

4 Aanzichten en doorsneden

Voorkennis Afstanden in de ruimte

Bladzijde 127

1 a $BH = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b $AM = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{38}$

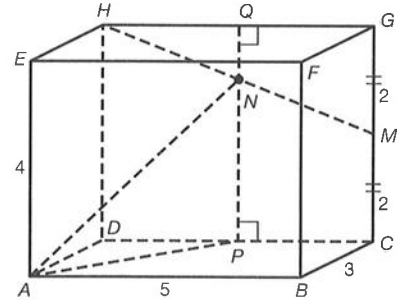
c Zie de figuur hiernaast.

Teken $NP \perp CD$ en $NQ \perp GH$.

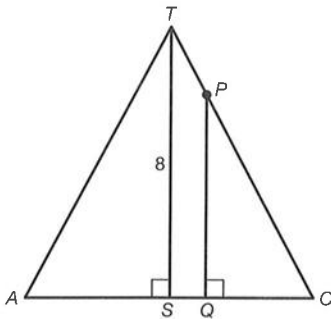
$$DP = \frac{1}{2}CD = 2\frac{1}{2}$$

$$NQ = \frac{1}{2}GM = 1, \text{ dus } NP = 4 - 1 = 3.$$

$$\text{Dus } AN = \sqrt{3^2 + (2\frac{1}{2})^2 + 3^2} = \sqrt{24\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{97}.$$



2 a



Teken $PQ \perp AC$ in $\triangle ACT$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle C = \angle C \\ \angle Q = \angle S = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle CPQ \sim \triangle CTS$$

$$\text{en } CP = \frac{3}{4}CT, \text{ dus } CQ = \frac{3}{4}CS \text{ en } PQ = \frac{3}{4}TS.$$

$$AC = 6\sqrt{2}, \text{ dus } CS = 3\sqrt{2} \text{ en } CQ = \frac{3}{4} \cdot 3\sqrt{2} = 2\frac{1}{4}\sqrt{2}, \text{ dus}$$

$$AQ = 6\sqrt{2} - 2\frac{1}{4}\sqrt{2} = 3\frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

$$TS = 8, \text{ dus } PQ = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6.$$

$$\text{In } \triangle APQ \text{ is } AP = \sqrt{\left(3\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{28\frac{1}{8} + 36} = \sqrt{64\frac{1}{8}} = \frac{3}{4}\sqrt{114}.$$

b Zie de figuur hiernaast.

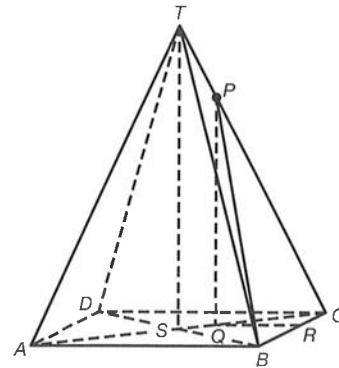
$PQ \perp AC$ en $QR \perp BC$.

$PQ = 6$ (zie a)

$$QR = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}CD = \frac{3}{4} \cdot 3 = 2\frac{1}{4}$$

$$CR = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{3}{4} \cdot 3 = 2\frac{1}{4}, \text{ dus } BR = 6 - 2\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

$$\text{In } \triangle BPR \text{ is } BP = \sqrt{6^2 + \left(2\frac{1}{4}\right)^2 + \left(3\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{55\frac{1}{8}} = 5\frac{1}{4}\sqrt{2}.$$



4.1 Aanzichten

Bladzijde 128

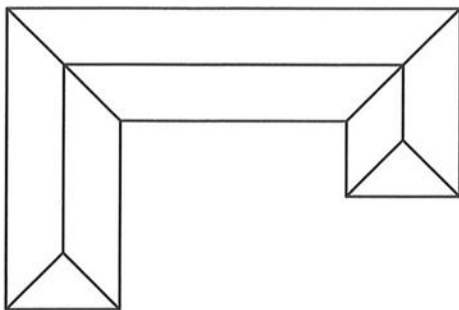
1 a Aanzicht c.

b Om aanzicht a te zien, moet je van voren of van achteren tegen het filter aankijken.
Om aanzicht b te zien, moet je van rechts of van links tegen het filter aankijken.

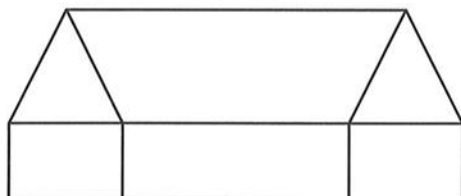
Bladzijde 129

2

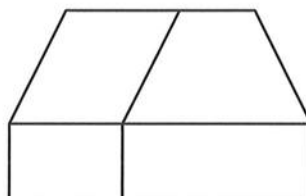
bovenaanzicht



4



vooraanzicht

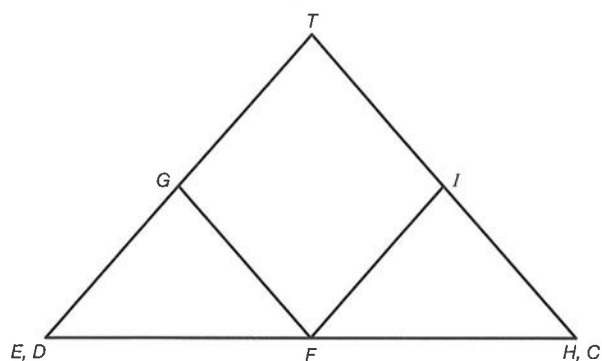
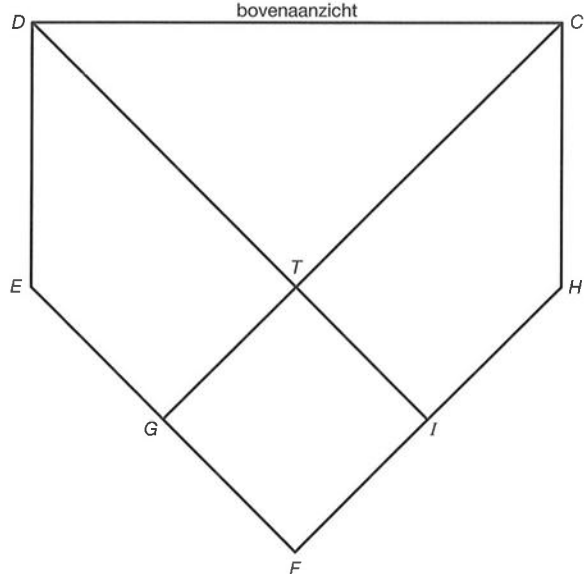


zijaanzicht

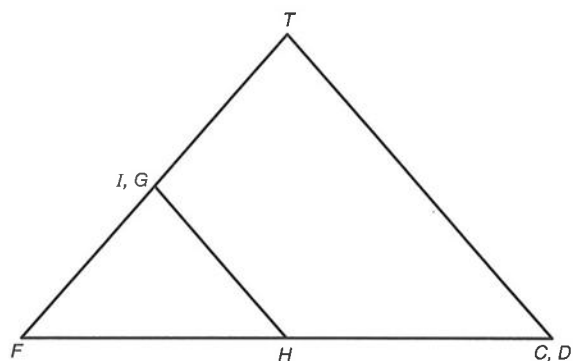
Bladzijde 130

3

bovenaanzicht



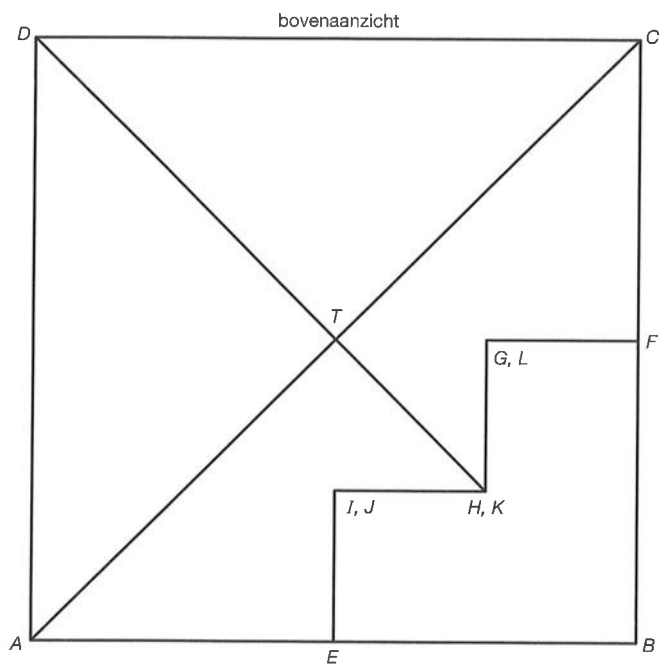
vooraanzicht



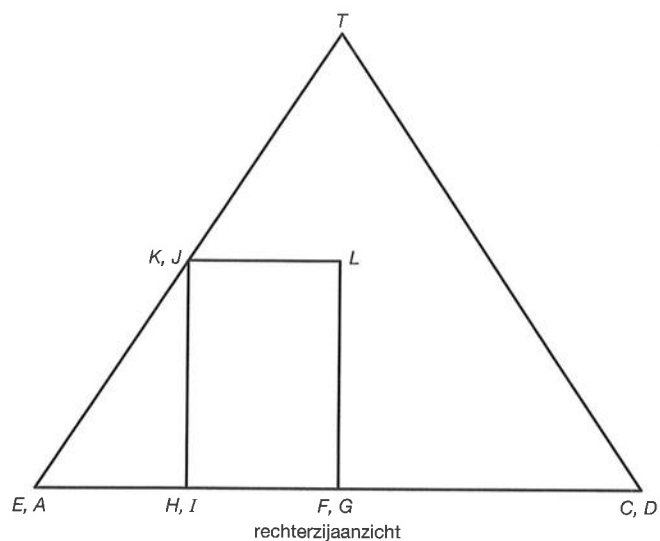
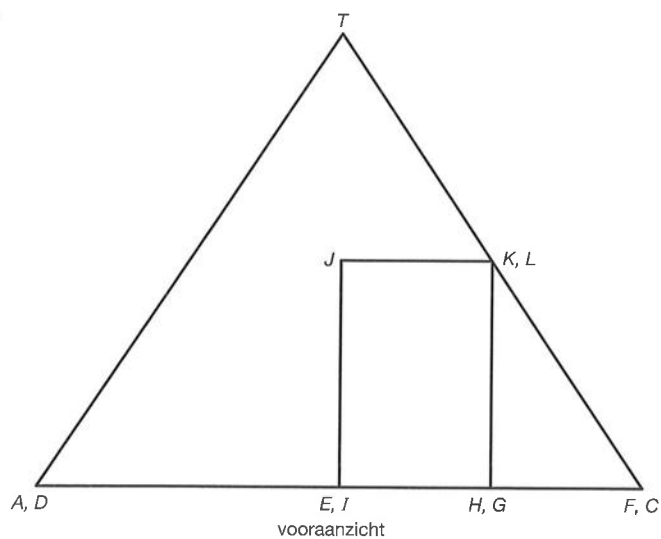
rechterzijaanzicht

4

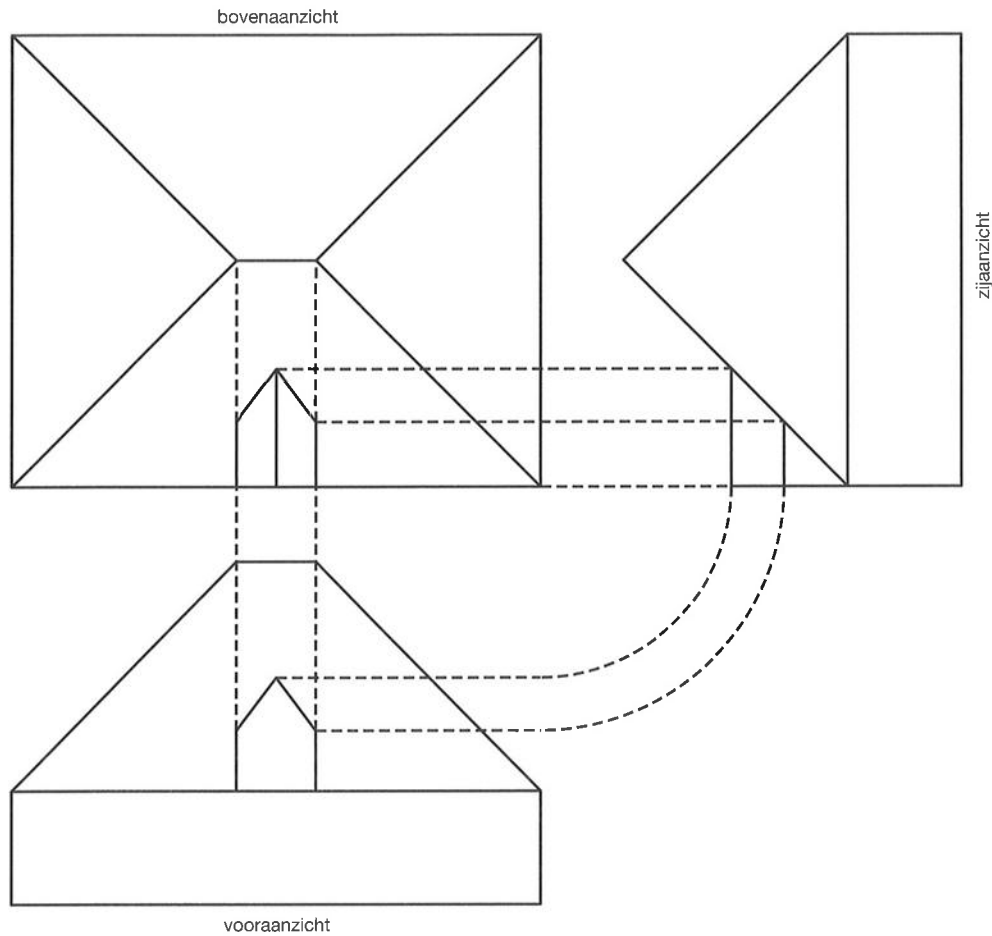
a



b

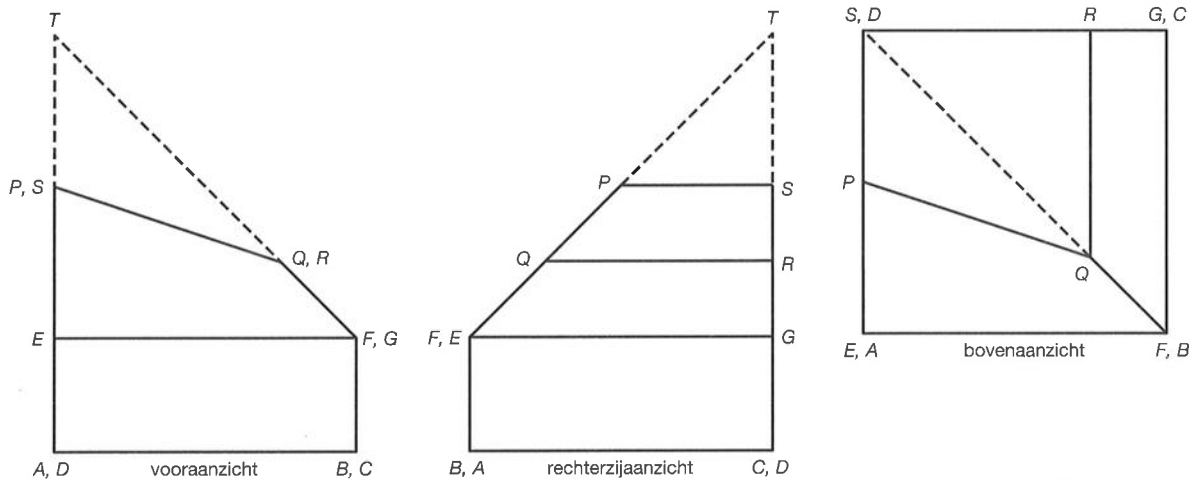


5 a



Bladzijde 131

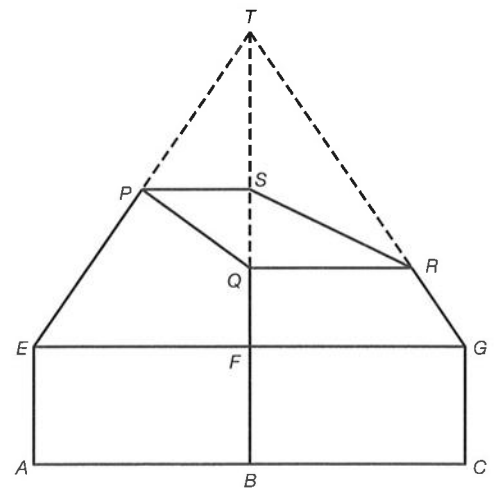
6 a



b Bij de kijkrichting BD ligt AC in het vlak van de tekening.

$$AC = 8\sqrt{2} \approx 11,3 \text{ m}$$

In de tekening met schaal 1 : 200 krijgt AC een lengte van 5,7 cm.

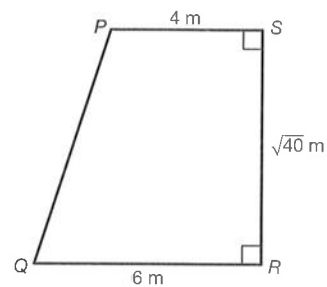
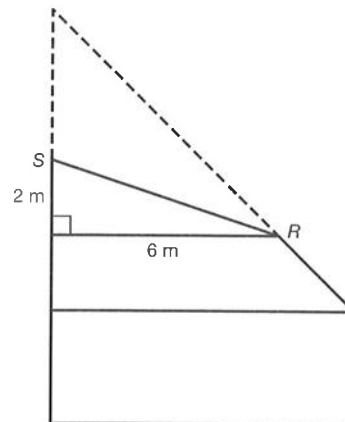


c PS en QR zie je in het zijaanzicht van vraag a.

$$PS = \frac{1}{2}AD = 4 \text{ m en } QR = \frac{3}{4}AD = 6 \text{ m.}$$

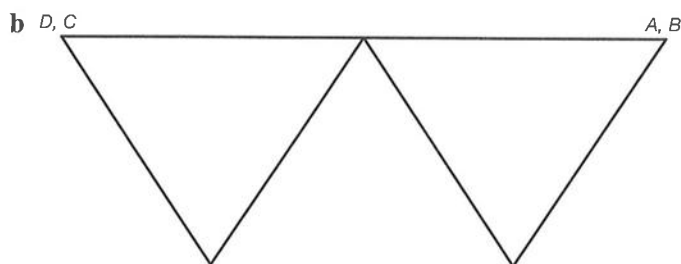
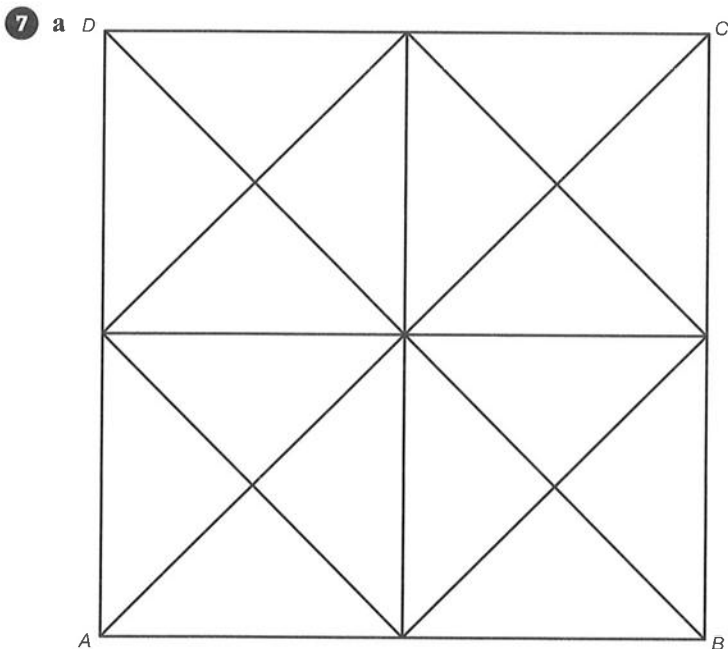
RS zie je in het vooraanzicht.

$$RS = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \text{ m}$$

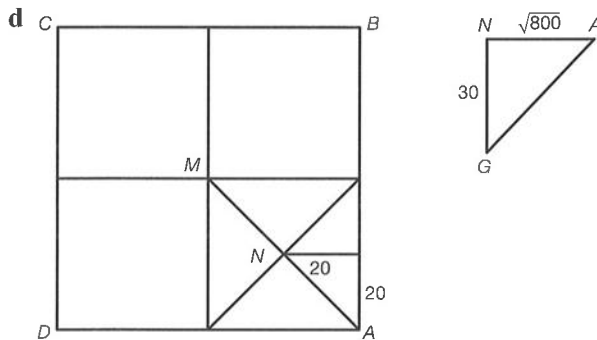
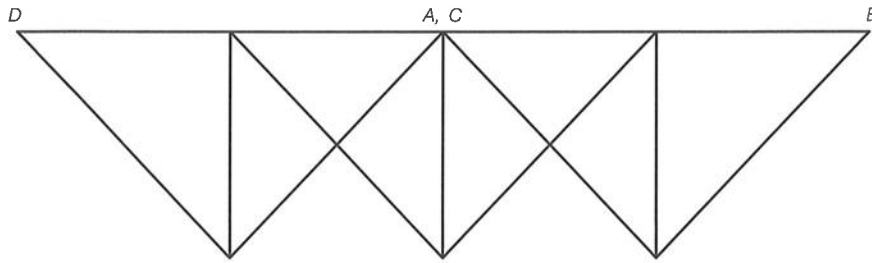


Het dakdeel $PQRS$ is een trapezium met hoogte $\sqrt{40}$ m.

$$O(PQRS) = \frac{1}{2} \cdot (6 + 4) \cdot \sqrt{40} = 5\sqrt{40} \text{ m}^2 = 5\sqrt{40} \cdot 100 \text{ dm}^2 \approx 3162 \text{ dm}^2$$



- c Bij de kijkrichting AC ligt BD in het vlak van de tekening.
 $BD = 80\sqrt{2} \approx 113,1$ cm
 In de tekening met schaal 1 : 10 krijgt BD een lengte van 11,3 cm.



$$AN = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

De buis van het punt A naar de grond rust op het punt G .

$$AG = \sqrt{(20\sqrt{2})^2 + 30^2} = \sqrt{1700} \text{ cm}$$

In het bovenvlak zijn er 6 buizen met een lengte van 80 cm.

Er zijn 16 buisjes met een lengte van $\sqrt{1700}$ cm.

De totale lengte van de buizen is $6 \cdot 80 + 16 \cdot \sqrt{1700} \approx 1140$ cm.

Bladzijde 132

- 8 a Zie de linker figuur hiernaast.

$$\sin(45^\circ) = \frac{h_1}{50}, \text{ dus } h_1 = 50 \sin(45^\circ) = 35,35\dots$$

Zie de rechter figuur hiernaast.

$$\sin(45^\circ) = \frac{h_2}{40}, \text{ dus } h_2 = 40 \sin(45^\circ) = 28,28\dots$$

Dus de hoogte van de kapstok is

$$250 - 50 - 40 + 35,35\dots + 28,28\dots \approx 224 \text{ cm.}$$

- b Zie de figuur hiernaast.

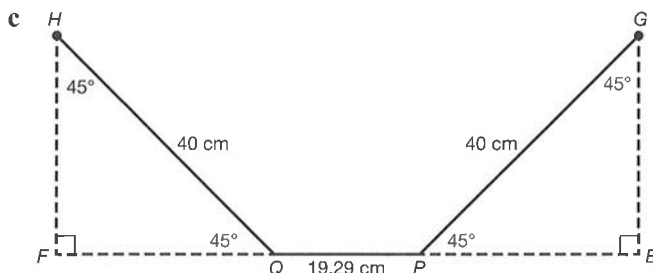
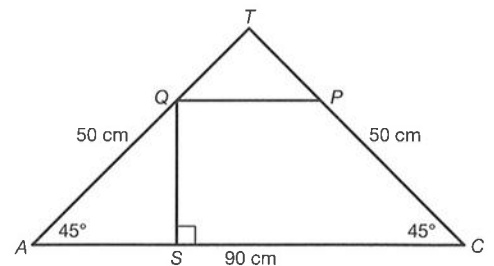
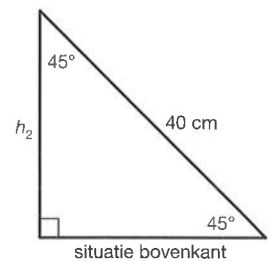
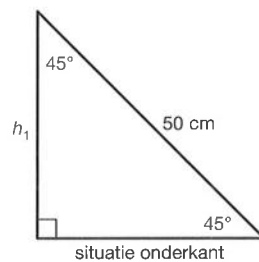
PQ is de diameter van een ring.

$$AQ = CP = 50 \text{ cm}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{AS}{50}, \text{ dus } AS = 50 \cos(45^\circ) = 35,35\dots \text{ cm}$$

$$PQ = 90 - 2 \cdot 35,35\dots = 19,289\dots \text{ cm}$$

De omtrek van een ring is $\pi \cdot PQ = \pi \cdot 19,289\dots \approx 61$ cm.



Hierboven staat de situatie aan de bovenkant schematisch weergegeven.

PQ is de diameter van een ring en G en H zijn houten knoppen.

$PQ \approx 19,29$ cm (zie b)

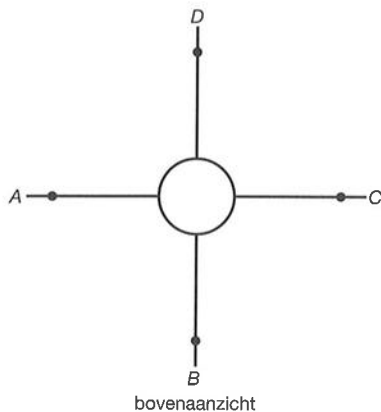
In $\triangle FHQ$ is $\cos(45^\circ) = \frac{FQ}{40}$, dus $FQ = 40 \cos(45^\circ) = 28,28... \text{ cm}$.

$EP = FQ = 28,28... \text{ cm}$

Van een ring in het bovenaanzicht is diameter $= \frac{19,28...}{20} \approx 1 \text{ cm}$.

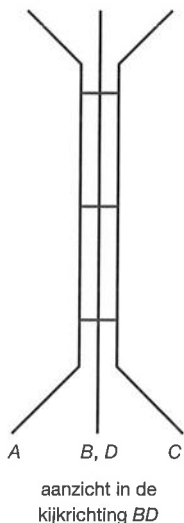
In het bovenaanzicht bevinden de houten knoppen zich $\frac{28,28...}{20} \approx 1,4 \text{ cm}$ van de rand van de cirkel.

Verder is $AC = \frac{90}{20} = 4,5 \text{ cm}$.



d De hoogte van de kapstok in dit aanzicht is $\frac{224}{40} = 5,6 \text{ cm}$.

Verder is $AC = \frac{90}{40} = 2,25 \text{ cm}$.

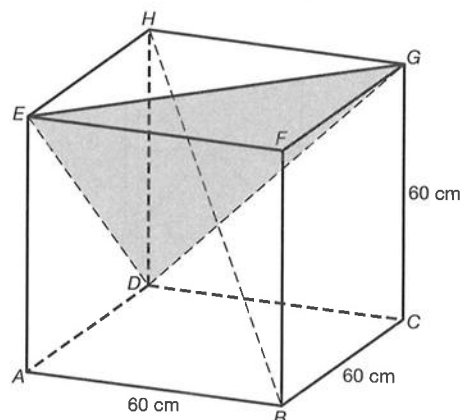
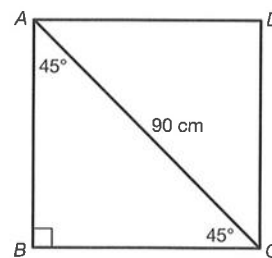


e De kapstok is 224 cm hoog.

Zie hiernaast voor een bovenaanzicht van de doos.

$\cos(45^\circ) = \frac{BC}{90}$, dus $BC = 90 \cos(45^\circ) \approx 63,6 \text{ cm}$.

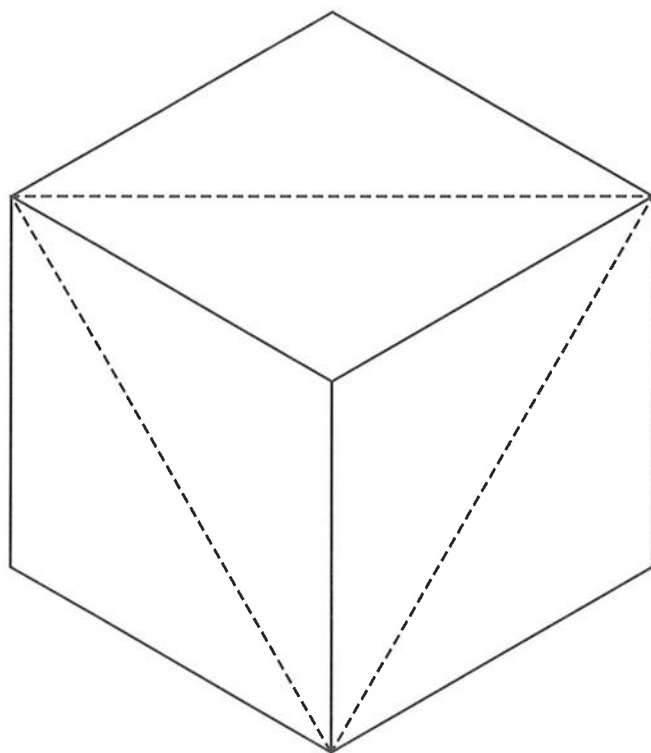
Dus de doos moet minimaal 64 cm bij 64 cm bij 224 cm zijn.



9 a Zie de schematische tekening hiernaast. De lichaamsdiagonaal BH staat in de foto verticaal.

$EG = 60\sqrt{2} \approx 85 \text{ cm}$

In het bovenaanzicht hieronder zijn de lijnstukken ED , EG en DG van de schematische tekening gestippeld getekend.



bovenaanzicht

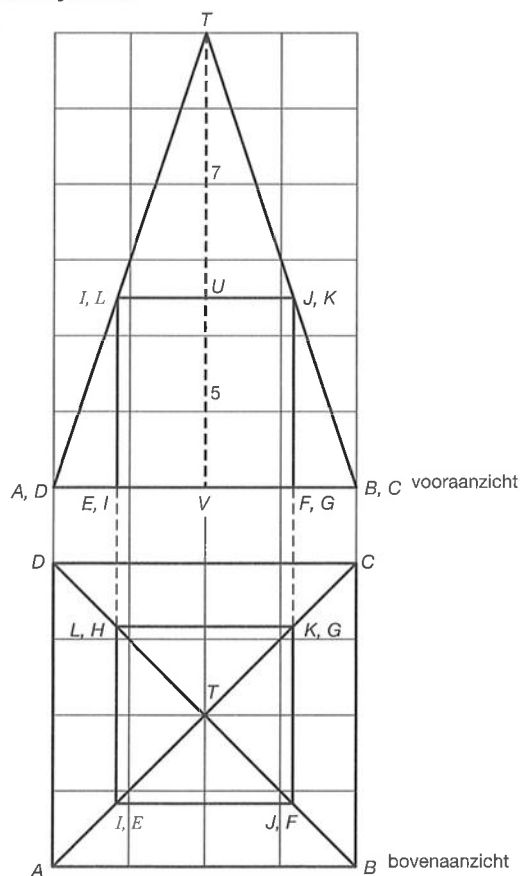
- b** De afstand van het hoogste punt van de kubus tot de sokkel is gelijk aan de lengte van de lichaamsdiagonaal BH .

$$BH = \sqrt{60^2 + 60^2 + 60^2} \approx 104 \text{ cm}$$

Dus het hoogste punt van de kubus bevindt zich $16 + 104 = 120$ cm boven de vloer.

Bladzijde 133

10 a



- b In het vooraanzicht geldt $\left. \begin{array}{l} \angle ITJ = \angle ATB \\ \angle TIJ = \angle TAB \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle IJT \sim \triangle ABT$.

Hieruit volgt $\frac{TU}{TV} = \frac{7}{12}$ ofwel $TU = \frac{7}{12} TV$.

Dus $\triangle IJT$ is een verkleining van $\triangle ABT$ met factor $\frac{7}{12}$.

$$IJ = \frac{7}{12} AB = \frac{7}{12} \cdot 8 = 4\frac{2}{3}$$

De inhoud van de balk is $(4\frac{2}{3})^2 \cdot 5 = 108\frac{8}{9}$.

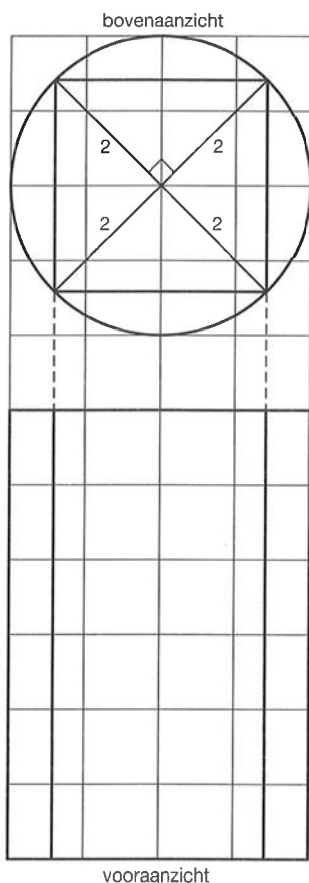
- c $I(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 12 = 256$

Dus $\frac{108\frac{8}{9}}{256} \times 100\% \approx 42,5\%$ van de piramide wordt door de balk in beslag genomen.

Bladzijde 134

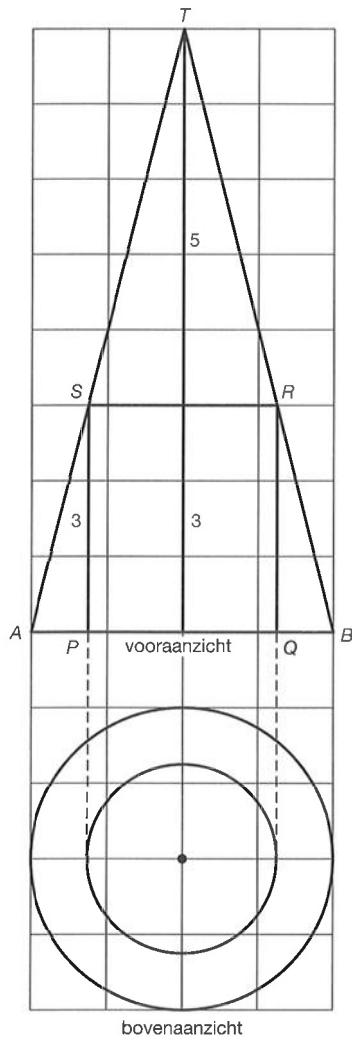
11

a



- b De diagonalen van het grondvlak van de balk zijn 4, dus de zijden zijn $2\sqrt{2}$.
 $I(\text{balk}) = (2\sqrt{2})^2 \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$

12 a



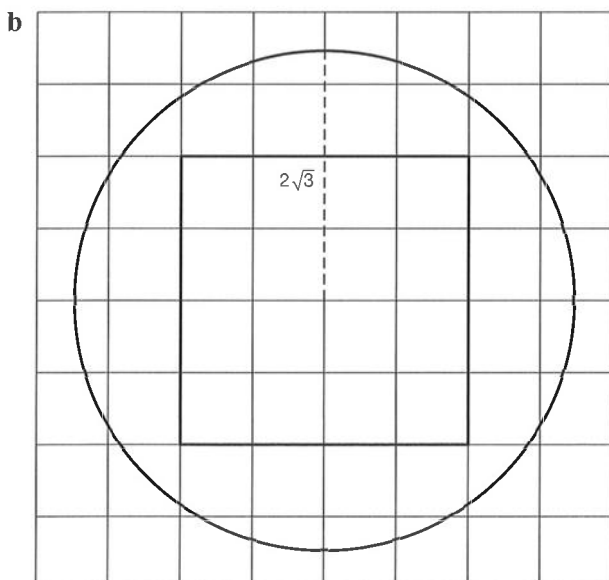
- b In het vooraanzicht geldt $\left. \begin{array}{l} \angle STR = \angle ATB \\ \angle TSR = \angle TAB \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle SRT \sim \triangle ABT$.

De hoogte van $\triangle SRT$ is 3 en de hoogte van $\triangle ABT$ is 8, dus $\triangle SRT$ is een verkleining van $\triangle ABT$ met factor $\frac{3}{8}$.
 $SR = \frac{3}{8}AB = \frac{3}{8} \cdot 4 = 1\frac{1}{2}$

Dus de straal van de grondcirkel van de cilinder is $\frac{1}{4}$.

$$I(\text{cilinder}) = \pi \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 3 = \pi \cdot \frac{25}{16} \cdot 3 = 4\frac{11}{16}\pi$$

- 13 a De diameter van de bol is de lengte van een lichaamsdiagonaal van de kubus.
 Ribbe = 4 cm, dus diameter = $4\sqrt{3}$ cm.
 Dus $r = 2\sqrt{3}$ cm.

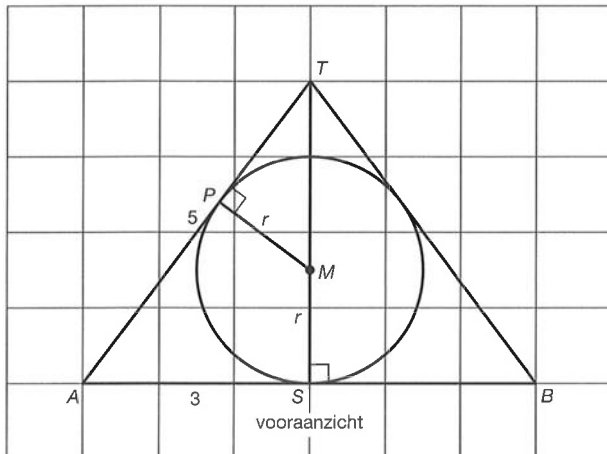


c $I(\text{kubus}) = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$

$I(\text{bol}) = \frac{4}{3}\pi \cdot (2\sqrt{3})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 24\sqrt{3} = 32\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Het gevraagde percentage is $\frac{64}{32\pi\sqrt{3}} \times 100\% \approx 36,8\%$.

- 14 a Teken eerst het vooraanzicht om de straal van de bol te bepalen.



$$AT = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle PTM = \angle STA \\ \angle P = \angle S = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle PTM \sim \triangle STA$$

Dit geeft $\frac{MP}{AS} = \frac{MT}{AT}$

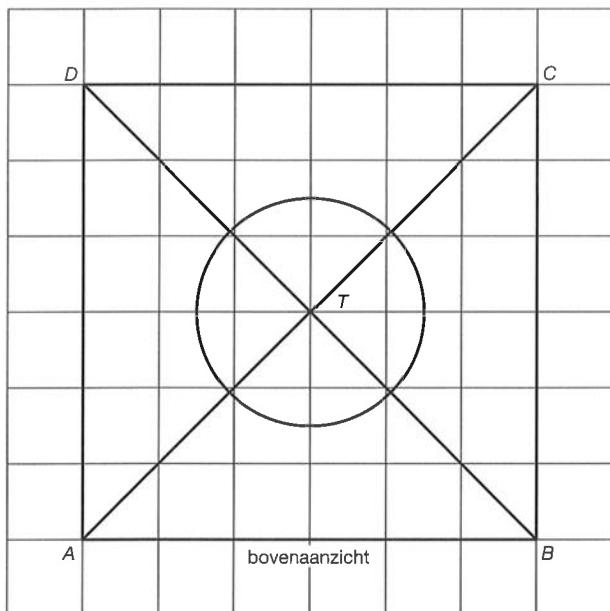
$$\frac{r}{3} = \frac{4-r}{5}$$

$$5r = 3(4-r)$$

$$5r = 12 - 3r$$

$$8r = 12$$

$$r = 1\frac{1}{2}$$



b $I(\text{bol}) = \frac{4}{3}\pi \cdot (1\frac{1}{2})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27}{8} = 4\frac{1}{2}\pi \text{ cm}^3$

$I(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^3$

$\frac{4\frac{1}{2}\pi - 48}{48} \times 100\% \approx -70,5\%$

De inhoud van de bol is 70,5% kleiner dan de inhoud van de piramide.

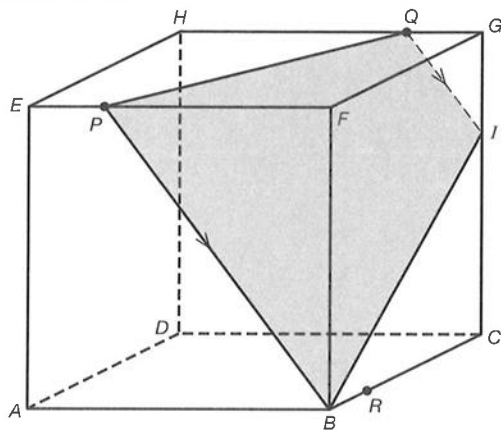
4.2 Doorsneden

Bladzijde 136

- 15 De doorsnede is een driehoek of een zeshoek.

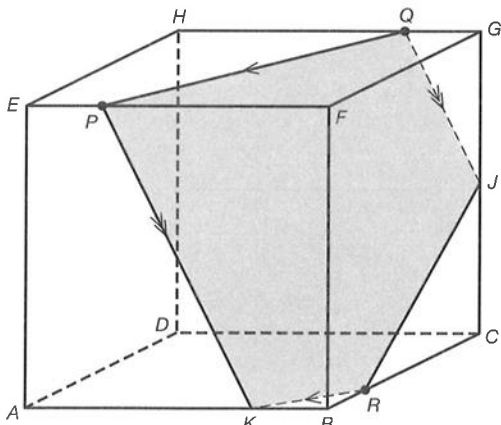
Bladzijde 138

16 a



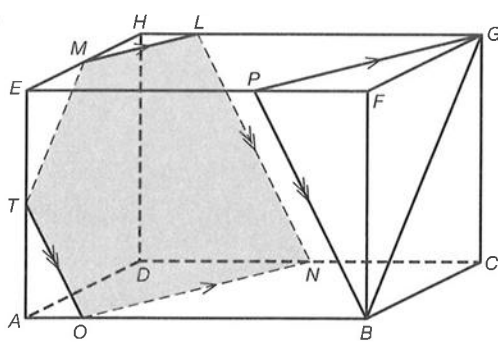
De doorsnede is vierhoek $PQIB$.

b



De doorsnede is de vijfhoek $PQJRK$.

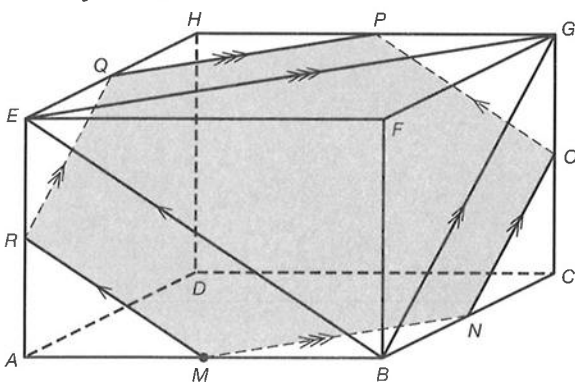
17



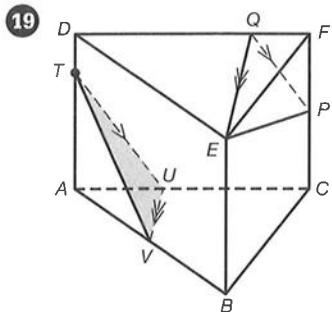
De doorsnede is de vijfhoek $MLNOT$.

Bladzijde 139

18



De doorsnede is de zeshoek $MNOPQR$.

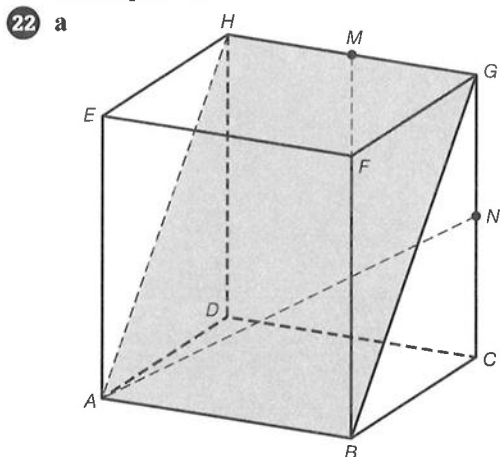


De doorsnede is de driehoek TUV .

20 Gelijkbenige driehoek, gelijkbenig trapezium en zeshoek.

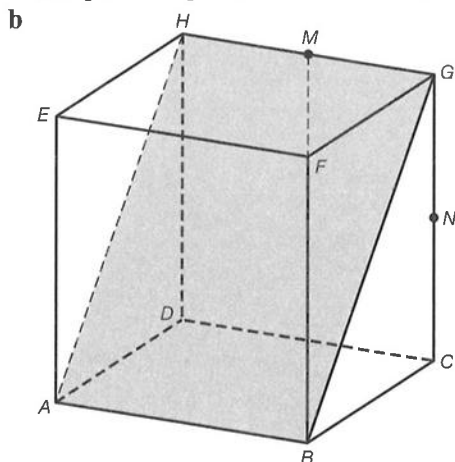
21 AE en BF snijden elkaar.
 AE en CF snijden elkaar niet.

Bladzijde 142



Het vlak ABM is het diagonaalvlak $ABGH$.

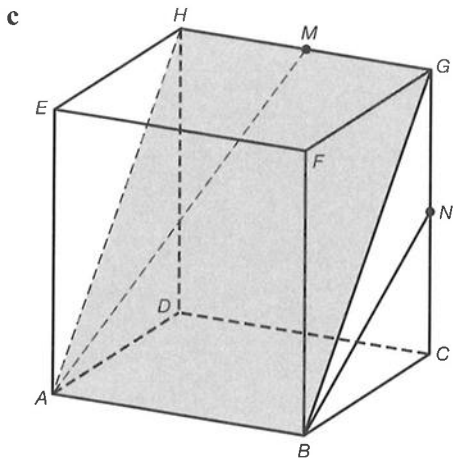
Het punt N ligt niet in vlak $ABGH$, dus AN en BM zijn kruisende lijnen.



Het vlak ABH is het diagonaalvlak $ABGH$.

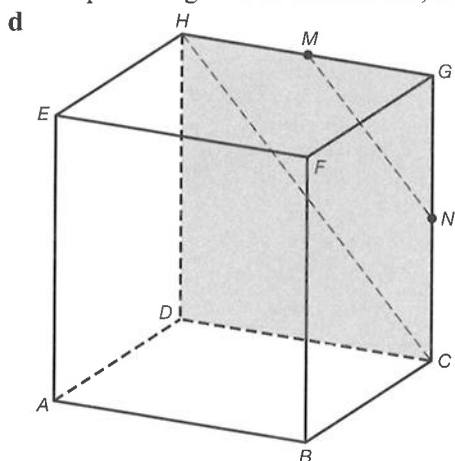
Het punt M ligt in vlak $ABGH$.

De lijnen AH en BM zijn niet evenwijdig, dus AH en BM zijn snijdende lijnen.



Het vlak ABM is het diagonaalvlak $ABGH$.

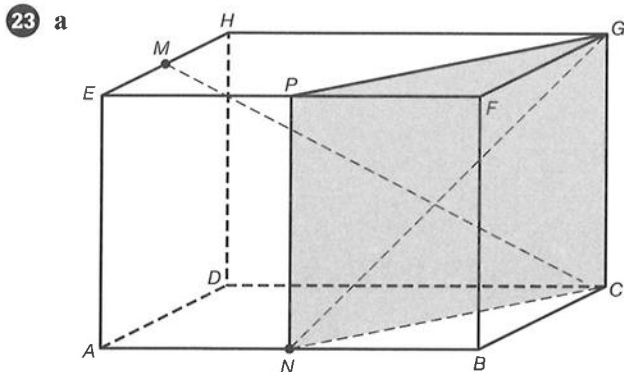
Het punt N ligt niet in vlak $ABGH$, dus zijn AM en BN kruisende lijnen.



Het vlak HCN is het zijvlak $DCGH$.

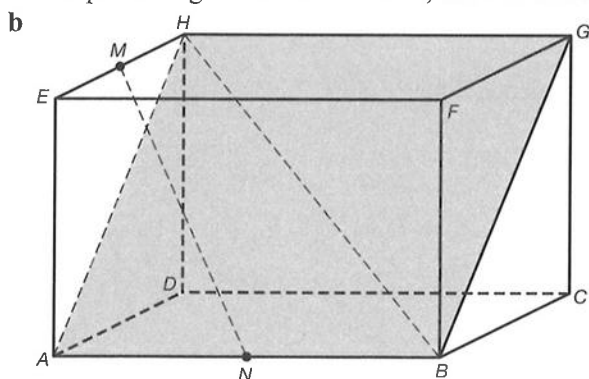
Het punt M ligt in vlak $DCGH$.

CH en MN zijn evenwijdige lijnen.



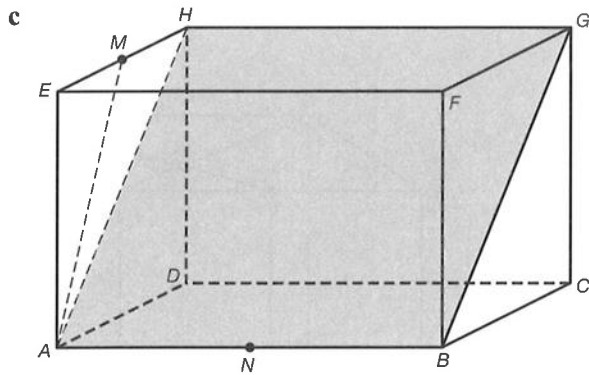
Vlak CNG is het verticale vlak $NCGP$.

Het punt M ligt niet in vlak $NCGP$, dus CM en NG zijn kruisende lijnen.



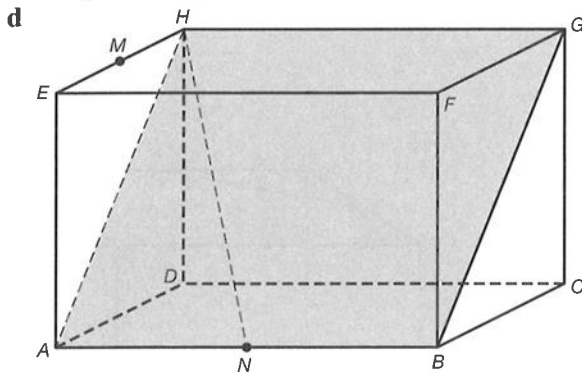
Vlak BHN is het diagonaalvlak $ABGH$.

Het punt M ligt niet in vlak $ABGH$, dus BH en MN zijn kruisende lijnen.



Vlak ABG is het diagonaalvlak $ABGH$.

Het punt M ligt niet in vlak $ABGH$, dus AM en BG zijn kruisende lijnen.



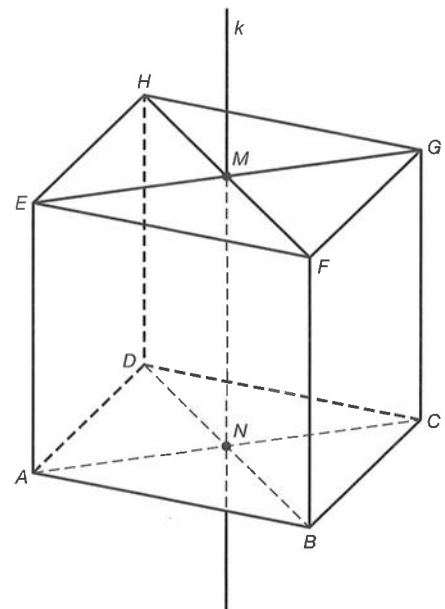
Vlak BGH is het diagonaalvlak $ABGH$.

Het punt N ligt in vlak $ABGH$.

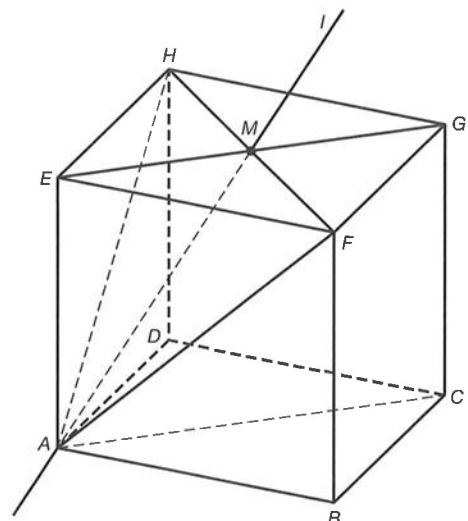
BG en HN zijn snijdende lijnen.

Bladzijde 143

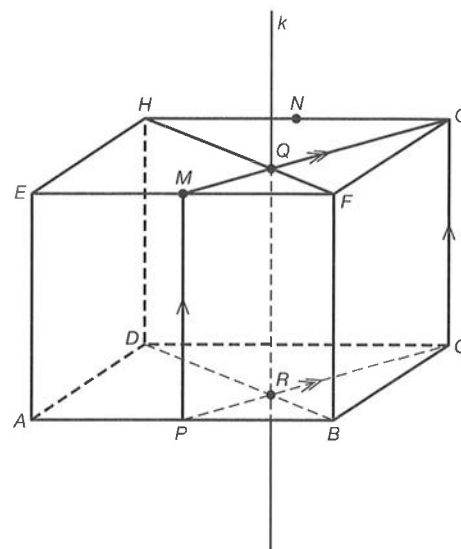
- 24 a** Vlak ACG = diagonaalvlak $ACGE$.
 Vlak BDF = diagonaalvlak $DBFH$.
 De snijlijn k van de vlakken is de lijn MN .



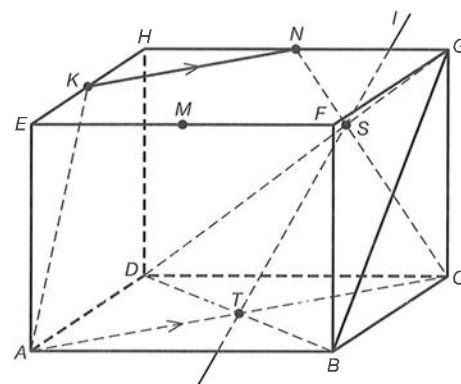
- b** Vlak ACG = diagonaalvlak $ACGE$.
 De snijlijn l van de vlakken is de lijn AM .



- 25 a Vlak $CGM =$ vlak $PCGM$.
 Vlak $BDH =$ vlak $BDHF$.
 De snijlijn k van de vlakken is de lijn QR .

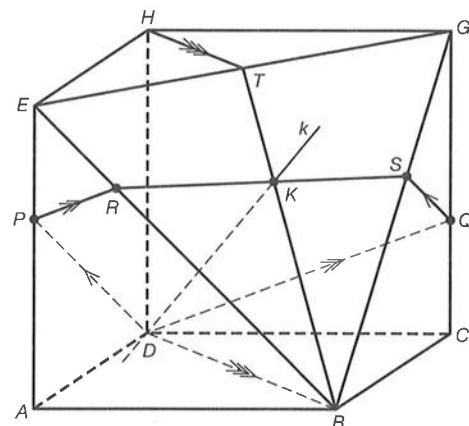


- b Vlak $ACN =$ vlak $ACNK$ met $KN \parallel AC$.
 De snijlijn l van de vlakken is de lijn ST .

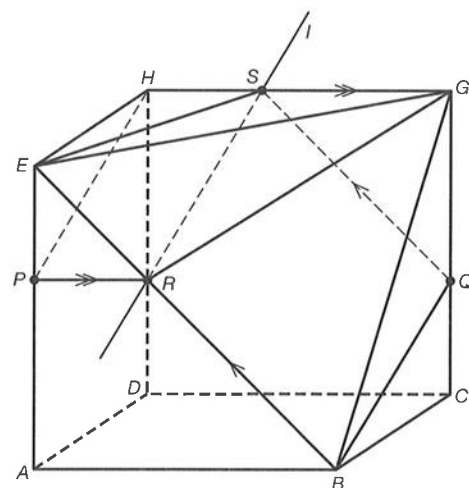


Bladzijde 144

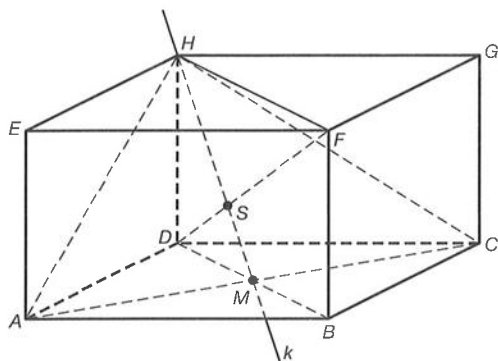
- 26 a Vlak $DPQ =$ vlak $DPRSQ$ met $QS \parallel DP$ en $PR \parallel DQ$.
 Vlak $BDH =$ vlak $BDHT$ met $HT \parallel DB$.
 De snijlijn k van de vlakken is de lijn DK .



- b Vlak $BEQ =$ vlak $BESQ$ met $QS \parallel BE$.
 Vlak $GHP =$ vlak $GHPR$ met $PR \parallel HG$.
 De snijlijn l van de vlakken is de lijn RS .



27 a



Vlak $BDH =$ diagonaalvlak $BDHF$.

De snijlijn k van de vlakken ACH en $BDHF$ is de lijn HM .

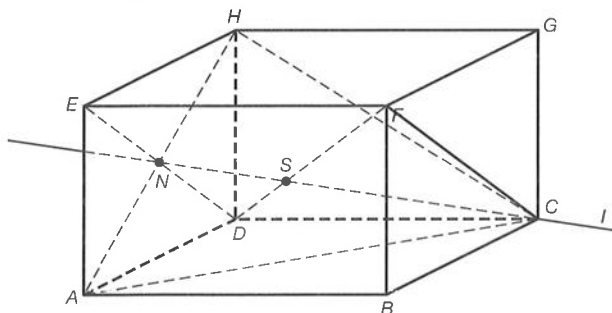
b De lijnen k en DF liggen beide in het diagonaalvlak $BDHF$.

Omdat k en DF niet evenwijdig zijn, snijden ze elkaar.

c Het punt S ligt op de lijn HM , dat op zijn beurt in vlak ACH ligt.

Omdat het punt S ook op de lijn DF ligt, is S het snijpunt van de lijn DF en het vlak ACH .

d



Vlak $CDE =$ diagonaalvlak $CDEF$.

De snijlijn l van de vlakken ACH en $CDEF$ is de lijn NC .

e S is het snijpunt van de lijnen DF en l .

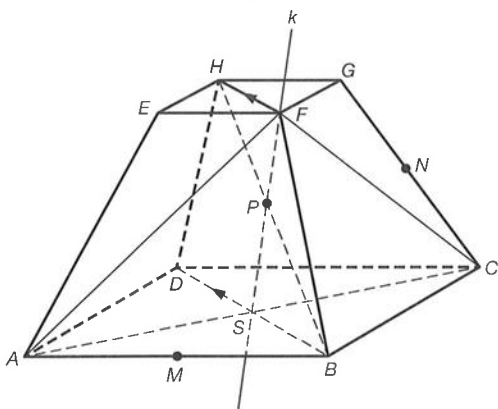
Bladzijde 145

28 a

Hulpvlak $BDHF$.

De snijlijn k van de vlakken $BDHF$ en ACF is de lijn FS .

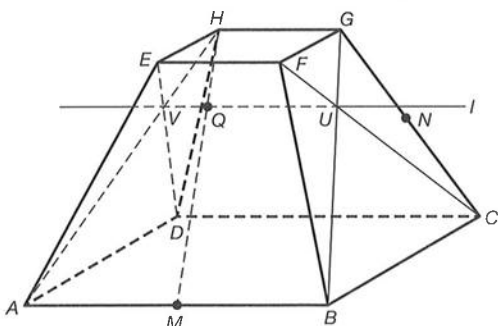
Het punt P is het snijpunt van de lijn BH met de lijn k .



b Hulpvlak $ABGH$.

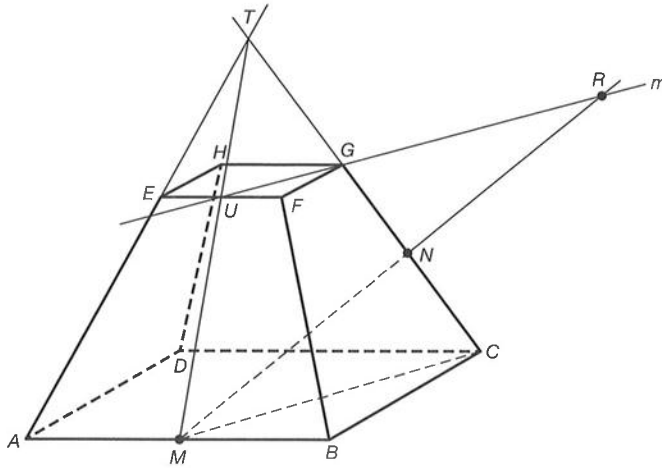
De snijlijn l van de vlakken $ABGH$ en CDE is de lijn UV .

Het punt Q is het snijpunt van de lijn HM met de lijn l .



c Hulpvlak CMT .

De snijlijn m van de vlakken CMT en EFG is de lijn UG .
Het punt R is het snijpunt van de lijn MN met de lijn m .



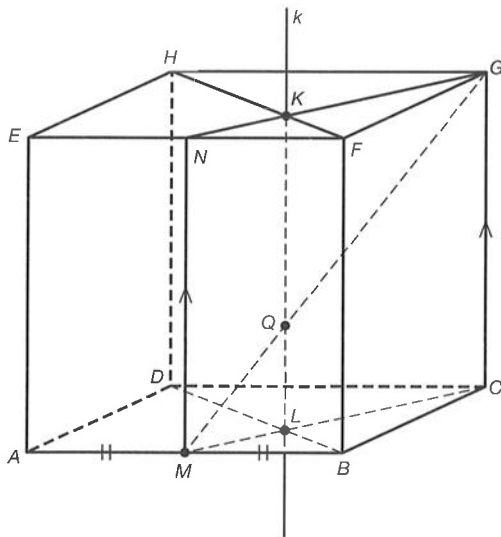
Bladzijde 146

29 a Hulpvlak $CMNG$.

Vlak DBF = diagonaalvlak $DBFH$.

De snijlijn k van de vlakken $DBFH$ en $CMNG$ is de lijn KL .

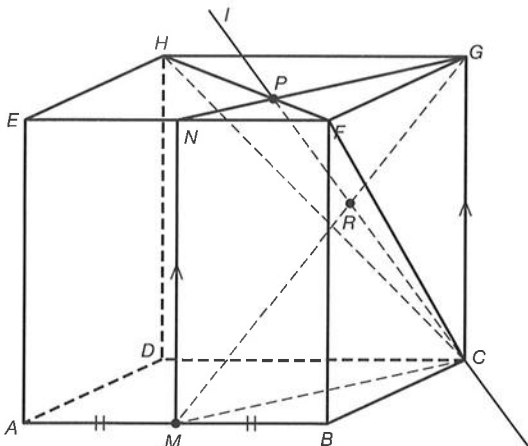
Het punt Q is het snijpunt van de lijn GM met de lijn k .



b Hulpvlak $CMNG$.

De snijlijn l van de vlakken $CMNG$ en CHF is de lijn PC .

Het punt R is het snijpunt van de lijn GM met de lijn l .

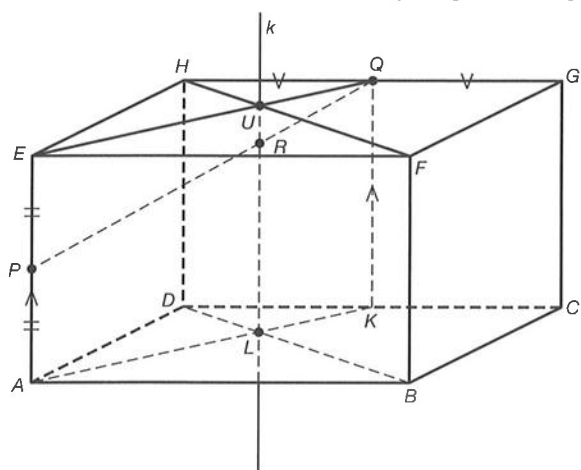


30 a Hulpvlak $AKQE$.

Vlak DBF = diagonaalvlak $DBFH$.

De snijlijn k van de vlakken $AKQE$ en $DBFH$ is de lijn UL .

Het punt R is het snijpunt van de lijn PQ met de lijn k .

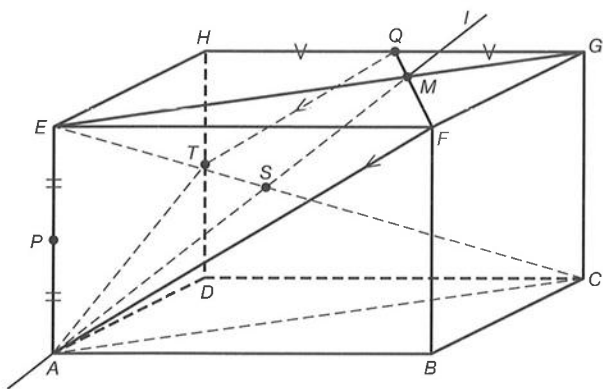


b Hulpvlak $ACGE$.

Vlak AFQ = vlak $AFQT$ met $QT \parallel AF$.

De snijlijn l van de vlakken $ACGE$ en $AFQT$ is de lijn AM .

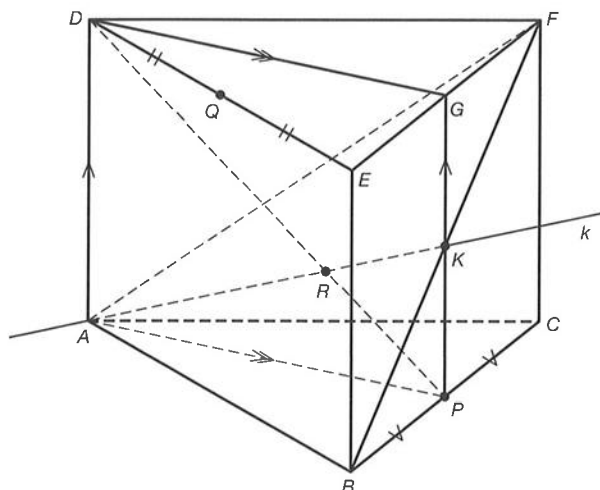
Het punt S is het snijpunt van de lijn CE met de lijn l .



31 a Verticaal hulpvlak $APGD$.

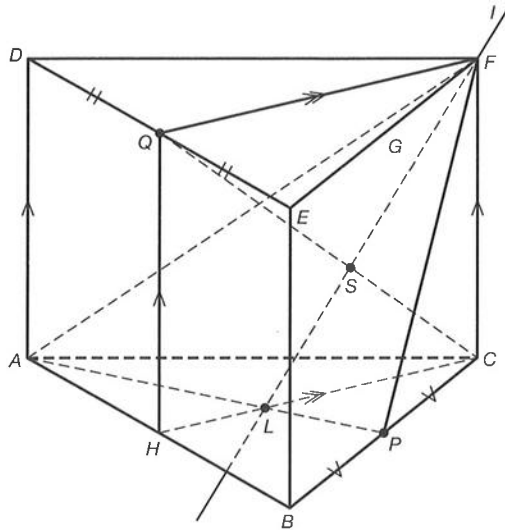
De snijlijn k van de vlakken $APGD$ en ABF is de lijn AK .

Het punt R is het snijpunt van de lijn DP met de lijn k .



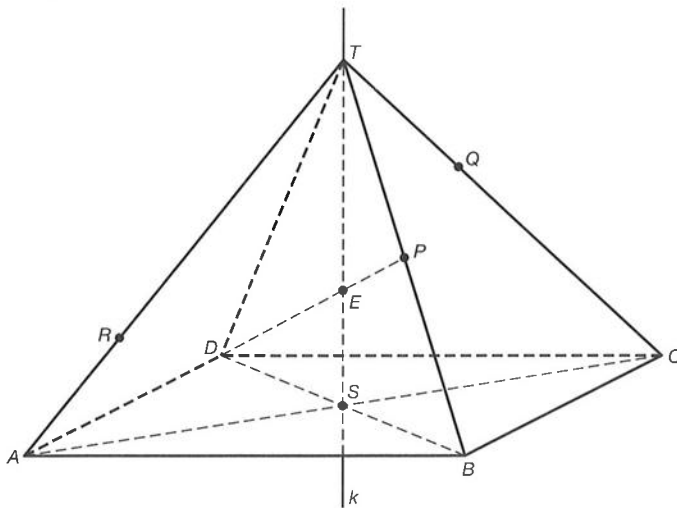
b Verticaal hulpvlak $HCFQ$.

De snijlijn l van de vlakken $HCFQ$ en APF is de lijn FL .
Het punt S is het snijpunt van de lijn CQ met de lijn l .



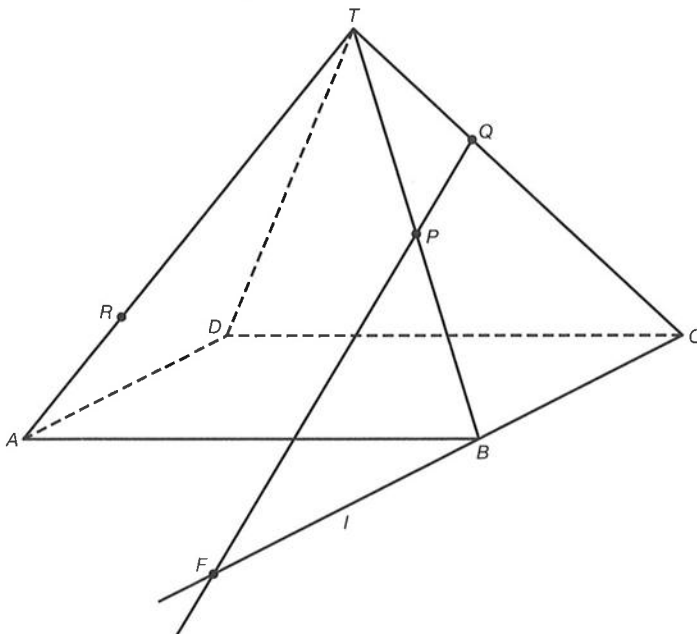
32 a Hulpvlak DBT .

De snijlijn k van de vlakken DBT en ACT is de lijn TS .
Het punt E is het snijpunt van de lijn DP met de lijn k .



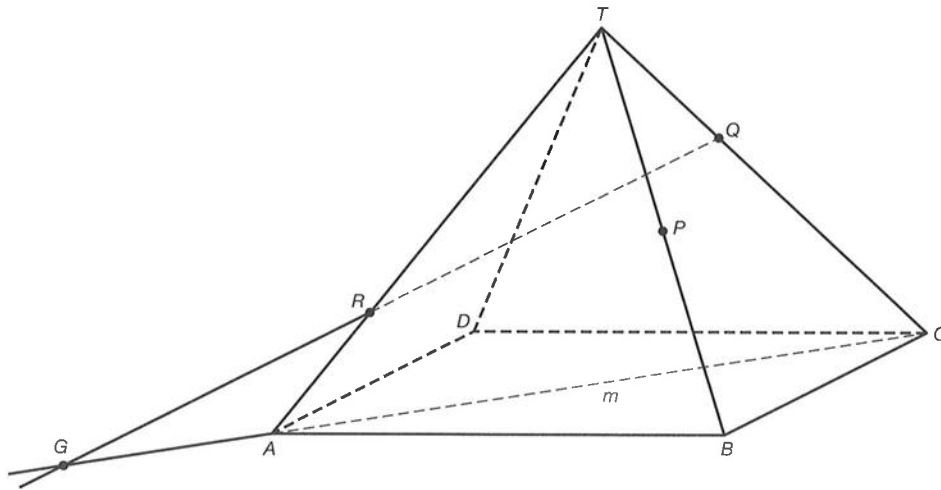
b Hulpvlak BCT .

De snijlijn l van de vlakken BCT en $ABCD$ is de lijn BC .
Het punt F is het snijpunt van de lijn PQ met de lijn l .



c Hulpvlak ACT .

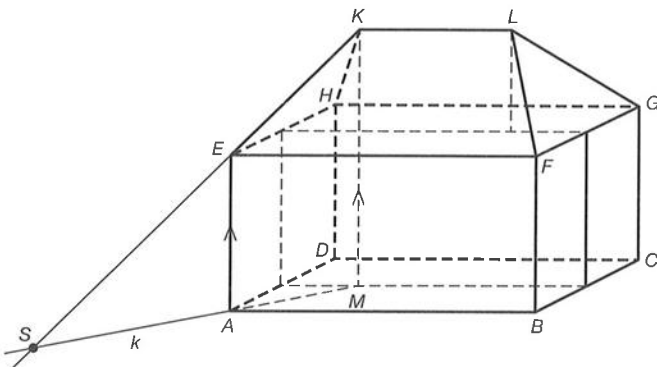
De snijlijn m van de vlakken ACT en $ABCD$ is de lijn AC .
Het punt G is het snijpunt van de lijn QR met de lijn m .



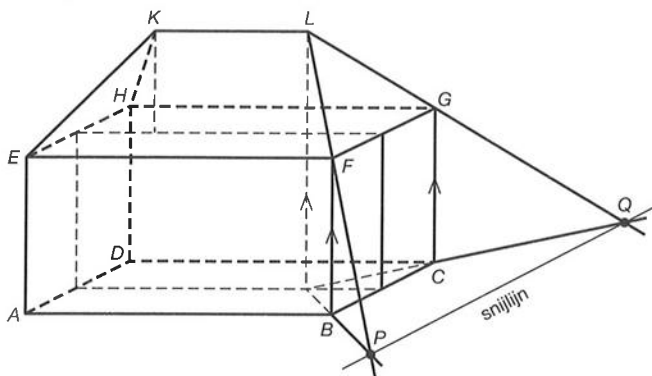
Bladzijde 147

33 a Verticaal hulpvlak $AMKE$.

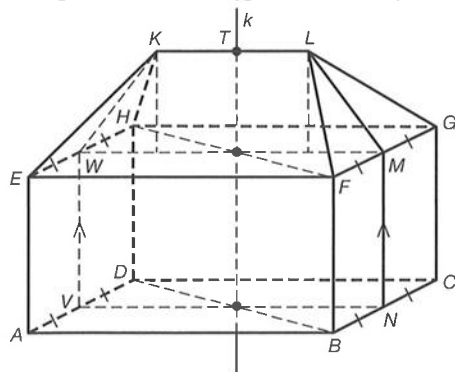
De snijlijn k van de vlakken $AMKE$ en $ABCD$ is de lijn AM .
Het punt S is het snijpunt van de lijn KE met de lijn k .



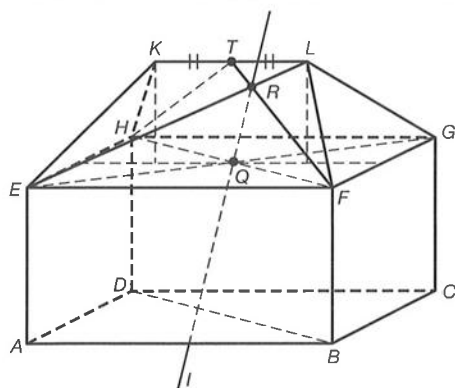
b Het punt P is het snijpunt van de lijn LF en het vlak $ABCD$.
Het punt Q is het snijpunt van de lijn LG en het vlak $ABCD$.
De lijn PQ is de snijlijn van de vlakken FGL en $ABCD$.



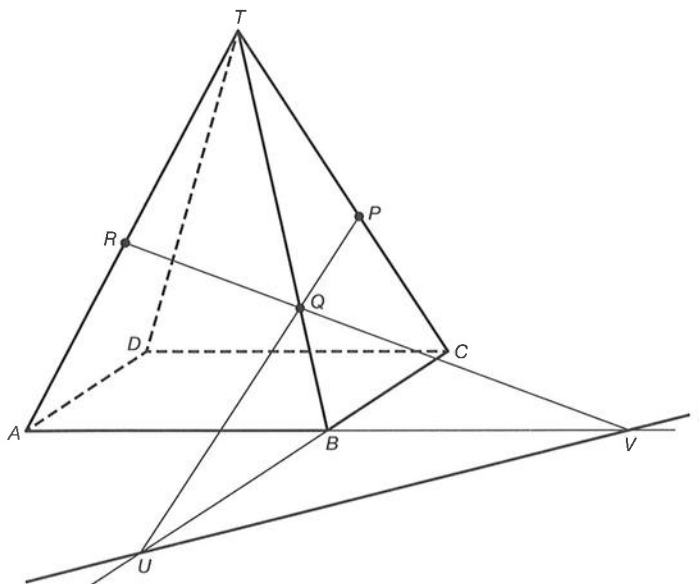
- c KL ligt in het verticale hulpvlak $KLMNVW$.
 Vlak $DBH =$ vlak $DBFH$.
 De lijn k is de snijlijn van de vlakken $KLMNVW$ en $DBFH$.
 Het punt T is het snijpunt van de lijn KL met de lijn k .



- d Vlak $BDH =$ vlak $BDHTF$.
 De lijn EL snijdt het vlak $BDHTF$ in het punt R .
 De lijn EG snijdt het vlak $BDHTF$ in het punt Q .
 De lijn QR is de snijlijn van de vlakken $BDHTF$ en EGL .

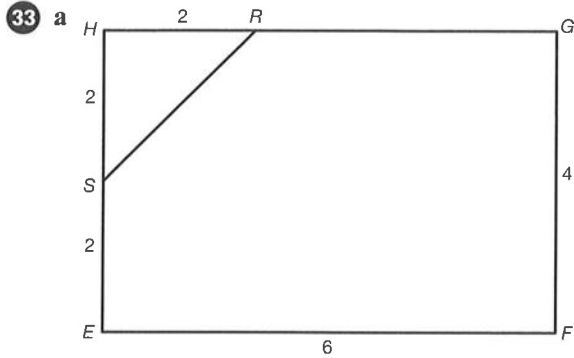


- 34 Het punt U is het snijpunt van de lijn BC met de lijn l .
 Het punt V is het snijpunt van de lijn AB met de lijn l .
 Het punt Q is het snijpunt van de lijn PU met de lijn BT .
 Het punt R is het snijpunt van de lijn QV met de lijn AT .



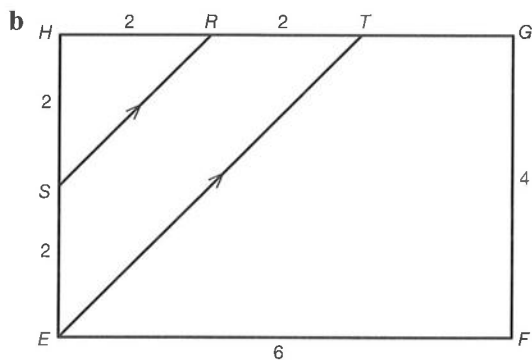
4.3 Doorsneden en oppervlakte

Bladzijde 149



In $\triangle HRS$ is $RS = 2\sqrt{2}$.

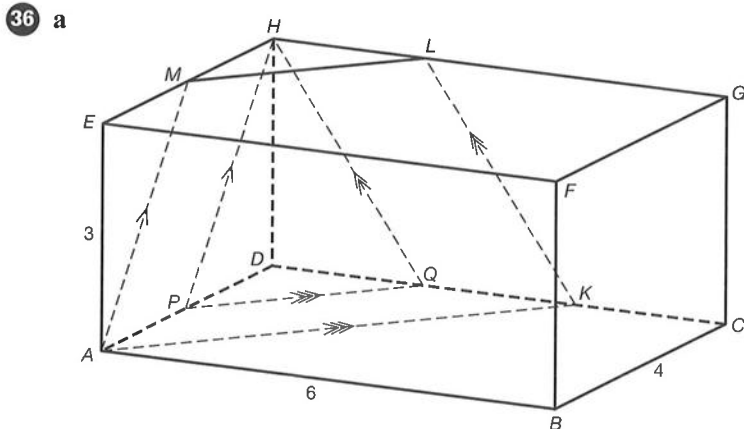
De doorsnede is een rechthoek met oppervlakte $3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.



In $\triangle EHT$ is $ET = 4\sqrt{2}$.

De doorsnede is een rechthoek met zijden $AE = 3$ en $ET = 4\sqrt{2}$.

De oppervlakte van de doorsnede is $3 \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.



b $\left. \begin{array}{l} AM = PH \text{ en } KL = QH \\ PH = QH \\ ML \parallel AK \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} AM = KL \end{array} \right\} AKLM \text{ is een gelijkbenig trapezium}$

$$KL = AM = PH = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

In $\triangle HLM$ is $LM = 2\sqrt{2}$.

In $\triangle ADK$ is $AK = 4\sqrt{2}$.

c De hoogte van $AKLM$ is gelijk aan de hoogte van $\triangle PQH$.
Deze hoogte is $\sqrt{11}$.

$$O(AKLM) = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{11} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = 3\sqrt{22}$$

Bladzijde 150

37 a In $\triangle ADH$ is $AH = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

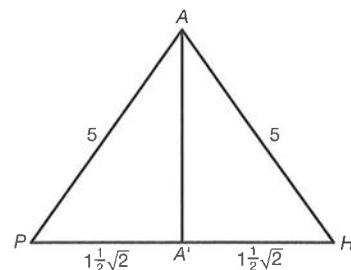
In $\triangle ADP$ is $AP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$AH = AP = 5$, dus $\triangle APH$ is gelijkbenig.

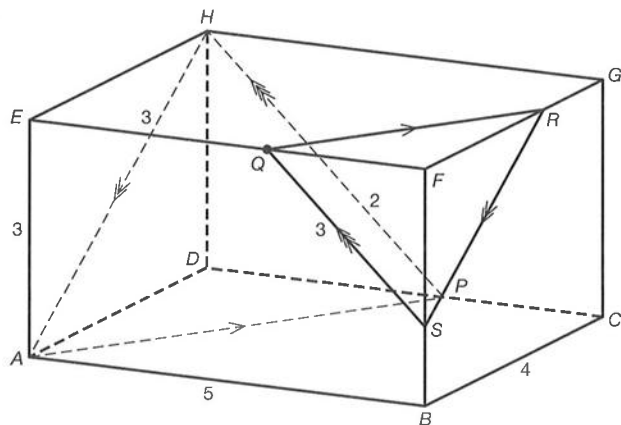
In $\triangle DHP$ is $PH = 3\sqrt{2}$.

In $\triangle APH$ is de hoogte $AA' = \sqrt{5^2 - (1\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{20\frac{1}{2}}$.

$O(\triangle APH) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{20\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{41}$



b



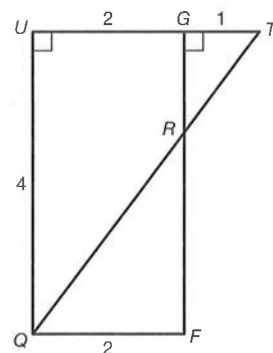
c Zie hiernaast.

$UT = DP = 3$, dus $GT = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle T = \angle T \\ \angle G = \angle U = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle TGR \sim \triangle TUQ$$

$GT = \frac{1}{3}UT$, dus $GR = \frac{1}{3}UQ = \frac{1}{3} \cdot 4 = 1\frac{1}{3}$.

Dus $FR = 4 - 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$.

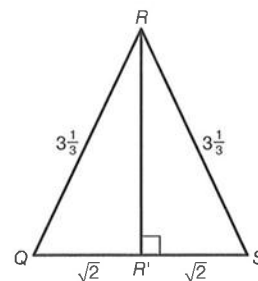


$FS = 2$ en $QS = 2\sqrt{2}$.

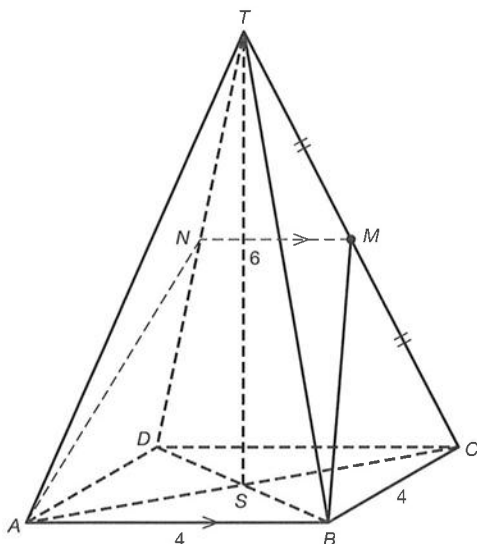
$QR = SR = \sqrt{2^2 + (2\frac{2}{3})^2} = \sqrt{11\frac{1}{9}} = 3\frac{1}{3}$

In $\triangle QRS$ is de hoogte $RR' = \sqrt{(3\frac{1}{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{9\frac{1}{9}}$.

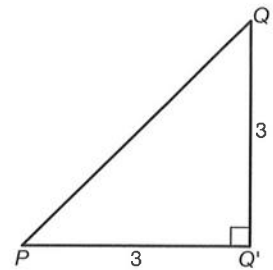
$O(\triangle QRS) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{9\frac{1}{9}} = \sqrt{18\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{41}$



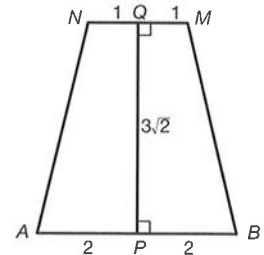
38 a



- b** $TABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide, M is het midden van CT en $MN \parallel AB$, dus N is het midden van DT , dus $AN = BM$, dus $ABMN$ is een gelijkbenig trapezium met $MN = \frac{1}{2}AB = 2$.
 De doorsnede door TS en het midden P van AB snijdt MN in Q .
 Q' is de loodrechte projectie van Q op $ABCD$.
 Er geldt $PQ' = 3$ en $QQ' = 3$.
 Dus $PQ = 3\sqrt{2}$.
 Dus de hoogte van $ABMN$ is $PQ = 3\sqrt{2}$.



c $O(ABMN) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 2) \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

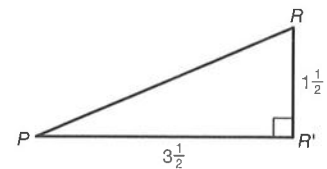


- d** De doorsnede door A , B en E met de piramide is het gelijkbenig trapezium $ABEF$ met $AB \parallel EF$, F op DT en $EF = 3$.
 De doorsnede door TS en het midden P van AB snijdt EF in R .
 R' is de loodrechte projectie van R op $ABCD$.
 Er geldt $PR' = 3\frac{1}{2}$ en $RR' = 1\frac{1}{2}$.

$$PR = \sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{14\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{58}$$

Dus de hoogte van $ABEF$ is $\frac{1}{2}\sqrt{58}$.

$$O(ABEF) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 3) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{58} = 1\frac{3}{4}\sqrt{58}$$



39 a $I(TABCD) = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 16 = 3072 \text{ m}^3$

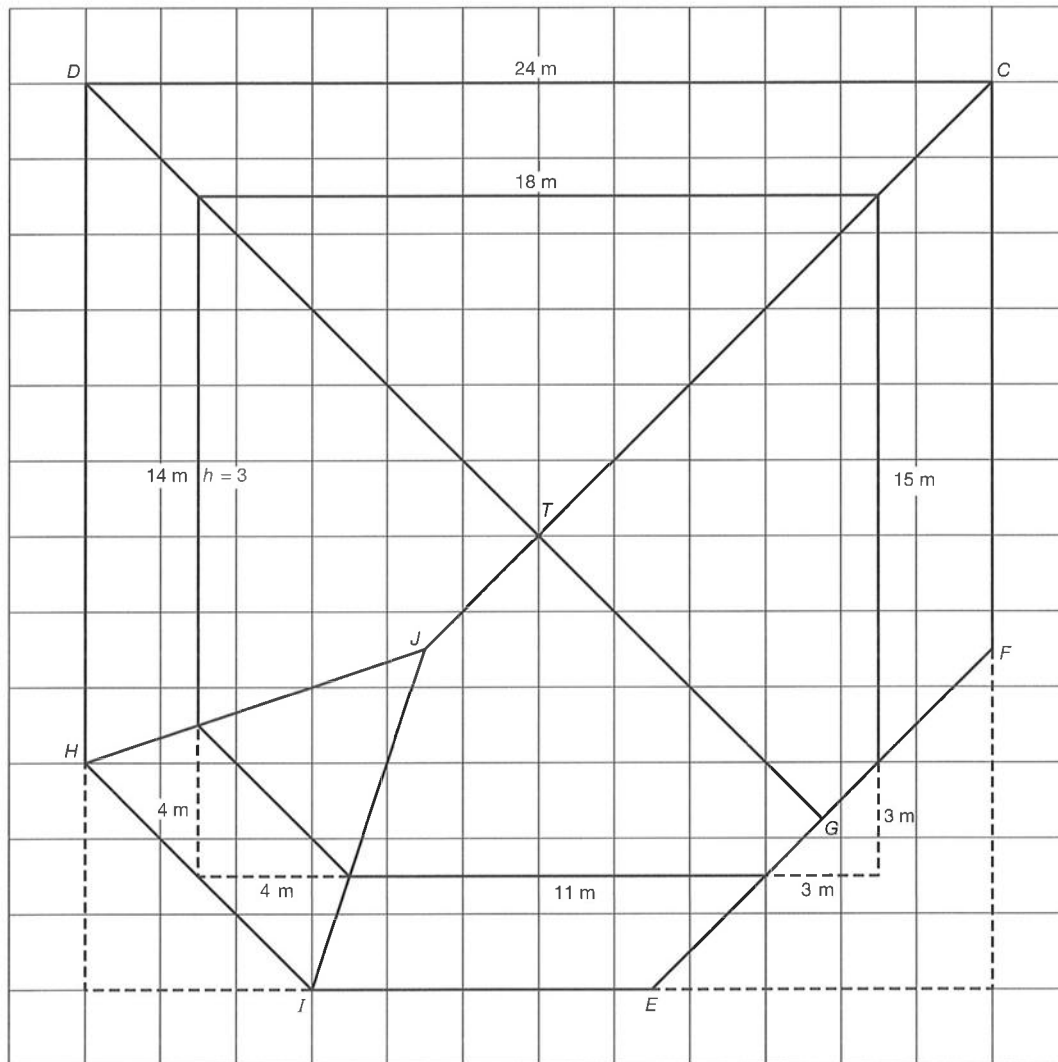
$$I(GBEF) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9^2 \cdot 6 = 81 \text{ m}^3$$

$$I(JAHI) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot 12 = 72 \text{ m}^3$$

$$\text{Dus } I(\text{kantoorgebouw}) = 3072 - 81 - 72 = 2919 \text{ m}^3.$$

- b Punt J ligt $\frac{12}{16} \cdot 12 = 9$ m rechts van A en ook 9 m boven A .

In het bovenaanzicht is dat $\frac{900}{200} = 4,5$ cm.



- c Zie de figuur bij b.

$$O(\text{vloer}) = 18^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 311,5 \text{ m}^2$$

Bladzijde 151

- 40 a In $\triangle APH$ is $\angle P = 90^\circ$ en $AP = HP$.

Stel $AH = x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle APH$ geeft

$$AP^2 + HP^2 = AH^2$$

$$AP^2 + AP^2 = x^2$$

$$2AP^2 = x^2$$

$$AP^2 = \frac{1}{2}x^2$$

$$AP = \sqrt{\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x = \frac{1}{2}x\sqrt{2}$$

$$AP = BQ = \frac{1}{2}x\sqrt{2} \text{ en } AB = x \text{ geeft } \frac{1}{2}x\sqrt{2} + x + \frac{1}{2}x\sqrt{2} = 250$$

$$x\sqrt{2} + x = 250$$

$$x(\sqrt{2} + 1) = 250$$

$$x = \frac{250}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{250(\sqrt{2} - 1)}{1} = 250\sqrt{2} - 250$$

$$\text{Dus } AP = \frac{1}{2} \cdot (250\sqrt{2} - 250) \cdot \sqrt{2} = 250 - 125\sqrt{2}.$$

$$O(ABCDEFGH) = O(PQRS) - 4 \cdot O(\triangle AHP) = 250^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (250 - 125\sqrt{2})^2 \approx 51\,777 \text{ cm}^2, \\ \text{dus } 518 \text{ dm}^2.$$

- b** Punt U is het punt 210 cm recht boven punt E .

We berekenen de afstand van A tot U .

$$AU = \sqrt{AB^2 + BE^2 + EU^2} = \sqrt{(250\sqrt{2} - 250)^2 + 250^2 + 210^2} \approx 343 \text{ cm}$$

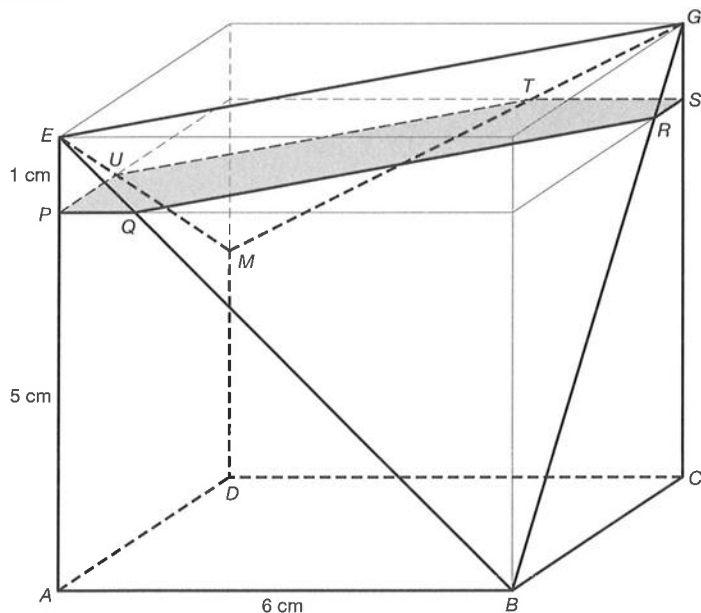
Dus een vlaggenmast met een lengte van 335 cm past in het prieel.

- 41 a** Alleen zijde AP zie je op ware grootte.

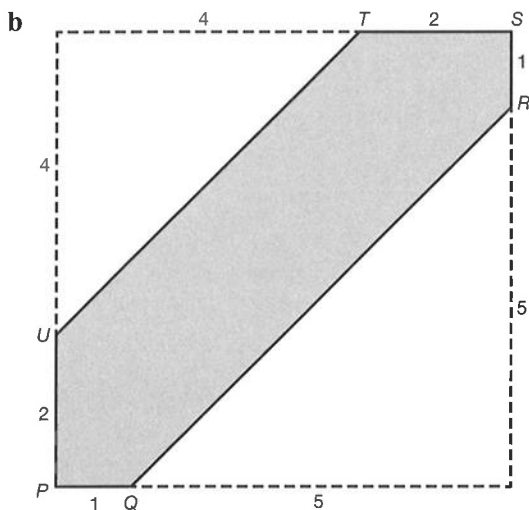
- b** AP en CP zijn even lang.

Bladzijde 153

- 42 a**

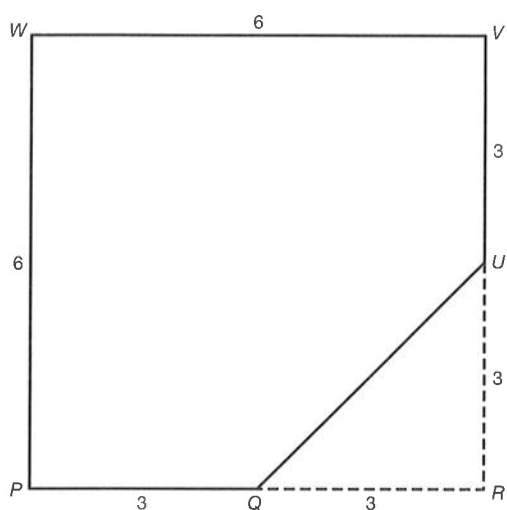
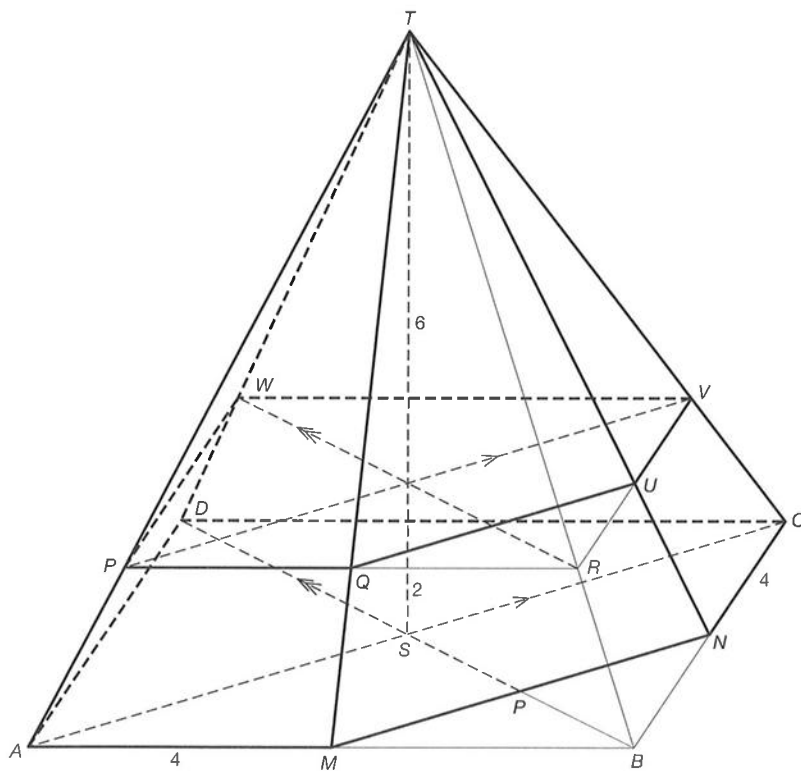


De doorsnede is de zeshoek $PQRSTU$.



c $O(PQRSTU) = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 36 - 12\frac{1}{2} - 8 = 15\frac{1}{2} \text{ cm}^2$

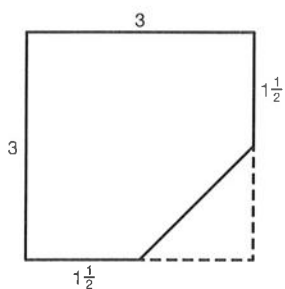
43 a



De doorsnede is $PQUVW$.

$$O(\text{doorsnede}) = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 36 - 4\frac{1}{2} = 31\frac{1}{2} \text{ cm}^2$$

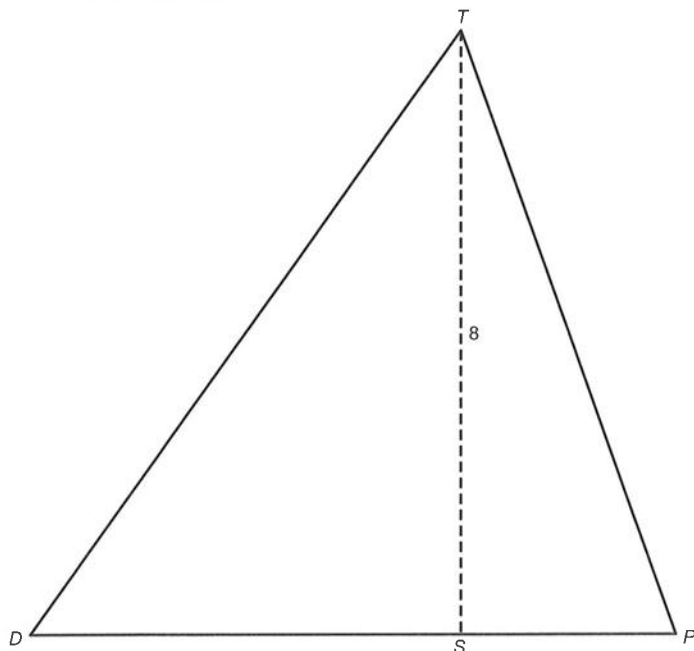
b



$$O(\text{doorsnede}) = 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = 9 - 1\frac{1}{8} = 7\frac{7}{8} \text{ cm}^2$$

c $DS = 4\sqrt{2} \approx 5,7$ cm

$SP = 2\sqrt{2} \approx 2,8$ cm

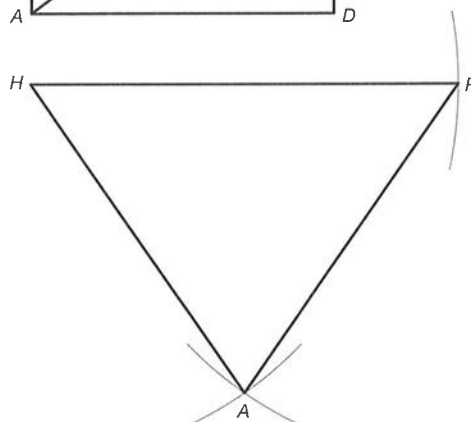
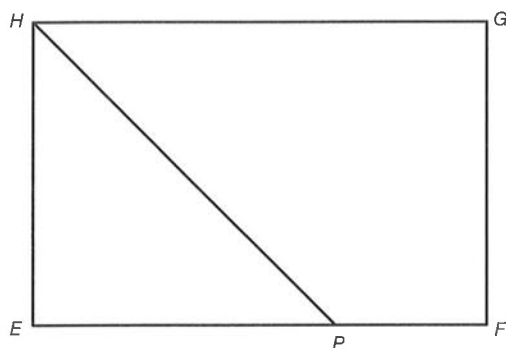
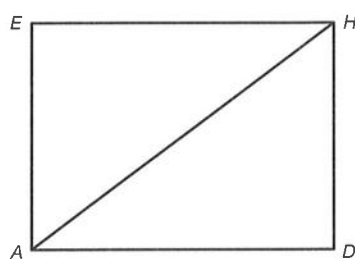
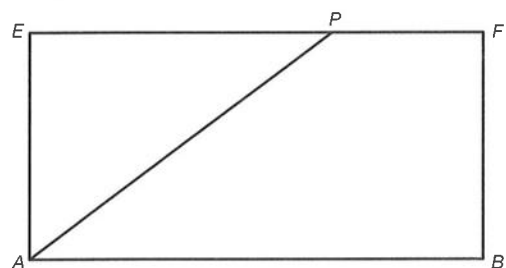


$$O(\triangle DPT) = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot 8 \approx 33,94 \text{ cm}^2$$

Bladzijde 154

44

a



b In $\triangle EHP$ is $HP = 4\sqrt{2}$ cm.

In $\triangle AEP$ is $AP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

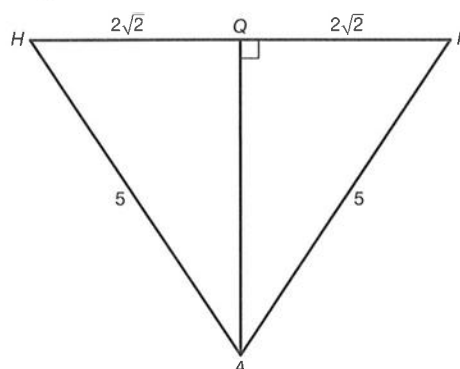
In $\triangle AEH$ is $AH = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

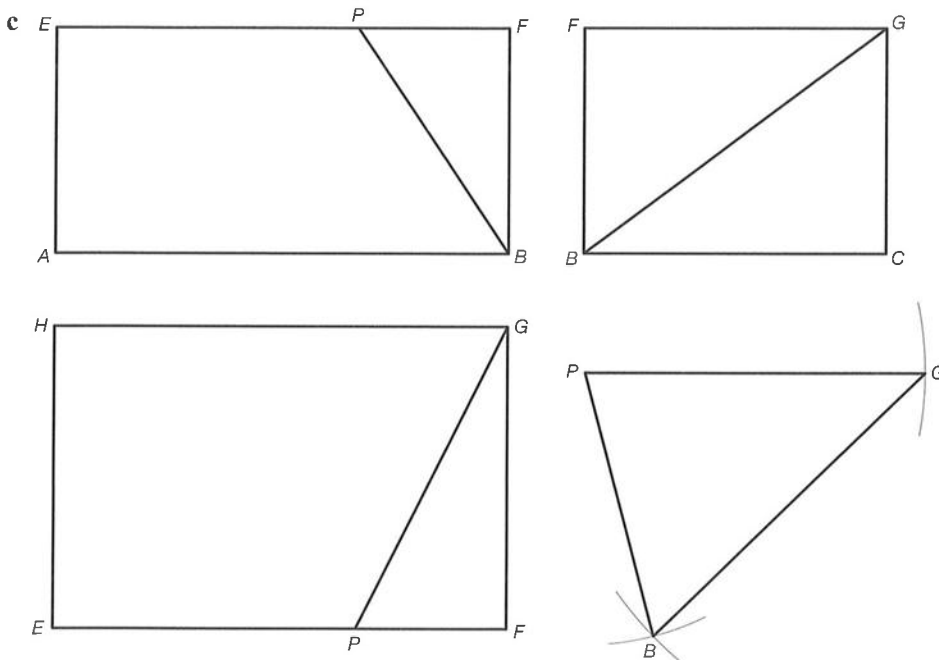
Dus $\triangle AHP$ is gelijkbenig.

Teken hulplijn AQ loodrecht op HP .

In $\triangle AHQ$ is $AQ = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$ cm.

$O(\triangle AHP) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = 2\sqrt{34} \text{ cm}^2$





45 a Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle HEI = \angle DEG \\ \angle I = \angle G = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle HIE \sim \triangle DGE$$

$$\frac{HI}{DG} \mid \frac{IE}{GE} \text{ geeft } \frac{HI}{4} \mid \frac{3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} \text{ en hieruit volgt } HI = \frac{4 \cdot 3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{9}.$$

$$\text{Dus } HJ = 2 \cdot 3\frac{1}{9} = 6\frac{2}{9}.$$

Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle ETP = \angle ATS \\ \angle P = \angle S = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle EPT \sim \triangle AST$$

$$AS = 6 \text{ en } EP = 3, \text{ dus } AS = 2EP.$$

$$\text{Hieruit volgt dat ook moet gelden } ST = 2PT \text{ en dit geeft } PT = 4\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle KTQ = \angle ATS \\ \angle Q = \angle S = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle KQT \sim \triangle AST$$

$$\frac{KQ}{AS} \mid \frac{QT}{ST} \text{ geeft } \frac{KQ}{6} \mid \frac{8}{9} \text{ en hieruit volgt } KQ = \frac{6 \cdot 8}{9} = 5\frac{1}{3}.$$

$$\text{Dus } KL = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

De totale oppervlakte van de kastwanden is

$$2 \cdot 6\frac{2}{9} \cdot 1 + 2 \cdot 10\frac{2}{3} \cdot 1 \approx 33,78 \text{ m}^2.$$

b Het dak is ontstaan door uit een prisma met driehoekig grondvlak en hoogte 12 m twee piramides met driehoekig grondvlak en hoogte 3 m weg te halen.

$$I(ABCDEF) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 12 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 3 = 216 - 36 = 180 \text{ m}^3$$

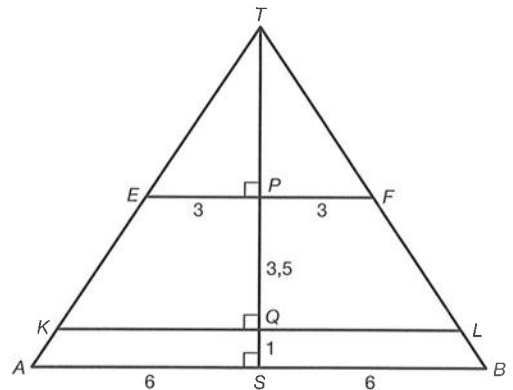
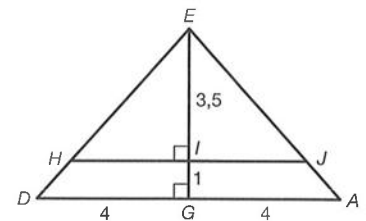
De inhoud van de ruimte boven een hoogte van 1 meter wordt op soortgelijke manier berekend.

De hoogte van het betreffende prisma is $10\frac{2}{3}$ m, het driehoekige grondvlak van het prisma en van beide piramides heeft zijde $6\frac{2}{9}$ m en bijbehorende hoogte $3\frac{1}{2}$ m, en de hoogte van beide piramides is $\frac{10\frac{2}{3} - 6}{2} = 2\frac{1}{3}$ m.

$$\text{Zo krijg je inhoud} = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{9} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 10\frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{9} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} = 99,2098... \text{ m}^3.$$

$$\text{De inhoud van de zolder tussen de kastruimte tot een hoogte van 1 meter is } 6\frac{2}{9} \cdot 10\frac{2}{3} \cdot 1 = 66,3703... \text{ m}^3.$$

$$\text{Dus de totale inhoud van de ontstane kastruimte is } 180 - 99,2098... - 66,3703... \approx 14,420 \text{ m}^3.$$



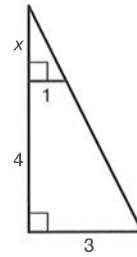
4.4 Doorsneden en inhoud

Bladzijde 156

- 46 a Zie hiernaast.

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken volgt

$$\begin{aligned}\frac{x}{1} &= \frac{x+4}{3} \\ 3x &= x+4 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2\end{aligned}$$



$$I(\text{afgeknotte kegel}) = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 18\pi - \frac{2}{3}\pi = 17\frac{1}{3}\pi$$

b $I(\text{cilinder}) = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$

c $I(\text{totaal}) = \pi \cdot (2\frac{3}{4})^2 \cdot 1 + \pi \cdot (2\frac{1}{4})^2 \cdot 1 + \pi \cdot (1\frac{3}{4})^2 \cdot 1 + \pi \cdot (1\frac{1}{4})^2 \cdot 1 =$

$$7\frac{9}{16}\pi + 5\frac{1}{16}\pi + 3\frac{1}{16}\pi + 1\frac{9}{16}\pi = 17\frac{1}{4}\pi$$

d $\frac{17\frac{1}{3}\pi - 17\frac{1}{4}\pi}{17\frac{1}{3}\pi} \times 100\% \approx 0,5\%$

Bladzijde 157

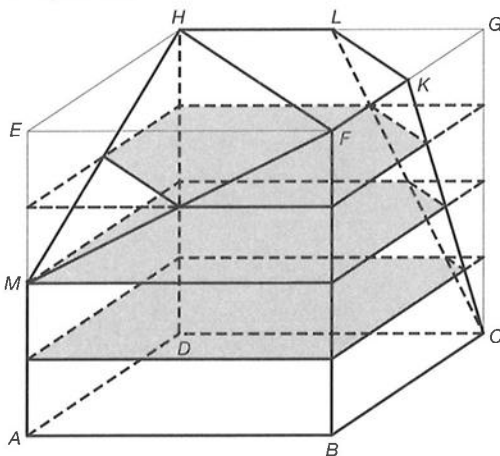
- 47 Stapeling van 4 cilinders, elk met hoogte 4 cm.
Opmeten geeft diameters 3, 2, 2,5 en 3,5 cm.
Dus de stralen (schaal 1 : 2) zijn 3, 2, 2,5 en 3,5 cm.
inhoud vaas = $\pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \pi \cdot 2,5^2 \cdot 4 + \pi \cdot 3,5^2 \cdot 4 \approx 396 \text{ cm}^3$

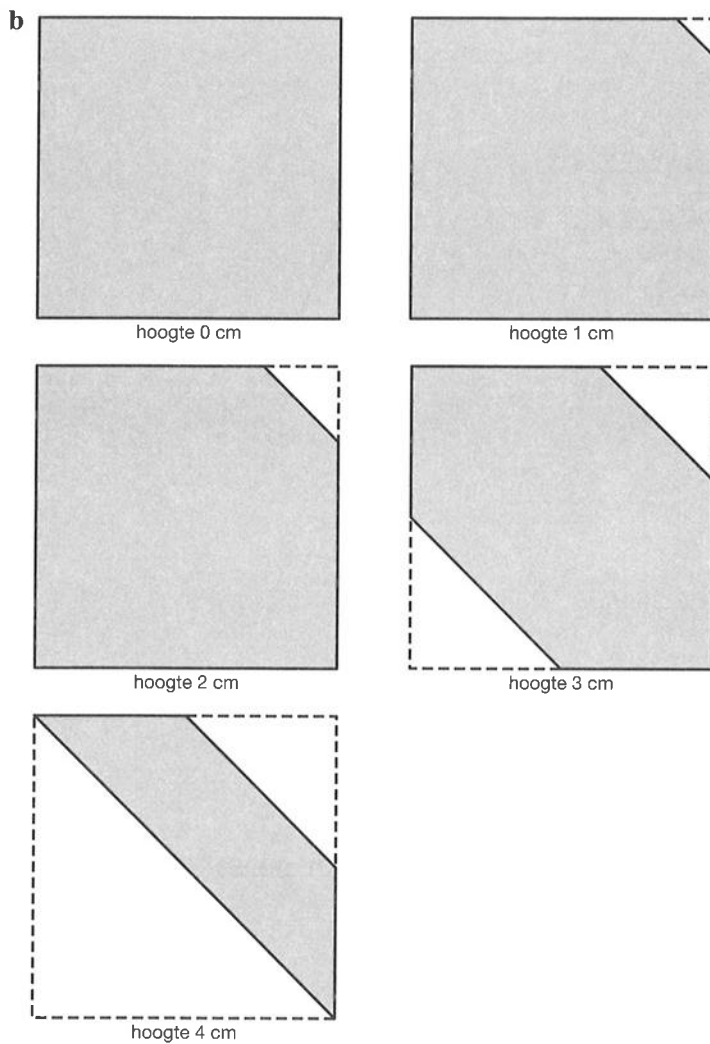
Bladzijde 158

- 48 inhoud koffiefilter
 $\approx (2 \cdot 5,2 + \pi \cdot 1^2) \cdot 2 + (4,8 \cdot 3,6 + \pi \cdot 2,4^2) \cdot 2 + (6,8 \cdot 2,8 + \pi \cdot 3,4^2) \cdot 2 + (10 \cdot 1,6 + \pi \cdot 5^2) \cdot 2 + \pi \cdot 6,4^2 \cdot 2$
 $\approx 655 \text{ cm}^3$

Bladzijde 159

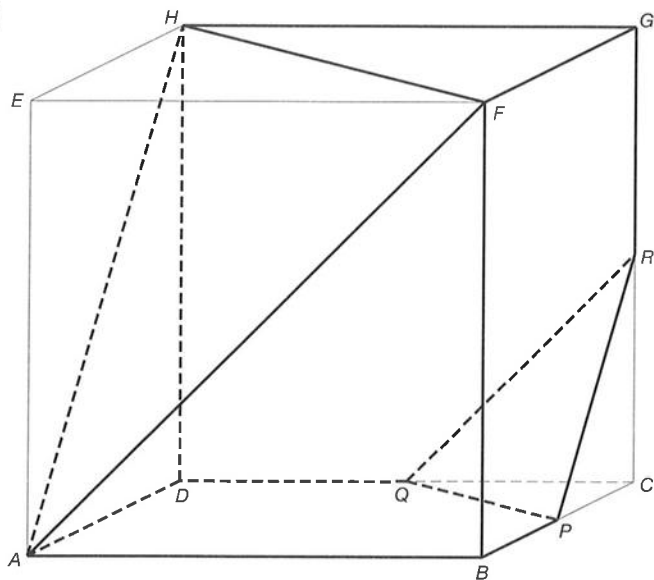
- 49 a





Bladzijde 160

50

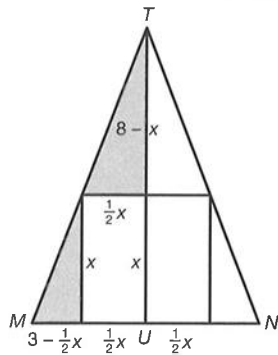


$$\begin{aligned} \text{inhoud} &= I(ABCDEFGH) - I(AEFH) - I(RCPQ) \\ &= 12 \cdot 12 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1404 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

De oppervlakte van het lichaam is $O(PBKLDQ) + 4 \cdot O(PBTR) = 27 + 4 \cdot 2\frac{1}{4}\sqrt{73} = 27 + 9\sqrt{73} \approx 104 \text{ cm}^2$.

Bladzijde 162

- 2 a M is het midden van PS , N het midden van QR .
Stel de ribbe van de kubus x .



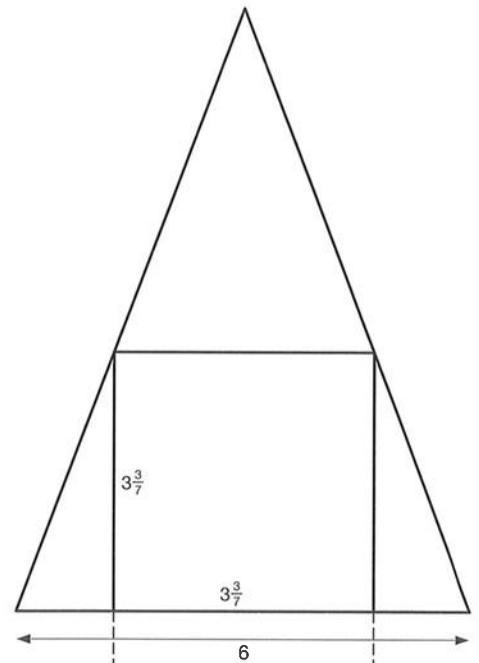
De twee grijze driehoeken zijn gelijkvormig.

$$\frac{8-x}{\frac{1}{2}x} = \frac{x}{3-\frac{1}{2}x} \text{ geeft } \frac{1}{2}x \cdot x = (8-x)(3-\frac{1}{2}x)$$

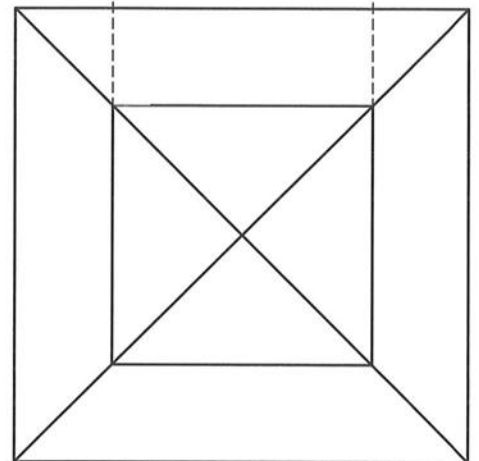
$$\frac{1}{2}x^2 = 24 - 7x + \frac{1}{2}x^2$$

$$7x = 24$$

$$x = 3\frac{3}{7}$$



vooraanzicht = zijaanzicht



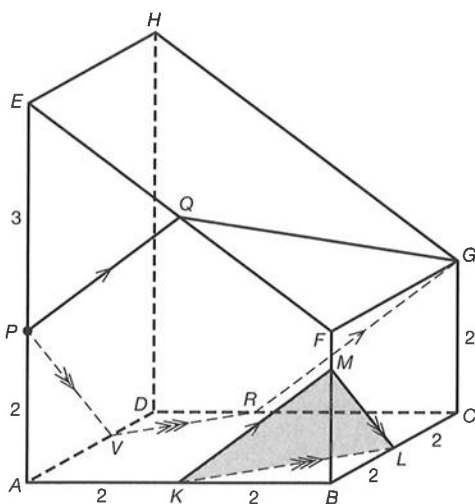
bovenaanzicht

b De inhoud van de kubus is $(3\frac{3}{7})^3 = 40\frac{104}{343}$.

c $I(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 8 = 96$

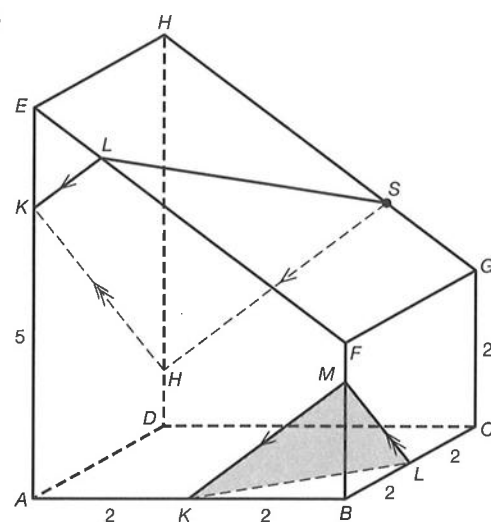
Het gevraagde percentage is $\frac{40\frac{104}{343}}{96} \times 100\% \approx 42,0\%$.

3 a



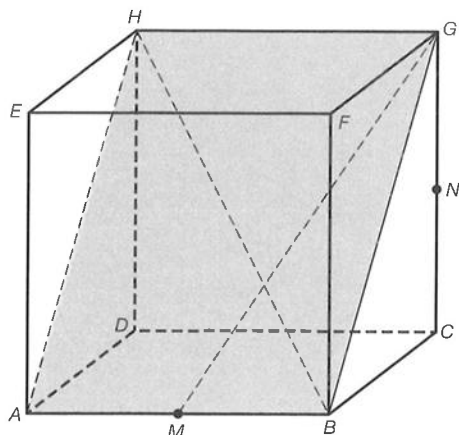
De doorsnede is de vijfhoek $PQGRV$.

b



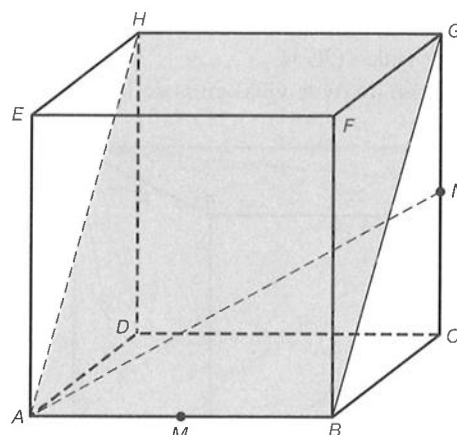
De doorsnede is de vierhoek $HKLS$.

4 a



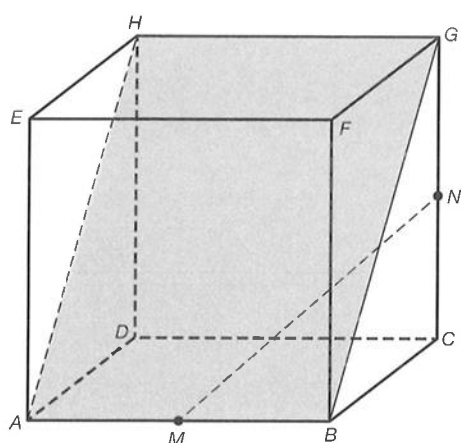
Het vlak ABH is het diagonaalvlak $ABGH$.
Het punt M ligt in het vlak $ABGH$.
 BH en GM zijn niet evenwijdig,
dus BH en GM zijn snijdende lijnen.

b



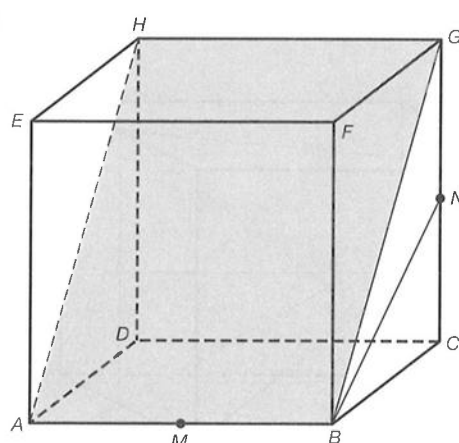
Het vlak ABH is het diagonaalvlak $ABGH$.
Het punt N ligt niet in het vlak $ABGH$,
dus AN en BH zijn kruisende lijnen.

c



Het vlak AMH is het diagonaalvlak $ABGH$.
Het punt N ligt niet in het vlak $ABGH$,
dus AH en MN zijn kruisende lijnen.

d

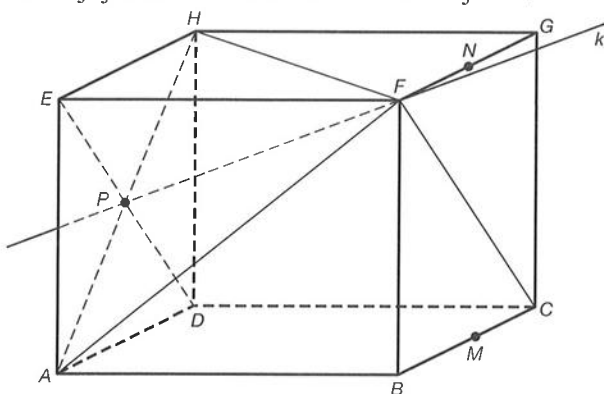


Het vlak ABH is het diagonaalvlak $ABGH$.
Het punt N ligt niet in het vlak $ABGH$,
dus AH en BN zijn kruisende lijnen.

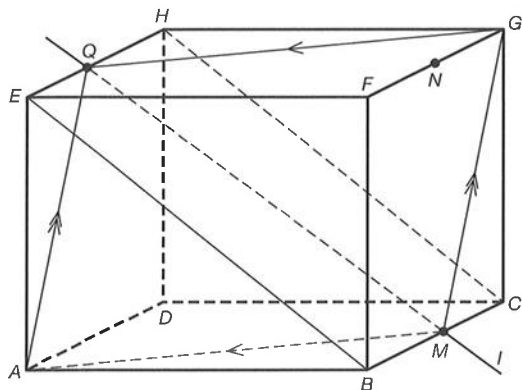
Bladzijde 163

5 a Vlak DEF = vlak $DEFC$.

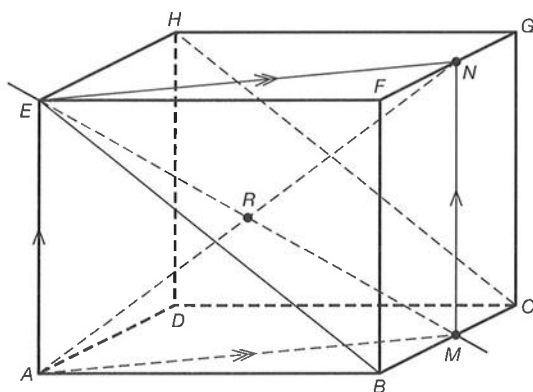
De snijlijn k van de twee vlakken is de lijn FP .



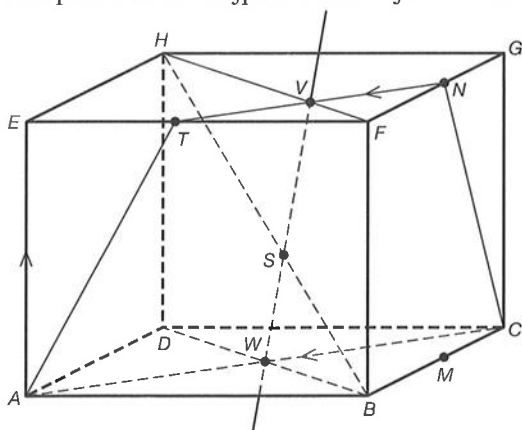
- b** Vlak $BCE =$ vlak $BCHE$.
 Vlak $AGM =$ vlak $AQGM$.
 De snijlijn l van de twee vlakken is de lijn MQ .



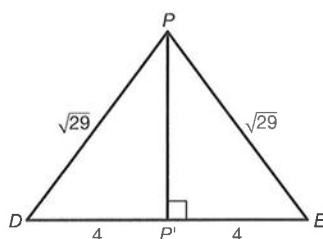
- c** Vlak $BCE =$ vlak $BCHE$.
 Lijn AN ligt in het hulpvlak $AMNE$.
 De lijn EM is de snijlijn van de vlakken $BCHE$ en $AMNE$.
 Het punt R is het snijpunt van de lijn AN met de lijn EM .

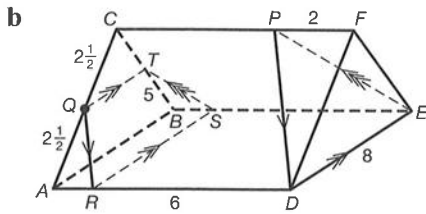


- d** Vlak $ACN =$ vlak $ACNT$.
 Lijn BH ligt in het hulpvlak $DBFH$.
 De lijn VW is de snijlijn van de vlakken $ACNT$ en $DBFH$.
 Het punt S is het snijpunt van de lijn BH met de lijn VW .



- 6 a** In $\triangle DFP$ is $DP = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.
 Zie hiernaast.
 $PP' = \sqrt{(\sqrt{29})^2 - 4^2} = \sqrt{13}$
 $O(\triangle DEP) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{13} = 4\sqrt{13}$





De doorsnede is vierhoek $QRST$.

c $QRST$ is een gelijkbenig trapezium met $QT = \frac{1}{2}AB = 4$.

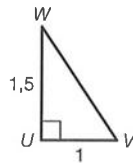
De verticale doorsnede door CF snijdt AB in U , RS in V en QT in W .

$UV = AR = 1$

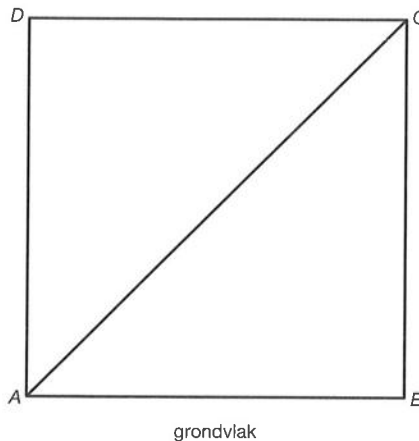
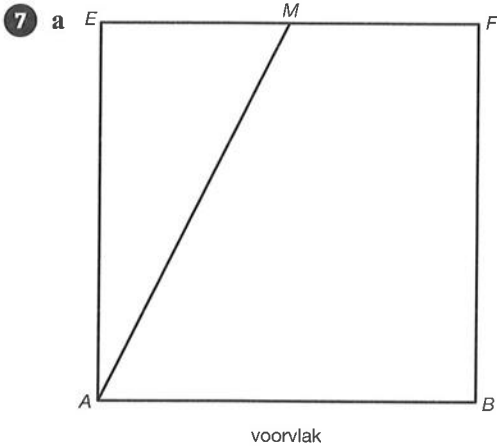
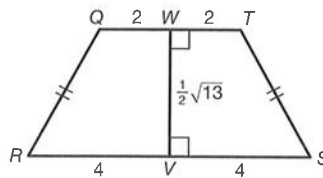
In $\triangle ACU$ is $UC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Dus $UW = 1\frac{1}{2}$.

In $\triangle UVW$ is $VW = \sqrt{1^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

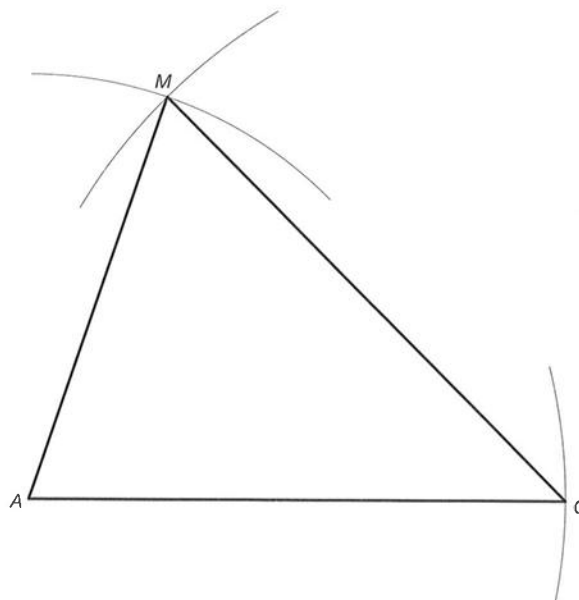
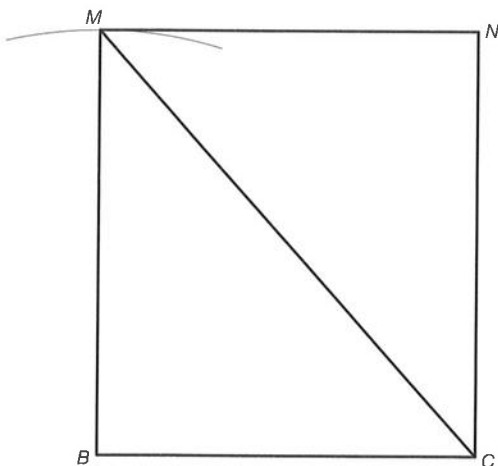


$$O(QRST) = \frac{1}{2} \cdot (8 + 4) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$$



AM kan worden afgepast in het voorvlak en AC in het grondvlak.

MC kan worden afgepast in rechthoek $BCNM$.



Zie de figuur hiernaast.

P is het midden van FG ,

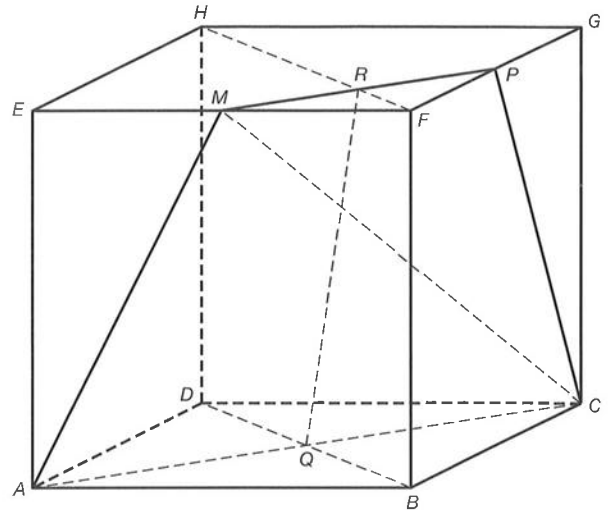
Q is het midden van AC en

R is het midden van MP .

De hoogte van $\triangle ACM$ is QR .

$$QR = \sqrt{\left(1\frac{1}{4}\right)^2 + \left(1\frac{1}{4}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{28\frac{1}{8}}$$

$$O(\triangle ACM) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot QR = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{28\frac{1}{8}} = 18\frac{3}{4}$$

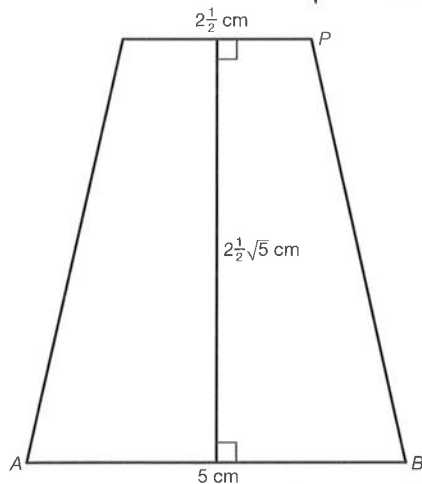


- b De doorsnede van het vlak ABP met het prisma is het gelijkbenig trapezium $ABPQ$, waarbij Q het midden van DN is.

$$PQ = 2\frac{1}{2}$$

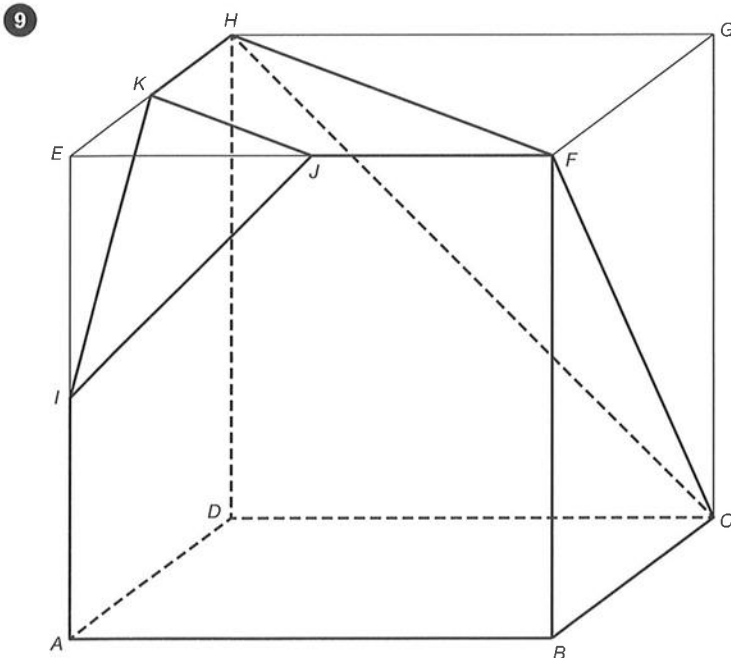
De hoogte van $ABPQ$ is de afstand van het midden van AB tot het midden van PQ .

Deze afstand is gelijk aan $\sqrt{5^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{31\frac{1}{4}} \approx 5,6$ cm.



$$O(\text{doorsnede}) = \frac{1}{2} \cdot \left(5 + 2\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{31\frac{1}{4}} = 3\frac{3}{4} \sqrt{31\frac{1}{4}} = 3\frac{3}{4} \sqrt{\frac{125}{4}} = 3\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{5} = 9\frac{3}{8} \sqrt{5} \text{ cm}^2$$

8 inhoud = $\pi \cdot 14^2 \cdot 10 + \pi \cdot 17^2 \cdot 10 + \pi \cdot 18^2 \cdot 10 + \pi \cdot 13^2 \cdot 10 + \pi \cdot 2^2 \cdot 10 \approx 30850 \text{ cm}^3 \approx 31$ liter



$$\begin{aligned} \text{inhoud} &= I(ABCDEFGH) - I(FCGH) - I(JEKI) \\ &= 12 \cdot 12 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1404 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$