

9 Afgeleide en tweede afgeleide

Voorkennis Gebroken vormen

Bladzijde 8

1 a noemer = 0 geeft $2x + 1 = 0$
 $2x = -1$
 $x = -0,5$

De verticale asymptoot is de lijn $x = -0,5$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{5x}{2x} = 2,5$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 2,5$.

b noemer = 0 geeft $4 - 2x = 0$
 $2x = 4$
 $x = 2$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 2$.

Voor grote x is $g(x) \approx \frac{x}{-2x} = -0,5$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -0,5$.

c noemer = 0 geeft $6 - x = 0$
 $x = 6$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 6$.

Voor grote x is $h(x) \approx \frac{-3x}{-x} = 3$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

2 a noemer = 0 geeft $x^2 + 1 = 0$
 $x^2 = -1$
geen oplossingen

Dus de grafiek van f heeft geen verticale asymptoot.

b Voor grote x is $f(x) \approx \frac{4x}{x^2} = \frac{4}{x} = 0$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

Dus de x -as is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

Bladzijde 9

3 noemer = 0 geeft $x^2 - 4 = 0$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

Voor grote x is $g(x) \approx \frac{x^2}{x^2} = 1$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

4 a $\frac{x^2 + 4x - 5}{(x + 1)^2} = 0$ geeft $x^2 + 4x - 5 = 0$
 $(x - 1)(x + 5) = 0$
 $x = 1 \vee x = -5$
vold. vold.

b $\frac{x^2 + 4x - 5}{(x + 1)^2} = \frac{4}{9}$ ofwel $\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x + 1} = \frac{4}{9}$
 $9(x^2 + 4x - 5) = 4(x^2 + 2x + 1)$
 $9x^2 + 36x - 45 = 4x^2 + 8x + 4$
 $5x^2 + 28x - 49 = 0$
 $D = 28^2 - 4 \cdot 5 \cdot -49 = 1764$
 $x = \frac{-28 - 42}{10} = -7 \vee x = \frac{-28 + 42}{10} = 1\frac{2}{5}$
vold. vold.

c $\frac{2x^2 + 7x - 4}{(x + 1)^2} = 0$ geeft $2x^2 + 7x - 4 = 0$
 $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot -4 = 81$
 $x = \frac{-7 - 9}{4} = -4 \vee x = \frac{-7 + 9}{4} = \frac{1}{2}$
vold. vold.

$$\begin{aligned} \text{d } \frac{2x^2 + 7x - 4}{(x+1)^2} &= -4 \text{ ofwel } \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x + 1} = -4 \\ -4(x^2 + 2x + 1) &= 2x^2 + 7x - 4 \\ -4x^2 - 8x - 4 &= 2x^2 + 7x - 4 \\ -6x^2 - 15x &= 0 \\ -3x(2x + 5) &= 0 \\ -3x = 0 \vee 2x &= -5 \\ x = 0 \vee x &= -2\frac{1}{2} \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} \end{aligned}$$

9.1 De productregel en de quotiëntregel

Bladzijde 10

- 1 a $p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (3x - 7) = 3x^3 - 7x^2$ geeft $p'(x) = 9x^2 - 14x$
 b $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$ en $g(x) = 3x - 7$ geeft $g'(x) = 3$, dus $f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3 = 6x$.
 Dus $p'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$.
 c $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot (3x - 7) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 - 14x + 3x^2 = 9x^2 - 14x$
 Dus $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- 2 a $f(x) = x^2(2x - 1)$ geeft
 $f'(x) = [x^2]' \cdot (2x - 1) + x^2 \cdot [2x - 1]' = 2x(2x - 1) + x^2 \cdot 2 = 2x(2x - 1) + 2x^2$
 b $g(x) = 2x^3(x^2 - 3)$ geeft
 $g'(x) = [2x^3]' \cdot (x^2 - 3) + 2x^3 \cdot [x^2 - 3]' = 6x^2(x^2 - 3) + 2x^3 \cdot 2x = 6x^2(x^2 - 3) + 4x^4$
 c $h(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$ geeft
 $h'(x) = [x^2 - 1]' \cdot (x^2 + 3) + (x^2 - 1) \cdot [x^2 + 3]' = 2x(x^2 + 3) + (x^2 - 1) \cdot 2x = 2x(x^2 + 3 + x^2 - 1) = 2x(2x^2 + 2)$
 d $j(x) = (2x^3 + 3)(3x^2 - 1)$ geeft
 $j'(x) = [2x^3 + 3]' \cdot (3x^2 - 1) + (2x^3 + 3) \cdot [3x^2 - 1]' = 6x^2(3x^2 - 1) + (2x^3 + 3) \cdot 6x = 6x^2(3x^2 - 1) + 6x(2x^3 + 3)$
- 3 a $f(x) = (2 - 3x^2)(2 + 7x)$ geeft
 $f'(x) = [2 - 3x^2]' \cdot (2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot [2 + 7x]' = -6x(2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot 7 = -6x(2 + 7x) + 7(2 - 3x^2)$
 b $g(x) = (2x - 5)^2 = (2x - 5)(2x - 5)$ geeft
 $g'(x) = [2x - 5]' \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot [2x - 5]' = 2(2x - 5) + (2x - 5) \cdot 2 = 4(2x - 5)$
 c $h(x) = (x^2 - 3x)(x^3 + x^2 + x)$ geeft
 $h'(x) = [x^2 - 3x]' \cdot (x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x) \cdot [x^3 + x^2 + x]' = (2x - 3)(x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x)(3x^2 + 2x + 1)$
 d $j(x) = (3x^2 - 4)^2 = (3x^2 - 4)(3x^2 - 4)$ geeft
 $j'(x) = [3x^2 - 4]' \cdot (3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot [3x^2 - 4]' = 6x(3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot 6x = 12x(3x^2 - 4)$

Bladzijde 11

- 4 $g(x) = c \cdot f(x)$ geeft $g'(x) = [c]' \cdot f(x) + c \cdot [f(x)]' = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$
- 5 Wat Judith doet is correct, want dit volgt uit de differentieerregel $[ax^n]' = nax^{n-1}$.
 $2x \neq 1 - \frac{2}{x^2}$, dus Rob heeft ongelijk.

Bladzijde 12

- 6 a Het linkerlid differentiëren geeft $[q(x) \cdot n(x)]' = [q(x)]' \cdot n(x) + q(x) \cdot [n(x)]' = q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x)$.
 Het rechterlid differentiëren geeft $[t(x)]' = t'(x)$.
 b Uit a volgt $q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$
 $q'(x) \cdot n(x) = t'(x) - q(x) \cdot n'(x)$
 $q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$
 c Substitutie van $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ in $q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \frac{t'(x) - \frac{t(x)}{n(x)} \cdot n'(x)}{n(x)} = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

$$q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

- 7 a $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$ geeft $f'(x) = \frac{(x+5) \cdot 1 - (x-2) \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x+2}{(x+5)^2} = \frac{7}{(x+5)^2}$
- b $g(x) = \frac{3x+2}{-x+6}$ geeft $g'(x) = \frac{(-x+6) \cdot 3 - (3x+2) \cdot (-1)}{(-x+6)^2} = \frac{-3x+18+3x+2}{(x-6)^2} = \frac{20}{(x-6)^2}$
- c $h(x) = \frac{2}{2x-1}$ geeft $h'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 0 - 2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$
- d $j(x) = \frac{6x-9}{3} = 2x-3$ geeft $j'(x) = 2$

Bladzijde 13

- 8 a $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x^2+1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{6x^4+3x^2-4x^4}{(2x^2+1)^2} = \frac{2x^4+3x^2}{(2x^2+1)^2}$
- b $g(x) = \frac{x-2}{3-x^2}$ geeft $g'(x) = \frac{(3-x^2) \cdot 1 - (x-2) \cdot (-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{3-x^2+2x^2-4x}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(3-x^2)^2}$
- c $h(x) = \frac{3-x^2}{x-2} + x^3$ geeft
 $h'(x) = \frac{(x-2) \cdot (-2x) - (3-x^2) \cdot 1}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-2x^2+4x-3+x^2}{(x-2)^2} + 3x^2 = \frac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2} + 3x^2$
- d $j(x) = x - \frac{2}{x+4}$ geeft $j'(x) = 1 - \frac{(x+4) \cdot 0 - 2 \cdot 1}{(x+4)^2} = 1 - \frac{-2}{(x+4)^2} = 1 + \frac{2}{(x+4)^2}$

- 9 a noemer = 0 geeft $x-1=0$
 $x=1$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x=1$.

b Nee.

c Voer in $y_1 = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$.

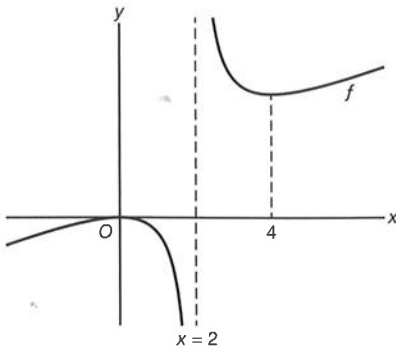
De optie minimum geeft $x=3$ en $y = \frac{1}{4}$.

De optie maximum geeft $x=-1$ en $y=-4$.

Dus de toppen van de grafiek zijn $(-1, -4)$ en $(3, 4)$.

Bladzijde 14

- 10 a Stel $y = ax + b$.
 $a = f'(0) = \frac{0-0-3}{(0-1)^2} = -3$
 $f(0) = \frac{5}{-1} = -5$, dus $b = -5$.
Dus $y = -3x - 5$.
- b $f'(x) = \frac{3}{4}$ geeft $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{3}{4}$
 $\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x+1} = \frac{3}{4}$
 $4(x^2-2x-3) = 3(x^2-2x+1)$
 $4x^2-8x-12 = 3x^2-6x+3$
 $x^2-2x-15 = 0$
 $(x+3)(x-5) = 0$
 $x = -3 \vee x = 5$
vold. vold.
 $f(-3) = -5$ en $f(5) = 5$, dus de punten zijn $(-3, -5)$ en $(5, 5)$.
- 11 a $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ geeft $f'(x) = \frac{(x-2) \cdot 2x - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2-4x = 0$
 $x(x-4) = 0$
 $x = 0 \vee x = 4$
vold. vold.



max. is $f(0) = 0$ en min. is $f(4) = 8$
 Dus $B_f = \mathbb{R}$ behalve $\langle 0, 8 \rangle$.

b De vergelijking $\frac{x^2}{x-2} = p$ heeft geen oplossingen voor $0 < p < 8$.

c Stel $k: y = ax + b$.

$$a = f'(6) = \frac{36 - 24}{(6 - 2)^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ f(6) = 9, \text{ dus } A(6, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 6 + b = 9 \\ 4\frac{1}{2} + b = 9 \\ b = 4\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}.$$

d $f'(x) = -3$ geeft $\frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = -3$

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4} = -3$$

$$x^2 - 4x = -3(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 4x = -3x^2 + 12x - 12$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 3$$

$$f(1) = -1 \text{ en } f(3) = 9$$

Dus de punten zijn $(1, -1)$ en $(3, 9)$.

12 a $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

vold. vold.

Dus $x_A = -2$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 5} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2x + 5) \cdot 2x - (x^2 - 4) \cdot 2}{(2x + 5)^2} = \frac{4x^2 + 10x - 2x^2 + 8}{(2x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 8}{(2x + 5)^2}$$

Stel $k: y = ax + b$.

$$a = f'(-2) = \frac{8 - 20 + 8}{(-1)^2} = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ A(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot -2 + b = 0 \\ 8 + b = 0 \\ b = -8 \end{array}$$

Dus $k: y = -4x - 8$.

b Stel $l: y = ax + b$.

$$a = f'(0) = \frac{0 + 0 + 8}{5^2} = \frac{8}{25}$$

$$f(0) = -\frac{4}{5}, \text{ dus } B(0, -\frac{4}{5}).$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{8}{25}x - \frac{4}{5}.$$

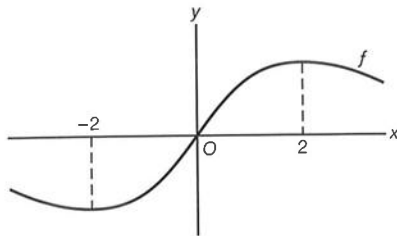
$$\begin{aligned} \text{c } f'(x) = 0 \text{ geeft } 2x^2 + 10x + 8 &= 0 \\ x^2 + 5x + 4 &= 0 \\ (x+1)(x+4) &= 0 \\ x = -1 \vee x = -4 & \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} & \end{aligned}$$

$$f(-1) = -1 \text{ en } f(-4) = -4$$

Dus de punten op de grafiek van f met een horizontale raaklijn zijn $(-1, -1)$ en $(-4, -4)$.

$$13 \text{ a } f(x) = \frac{5x}{x^2+4} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot 5 - 5x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{5x^2+20-10x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \text{ geeft } -5x^2 + 20 &= 0 \\ -5x^2 &= -20 \\ x^2 &= 4 \\ x = 2 \vee x = -2 & \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} & \end{aligned}$$



$$\text{min. is } f(-2) = -1\frac{1}{4} \text{ en max. is } f(2) = 1\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } B_f = [-1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}].$$

$$\begin{aligned} \text{b } f'(x) = \frac{3}{5} \text{ geeft } \frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2} &= \frac{3}{5} \\ \frac{-5x^2+20}{x^4+8x^2+16} &= \frac{3}{5} \\ 3(x^4+8x^2+16) &= 5(-5x^2+20) \\ 3x^4+24x^2+48 &= -25x^2+100 \\ 3x^4+49x^2-52 &= 0 \\ \text{Stel } x^2 &= u. \\ 3u^2+49u-52 &= 0 \\ D &= 49^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-52) = 3025 \\ u &= \frac{-49-55}{6} = -17\frac{1}{3} \vee u = \frac{-49+55}{6} = 1 \\ x^2 &= -17\frac{1}{3} \vee x^2 = 1 \\ \text{geen opl.} \quad x = 1 \vee x = -1 & \\ \text{vold.} \quad \text{vold.} & \end{aligned}$$

De x -coördinaten zijn 1 en -1.

$$\begin{aligned} 14 \text{ } f(x) &= \frac{x^2+px+2}{x+2} \text{ geeft} \\ f'(x) &= \frac{(x+2) \cdot (2x+p) - (x^2+px+2) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+px+4x+2p-x^2-px-2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+2p-2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Een top voor $x = 0$, dus $f'(0) = 0$

$$\frac{0+0+2p-2}{(0+2)^2} = 0$$

$$\frac{2p-2}{4} = 0$$

$$2p-2 = 0$$

$$2p = 2$$

$$p = 1$$

$$p = 1 \text{ geeft } f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+2} \text{ en } f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } x^2+4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -4$$

vold. vold.

$$f(-4) = \frac{16 - 4 + 2}{-4 + 2} = \frac{14}{-2} = -7$$

Dus de andere top is het punt $(-4, -7)$.

9.2 De kettingregel

Bladzijde 16

15 a $v(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 = 9 - 15 = -6$

$$u(v(3)) = (-6)^4 = 1296$$

b $v(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4$

$$u(v(4)) = (-4)^4 = 256$$

16 a $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = v^6$ en $v(x) = 3 - x^5$

b $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \sqrt{v}$ en $v(x) = x^2 + 1$

c $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \frac{2}{v^3}$ en $v(x) = x + 8$

Bladzijde 17

17 a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} = (4x-1)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = -\frac{2}{(4x-1)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$

b $g(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$ geeft $g'(x) = 6x - 3(\frac{1}{4}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{4} = 6x - \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 2)^2$

c $h(x) = (4x^2 - 3)^4$ geeft $h'(x) = 4(4x^2 - 3)^3 \cdot 8x = 32x(4x^2 - 3)^3$

d $j(x) = \sqrt{2x^2 + 4x}$ geeft $j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 4x}} \cdot (4x + 4) = \frac{2x + 2}{\sqrt{2x^2 + 4x}}$

e $k(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3} = (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}$ geeft $k'(x) = \frac{3}{2}(x^2 + 3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 + 3}$

f $l(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2 + 3}} = (x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$l'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2) = \frac{-(2x + 2)}{2(x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-x - 1}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

Bladzijde 18

18 a $f(x) = 4(x^3 + 7x - 2)^2$ geeft $f'(x) = 2 \cdot 4(x^3 + 7x - 2) \cdot (3x^2 + 7) = 8(3x^2 + 7)(x^3 + 7x - 2)$

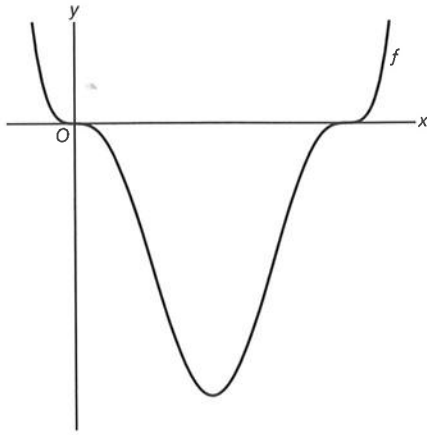
b $g(x) = -\frac{6}{(x^2 + 3x)^3} = -6(x^2 + 3x)^{-3}$ geeft $g'(x) = -3 \cdot -6(x^2 + 3x)^{-4} \cdot (2x + 3) = \frac{18(2x + 3)}{(x^2 + 3x)^4}$

c $h(x) = (x^3 + 3x)^{\frac{1}{3}}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 3x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 + 3) = \frac{3x^2 + 3}{3(x^3 + 3x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x)^2}}$

d $j(x) = \frac{1}{(4-x)\sqrt{4-x}} = \frac{1}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}$ geeft $j'(x) = -\frac{3}{2}(4-x)^{-\frac{5}{2}} \cdot -1 = \frac{3}{2(4-x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2(4-x)^2\sqrt{4-x}}$

e $k(x) = 5\sqrt{2x^4 + x^2} + 4x^2$ geeft $k'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^4 + x^2}} \cdot (8x^3 + 2x) + 8x = \frac{5(4x^3 + x)}{\sqrt{2x^4 + x^2}} + 8x$

f $l(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{x^2 + 4}$ geeft $l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

19 a

- b** $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 2x)^3$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x - 2) = 3(x - 2)(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2$
 Horizontale raaklijn, dus los op $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3(x - 2)(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 &= 0 \\ x - 2 &= 0 \vee \frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \\ x &= 2 \vee \frac{1}{2}x(x - 4) = 0 \\ x &= 2 \vee x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

$$f(0) = (0 - 0)^3 = 0, f(2) = (2 - 4)^3 = -8 \text{ en } f(4) = (8 - 8)^3 = 0$$

Dus in de punten (0, 0), (2, -8) en (4, 0) is de raaklijn horizontaal.

- c** Stel $l: y = ax + b$.

$$a = f'(6) = 3(6 - 2)(18 - 12)^2 = 3 \cdot 4 \cdot 36 = 432$$

$$y = 432x + b$$

$$f(6) = 216, \text{ dus } A(6, 216) \left\{ \begin{array}{l} 432 \cdot 6 + b = 216 \\ 2592 + b = 216 \end{array} \right.$$

$$b = -2376$$

$$\text{Dus } l: y = 432x - 2376.$$

- 20 a** $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ geeft $f'(x) = 4(\frac{1}{4}x - 1)^3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = 0$$

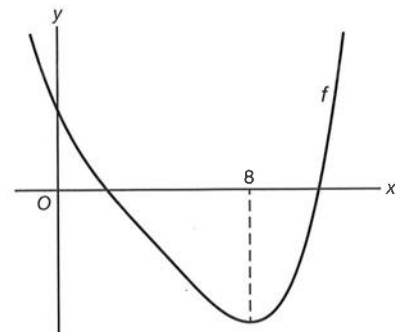
$$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 1$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = 1$$

$$\frac{1}{4}x = 2$$

$$x = 8$$

$$f(8) = (2 - 1)^4 - 8 + 2 = -5$$



$$\text{Dus } B_f = [-5, \rightarrow).$$

- b** Stel $k: y = ax + b$.

$$k \parallel l, \text{ dus } a = rc_k = rc_l = -2$$

$$\text{Dit geeft } k: y = -2x + b.$$

$$f'(x) = -2 \text{ geeft } (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = -2$$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = -1$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = -1$$

$$\frac{1}{4}x = 0$$

$$x = 0$$

$$f(0) = (0 - 1)^4 - 0 + 2 = 3, \text{ dus } b = 3.$$

$$\text{Dus } k: y = -2x + 3.$$

- c $f(4) = (1 - 1)^4 - 4 + 2 = -2$
 Los op $f(x) = -2$.
 Voer in $y_1 = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ en $y_2 = -2$.
 Intersect geeft $x \approx 10,35$.
 Dus $AB \approx 10,35 - 4 = 6,35$.

21 a $f(3) = \frac{1}{4}(6 - 5)^3 + 2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + 2 = 2\frac{1}{4}$, dus $A(3, 2\frac{1}{4})$ ligt op de grafiek van f .

$g(3) = -\frac{1}{4}(9 - 10)^4 + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 1 + 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$, dus $A(3, 2\frac{1}{4})$ ligt op de grafiek van g .

- b $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 5)^3 + 2$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{4}(2x - 5)^2 \cdot 2 = 1\frac{1}{2}(2x - 5)^2$
 $f'(3) = 1\frac{1}{2}(6 - 5)^2 = 1\frac{1}{2}$
 $g(x) = -\frac{1}{4}(3x - 10)^4 + 2\frac{1}{2}$ geeft $g'(x) = 4 \cdot -\frac{1}{4}(3x - 10)^3 \cdot 3 = -3(3x - 10)^3$
 $g'(3) = -3(9 - 10)^3 = 3$
 $f'(3) \neq g'(3)$, dus de grafieken van f en g hebben in het punt A geen gemeenschappelijke raaklijn.
 Dus Emma heeft niet gelijk.

- c $f'(x) = 13\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2}(2x - 5)^2 = 13\frac{1}{2}$
 $(2x - 5)^2 = 9$
 $2x - 5 = 3 \vee 2x - 5 = -3$
 $2x = 8 \vee 2x = 2$
 $x = 4 \vee x = 1$
 $f(4) = \frac{1}{4}(8 - 5)^3 + 2 = \frac{1}{4} \cdot 27 + 2 = 6\frac{3}{4} + 2 = 8\frac{3}{4}$
 $f(1) = \frac{1}{4}(2 - 5)^3 + 2 = \frac{1}{4} \cdot -27 + 2 = -6\frac{3}{4} + 2 = -4\frac{3}{4}$
 Dus de punten zijn $(1, -4\frac{3}{4})$ en $(4, 8\frac{3}{4})$.

22 a Stel $k: y = ax + b$.
 $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - x^2 + 5x$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x - 2x + 5 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 2x + 5$

$a = f'(4) = \frac{4}{\sqrt{16 + 9}} - 8 + 5 = \frac{4}{5} - 8 + 5 = -2\frac{1}{5}$

$y = -2\frac{1}{5}x + b$
 $f(4) = 9$, dus $A(4, 9)$ } $-2\frac{1}{5} \cdot 4 + b = 9$
 $-8\frac{4}{5} + b = 9$
 $b = 17\frac{4}{5}$

Dus $k: y = -2\frac{1}{5}x + 17\frac{4}{5}$.

b $f'(3) = \frac{3}{\sqrt{9 + 9}} - 6 + 5 \approx -0,29 \neq 0$, dus de grafiek heeft geen horizontale raaklijn voor $x = 3$.

- c Stel $l: y = ax + b$.
 $l \parallel m$, dus $a = rc_l = rc_m = 5$.

$f'(x) = 5$ geeft $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 2x + 5 = 5$

$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 2x = 0$

$\frac{x - 2x\sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} = 0$

$x - 2x\sqrt{x^2 + 9} = 0$

$x(1 - 2\sqrt{x^2 + 9}) = 0$

$x = 0 \vee 2\sqrt{x^2 + 9} = 1$

$x = 0 \vee \sqrt{x^2 + 9} = \frac{1}{2}$

$x = 0 \vee x^2 + 9 = \frac{1}{4}$

$x = 0 \vee x^2 = -8\frac{3}{4}$

geen opl.

$f(0) = \sqrt{9} - 0 + 0 = 3$, dus $b = 3$.

Dus $l: y = 5x + 3$.

Bladzijde 19**23 a** Rechtstreeks

$$AB = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104}$$

$\sqrt{104}$ km met een gemiddelde snelheid van 80 km/uur geeft tijd = $\frac{\sqrt{104}}{80} \cdot 3600 \approx 459$ seconden.

Via C

2 km met een gemiddelde snelheid van 80 km/uur geeft tijd = $\frac{2}{80} \cdot 3600 = 90$ seconden.

10 km met een gemiddelde snelheid van 100 km/uur geeft tijd = $\frac{10}{100} \cdot 3600 = 360$ seconden.

Dus van A naar B via C duurt in totaal $90 + 360 = 450$ seconden.

Dus gaat een deelnemer van A naar B via C, dan is hij ongeveer $459 - 450 = 9$ seconden eerder in B dan wanneer hij rechtstreeks van A naar B rijdt.

b $AD = \sqrt{2^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 4}$

$\sqrt{x^2 + 4}$ km met een gemiddelde snelheid van 80 km/uur geeft tijd = $\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{80} = \frac{1}{80} \sqrt{x^2 + 4}$ uur.

$10 - x$ km met een gemiddelde snelheid van 100 km/uur geeft

$$\text{tijd} = \frac{10 - x}{100} = \frac{10}{100} - \frac{x}{100} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100}x = 0,1 - 0,01x \text{ uur.}$$

Dus de tijd t in uren die de deelnemer over de afstand doet als hij van A naar B via D gaat is gegeven door de formule $t = \frac{1}{80} \sqrt{x^2 + 4} + 0,1 - 0,01x$. Hierin is x in km.

$$\text{c } t = \frac{1}{80} \sqrt{x^2 + 4} + 0,1 - 0,01x \text{ geeft } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x - 0,01 = \frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} - 0,01$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \text{ geeft } \frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} - 0,01 = 0$$

$$\frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} = 0,01$$

$$x = 0,8\sqrt{x^2 + 4}$$

kwadrateren geeft

$$x^2 = 0,64(x^2 + 4)$$

$$x^2 = 0,64x^2 + 2,56$$

$$0,36x^2 = 2,56$$

$$x^2 = 7\frac{1}{9}$$

$$x = 2\frac{2}{3} \vee x = -2\frac{2}{3}$$

vold. vold. niet

$$x = 2\frac{2}{3} \text{ geeft } t = \frac{1}{80} \sqrt{\left(2\frac{2}{3}\right)^2 + 4} + 0,1 - 0,01 \cdot 2\frac{2}{3} = 0,115$$

0,115 uur is $0,115 \cdot 3600 = 414$ seconden.

Het scheelt $450 - 414 = 36$ seconden met de situatie waarin hij via C naar B gaat.

24 $f(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax$ geeft $f'(x) = 4(ax - 2)^3 \cdot a + \frac{1}{2}a = 4a(ax - 2)^3 + \frac{1}{2}a$

Een extreme waarde voor $x = 3$, dus los op

$$f'(3) = 0$$

$$4a(3a - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$$

$$a(4(3a - 2)^3 + \frac{1}{2}) = 0$$

$$a = 0 \vee 4(3a - 2)^3 = -\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee (3a - 2)^3 = -\frac{1}{8}$$

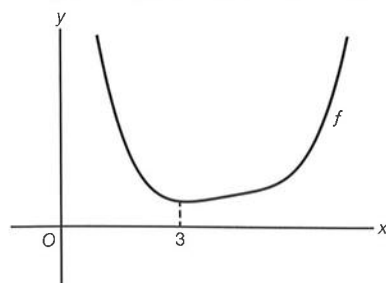
$$a = 0 \vee 3a - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee 3a = 1\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$$

$a = 0$ geeft $f(x) = (0 - 2)^4 + 0 = 16$ en deze functie heeft geen extreme waarde.

$$a = \frac{1}{2} \text{ geeft } f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^4 + \frac{1}{4}x$$



Dus f heeft een extreme waarde voor $a = \frac{1}{2}$.

- 25** De functie f is te schrijven als het product van de functies $g(x) = x^3$ en $h(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$.
 Dus voor het berekenen van de afgeleide van f heb je de productregel nodig.
 Voor het berekenen van de afgeleide van de functie $h(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ heb je de kettingregel nodig.
 Dus voor het berekenen van de afgeleide van de functie $f(x) = x^3\sqrt{2x^2 + 1}$ heb je de productregel én de kettingregel nodig.

Bladzijde 20

- 26** a $f(x) = x\sqrt{3x+1}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{3x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \sqrt{3x+1} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+1}}$
- b $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ geeft
- $$g'(x) = \frac{(2x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x - \sqrt{x^2+1} \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}} - 2\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(2x+1) - 2(x^2+1)}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$
- $$= \frac{2x^2 + x - 2x^2 - 2}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x-2}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$
- c $h(x) = x(3x+1)^3$ geeft $h'(x) = 1 \cdot (3x+1)^3 + x \cdot 3(3x+1)^2 \cdot 3 = (3x+1)^3 + 9x(3x+1)^2$
- d $k(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{4x+1}}$ geeft
- $$k'(x) = \frac{\sqrt{4x+1} \cdot 2x - (x^2-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4}{(\sqrt{4x+1})^2} = \frac{2x\sqrt{4x+1} - \frac{2(x^2-1)}{\sqrt{4x+1}}}{(\sqrt{4x+1})^2} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}} = \frac{2x(4x+1) - 2(x^2-1)}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}$$
- $$= \frac{8x^2 + 2x - 2x^2 + 2}{(4x+1)\sqrt{4x+1}} = \frac{6x^2 + 2x + 2}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}$$

- 27** Stel $k: y = ax + b$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{3x+1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3x+1} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \frac{1}{2}\sqrt{3x+1} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}}$$

$$a = f'(8) = \frac{1}{2}\sqrt{24+1} + \frac{24}{4\sqrt{24+1}} = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{24}{4 \cdot 5} = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5} = 3\frac{7}{10}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3\frac{7}{10}x + b \\ f(8) = 20, \text{ dus } A(8, 20) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\frac{7}{10} \cdot 8 + b = 20 \\ 29\frac{3}{5} + b = 20 \\ b = -9\frac{3}{5} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 3\frac{7}{10}x - 9\frac{3}{5}.$$

Bladzijde 21

- 28** a $8 - 2x \geq 0$
 $-2x \geq -8$
 $x \leq 4$
 Dus $D_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle$.
- b $f(x) = x\sqrt{8-2x}$ geeft
- $$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{8-2x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-2x}} \cdot (-2) = \sqrt{8-2x} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-2x}{\sqrt{8-2x}} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}$$
- c $f'(x) = 0$ geeft $8 - 3x = 0$
 $3x = 8$
 $x = 2\frac{2}{3}$ vold.
- $$f(2\frac{2}{3}) = 2\frac{2}{3}\sqrt{8-2 \cdot 2\frac{2}{3}} = 2\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{3}}$$
- Dus de top is het punt $(2\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{3}})$ en $B_f = \langle \leftarrow, 2\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{3}} \rangle$.

d $f'(x) = 1$ geeft $\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 1$
 $8-3x = \sqrt{8-2x}$
 kwadrateren geeft
 $(8-3x)^2 = 8-2x$
 $64-48x+9x^2 = 8-2x$
 $9x^2-46x+56 = 0$
 $D = (-46)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 56 = 100$
 $x = \frac{46-10}{18} = 2 \vee x = \frac{46+10}{18} = 3\frac{1}{9}$
 vold. vold. niet

$f(1) = \sqrt{6}$, dus $A(1, \sqrt{6})$.

29 a $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot 1 - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{\sqrt{x^2+4} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+4}}}{(\sqrt{x^2+4})^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4-x^2-x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{4-x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$f'(x) = 0$ geeft $4-x = 0$
 $x = 4$ vold.

$f(4) = \frac{4+1}{\sqrt{16+4}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

De top is het punt $(4, \frac{1}{2}\sqrt{5})$.

b Stel $k: y = ax + b$.

$a = f'(0) = \frac{4}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

$f(0) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, dus $A(0, \frac{1}{2})$.

Dit geeft $k: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

k snijden met de x -as geeft $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -1$$

Dus $B(-1, 0)$.

Dus $O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

30 a Stel $k: y = ax + b$.

$f(x) = 2x\sqrt{9-2x} - 3$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{9-2x} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-2x}} \cdot -2 = 2\sqrt{9-2x} - \frac{2x}{\sqrt{9-2x}}$

$a = f'(0) = 2\sqrt{9} - \frac{0}{\sqrt{9}} = 6$

$f(0) = 0 \cdot \sqrt{9} - 3 = -3$, dus $A(0, -3)$.

Dit geeft $k: y = 6x - 3$.

b $f'(x) = 0$ geeft $2\sqrt{9-2x} - \frac{2x}{\sqrt{9-2x}} = 0$

$$2\sqrt{9-2x} = \frac{2x}{\sqrt{9-2x}}$$

$$2(9-2x) = 2x$$

$$18-4x = 2x$$

$$6x = 18$$

$$x = 3 \text{ vold.}$$

Dus max. is $f(3) = 6 \cdot \sqrt{9-6} - 3 = 6\sqrt{3} - 3$.

c $9-2x \geq 0$

$$-2x \geq -9$$

$$x \leq 4\frac{1}{2}$$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 4\frac{1}{2} \rangle$.

$B_f = \langle \leftarrow, 6\sqrt{3} - 3 \rangle$

$$\begin{aligned}
 \text{d } f'(x) = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } 2\sqrt{9-2x} - \frac{2x}{\sqrt{9-2x}} &= 1\frac{1}{2} \\
 \frac{2(9-2x)}{\sqrt{9-2x}} - \frac{2x}{\sqrt{9-2x}} &= 1\frac{1}{2} \\
 \frac{18-4x-2x}{\sqrt{9-2x}} &= 1\frac{1}{2} \\
 \frac{18-6x}{\sqrt{9-2x}} &= \frac{3}{2} \\
 3\sqrt{9-2x} &= 2(18-6x) \\
 3\sqrt{9-2x} &= 36-12x \\
 \sqrt{9-2x} &= 12-4x \\
 \text{kwadrateren geeft} \\
 9-2x &= 144-96x+16x^2 \\
 16x^2-94x+135 &= 0 \\
 D &= (-94)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 135 = 196 \\
 x &= \frac{94-14}{32} = 2\frac{1}{2} \vee x = \frac{94+14}{32} = 3\frac{3}{8} \\
 \text{vold.} & \qquad \qquad \text{vold. niet} \\
 f(2\frac{1}{2}) &= 5 \cdot \sqrt{9-5} - 3 = 5 \cdot 2 - 3 = 7 \\
 \text{Dus } B(2\frac{1}{2}, 7).
 \end{aligned}$$

$$\text{31 } f(x) = \frac{x^3+2}{\sqrt{x}} \text{ geeft } f'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot 3x^2 - (x^3+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x \cdot 3x^2 - (x^3+2) \cdot \frac{1}{2}}{x\sqrt{x}} = \frac{3x^3 - \frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}} = \frac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2\frac{1}{2}x^3 - 1 = 0$$

$$2\frac{1}{2}x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{2}{5}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \text{ vold.}$$

$$f(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}) = \frac{(\sqrt[3]{\frac{2}{5}})^3 + 2}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}} = \frac{\frac{2}{5} + 2}{((\frac{2}{5})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{2\frac{2}{5}}{5}}{(\frac{2}{5})^{\frac{1}{6}}} = \frac{2\frac{2}{5}}{\sqrt[6]{\frac{2}{5}}}$$

$$\text{Dus } a = 2\frac{2}{5}, b = 6 \text{ en } c = \frac{2}{5}.$$

$$\text{32 } q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = t(x) \cdot (n(x))^{-1} \text{ geeft}$$

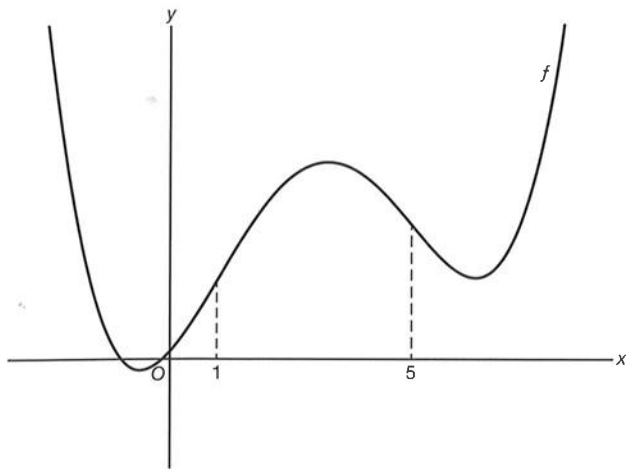
$$\begin{aligned}
 q'(x) &= [3t(x)]' \cdot (n(x))^{-1} + t(x) \cdot 3(n(x))^{-1}]' = t'(x) \cdot (n(x))^{-1} + t(x) \cdot -(n(x))^{-2} \cdot n'(x) = \frac{t'(x)}{n(x)} - \frac{t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} \\
 &= \frac{n(x) \cdot t'(x)}{(n(x))^2} - \frac{t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}
 \end{aligned}$$

Bladzijde 23

- 33 a De raaklijnen raken de grafiek van f aan de bovenkant voor $x < 3$.
 b De overgang vindt plaats in $(3, -1\frac{1}{2})$.
 c onderkant
 bovenkant

Bladzijde 25

$$\begin{aligned}
 \text{34 } f(x) &= x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48x + 5 \\
 f'(x) &= 4x^3 - 36x^2 + 60x + 48 \\
 f''(x) &= 12x^2 - 72x + 60 \\
 f''(x) = 0 \text{ geeft } 12x^2 - 72x + 60 &= 0 \\
 x^2 - 6x + 5 &= 0 \\
 (x-1)(x-5) &= 0 \\
 x = 1 \vee x = 5 \\
 f(1) &= 72 \text{ en } f(5) = 120
 \end{aligned}$$



Uit de schets volgt dat $(1, 72)$ en $(5, 120)$ de buigpunten zijn.

- 35 Stel $k: y = ax + b$.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x + 4$$

$$f'(x) = x^2 - 6x + 6$$

$$f''(x) = 2x - 6$$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } 2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$f(3) = 4$$

$$f'(3) = -3$$

$$y = -3x + b$$

$$\text{buigpunt } (3, 4) \left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 4 \\ -9 + b = 4 \end{array} \right.$$

$$b = 13$$

Dus $k: y = -3x + 13$.

- 36 a $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$$

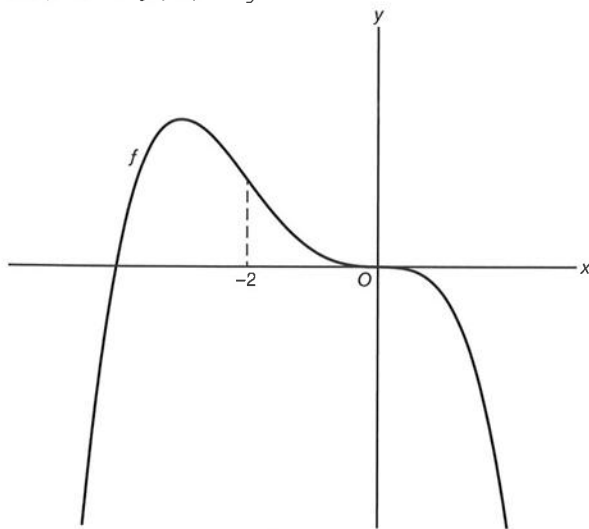
$$f''(x) = -x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } -x^2 - 2x = 0$$

$$-x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2$$

$$f(0) = 0 \text{ en } f(-2) = 1\frac{1}{3}$$



Uit de schets volgt dat $(-2, 1\frac{1}{3})$ en $(0, 0)$ de buigpunten zijn.

- b $f'(0) = 0$, dus de richtingscoëfficiënt van de buigraaklijn door het buigpunt $(0, 0)$ is 0.

Dus de grafiek van f heeft een horizontale buigraaklijn.

37 a $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5$
 $f_5'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$
 $f_5''(x) = 3x^2 - 12x + 10$
 $f_5''(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 10 = 0$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 144 - 120 = 24 > 0$$

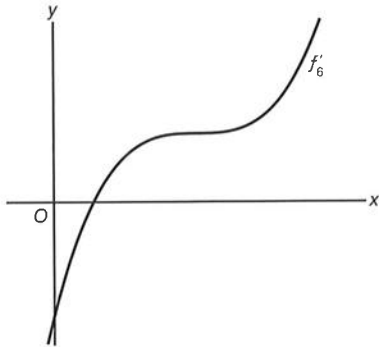
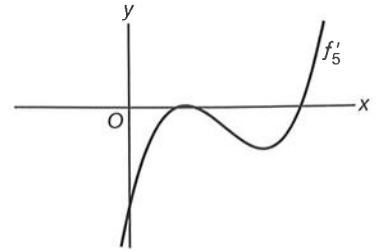
De vergelijking $f_5''(x) = 0$ heeft twee oplossingen.

De grafiek van f_5 heeft twee buigpunten omdat f_5' twee extremen heeft.

b $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5$
 $f_6'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$
 $f_6''(x) = 3x^2 - 12x + 12$
 $f_6''(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 12 = 0$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 - 144 = 0$$

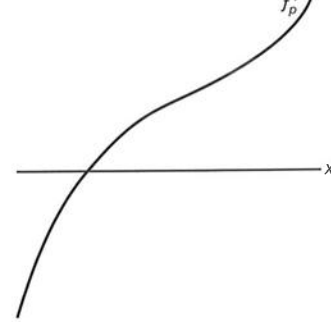
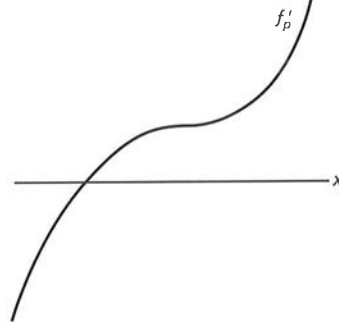
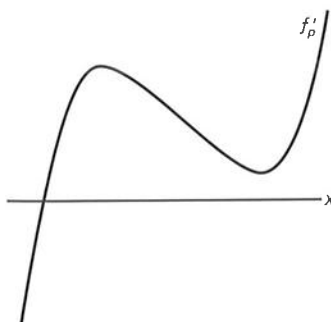
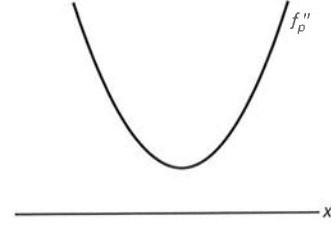
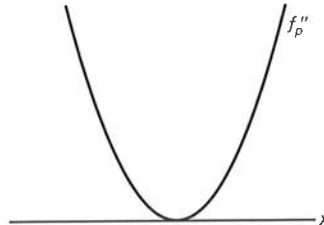
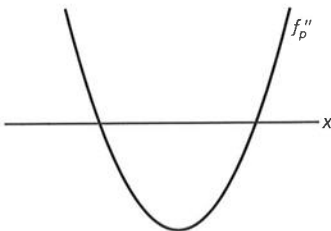
De vergelijking $f_6''(x) = 0$ heeft één oplossing.



De grafiek van f_6 heeft geen buigpunten omdat f_6' geen extremen heeft.

38 $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5$
 $f_p'(x) = x^3 - 6x^2 + 2px - 5$
 $f_p''(x) = 3x^2 - 12x + 2p$

De grafiek van f_p'' is een dalparabool met twee, één of nul snijpunten met de x-as.



Heeft de grafiek van f_p'' twee snijpunten met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend-dalend-stijgend, dus de grafiek van f_p heeft twee extremen, dus de grafiek van f heeft twee buigpunten.

Dus de grafiek van f_p heeft óf twee óf geen buigpunten.

Heeft de grafiek van f_p'' één raakpunt met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend-horizontaal-stijgend, dus de grafiek van f_p heeft geen extremen, dus de grafiek van f heeft geen buigpunten.

Heeft de grafiek van f_p'' geen snijpunten met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend, dus de grafiek van f_p heeft geen extremen, dus de grafiek van f heeft geen buigpunten.

39 $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$

$$f'_p(x) = 4x^3 + 3px^2 + \frac{1}{2}x$$

$$f''_p(x) = 12x^2 + 6px + \frac{1}{2}$$

$$f''_p(x) = 0 \text{ geeft } 12x^2 + 6px + \frac{1}{2} = 0$$

$$D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 36p^2 - 72$$

$$D > 0 \text{ geeft } 36p^2 - 72 > 0$$

$$36p^2 > 72$$

$$p^2 > 2$$

$$p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}$$

Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}$.

40 a Stel $k: y = ax + b$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - 4\right)^2 - 5 \text{ geeft } f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^3 - 4\right) \cdot \frac{3}{2}x^2 = 3x^2\left(\frac{1}{2}x^3 - 4\right)$$

$$a = f'(0) = 0$$

$$f(0) = (0 - 4)^2 - 5 = 11, \text{ dus } A(0, 11).$$

$$\text{Dit geeft } k: y = 11.$$

b $f'(x) = 0$ geeft $3x^2\left(\frac{1}{2}x^3 - 4\right) = 0$

$$3x^2 = 0 \vee \frac{1}{2}x^3 = 4$$

$$x^2 = 0 \vee x^3 = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

Uit figuur 9.11 volgt dat de grafiek van f een top heeft voor $x = 2$.

$$f(2) = (4 - 4)^2 - 5 = -5$$

De top is het punt $(2, -5)$.

c $f'(x) = 3x^2\left(\frac{1}{2}x^3 - 4\right) = \frac{3}{2}x^5 - 12x^2$

$$f''(x) = 7\frac{1}{2}x^4 - 24x$$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } 7\frac{1}{2}x^4 - 24x = 0$$

$$x(7\frac{1}{2}x^3 - 24) = 0$$

$$x = 0 \vee 7\frac{1}{2}x^3 = 24$$

$$x = 0 \vee x^3 = 3\frac{1}{5}$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt[3]{3\frac{1}{5}}$$

$$f\left(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} - 4\right)^2 - 5 = \left(1\frac{3}{5} - 4\right)^2 - 5 = \left(-2\frac{2}{5}\right)^2 - 5 = \frac{19}{25}$$

$$\text{Dus } B\left(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}, \frac{19}{25}\right).$$

41 a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Twee extreme waarden, dus de tweedegraadsvergelijking $f'(x) = 0$ heeft twee oplossingen.

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$D = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 12ac$$

Twee oplossingen, dus $D > 0$ geeft $4b^2 - 12ac > 0$

$$4b^2 > 12ac$$

$$b^2 > 3ac$$

b $f''(x) = 6ax + 2b$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } 6ax + 2b = 0$$

$$6ax = -2b$$

$$x = \frac{-b}{3a}$$

Dus f' heeft een extreme waarde voor $x = -\frac{b}{3a}$.

f is een derdegraadsfunctie, dus $a \neq 0$.

Dus de afgeleide van elke derdegraadsfunctie heeft precies één extreme waarde, dus elke derdegraadsfunctie heeft precies één buigpunt.

c Als de grafiek van een derdegraadsfunctie twee toppen heeft, dan zijn de x -coördinaten van de toppen de oplossingen van de vergelijking $3ax^2 + 2bx + c = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$D = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 12ac$$

$$x = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \vee x = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$$

$$\text{Dus } x_A + x_B = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} + \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} = \frac{-4b}{6a} = -\frac{2b}{3a}.$$

$$x_C = -\frac{b}{3a} \text{ (zie b), dus } 2x_C = -\frac{2b}{3a} = x_A + x_B.$$

Dus als de grafiek twee toppen A en B heeft, dan geldt voor het buigpunt C dat $2x_C = x_A + x_B$.

9.4 Snelheid en versnelling

Bladzijde 27

42 a De gemiddelde snelheid op $[1, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{2,1 - 0,3}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9 \text{ m/s}.$

b Op $t = 4$ is de snelheid $v(4) = 1,6 + 0,1 = 1,7 \text{ m/s}.$

Op $t = 5$ is de snelheid $v(5) = 2,0 + 0,1 = 2,1 \text{ m/s}.$

c Op $t = 6$ is de snelheid $v(6) = 2,4 + 0,1 = 2,5 \text{ m/s}.$

Op $[4, 5]$ is de snelheid met $0,4 \text{ m/s}$ toegenomen.

Op $[5, 6]$ is de snelheid met $0,4 \text{ m/s}$ toegenomen.

d Op $[t, t + 1]$ neemt de snelheid toe met

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,4(t + 1) + 0,1 - (0,4t + 0,1)}{t + 1 - t} = \frac{0,4t + 0,4 + 0,1 - 0,4t - 0,1}{1} = \frac{0,4}{1} = 0,4 \text{ m/s}.$$

Dus op elk interval $[t, t + 1]$ neemt de snelheid evenveel toe, namelijk met $0,4 \text{ m/s}.$

Bladzijde 28

- 43 De snelheidsformule is kwadratisch en de bijbehorende grafiek is een bergparabool. Dus de snelheid is maximaal als deze niet toe- of afneemt. Als de versnelling gelijk is aan nul verandert de snelheid niet. Dus in het voorbeeld is de snelheid maximaal als de versnelling gelijk is aan nul.

44 a $s(300) = -0,00028 \cdot 300^3 + 0,14 \cdot 300^2 = 5040$
Dus 5040 meter afgelegd in de eerste 300 seconden.

b De gemiddelde snelheid gedurende de eerste 300 seconden is $\frac{5040}{300} = 16,8 \text{ m/s}.$

Dat is $3,6 \cdot 16,8 \approx 60 \text{ km/uur}.$

c De maximale snelheid is $v(166,66...) = 23,3... \text{ m/s}.$
Dat is $3,6 \cdot 23,3... = 84 \text{ km/uur}.$

45 a De gemiddelde snelheid tijdens deze fietstocht is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(600) - s(0)}{600} = \frac{4320}{600} = 7,2 \text{ m/s}.$

Dat is $3,6 \cdot 7,2 \approx 26 \text{ km/uur}.$

b $v(t) = \frac{ds}{dt} = -0,00012t^2 + 0,072t$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0,00024t + 0,072$

De snelheid neemt toe als de versnelling groter is dan nul, dus als $a(t) > 0$

$$-0,00024t + 0,072 > 0$$

$$-0,00024t > -0,072$$

$$t < 300$$

Voor $0 \leq t < 300$ neemt de snelheid toe.

c $a(t) = 0$ geeft $t = 300$

De snelheid is maximaal op $t = 300$.

De maximale snelheid is

$$v(300) = -0,00012 \cdot 300^2 + 0,072 \cdot 300 = 10,8 \text{ m/s}.$$

Dat is $3,6 \cdot 10,8 \approx 39 \text{ km/uur}.$

d Los op $a(t) < 0,02$

$$-0,00024t + 0,072 < 0,02$$

$$-0,00024t < -0,052$$

$$t > 216,66...$$

Vanaf $t \approx 217$ is de versnelling minder dan $0,02 \text{ m/s}^2$.

Bladzijde 29

46 a $s(50) = 0,003 \cdot 50^3 - 0,5 \cdot 50^2 + 40 \cdot 50 = 1125$

Gedurende de eerste 50 seconden wordt 1125 meter afgelegd.

b $v(t) = \frac{ds}{dt} = 0,009t^2 - t + 40$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0,018t - 1$

$a(t) < 0$ geeft $0,018t - 1 < 0$

$0,018t < 1$

$t < 55,5...$

De versnelling is kleiner dan nul als $0 \leq t < 55,6$, dus de snelheid neemt af voor $0 \leq t < 55,6$.

Dus de snelheid neemt gedurende de eerste 50 seconden voortdurend af.

c $a(t) = 0$ geeft $t = 55,5...$

De snelheid is minimaal op $t = 55,5...$

De minimale snelheid is $v(55,5...) = 12,2... \text{ m/s}$.

Dat is $3,6 \cdot 12,2... = 44 \text{ km/uur}$.

d De gemiddelde snelheid gedurende de eerste 100 seconden is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(100) - s(0)}{100} = 20 \text{ m/s}$.

Voer in $y_1 = 0,009x^2 - x + 40$ en $y_2 = 20$.

Intersect geeft $x \approx 26,2$ en $x \approx 85,0$.

Dus op $t \approx 26$ en $t \approx 85$ is de snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid gedurende de eerste 100 seconden.

e $a(t) = -0,2$ geeft $0,018t - 1 = -0,2$

$0,018t = 0,8$

$t \approx 44,4$

$a(t) = 0,2$ geeft $0,018t - 1 = 0,2$

$0,018t = 1,2$

$t \approx 66,7$

Dus gedurende $66,7 - 44,4 \approx 22$ seconden ligt de versnelling tussen $-0,2$ en $0,2 \text{ m/s}^2$.

47 a bijvoorbeeld $f(x) = x^3 + 2x^2 - 17$

b $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$

Bladzijde 30

48 Stel $a(t) = mt + n$.

$a(0) = 0$ en $a(20) = 5$, dus $m = \frac{5 - 0}{20 - 0} = \frac{1}{4}$.

$a(t) = \frac{1}{4}t + a(0)$, dus $a(t) = \frac{1}{4}t$.

$a(t) = \frac{1}{4}t$ geeft $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + v(0) = \frac{1}{2}t^2 + 1$ en dit geeft $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + t$.

$s(20) = \frac{1}{6} \cdot 20^3 + 20 = 1353\frac{1}{3}$

Dus gedurende de eerste 20 seconden wordt ongeveer 1353 meter afgelegd.

49 a $a(t) = -t^2 + 6t$ geeft $v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + v(0) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2$

$v(6) = -\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 = 36 \text{ m/s}$

b $v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2$ geeft $s(t) = -\frac{1}{12}t^4 + t^3$

$s(6) = -\frac{1}{12} \cdot 6^4 + 6^3 = 108 \text{ m}$

c $v(6) = 36 \text{ m/s}$

$s(10) = s(6) + 4 \cdot v(6) = 108 + 4 \cdot 36 = 252 \text{ m}$

d Nog $500 - 108 = 392$ meter af te leggen met een snelheid van 36 m/s .

Dat duurt $\frac{392}{36} \approx 10,9$ seconden.

Dus na $6 + 10,9 = 16,9$ seconden is 500 meter afgelegd.

50 a $v(0) = 108 \text{ km/uur} = 30 \text{ m/s}$

De versnelling is constant, dus de gemiddelde snelheid is $\frac{30 + 0}{2} = 15 \text{ m/s}$.

De remweg is $6 \cdot 15 = 90$ meter.

b De remtijd is $\frac{60}{15} = 4$ seconden.

Bladzijde 31

- 51 a** $a(t) = -1\frac{5}{7}t + 6$ geeft $v(t) = -\frac{6}{7}t^2 + 6t + v(0) = -\frac{6}{7}t^2 + 6t$
 $v(3,5) = -\frac{6}{7} \cdot 3,5^2 + 6 \cdot 3,5 = 10,5$ m/s
 De snelheid van de atleet na 3,5 seconden is $3,6 \cdot 10,5 = 37,8$ km/uur.
 $a(t) = -\frac{2}{3}t + 4$ geeft $v(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 4t + v(0) = -\frac{1}{3}t^2 + 4t$
 $v(6) = -\frac{1}{3} \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 = 12$ m/s
 De snelheid van het paard na 6 seconden is $3,6 \cdot 12 = 43,2$ km/uur.
- b** $v(t) = -\frac{6}{7}t^2 + 6t$ geeft $s(t) = -\frac{2}{7}t^3 + 3t^2$
 $s(6) = s(3,5) + (6 - 3,5) \cdot v(3,5) = -\frac{2}{7} \cdot 3,5^3 + 3 \cdot 3,5^2 + 2,5 \cdot 10,5 = 50,75$ m
 Op $t = 6$ heeft de atleet 50,75 meter afgelegd.
 $v(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 4t$ geeft $s(t) = -\frac{1}{9}t^3 + 2t^2$
 $s(6) = -\frac{1}{9} \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 = 48$ m
 Op $t = 6$ heeft het paard 48 meter afgelegd.
- c** In het begin loopt de atleet sneller dan het paard, maar vanaf een bepaald tijdstip loopt het paard sneller.
 De voorsprong van de atleet op het paard is maximaal op het moment dat de snelheden van de atleet en het paard gelijk zijn.
 Op $t = 3,5$ is de snelheid van de atleet 10,5 m/s (zie a), daarna verandert de snelheid van de atleet niet meer.
 Op $t = 3,5$ is de snelheid van het paard $v(3,5) = -\frac{1}{3} \cdot 3,5^2 + 4 \cdot 3,5 = 9\frac{11}{12}$ m/s, het paard is op dat moment dus nog langzamer dan de atleet.
 Dus los op $-\frac{1}{3}t^2 + 4t = 10,5$.
 Voer in $y_1 = -\frac{1}{3}x^2 + 4x$ en $y_2 = 10,5$.
 Intersect geeft $x = 3,87...$
 Dus op $t = 3,87...$ is de voorsprong van de atleet op het paard maximaal.
 De atleet heeft dan $s(3,87...) = s(3,5) + (3,87... - 3,5) \cdot v(3,5) = -\frac{2}{7} \cdot 3,5^3 + 3 \cdot 3,5^2 + 0,37... \cdot 10,5 = 28,47...$ meter afgelegd.
 Het paard heeft dan $s(3,87...) = -\frac{1}{9} \cdot 3,87...^3 + 2 \cdot 3,87...^2 = 23,60...$ meter afgelegd.
 De maximale voorsprong van de atleet op het paard is $28,47... - 23,60... \approx 4,9$ meter.
- d** De atleet heeft na 3,5 seconden $s(3,5) = -\frac{2}{7} \cdot 3,5^3 + 3 \cdot 3,5^2 = 24,5$ meter afgelegd.
 Zijn snelheid, die vanaf dat moment niet meer verandert, is dan 10,5 m/s (zie a).
 Over de resterende $100 - 24,5 = 75,5$ meter doet hij $\frac{75,5}{10,5} = 7,19...$ seconden.
 Dus de atleet finisht na $3,5 + 7,19... = 10,69...$ seconden.
 Het paard heeft na 6 seconden 48 meter afgelegd (zie b).
 De snelheid van het paard, die vanaf dat moment niet meer verandert, is dan 12 m/s (zie a).
 Over de resterende $100 - 48 = 52$ meter doet hij $\frac{52}{12} = 4,33...$ seconden.
 Dus het paard finisht na $6 + 4,33... = 10,33...$ seconden.
 Dus het paard wint de wedstrijd met een voorsprong van $10,69... - 10,33... \approx 0,36$ seconden.
- 52 a** $v(0) = 54$ km/uur = 15 m/s
 De versnelling is constant, dus de gemiddelde snelheid is $\frac{15 + 0}{2} = 7,5$ m/s.
 75 cm = 0,75 m
 De botsing duurt $\frac{0,75}{7,5} = 0,1$ seconde.
- b** $m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-15}{0,1} = -150$
 Dus de versnelling tijdens de botsing is -150 m/s² (afname van de snelheid).
 Dit is $\frac{150}{10} = 15$ keer zo groot als de versnelling van de zwaartekracht.
- 53 a** Voor de auto geldt $a(t) = 1,5$.
 $a(t) = 1,5$ geeft $v(t) = 1,5t + v(0) = 1,5t$ en dit geeft $s(t) = 0,75t^2$.
 De snelheid van de brommer is constant 36 km/uur = 10 m/s.
 Voor de brommer geldt $v(t) = 10$ en dit geeft $s(t) = 10t$.
 Los op $0,75t^2 = 10t$
 $0,75t^2 - 10t = 0$
 $t(0,75t - 10) = 0$
 $t = 0 \vee 0,75t = 10$
 $t = 0 \vee t = \frac{10}{0,75} = 13\frac{1}{3}$
 Dus na $13\frac{1}{3}$ seconde heeft de auto de brommer ingehaald.

b $v(13\frac{1}{3}) = 1,5 \cdot 13\frac{1}{3} = 20 \text{ m/s}$

Op het moment van passeren reed de auto $3,6 \cdot 20 = 72 \text{ km/uur}$.

Bladzijde 32

54 a $v(t) = 9,6t$ geeft $s(t) = 4,8t^2$

$$s(30) = 4,8 \cdot 30^2 = 4320$$

De eerste 30 seconden legt Alan 4320 meter af.

$$v(30) = 9,6 \cdot 30 = 288$$

Na 30 seconden is zijn snelheid 288 m/s ofwel $3,6 \cdot 288 \approx 1040 \text{ km/uur}$.

b $1322 \text{ km/uur} = \frac{1322}{3,6} \approx 367 \text{ m/s}$

$$v(60) = p(60 - 60)^2 + 367 = p \cdot 0^2 + 367 = 367, \text{ dus dit klopt.}$$

Uit vraag a volgt dat moet gelden $v(30) = 288$, dus los op $p(30 - 60)^2 + 367 = 288$

$$p(-30)^2 + 367 = 288$$

$$900p + 367 = 288$$

$$900p = -79$$

$$p \approx -0,088$$

c $v(t) = -0,088(t - 60)^2 + 367$ geeft $s(t) = -0,088 \cdot \frac{1}{3}(t - 60)^3 + 367t + c = \frac{-0,088}{3}(t - 60)^3 + 367t + c$

Uit vraag a volgt dat moet gelden $s(30) = 4320$, dus los op $\frac{-0,088}{3}(30 - 60)^3 + 367 \cdot 30 + c = 4320$

$$\frac{-0,088}{3}(-30)^3 + 11010 + c = 4320$$

$$\frac{-0,088}{3} \cdot -27000 + 11010 + c = 4320$$

$$792 + 11010 + c = 4320$$

$$c = -7482$$

d $s(80) = \frac{-0,088}{3}(80 - 60)^3 + 367 \cdot 80 - 7482 \approx 21643$

Tussen $t = 30$ en $t = 80$ legt Alan $21643 - 4320 = 17323$ meter af.

$$v(80) = -0,088(80 - 60)^2 + 367 = 331,8$$

Op $t = 80$ is zijn snelheid 331,8 m/s ofwel $3,6 \cdot 331,8 \approx 1190 \text{ km/uur}$.

e Er moet gelden $v(80) = 331,8$, dus los op $q(80 - 270)^4 + 42 = 331,8$

$$q(-190)^4 = 289,8$$

$$1303210000q = 289,8$$

$$q \approx 2,225 \cdot 10^{-7}$$

f $v(t) = 2,225 \cdot 10^{-7} \cdot (t - 270)^4 + 42$ geeft $s(t) = 2,225 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{5}(t - 270)^5 + 42t + c$

Er moet gelden dat $s(80) \approx 21643$, dus los op $2,225 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{5}(80 - 270)^5 + 42 \cdot 80 + c = 21643$

$$2,225 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{5}(-190)^5 + 3360 + c = 21643$$

$$c \approx 29302$$

Dus voor $80 \leq t \leq 270$ geldt $s(t) = 2,225 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{5}(t - 270)^5 + 42t + 29302$.

$$s(270) = 2,225 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{5}(270 - 270)^5 + 42 \cdot 270 + 29302 = 40642$$

Dus op $41419 - 40642 = 777$ meter hoogte opent Alan zijn parachute.

Diagnostische toets

Bladzijde 34

1 a $f(x) = (x^3 + 5x)(x^3 - x^2 + 2x)$ geeft

$$f'(x) = [x^3 + 5x]' \cdot (x^3 - x^2 + 2x) + (x^3 + 5x) \cdot [x^3 - x^2 + 2x]' = (3x^2 + 5)(x^3 - x^2 + 2x) + (x^3 + 5x)(3x^2 - 2x + 2)$$

b $g(x) = \frac{3x - 7}{x^2 + 2}$ geeft $g'(x) = \frac{(x^2 + 2) \cdot 3 - (3x - 7) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{3x^2 + 6 - 6x^2 + 14x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-3x^2 + 14x + 6}{(x^2 + 2)^2}$

c $h(x) = \frac{3x^2}{4x - 2}$ geeft $h'(x) = \frac{(4x - 2) \cdot 6x - 3x^2 \cdot 4}{(4x - 2)^2} = \frac{24x^2 - 12x - 12x^2}{(4x - 2)^2} = \frac{12x^2 - 12x}{(4x - 2)^2}$

$$2 \text{ a } f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot 2x - (x^2 + 2) \cdot 2}{(2x + 1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 4}{(2x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}$$

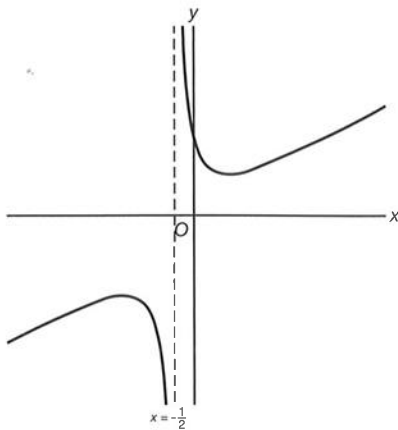
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -2$$

vold. vold.



max. is $f(-2) = -2$ en min. is $f(1) = 1$

Het bereik van f bestaat uit de intervallen $\langle \leftarrow, -2 \rangle$ en $[1, \rightarrow)$.

$$\begin{aligned} \text{b } f'(x) = \frac{3}{8} \text{ geeft } \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2} &= \frac{3}{8} \\ \frac{2x^2 + 2x - 4}{4x^2 + 4x + 1} &= \frac{3}{8} \\ 8(2x^2 + 2x - 4) &= 3(4x^2 + 4x + 1) \\ 16x^2 + 16x - 32 &= 12x^2 + 12x + 3 \\ 4x^2 + 4x - 35 &= 0 \\ D = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-35) &= 576 \\ x = \frac{-4 - 24}{8} = -3\frac{1}{2} \vee x = \frac{-4 + 24}{8} &= 2\frac{1}{2} \\ \text{vold.} & \quad \text{vold.} \end{aligned}$$

De x -coördinaten zijn $-3\frac{1}{2}$ en $2\frac{1}{2}$.

$$3 \text{ a } f(x) = 5x^3 - 6\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^5 \text{ geeft } f'(x) = 15x^2 - 5 \cdot 6\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = 15x^2 - 15\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^4$$

$$\text{b } g(x) = 6x - \frac{4}{(5x + 3)^3} \text{ geeft } g'(x) = 6 - 3 \cdot -4(5x + 3)^{-4} \cdot 5 = 6 + \frac{60}{(5x + 3)^4}$$

$$\text{c } h(x) = 3x^{10} - 5\sqrt{x^3 - x} \text{ geeft } h'(x) = 30x^9 - 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3 - x}} \cdot (3x^2 - 1) = 30x^9 - \frac{5(3x^2 - 1)}{2\sqrt{x^3 - x}}$$

$$\text{d } k(x) = \frac{2 - x^3}{\sqrt{2 - x^3}} = \sqrt{2 - x^3} \text{ geeft } k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 - x^3}} \cdot -3x^2 = \frac{-3x^2}{2\sqrt{2 - x^3}}$$

$$4 \text{ Stel } k: y = ax + b.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{x^2 + 7} \text{ geeft } f'(x) = x - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 7}} \cdot 2x = x - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 7}}$$

$$a = f'(3) = 3 - \frac{6}{\sqrt{9 + 7}} = 3 - \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 1\frac{1}{2}x + b \\ f(3) &= -3\frac{1}{2}, \text{ dus } A(3, -3\frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1\frac{1}{2} \cdot 3 + b &= -3\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} + b &= -3\frac{1}{2} \\ b &= -8 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 1\frac{1}{2}x - 8$.

- 5 a $f(x) = 2x^2(x^2 - 4x)^5$ geeft
 $f'(x) = 4x \cdot (x^2 - 4x)^5 + 2x^2 \cdot 5(x^2 - 4x)^4 \cdot (2x - 4) = 4x(x^2 - 4x)^5 + 10x^2(2x - 4)(x^2 - 4x)^4$
- b $g(x) = \frac{6x}{(2x^3 + 2)^5}$ geeft $g'(x) = \frac{(2x^3 + 2)^5 \cdot 6 - 6x \cdot 5(2x^3 + 2)^4 \cdot 6x^2}{((2x^3 + 2)^5)^2} = \frac{6(2x^3 + 2)^5 - 180x^3(2x^3 + 2)^4}{(2x^3 + 2)^{10}}$
 $= \frac{6(2x^3 + 2) - 180x^3}{(2x^3 + 2)^6} = \frac{12x^3 + 12 - 180x^3}{(2x^3 + 2)^6} = \frac{-168x^3 + 12}{(2x^3 + 2)^6}$
- c $h(x) = x^2\sqrt{2x-1}$ geeft $h'(x) = 2x \cdot \sqrt{2x-1} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 = 2x\sqrt{2x-1} + \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}$
- d $k(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}$ geeft
 $k'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot 3 - (3x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{3\sqrt{x^2+4} - \frac{x(3x-1)}{\sqrt{x^2+4}}}{(\sqrt{x^2+4})^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{3(x^2+4) - x(3x-1)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$
 $= \frac{3x^2 + 12 - 3x^2 + x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{x+12}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$

Bladzijde 35

- 6 a $f(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ geeft
 $f'(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1} \cdot (-2) - (1-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}} \cdot 4x}{(\sqrt{2x^2+1})^2} = \frac{-2\sqrt{2x^2+1} - \frac{2x(1-2x)}{\sqrt{2x^2+1}}}{(\sqrt{2x^2+1})^2} \cdot \frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{-2(2x^2+1) - 2x(1-2x)}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}}$
 $= \frac{-4x^2 - 2 - 2x + 4x^2}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}} = \frac{-2x-2}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}}$
 $f'(x) = 0$ geeft $-2x-2 = 0$
 $-2x = 2$
 $x = -1$ vold.
 $f(-1) = \frac{1+2}{\sqrt{2+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
De top is het punt $(-1, \sqrt{3})$.
- b Stel $k: y = ax + b$.
 $a = f'(2) = \frac{-4-2}{(8+1)\sqrt{8+1}} = \frac{-6}{9 \cdot 3} = -\frac{2}{9}$
 $\left. \begin{array}{l} y = -\frac{2}{9}x + b \\ f(2) = -1, \text{ dus } A(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{9} \cdot 2 + b = -1 \\ -\frac{4}{9} + b = -1 \\ b = -\frac{5}{9} \end{array}$
Dus $k: y = -\frac{2}{9}x - \frac{5}{9}$.
 k snijden met de x -as geeft $-\frac{2}{9}x - \frac{5}{9} = 0$
 $-\frac{2}{9}x = \frac{5}{9}$
 $-2x = 5$
 $x = -2\frac{1}{2}$
Dus $B(-2\frac{1}{2}, 0)$.
 $O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot d(O, B) \cdot d(A, x\text{-as}) = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1 = 1\frac{1}{4}$

- 7 $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 5x$
 $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x - 5$
 $f''(x) = 12x^2 - 6x - 18$
 $f''(x) = 0$ geeft $12x^2 - 6x - 18 = 0$
 $2x^2 - x - 3 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$
 $x = \frac{1-5}{4} = -1 \vee x = \frac{1+5}{4} = 1\frac{1}{2}$

Stel $k: y = ax + b$.

$$f(-1) = -2$$

$$f'(-1) = 6$$

$$y = 6x + b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{buigpunt } (-1, -2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \cdot -1 + b = -2 \\ -6 + b = -2 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $k: y = 6x + 4$.

Stel $l: y = ax + b$.

$$f\left(1\frac{1}{2}\right) = -26\frac{1}{16}$$

$$f'\left(1\frac{1}{2}\right) = -25\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -25\frac{1}{4}x + b \\ \text{buigpunt } \left(1\frac{1}{2}, 26\frac{1}{16}\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -25\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} + b = -26\frac{1}{16} \\ -37\frac{7}{8} + b = -26\frac{1}{16} \\ b = 11\frac{13}{16} \end{array}$$

Dus $l: y = -25\frac{1}{4}x + 11\frac{13}{16}$.

$$\begin{aligned} 8 \quad f_p(x) &= \frac{1}{2}x^4 + x^3 + px^2 + 2x - 3 \\ f_p'(x) &= 2x^3 + 3x^2 + 2px + 2 \\ f_p''(x) &= 6x^2 + 6x + 2p \\ f_p''(x) &= 0 \text{ geeft } 6x^2 + 6x + 2p = 0 \\ D &= 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2p = 36 - 48p \\ D > 0 &\text{ geeft } 36 - 48p > 0 \\ -48p &> -36 \\ p &< \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < \frac{3}{4}$.

$$9 \quad \text{a De gemiddelde snelheid tijdens deze tocht is } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(400) - s(0)}{400} = \frac{8000}{400} = 20 \text{ m/s.}$$

Dat is $3,6 \cdot 20 = 72 \text{ km/uur}$.

$$\text{b } v(t) = \frac{ds}{dt} = -0,00075t^2 + 0,3t$$

$$v(t) = 25 \text{ geeft } -0,00075t^2 + 0,3t = 25$$

$$-0,00075t^2 + 0,3t - 25 = 0$$

$$D = 0,3^2 - 4 \cdot -0,00075 \cdot -25 = 0,015$$

$$t = \frac{-0,3 - \sqrt{0,015}}{-0,0015} = 281,64... \vee t = \frac{-0,3 + \sqrt{0,015}}{-0,0015} = 118,35...$$

Dus gedurende $281,64... - 118,35... \approx 163$ seconden is de snelheid groter dan 25 m/s.

$$\text{c } a(t) = \frac{dv}{dt} = -0,0015t + 0,3$$

De snelheid neemt af als de versnelling kleiner is dan nul, dus als $a(t) < 0$

$$-0,0015t < 0,3$$

$$t > 200$$

Voor $200 < t \leq 400$ neemt de snelheid af.

$$\text{d } a(t) = 0 \text{ geeft } t = 200$$

De snelheid is maximaal op $t = 200$.

De maximale snelheid is

$$v(200) = -0,00075 \cdot 200^2 + 0,3 \cdot 200 = 30 \text{ m/s.}$$

Dat is $3,6 \cdot 30 = 108 \text{ km/uur}$.

$$10 \quad a(t) = 9,8 \text{ geeft } v(t) = 9,8t + v(0) = 9,8t - 10 \text{ en dit geeft } s(t) = 4,9t^2 - 10t.$$

$$s(t) = 150 \text{ geeft } 4,9t^2 - 10t = 150$$

$$4,9t^2 - 10t - 150 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot -150 = 3040$$

$$t = \frac{10 - \sqrt{3040}}{9,8} \approx -4,61 \vee t = \frac{10 + \sqrt{3040}}{9,8} \approx 6,65$$

$t \approx -4,61$ voldoet niet.

Dus na 6,65 seconden raakt de steen het water.