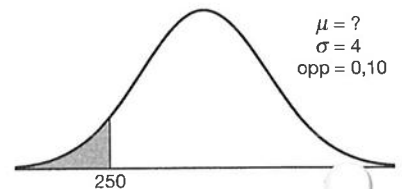
Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(14, 22, x, 18)$ (TI) of $y_1 = \text{NormCD}(14, 22, x, 18)$ (Casio) en $y_2 = 0,74$.
 Intersect geeft $x \approx 3,55$, dus $\sigma \approx 3,55$.

Bladzijde 171

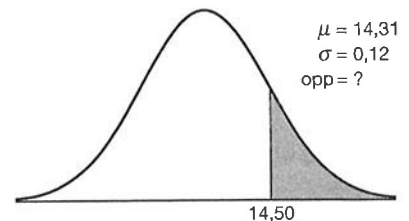
- 6 Normale verdeling met $\mu = 220$ en $\sigma = 35$.
 $\text{normalcdf}(230, a, 220, 35) = \text{normalcdf}(a, 260, 220, 35)$
 Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(230, x, 220, 35)$ en
 $y_2 = \text{normalcdf}(x, 260, 220, 35)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormalCD}(230, x, 35, 220)$ en
 $y_2 = \text{NormalCD}(x, 260, 35, 220)$ (Casio).
 Intersect geeft $x \approx 242,8$, dus $a = 242,8$.



- 7 Normale verdeling met onbekende μ en $\sigma = 4$.
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 250, \mu, 4) = 0,10$
 Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 250, x, 4)$ (TI) of
 $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 250, 4, x)$ (Casio) en $y_2 = 0,10$.
 Intersect geeft $x \approx 255,1$.
 Dus bij een gemiddelde van 255,1 gram.



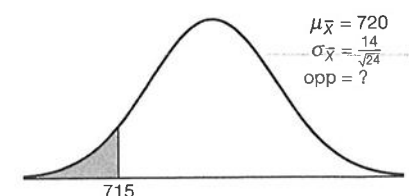
- 8 Normale verdeling met $\mu = 14,31$ mm en $\sigma = 0,12$ mm.
 $P(\text{moer heeft diameter van meer dan } 14,50 \text{ mm}) =$
 $\text{normalcdf}(14,50, 10^{99}, 14,31, 0,12) = 0,056\dots$
 $X =$ het aantal moeren met een diameter van meer dan 14,50 mm.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,056\dots$
 $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \text{binomcdf}(100, 0,056\dots, 9) \approx 0,057$



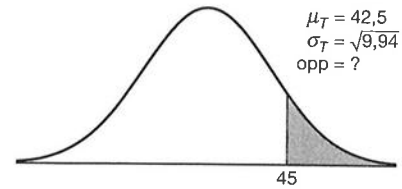
- 9 $\bar{X}$ = de gemiddelde in gram van 24 potten in een doos.
 $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 720$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{14}{\sqrt{24}}$

$$P(\bar{X} < 715) = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 715, 720, \frac{14}{\sqrt{24}}\right) \approx 0,040$$

Dus in 4,0% van de gevallen.



- 10** De totale productietijd T is normaal verdeeld met
 $\mu_T = 19,3 + 12,5 + 10,7 = 42,5$ minuten en
 $\sigma_T = \sqrt{2,5^2 + 1,5^2 + 1,2^2} = \sqrt{9,94}$ minuten.
 $P(\text{productieproces duurt langer dan drie kwartier}) = P(T > 45) =$
 $\text{normalcdf}(45, 10^{99}, 42,5, \sqrt{9,94}) \approx 0,214$
 Dus in 21,4% van de gevallen.



- 11 a** $\mu = 2\frac{1}{2}$, dus $\lambda = \frac{2}{5}$
 $P(T > 4) = 1 - P(T \leq 4) = 1 - (1 - e^{-\frac{2}{5} \cdot 4}) = e^{-\frac{8}{5}}$

b $P(T < 2) = 1 - e^{-\frac{2}{5} \cdot 2} \approx 0,551$

c $P(T < x) = 0,1$ geeft $1 - e^{-\frac{2}{5}x} = 0,1$
 $e^{-\frac{2}{5}x} = 0,9$
 $-\frac{2}{5}x = \ln(0,9)$
 $x = -2\frac{1}{2} \ln(0,9) = 0,263...$

Dus $0,263... \cdot 12 \approx 3$ maanden.

- 12 a** X = het aantal fietsen dat in een uur gerepareerd wordt.
 X is poissonverdeeld met $\lambda = 3$.

$$P(X = 4) = e^{-3} \cdot \frac{3^4}{4!} = 3\frac{3}{8}e^{-3}$$

- b** Y = het aantal fietsen dat binnen een halfuur gerepareerd wordt.
 Y is poissonverdeeld met $\lambda = 1\frac{1}{2}$.

$$P(T + T < \frac{1}{2}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$1 - e^{-1\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1\frac{1}{2})^0}{0!} - e^{-1\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1\frac{1}{2})^1}{1!} = 1 - e^{-1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}e^{-1\frac{1}{2}} = 1 - 2\frac{1}{2}e^{-1\frac{1}{2}}$$

- c** Y = het aantal fietsen dat op een dag gerepareerd wordt.
 Y is poissonverdeeld met $\lambda = 8 \cdot 3 = 24$.

$$P(25 < Y < 30) = P(Y \leq 29) - P(Y \leq 25) = \text{poissoncdf}(24, 29) - \text{poissoncdf}(24, 25) \approx 0,236$$

Kangoeroe-opgaven

Bladzijde 174

- 1 E Met als middelste cijfer 4 heb je acht getallen: 840, 741, 642, 543, 444, 345, 246 en 147. Op dezelfde manier vind je de volgende tabel.

middelste cijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
aantal	2	4	6	8	9	7	5	3	1

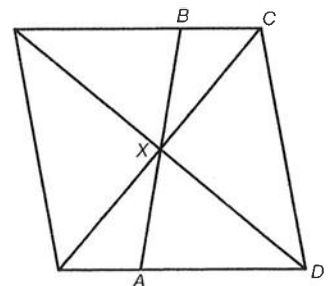
Het aantal van deze getallen is dus $2 + 4 + \dots + 1 = 45$.

- 2 B De bovenste twee stroken vormen samen een driehoek die twee keer zo breed en twee keer zo hoog is als de kleine blauwe driehoek bovenaan. De oppervlakte van deze driehoek is dus $2 \cdot 2 = 4$ keer zo groot als die van de kleine blauwe driehoek, daarom is de oppervlakte van de bovenste witte strook 3 keer zo groot. Op dezelfde manier vind je dat de oppervlaktes van de andere stroken 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 en 19 keer zo groot zijn. De hele driehoek is dan $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$ keer zo groot, de blauwe stroken zijn samen $1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45$ keer zo groot. Dus 45% van de oppervlakte van de driehoek is blauw.
- 3 E Een even getal is te schrijven als $2n$, met $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Voor een even getal krijg je zo $(2n)^{2n} = ((2n)^n)^2$. Dus de 50 getallen met een even exponent zijn een kwadraat. Daarnaast ook nog de 5 getallen met een oneven kwadraat als grondtal. Dat zijn de getallen 1, 9, 25, 49 en 81. Dus $50 + 5 = 55$ van de getallen zijn een kwadraat.
- 4 C Van de vier inktvissen kan er maar één de waarheid spreken. Er liegen dus minimaal drie. Als ze alle vier zouden liegen, dan zou het aantal armen $4 \cdot 7 = 28$ zijn en de blauwe de waarheid spreken. Dat kan dus niet. Dus liegen er precies drie en spreekt er één de waarheid. Het aantal armen is daarom $3 \cdot 7 + 8 = 29$ of $3 \cdot 7 + 6 = 27$. De rode inktvis liegt dus, en heeft dus 7 armen.
- 5 D Driehoek OAB is gelijkbenig, dus is $\angle OBA = 7^\circ$ en $\angle OAB = 180^\circ - 2 \cdot 7^\circ = 166^\circ$ (hoekensom driehoek). In de gelijkbenige driehoek ABC geldt dan $\angle BAC = 180^\circ - 166^\circ = 14^\circ$ (gestrekte hoek), $\angle ACB = 14^\circ$ (gelijkbenige driehoek) en $\angle ABC = 180^\circ - 2 \cdot 14^\circ = 152^\circ$ (hoekensom driehoek). De volgende driehoeken zijn dan gelijkbenig met basishoeken van 21° , van 28° , enzovoort. Dit gaat zo door tot de gelijkbenige driehoek met basishoeken van 84° . Dat zijn twaalf driehoeken. De kangoeroe stopt bij de 13° letter, de M .

Bladzijde 175

- 6 A De getallen op plaats 2, 4, 6, 8, 10, ... zijn $2 = 4 - 2$, $0 = 4 - 4$, $-2 = 4 - 6$, $-4 = 4 - 8$, $-6 = 4 - 10$, enzovoort. Het 2010° getal is daarom $4 - 2010 = -2006$.
- 7 B Per tijdseenheid levert de warmwaterkraan $\frac{2}{3}$ volume-eenheden water van 64°C , de koudwaterkraan $\frac{4}{5}$ volume-eenheden water van 20°C . Er komen dan $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$ volume-eenheden water in het bad. De temperatuur is daarom $\frac{64 \cdot \frac{2}{3} + 20 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{22}{15}} = 40^\circ\text{C}$.

- 8 B Verleng de lijnstukken CX , DX , AD en BC zodat je de figuur hiernaast krijgt. Dit is een parallellogram waarin de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dus een ruit. Alle zijden zijn dus even lang, waaruit volgt dat $AD + BC = 2$. De omtrek van het trapezium is daarom 6.



- 9 D Er is één zwarte streep meer, het aantal strepen is dus oneven. Maar dan moet er een oneven aantal brede en een even aantal smalle strepen zijn. Dit geeft de volgende tabel aan mogelijkheden.

smal	10	6	2
breed	1	3	5
aantal mogelijkheden	$\binom{11}{10} = 11$	$\binom{9}{6} = 84$	$\binom{7}{2} = 21$

Er zijn dus $11 + 84 + 21 = 116$ verschillende van deze streepjescodes mogelijk.

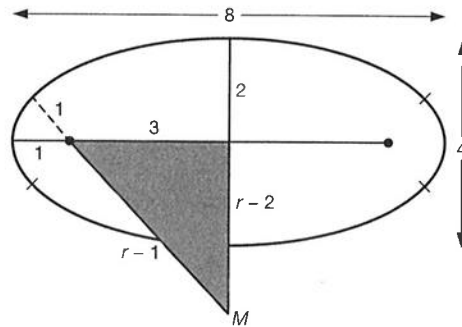
- 10 A Als r de straal en M het middelpunt bij de grote cirkelboog aan de bovenkant is, dan is de afstand van M tot het middelpunt van de linker kleine cirkelboog gelijk aan $r - 1$. Vanuit M moet je $r - 2$ omhoog en 3 naar links. Dus geldt volgens de stelling van Pythagoras dat

$$(r - 1)^2 = (r - 2)^2 + 3^2$$

$$r^2 - 2r + 1 = r^2 - 4r + 4 + 9$$

$$2r = 12$$

$$r = 6$$



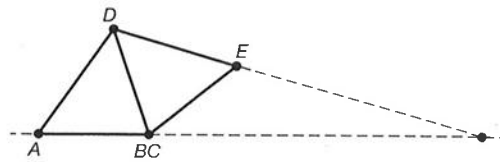
Bladzijde 176

- 11 tel je voor dat de kisten op een tegelvloer in de vorm van een schaakbord staan. De kisten staan dan bijvoorbeeld allemaal op een zwart veld. Bij elke verplaatsing naar een zwart veld staan de letters dan goed of op de kop. Op een wit veld staan de letters op hun zij gedraaid. Nu zie je direct dat alleen B mogelijk is.

- 12 C Elk viertal laatste cijfers komt voor in $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ interessante getallen. De vijftallen die mogelijk zijn, zijn 60 123, 70 124, 80 125, 80 134, 90 126, 90 135 en 90 234. Dit geeft $7 \cdot 24 = 168$ interessante getallen

- 13 C Elke schakelklok geeft gedurende de helft van de tijd dat hij stroom krijgt de stroom door. De lamp krijgt dus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ deel van de tijd stroom en brandt dus $\frac{1}{8} \cdot 168 = 21$ uur per week.

- 14 D Neem het aanzicht in de richting van de zijde BC , dan krijg je het plaatje hiernaast. De lijn door D en E snijdt de grond aan de andere kant van BC dan A .



- 15 F $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$ (hoekensom driehoek), dus $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ (gestrekte hoek). Evenzo is $\angle 7 = \angle 4 + \angle 5$. De hoeken 1, 4 en 7 zijn dus sowieso verschillend. Het is mogelijk dat er maar drie verschillende hoeken zijn: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 8 = \angle 9 = 30^\circ$, $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = 60^\circ$ en $\angle 3 = \angle 7 = 120^\circ$.

Bladzijde 177

- 16 B De verschillende halskettingen zijn: wwwzzzzz, wwzwzzzz, wwzzwzzz, wzwwzzzz en wzwwzzzz.

- 17 C Meneer Groot moet dus de kleinste of de middelste zijn. Omdat de kleinste hem antwoordt, kan meneer Groot niet de kleinste zijn. Meneer Groot is dus de middelste. Meneer Klein moet dan de grootste zijn (hij is niet de kleinste) en meneer Middel is dan de kleinste.

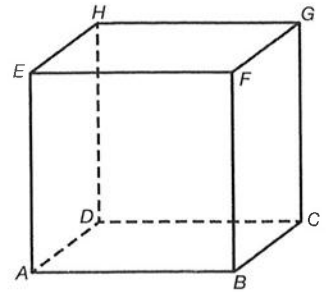
- 18 D Volgens de stelling van Thales is $\angle ASB = 90^\circ$. De rechthoekige driehoek ASB heeft daarom een oppervlakte van $\frac{1}{2}r^2$.

De cirkelsector ASB van de grote cirkel is een kwart van de grote cirkel en heeft dus een oppervlakte van $\frac{1}{4}\pi r^2$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABS$ geeft $AB^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$, dus $AB = r\sqrt{2}$. De oppervlakte van de kleine cirkel is dan $\pi \cdot \left(\frac{1}{2}r\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$. De oppervlakte van de halve kleine cirkel is dan $\frac{1}{4}\pi r^2$.

Maar dan is de oppervlakte van het blauwe gebied gelijk aan de oppervlakte van driehoek $\triangle ABS$, en dus $\frac{1}{2}r^2$.

- 19 C De ribbe AB kan in drie viertallen worden gekozen:
 $AB-CD-EF-GH$, $AB-CD-EH-FG$ en $AB-CG-EF-DH$.
 Er zijn drie ribben met A als eindpunt.
 Emma kan dus uit $3 \cdot 3 = 9$ viertallen kiezen.



- 20 E Als in het diagram hiernaast in vakjes met gelijk nummer hetzelfde staat (wel of niet een kruisje) heeft elk 3×3 -vierkant evenveel kruisjes.
 Als je in de vakjes met bijvoorbeeld de nummers 1, 3 en 4 een kruisje plaatst (en verder niet), heeft elk 3×3 -vierkant drie kruisjes.
 Als je in de vakjes met bijvoorbeeld de nummers 1, 2, 4 en 8 een kruisje plaatst (en verder niet), heeft elk 3×3 -vierkant vier kruisjes.
 Als je in het lege vakje een kruisje plaatst (en verder niet), heeft elk 3×3 -vierkant één kruisje.
 Dus alle aantallen zijn mogelijk.

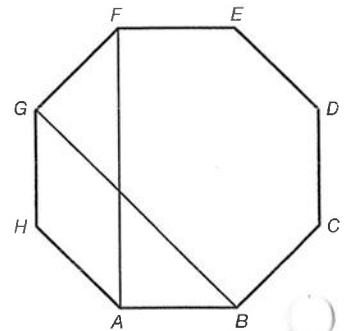
1	2	3	1	2
4	5	6	4	5
7	8		7	8
1	2	3	1	2
4	5	6	4	5

Bladzijde 178

- 21 B Stel het ontbrekende getal in de eerste kolom is a . Dan is de som van elke kolom gelijk aan $a + 8$. Het ontbrekende getal in de tweede kolom is daarom $a + 1$, het ontbrekende getal in de derde kolom is $a + 4$. De eerste rij heeft dan som $a + 12$, dus de derde rij ook. Er moet dus gelden $6 + a + 1 + 1 + ? = a + 12$. Hieruit volgt $? = 4$.

- 22 A Aan het begin zijn er een even aantal lampjes aan, namelijk 0. Iedere keer dat Ismael en Lisa een schakelaar omzetten gaan er twee extra lampjes aan, of er gaan twee extra lampjes uit, of er gaat er eentje aan en eentje uit. Hoe dan ook, het aantal lampjes dat aan is moet dus altijd even zijn. Ze kunnen dus nooit allemaal tegelijk aan zijn.

- 23 E In totaal kun je $4 \cdot 4 = 16$ paren lijnen tekenen. Om drie gebieden te krijgen mogen de twee lijnen elkaar niet snijden, zoals het plaatje laat zien. Maar dan zijn er $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ paren lijnen goed. De kans is dus $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.



- 24 D $2012 = 2^2 \cdot 503 = 2^2 \cdot (512 - 9) = 2^2 \cdot (2^9 - 9)$

- 25 B De getallen in elke kolom zijn allemaal 1 groter dan de getallen ernaast in de kolom ervoor. In totaal heeft de tabel 15 rijen, daarom is de som van de 14 getallen in de tweede kolom $14 - 1$ groter dan die van de eerste. De som van de 13 getallen in de derde kolom is $13 - 3$ groter dan die van de tweede, enzovoort. De sommen zijn achtereenvolgens $14 - 1 = 13$, $13 - 3 = 10$, $12 - 6 = 6$, $11 - 10 = 1$, $10 - 15 = -5$ groter. De vijfde kolom heeft dus de grootste som.

Bladzijde 179

- 26 D Stel $BN = x$, dan is $CN = AN = 16 - x$.

$$\begin{aligned} \text{De stelling van Pythagoras in } \triangle ABN \text{ geeft } 4^2 + x^2 &= (16 - x)^2 \\ 16 + x^2 &= 256 - 32x + x^2 \\ 32x &= 240 \\ x &= 7,5 \end{aligned}$$

Driehoek AMD' is congruent (gelijk) aan driehoek ANB , dus is $AM = AN = 16 - 7,5 = 8,5$. Maar dan is vierhoek $ABNM$ de helft van $ABCD$ en heeft dus een oppervlakte van $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2$. De oppervlakte van $\triangle AMD'$ is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7,5 = 15 \text{ cm}^2$. Vijfhoek $ABNMD'$ heeft derhalve een oppervlakte van $32 + 15 = 47 \text{ cm}^2$.

27 C $1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + \dots + 9 \cdot 9 \cdot 9 =$
 $1 \cdot (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \dots + 9 \cdot 9) + 2 \cdot (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \dots + 9 \cdot 9) + \dots + 9 \cdot (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \dots + 9 \cdot 9) =$
 $(1 + 2 + \dots + 9) \cdot (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \dots + 9 \cdot 9) =$
 $(1 + 2 + \dots + 9) \cdot (0 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + 1 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + \dots + 9 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9)) =$
 $(1 + 2 + \dots + 9) \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 45 \cdot 45 \cdot 45 = 45^3$

28 A Stel de lengte van trein G is g meter, dan is de snelheid van deze trein $\frac{g}{8}$ m/s. Als je de lengte van trein H h meter noemt, dan heeft trein H een snelheid van $\frac{h}{12}$ m/s. De achterkanten van de treinen naderen elkaar dan met een snelheid van $\frac{g}{8} + \frac{h}{12} = \frac{3g + 2h}{24}$ m/s. Zij leggen $g + h$ meter af in 9 seconden, dus die snelheid is ook gelijk aan $\frac{g + h}{9}$ m/s. Hieruit volgt $\frac{3g + 2h}{24} = \frac{g + h}{9}$
 $9(3g + 2h) = 24(g + h)$
 $27g + 18h = 24g + 24h$
 $3g = 6h$
 $g = 2h$

Trein G is dus twee keer zo lang als trein H.

29 E De leuke getallen van drie cijfers zijn 199, 299, 399, ..., 999. Hun som is 5391.

30 C Bij het begin moet je van S naar A. In A gekomen, heb je twee mogelijkheden: naar S of naar B. De eerste keren moet je dan terug naar A, pas de 13^e zet kun/mag je naar F. Dit geeft de volgende serie: S-A-B/S-A-B/S-A-B/S-A-B/S-A-B/S-A-B/S-F. Je moet dus 6 keer kiezen uit 2 mogelijkheden. Dit geeft $2^6 = 64$ manieren.

Bladzijde 180

31 E Achtereenvolgens krijgen we $\{1, 2, 3\}$, $\{5, 4, 3\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{17, 16, 15\}$, enzovoort: telkens een macht van 2, één minder en één meer. Maar 2013 is geen macht van 2 en ook niet één meer of één minder.

32 C In een driehoek staat de langste zijde tegenover de grootste hoek en de kortste zijde tegenover de kleinste hoek. In beide driehoeken is hoek B de grootste, namelijk 61° , dus is AC de langste zijde in de bovenste driehoek en is AD de langste zijde in de onderste driehoek. Maar AB staat tegenover een kleinere hoek in de onderste driehoek, dus moet AD de langste zijn.

33 B $\frac{2}{3}$ deel van de container komt overeen met de lege ruimte van 4 cm hoog in de cilinder.
 $\frac{1}{3}$ deel (het water) komt dus overeen met 2 cm.

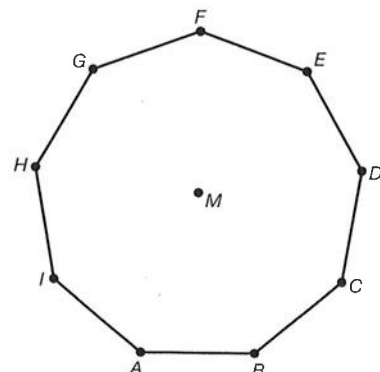
34 A $2013 = 33 \cdot 61$, dus Karel is 61 jaar en daarom geboren in 1952.

Bladzijde 181

35 D $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{4} = 0,25$, enzovoort
 Telkens als je de noemer verdubbelt komt er een cijfer achter de komma bij.
 $1024 = 2^{10}$, dus 10 cijfers achter de komma.

36 D Als alle breuken gehele getallen moeten opleveren, dan moeten de getallen 12 tot en met 22 allemaal in de teller staan. Maar de breuken met teller 13, 17 of 19 leveren alleen een geheel getal op als de noemer 1 is, dus kunnen niet alle breuken gehele getallen zijn. Tien van de breuken lukt wel, bijvoorbeeld $\frac{13}{1}, \frac{6}{2}, \frac{21}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{14}{7}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{20}{10}$ en $\frac{22}{11}$.

37 A We tellen allereerst het aantal driehoeken waar M binnen ligt met hoekpunt A. Dit zijn ABF, ACF, ACG, ADF, ADG, ADH, AEF, AEG, AEH en AEI, dus totaal 10. Als we dit voor alle punten van de negenhoek doen, dan vinden we $9 \cdot 10 = 90$ driehoeken. Maar we hebben nu elke driehoek drie keer geteld. Er zijn dus $\frac{90}{3} = 30$ driehoeken waar M binnen ligt.



- 38 C** Nummer de auto's 1 tot en met 50. De snelheid van auto 1 is 50 km/u, van auto 2 is 51 km/u, ..., van auto n is $49 + n$ km/u. Auto 1 heeft na 100 uur 100 uur gereden, auto 2 heeft dan 99 uur gereden, ..., auto n geeft dan $101 - n$ uur gereden. De afstand die auto n dan heeft afgelegd is
- $$(101 - n)(49 + n) = 4949 + 101n - 49n - n^2 = -n^2 + 52n + 4949. \text{ Deze afstand is maximaal voor } n = \frac{-52}{2 \cdot -1} = 26.$$
- Auto 26 heeft dan een snelheid van $49 + 26 = 75$ km/u.

- 39 E** Nummer de bomen 1 tot en met 100.
 Dan zouden de nummers 1 tot en met 6
 13 tot en met 18
 25 tot en met 30
 37 tot en met 42
 49 tot en met 54
 61 tot en met 66
 73 tot en met 78
 85 tot en met 90
 97 tot en met 100

eik mogen zijn.

Meer kan niet. Van de nummers 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, 67, 73, 79, 85, 91 en 97 mogen geen twee opeenvolgende bomen een eik zijn, want dan zouden er wel precies vijf bomen tussen twee eiken staan. Van deze 17 bomen zijn er dus minstens acht geen eik. Hetzelfde geldt voor 2, 8, ..., 98; voor 3, 9, ..., 99; voor 4, 10, ..., 100; voor 5, 11, ..., 95 en voor 6, 12, ..., 96. Dus minstens $6 \cdot 8 = 48$ bomen zijn geen eik, en dus kan de tuinman hoogstens 52 eiken planten.

- 40 B** Als Daniëlle tegen de rijrichting inloopt, legt de boom $l - 20$ meter af (l is de lengte van de boom in meter). Als ze met de boom meeloopt, legt de boom $140 - l$ meter af in een tijd die 7 keer zo lang is. Dus moet de boom dan $7(l - 20)$ meter afleggen. Dit geeft $7(l - 20) = 140 - l$
 $7l - 140 = 140 - l$
 $8l = 280$
 $l = 35$