

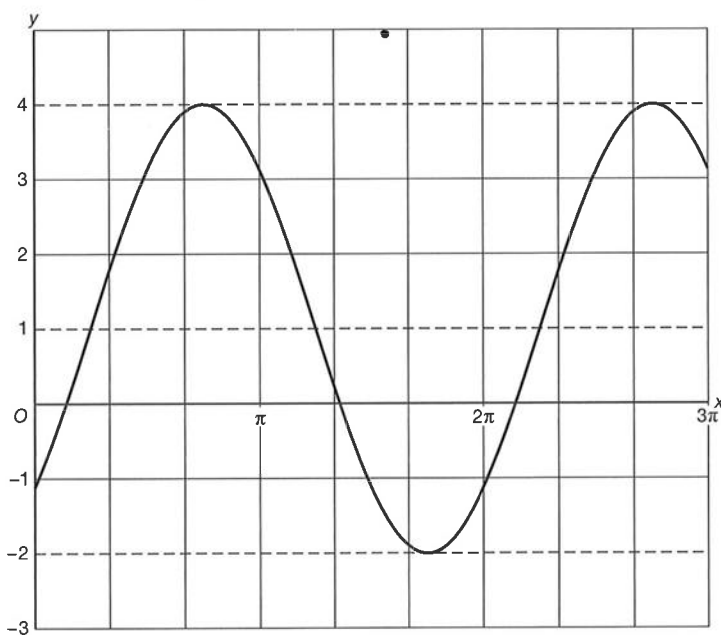
11 Periodieke functies

Voorkennis Sinusoiden

Bladzijde 88

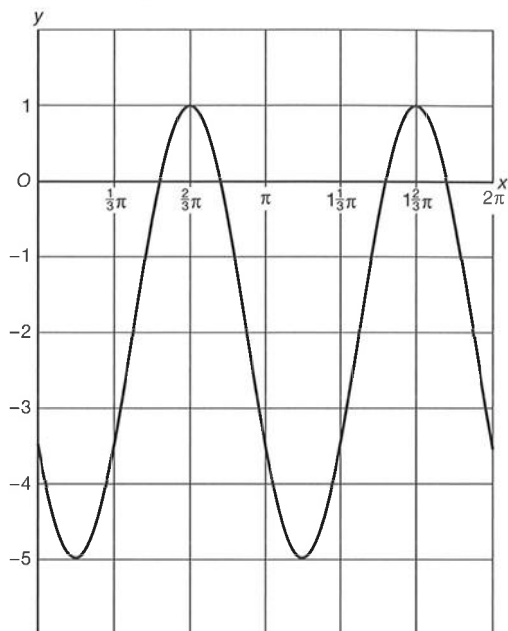
- 1 a $a = \text{evenwichtsstand} = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2} = \frac{15 + -5}{2} = 5$
 amplitude = maximum - evenwichtsstand = $15 - 5 = 10$, dus $b = 10$.
 $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 1$, dus $d = 1$.
 Dus $y = 5 + 10 \sin(\frac{1}{2}\pi(x - 1))$.
- b $a = 5$, $b = -10$ en $c = \frac{1}{2}\pi$
 Dalend door de evenwichtsstand bij $x = 3$, dus $d = 3$.
 Dus $y = 5 - 10 \sin(\frac{1}{2}\pi(x - 3))$.
- c $a = 5$, $b = 10$ en $c = \frac{1}{2}\pi$
 Een hoogste punt is $(2, 15)$, dus $d = 2$.
 Dus $y = 5 + 10 \cos(\frac{1}{2}\pi(x - 2))$.
- d $a = 5$, $b = -10$ en $c = \frac{1}{2}\pi$
 Een laagste punt is $(0, -5)$, dus $d = 0$.
 Dus $y = 5 - 10 \cos(\frac{1}{2}\pi x)$.

- 2 a evenwichtsstand 1
 amplitude 3
 periode 2π
 beginpunt $(\frac{1}{4}\pi, 1)$



- b Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b > 0$.
 $a = \text{evenwichtsstand} = 1$
 $b = \text{amplitude} = 3$
 $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$
 $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{4}\pi$, dus een hoogste punt is $(\frac{3}{4}\pi, 4)$, dus $d = \frac{3}{4}\pi$.
 Dus $y = 1 + 3 \cos(x - \frac{3}{4}\pi)$.

- 3 a $g(x) = -2 - 3\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -2 - 3\cos(2(x - \frac{1}{6}\pi))$
 evenwichtsstand -2
 amplitude 3
 periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 $-3 < 0$, dus $(\frac{1}{6}\pi, -5)$ is een laagste punt.



- b Stel $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$.

$a = \text{evenwichtsstand} = -2$

$b = -\text{amplitude} = -3$

$$c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4} \cdot \pi = -\frac{1}{12}\pi$, dus dalend door de evenwichtsstand bij $x = -\frac{1}{12}\pi + \pi = \frac{11}{12}\pi$, dus $d = \frac{11}{12}\pi$.

Dus $y = -2 - 3\sin(2(x - \frac{11}{12}\pi))$.

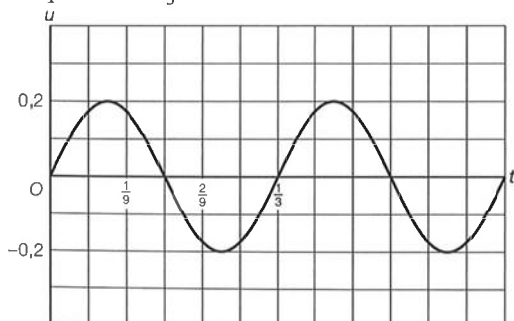
11.1 Trillingen

Bladzijde 89

- 1 a De amplitude is 25 en $c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.
 b Op $t = 0$ is $P'(0, 0)$.
 Op $t = 2$ is $P'(0, 25)$.
 c $y_{P'} = 25\sin(\frac{1}{4}\pi t)$
 d $t = 6,5$ geeft $y_{P'} = 25\sin(\frac{1}{4}\pi \cdot 6,5) \approx -23,1$

Bladzijde 90

- 2 a amplitude 0,2
 $6\pi = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}}$, dus de trillingstijd is $\frac{1}{3}$ seconde.
 frequentie 3 hertz
 b De periode is $\frac{1}{3}$ seconde.



- 3 amplitude 3

$60\pi = \frac{2\pi}{\frac{1}{30}}$, dus de trillingstijd is $\frac{1}{30}$ seconde.
frequentie 30 hertz

- 4 $u = 0,8 \sin(2\pi \cdot 440t) = 0,8 \sin(880\pi t)$

- 5 Bij u_1 is de amplitude 3 mm.

3 perioden is 100 ms, dus 1 periode is $33\frac{1}{3}$ ms.

$$\text{Dus } \dot{u}_1 = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{33\frac{1}{3}}t\right) = 3 \sin(0,06\pi t).$$

Bij u_2 is de amplitude 4 mm en de periode 40 ms.

$$\text{Dus } u_2 = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{40}t\right) = 4 \sin(0,05\pi t).$$

Bladzijde 91

- 6 a Stel $h = a + b \sin(c(t - d))$ met $b > 0$.

a = evenwichtsstand = 22

b = amplitude = 20

$$c = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{75} = \frac{2}{75}\pi$$

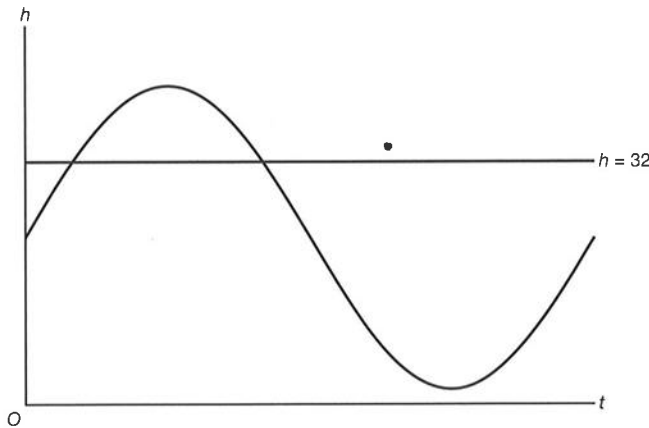
Stijgend door de evenwichtsstand op $t = 0$, dus $d = 0$.

$$\text{Dus } h = 22 + 20 \sin\left(\frac{2}{75}\pi t\right).$$

- b $t = 25$ geeft $h = 22 + 20 \sin\left(\frac{2}{75}\pi \cdot 25\right) \approx 39,3$

Dus op $t = 25$ is de hoogte van het stoeltje 39,3 meter.

- c Voer in $y_1 = 22 + 20 \sin\left(\frac{2}{75}\pi x\right)$ en $y_2 = 32$.



Intersect geeft $x = 6,25$ en $x = 31,25$.

Dus gedurende $31,25 - 6,25 = 25$ seconden is de hoogte meer dan 32 m.

- 7 a Voer in $y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ en $y_3 = y_1 + y_2$ en zet y_1 en y_2 uit.

De optie maximum geeft de top $(0,785; 1,414)$.

Omdat 0 de evenwichtsstand is, geldt $b \approx 1,414$.

- b De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x_B \approx 5,498$.

De grafiek van y_3 gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt $(5,498; 0)$,

dus is $y_3 = 1,414 \sin(x - 5,498)$.

- c Voer in $y_4 = y_1 - y_2$ en zet y_3 uit. Ook de grafiek van y_4 is een sinusoïde.

De optie maximum geeft de top $(2,356; 1,414)$, dus $b \approx 1,414$.

De grafiek van y_4 gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt C.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x_C \approx 0,785$.

Dus is $y_4 = 1,414 \sin(x - 0,785)$.

Dus mogelijke waarden zijn $b \approx 1,414$ en $d \approx 0,785$.

Bladzijde 92

- 8 u_1 en u_2 hebben dezelfde trillingstijd, dus $c = 30\pi$.

Voer in $y_1 = 5 \sin(30\pi x) - 6 \sin(30\pi x - \frac{3}{10}\pi)$.

De optie maximum geeft $x \approx 0,003$ en $y \approx 5,07$, dus $b \approx 5,07$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0,0531$, dus $d \approx 0,0531$.

Dus $u = 5,07 \sin(30\pi(t - 0,0531))$.

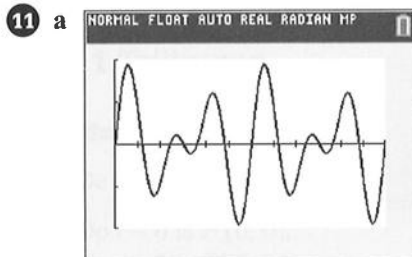
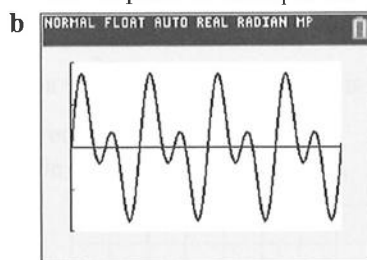
Bladzijde 93**9 a** $c = 500\pi$ Voer in $y_1 = 3 \sin(500\pi x) + 4 \sin(500\pi x - \frac{2}{5}\pi)$.De optie maximum geeft $x \approx 0,0015$ en $y \approx 5,69$, dus $b \approx 5,69$.De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0,000466$.Dus $u = 5,69 \sin(500\pi(t - 0,000466)) = 5,69 \sin(500\pi t - 0,73)$.**b** De uitwijking is 5,69 mm.Per trilling legt het punt $4 \cdot 5,69 \approx 23$ mm af.**c** De frequentie is $\frac{500\pi}{2\pi} = 250$ hertz.Dus in 1 seconde legt het punt $250 \cdot 4 \cdot 5,69 = 5690$ mm af.

Dat is 5,69 meter.

10 a u_1 en u_2 hebben dezelfde trillingstijd, dus $c = 600\pi$.Voer in $y_1 = 0,5 \sin(600\pi x) + 1,5 \sin(600\pi(x - 0,001))$.De optie maximum geeft $x \approx 0,002$ en $y \approx 1,43$, dus $b \approx 1,43$.De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0,000820$.Dus $u_p = 1,43 \sin(600\pi(t - 0,000820)) = 1,43 \sin(600\pi t - 1,55)$. u_2 en u_3 hebben dezelfde trillingstijd, dus $c = 600\pi$.Voer in $y_1 = 1,5 \sin(600\pi(x - 0,001)) + 1,6 \sin(600\pi(x - 0,002))$.De optie maximum geeft $x \approx 0,002$ en $y \approx 1,82$, dus $b \approx 1,82$.De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0,001524$.Dus $u_Q = 1,82 \sin(600\pi(t - 0,001524)) = 1,82 \sin(600\pi t - 2,87)$.**b** Van beide punten is de frequentie $\frac{600\pi}{2\pi} = 300$ hertz.Dat is $60 \cdot 300 = 18000$ trillingen per minuut.Punt P legt per minuut $18000 \cdot 250 \cdot 4 \cdot 1,43 = 25\,740\,000$ mm af.Punt Q legt per minuut $18000 \cdot 250 \cdot 4 \cdot 1,82 = 32\,760\,000$ mm af.Dus punt Q legt per minuut $32\,760\,000 - 25\,740\,000 = 7\,020\,000$ mm meer af dan punt P.

Dat is 7020 meter.

Reken je met niet-afgeronde getallen, dan krijg je in meters nauwkeurig 7144 meter.

De periode van $u = \sin(2t)$ is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en de periode van $u = \sin(3t)$ is $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.Het kleinste getal waar een geheel aantal keer π en $\frac{2}{3}\pi$ in past is 2π .Dus de periode van u_1 is 2π .De periode van $u = \sin(2t)$ is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en de periode van $u = \sin(4t)$ is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.Het kleinste getal waar een geheel aantal keer π en $\frac{1}{2}\pi$ in past is π .Dus de periode van u_2 is π .

Bladzijde 94

12 a

	$u_1 = \sin(100\pi t)$	$u_2 = \sin(101\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	100π trillingen	101π trillingen	deel door π
in $[0, 2]$	100 trillingen	101 trillingen	

Dus de trillingstijd van $u = \sin(100\pi t) + \sin(101\pi t)$ is 2 seconden.

b

	$u_1 = \sin(100t)$	$u_2 = \sin(101t)$
in $[0, 2\pi]$	100 trillingen	101 trillingen

Dus de trillingstijd van $u = \sin(100t) + \sin(101t)$ is 2π seconden.

c

	$u_1 = \sin(100\pi t)$	$u_2 = \sin(105\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	100π trillingen	105π trillingen	deel door 5π
in $[0, \frac{2}{5}]$	20 trillingen	21 trillingen	

Dus de trillingstijd van $u = \sin(100\pi t) + \sin(105\pi t)$ is $\frac{2}{5}$ seconde.

d

	$u_1 = 2 \sin(100\pi t)$	$u_2 = 1,5 \sin(200\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	100π trillingen	200π trillingen	deel door 100π
in $[0, \frac{1}{50}]$	1 trilling	2 trillingen	

Dus de trillingstijd van $u = 2 \sin(100\pi t) + 1,5 \sin(200\pi t)$ is $\frac{1}{50}$ seconde.

e

	$u_1 = \sin(100t)$	$u_2 = \sin(25t)$	
in $[0, 2\pi]$	100 trillingen	25 trillingen	deel door 25
in $[0, \frac{2}{25}\pi]$	4 trillingen	1 trilling	

Dus de trillingstijd van $u = \sin(100t) + \sin(25t)$ is $\frac{2}{25}\pi$ seconde.

f

	$u_1 = 3 \sin(\frac{1}{4}\pi t)$	$u_2 = 6 \sin(\frac{1}{3}\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	$\frac{1}{4}\pi$ trillingen	$\frac{1}{3}\pi$ trillingen	deel door π
in $[0, 2]$	$\frac{1}{4}$ trilling	$\frac{1}{3}$ trilling	$\times 12$
in $[0, 24]$	3 trillingen	4 trillingen	

Dus de trillingstijd van $u = 3 \sin(\frac{1}{4}\pi t) + 6 \sin(\frac{1}{3}\pi t)$ is 24 seconden.

Bladzijde 95

13

	$u_1 = \sin(660\pi t)$	$u_2 = \sin(661\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	660π trillingen	661π trillingen	deel door π
in $[0, 2]$	660 trillingen	661 trillingen	

Dus de trillingstijd van de zweving is 2 seconden.

14 a u is een samenstelling van vier trillingen. Zie de tabel hieronder.

trilling	frequentie in hertz	trillingstijd in seconden
$u_1 = 1,5 \sin(700\pi t)$	350	$\frac{1}{350}$
$u_2 = 0,2 \sin(1400\pi t)$	700	$\frac{1}{700}$
$u_3 = 0,3 \sin(2100\pi t)$	1050	$\frac{1}{1050}$
$u_4 = 0,1 \sin(2800\pi t)$	1400	$\frac{1}{1400}$

De frequenties van de boventonen zijn 700, 1050 en 1400 hertz.

b In de trillingstijd van u_1 past de trillingstijd van u_2 precies twee keer, de trillingstijd van u_3 precies drie keer en de trillingstijd van u_4 precies vier keer.

De trillingstijd van de samengestelde trilling is dus hetzelfde als die van u_1 namelijk $\frac{1}{350}$ seconde.

15 a

	$u_1 = 0,6 \sin(500\pi t)$	$u_2 = 0,6 \sin(550\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	500π trillingen	550π trillingen	deel door 50π
in $[0, \frac{1}{25}]$	10 trillingen	11 trillingen	

Dus de trillingstijd van $u_4 = u_1 + u_2$ is $\frac{1}{25}$ seconde.

b Bij u_1 en u_3 is $c = 500\pi$, dus ook bij u_5 is $c = 500\pi$.

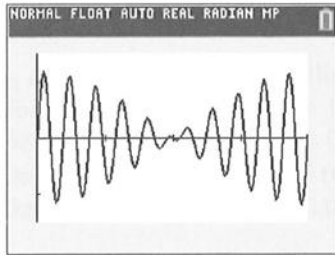
Voer in $y_1 = 0,6 \sin(500\pi x)$, $y_2 = 0,6 \sin(500\pi(x - 0,001))$ en $y_3 = y_1 + y_2$ en zet y_1 en y_2 uit.

De optie maximum geeft $x \approx 0,0015$ en $y \approx 0,8485$, dus $b \approx 0,8485$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0,0005$, dus $d \approx 0,0005$.

Dus $u_5 = 0,8485 \sin(500\pi(t - 0,0005))$.

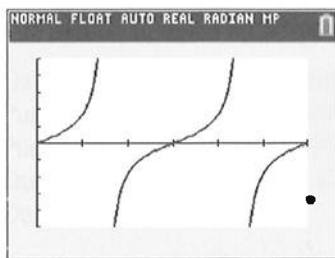
c Neem bijvoorbeeld $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 0,04$, $Y_{\min} = -1,5$ en $Y_{\max} = 1,5$.



11.2 De tangens en goniometrische formules

Bladzijde 97

16 a



b De lijnen $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

Bladzijde 98

17 a

$$\tan(3x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$3x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

b $1 - \tan(\frac{3}{4}x) = 2$

$$-\tan(\frac{3}{4}x) = 1$$

$$\tan(\frac{3}{4}x) = -1$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$$

c $\tan(\frac{1}{2}x) = \tan(2x - \frac{1}{6}\pi)$

$$\frac{1}{2}x = 2x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$-1\frac{1}{2}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

d $3 \tan(\frac{1}{2}\pi x) = \sqrt{3}$

$$\tan(\frac{1}{2}\pi x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{3} + k \cdot 2$$

e $2 + \sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{8}\pi x) = 5$

$$\sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{8}\pi x) = 2$$

$$\tan(\frac{1}{8}\pi x) = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{8}\pi x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 2\frac{2}{3} + k \cdot 8$$

f $\tan(\frac{1}{6}\pi x) = \tan(\frac{1}{3}\pi(x - 1))$

$$\frac{1}{6}\pi x = \frac{1}{3}\pi(x - 1) + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{6}\pi x = \frac{1}{3}\pi x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$-\frac{1}{6}\pi x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 2 + k \cdot 6$$

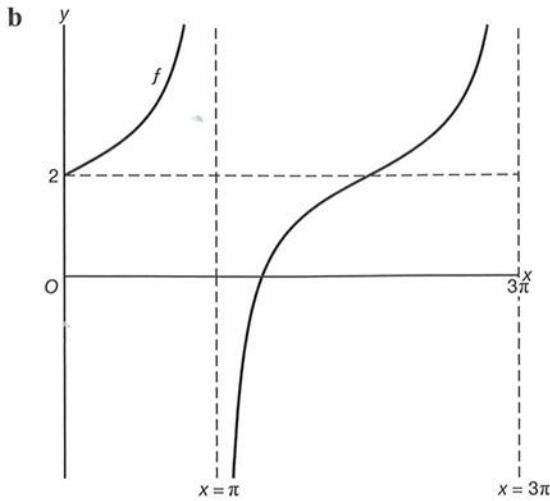
Bladzijde 99

18 a

Beginpunt $(0, 2)$ en periode $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$.

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi$ geeft de asymptoot $x = \pi$.

De periode is 2π , dus de andere asymptoot is $x = 3\pi$.



c Voer in $y_1 = 2 + \tan(\frac{1}{2}x)$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 4,07$.

Dus het nulpunt is 4,07.

d $f(x) = 3$ geeft $2 + \tan(\frac{1}{2}x) = 3$

$$\tan(\frac{1}{2}x) = 1$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

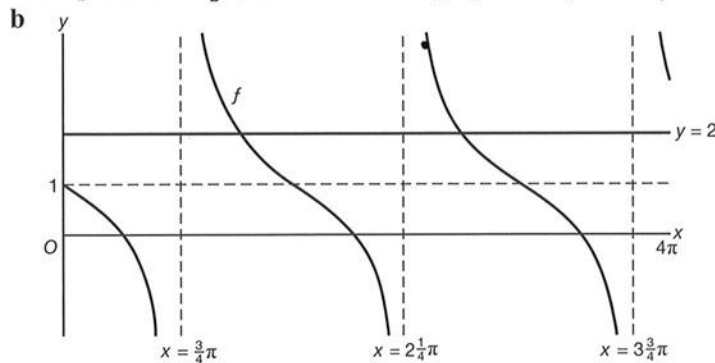
x op $[0, 3\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 2\frac{1}{2}\pi$.

Dus de coördinaten van deze snijpunten zijn $(\frac{1}{2}\pi, 3)$ en $(2\frac{1}{2}\pi, 3)$.

19 a Beginpunt $(0, 1)$ en periode $\frac{\pi}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}\pi$.

$\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}\pi$ geeft de asymptoot $x = \frac{3}{4}\pi$.

De periode is $1\frac{1}{2}\pi$, dus de andere asymptoten zijn $x = 2\frac{1}{4}\pi$ en $x = 3\frac{3}{4}\pi$.



c $f(x) = 0$ geeft $1 - \tan(\frac{2}{3}x) = 0$

$$\tan(\frac{2}{3}x) = 1$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi$$

x op $[0, 4\pi]$ geeft $x = \frac{3}{8}\pi \vee x = 1\frac{7}{8}\pi \vee x = 3\frac{3}{8}\pi$

Dus de nulpunten zijn $\frac{3}{8}\pi$, $1\frac{7}{8}\pi$ en $3\frac{3}{8}\pi$.

d $f(x) = 2$ geeft $1 - \tan(\frac{2}{3}x) = 2$

$$-\tan(\frac{2}{3}x) = 1$$

$$\tan(\frac{2}{3}x) = -1$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 1\frac{1}{8}\pi + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi$$

x op $[0, 4\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{8}\pi \vee x = 2\frac{5}{8}\pi$

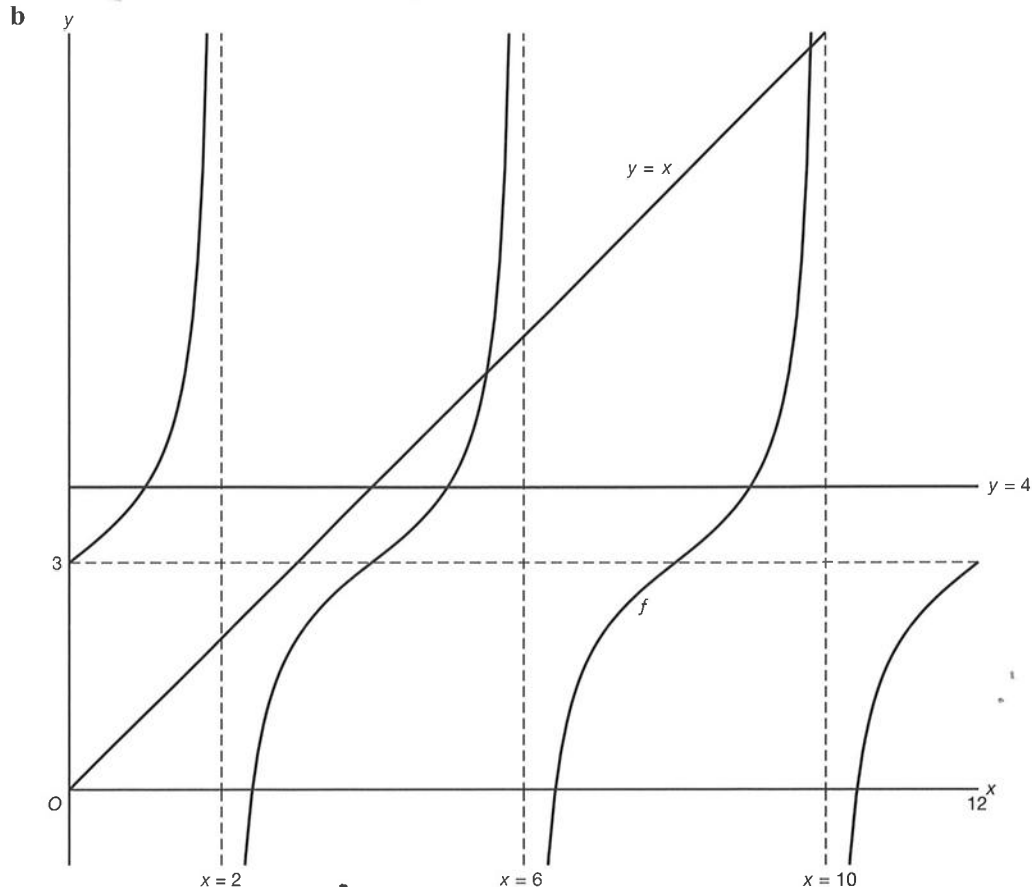
Zie de figuur van onderdeel b.

$f(x) < 2$ geeft $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi \vee 1\frac{1}{8}\pi < x < 2\frac{1}{4}\pi \vee 2\frac{5}{8}\pi < x < 3\frac{3}{4}\pi$

- 20 a Beginpunt $(0, 3)$ en periode $\frac{\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 4$.

$\frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{2}\pi$ geeft de asymptoot $x = 2$.

De periode is 4, dus de andere asymptoten zijn $x = 6$ en $x = 10$.



c $f(x) = 4$ geeft $3 + \tan(\frac{1}{4}\pi x) = 4$

$$\tan(\frac{1}{4}\pi x) = 1$$

$$\frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 1 + k \cdot 4$$

x op $[0, 12]$ geeft $x = 1 \vee x = 5 \vee x = 9$

Zie de figuur van onderdeel b.

$f(x) > 4$ geeft $1 < x < 2 \vee 5 < x < 6 \vee 9 < x < 10$

- d Voer in $y_1 = 3 + \tan(\frac{1}{4}\pi x)$ en $y_2 = x$.

Intersect geeft $x \approx 5,52$ en $x \approx 9,81$.

Zie de figuur van onderdeel b.

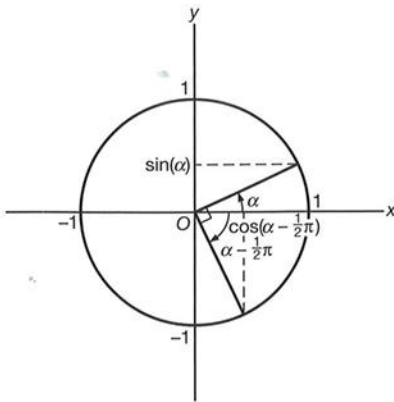
$f(x) > x$ geeft $0 \leq x < 2 \vee 5,52 < x < 6 \vee 9,81 < x < 10$

Bladzijde 100

- 21 Bij $f(x) = \sin(-x)$ hoort de grafiek van $y = -\sin(x)$.
 Bij $g(x) = \cos(-x)$ hoort de grafiek van $y = \cos(x)$.
 Bij $h(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ hoort de grafiek van $y = \cos(x)$.
 Bij $j(x) = \cos(x + \frac{1}{2}\pi)$ hoort de grafiek van $y = -\sin(x)$.
 Bij $k(x) = \sin(x + \pi)$ hoort de grafiek van $y = -\sin(x)$.
 Bij $l(x) = \cos(x + \pi)$ hoort de grafiek van $y = -\cos(x)$.

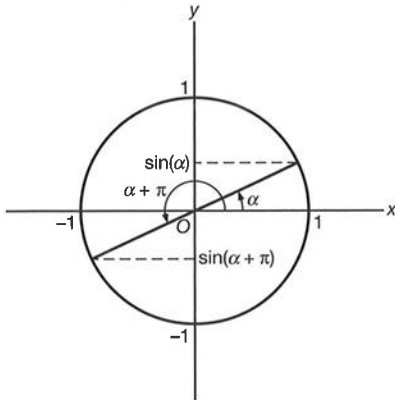
Bladzijde 101

22 a



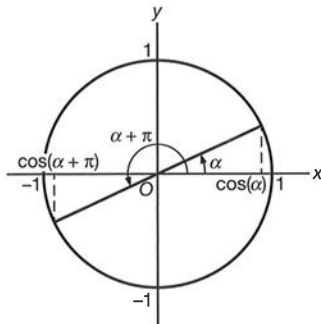
$$\cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\alpha)$$

b



$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$$

c



$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$$

$$23 \quad \tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$$

$$24 \quad a \quad \sin(x + \frac{1}{6}\pi) = \cos(x + \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$$

$$b \quad \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = \sin(2x + \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + \frac{5}{6}\pi)$$

$$c \quad -\sin(3x - \frac{2}{3}\pi) = \sin(3x - \frac{2}{3}\pi + \pi) = \cos(3x - \frac{2}{3}\pi + \pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(3x - \frac{1}{6}\pi)$$

$$d \quad -\cos(4x + \frac{1}{6}\pi) = \cos(4x + \frac{1}{6}\pi + \pi) = \sin(4x + \frac{1}{6}\pi + \pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(4x + 2\frac{2}{3}\pi) = \sin(4x + \frac{2}{3}\pi)$$

$$25 \quad a \quad \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos(-x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(-(x - \frac{1}{2}\pi)) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x)$$

$$b \quad \sin(-x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(-(x + \frac{1}{2}\pi)) = -\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = -\cos(x)$$

Bladzijde 102

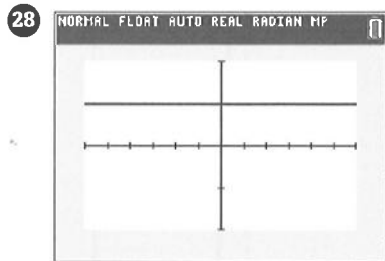
$$26 \quad a \quad \sin(-2x) + 3\sin(2x) = -\sin(2x) + 3\sin(2x) = 2\sin(2x)$$

$$b \quad \cos(x - \frac{1}{2}\pi) + 4\sin(x) = \sin(x) + 4\sin(x) = 5\sin(x)$$

$$c \quad 3\sin(x + \frac{1}{2}\pi) - 2\cos(x) = 3\cos(x) - 2\cos(x) = \cos(x)$$

$$d \quad \cos(2x - \frac{1}{2}\pi) + 3\sin(-2x) = \sin(2x) - 3\sin(2x) = -2\sin(2x)$$

27 a $\frac{\sin(3x)}{\sin(3x + \frac{1}{2}\pi)} = \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \tan(3x)$
 b $\frac{\cos(\frac{1}{2}(x - \pi))}{\cos(-\frac{1}{2}x)} = \frac{\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi)}{\cos(\frac{1}{2}x)} = \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\cos(\frac{1}{2}x)} = \tan(\frac{1}{2}x)$



Vermoeden: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Bladzijde 103

29 a $(\sin(x) - \cos(x))^2 = \sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$

b $\frac{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 2 \cdot \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 = 2\tan^2(x) + 1$

30 a $\sin(x)\cos(x - \frac{1}{2}\pi) - \cos(x)\sin(-x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x)\sin(x) - \cos(x)\sin(-(x + \frac{1}{2}\pi)) = \sin(x)\sin(x) + \cos(x)\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(x)\sin(x) + \cos(x)\cos(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

b $2\cos^2(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) = 2\cos^2(x) \cdot \left(1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right) = 2\cos^2(x) + \frac{2\cos^2(x)\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) = 2(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = 2 \cdot 1 = 2$

31 a $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$
 $\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A)$

$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$
 $\cos^2(A) = 1 - \sin^2(A)$

b $f(x) = \sin^2(x) + 2\cos(x) - 1 = 1 - \cos^2(x) + 2\cos(x) - 1 = 2\cos(x) - \cos^2(x) = \cos(x) \cdot (2 - \cos(x))$
 Dus $a = 2$.

c $f(x) = 0$ geeft $\cos(x) \cdot (2 - \cos(x)) = 0$
 $\cos(x) = 0 \vee 2 - \cos(x) = 0$
 $\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = 2$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ geen opl.
 x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi$

32 a $\sin^2(x) + 4\cos(x) = 1 - \cos^2(x) + 4\cos(x) = -\cos^2(x) + 4\cos(x) + 1$

b $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2 = 2 - 2\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = -2\sin^2(x) + \sin(x)$

c $2\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 2(1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x) + \cos(x) = 2 - 2\cos^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = -\cos^2(x) + \cos(x) + 2$

33 a De vorm $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ is te herleiden tot de vorm $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Hiermee is $\sin^2(x)$ uitgedrukt in $\cos(x)$. Dus is $\sin^2(x) + \cos(x)$ uit te drukken in $\cos(x)$.

Wil je echter $\sin^2(x) + \cos(x)$ uitdrukken in $\sin(x)$, dan heb je een formule nodig van de vorm $\cos(x) = \dots$ met in het rechterlid alleen $\sin(x)$. Maar zo'n formule is er niet.

b $\sin(x) + \cos^2(x)$ is met behulp van $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ uit te drukken in $\sin(x)$.

Je krijgt $\sin(x) + \cos^2(x) = \sin(x) + 1 - \sin^2(x)$.

$2\sin^2(x) + 3\cos^2(x)$ is uit te drukken in $\sin(x)$.

Je krijgt $2\sin^2(x) + 3\cos^2(x) = 2\sin^2(x) + 3(1 - \sin^2(x)) = 2\sin^2(x) + 3 - 3\sin^2(x) = 3 - \sin^2(x)$.

Maar je kunt $2\sin^2(x) + 3\cos^2(x)$ ook uitdrukken in $\cos(x)$.

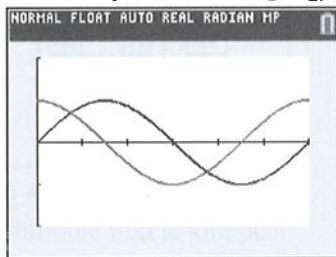
Je krijgt dan $2\sin^2(x) + 3\cos^2(x) = 2(1 - \cos^2(x)) + 3\cos^2(x) = 2 - 2\cos^2(x) + 3\cos^2(x) = 2 + \cos^2(x)$.

- 34 a** $2\cos^2(x) - 5\sin(x) + 1 = 0$
 $2(1 - \sin^2(x)) - 5\sin(x) + 1 = 0$
 $2 - 2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 1 = 0$
 $-2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 3 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 49$
 $\sin(x) = \frac{5+7}{-4} = -3 \vee \sin(x) = \frac{5-7}{-4} = \frac{1}{2}$
geen opl. $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$
- b** $2\sin^2(x) = \cos(x) + 1$
 $2\sin^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$
 $2(1 - \cos^2(x)) - \cos(x) - 1 = 0$
 $2 - 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$
 $-2\cos^2(x) - \cos(x) + 1 = 0$
 $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$
 $(2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) = 0$
 $2\cos(x) = 1 \vee \cos(x) = -1$
 $\cos(x) = \frac{1}{2} \vee \cos(x) = -1$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$
 x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \pi$

11.3 Goniometrische functies differentiëren

Bladzijde 105

- 35 a** Voer in $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$.



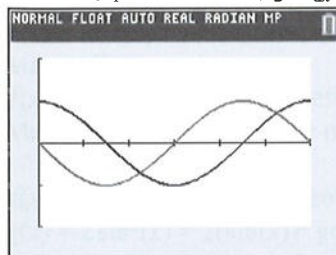
- b** Waarschijnlijk is $f'(x) = \cos(x)$ de afgeleide van $f(x) = \sin(x)$.
Voer in $y_3 = \cos(x)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS ENTER to EDIT				
X	Y1	Y2	Y3	
0	0	1	1	
.01	.01	.99995	.99995	
.02	.02	.9998	.9998	
.03	.03	.99955	.99955	
.04	.03999	.9992	.9992	
.05	.04998	.99875	.99875	
.06	.05996	.9982	.9982	
.07	.06994	.99755	.99755	
.08	.07991	.9968	.9968	
.09	.08988	.99595	.99595	
.1	.09983	.995	.995	

Y3=cos(X)

Het vermoeden lijkt te kloppen.

- c** Voer in $y_1 = \cos(x)$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$.



Waarschijnlijk is $f'(x) = -\sin(x)$ de afgeleide van $f(x) = \cos(x)$.
Voer in $y_3 = -\sin(x)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS ENTER TO EDIT				
X	Y1	Y2	Y3	
0	1	0	0	
.01	.99995	-.01	-.01	
.02	.9998	-.02	-.02	
.03	.99955	-.03	-.03	
.04	.9992	-.04	-.04	
.05	.99875	-.05	-.05	
.06	.9982	-.06	-.06	
.07	.99755	-.0699	-.0699	
.08	.9968	-.0799	-.0799	
.09	.99595	-.0899	-.0899	
.1	.995	-.0999	-.0999	

Y3 = -sin(X)

Het vermoeden lijkt te kloppen.

- d Waarschijnlijk is $y = \cos(x - 2)$ de afgeleide van $y = \sin(x - 2)$.

Voer in $y_1 = \sin(x - 2)$, $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$ en $y_3 = \cos(x - 2)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS + FOR Δ Tab1				
X	Y1	Y2	Y3	
0	-.9893	-.4161	-.4161	
.01	-.9134	-.407	-.407	
.02	-.9174	-.3979	-.3979	
.03	-.9214	-.3887	-.3887	
.04	-.9252	-.3795	-.3795	
.05	-.929	-.3702	-.3702	
.06	-.9326	-.3609	-.3609	
.07	-.9362	-.3515	-.3515	
.08	-.9396	-.3421	-.3421	
.09	-.943	-.3327	-.3327	
.1	-.9463	-.3233	-.3233	

X=0

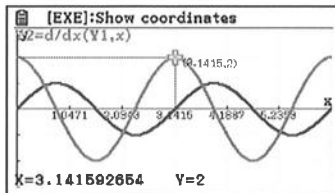
De formule van de afgeleide van $y = \sin(x - 2)$ lijkt te kloppen.Waarschijnlijk is $y = -\sin(x + 1)$ de afgeleide van $y = \cos(x + 1)$.Voer in $y_1 = \cos(x + 1)$, $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$ en $y_3 = -\sin(x + 1)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS ENTER TO EDIT				
X	Y1	Y2	Y3	
0	.5403	-.8415	-.8415	
.01	.53106	-.8468	-.8468	
.02	.52337	-.8521	-.8521	
.03	.51482	-.8573	-.8573	
.04	.50622	-.8624	-.8624	
.05	.49757	-.8674	-.8674	
.06	.48887	-.8724	-.8724	
.07	.48012	-.8772	-.8772	
.08	.47133	-.882	-.882	
.09	.46249	-.8866	-.8866	
.1	.4536	-.8912	-.8912	

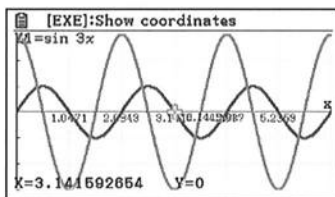
Y3 = -sin(X+1)

De formule van de afgeleide van $y = \cos(x + 1)$ lijkt te kloppen.

- 36 a Voer in $y_1 = \sin(2x)$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$.

 $y_1 = \sin(2x)$ heeft periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$ en amplitude 1. $y_2 =$ afgeleide van y_1 heeft periode π en amplitude 2.

- b Voer in $y_1 = \sin(3x)$ en $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$.

 $y_1 = \sin(3x)$ heeft periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ en amplitude 1. $y_2 =$ afgeleide van y_1 heeft periode $\frac{2}{3}\pi$ en amplitude 3.

c Voor $a = 2$ is $y_2 = 2 \cos(2x)$.

Voer in $y_1 = \sin(2x)$, $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$ en $y_3 = 2 \cos(2x)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS ENTER TO EDIT				
X	Y1	Y2	Y3	
0	0	2	2	
.01	.02	1.9996	1.9996	
.02	.03999	1.9984	1.9984	
.03	.05996	1.9964	1.9964	
.04	.07991	1.9936	1.9936	
.05	.09983	1.99	1.99	
.06	.11971	1.9856	1.9856	
.07	.13954	1.9804	1.9804	
.08	.15932	1.9745	1.9745	
.09	.17903	1.9677	1.9677	
.1	.19867	1.9601	1.9601	
Y3=2cos(2X)				

De formule lijkt te kloppen.

Voor $a = 3$ is $y_2 = 3 \cos(3x)$.

Voer in $y_1 = \sin(3x)$, $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$ en $y_3 = 3 \cos(3x)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS ENTER TO EDIT				
X	Y1	Y2	Y3	
0	0	3	3	
.01	.03	2.9986	2.9987	
.02	.05996	2.9946	2.9946	
.03	.08988	2.9879	2.9879	
.04	.11971	2.9784	2.9784	
.05	.14944	2.9663	2.9663	
.06	.17903	2.9515	2.9515	
.07	.20846	2.9341	2.9341	
.08	.2377	2.914	2.914	
.09	.26673	2.8913	2.8913	
.1	.29552	2.866	2.866	
Y3=3cos(3X)				

De formule lijkt te kloppen.

37 De formule van de afgeleide van $y = \cos(3x)$ is waarschijnlijk $y' = -3 \sin(3x)$.

Voer in $y_1 = \cos(3x)$, $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$ en $y_3 = -3 \sin(3x)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP				
PRESS ENTER TO EDIT				
X	Y1	Y2	Y3	
0	1	0	0	
.01	.99955	-.09	-.09	
.02	.9982	-.1799	-.1799	
.03	.99595	-.2696	-.2696	
.04	.99281	-.3591	-.3591	
.05	.98877	-.4483	-.4483	
.06	.98384	-.5371	-.5371	
.07	.97803	-.6254	-.6254	
.08	.97134	-.7131	-.7131	
.09	.96377	-.8002	-.8002	
.1	.95534	-.8866	-.8866	
Y3=-3sin(3X)				

De formule lijkt te kloppen.

Bladzijde 106

38 a $f(x) = \cos(2x)$ geeft $f'(x) = -\sin(2x) \cdot 2 = -2 \sin(2x)$

b $g(x) = x \cos(x)$ geeft $g'(x) = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot -\sin(x) = \cos(x) - x \sin(x)$

c $h(x) = 3 + 4 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ geeft $h'(x) = 4 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi) \cdot 2 = 8 \cos(2x - \frac{1}{3}\pi)$

d $j(x) = 10 + 16 \sin(\frac{1}{2}(x-1))$ geeft $j'(x) = 16 \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = 8 \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$

39 a $f(x) = x \cos(2x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \cos(2x) + x \cdot -\sin(2x) \cdot 2 = \cos(2x) - 2x \sin(2x)$

b $g(x) = x^2 \sin(3x)$ geeft $g'(x) = 2x \cdot \sin(3x) + x^2 \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 2x \sin(3x) + 3x^2 \cos(3x)$

c $h(x) = 2x \sin(3x-1)$ geeft $h'(x) = 2 \cdot \sin(3x-1) + 2x \cdot \cos(3x-1) \cdot 3 = 2 \sin(3x-1) + 6x \cos(3x-1)$

d $j(x) = 1 + 3x \cos(\frac{1}{2}x)$ geeft $j'(x) = 3 \cdot \cos(\frac{1}{2}x) + 3x \cdot -\sin(\frac{1}{2}x) \cdot \frac{1}{2} = 3 \cos(\frac{1}{2}x) - \frac{3}{2}x \sin(\frac{1}{2}x)$

40 a Manier I

$f(x) = \sin^2(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

Manier II

$f(x) = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

b Manier II heeft de voorkeur omdat er minder stappen nodig zijn.

41 a $f(x) = \cos^2(x) = (\cos(x))^2$ geeft $f'(x) = 2 \cos(x) \sin(x)$

b $g(x) = 2 \sin^2(x) = 2(\sin(x))^2$ geeft $g'(x) = 2 \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = 4 \sin(x) \cos(x)$

c $h(x) = 1 + 2 \cos^2(x) = 1 + 2(\cos(x))^2$ geeft $h'(x) = 2 \cdot 2 \cos(x) \sin(x) = 4 \sin(x) \cos(x)$

d $j(x) = x + 3 \sin^2(x) = x + 3(\sin(x))^2$ geeft $j'(x) = 1 + 3 \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = 1 + 6 \sin(x) \cos(x)$

- 42 a $f(x) = \sin^3(x) = (\sin(x))^3$ geeft $f'(x) = 3 \cdot (\sin(x))^2 \cdot \cos(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x)$
 b $g(x) = x \sin^2(x) = x(\sin(x))^2$ geeft $g'(x) = 1 \cdot (\sin(x))^2 + x \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = \sin^2(x) + 2x \sin(x) \cos(x)$
 c $h(x) = \sqrt{2 + \sin(x)}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sin(x)}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{2 + \sin(x)}}$
 d $j(x) = 2x \cos(x^2)$ geeft $j'(x) = 2 \cdot \cos(x^2) + 2x \cdot -\sin(x^2) \cdot 2x = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)$

43 Zet de GR op graden.

Voer in $y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)|_{x=x}$ en $y_3 = \cos(x)$.

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP				
PRESS ENTER TO EDIT				
X	Y1	Y2	Y3	
0	0	.01745	1	
1	.01745	.01745	.99985	
2	.0349	.01744	.99939	
3	.05234	.01743	.99863	
4	.06976	.01741	.99756	
5	.08716	.01739	.99619	
6	.10453	.01736	.99452	
7	.12187	.01732	.99255	
8	.13917	.01728	.99027	
9	.15643	.01724	.98769	
10	.17365	.01719	.98481	

Y3=cos(X)

Je ziet dat de regel $f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$ niet geldt als de hoek eenheid graden is.

Bladzijde 107

- 44 a $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$
 b $\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$
 $\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + (\tan(x))^2 = 1 + \tan^2(x)$

Bladzijde 108

- 45 a $f(x) = \tan(2x)$ geeft $f'(x) = (1 + \tan^2(2x)) \cdot 2 = 2 + 2 \tan^2(2x)$
 b $f(x) = x + \tan\left(\frac{1}{4}x\right)$ geeft $f'(x) = 1 + \left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{4}x\right)\right) \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{1}{4}x\right) = 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{1}{4}x\right)$
 c $f(x) = x \tan(x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \tan(x) + x \cdot (1 + \tan^2(x)) = \tan(x) + x + x \tan^2(x)$
 d $f(x) = \sin(x) \cdot \tan(x)$ geeft
 $f'(x) = \cos(x) \cdot \tan(x) + \sin(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) = \cos(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \sin(x) + \sin(x) \tan^2(x)$
 $= \sin(x) + \sin(x) + \sin(x) \tan^2(x) = 2 \sin(x) + \sin(x) \tan^2(x)$
- 46 a $f(x) = \frac{2}{1 + \sin(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{(1 + \sin(x)) \cdot 0 - 2 \cdot \cos(x)}{(1 + \sin(x))^2} = \frac{-2 \cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$
 b $f(x) = \frac{1 + \sin(x)}{1 + \cos(x)}$ geeft
 $f'(x) = \frac{(1 + \cos(x)) \cdot \cos(x) - (1 + \sin(x)) \cdot -\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) + \cos^2(x) + \sin(x) + \sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{\sin(x) + \cos(x) + 1}{(1 + \cos(x))^2}$
 c $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2 + \sin(x)}$ geeft
 $f'(x) = \frac{(2 + \sin(x)) \cdot \cos(2x) \cdot 2 - \sin(2x) \cdot \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2} = \frac{4 \cos(2x) + 2 \sin(x) \cos(2x) - \sin(2x) \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2}$
 d $f(x) = \frac{\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)}{1 + \cos(x)}$ geeft
 $f'(x) = \frac{(1 + \cos(x)) \cdot \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \cdot -\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + \cos(x) \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + \sin(x) \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)}{(1 + \cos(x))^2}$

47 a $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\sin(x) \cdot -\sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

b $f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(1 + \cos(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{1 + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

c $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(\sin(x) + \cos(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x))}{(\sin(x) + \cos(x))^2} = \frac{\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) - \sin(x)\cos(x) + \sin^2(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} = \frac{1}{(\sin(x) + \cos(x))^2}$$

d $f(x) = \frac{4\sin(x)}{1 - \sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(1 - \sin(x)) \cdot 4\cos(x) - 4\sin(x) \cdot -\cos(x)}{(1 - \sin(x))^2} = \frac{4\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x)}{(1 - \sin(x))^2} = \frac{4\cos(x)}{(1 - \sin(x))^2}$$

48 a $f(x) = \frac{2\sin(x)}{2 + \sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(2 + \sin(x)) \cdot 2\cos(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2} = \frac{4\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)}{(2 + \sin(x))^2} = \frac{4\cos(x)}{(2 + \sin(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 4\cos(x) = 0$$

$$\cos(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ op } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} \text{ en } f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{2 \cdot -1}{2 - 1} = -2$$

$$\text{Dus } A\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\right) \text{ en } B\left(\frac{3}{2}\pi, -2\right).$$

b Stel $k: y = ax + b$.

$$a = f'(\pi) = \frac{4 \cdot -1}{(2 + 0)^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + b \\ f(\pi) = 0, \text{ dus } C(\pi, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\pi + b = 0 \\ b = \pi \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -x + \pi.$$

49 a $u = \frac{\sin(100\pi t)}{100\pi t}$ geeft

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{100\pi t \cdot \cos(100\pi t) \cdot 100\pi - \sin(100\pi t) \cdot 100\pi}{(100\pi t)^2} = \frac{100\pi(100\pi t \cos(100\pi t) - \sin(100\pi t))}{100\pi \cdot 100\pi t^2} = \frac{100\pi(100\pi t \cos(100\pi t) - \sin(100\pi t))}{100\pi \cdot 100\pi t^2}$$

b $u = 0$ geeft $\sin(100\pi t) = 0$

$$100\pi t = k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \frac{1}{100}$$

$$\text{Dus } t_2 = \frac{2}{100}$$

$$t = \frac{2}{100} \text{ geeft } v = \frac{100\pi \cdot \frac{2}{100} \cdot \cos\left(100\pi \cdot \frac{2}{100}\right) - \sin\left(100\pi \cdot \frac{2}{100}\right)}{100\pi \cdot \left(\frac{2}{100}\right)^2} = \frac{2\pi \cdot \cos(2\pi) - \sin(2\pi)}{100\pi \cdot \frac{4}{10000}} = \frac{2\pi \cdot 1 - 0}{\frac{4}{100}\pi} =$$

$$\frac{2}{\frac{4}{100}} = 50 \text{ mm per seconde}$$

Bladzijde 109

- 50** a $f(x) = \sin^3(x) = (\sin(x))^3$ geeft $f'(x) = 3 \cdot (\sin(x)^2) \cdot \cos(x) = 3 \sin^2(x) \cdot \cos(x)$
b $f'(x) = 3 \sin^2(x) \cdot \cos(x) = 3(1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) = (3 - 3 \cos^2(x)) \cdot \cos(x) = 3 \cos(x) - 3 \cos^3(x)$
- 51** $g(x) = 2 \cos^3(x) + 3 \cos(x)$ geeft
 $g'(x) = 2 \cdot 3 \cos^2(x) \cdot (-\sin(x)) - 3 \sin(x) = -6 \sin(x) \cos^2(x) - 3 \sin(x)$
 $= -6 \sin(x)(1 - \sin^2(x)) - 3 \sin(x) = -6 \sin(x) + 6 \sin^3(x) - 3 \sin(x) = 6 \sin^3(x) - 9 \sin(x)$

- 52 a** $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ geeft
 $f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$
b Zie onderdeel a: $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
 $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

- 53 a** $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$ geeft
 $f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin^2(x) \cdot -\sin(x) = 2 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x)$
 $= 2 \sin(x)(1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x) = 2 \sin(x) - 2 \sin^3(x) - \sin^3(x) = 2 \sin(x) - 3 \sin^3(x)$
- b** $f'(x) = 0$ geeft $2 \sin(x) - 3 \sin^3(x) = 0$
 $\sin(x)(2 - 3 \sin^2(x)) = 0$
 $\sin(x) = 0 \vee 2 - 3 \sin^2(x) = 0$
 $3 \sin^2(x) = 2$
 $\sin^2(x) = \frac{2}{3}$

Met behulp van de figuur zie je dus dat voor de toppen A en B geldt $\sin^2(x) = \frac{2}{3}$.

- c** $\sin^2(x) = \frac{2}{3}$

$$1 - \cos^2(x) = \frac{2}{3}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{3}$$

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee \cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Dus voor A geldt $\cos(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

- d** $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x) = (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x)$
 $\cos(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ geeft $y_A = (1 - \frac{1}{9}) \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

Uit vraag c volgt dat voor B geldt $\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

$$\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ geeft } y_B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot -\frac{1}{3}\sqrt{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9}\sqrt{3} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

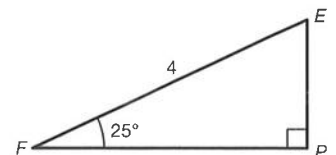
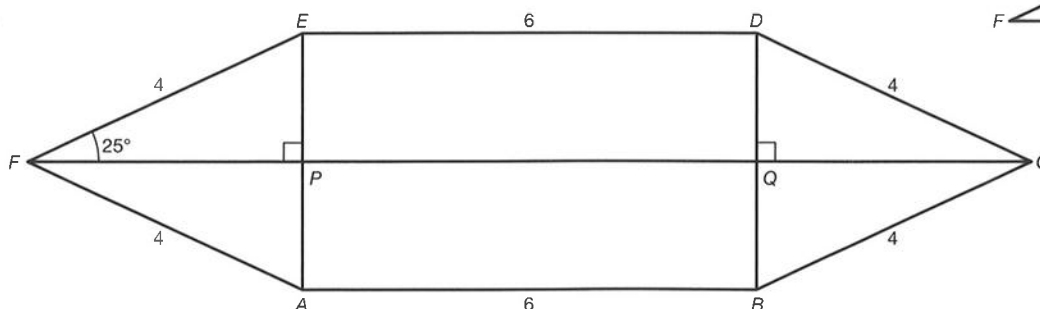
11.4 Goniometrische modellen

Bladzijde 111

- 54 a** In $\triangle EFP$ is $\sin(25^\circ) = \frac{EP}{4}$, dus $EP = 4 \sin(25^\circ)$

en $\cos(25^\circ) = \frac{FP}{4}$, dus $FP = 4 \cos(25^\circ)$.

- b**



$$O(\triangle EFP) = \frac{1}{2} \cdot FP \cdot EP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cos(25^\circ) \cdot 4 \sin(25^\circ) = 8 \sin(25^\circ) \cos(25^\circ)$$

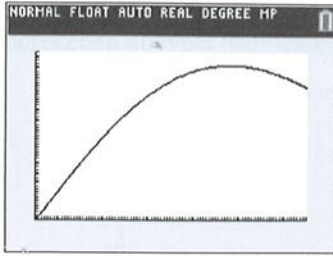
$$O(\triangle DEPQ) = PQ \cdot EP = 6 \cdot 4 \sin(25^\circ) = 24 \sin(25^\circ)$$

$$O(ABCDEF) = 4 \cdot O(\triangle EFP) + 2 \cdot O(DEPQ) = 4 \cdot 8 \sin(25^\circ) \cos(25^\circ) + 2 \cdot 24 \sin(25^\circ) = 32 \sin(25^\circ) \cos(25^\circ) + 48 \sin(25^\circ) \approx 32,54$$

- c $\angle CFE = 40^\circ$ geeft $O(ABCDEF) = 32 \sin(40^\circ) \cos(40^\circ) + 48 \sin(40^\circ) \approx 46,61$

Bladzijde 112

- 55 a Voer in $y_1 = 32 \sin(x) \cos(x) + 48 \sin(x)$.



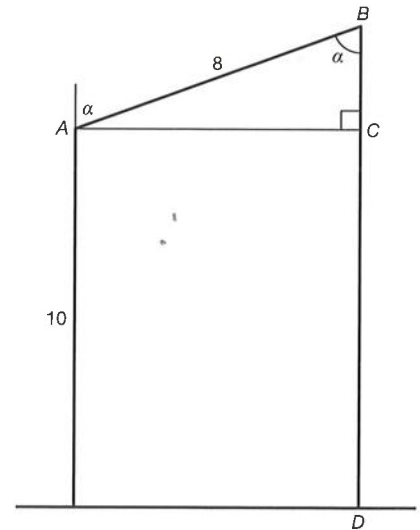
- b Voer in $y_2 = 50$.
Intersect geeft $x \approx 45$ en $x \approx 86$.
Dus $O = 50$ voor $\alpha \approx 45^\circ$ en voor $\alpha \approx 86^\circ$.
- c De optie maximum bij y_1 geeft $x \approx 65$ en $y \approx 55,76$.
Dus bij $\alpha \approx 65^\circ$ is de oppervlakte $O_{\max} \approx 55,76$.

- 56 a Teken $AC \perp BD$.
In $\triangle ABC$ is $\angle B = \alpha$ (Z-hoeken) en

$$\cos(\alpha) = \frac{BC}{8}, \text{ dus } BC = 8 \cos(\alpha).$$

$$\text{Dit geeft } h = 10 + 8 \cos(\alpha).$$

- b Voer in $y_1 = 10 + 8 \cos(x)$ en $y_2 = 15$.
Intersect geeft $x \approx 51$.
Dus voor $\alpha \approx 51^\circ$ is $h = 15$ m.



- 57 a Teken $DE \perp AB$.

$$\text{In } \triangle ADE \text{ is } \sin(\alpha) = \frac{DE}{5}, \text{ dus } DE = 5 \sin(\alpha)$$

$$\text{en } \cos(\alpha) = \frac{AE}{5}, \text{ dus } AE = 5 \cos(\alpha).$$

$$CD = BE = AB - AE = 10 - 5 \cos(\alpha)$$

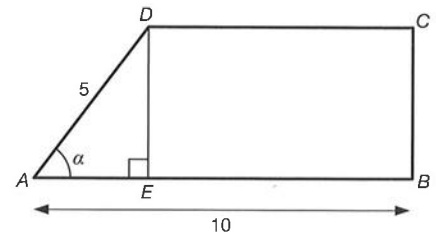
$$\text{Voor de oppervlakte } O \text{ van het trapezium geldt}$$

$$O = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE$$

$$= \frac{1}{2}(10 + 10 - 5 \cos(\alpha)) \cdot 5 \sin(\alpha)$$

$$= 2\frac{1}{2} \sin(\alpha) \cdot (20 - 5 \cos(\alpha))$$

$$= 50 \sin(\alpha) - 12\frac{1}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$



- b Teken DE loodrecht op het verlengde van AB .

$$\text{In } \triangle ADE \text{ is } \angle DAE = 180^\circ - \alpha.$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{DE}{5}, \text{ dus } DE = 5 \sin(180^\circ - \alpha) = 5 \sin(\alpha).$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{AE}{5}, \text{ dus } AE = 5 \cos(180^\circ - \alpha) = -5 \cos(\alpha).$$

$$\text{Voor de oppervlakte } O \text{ van het trapezium geldt}$$

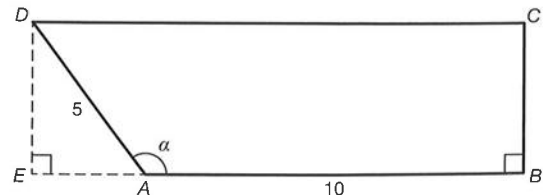
$$O = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE$$

$$= \frac{1}{2}(AB + AB + AE) \cdot DE$$

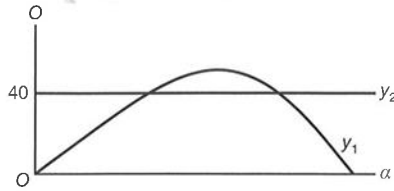
$$= \frac{1}{2}(10 + 10 - 5 \cos(\alpha)) \cdot 5 \sin(\alpha)$$

$$= 2\frac{1}{2} \sin(\alpha) \cdot (20 - 5 \cos(\alpha))$$

$$= 50 \sin(\alpha) - 12\frac{1}{2} \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$



- c Als $\alpha = 90^\circ$ dan is de oppervlakte O gelijk aan $O = AE \cdot AD = 10 \cdot 5 = 50$.
Met de formule krijg je $O = 50 \sin(90^\circ) - 12\frac{1}{2} \sin(90^\circ) \cos(90^\circ) = 50 \cdot 1 - 12\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 50$.
Dus de formule klopt ook voor $\alpha = 90^\circ$.
- d Voer in $y_1 = 50 \sin(x) - 12,5 \sin(x) \cos(x)$ en $y_2 = 40$.

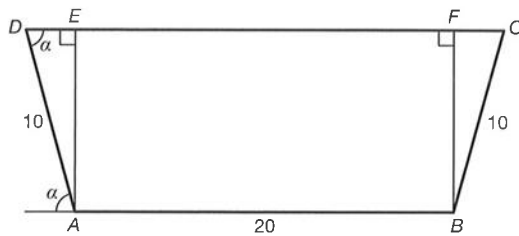


Intersect geeft $x \approx 63,97$ en $x \approx 137,51$.

Dus voor $64^\circ \leq \alpha \leq 137^\circ$ is $O > 40$.

- e De optie maximum bij y_1 geeft $x \approx 103$ en $y \approx 51,5$.
De oppervlakte is maximaal voor $\alpha \approx 103^\circ$.

- 58 a Zie de figuur hieronder met AE en BF loodrecht op CD .



$\angle ADE = \alpha$ (Z-hoeken)

In $\triangle ADE$ is $\sin(\alpha) = \frac{AE}{10}$, dus $AE = 10 \sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha) = \frac{DE}{10}$, dus $DE = 10 \cos(\alpha)$.

$$A = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AE$$

$$= \frac{1}{2}(20 + 20 + 2 \cdot 10 \cos(\alpha)) \cdot 10 \sin(\alpha)$$

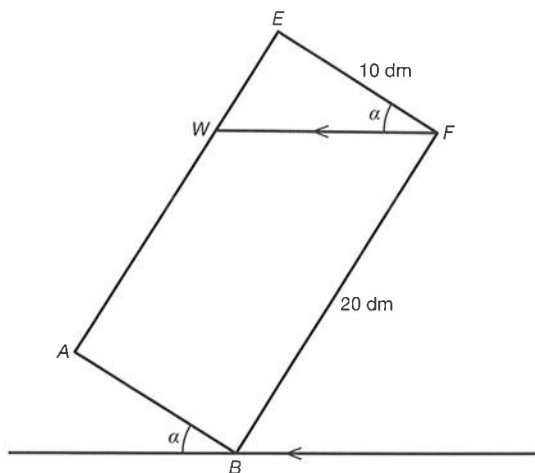
$$= 5 \sin(\alpha) \cdot (40 + 20 \cos(\alpha))$$

$$= 200 \sin(\alpha) + 100 \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$

- b Voer in $y_1 = 200 \sin(x) + 100 \sin(x) \cos(x)$.
De optie maximum geeft $x \approx 69$ en $y_1 \approx 220$.
Dus bij $\alpha \approx 69^\circ$ is $A_{\max} \approx 220 \text{ cm}^2$.

Bladzijde 113

- 59 a



De bak heeft een inhoud van $20 \cdot 10 \cdot 10 = 2000 \text{ dm}^3 = 2000$ liter.

Bij kantelhoek α staat de waterspiegel volgens de horizontale lijn WF met $\angle EFW = \alpha$ (F-hoeken).

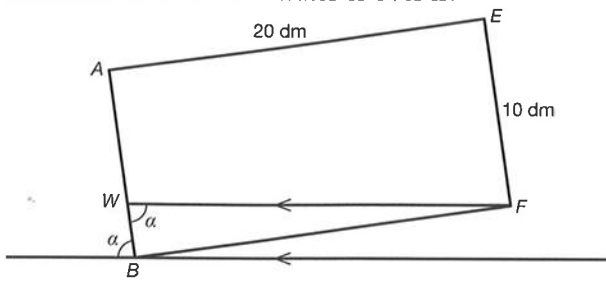
In $\triangle EFW$ is $\tan(\alpha) = \frac{EW}{10}$, dus $EW = 10 \tan(\alpha) \text{ dm}$.

De hoeveelheid weggestroomd water is precies de inhoud van het prisma met grondvlak $\triangle EFW$ en hoogte $FG = 10 \text{ dm}$.

$$I_{\text{prisma}} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot EW \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \tan(\alpha) \cdot 10 = 500 \tan(\alpha)$$

Dus $V = 2000 - 500 \tan(\alpha)$.

- b In de formule $V = 2000 - 500 \tan(\alpha)$ is 2000 de inhoud van de hele bak en $500 \tan(\alpha)$ de hoeveelheid water die eruit gestroomd is, waarbij dit een driezijdig prisma betreft. In situaties zoals in figuur 11.23d is de inhoud van een vierzijdig prisma weggestroomd. In zo'n situatie kun je rechtstreeks berekenen hoeveel liter water er over is.

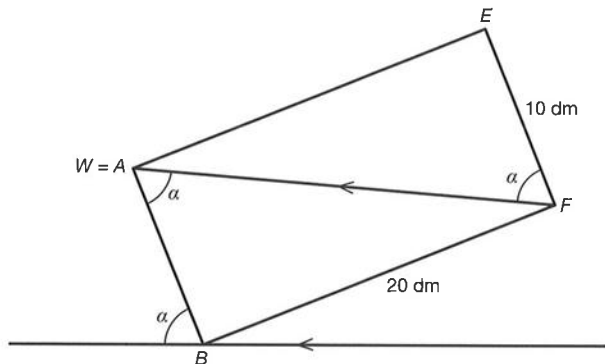


$\angle BWF = \alpha$ (Z-hoeken)

In $\triangle BFW$ is $\tan(\alpha) = \frac{20}{BW}$, dus $BW = \frac{20}{\tan(\alpha)}$ dm.

De hoeveelheid water is $V = \frac{1}{2} \cdot BW \cdot BF \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{\tan(\alpha)} \cdot 20 \cdot 10 = \frac{2000}{\tan(\alpha)}$ liter.

- c Beide formules komen op hetzelfde neer als W samenvalt met A .



In dit geval is $\tan(\alpha) = \frac{20}{10} = 2$, dus $\alpha \approx 63,4^\circ$.

Alternatieve uitwerking

In het geval dat beide formules te gebruiken zijn moeten ze dezelfde uitkomst geven.

Dus los op $2000 - 500 \tan(\alpha) = \frac{2000}{\tan(\alpha)}$.

Voer in $y_1 = 2000 - 500 \tan(x)$ en $y_2 = \frac{2000}{\tan(x)}$.

Intersect geeft $x \approx 63,4$ en $y = 1000$.

Dus bij kantelhoek $\alpha \approx 63,4^\circ$.

- d 1200 liter weggestroomd, dus $V = 2000 - 1200 = 800$ liter.

Gebruik de formule van vraag b.

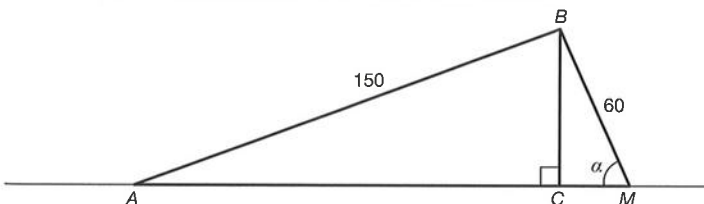
$$V = 800 \text{ geeft } \frac{2000}{\tan(\alpha)} = 800$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2000}{800} = 2\frac{1}{2}$$

$$\alpha \approx 68,2^\circ$$

Dus bij $\alpha \approx 68,2^\circ$ is er 1200 liter water weggestroomd.

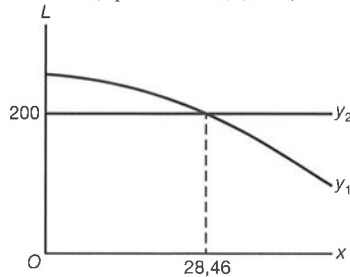
- 60 a Zie de figuur hieronder met BC loodrecht op AM .



In $\triangle BCM$ is $\sin(\alpha) = \frac{BC}{60}$, dus $BC = 60 \sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha) = \frac{CM}{60}$, dus $CM = 60 \cos(\alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{De stelling van Pythagoras in } \triangle ABC \text{ geeft } AC^2 &= 150^2 - (60 \sin(\alpha))^2 \\ AC^2 &= 22\,500 - 3600 \sin^2(\alpha) \\ AC &= \sqrt{22\,500 - 3600 \sin^2(\alpha)} \\ L &= CM + AC = 60 \cos(\alpha) + \sqrt{22\,500 - 3600 \sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

- b Voer in $y_1 = 60 \cos(x) + \sqrt{22\,500 - 3600 \sin^2(x)}$ en $y_2 = 200$.



Intersect geeft $x \approx 28,46$.

Dus $L > 200$ voor $0^\circ < \alpha \leq 28^\circ$.

Bladzijde 114

- 61 Zie de figuur hiernaast met CE loodrecht op AD en CF loodrecht op AB .

Er geldt $\sin(\alpha) = \frac{CE}{1}$, dus $CE = \sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha) = \frac{DE}{1}$, dus $DE = \cos(\alpha)$.

Vanwege de symmetrie is $AE = CF = CE = \sin(\alpha)$.

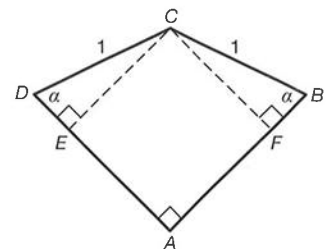
De oppervlakte O van de vierhoek is gegeven door

$$\begin{aligned} O &= O(AECF) + 2 \cdot O(\triangle CDE) \\ &= AE \cdot CE + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE \\ &= \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \\ &= \sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Voer in $y_1 = \sin^2(x) + \sin(x) \cos(x)$.

De optie maximum geeft $x = 67,5^\circ$ en $y \approx 1,21$.

Dus voor $\alpha = 67,5^\circ$ is de oppervlakte van de vierhoek maximaal.



Bladzijde 115

- 62 a In $\triangle EFG$ is $\sin(x) = \frac{EG}{4}$, dus $EG = 4 \sin(x)$ en $\cos(x) = \frac{FG}{4}$, dus $FG = 4 \cos(x)$.

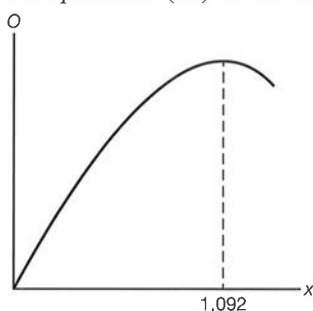
Voor de oppervlakte O van de zeshoek geldt

$$\begin{aligned} O &= 4 \cdot O(\triangle EFG) + 2 \cdot O(DEGH) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot FG \cdot EG + 2 \cdot DE \cdot EG \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cos(x) \cdot 4 \sin(x) + 2 \cdot 5 \cdot 4 \sin(x) \\ &= 32 \sin(x) \cos(x) + 40 \sin(x) \end{aligned}$$

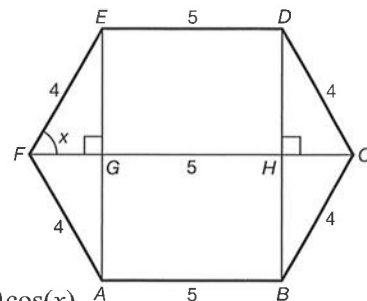
- b $\frac{dO}{dx} = 32 \cos(x) \cdot \cos(x) + 32 \sin(x) \cdot (-\sin(x)) + 40 \cos(x) = 32 \cos^2(x) - 32 \sin^2(x) + 40 \cos(x)$

Voer in $y_1 = 32 \cos^2(x) - 32 \sin^2(x) + 40 \cos(x)$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 1,092\dots$



Dus de oppervlakte is maximaal bij een hoek van $1,092\dots \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 63^\circ$.



63 a Zie de figuur hiernaast.

$\angle C = x$ (Z-hoeken)

In $\triangle BCF$ is $\sin(x) = \frac{BF}{20}$, dus $BF = 20 \sin(x)$ en

$\cos(x) = \frac{CF}{20}$, dus $CF = 20 \cos(x)$.

Voor de oppervlakte A in cm^2 van de dwarsdoorsnede geldt

$$A = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BF$$

$$= \frac{1}{2}(30 + 30 + 2 \cdot 20 \cos(x)) \cdot 20 \sin(x)$$

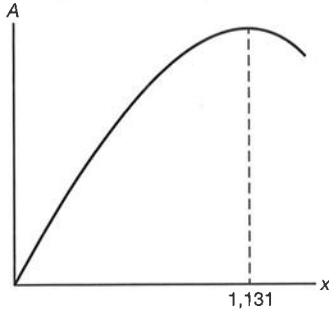
$$\hat{=} 10 \sin(x) \cdot (60 + 40 \cos(x))$$

$$= 600 \sin(x) + 400 \sin(x) \cos(x).$$

b $\frac{dO}{dx} = 600 \cos(x) + 400 \cos(x) \cdot \cos(x) + 400 \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = 600 \cos(x) + 400 \cos^2(x) - 400 \sin^2(x)$

Voer in $y_1 = 600 \cos(x) + 400 \cos^2(x) - 400 \sin^2(x)$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 1,131\dots$



Dus de oppervlakte is maximaal bij een hoek van $1,131\dots \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 65^\circ$.

64 a $MN = 7 + 5 = 12$

In $\triangle MNP$ is $\sin(x) = \frac{NP}{12}$, dus $NP = 12 \sin(x)$ en $\cos(x) = \frac{MP}{12}$, dus $MP = 12 \cos(x)$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABP$ geeft

$$AB^2 = AP^2 + BP^2$$

$$AB^2 = (7 + 12 \cos(x))^2 + (5 + 12 \sin(x))^2$$

$$AB^2 = 49 + 168 \cos(x) + 144 \cos^2(x) + 25 + 120 \sin(x) + 144 \sin^2(x)$$

$$AB^2 = 49 + 168 \cos(x) + 25 + 120 \sin(x) + 144(\sin^2(x) + \cos^2(x))$$

$$AB^2 = 49 + 168 \cos(x) + 25 + 120 \sin(x) + 144 \cdot 1$$

$$AB^2 = 49 + 168 \cos(x) + 25 + 120 \sin(x) + 144$$

$$AB^2 = 120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218$$

$$\text{Dus } L = AB = \sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}.$$

b $\angle PMN = 25^\circ$, dus $x = 25^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{5}{36} \pi \text{ rad}$.

$$\text{Dit geeft } L = \sqrt{120 \sin\left(\frac{5}{36} \pi\right) + 168 \cos\left(\frac{5}{36} \pi\right) + 218} \approx 20,5 \text{ dm}.$$

c Voer in $y_1 = \sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}$ en $y_2 = 20$.

Intersect geeft $x = 0,128\dots$ en $x = 1,111\dots$

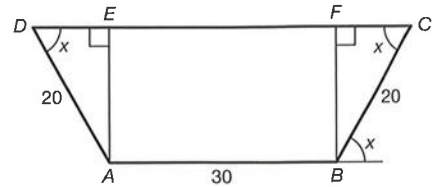
Dat komt overeen met $0,128\dots \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 7^\circ$ en $1,111\dots \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 64^\circ$.

Dus $\angle PMN \approx 7^\circ$ of $\angle PMN \approx 64^\circ$.

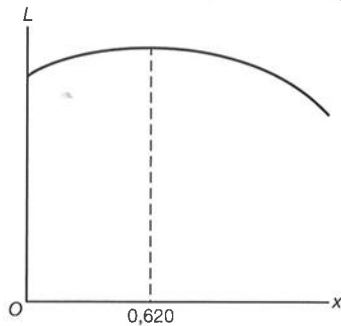
d $L = \sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}$ geeft

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}} \cdot (120 \cos(x) - 168 \sin(x)) = \frac{60 \cos(x) - 84 \sin(x)}{\sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}}$$

$$\text{Voer in } y_1 = \frac{60 \cos(x) - 84 \sin(x)}{\sqrt{120 \sin(x) + 168 \cos(x) + 218}}.$$



De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 0,620\dots$



De lengte is maximaal bij $x = 0,620\dots \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 36^\circ$.

De maximale lengte is $L = \sqrt{120 \sin(0,620\dots) + 168 \cos(0,620\dots) + 218} \approx 20,6$ dm.

Bladzijde 116

- 65 a Als R boven Q zit dan is $AQ = AR + QR = 120 + 40 = 160$ cm, dus $h = 200 + 160 = 360$ cm.
Als R onder Q zit dan is $AQ = AR - QR = 120 - 40 = 80$ cm, dus $h = 200 + 80 = 280$ cm.

- b In $\triangle FQR$ is $\cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{FQ}{40}$, dus $FQ = 40 \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) \approx 34,6$ cm en $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{FR}{40}$, dus $FR = 40 \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi) = 20$ cm.

$$\left. \begin{array}{l} \angle AER = \angle HFR = 90^\circ \\ \angle EAR = \angle FHR \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle AER \sim \triangle HFR \text{ (hh)}$$

Uit deze gelijkvormigheid volgt $\frac{AR}{HR} = \frac{ER}{FR}$ ofwel $\frac{120}{60} = \frac{ER}{20}$, dus $ER = 20 \cdot \frac{120}{60} = 40$.

In $\triangle AER$ is $AE = \sqrt{120^2 - 40^2} \approx 113,1$ cm.

Dus $h \approx 200 - 34,6 + 113,1 \approx 278$ cm.

- c In $\triangle FQR$ is $FQ = 40 \cos(x)$ en $FR = 40 \sin(x)$.

Uit $FR = 40 \sin(x)$ volgt $ER = 80 \sin(x)$.

In $\triangle AER$ geldt $ER^2 + AE^2 = AR^2$

$$(80 \sin(x))^2 + AE^2 = 120^2$$

$$AE = \sqrt{120^2 - 80^2 \sin^2(x)} = \sqrt{40^2 \cdot 3^2 - 40^2 \cdot 2^2 \sin^2(x)} = 40\sqrt{9 - 4\sin^2(x)}$$

Dus $h = PQ - QF + AE = 200 - 40 \cos(x) + 40\sqrt{9 - 4\sin^2(x)}$.

- d $h = 200 - 40 \cos(x) + 40\sqrt{9 - 4\sin^2(x)}$ geeft

$$\frac{dh}{dx} = 40 \sin(x) + 40 \cdot \frac{1}{2\sqrt{9 - 4\sin^2(x)}} \cdot -8 \sin(x) \cdot \cos(x) = 40 \sin(x) - \frac{160 \sin(x) \cos(x)}{\sqrt{9 - 4\sin^2(x)}}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } \frac{dh}{dx} = 40 \sin(\frac{1}{6}\pi) - \frac{160 \sin(\frac{1}{6}\pi) \cos(\frac{1}{6}\pi)}{\sqrt{9 - 4\sin^2(\frac{1}{6}\pi)}} \approx -4,5$$

Voor $x = \frac{1}{6}\pi$ is $\frac{dh}{dx} \approx -4,5 < 0$, dus A gaat omlaag.

Diagnostische toets

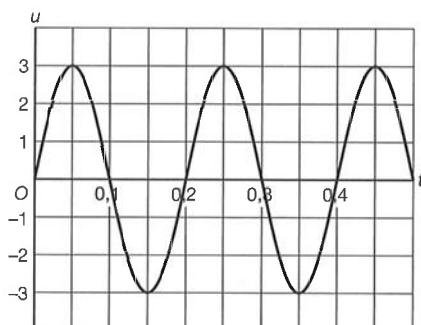
Bladzijde 118

- 1 a amplitude 3

$$\frac{2\pi}{T} = 10\pi \text{ geeft } T = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}, \text{ dus de trillingstijd is } \frac{1}{5} \text{ seconde.}$$

frequentie 5 hertz

- b



- 2 a** u_1 en u_2 hebben dezelfde trillingstijd, dus $c = 8\pi$.
 Voer in $y_1 = 0,4\sin(8\pi x) + 0,2\sin(8\pi x - 0,4\pi)$.
 De optie maximum geeft $x \approx 0,08$ en $y \approx 0,50$, dus $b \approx 0,50$.
 De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 0,015546$.
 Dus $u_p = 0,50\sin(8\pi(t - 0,015546)) = 0,50\sin(8\pi t - 0,39)$.
- b** De frequentie is 5 hertz.
 Dus in 1 seconde legt het punt $5 \cdot 4 \cdot 0,50 = 10$ cm af.
 Dus per minuut $60 \cdot 10 = 600$ cm.
 Reken je met niet-afgeronde getallen, dan krijg je in cm nauwkeurig 599 cm.

3 a

	$u_1 = \sin(10t)$	$u_2 = \sin(15t)$	
in $[0, 2\pi]$	10 trillingen	15 trillingen	deel door 5
in $[0, \frac{2}{5}\pi]$	2 trillingen	3 trillingen	

Dus de trillingstijd van $u = \sin(10t) + \sin(15t)$ is $\frac{2}{5}\pi$ seconden.

b

	$u_1 = 2\sin(450\pi t)$	$u_2 = \sin(400\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	450π trillingen	400π trillingen	deel door 50π
in $[0, \frac{1}{25}]$	9 trillingen	8 trillingen	

Dus de trillingstijd van $u = 2\sin(450\pi t) + \sin(400\pi t)$ is $\frac{1}{25}$ seconde.

4 a $2 + \sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{4}\pi x) = -1$

$$\sqrt{3} \cdot \tan(\frac{1}{4}\pi x) = -3$$

$$\tan(\frac{1}{4}\pi x) = -\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{4}\pi x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -1\frac{1}{3} + k \cdot 4$$

b $\tan(\frac{1}{3}x) = \tan(2x - \frac{1}{6}\pi)$

$$\frac{1}{3}x = 2x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

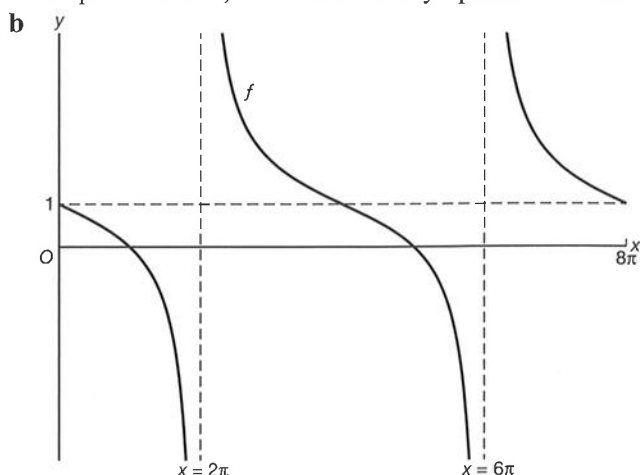
$$-1\frac{2}{3}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{3}{5}\pi$$

5 a Beginpunt $(0, 1)$ en periode $\frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$.

$$\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft de asymptoot } x = 2\pi.$$

De periode is 4π , dus de andere asymptoot is $x = 6\pi$.



c $f(x) = 0$ geeft $1 - \tan(\frac{1}{4}x) = 0$

$$\tan(\frac{1}{4}x) = 1$$

$$\frac{1}{4}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \pi + k \cdot 4\pi$$

$$x \text{ op } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \pi \vee x = 5\pi$$

$$f(x) \leq 0 \text{ geeft } \pi \leq x < 2\pi \vee 5\pi \leq x < 6\pi$$

- 6 a $-\cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = \cos(3x - \frac{1}{4}\pi + \pi) = \sin(3x - \frac{1}{4}\pi + \pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(3x + 1\frac{1}{4}\pi)$
 b $-\sin(2(x + \frac{1}{2}\pi)) = -\sin(2x + \pi) = \sin(2x)$
- 7 a $\frac{\cos(2(x - \frac{1}{4}\pi))}{\sin(-2x)} = \frac{\cos(2x - \frac{1}{2}\pi)}{-\sin(2x)} = \frac{\sin(2x)}{-\sin(2x)} = -1$
 b $2\cos(-\frac{1}{2}x) + 3\sin(\frac{1}{2}(\pi - x)) = 2\cos(\frac{1}{2}x) + 3\sin(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi) = 2\cos(\frac{1}{2}x) + 3\cos(-\frac{1}{2}x) = 2\cos(\frac{1}{2}x) + 3\cos(\frac{1}{2}x) = 5\cos(\frac{1}{2}x)$
- 8 a $-\sin(x - \frac{1}{2}\pi)\cos(-x) + \cos^2(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin(-x + \frac{1}{2}\pi)\cos(x) + \cos^2(x - \frac{1}{2}\pi + \pi) =$
 $\cos(-x)\cos(x) + \sin^2(x + \pi) = \cos(x)\cos(x) + (-\sin(x))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
 b $\frac{(1 + \cos(x)) \cdot (1 - \cos(x))}{\tan^2(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2} = \frac{\sin^2(x)}{\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} = \cos^2(x)$
 c $2 + \cos(x) - 2\sin^2(x) = 2 + \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x)) = 2 + \cos(x) - 2 + 2\cos^2(x) = \cos(x) + 2\cos^2(x)$
 d $(\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x)) = \sin^2(x) - \cos^2(x) = \sin^2(x) - (1 - \sin^2(x)) = \sin^2(x) - 1 + \sin^2(x) = 2\sin^2(x) - 1$

Bladzijde 119

- 9 a $f(x) = 4\sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)$ geeft $f'(x) = 4 \cdot \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi) \cdot \frac{1}{2} = 2\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)$
 b $g(x) = \sin(2x) \cdot \cos(3x)$ geeft
 $g'(x) = \cos(2x) \cdot 2 \cdot \cos(3x) + \sin(2x) \cdot -\sin(3x) \cdot 3 = 2\cos(2x)\cos(3x) - 3\sin(2x)\sin(3x)$
 c $h(x) = \cos^2(2x)$ geeft $h'(x) = 2\cos(2x) \cdot -\sin(2x) \cdot 2 = -4\sin(2x)\cos(2x)$
 d $k(x) = \sqrt{2 + \cos(x)}$ geeft $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + \cos(x)}} \cdot -\sin(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{2 + \cos(x)}}$
- 10 Stel $k: y = ax + b$.
 $f(x) = x\cos^2(x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \cos^2(x) + x \cdot 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = \cos^2(x) - 2x\sin(x)\cos(x)$
 $a = f'(\pi) = (-1)^2 - 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot -1 = 1$
 $y = x + b$
 $f(\pi) = \pi$, dus $A(\pi, \pi)$ } $b = 0$
 Dus $k: y = x$.
- 11 a $f(x) = \tan(3x) - 2x$ geeft $f'(x) = (1 + \tan^2(3x)) \cdot 3 - 2 = 3 + 3\tan^2(3x) - 2 = 1 + 3\tan^2(3x)$
 b $g(x) = 2x\tan(3x)$ geeft $g'(x) = 2 \cdot \tan(3x) + 2x \cdot (1 + \tan^2(3x)) \cdot 3 = 2\tan(3x) + 6x + 6x\tan^2(3x)$

- 12 a $f(x) = \frac{2\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$ geeft
 $f'(x) = \frac{(\sin(x) + \cos(x)) \cdot -2\sin(x) - 2\cos(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x))}{(\sin(x) + \cos(x))^2}$
 $= \frac{-2\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - 2\cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2}$
 $= \frac{-2(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{(\sin(x) + \cos(x))^2} = \frac{-2 \cdot 1}{(\sin(x) + \cos(x))^2} = \frac{-2}{(\sin(x) + \cos(x))^2}$
- b $g(x) = \frac{2\cos(x)}{1 - \cos(x)}$ geeft
 $g'(x) = \frac{(1 - \cos(x)) \cdot -2\sin(x) - 2\cos(x) \cdot \sin(x)}{(1 - \cos(x))^2} = \frac{-2\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) \cdot \sin(x)}{(1 - \cos(x))^2} = \frac{-2\sin(x)}{(1 - \cos(x))^2}$

13 a $f(x) = \frac{2\cos(x)}{2 - \sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(2 - \sin(x)) \cdot -2\sin(x) - 2\cos(x) \cdot -\cos(x)}{(2 - \sin(x))^2} = \frac{-4\sin(x) + 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x)}{(2 - \sin(x))^2}$$

$$= \frac{-4\sin(x) + 2(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{(2 - \sin(x))^2} = \frac{-4\sin(x) + 2 \cdot 1}{(2 - \sin(x))^2} = \frac{-4\sin(x) + 2}{(2 - \sin(x))^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $-4\sin(x) + 2 = 0$

$$-4\sin(x) = -2$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

x op $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$

$$f(\frac{1}{6}\pi) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \text{ dus } A(\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\sqrt{3}).$$

$$f(\frac{5}{6}\pi) = \frac{2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, \text{ dus } B(\frac{5}{6}\pi, -\frac{2}{3}\sqrt{3}).$$

b Stel $k: y = ax + b$.

$$a = f'(\pi) = \frac{-4 \cdot 0 + 2}{(2 - 0)^2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

$$f(\pi) = -1, \text{ dus } C(\pi, -1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi + b = -1 \\ b = -\frac{1}{2}\pi - 1 \end{array} \right.$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi - 1$.

14 $f(x) = \sin(x)\cos^3(x)$ geeft

$$f'(x) = \cos(x) \cdot \cos^3(x) + \sin(x) \cdot 3\cos^2(x) \cdot -\sin(x)$$

$$= \cos^4(x) - 3\sin^2(x)\cos^2(x)$$

$$= \cos^4(x) - 3(1 - \cos^2(x))\cos^2(x)$$

$$= \cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x)$$

$$= 4\cos^4(x) - 3\cos^2(x)$$

15 a Zie de figuur hiernaast met DE en CF loodrecht op AB .

Er geldt $\sin(65^\circ) = \frac{DE}{8}$, dus $DE = 8\sin(65^\circ)$ en

$\cos(65^\circ) = \frac{AE}{8}$, dus $AE = 8\cos(65^\circ)$.

$$O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cdot 8\cos(65^\circ) + 10 + 10) \cdot 8\sin(65^\circ)$$

$$= 4\sin(65^\circ) \cdot (20 + 16\cos(65^\circ))$$

$$= 80\sin(65^\circ) + 64\sin(65^\circ)\cos(65^\circ) \approx 97,0$$

b Er geldt $\sin(x) = \frac{DE}{8}$, dus $DE = 8\sin(x)$ en

$\cos(x) = \frac{AE}{8}$, dus $AE = 8\cos(x)$.

$$O = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cdot 8\cos(x) + 10 + 10) \cdot 8\sin(x)$$

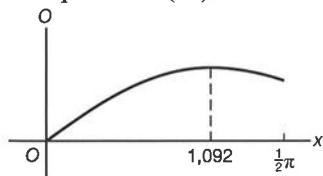
$$= 4\sin(x) \cdot (20 + 16\cos(x))$$

$$= 80\sin(x) + 64\sin(x)\cos(x)$$

c $\frac{dO}{dx} = 80\cos(x) + 64\cos(x) \cdot \cos(x) + 64\sin(x) \cdot -\sin(x) = 80\cos(x) + 64\cos^2(x) - 64\sin^2(x)$

Voer in $y_1 = 80\cos(x) + 64\cos^2(x) - 64\sin^2(x)$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 1,092...$



$x = 1,092...$ geeft $O = 80\cos(1,092...) + 64\sin(1,092...)\cos(1,092...) \approx 97,17$

De maximale oppervlakte is 97,17.

