

10 Toetsen van hypothesen

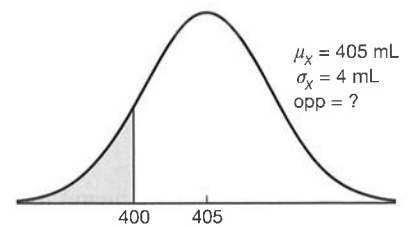
Voorkennis De binomiale en de normale verdeling

Bladzijde 39

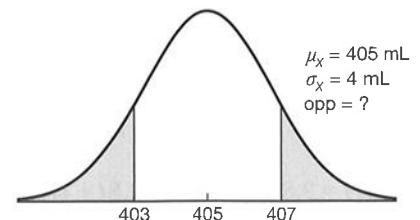
- 1 a X = het aantal met bloedgroep AB.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,03$.
 $P(X = 0) = \text{binompdf}(100, 0,03, 0) \approx 0,048$
- b $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{binomcdf}(100, 0,03, 4) \approx 0,182$
- c Y = het aantal met bloedgroep O.
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,467$.
 $P(Y > 50) = 1 - P(Y \leq 50) = 1 - \text{binomcdf}(100, 0,467, 50) \approx 0,223$
- d Z = het aantal met bloedgroep AB of bloedgroep O.
 Z is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,497$.
 $P(Z < 40) = P(Z \leq 39) = \text{binomcdf}(100, 0,497, 39) \approx 0,020$
- 2 a X = het aantal met overgewicht.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = 0,47$.
 $P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80) = 1 - \text{binomcdf}(150, 0,47, 80) \approx 0,051$
- b Y = het aantal met overgewicht of ernstig overgewicht.
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 320$ en $p = 0,59$.
 $P(Y < 180) = P(Y \leq 179) = \text{binomcdf}(320, 0,59, 179) \approx 0,145$
- c Z = het aantal met ernstig overgewicht.
 Z is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = 0,12$.
 $P(Z = 0) = \text{binompdf}(30, 0,12, 0) \approx 0,022$

Bladzijde 40

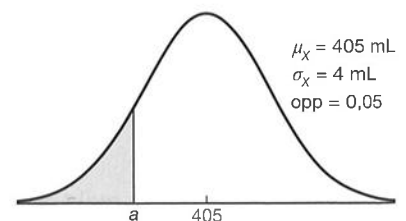
- 3 a Normale verdeling met $\mu = 80$ en $\sigma = 12$.
 $\text{opp} = \text{normalcdf}(100, 10^{99}, 80, 12) \approx 0,048$
- b $\text{opp rechts} = 0,65$ dus $\text{opp links} = 1 - 0,65 = 0,35$
 Normale verdeling met $\mu = 80$ en $\sigma = 12$.
 $\alpha = \text{invNorm}(0,35, 80, 12) \approx 75,4$
- c Normale verdeling met $\mu = 1,8$ en onbekende σ .
 $\text{normalcdf}(-10^{99}, 2,1, 1,8, \sigma) = 0,7$
 Voer in $y_1 = \text{normalcdf}(-10^{99}, 2,1, 1,8, x)$ (TI) of $y_1 = \text{NormCD}(-10^{99}, 2,1, x, 1,8)$ (Casio) en $y_2 = 0,7$.
 Intersect geeft $x \approx 0,57$, dus $\sigma \approx 0,57$.
- 4 a Normale verdeling met $\mu = 405$ mL en $\sigma = 4$ mL.
 $\text{kans} = \text{normalcdf}(-10^{99}, 400, 405, 4) \approx 0,106$



- b Normale verdeling met $\mu = 405$ mL en $\sigma = 4$ mL.
 $\text{kans} = 2 \cdot \text{normalcdf}(-10^{99}, 403, 405, 4) \approx 0,617$

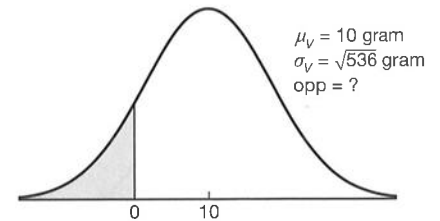
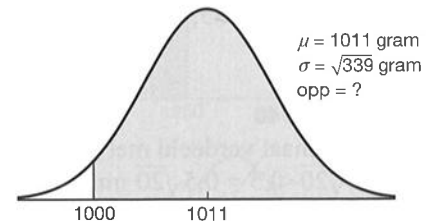


- c Normale verdeling met $\mu = 405$ mL en $\sigma = 4$ mL.
 $\alpha = \text{invNorm}(0,05, 405, 4) \approx 398,42$
 Dus inhouden van 398,4 mL en minder.



Bladzijde 41

- 5 a gemiddelde gewicht = $155 + 182 + 150 + 103 = 590$ gram
 standaardafwijking = $\sqrt{7^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{165} \approx 13$ gram
- b Het gewicht van de inhoud van zo'n mandje is normaal verdeeld met
 $\mu = 3 \cdot 155 + 3 \cdot 182 = 1011$ gram en $\sigma = \sqrt{3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 8^2} = \sqrt{339}$ gram.
 $P(\text{gewicht} > 1 \text{ kg}) = P(\text{gewicht} > 1000 \text{ gram}) =$
 $\text{normalcdf}(1000, 10^{99}, 1011, \sqrt{339}) \approx 0,725$
- c Het gewicht P van de inhoud van een mandje met 5 peren
 is normaal verdeeld met $\mu_P = 5 \cdot 182 = 910$ gram en
 $\sigma_P = \sqrt{5 \cdot 8^2} = 8\sqrt{5}$ gram.
 Het gewicht B van de inhoud van een mandje met 6 bananen
 is normaal verdeeld met $\mu_B = 6 \cdot 150 = 900$ gram en
 $\sigma_B = \sqrt{6 \cdot 6^2} = 6\sqrt{6}$ gram.
 De inhoud van een mandje met 5 peren weegt minder dan de
 inhoud van een mandje met 6 bananen als $P < B$, dus als $P - B < 0$,
 dus als $V < 0$ met $V = P - B$.
 V is normaal verdeeld met $\mu_V = 910 - 900 = 10$ gram en
 $\sigma_V = \sqrt{(8\sqrt{5})^2 + (6\sqrt{6})^2} = \sqrt{536}$ gram.
 $P(V < 0) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 0, 10, \sqrt{536}) \approx 0,333$
 De gevraagde kans is 0,333.

**10.1 Discrete en continue verdelingen****Bladzijde 42**

- 1 $P(X \leq 4)$ betekent de kans op 0, 1, 2, 3 of 4 beschimmelde sinaasappels in een net met 18 sinaasappels.
 $P(X < 4)$ betekent de kans op 0, 1, 2 of 3 beschimmelde sinaasappels in een net met 18 sinaasappels.
 Deze kansen zijn niet gelijk, dus bewering I is niet juist.
 $P(Y \leq 4)$ betekent de kans op een gewicht kleiner dan of gelijk aan 4 kg.
 $P(Y < 4)$ betekent de kans op een gewicht kleiner dan 4 kg.
 Het doet er niet toe of de grens van 4 kg wel of niet wordt meegenomen, dus $P(Y \leq 4) = P(Y < 4)$.
 Dus bewering II is juist.

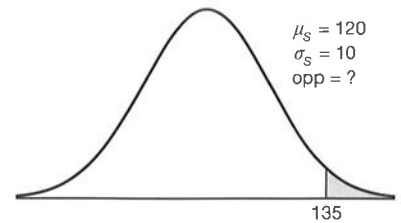
Bladzijde 44

- 2 a $P(X \leq 10) = P(Y \leq 10,5)$
 b $P(X < 12) = P(X \leq 11) = P(Y \leq 11,5)$
 c $P(X > 18) = P(X \geq 19) = P(Y \geq 18,5)$
 d $P(X \geq 11) = P(Y \geq 10,5)$
 e $P(X \leq 6 \text{ of } X \geq 8) = P(X \leq 6) + P(X \geq 8) = P(Y \leq 6,5) + P(Y \geq 7,5)$
 f $P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) = P(Y \leq 10,5) - P(Y \leq 9,5)$
- 3 a $P(X \leq 28) = P(Y \leq 28,5) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 28,5, 35,2, 6,9) \approx 0,166$
 b $P(X \geq 38) = P(Y \geq 37,5) = \text{normalcdf}(37,5, 10^{99}, 35,2, 6,9) \approx 0,369$
 c $P(X = 33) = P(X \leq 33) - P(X \leq 32) = P(Y \leq 33,5) - P(Y \leq 32,5) = P(32,5 \leq Y \leq 33,5) =$
 $\text{normalcdf}(32,5, 33,5, 35,2, 6,9) \approx 0,055$
 d $P(30 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 29) = P(Y \leq 60,5) - P(Y \leq 29,5) = P(29,5 \leq Y \leq 60,5) =$
 $\text{normalcdf}(29,5, 60,5, 35,2, 6,9) \approx 0,795$
 e $P(X < 45) = P(X \leq 44) = P(Y \leq 44,5) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 44,5, 35,2, 6,9) \approx 0,911$
 f $P(X > 40) = P(X \geq 41) = P(Y \geq 40,5) = \text{normalcdf}(40,5, 10^{99}, 35,2, 6,9) \approx 0,221$

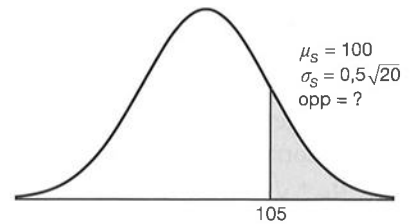
Bladzijde 45

- 4 a $P(X < 20) = P(X \leq 19) = P(Y \leq 19,5) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 19,5, 28,2, 4,3) \approx 0,022$
 Dus in 2,2% van de gevallen.
 b $P(X = 30) = P(X \leq 30) - P(X \leq 29) = P(Y \leq 30,5) - P(Y \leq 29,5) = P(29,5 \leq Y \leq 30,5) =$
 $\text{normalcdf}(29,5, 30,5, 28,2, 4,3) \approx 0,085$
 c $P(X > 25) = P(X \geq 26) = P(Y \geq 25,5) = \text{normalcdf}(25,5, 10^{99}, 28,2, 4,3) \approx 0,735$

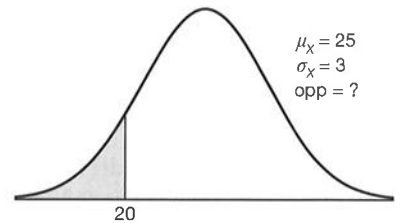
- 5 a $\mu_S = 30 + 30 + 30 + 30 = 4 \cdot 30 = 120$ minuten
 $\sigma_S = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{4 \cdot 5^2} = 10$ minuten
 b $P(\text{minstens twee uur en een kwartier filmen}) = P(S \geq 135) =$
 $\text{normalcdf}(135, 10^{99}, 120, 10) \approx 0,067$

**Bladzijde 46**

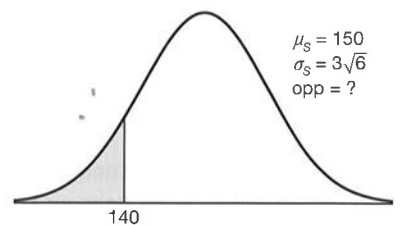
- 6 S is normaal verdeeld met $\mu_S = 20 \cdot 5 = 100$ mm en
 $\sigma_S = \sqrt{20} \cdot 0,5 = 0,5\sqrt{20}$ mm.
 $P(S > 105) = \text{normalcdf}(105, 10^{99}, 100, 0,5\sqrt{20}) \approx 0,013$



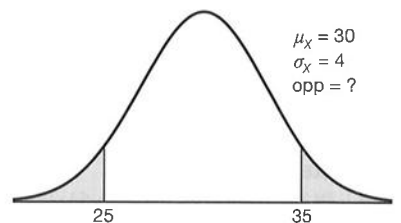
- 7 a $P(X < 20) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 20, 25, 3) \approx 0,048$



- b S is normaal verdeeld met $\mu_S = 6 \cdot 25 = 150$ gram en
 $\sigma_S = \sqrt{6} \cdot 3 = 3\sqrt{6}$ gram.
 $P(S < 140) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 140, 150, 3\sqrt{6}) \approx 0,087$

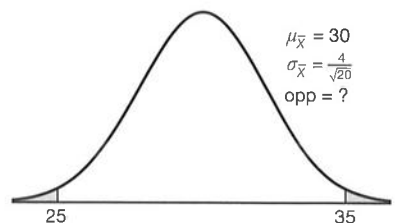
**Bladzijde 47**

- 8 a $P(X < 25 \vee X > 35) = 2 \cdot \text{normalcdf}(-10^{99}, 25, 30, 4) \approx 0,211$

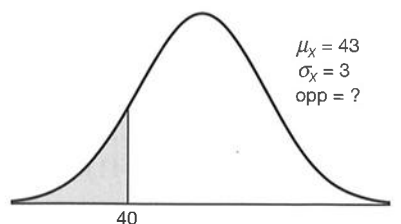


- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 30$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{20}}$.

$$P(\bar{X} < 25 \vee \bar{X} > 35) = 2 \cdot \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 25, 30, \frac{4}{\sqrt{20}}\right) \approx 2 \cdot 10^{-8}$$

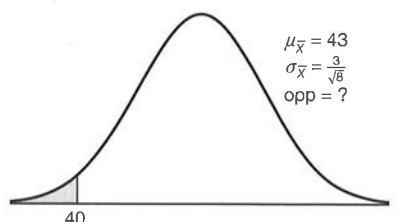


- 9 a X = het gewicht van een krentenbol.
 X is normaal verdeeld met $\mu = 43$ gram en $\sigma = 3$ gram.
 $P(X < 40) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 40, 43, 3) \approx 0,159$

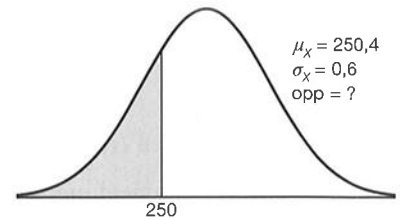


- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 43$ gram en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3}{\sqrt{8}}$ gram.

$$P(\bar{X} < 40) = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 40, 43, \frac{3}{\sqrt{8}}\right) \approx 0,002$$



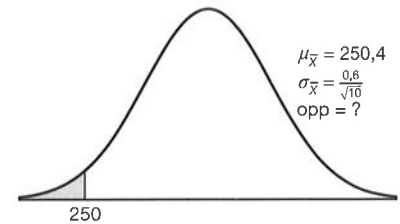
- 10 a** X = het gewicht van een pakje boter.
 X is normaal verdeeld met $\mu = 250,4$ gram en $\sigma = 0,6$ gram.
 $P(X < 250) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 250, 250,4, 0,6) \approx 0,252$
 Dus 25,2% van pakjes weegt minder dan 250 gram.



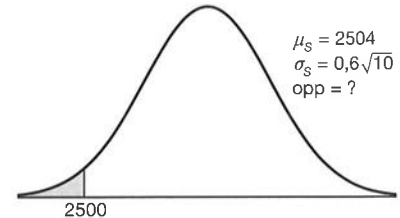
- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 250,4$ gram en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,6}{\sqrt{10}}$ gram.

$$P(\bar{X} < 250) = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 250, 250,4, \frac{0,6}{\sqrt{10}}\right) \approx 0,018$$

Dus 1,8% van de dozen heeft een gemiddeld gewicht per pakje van minder dan 250 gram.



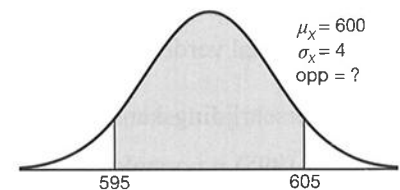
- c** S is normaal verdeeld met $\mu_S = 10 \cdot 250,4 = 2504$ gram en $\sigma_S = \sqrt{10} \cdot 0,6 = 0,6\sqrt{10}$ gram.
 $P(S < 2500) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 2500, 2504, 0,6\sqrt{10}) \approx 0,018$
 Dus 1,8% van de dozen heeft een inhoud van minder dan 2500 gram.
- d** Bij een gemiddeld gewicht per pakje van minder dan 250 gram weegt een doos minder dan $10 \cdot 250 = 2500$ gram.



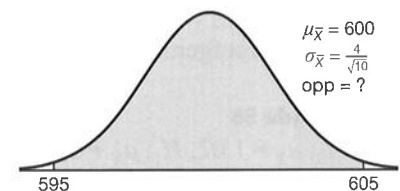
10.2 Beslissen op grond van een steekproef

Bladzijde 49

- 11 a** X = de lengte in mm van een buis.
 X is normaal verdeeld met $\mu_X = 600$ en $\sigma_X = 4$.
 $P(595 < X < 605) = \text{normalcdf}(595, 605, 600, 4) \approx 0,789$

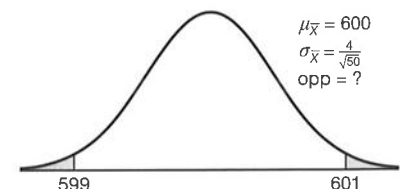


- b** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 600$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$.
 $P(595 < \bar{X} < 605) = \text{normalcdf}\left(595, 605, 600, \frac{4}{\sqrt{10}}\right) \approx 0,99992$



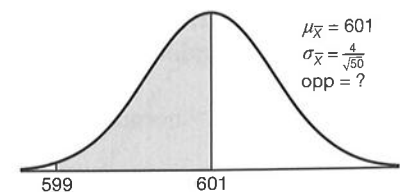
Bladzijde 51

- 12 a** $P(\text{ten onrechte bijstellen}) = P(\bar{X} \leq 599 \vee \bar{X} \geq 601) =$
 $2 \cdot P(\bar{X} \leq 599) = 2 \cdot \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 599, 600, \frac{4}{\sqrt{50}}\right) \approx 0,077$



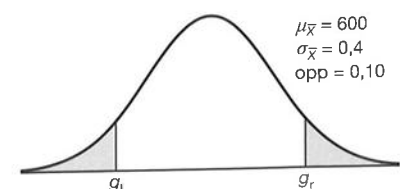
- b** Als Aluvia terecht tot bijstelling overgaat dan staat de machine afgesteld op een onbekend gemiddelde. Omdat dit gemiddelde onbekend is kun je de kans op terecht bijstellen niet berekenen.

- c** $P(\text{niet bijstellen}) = P(599 < \bar{X} < 601) =$
 $\text{normalcdf}\left(599, 601, 601, \frac{4}{\sqrt{50}}\right) \approx 0,500$



Bladzijde 52

- 13 a** $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 600$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0,4$.
 opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,10 = 0,05$
 $P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$, dus
 $g_l = \text{invNorm}(0,05, 600, 0,4) = 599,342... \approx 599,34$
 $P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,05 = 0,95$, dus
 $g_r = \text{invNorm}(0,95, 600, 0,4) = 600,657... \approx 600,66$



- b Het steekproefgemiddelde 601,8 is groter dan g_r , dus Aluvia verworpt H_0 en trekt de conclusie dat de machine moet worden bijgesteld.

Bladzijde 53

- 14 a $H_0: \mu_X = 15\,000$ en $H_1: \mu_X \neq 15\,000$

- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 15\,000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{600}{\sqrt{100}} = 60$.

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$

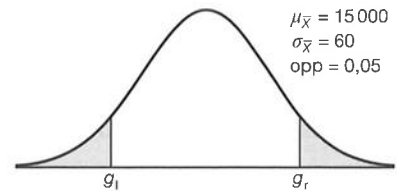
$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,025$, dus

$g_l = \text{invNorm}(0,025, 15\,000, 60) = 14\,882,40... \approx 14\,882,4$

$P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,025 = 0,975$, dus

$g_r = \text{invNorm}(0,975, 15\,000, 60) = 15\,117,59... \approx 15\,117,6$

- c Het steekproefgemiddelde 14 927 ligt tussen g_l en g_r , dus de fabrikant ziet geen aanleiding H_0 te verwerpen en trekt de conclusie dat het nieuwe procedé de levensduur van de lampen niet beïnvloedt.

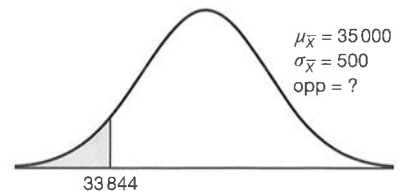


- 15 a $H_0: \mu_X = 35\,000$ en $H_1: \mu_X \neq 35\,000$

- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 35\,000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4000}{\sqrt{64}} = 500$.

$P(\bar{X} \leq 33\,844) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 33\,844, 35\,000, 500) \approx 0,010$

- c $P(\bar{X} \leq 33\,844) \approx 0,010$ en $P(\bar{X} \leq g_l) = \frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$, dus het steekproefgemiddelde is kleiner dan g_l en wijkt dus significant af van 35 000.

**Bladzijde 55**

- 16 X = de levensduur in uren van een batterij.

$H_0: \mu_X = 2000$, $H_1: \mu_X \neq 2000$ en $\alpha = 0,05$

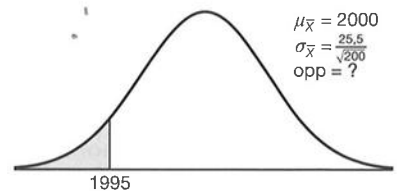
$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 2000$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{25,5}{\sqrt{200}}$.

De overschrijdingskans van 1995 is

$P(\bar{X} \leq 1995) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 1995, 2000, \frac{25,5}{\sqrt{200}}) \approx 0,003$.

$P(\bar{X} \leq 1995) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

Het steekproefgemiddelde wijkt significant af van 2000.

**Bladzijde 56**

- 17 a $H_0: \mu_X = 1,02$, $H_1: \mu_X \neq 1,02$ en $\alpha = 0,05$

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 1,02$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,04}{\sqrt{50}}$.

De overschrijdingskans van 1,04 is

$P(\bar{X} \geq 1,04) = \text{normalcdf}(1,04, 10^{99}, 1,02, \frac{0,04}{\sqrt{50}}) \approx 0,0002$.

$P(\bar{X} \geq 1,04) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

De fabrikant zal besluiten de vulmachine opnieuw in te stellen.

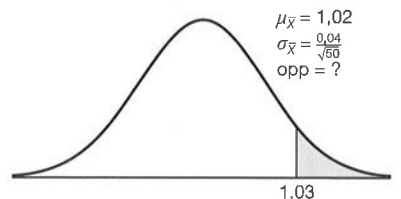
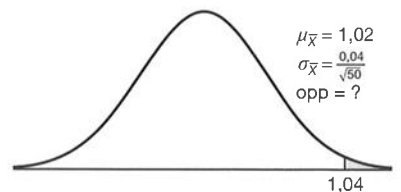
- b $H_0: \mu_X = 1,02$, $H_1: \mu_X \neq 1,02$ en $\alpha = 0,05$

De overschrijdingskans van 1,03 is

$P(\bar{X} \geq 1,03) = \text{normalcdf}(1,03, 10^{99}, 1,02, \frac{0,04}{\sqrt{50}}) \approx 0,039$.

$P(\bar{X} \geq 1,03) > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

De fabrikant zal de conclusie trekken dat de vulmachine niet bijgesteld hoeft te worden.



- 18 a $H_0: \mu_X = 10,2$, $H_1: \mu_X \neq 10,2$ en $\alpha = 0,10$

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 10,2$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,9}{\sqrt{40}}$.

De overschrijdingskans van 9,95 is

$$P(\bar{X} \leq 9,95) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 9,95, 10,2, \frac{0,9}{\sqrt{40}}) \approx 0,039.$$

$P(\bar{X} \leq 9,95) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt verworpen.

De afnemer trekt de conclusie dat de gemiddelde diameter significant afwijkt van 10,2 cm.

Bij $\alpha = 0,05$ is $P(\bar{X} \leq 9,95) \approx 0,039 > \frac{1}{2}\alpha$. Dus H_0 wordt niet verworpen. De afnemer trekt de conclusie dat de gemiddelde diameter niet significant afwijkt van 10,2 cm.

- b Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm

‘verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of als $\bar{X} \geq g_r$ ’.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 10,2$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,9}{\sqrt{100}} = 0,09$.

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,10 = 0,05$

$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,05$, dus

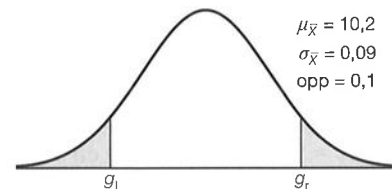
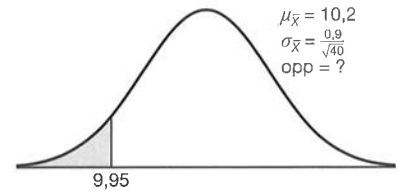
$$g_l = \text{invNorm}(0,05, 10,2, 0,09) = 10,051... \approx 10,05$$

$P(\bar{X} \leq g_r) = 1 - 0,05 = 0,95$, dus

$$g_r = \text{invNorm}(0,95, 10,2, 0,09) = 10,348... \approx 10,35$$

Het beslissingsvoorschrift is

‘verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 10,05$ of als $\bar{X} \geq 10,35$ ’.



10.3 Eenzijdig en tweezijdig toetsen

Bladzijde 58

- 19 a Omdat de bewering is dat de levensduur verlengd wordt.
 b Nee, want het steekproefgemiddelde is kleiner dan $\mu_X = 11500$.

Bladzijde 59

- 20 a Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm
 ‘verwerp H_0 als $\bar{X} \geq g$ ’.

$$P(\bar{X} \leq g) = 1 - 0,10 = 0,9$$

$$g = \text{invNorm}\left(0,9, 85, \frac{15}{\sqrt{30}}\right) \approx 88,51.$$

Het beslissingsvoorschrift is ‘verwerp H_0 als $\bar{X} \geq 88,6$ ’.

- b Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm
 ‘verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g$ ’.

$$P(\bar{X} \leq g) = 0,05, \text{ dus } g = \text{invNorm}\left(0,05, 85, \frac{15}{\sqrt{50}}\right) \approx 81,51.$$

Het beslissingsvoorschrift is ‘verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 81,5$ ’.

- c Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm
 ‘verwerp H_0 als $\bar{X} \leq g_l$ of als $\bar{X} \geq g_r$ ’.

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005$

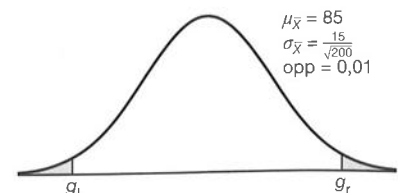
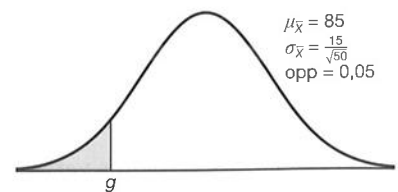
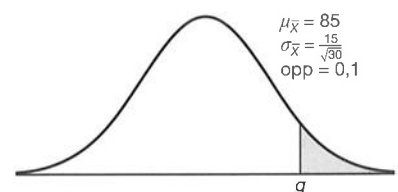
$$P(\bar{X} \leq g_l) = 0,005, \text{ dus}$$

$$g_l = \text{invNorm}\left(0,005, 85, \frac{15}{\sqrt{200}}\right) \approx 82,27.$$

$$P(\bar{X} \geq g_r) = 0,995, \text{ dus}$$

$$g_r = \text{invNorm}\left(0,995, 85, \frac{15}{\sqrt{200}}\right) \approx 87,73.$$

Het beslissingsvoorschrift is ‘verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 82,2$ of als $\bar{X} \geq 87,8$ ’.



- 21 a X = de afhandelingstijd in minuten van een bestelling.

$$H_0: \mu_X = 12, H_1: \mu_X < 12 \text{ en } \alpha = 0,05$$

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 12$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0,6$.

$$P(\bar{X} \leq g) = 0,05, \text{ dus } g = \text{invNorm}(0,05, 12, 0,6) \approx 11,01.$$

Dus bij steekproefgemiddelden van 11,0 minuten of minder is er aanleiding te veronderstellen dat de afhandelingstijd verminderd is.

- b $H_0: \mu_X = 12, H_1: \mu_X < 12$ en $\alpha = 0,01$

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 12$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3}{\sqrt{80}}$.

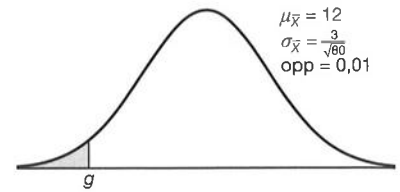
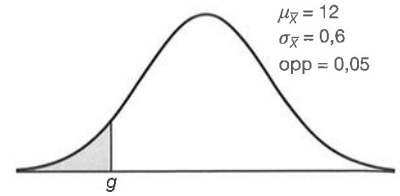
$$P(\bar{X} \leq g) = 0,01, \text{ dus } g = \text{invNorm}(0,01, 12, \frac{3}{\sqrt{80}}) \approx 11,21.$$

Het beslissingsvoorschrift is 'verwerp H_0 als $\bar{X} \leq 11,2$ '.

Het steekproefgemiddelde is 11 minuten en 18 seconden = 11,3 minuten.

Dit is meer dan 11,2 dus H_0 wordt niet verworpen.

Er is geen aanleiding om te concluderen dat de afhandelingstijd is afgenomen.



Bladzijde 61

- 22 X = het gewicht in gram van een pakje margarine.

$$H_0: \mu_X = 500, H_1: \mu_X > 500 \text{ en } \alpha = 0,05$$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{1,5}{\sqrt{100}} = 0,15$.

De overschrijdingskans van 500,4 is $P(\bar{X} \geq 500,4) = \text{normalcdf}(500,4, 10^{99}, 500, 0,15) \approx 0,004$.

$P(\bar{X} \geq 500,4) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Er is reden om de productieafdeling gelijk te geven.

- 23 X = het gewicht in kg van een zak aardappelen.

$$H_0: \mu_X = 5, H_1: \mu_X < 5 \text{ en } \alpha = 0,025$$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 5$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,4}{\sqrt{50}}$.

De overschrijdingskans van 4,76 is $P(\bar{X} \leq 4,76) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 4,76, 5, \frac{0,4}{\sqrt{50}}) \approx 0,00001$.

$P(\bar{X} \leq 4,76) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Je kunt zeggen dat de consumentenorganisatie gelijk krijgt.

- 24 a $P(\text{tablet werkt goed}) = P(3,8 < X < 4,2) = \text{normalcdf}(3,8, 4,2, 4, 0,12) \approx 0,904$

$$b \ H_0: \mu_X = 4, H_1: \mu_X \neq 4 \text{ en } \alpha = 0,05$$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 4$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0,12}{\sqrt{50}}$.

De overschrijdingskans van 3,95 is $P(\bar{X} \leq 3,95) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 3,95, 4, \frac{0,12}{\sqrt{50}}) \approx 0,002$.

$P(\bar{X} \leq 3,95) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 .

Het gemiddelde wijkt significant af van 4 mg.

$$c \ P(\text{tablet werkt niet goed}) = P(X \leq 3,8 \vee X \geq 4,2) = P(X \leq 3,8) + P(X \geq 4,2) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 3,8, 3,95, 0,12) + \text{normalcdf}(4,2, 10^{99}, 3,95, 0,12) \approx 0,124$$

Dus 12,4% van de tabletten werkt dan niet goed.

Bladzijde 62

- 25 X = de gemiddelde zinslengte in woorden van de middeleeuwse schrijver.

$$H_0: \mu_X = 28,6, H_1: \mu_X \neq 28,6 \text{ en } \alpha = 0,01$$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 28,6$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{5,9}{\sqrt{75}}$.

De overschrijdingskans van 30,2 is $P(\bar{X} \geq 30,2) = \text{normalcdf}(30,2, 10^{99}, 28,6, \frac{5,9}{\sqrt{75}}) \approx 0,009$.

$P(\bar{X} \geq 30,2) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Je kunt stellen dat het pas ontdekte manuscript van deze auteur afkomstig is.

- 26 X = de lengte in cm van de Nederlandse man.

$$H_0: \mu_X = 183, H_1: \mu_X > 183 \text{ en } \alpha = 0,01$$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 183$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{7}{\sqrt{133}}$.

De overschrijdingskans van 197 is $P(\bar{X} \geq 197) = \text{normalcdf}(197, 10^{99}, 183, \frac{7}{\sqrt{133}}) \approx 0$.

$P(\bar{X} \geq 30,2) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Je kunt zeggen dat de topbasketballers langer zijn dan gemiddeld.

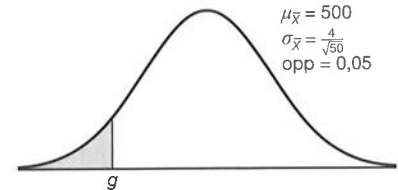
- 27 a X = de inhoud in gram van een pak koffie.

$$H_0: \mu_X = 500, H_1: \mu_X < 500 \text{ en } \alpha = 0,05$$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met

$$\mu_{\bar{X}} = 500 \text{ en } \sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{50}}.$$

$$P(\bar{X} \leq g) = 0,05, \text{ dus } g = \text{invNorm}(0,05, 500, \frac{4}{\sqrt{50}}) \approx 499,07.$$



Dus het gemiddelde gewicht per pak moet 499,0 gram of kleiner zijn.

- b $H_0: \mu_X = 500, H_1: \mu_X > 500 \text{ en } \alpha = 0,025$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$.

De overschrijdingskans van 501,94 is $P(\bar{X} \geq 501,94) = \text{normalcdf}(501,94, 10^{99}, 500, 0,8) \approx 0,008$.

$P(\bar{X} \geq 501,94) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Het hoofd van de afdeling Voorraad krijgt gelijk.

- c $H_0: \mu_X = 500, H_1: \mu_X \neq 500 \text{ en } \alpha = 0,05$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 500$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$.

De overschrijdingskans van 501,48 is $P(\bar{X} \geq 501,48) = \text{normalcdf}(501,48, 10^{99}, 500, 0,8) \approx 0,032$

$P(\bar{X} \geq 501,94) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Het steekproefresultaat wijkt niet significant af van 500 gram.

Bladzijde 63

- 28 a X = de gemiddelde trekkracht in newton.

De overschrijdingskans is $P(\bar{X} \leq 785)$.

Als dit steekproefresultaat bij $H_0: \mu = 800$ aanleiding geeft om H_0 te verwerpen is $P(\bar{X} \leq 785) \leq \alpha$.

Omdat $P(\bar{X} \leq 785)$ kleiner wordt als μ groter dan 800 wordt, is ook $P(\bar{X} \leq 785) \leq \alpha$

bij $H_0: \mu = a$ met $a > 800$.

Dus wordt H_0 ook verworpen bij $\mu > 800$.

- b Bij $\mu = 800$ is de overschrijdingskans $P(\bar{X} \leq 785)$ groter dan bij een μ -waarde groter dan 800.

Bij $\mu = 800$ wordt H_0 dus minder snel verworpen dan bij een μ -waarde groter dan 800 en dit is gunstiger voor de fabrikant.

- 29 X = het aantal uur dat een Nederlander per week tv kijkt.

$$H_0: \mu_X = 23,4, H_1: \mu_X < 23,4 \text{ en } \alpha = 0,025$$

Het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 22,6$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{2,4}{\sqrt{30}}$.

De overschrijdingskans van 22,6 is $P(\bar{X} \leq 22,6) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 22,6, 23,4, \frac{2,4}{\sqrt{30}}) \approx 0,034$

$P(\bar{X} \leq 22,6) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Ik ben het niet eens met de bewering van de medewerker van De Ster.

10.4 Binomiale toetsen

Bladzijde 65

- 30 a Je let alleen op de gebeurtenissen succes (de persoon vindt de frisdrank van Mol de lekkerste) en mislukking. Verder is bij elk kansexperiment de kans op succes hetzelfde. Als Mol gelijk heeft, dan is $p = 0,40$.
- b Nee, want $X = 48$ is meer dan het verwachte aantal van 40 dat hoort bij $p = 0,40$.
- c De concurrent krijgt dan gelijk, want $X = 28$ ligt ver onder het verwachte aantal van 40 als $p = 0,40$.

Bladzijde 66

- 31 a** X = het aantal personen dat in één keer voor het rijexamen slaagt.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 40$ en $p = 0,45$.
 $H_0: p = 0,45$ en $H_1: p > 0,45$
 De overschrijdingskans van 23 is
 $P(X \geq 23) = 1 - P(X \leq 22) = 1 - \text{binomcdf}(40, 0,45, 22) \approx 0,077$.
- b** $P(X \geq 23) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is aanleiding de bewering van de rijschoolhouder in twijfel te trekken.

Bladzijde 67

- 32** X = het aantal personen dat achter het regeringsbeleid staat.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = 0,55$.
 $H_0: p = 0,55$, $H_1: p < 0,55$ en $\alpha = 0,01$
 De overschrijdingskans van 94 is $P(X \leq 94) = \text{binomcdf}(200, 0,55, 94) \approx 0,014$.
 $P(X \leq 94) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 De steekproefuitslag wijkt niet significant af van de mening van de woordvoerder van de regering.
- 33** X = het aantal mensen dat later met een allergie te kampen kreeg.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 474$ en $p = 0,3$.
 $H_0: p = 0,3$, $H_1: p < 0,3$ en $\alpha = 0,025$
 De overschrijdingskans van 112 is $P(X \leq 112) = \text{binomcdf}(474, 0,3, 112) \approx 0,001$.
 $P(X \leq 112) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Er is aanleiding de onderzoekers gelijk te geven.
- 34** X = het aantal mannen dat aan een vorm van kleurenblindheid lijdt.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 200$ en $p = 0,08$.
 $H_0: p = 0,08$, $H_1: p > 0,08$ en $\alpha = 0,05$
 De overschrijdingskans van 22 is
 $P(X \geq 22) = 1 - P(X \leq 21) = 1 - \text{binomcdf}(200, 0,08, 21) \approx 0,080$.
 $P(X \geq 22) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is geen aanleiding om biofoog Vosseberg gelijk te geven.

Bladzijde 68

- 35** X = het aantal personen dat zich stoort aan reclamespots tijdens een film.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,70$.
 $H_0: p = 0,70$, $H_1: p < 0,70$ en $\alpha = 0,025$
 De overschrijdingskans van 320 is $P(X \leq 320) = \text{binomcdf}(500, 0,70, 320) \approx 0,002$.
 $P(X \leq 320) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Er is voldoende reden om de mening van de recensent in twijfel te trekken.
- 36** X = het aantal keer zes ogen bij het gooien met een dobbelsteen.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $H_0: p = \frac{1}{6}$, $H_1: p < \frac{1}{6}$ en $\alpha = 0,05$
 De overschrijdingskans van 8 is $P(X \leq 8) = \text{binomcdf}(80, \frac{1}{6}, 8) \approx 0,067$.
 $P(X \leq 8) > \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Er is niet voldoende aanleiding om het met Mirjam eens te zijn.
- 37** X = het aantal keer op rood bij het draaien van de schijf.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 160$ en $p = \frac{1}{4}$.
 $H_0: p = \frac{1}{4}$, $H_1: p > \frac{1}{4}$ en $\alpha = 0,01$
 De overschrijdingskans van 52 is
 $P(X \geq 52) = 1 - P(X \leq 51) = 1 - \text{binomcdf}(160, \frac{1}{4}, 51) \approx 0,020$.
 $P(X \geq 52) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is niet voldoende reden om Simon gelijk te geven.

Bladzijde 69

- 38** X = het aantal patiënten waarbij het middel een positieve uitwerking had.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,80$.
 $H_0: p = 0,80, H_1: p < 0,80$ en $\alpha = 0,05$
 Verwerp H_0 als $X \leq g$.
 Zoek het grootste gehele getal g zo, dat $P(X \leq g) \leq 0,05$ ofwel $\text{binomcdf}(500, 0,80, g) \leq 0,05$.
 Voer in $y_1 = \text{binomcdf}(500, 0,80, x)$ (TI) of $y_1 = \text{BinomialCD}(x, 500, 0,80)$ (Casio).
 Uit de tabel volgt
 $x = 384$ geeft $y_1 \approx 0,0434$
 $x = 385$ geeft $y_1 \approx 0,0543$.
 Verwerp H_0 als $X \leq 384$.
 Het kleinste aantal patiënten waarbij de bewering van de fabrikant niet wordt verworpen is 385.

- 39** X = het aantal patiënten dat binnen twee weken geneest.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 50$ en $p = 0,75$.
 $H_0: p = 0,75, H_1: p > 0,75$ en $\alpha = 0,05$
 Verwerp H_0 als $X \geq g$.
 Zoek het kleinste gehele getal g zo, dat $P(X \geq g) \leq 0,05$ ofwel $1 - P(X \leq g - 1) \leq 0,05$
 ofwel $1 - \text{binomcdf}(50, 0,75, g - 1) \leq 0,05$.
 Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(50, 0,75, x - 1)$ (TI) of $y_1 = \text{BinomialCD}(x - 1, 50, 0,75)$ (Casio).
 Uit de tabel volgt
 $x = 42$ geeft $y_1 \approx 0,0916$
 $x = 43$ geeft $y_1 \approx 0,0453$.
 Verwerp H_0 als $X \geq 43$.
 Er moeten minstens 43 personen binnen twee weken genezen om de bewering van de fabrikant te accepteren.

Bladzijde 70

- 40 a** X = het aantal sets dat gewonnen wordt door een speler die de set met serveren begint.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,55$.
 $H_0: p = 0,55, H_1: p < 0,55$ en $\alpha = 0,05$
 Verwerp H_0 als $X \leq g$.
 Zoek het grootste gehele getal g zo, dat $P(X \leq g) \leq 0,05$ ofwel $\text{binomcdf}(500, 0,55, g) \leq 0,05$.
 Voer in $y_1 = \text{binomcdf}(500, 0,55, x)$ (TI) of $y_1 = \text{BinomialCD}(x, 500, 0,55)$ (Casio).
 Uit de tabel volgt
 $x = 256$ geeft $y_1 \approx 0,04837$
 $x = 257$ geeft $y_1 \approx 0,05805$.
 Verwerp H_0 als $X \leq 256$.
 Het aantal sets waarbij de speler die begint met serveren de set wint is hoogstens 256.
- b** $X = 242 \leq 256$, dus verwerp H_0 .
 Jacco krijgt gelijk. Het door de tennisliefhebber genoemde percentage is te optimistisch.
- c** Y = het aantal games dat wordt gewonnen door een speler die met nieuwe ballen heeft mogen serveren.
 Y is binomiaal verdeeld met $n = 300$ en $p = 0,815$.
 $H_0: p = 0,815, H_1: p > 0,815$ en $\alpha = 0,025$
 Verwerp H_0 als $Y \geq g$.
 Zoek het kleinste gehele getal g zo, dat $P(Y \geq g) \leq 0,025$ ofwel $1 - P(Y \leq g - 1) \leq 0,025$
 ofwel $1 - \text{binomcdf}(300, 0,815, g - 1) \leq 0,025$.
 Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(300, 0,815, x - 1)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(x - 1, 300, 0,815)$ (Casio).
 Uit de tabel volgt
 $x = 257$ geeft $y_1 \approx 0,03415$
 $x = 258$ geeft $y_1 \approx 0,02375$.
 Verwerp H_0 als $Y \geq 258$.
 De serveerder moet minstens 258 games winnen opdat Jacco gelijk krijgt.

Bladzijde 71

- 41 a Een onzuiver geldstuk kan te veel maar ook te weinig keer kop geven.
 b X = het aantal keer kop bij het gooien met een geldstuk.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$.
 $H_0: p = 0,5$, $H_1: p \neq 0,5$ en $\alpha = 0,05$
 De overschrijdingskans van 59 is
 $P(X \geq 59) = 1 - P(X \leq 58) = 1 - \text{binomcdf}(100, 0,5, 58) \approx 0,044$.
 $P(X \geq 59) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Conclusie: het geldstuk is zuiver.

Bladzijde 72

- 42 X = het aantal keer zes ogen bij het gooien met een dobbelsteen.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 150$ en $p = \frac{1}{6}$.
 $H_0: p = \frac{1}{6}$, $H_1: p \neq \frac{1}{6}$ en $\alpha = 0,05$
 De overschrijdingskans van 12 is $P(X \leq 12) = \text{binomcdf}(150, \frac{1}{6}, 12) \approx 0,002$.
 $P(X \leq 12) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 .
 Conclusie: de dobbelsteen is niet zuiver.
- 43 Verwerp H_0 als $X \leq g_l$ of als $X \geq g_r$.
 Zoek het grootste gehele getal g_l zo, dat $P(X \leq g_l) \leq \frac{1}{2}\alpha = 0,05$ ofwel $\text{binomcdf}(50, 0,3, g_l) \leq 0,05$.
 En zoek het kleinste gehele getal g_r zo, dat $P(X \geq g_r) \leq \frac{1}{2}\alpha = 0,05$ ofwel $1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,05$
 ofwel $1 - \text{binomcdf}(50, 0,3, g_r - 1) \leq 0,05$.
 Voer in $y_1 = \text{binomcdf}(50, 0,3, x)$ (TI) of $y_1 = \text{BinomialCD}(x, 50, 0,3)$ (Casio).
 Uit de tabel volgt
 $x = 9$ geeft $y_1 \approx 0,0402$
 $x = 10$ geeft $y_1 \approx 0,0789$.
 Verwerp H_0 als $X \leq 9$.
 Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(50, 0,3, x - 1)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(x - 1, 50, 0,3)$ (Casio).
 Uit de tabel volgt
 $x = 20$ geeft $y_1 \approx 0,0848$
 $x = 21$ geeft $y_1 \approx 0,0478$.
 Verwerp H_0 als $X \geq 21$.
 De nulhypothese wordt verworpen bij steekproefresultaten van 9 of minder en van 21 of meer.
- 44 X = het aantal mensen dat het een goed idee vindt veroordeelden van lichte delicten thuis hun straf te laten uitzitten met behulp van een zender die aan de voet bevestigd wordt.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 66$ en $p = 0,68$.
 $H_0: p = 0,68$, $H_1: p < 0,68$ en $\alpha = 0,05$
 De overschrijdingskans van 38 is $P(X \leq 38) = \text{binomcdf}(66, 0,68, 38) \approx 0,048$.
 $P(X \leq 38) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .
 Er is voldoende aanleiding woordvoerder Oskam gelijk te geven.

- 45 a X = het aantal keer dat het balletje op sector 1 blijft liggen.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 500$ en $p = 0,2$.
 $H_0: p = 0,2$, $H_1: p \neq 0,2$ en $\alpha = 0,01$
 De overschrijdingskans van 115 is
 $P(X \geq 115) = 1 - P(X \leq 114) = 1 - \text{binomcdf}(500, 0,2, 114) \approx 0,054$.
 $P(X \geq 115) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is geen aanleiding te vermoeden dat de roulette niet zuiver is.
- b X = het aantal keer dat het balletje op de sectoren 4 en 5 blijft liggen.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 600$ en $p = 0,4$.
 $H_0: p = 0,4$, $H_1: p \neq 0,4$ en $\alpha = 0,01$
 Verwerp H_0 als $X \leq g_l$ of als $X \geq g_r$.
 Zoek het grootste gehele getal g_l zo, dat $P(X \leq g_l) \leq \frac{1}{2}\alpha = 0,005$ ofwel $\text{binomcdf}(600, 0,4, g_l) \leq 0,005$.
 En zoek het kleinste gehele getal g_r zo, dat $P(X \geq g_r) \leq \frac{1}{2}\alpha = 0,005$ ofwel $1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,005$
 ofwel $1 - \text{binomcdf}(600, 0,4, g_r - 1) \leq 0,005$.
 Voer in $y_1 = \text{binomcdf}(600, 0,4, x)$ (TI) of $y_1 = \text{BinomialCD}(x, 600, 0,4)$ (Casio).
 Uit de tabel volgt
 $x = 208$ geeft $y_1 \approx 0,0041$
 $x = 209$ geeft $y_1 \approx 0,0052$.
 Verwerp H_0 als $X \leq 208$.
 Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(600, 0,4, x - 1)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(x - 1, 600, 0,4)$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 271$ geeft $y_1 \approx 0,0057$

$x = 272$ geeft $y_1 \approx 0,0045$.

Verwerp H_0 als $X \geq 272$.

De zuiverheid van de roulette zal niet in twijfel worden getrokken bij de aantallen 209 tot en met 271.

- c X = het aantal keer dat het balletje op de sectoren met een even getal blijft liggen.

X is binomiaal verdeeld met $n = 300$ en $p = 0,4$.

$H_0: p = 0,4, H_1: p < 0,4$ en $\alpha = 0,025$

De overschrijdingskans van 110 is $P(X \leq 110) = \text{binomcdf}(300, 0,4, 110) \approx 0,131$.

$P(X \leq 110) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is niet voldoende reden om het met Erik eens te zijn.

- 46 X = het aantal woningen met dubbele beglazing.

X is binomiaal verdeeld met $n = 2375$ en $p = 0,5$.

$H_0: p = 0,5, H_1: p < 0,5$ en $\alpha = 0,025$

De overschrijdingskans van 1141 is $P(X \leq 1141) = \text{binomcdf}(2375, 0,5, 1141) \approx 0,030$.

$P(X \leq 1141) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is niet voldoende reden om de veronderstelling van de VEH te herzien.

Bladzijde 73

- 47 X = het aantal spaarlampen met een levensduur van meer dan 8000 uur.

X is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = 0,8$.

$H_0: p = 0,8, H_1: p < 0,8$ en $\alpha = 0,10$

Het steekproefresultaat is 21 op een totaal van 30.

De overschrijdingskans van 21 is $P(X \leq 21) = \text{binomcdf}(30, 0,8, 21) \approx 0,129$.

$P(X \leq 21) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

De steekproef geeft voldoende aanleiding de fabrikant in het gelijk te stellen.

- 48 a $P(\text{een tomaat wordt doorgedraaid}) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 7,2, 7,9, 0,5) = 0,0807... \approx 0,081$

- b X = het aantal tomaten dat na meting moet worden doorgedraaid.

X is binomiaal verdeeld met $n = 900$ en $p = 0,0807...$

$H_0: p = 0,081, H_1: p < 0,081$ en $\alpha = 0,01$

De overschrijdingskans van 65 is $P(X \leq 65) = \text{binomcdf}(900, 0,0807..., 65) \approx 0,191$.

$P(X \leq 65) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is niet aangetoond dat het middel Turbotom de diameter vergroot.

- 49 a X = het aantal baby's dat behoort tot de categorie 'zwaar'

X is binomiaal verdeeld met $n = 80$ en $p = \text{normalcdf}(4000, 10^{99}, 3250, 425) = 0,03880...$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \text{binomcdf}(80, 0,03880..., 4) \approx 0,199$

- b $H_0: p = 0,0388, H_1: p > 0,0388$ en $\alpha = 0,01$

De overschrijdingskans van 8 is

$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \text{binomcdf}(58, 0,03880..., 7) \approx 0,002$.

$P(X \geq 8) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Conclusie: je kunt de medewerkers van het consultatiebureau gelijk geven.

Bladzijde 74

- 50 a Je bekijkt voor elk nat jaar eenmalig of het in de periode 1901-1950 valt, of in de periode 1951-2000.

Dus je hebt te maken met het kansmodel van trekken zonder terugleggen.

Stel als volgt de vaas samen: 100 knikkers waarvan 50 rood (de jaren 1901 t/m 1950) en 50 wit (de jaren 1961 t/m 2000). Onder deze 100 jaren zijn de 10 natste jaren willekeurig verdeeld. De kans dat 9 van de 10 natste jaren in de periode 1951-2000 vallen, en 1 natste jaar in de periode 1901-1950 is dus

$$\frac{\binom{50}{1} \cdot \binom{50}{9}}{\binom{100}{10}}.$$

$$\text{De overschrijdingskans van 9 is } \frac{\binom{50}{1} \cdot \binom{50}{9}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{50}{9} \cdot \binom{50}{1}}{\binom{100}{10}} \approx 0,008.$$

$0,008 \leq 0,01$, dus er is sprake van een significante afwijking.

De stelling dat het op toevallige variaties in neerslag berust dat negen van tien natste jaren in de periode 1901-2000 in de jaren na 1950 vallen, wordt verworpen.

Je kunt dus concluderen dat extreem natte jaren na 1950 vaker voorkomen.

- b** X = het aantal van de tien natste jaren in de periode 1901-1980.

X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,8$.

$H_0: p = 0,8$, $H_1: p \neq 0,8$ en $\alpha = ?$

Uit de tabel volgt $X = 5$, en omdat $np = 10 \cdot 0,8 = 8$ bereken je $P(X \leq 5) = \text{binomcdf}(10, 0,8, 5) = 0,0327...$

De toets is tweezijdig. Dit geeft $\alpha = 2 \cdot 0,0327... \approx 0,066$.

- c** Je hebt te maken met het kansmodel van trekken zonder terugleggen, dus het gebruik van de binomiale verdeling is niet toegestaan.

- d** H_0 : in de periode 1961-2000 komen extreem natte jaren gemiddeld even vaak voor als in de periode 1901-1960,

H_1 : in de periode 1961-2000 komen extreem natte jaren gemiddeld vaker voor dan in de periode 1901-1960,
 $\alpha = 0,01$

Y = het aantal van de tien natste jaren in de periode 1961-2000.

Uit de tabel volgt $Y = 8$.

$$\text{De overschrijdskans van 8 is } P(Y \geq 8) = \frac{\binom{40}{8} \cdot \binom{60}{2} + \binom{40}{9} \cdot \binom{60}{1} + \binom{40}{10}}{\binom{100}{10}} \approx 0,00886.$$

$0,00886 \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

De onderzoeker krijgt gelijk.

10.5 De toets van Wilcoxon

Bladzijde 76

51 a

X gerangschikt van klein naar groot	rangnummer van X	Y gerangschikt van klein naar groot	rangnummer van Y
59	2	58	1
64	5	62	3
67	7	63	4
70	9	65	6
71	10	69	8
74	13	72	11
75	14	73	12
		76	15
		78	16

b $S_X = 2 + 5 + 7 + 9 + 10 + 13 + 14 = 60$

c Het minimum van S_X is $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (1 + 7) = 28$.

d Het maximum van S_X is $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (10 + 16) = 91$.

e $E(S_X) = \frac{28 + 91}{2} = 59,5$

f *

g *

Bladzijde 78

- 52 $n = 25$ en $m = 30$, dus $n \geq 5$ en $m \geq 10$ en dus is de normale benadering toegestaan.

$H_0: \mu_X = \mu_Y$, $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ en $\alpha = 0,10$

$E(S_X) = \frac{1}{2}n(n + m + 1) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (25 + 30 + 1) = 700$ en

$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot nm(n + m + 1)} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot 25 \cdot 30 \cdot (25 + 30 + 1)} = \sqrt{3500}$

De overschrijdskans van 625 is $P(S_X \leq 625) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 625,5, 700, \sqrt{3500}) \approx 0,104$.

$P(S_X \leq 625) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding te veronderstellen dat een van de chirurgen significant sneller opereert dan de ander.

- 53 $n = 43$ en $m = 46$, dus $n \geq 5$ en $m \geq 10$ en dus is de normale benadering toegestaan.

$$H_0: \mu_X = \mu_Y, H_1: \mu_X < \mu_Y \text{ en } \alpha = 0,10$$

$$E(S_X) = \frac{1}{2}n(n+m+1) = \frac{1}{2} \cdot 43 \cdot (43+46+1) = 1935 \text{ en}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot nm(n+m+1)} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot 43 \cdot 46 \cdot (43+46+1)} = \sqrt{14835}$$

De overschrijdingskans van 1650 is $P(S_X \leq 1650) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 1650.5, 1935, \sqrt{14835}) \approx 0,0098$.

$P(S_X \leq 1650) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Er is aanleiding te veronderstellen dat de tijdsduur van route I minder is dan die van route II.

Bladzijde 79

- 54 $n = 25$ en $m = 30$, dus $n \geq 5$ en $m \geq 10$ en dus is de normale benadering toegestaan.

$$H_0: \mu_X = \mu_Y, H_1: \mu_X > \mu_Y \text{ en } \alpha = 0,10$$

$$E(S_X) = \frac{1}{2}n(n+m+1) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (25+30+1) = 700 \text{ en}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot nm(n+m+1)} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot 25 \cdot 30 \cdot (25+30+1)} = \sqrt{3500}$$

De overschrijdingskans van 812 is $P(S_X \geq 812) = \text{normalcdf}(811.5, 10^{99}, 700, \sqrt{3500}) \approx 0,030$.

$P(S_X \geq 812) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Er is aanleiding te veronderstellen dat Anne meer klanten helpt dan Bo.

- 55 X = de BMI van een student uit Leiden.

Y = de BMI van een student uit Delft.

X gerangschikt van klein naar groot	rangnummer van X	Y gerangschikt van klein naar groot	rangnummer van Y
18,6	3	15,7	1
19,5	7	17,7	2
20,5	9	18,7	4
21,6	13	19,3	5
22,0	14	19,4	6
22,6	18	19,7	8
23,2	20	21,0	10
23,4	22	21,1	11
24,3	25	21,2	12
24,7	26	22,1	15
25,3	27	22,3	16
26,5	28	22,4	17
		22,7	19
		23,3	21
		24,0	23
		24,2	24

$$S_X = 3 + 7 + 9 + \dots + 27 + 28 = 212$$

$n = 12$ en $m = 16$, dus $n \geq 5$ en $m \geq 10$ en dus is de normale benadering toegestaan.

$$H_0: \mu_X = \mu_Y, H_1: \mu_X > \mu_Y \text{ en } \alpha = 0,05$$

$$E(S_X) = \frac{1}{2}n(n+m+1) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (12+16+1) = 174 \text{ en}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot nm(n+m+1)} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 16 \cdot (12+16+1)} = \sqrt{464}$$

De overschrijdingskans van 212 is $P(S_X \geq 212) = \text{normalcdf}(211.5, 10^{99}, 174, \sqrt{464}) \approx 0,041$.

$P(S_X \geq 212) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

De gegevens vormen reden te veronderstellen dat de studenten in Leiden een grotere BMI hebben dan die in Delft.

- 56 X = cijfer voor wiskunde D
 Y = cijfer voor wiskunde B

X gerangschikt van klein naar groot	rangnummer van X	Y gerangschikt van klein naar groot	rangnummer van Y
4.7	3	4.2	1
5.2	5,5	4.5	2
5.3	7,5	5.1	4
5.3	7,5	5.2	5,5
5.4	10,5	5.4	10,5
5.4	10,5	5.4	10,5
5.9	13,5	5.9	13,5
6.3	17	6.0	15
6.4	19	6.2	16
6.4	19	6.4	19
6.7	24	6.5	21
6.8	26	6.6	22
7.0	27,5	6.7	24,
7.1	31	6.7	24
7.1	31	7.0	27,5
7.1	31	7.2	34
7.1	31	7.3	35
7.1	31	7.8	37
7.6	36	7.9	38
8.2	40	8.1	39
8.3	41	8.5	43,5
8.6	46,5	8.5	43,5
9.0	48	8.5	43,5
9.7	50	8.5	43,5
		8.6	46,5
		9.3	49

$$S_X = 3 + 5,5 + 7,5 + \dots + 48 + 50 = 607$$

$n = 24$ en $m = 26$, dus $n \geq 5$ en $m \geq 10$ en dus is de normale benadering toegestaan.

$$H_0: \mu_X = \mu_Y, H_1: \mu_X \neq \mu_Y \text{ en } \alpha = 0,10$$

$$E(S_X) = \frac{1}{2}n(n+m+1) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (24+26+1) = 612 \text{ en}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot nm(n+m+1)} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot 24 \cdot 26 \cdot (24+26+1)} = \sqrt{2652}$$

De overschrijdskans van 607 is $P(S_X \leq 607) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 607,5, 612, \sqrt{2652}) \approx 0,465$.

$P(S_X \leq 607) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding te veronderstellen dat de cijfers bij wiskunde D anders zijn dan die bij wiskunde B.

Bladzijde 82**57** X = cijfer Thomas voor wiskunde B. Y = cijfer Thomas voor natuurkunde. $H_0: E(S_X) = E(S_Y), H_1: E(S_X) > E(S_Y)$ en $\alpha = 0,05$

X	rangnummer X	Y	rangnummer Y
4	2	3	1
6	6,5	5	3,5
6	6,5	5	3,5
7	10	6	6,5
8	12	6	6,5
9	13	7	10
		7	10

$$S_X = 2 + 6,5 + 6,5 + 10 + 12 + 13 = 50$$

In de tabel is bij $n = 6$, $m = 7$ en $\alpha = 0,05$ af te lezen dat $g_r = 55$. $S_X < g_r$, dus verwerp H_0 niet.

De cijfers voor wiskunde B zijn niet significant hoger dan de cijfers voor natuurkunde.

58 X = het aantal toetsaanslagen per minuut van Myrthe 's morgens. Y = het aantal toetsaanslagen per minuut van Myrthe 's middags. $H_0: E(S_X) = E(S_Y), H_1: E(S_X) \neq E(S_Y)$ en $\alpha = 0,05$

X	rangnummer X	Y	rangnummer Y
158	2	155	1
161	3	164	4
168	7	166	5
194	12	167	6
211	13	172	8
		172	9
		173	10
		191	11

$$S_X = 2 + 3 + 7 + 12 + 13 = 37$$

In de tabel is bij $n = 5$, $m = 8$ en $\alpha = 0,025$ af te lezen dat $g_1 = 21$ en $g_r = 49$. $g_1 < S_X < g_r$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen significant verschil tussen 's morgens en 's middags.

- 59 $H_0: E(S_X) = E(S_Y)$, $H_1: E(S_X) > E(S_Y)$ en $\alpha = 0,05$

X	rangnummer X	Y	rangnummer Y
0,42	2	0,35	1
0,45	4	0,45	4
0,47	6	0,45	4
0,50	9	0,49	7,5
0,52	10	0,49	7,5
0,53	11	0,54	12
0,62	14,5	0,55	13
0,68	16	0,62	14,5

$$S_X = 2 + 4 + 6 + 9 + 10 + 11 + 14,5 + 16 = 72,5$$

In de tabel is bij $n = 8$, $m = 8$ en $\alpha = 0,05$ af te lezen dat $g_r = 85$.

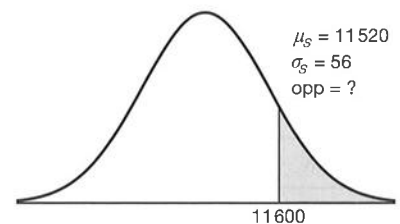
$S_X < g_r$, dus verwerp H_0 niet.

Het vermoeden dat de reactiesnelheid hoger is na het drinken van de energiedrank is niet gerechtvaardigd.

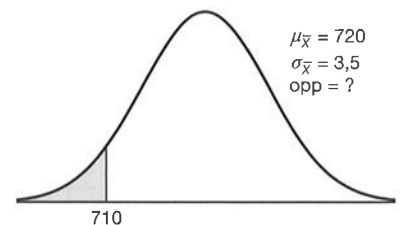
Diagnostische toets

Bladzijde 84

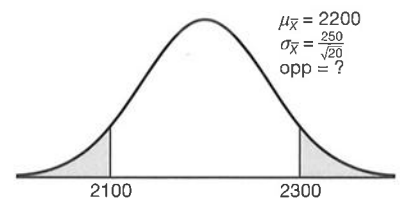
- 1 a S is normaal verdeeld met $\mu_S = 16 \cdot 720 = 11\,520$ gram en $\sigma_S = \sqrt{16 \cdot 14} = 4 \cdot 14 = 56$ gram.
 $P(S > 11\,600) = \text{normalcdf}(11\,600, 10^{99}, 11\,520, 56) \approx 0,077$



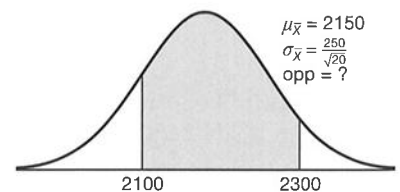
- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 720$ gram en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{14}{\sqrt{16}} = \frac{14}{4} = 3,5$ gram.
 $P(\bar{X} < 710) = \text{normalcdf}(-10^{99}, 710, 720, 3,5) \approx 0,002$
 Dus 0,2%.



- 2 a $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 2200$ kg en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{250}{\sqrt{20}}$ kg.
 $P(\text{ten onrechte het gemiddelde als afwijkend beschouwen}) =$
 $P(\bar{X} \leq 2100) + P(\bar{X} \geq 2300) = 2 \cdot P(\bar{X} \leq 2100) =$
 $2 \cdot \text{normalcdf}(-10^{99}, 2100, 2200, \frac{250}{\sqrt{20}}) \approx 0,074$



- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 2150$ kg en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{250}{\sqrt{20}}$ kg.
 $P(\text{conclusie gemiddelde is niet afwijkend}) = P(2100 < \bar{X} < 2300) =$
 $\text{normalcdf}(2100, 2300, 2150, \frac{250}{\sqrt{20}}) \approx 0,811$



- 3 a $H_0: \mu_O = 100, H_1: \mu_O \neq 100$ en $\alpha = 0,05$

$\bar{O}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{O}} = 100 \text{ dm}^2$ en $\sigma_{\bar{O}} = \frac{2,5}{\sqrt{10}} \text{ dm}^2$.

Het beslissingsvoorschrift heeft de vorm 'verwerp H_0 als $\bar{O} \leq g_l$ of als $\bar{O} \geq g_r$ '.

opp links = opp rechts = $\frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$

$$P(\bar{O} \leq g_l) = 0,025, \text{ dus } g_l = \text{invNorm}\left(0,025, 100, \frac{2,5}{\sqrt{10}}\right) = 98,450... \approx 98,45.$$

$$P(\bar{O} \leq g_r) = 1 - 0,025 = 0,975, \text{ dus } g_r = \text{invNorm}\left(0,975, 100, \frac{2,5}{\sqrt{10}}\right) = 101,549... \approx 101,55.$$

Het beslissingsvoorschrift is 'verwerp H_0 als $\bar{O} \leq 98,45$ of als $\bar{O} \geq 101,55$ '.

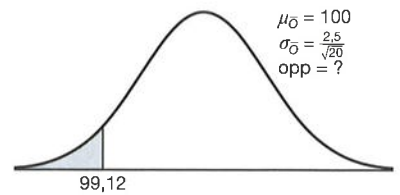
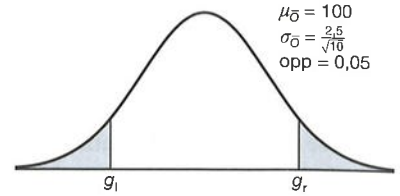
- b $H_0: \mu_O = 100, H_1: \mu_O < 100$ en $\alpha = 0,10$

$\bar{O}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{O}} = 100 \text{ dm}^2$ en $\sigma_{\bar{O}} = \frac{2,5}{\sqrt{20}} \text{ dm}^2$.

$$P(\bar{O} \leq 99,12) = \text{normalcdf}\left(-10^{99}, 99,12, 100, \frac{2,5}{\sqrt{20}}\right) \approx 0,058$$

$P(\bar{O} \leq 99,12) \leq \alpha$, dus verwerp H_0 .

Het tuincentrum trekt de conclusie dat de gemiddelde oppervlakte minder is dan 1 m^2 .



- 4 a $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 1600$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{75}{\sqrt{15}}$.

$$P(\bar{X} \leq g) = 1 - 0,05 = 0,95, \text{ dus } g = \text{invNorm}\left(0,95, 1600, \frac{75}{\sqrt{15}}\right) \approx 1631,8.$$

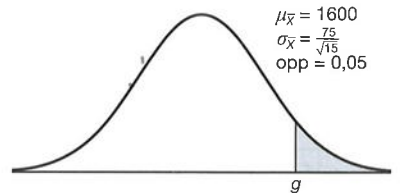
H_0 wordt verworpen bij steekproefresultaten van 1632 en meer.

- b $\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\bar{X}} = 1600$ en $\sigma_{\bar{X}} = \frac{75}{\sqrt{40}}$.

De overschrijdingskans van 1625 is

$$P(\bar{X} \geq 1625) = \text{normalcdf}\left(1625, 10^{99}, 1600, \frac{75}{\sqrt{40}}\right) \approx 0,018.$$

$P(\bar{X} \geq 1625) \leq \alpha$, dus er is aanleiding om H_0 te verwerpen.



Bladzijde 85

- 5 a X = het aantal keer dat een van de getallen 6 tot en met 11 wordt aangewezen.

X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,3$.

$H_0: p = 0,3, H_1: p \neq 0,3$ en $\alpha = 0,05$

Verwerp H_0 als $X \leq g_l$ of als $X \geq g_r$.

Zoek het grootste gehele getal g_l zo, dat $P(X \leq g_l) \leq \frac{1}{2}\alpha = 0,025$ ofwel $\text{binomcdf}(100, 0,3, g_l) \leq 0,025$.

En zoek het kleinste gehele getal g_r zo, dat $P(X \geq g_r) \leq 0,025$ ofwel $1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,025$

ofwel $1 - \text{binomcdf}(100, 0,3, g_r - 1) \leq 0,025$.

Voer in $y_1 = \text{binomcdf}(100, 0,3, x)$ (TI) of $y_1 = \text{BinomialCD}(x, 100, 0,3)$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 20$ geeft $y_1 \approx 0,0165$

$x = 21$ geeft $y_1 \approx 0,0288$.

Verwerp H_0 als $X \leq 20$.

Voer in $y_1 = 1 - \text{binomcdf}(100, 0,3, x - 1)$ (TI) of $y_1 = 1 - \text{BinomialCD}(x - 1, 100, 0,3)$ (Casio).

Uit de tabel volgt

$x = 39$ geeft $y_1 \approx 0,0340$

$x = 40$ geeft $y_1 \approx 0,0210$.

Verwerp H_0 als $X \geq 40$.

Dus bij de aantallen 21 tot en met 39 zal de zuiverheid van het rad niet in twijfel worden getrokken.

- b $H_0: p = 0,3, H_1: p \neq 0,3$ en $\alpha = 0,01$

De overschrijdingskans van 70 is $P(X \geq 70) = 1 - P(X \leq 69) = 1 - \text{binomcdf}(200, 0,3, 69) \approx 0,073$.

$P(X \geq 70) > \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding te vermoeden dat het rad niet zuiver is.

- 6 a $P(\text{een pak koffie weegt minder dan 1000 gram}) = \text{normalcdf}(-10^9, 1000, 1006, 5) = 0,1150... \approx 0,115$.
 b $X = \text{het aantal pakken dat minder dan 1000 gram weegt}$.
 X is binomiaal verdeeld met $n = 250$ en $p = 0,1150...$
 $H_0: p \approx 0,115$, $H_1: p < 0,115$ en $\alpha = 0,01$
 De overschrijdingskans van 18 is $P(X \leq 18) = \text{binomcdf}(250, 0,1150..., 18) \approx 0,017$.
 $P(X \leq 18) > \alpha$, dus verwerp H_0 niet.
 Er is niet aangetoond dat het gemiddelde is toegenomen.

- 7 $n = 50$ en $m = 60$, dus $n \geq 5$ en $m \geq 10$ en dus is de normale benadering toegestaan.

$$H_0: \mu_X = \mu_Y, H_1: \mu_X \neq \mu_Y \text{ en } \alpha = 0,05$$

$$E(S_X) = \frac{1}{2}n(n+m+1) = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (50+60+1) = 2775 \text{ en}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot nm(n+m+1)} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 60 \cdot (50+60+1)} = \sqrt{27750}.$$

De overschrijdingskans van 2380 is $P(S_X \leq 2380) = \text{normalcdf}(-10^9, 2380,5, 2775, \sqrt{27750}) \approx 0,009$.

$P(S_X \leq 2380) \leq \frac{1}{2}\alpha$, dus verwerp H_0 .

Er is aanleiding te veronderstellen dat een van de twee groepen de test beter heeft gemaakt dan de andere groep.

- 8 $X = \text{het aantal dagen waarna een meisje voor het eerst los liep}$.
 $Y = \text{het aantal dagen waarna een jongen voor het eerst los liep}$.
 $H_0: E(S_X) = E(S_Y)$, $H_1: E(S_X) \neq E(S_Y)$ en $\alpha = 0,05$

X	rangnummer X	Y	rangnummer Y
350	1	360	2
390	4	388	3
435	8	400	5
440	9	410	6
448	11	430	7
455	13	442	10
		450	12
		462	14

$$S_X = 1 + 4 + 8 + 9 + 11 + 13 = 46$$

In de tabel is bij $n = 6$, $m = 8$ en $\alpha = 0,025$ af te lezen $g_l = 29$ en $g_r = 61$.

$g_l < S_X < g_r$, dus verwerp H_0 niet.

Er is geen aanleiding te veronderstellen dat bij het leren lopen van kleine kinderen meisjes eerder los lopen dan jongens of jongens eerder los lopen dan meisjes.