

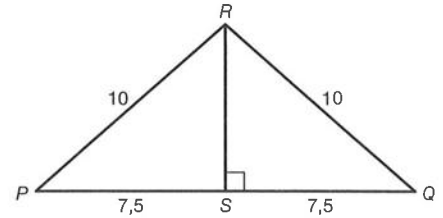
2 Oppervlakte en inhoud

2

Voorkennis Goniometrie en gelijkvormige driehoeken

Bladzijde 45

- 1 $\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ geeft $\angle A \approx 31,0^\circ$
- $\sin(\angle D) = \frac{EF}{DE} = \frac{8}{11}$ geeft $\angle D \approx 46,7^\circ$
- $\cos(\angle I) = \frac{HI}{GI} = \frac{4}{10}$ geeft $\angle I \approx 66,4^\circ$
- $\tan(\angle K) = \frac{LM}{KL} = \frac{7}{10}$ geeft $\angle K \approx 35,0^\circ$
- $\cos(\angle P) = \frac{PS}{PR} = \frac{7,5}{10}$ geeft $\angle P \approx 41,4^\circ$



Bladzijde 46

- 2 $\cos(\angle C) = \frac{AC}{BC}$ geeft $\frac{\cos(38^\circ)}{1} \mid \frac{AC}{17}$

$$AC = 17 \cdot \cos(38^\circ) \approx 13,4$$

$$\tan(\angle E) = \frac{DF}{DE} \text{ geeft } \frac{\tan(55^\circ)}{1} \mid \frac{DF}{5}$$

$$DF = 5 \cdot \tan(55^\circ) \approx 7,1$$

$$\sin(\angle G) = \frac{HI}{GH} \text{ geeft } \frac{\sin(40^\circ)}{1} \mid \frac{7}{GH}$$

$$GH = \frac{7}{\sin(40^\circ)} \approx 10,9$$

$$\sin(\angle L) = \frac{MN}{LN} \text{ geeft } \frac{\sin(60^\circ)}{1} \mid \frac{MN}{17}$$

$$KL = MN = 17 \cdot \sin(60^\circ) \approx 14,7$$

$$\tan(\angle P) = \frac{RS}{PS} \text{ geeft } \frac{\tan(75^\circ)}{1} \mid \frac{RS}{3}$$

$$RS = 3 \cdot \tan(75^\circ) \approx 11,2$$

- 3 $\left. \begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ADE) = \angle A \text{ (in } \triangle ABC) \\ \angle D = \angle B = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\frac{AD}{AB} \mid \frac{DE}{BC} \text{ geeft } \frac{x}{x + 5\frac{1}{3}} \mid \frac{3}{7}$$

$$7x = 3(x + 5\frac{1}{3})$$

$$7x = 3x + 16$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

$$\text{Dus } AD = 4.$$

$$\text{De stelling van Pythagoras in } \triangle ADE \text{ geeft } AD^2 + DE^2 = AE^2$$

$$16 + 9 = AE^2$$

$$AE^2 = 25$$

$$\text{Dus } AE = 5.$$

Bladzijde 47

$$\left. \begin{array}{l} \angle C \text{ (in } \triangle CDE) = \angle C \text{ (in } \triangle ABC) \\ \angle D = \angle A = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle CDE \sim \triangle CAB$$

Stel $CD = x$, dan is $AC = x + 9$.

CD	DE	x	4
CA	AB	$x + 9$	10

geeft

$$10x = 4(x + 9)$$

$$10x = 4x + 36$$

$$6x = 36$$

$$x = 6$$

Dus $CD = 6$ en $AC = 15$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$225 + 100 = BC^2$$

$$BC^2 = 325$$

$$\text{Dus } BC = \sqrt{325} \approx 18,03.$$

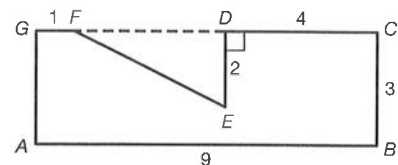
2.1 Lengten en oppervlakten**Bladzijde 48**

1 Teken DF .

$$DF = 9 - 4 - 1 = 4$$

$$\text{opp}(ABCEFG) = \text{opp}(ABCG) - \text{opp}(\triangle DEF) =$$

$$9 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 27 - 4 = 23$$

**Bladzijde 49**

$$2 \quad O(\triangle AMC) = O(\triangle ABC) - O(\triangle ABM)$$

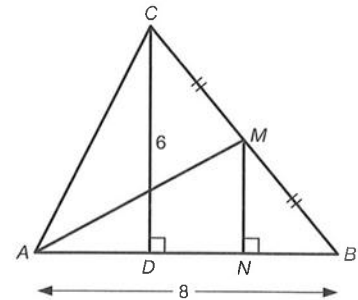
$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle N = \angle D = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle BMN \sim \triangle BCD$$

$$BM = \frac{1}{2} BC, \text{ dus } MN = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

$$\text{Dus } O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12.$$

$$O(\triangle AMC) = 24 - 12 = 12$$



$$3 \quad O(\triangle ANC) = O(\triangle ABC) - O(\triangle ABN)$$

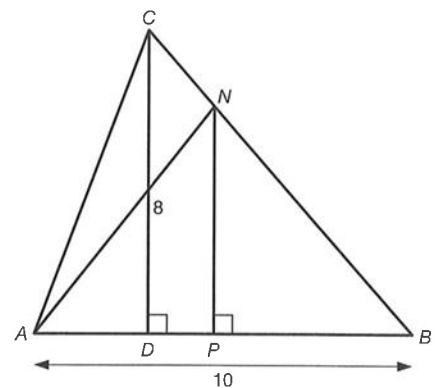
$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 = 40$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle P = \angle D = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle BNP \sim \triangle BCD$$

$$BN = \frac{3}{4} BC, \text{ dus } NP = \frac{3}{4} CD = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6.$$

$$\text{Dus } O(\triangle ABN) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30.$$

$$O(\triangle ANC) = 40 - 30 = 10$$



$$4 \quad a \quad O(ABCD) = AB \cdot DE = 10 \cdot 6 = 60$$

$$b \quad O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \text{bijbehorende hoogte} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15$$

$$c \quad O(AMCD) = O(ABCD) - O(\triangle ABM) = 60 - 15 = 45$$

$$d \quad \text{Uit } O(APCD) = 40 \text{ en } O(ABCD) = 60 \text{ volgt } O(\triangle ABP) = 20.$$

$$O(\triangle ABP) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \text{bijbehorende hoogte} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \text{bijbehorende hoogte} = 5 \cdot \text{bijbehorende hoogte}$$

$$\text{Dus } 5 \cdot \text{bijbehorende hoogte} = 20 \text{ en dit geeft bijbehorende hoogte} = 4.$$

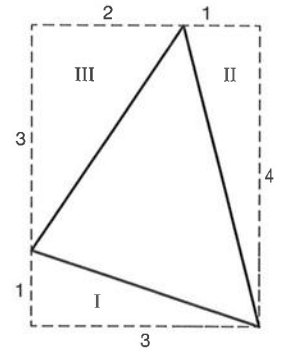
$$\text{Dus } P \text{ ligt } 4 \text{ boven } AB.$$

$$e \quad \text{Uit } O(QBCD) = 40 \text{ en } O(ABCD) = 60 \text{ volgt } O(\triangle AQD) = 20.$$

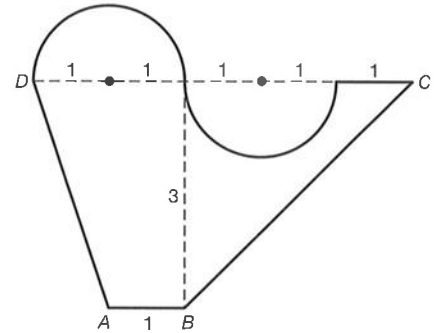
$$O(\triangle AQD) = \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot 6 = 3 \cdot AQ$$

$$\text{Dus } 3 \cdot AQ = 20 \text{ en dit geeft } AQ = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

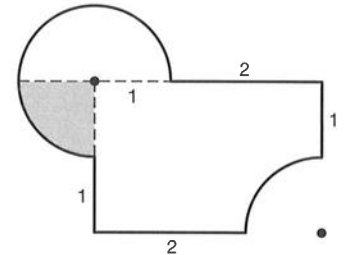
5 a $O(\text{driehoek}) = O(\text{rechthoek}) - O(\text{I}) - O(\text{II}) - O(\text{III})$
 $= 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$
 $= 12 - 1\frac{1}{2} - 2 - 3 = 5\frac{1}{2} \text{ cm}^2$



- b De oppervlakte is gelijk aan de oppervlakte van het trapezium $ABCD$.
 Dus $O(\text{figuur}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 5) \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$.



- c De oppervlakte is gelijk aan de oppervlakte van een rechthoek met zijden van 3 en 2 cm plus de oppervlakte van een halve cirkel met straal 1 cm.
 Dus $O(\text{figuur}) = 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = 6 + \frac{1}{2}\pi \approx 7,57 \text{ cm}^2 = 757 \text{ mm}^2$.



Bladzijde 50

- 6 $O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle ABC) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BM = AC \cdot BM = 6 \cdot 3 = 18$
 De gevraagde oppervlakte is $\pi \cdot 3^2 - 18 = 9\pi - 18 \approx 10,27$.

- 7 a oppervlakte cirkel $= \pi \cdot \text{straal}^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$
 oppervlakte blauwe vlakdelen $= \frac{1}{2} \cdot \text{oppervlakte cirkel} - O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 25\pi - 18 \approx 21,27$

- b Teken het lijnstuk DM .

$DM = 5$ (straal cirkel)

In $\triangle DEM$ geldt $DE^2 + EM^2 = DM^2$

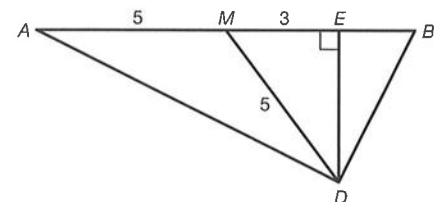
$$DE^2 + 9 = 25$$

$$DE^2 = 25 - 9 = 16$$

$$DE = 4$$

$$O(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

$$\text{oppervlakte gele vlakdelen} = \frac{1}{2} \cdot \text{oppervlakte cirkel} - O(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot 25\pi - 20 \approx 19,27$$



- 8 a Het blauwe gebied bestaat uit vijf even grote cirkels.
 In het vierkant bevindt zich één hele cirkel en vier kwartcirkels die samen ook één hele cirkel vormen.
 Dus in het vierkant bevinden zich twee van de vijf cirkels.
 Dus $\frac{2}{5}$ deel van het blauwe gebied bevindt zich in het vierkant.

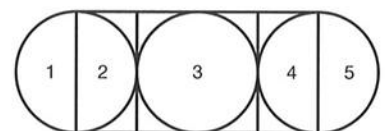
- b Zie de figuur hiernaast.

De delen 1 en 5 vormen een cirkel met oppervlakte b .

De delen 2 en 4 vormen een vierkant met oppervlakte a .

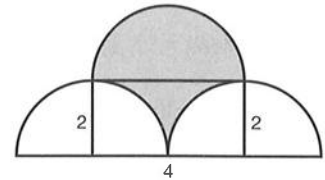
Deel 3 is een vierkant met oppervlakte a .

Dus de oppervlakte van het gebied binnen de rode lijn is $2a + b$.

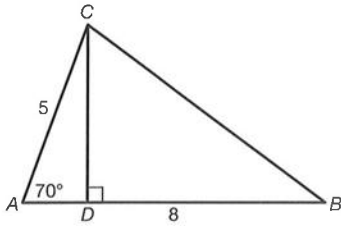


Bladzijde 51

- 9 a Zie de figuur hiernaast.
 In de rechthoek bevinden zich twee kwartcirkels die samen een halve cirkel met straal 2 cm vormen.
 Op de rechthoek bevindt zich ook een halve cirkel met straal 2 cm.
 Dus de oppervlakte van het blauwe gebied is precies de oppervlakte van de rechthoek.
 Dus de oppervlakte van het blauwe gebied is $4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2$.
- b In een driehoek is de som van de hoeken samen 180° .
 Dus de witte sectoren binnen de driehoek vormen samen een halve cirkel met straal 2 m.
 De oppervlakte van deze halve cirkel is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi \text{ m}^2$.
 Dus de oppervlakte van het groene gebied is $80 - 2\pi \text{ m}^2$.



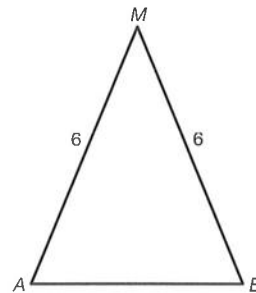
10 a



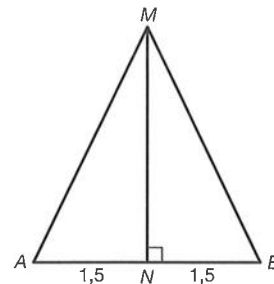
b $\sin(70^\circ) = \frac{CD}{5}$ geeft $CD = 5 \cdot \sin(70^\circ) = 4,69\dots$
 $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4,69\dots \approx 18,8$

Bladzijde 52

- 11 $O(\triangle AMB) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM \cdot \sin(\angle AMB) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{8}\right) = 12,72\dots$
 $O(ABCDEFGH) = 8 \cdot 12,72\dots \approx 101,82$

**Bladzijde 53**

- 12 $\angle AMB = \frac{360^\circ}{7}$, dus $\angle AMN = \frac{360^\circ}{14}$
 $\tan\left(\frac{360^\circ}{14}\right) = \frac{1,5}{MN}$ geeft $MN = \frac{1,5}{\tan\left(\frac{360^\circ}{14}\right)} = 3,11\dots$
 $O(\triangle AMB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3,11\dots = 4,67\dots$
 $O(ABCDEFG) = 7 \cdot 4,67\dots \approx 32,71$

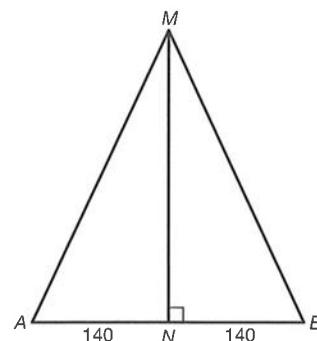


- 13 $\angle AMB = \frac{360^\circ}{5}$, dus $\angle AMN = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

$\tan(36^\circ) = \frac{140}{MN}$ geeft $MN = \frac{140}{\tan(36^\circ)} = 192,69\dots$

$O(\triangle AMB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 280 \cdot 192,69\dots = 26977,08\dots$
 $O(\text{vijfhoek}) = 5 \cdot 26977,08\dots \approx 134885 \text{ m}^2$

Dus de oppervlakte van het gebied dat binnen de vijfhoek ligt is 13,5 ha.



- 14 De regelmatige negenhoek bestaat uit 9 driehoeken zoals hiernaast.

$$O(\triangle AMB) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM \cdot \sin(\angle AMB) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{9}\right)$$

Er moet gelden $9 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{9}\right) = 180$

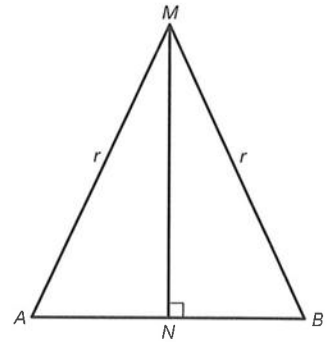
$$r^2 = 62,22...$$

$$r = \sqrt{62,22...} = 7,88...$$

$$\angle AMB = \frac{360^\circ}{9}, \text{ dus } \angle AMN = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$$

$$\sin(20^\circ) = \frac{AN}{7,88...} \text{ geeft } AN = 7,88... \cdot \sin(20^\circ) = 2,69...$$

Dus de omtrek van de regelmatige negenhoek is $18 \cdot 2,69... \approx 48,56$.



15 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A) = 20$

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin(\angle A) = 20$$

$$24 \cdot \sin(\angle A) = 20$$

$$\sin(\angle A) = \frac{20}{24}$$

$$\angle A \approx 56,4^\circ$$

16 a $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times CE$

b $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AD$

c Uit a en b volgt $\frac{1}{2} \times AB \times CE = \frac{1}{2} \times BC \times AD$ en dus $AB \times CE = BC \times AD$.

Bladzijde 55

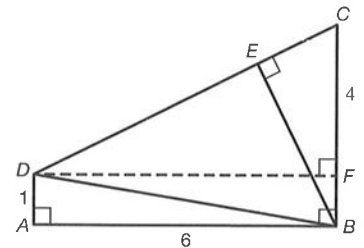
17 $CD = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCD$ geeft

$$CD \times BE = BC \times DF$$

$$\sqrt{45} \times BE = 4 \times 6$$

$$BE = \frac{4 \times 6}{\sqrt{45}} \approx 3,58$$



18 $BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft

$$BC \times AD = AB \times AC$$

$$\sqrt{20} \times AD = 4 \times 2$$

$$AD = \frac{4 \times 2}{\sqrt{20}} \approx 1,8$$

19 a $CD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

b De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft

$$AC \times BE = AB \times CD$$

$$13 \times BE = 10 \times 12$$

$$BE = \frac{10 \times 12}{13} \approx 9,2$$

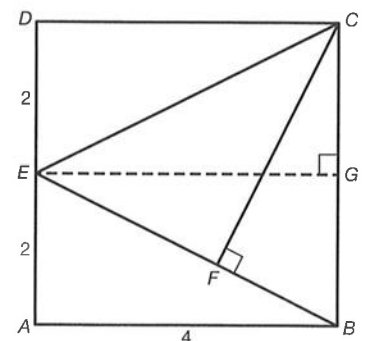
20 $BE = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCE$ geeft

$$BE \times CF = BC \times EG$$

$$\sqrt{20} \times CF = 4 \times 4$$

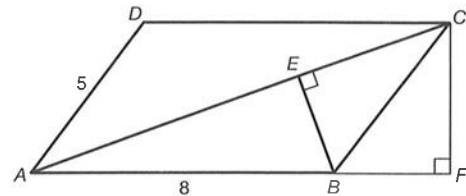
$$CF = \frac{4 \times 4}{\sqrt{20}} \approx 3,58$$



- 21 $O(ABCD) = 32$, dus $O(\triangle ABC) = 16$
 $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot CF = 4 \cdot CF$
 Er moet gelden $4 \cdot CF = 16$, dus $CF = 4$.
 $BF = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ en $AF = 8 + 3 = 11$
 Dus $AC = \sqrt{11^2 + 4^2} = \sqrt{137}$.
 In $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE = 16$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{137} \cdot BE = 16$$

$$BE = \frac{32}{\sqrt{137}} \approx 2,73$$

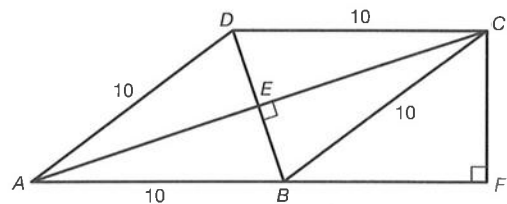


- 22 Zie de figuur hiernaast.
 $O(ABCD) = AB \cdot CF = 10 \cdot CF$
 $O(ABCD) = 60$ geeft $10 \cdot CF = 60$, dus $CF = 6$.
 $BF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ en $AF = 10 + 8 = 18$
 Dus $AC = \sqrt{18^2 + 6^2} = \sqrt{360} \approx 18,97$.
 In $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE = 30$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{360} \cdot BE = 30$$

$$BE = \frac{60}{\sqrt{360}} = 3,16...$$

Dus $BD = 2 \cdot 3,16 \dots \approx 6,32$.



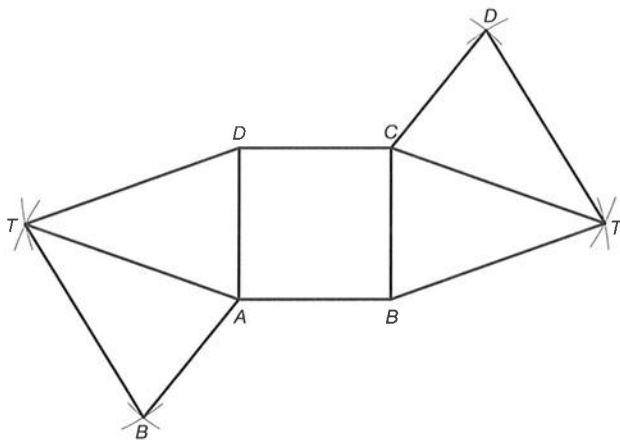
2.2 Uitslagen

Bladzijde 57

- 23 De figuren a, b en d kunnen de uitslag van een kubus zijn.
 24 De figuren a, b en d kunnen de uitslag van het prisma zijn.

Bladzijde 60

25



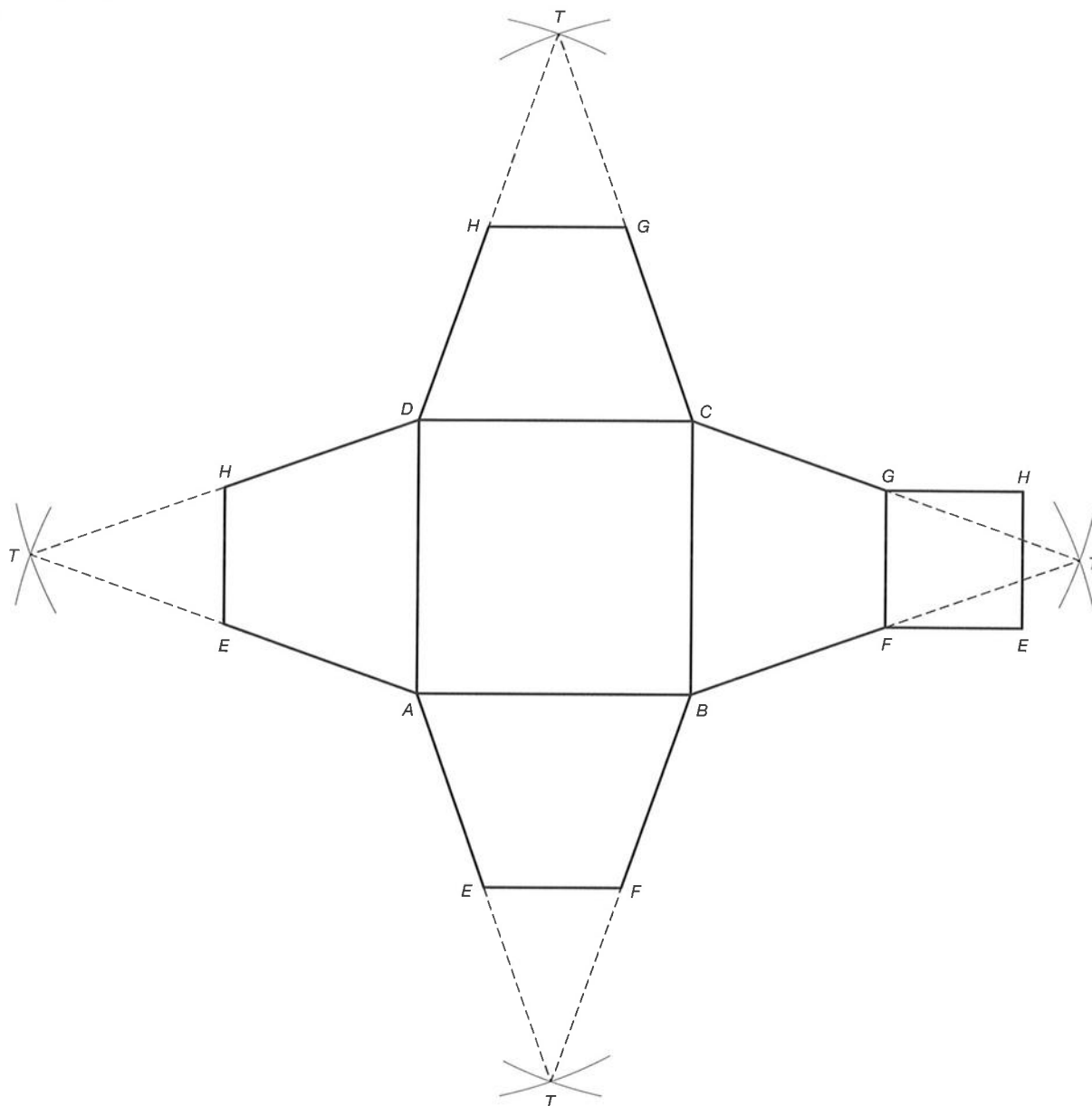
- 26 a $\triangle ABT$ is een vergroting van $\triangle EFT$.

Omdat $AB = 4$ en $EF = 2$ is de vergrotingsfactor $\frac{4}{2} = 2$.

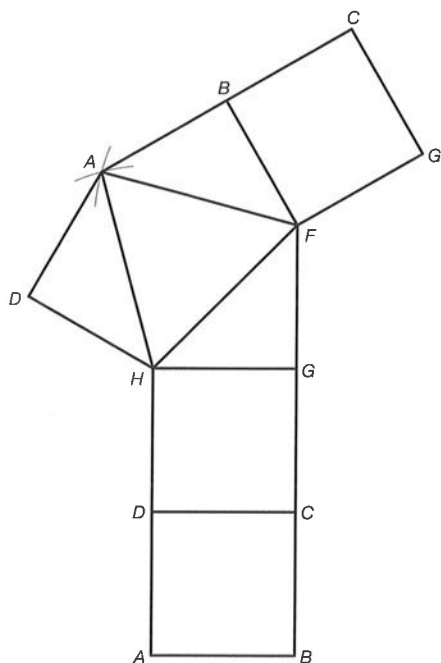
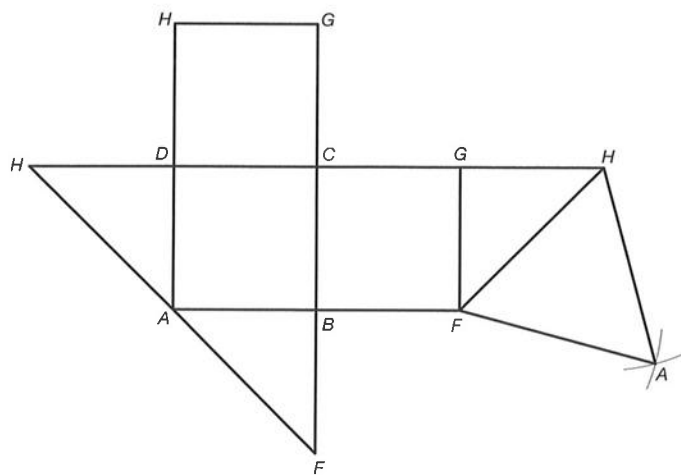
Dus $AT = 2 \cdot ET$ met $AT = AE + ET = 3 + ET$.

Dit geeft $3 + ET = 2ET$ ofwel $ET = 3$ en dus $AT = 6$.

b



27

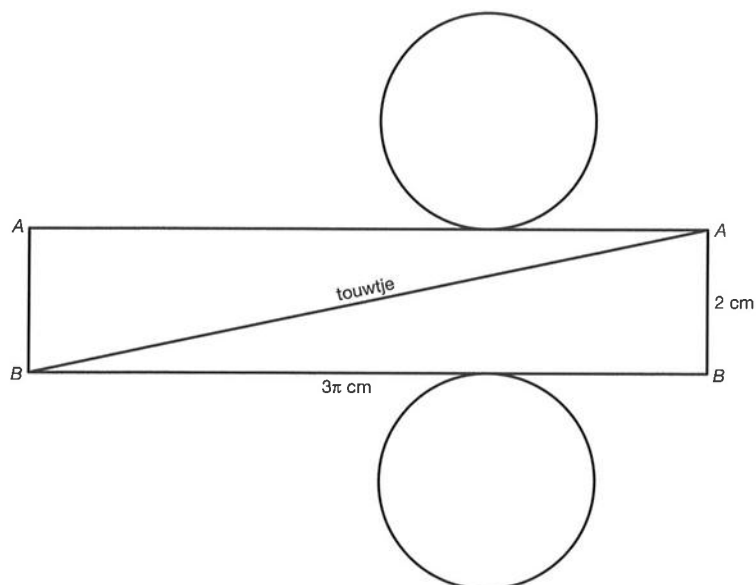


Bladzijde 61

- 28 Figuur b is de uitslag van een cilinder, omdat bij die figuur de omtrek van de cirkels gelijk is aan de hoogte van de rechthoek.

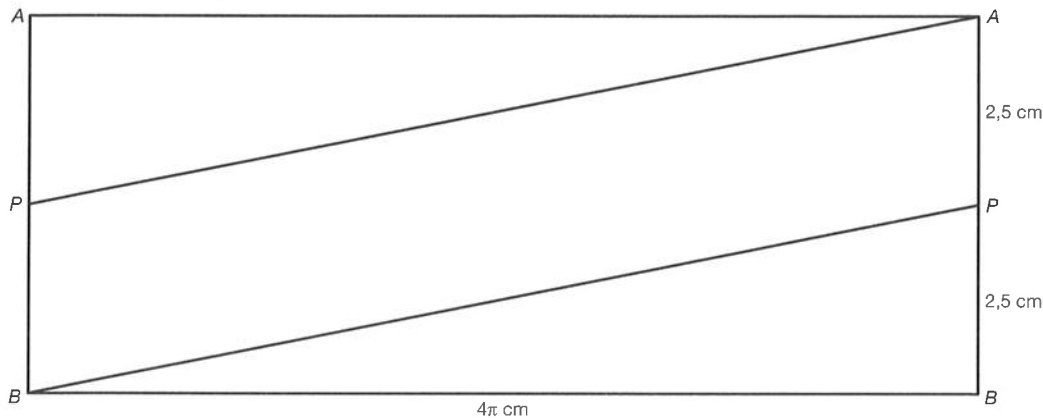
Bladzijde 62

- 29 a hoogte = 2 cm
 lengte = $2\pi \cdot 1\frac{1}{2} = 3\pi \text{ cm} \approx 9,4 \text{ cm}$



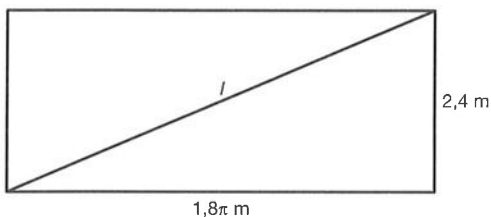
- b De stelling van Pythagoras geeft
 $(\text{lengte touwtje})^2 = (3\pi)^2 + 2^2$
 $(\text{lengte touwtje})^2 = 92,826\dots$
 $\text{lengte touwtje} = \sqrt{92,826\dots} \approx 9,6$
 De lengte van het touwtje is ongeveer 9,6 cm.

- 30 a De afmetingen zijn $2\pi \cdot 2 = 4\pi \text{ cm} \approx 12,6 \text{ cm}$ en 5 cm.

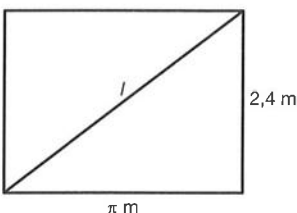


- b De stelling van Pythagoras geeft
 $BP^2 = (4\pi)^2 + 2,5^2$
 $BP^2 = 164,163\dots$
 $BP = \sqrt{164,163\dots} = 12,81\dots$
 Dus de lengte van het touwtje is $2 \cdot 12,81\dots \approx 25,6 \text{ cm}$.

- 31 a $12 \cdot 0,2 \cdot 28 = 67,2 \text{ meter}$
 b De cilinder die hoort bij één rondgang heeft een hoogte van $12 \cdot 0,2 = 2,4 \text{ meter}$.
 De uitslag van deze cilinder heeft een breedte van $1,8\pi \text{ meter}$.
 Zie hieronder waarin l de lengte van één rondgang is.



- $l^2 = (1,8\pi)^2 + 2,4^2$
 $l^2 = 37,73\dots$
 $l = \sqrt{37,73\dots} = 6,14\dots \text{ meter}$
 Dus de lengte van de leuning is $28 \cdot 6,14\dots \approx 172,0 \text{ meter}$.
 c 40 cm van de leuning, dus straal cilinder = $0,9 - 0,4 = 0,5 \text{ meter}$.
 De cilinder die hoort bij één rondgang van Vincent heeft een hoogte van $12 \cdot 0,2 = 2,4 \text{ meter}$.
 De uitslag van deze cilinder heeft een breedte van $\pi \text{ meter}$.
 Zie hieronder waarin l de lengte van één rondgang van Vincent is.



- $l^2 = \pi^2 + 2,4^2$
 $l^2 = 15,62\dots$
 $l = \sqrt{15,62\dots} = 3,95\dots \text{ meter}$
 De afgelegde afstand is $28 \cdot 3,95\dots = 110,69\dots \text{ meter}$.
 De gemiddelde snelheid is $\frac{110,69\dots}{5 \cdot 60} \approx 0,37 \text{ m/s}$.

Bladzijde 63

- 32 Figuur c is een uitslag van een kegel. De diameter van de halve cirkel is twee keer de diameter van de cirkel en dus is de lengte van de halve cirkel precies de omtrek van de cirkel.

Bladzijde 64

- 33 a De middelpuntshoek is 90° , dus de lengte van de cirkelboog is $\frac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 = 1,5\pi$ cm.
De omtrek van de grondcirkel is $2\pi r$ cm.
Dit geeft $2\pi r = 1,5\pi$, dus $r = 0,75$.
Dus de straal van de grondcirkel is ongeveer 8 mm.
- b De middelpuntshoek is 210° , dus de lengte van de cirkelboog is $\frac{210}{360} \cdot 2\pi \cdot 2,5 = \frac{35}{12}\pi$ cm.
De omtrek van de grondcirkel is $2\pi r$ cm.
Dit geeft $2\pi r = \frac{35}{12}\pi$, dus $r = \frac{35}{24} \approx 1,5$ cm.
Dus de straal van de grondcirkel is ongeveer 15 mm.
- c De middelpuntshoek is 300° , dus de lengte van de cirkelboog is $\frac{300}{360} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{10}{3}\pi$ cm.
De omtrek van de grondcirkel is $2\pi r$ cm.
Dit geeft $2\pi r = \frac{10}{3}\pi$, dus $r = \frac{5}{3} \approx 1,7$ cm.
Dus de straal van de grondcirkel is ongeveer 17 mm.

- 34 Stel de middelpuntshoek is p° .

$$\text{Dan geldt } \frac{p}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 = 2\pi \cdot 3$$

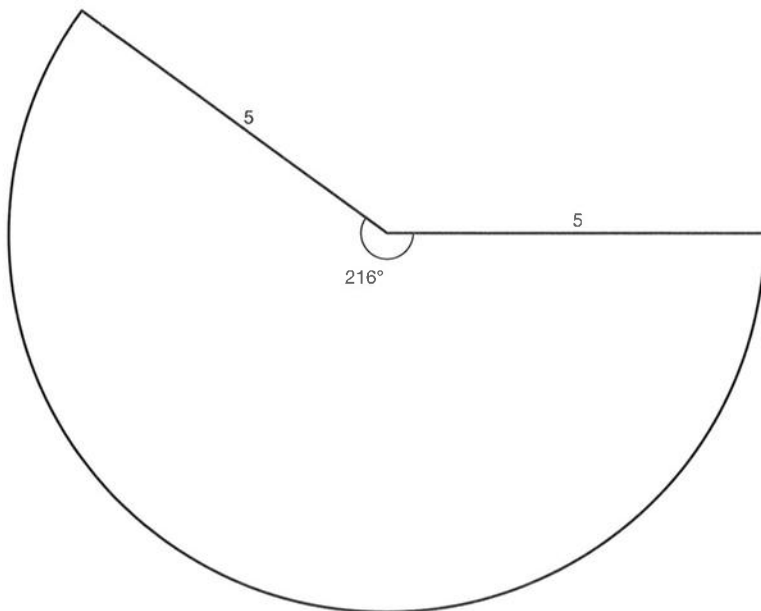
$$\frac{p}{360} = 0,6$$

$$p = 0,6 \cdot 360 = 216$$

Dus de middelpuntshoek is 216° .

- 35 a $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

De middelpuntshoek van de uitslag van de mantel is 216° (zie opgave 34).



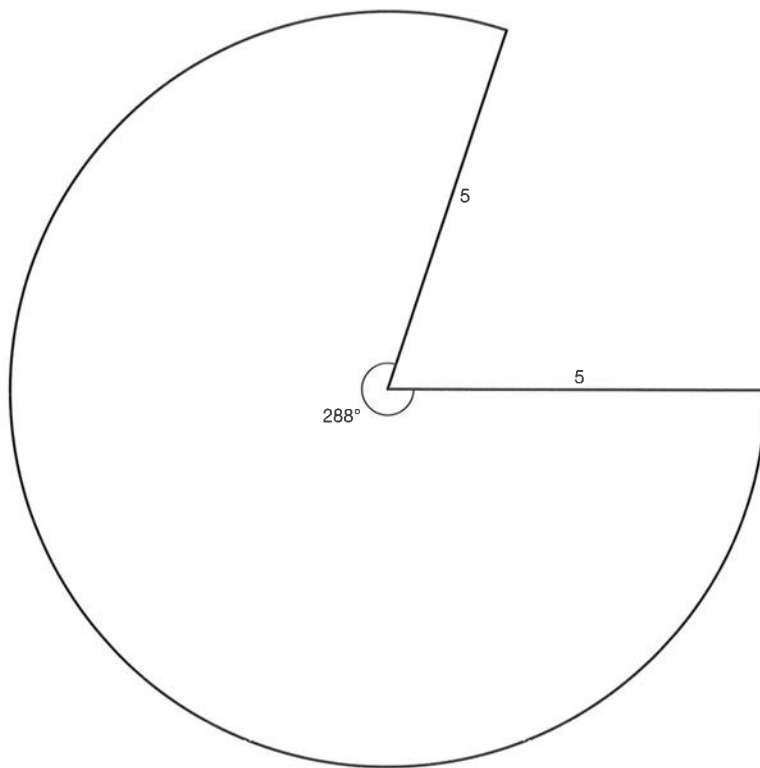
b Stel de middelpuntshoek is p° .

$$\text{Dan geldt } \frac{p}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 = 2\pi \cdot 4$$

$$\frac{p}{360} = 0,8$$

$$p = 0,8 \cdot 360 = 288$$

Dus de middelpuntshoek is 288° .



36 a Omtrek cirkel met straal R is $2\pi R$.

$$\text{Lengte cirkelboog is } \frac{p}{360} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{p}{180} \pi R.$$

Omtrek grondcirkel is $2\pi r$.

$$\text{Dus } 2\pi r = \frac{p}{180} \pi R$$

$$r = \frac{p}{360} \cdot R$$

b $R = 1\frac{1}{2}r$ substitueren in $r = \frac{p}{360} \cdot R$ geeft $r = \frac{p}{360} \cdot 1\frac{1}{2}r$

$$\frac{p}{360} = \frac{2}{3}$$

$$p = \frac{2}{3} \cdot 360 = 240$$

2.3 Oppervlakte van ruimtefiguren

Bladzijde 66

37 a $O(\text{cilindermantel}) = 2\pi \cdot 2 \cdot 3 = 12\pi \text{ cm}^2$

b $O(\text{grondcirkel}) = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$

$$O(\text{cilinder}) = O(\text{cilindermantel}) + 2 \cdot O(\text{grondcirkel}) = 12\pi + 2 \cdot 4\pi = 12\pi + 8\pi = 20\pi \text{ cm}^2$$

38 $O(\text{cilinder}) = 2 \cdot O(\text{grondcirkel}) + O(\text{cilindermantel})$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4$$

$$= 18\pi + 24\pi = 42\pi \approx 132 \text{ cm}^2$$

- 39 De rechthoek is $(12 - 2 \cdot 3)$ bij 6 m, dus 6 bij 6 m.
 De twee kwart cilinders vormen samen een halve cilinder met $r = 3$ m en $h = 6$ m.
 $O(\text{skatebaan}) = 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36 + 18\pi = 92,548... \text{ m}^2$ ofwel $9254,8... \text{ dm}^2$.
 De materiaalkosten zijn $9254,8... \cdot 1,75 \approx 16\,196$ euro.

Bladzijde 67

- 40 $O(\text{mantel in figuur 2.63b}) = 2\pi \cdot 12 \cdot 20 = 1507,9... \text{ cm}^2$,
 dus $O(\text{mantel in figuur 2.63a}) = \frac{1}{2} \cdot 1507,9... \approx 754 \text{ cm}^2$.
- 41 $O(\text{cilinder 1}) = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 10 = 32\pi + 80\pi = 112\pi$
 $O(\text{cilinder 2}) = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot h = 8\pi + 4\pi h$
 Er geldt $8\pi + 4\pi h = 112\pi$
 $4\pi h = 104\pi$
 $4h = 104$
 $h = 26$

- 42 De diameter van een massieve cilinder is $\frac{60}{3} = 20$ cm.
 De totale oppervlakte waarmee de vloeistof reageert is $7 \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot 40 \approx 17\,593 \text{ cm}^2$.

- 43 a Stel de middelpuntshoek is p° .
 Er geldt $\frac{p}{360} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = 2\pi \cdot 3$
 $\frac{p}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 = 2\pi \cdot 3$
 $\frac{p}{360} = \frac{3}{5}$
 $p = \frac{3}{5} \cdot 360 = 216$

Dus de middelpuntshoek is 216° .

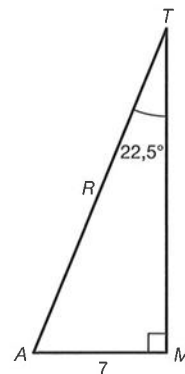
- b $O(\text{kegelmantel}) = \frac{216}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = 47,12... \approx 47 \text{ cm}^2$
 c $O(\text{kegel}) = O(\text{grondvlak}) + O(\text{kegelmantel}) = \pi \cdot 3^2 + 47,12... \approx 75 \text{ cm}^2$

Bladzijde 68

- 44 a omtrek cirkel $= 2\pi \cdot \text{straal}$, dus de omtrek van de cirkel met straal R is $2\pi R$.
 De lengte van de boog AA is gelijk aan de omtrek van de grondcirkel, dus aan $2\pi r$.
- b middelpuntshoek cirkelsector $= \frac{2\pi r}{2\pi R} \cdot 360^\circ = \frac{r}{R} \cdot 360^\circ$
- c oppervlakte kegelmantel = oppervlakte cirkelsector $= \frac{2\pi r}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = r \cdot \pi R = \pi r R$
- d oppervlakte kegel = oppervlakte grondcirkel + oppervlakte kegelmantel $= \pi r^2 + \pi r R$

Bladzijde 69

- 45 $\sin(22,5^\circ) = \frac{7}{R}$ geeft $R = \frac{7}{\sin(22,5^\circ)} = 18,29...$
 $O_{\text{kegel}} = \pi r^2 + \pi r R = \pi \cdot 7^2 + \pi \cdot 7 \cdot 18,29... \approx 556,2 \text{ cm}^2$



46 a $\pi r^2 = 100$

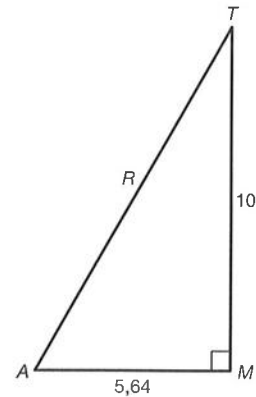
$$r^2 = \frac{100}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{100}{\pi}} = 5,641... \text{ cm}$$

Dus de straal van de grondcirkel is ongeveer 5,64 cm.

b $R = \sqrt{10^2 + 5,641...^2} = 11,481...$

$$O_{\text{kegelmantel}} = \pi r R = \pi \cdot 5,641... \cdot 11,481... \approx 203,5 \text{ cm}^2$$



47 a $\pi r^2 = 50$

$$r^2 = \frac{50}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} = 3,989... \text{ cm}$$

Dus de straal van de grondcirkel is ongeveer 3,99 cm.

b $\pi r R = 75$

$$\pi \cdot 3,989... \cdot R = 75$$

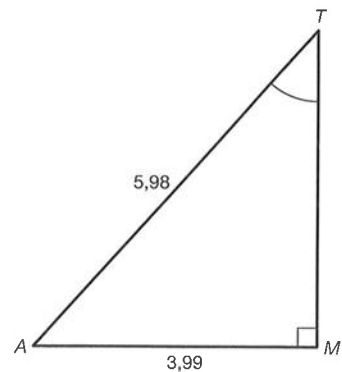
$$R = \frac{75}{\pi \cdot 3,989...} = 5,984...$$

Dus de straal van de uitslag van de kegelmantel is ongeveer 5,98 cm.

c $\sin(\angle ATM) = \frac{AM}{AT} = \frac{3,989...}{5,984...}$

$$\angle ATM = 41,81...^\circ$$

Dus de tophoek is $2 \cdot \angle ATM = 2 \cdot 41,81...^\circ \approx 83,6^\circ$.



48 $\pi r^2 = 30$

$$r^2 = \frac{30}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{30}{\pi}} = 3,09... \text{ cm}$$

$$\pi r R = 75$$

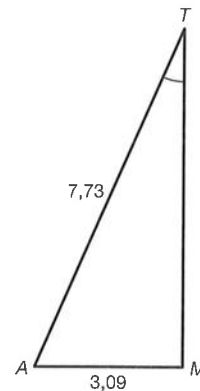
$$\pi \cdot 3,09... \cdot R = 75$$

$$R = \frac{75}{\pi \cdot 3,09...} = 7,72...$$

$$\sin(\angle ATM) = \frac{AM}{AT} = \frac{3,09...}{7,72...} = 0,4$$

$$\angle ATM = 23,57...^\circ$$

Dus de tophoek is $2 \cdot \angle ATM = 2 \cdot 23,57...^\circ \approx 47,2^\circ$.



Bladzijde 70

49 a oppervlakte grondcirkel = πr^2

oppervlakte kegelmantel = $\pi r R$

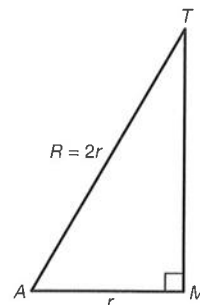
oppervlakte kegelmantel = $2 \cdot$ oppervlakte grondcirkel geeft $\pi r R = 2\pi r^2$
 $R = 2r$

Zie de figuur hiernaast.

$$\sin(\angle ATM) = \frac{r}{R} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\angle ATM = 30^\circ$$

Dus de tophoek is $2 \cdot \angle ATM = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

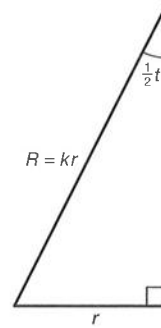


- b oppervlakte grondcirkel = πr^2
 oppervlakte kegelmantel = $\pi r R$
 oppervlakte kegelmantel = $k \cdot$ oppervlakte grondcirkel geeft $\pi r R = k \pi r^2$
 $R = kr$

Zie de figuur hiernaast.

$$\sin\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{r}{R} = \frac{r}{kr} = \frac{1}{k}$$

- c Gebruik het resultaat van vraag b.
 $t = 60^\circ$ geeft $\sin\left(\frac{1}{2} \cdot 60^\circ\right) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, dus $k = 2$.
 Dus de gevraagde verhouding is 2 : 1.



- 50 a Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle T = \angle T \\ \angle N = \angle M = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle BNT \sim \triangle AMT$$

$$\frac{BN}{AM} \mid \frac{NT}{MT} \text{ geeft } \frac{2}{5} \mid \frac{x}{x+6}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{x+6}$$

$$5x = 2(x+6)$$

$$5x = 2x + 12$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

- b $MT = 4 + 6 = 10$ en $AT = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$

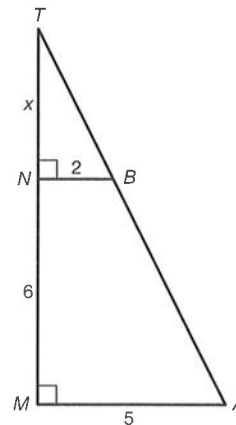
$$O_{\text{kegelmantel}} = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{125} = 175,620... \approx 175,62$$

- c Van de kegel met top T en straal grondcirkel NB is $r = 2$ en $R = BT = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

$$O_{\text{kegelmantel}} = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{20} = 28,099... \approx 28,10$$

Dus de oppervlakte van de mantel van de afgeknotte kegel is $175,620... - 28,099... = 147,521... \approx 147,52$.

- d $O_{\text{afgeknotte kegel}} = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 2^2 + 147,521... \approx 238,63$



- 51 Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle T = \angle T \\ \angle N = \angle M = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle BNT \sim \triangle AMT$$

$$\frac{BN}{AM} \mid \frac{NT}{MT} \text{ geeft } \frac{4}{10} \mid \frac{x}{x+11}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{x}{x+11}$$

$$10x = 4(x+11)$$

$$10x = 4x + 44$$

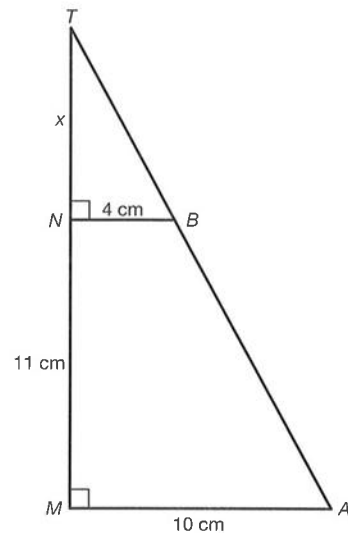
$$6x = 44$$

$$x = \frac{44}{6} = 7\frac{1}{3}$$

$$BT = \sqrt{4^2 + \left(7\frac{1}{3}\right)^2} = 8,35... \text{ cm}$$

$$AT = \sqrt{10^2 + \left(18\frac{1}{3}\right)^2} = 20,88... \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} O(\text{kapje}) &= \pi \cdot AM \cdot AT - \pi \cdot BN \cdot BT \\ &= \pi \cdot 10 \cdot 20,88... - \pi \cdot 4 \cdot 8,35... \\ &\approx 551 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



- 52 a $\angle ACB = 180^\circ - \angle BCE - \angle DCE = 180^\circ - 90^\circ - \angle DCE = 90^\circ - \angle DCE$ (gestrekte hoek)
 $\angle DEC = 180^\circ - \angle CDE - \angle DCE = 180^\circ - 90^\circ - \angle DCE = 90^\circ - \angle DCE$ (hoekensom driehoek) $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \angle ACB = 180^\circ - \angle BCE - \angle DCE = 180^\circ - 90^\circ - \angle DCE = 90^\circ - \angle DCE \\ \angle DEC = 180^\circ - \angle CDE - \angle DCE = 180^\circ - 90^\circ - \angle DCE = 90^\circ - \angle DCE \end{array}} \right\} \angle ACB = \angle DEC$
- b $\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DEC \\ \angle A = \angle D = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DCE$
- c $\frac{BC}{CE} \mid \frac{AC}{DE}$ geeft $\frac{10}{CE} \mid \frac{8}{3}$, dus $CE = \frac{3 \cdot 10}{8} = 3\frac{3}{4}$.

Bladzijde 71

- 53 a De oppervlakte van de ring is bij benadering gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek van $2\pi a$ cm bij h cm. Dus $O_{\text{ring}} : O_{\text{cilindermantel}} = 2\pi a s : 2\pi a h = s : h$ ofwel $O_{\text{ring}} = \frac{s}{h} \cdot O_{\text{cilindermantel}}$.

- b Door de gelijkvormigheid passen de overeenkomstige zijden in een verhoudingstabel, dus $\frac{s}{r} \mid \frac{h}{a}$.

Kruiselings vermenigvuldigen geeft $sa = rh$

$$\frac{sa}{h} = r$$

$$\frac{s}{h} = \frac{r}{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} O_{\text{ring}} = \frac{s}{h} \cdot O_{\text{cilindermantel}} \\ O_{\text{cilindermantel}} = 2\pi ah \\ \frac{s}{h} = \frac{r}{a} \end{array} \right\} O_{\text{ring}} = \frac{r}{a} \cdot 2\pi ah = 2\pi rh$$

Bladzijde 72

- 54 $2 \cdot O_{\text{bol met straal } r} = 2 \cdot 4\pi r^2 = 8\pi r^2$
 $O_{\text{bol met straal } 5} = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$
 Er geldt $8\pi r^2 = 100\pi$
 $r^2 = \frac{100\pi}{8\pi} = 12,5$
 $r = \sqrt{12,5} \approx 3,54$

- 55 $O_{\text{lichaam}} = O_{\text{grondcirkel}} + O_{\text{cilindermantel}} + O_{\text{halve bol}}$
 $= \pi \cdot 7,5^2 + 2\pi \cdot 7,5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 7,5^2$
 $= 56,25\pi + 75\pi + 112,5\pi$
 $= 243,75\pi \approx 766 \text{ cm}^2$

- 56 omtrek aarde = 40 000 km geeft $2\pi r = 40\,000$, dus $r = \frac{40\,000}{2\pi} = 6366,1 \dots \text{ km}$.

$$O_{\text{aarde}} = 4\pi \cdot 6366,1 \dots^2 = 509\,295\,817, \dots \text{ km}^2$$

$$\text{Dus } O(\text{oceanen}) = 0,71 \cdot 509\,295\,817, \dots \approx 361\,600\,000 \text{ km}^2.$$

- 57 a Stel de straal van de bol r .

$$O_{\text{bol}} = 4\pi r^2$$

Zie de figuur hiernaast.

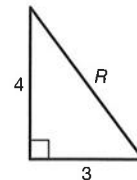
$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$O_{\text{kegelmantel}} = \pi r R = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$$

$$\text{Er geldt } 4\pi r^2 = 15\pi$$

$$r^2 = \frac{15\pi}{4\pi} = 3\frac{3}{4}$$

$$r = \sqrt{3\frac{3}{4}} \approx 1,94$$



- b Stel de straal van de bol r .

$$O_{\text{bol}} = 4\pi r^2$$

$$O_{\text{kegel}} = \pi \cdot 3^2 + 15\pi = 9\pi + 15\pi = 24\pi$$

$$\text{Er geldt } 4\pi r^2 = 24\pi$$

$$r^2 = \frac{24\pi}{4\pi} = 6$$

$$r = \sqrt{6} \approx 2,45$$

- 58 Stel de straal van de cilinder is r .

Dan is ook de straal van de bol r .

En omdat de bol precies in de cilinder past, is de hoogte van de cilinder $2r$.

Er geldt $O_{\text{cilindermantel}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$.

$$O_{\text{bol}} = 4\pi r^2$$

$$\text{Dus } O_{\text{cilindermantel}} = O_{\text{bol}}.$$

2.4 Inhoud van ruimtefiguren

Bladzijde 74

59 $I_{\text{bol}} = 4 \cdot I_{\text{kegel}} = 4 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi r^2 h$

Bladzijde 75

- 60 Stel de straal van een tennisbal is r .

De inhoud van de cilinder is dan $\pi r^2 \cdot 6r = 6\pi r^3$.

De inhoud van de tennisballen is $3 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^3$.

Het percentage is dus $\frac{4\pi r^3}{6\pi r^3} \times 100\% \approx 66,7\%$.

61 a $BM = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,19\dots$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5,19\dots = 15,58\dots$$

$$I(ABCDEF) = 15,58\dots \cdot 8 \approx 124,7$$

b $GN = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

$$O(\triangle GHK) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$$

$$I(LGHK) = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 9 = 180$$

c $MT = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,46\dots$

$$I_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 3,46\dots \approx 14,5$$

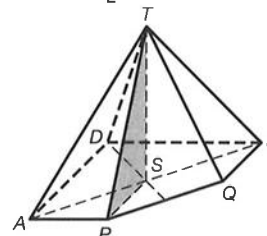
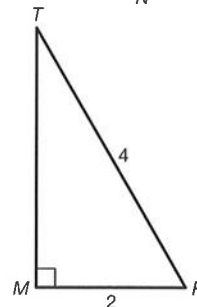
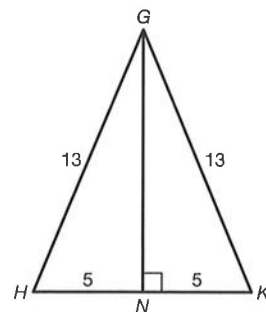
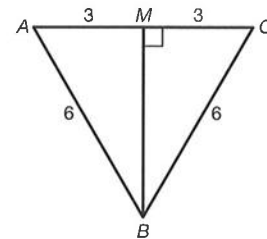
- 62 a In $\triangle PST$ is $PT = 2$ cm en $PS = 1$ cm.

$$ST = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Dus de hoogte van de piramide is $\sqrt{3}$ cm.

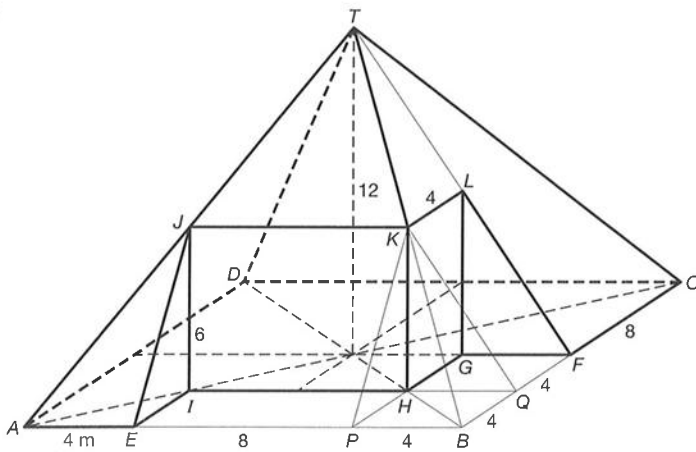
b $O(APQCD) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 3\frac{1}{2} \text{ cm}^2$

$$I_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 2,0 \text{ cm}^3$$



Bladzijde 76

63



$$\begin{aligned}
 I(\text{woning}) &= I(TABCD) - I(EIJPHK) - I(HQKGFL) - I(KPBQH) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 \\
 &= 1024 - 96 - 48 - 32 = 848 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

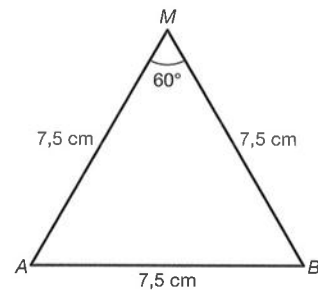
- 64 Het grondvlak is een regelmatige zeshoek met zijden van $5 \cdot 1,5 = 7,5$ cm.

De hoogte van het doosje is $5 \cdot 2,95 = 14,75$ cm.

$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 7,5 \cdot \sin(60^\circ) = 24,35... \text{ cm}^2$$

$$\text{Dus } O(\text{zeshoek}) = 6 \cdot 24,35... = 146,14... \text{ cm}^2$$

$$\text{en } I(\text{doosje}) = 146,14... \cdot 14,75 \approx 2156 \text{ cm}^3.$$



- 65 $r_{\text{bol}} = 5$ cm, dus $I_{\text{bol}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 523,59...$

$$I_{\text{cilinder}} = \pi r^2 \cdot 10 = 10\pi r^2$$

$$\text{Dus } 10\pi r^2 = 523,59...$$

$$r^2 = \frac{523,59...}{10\pi} = 16,66...$$

$$r = \sqrt{16,66...} \approx 4,1$$

Dus de straal van de cilinder is ongeveer 41 mm.

$$I_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 10 = \frac{10}{3} \pi r^2$$

$$\text{Dus } \frac{10}{3} \pi r^2 = 523,59...$$

$$r^2 = \frac{523,59...}{\frac{10}{3} \pi} = 50$$

$$r = \sqrt{50} \approx 7,1$$

Dus de straal van de grondcirkel van de kegel is ongeveer 71 mm.

Bladzijde 77

- 66 Stel de straal van de cilinder is r .

Dan is de hoogte van de cilinder (en van de kegel) $2r$.

$$I_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$I_{\text{bol}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$I_{\text{cilinder}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

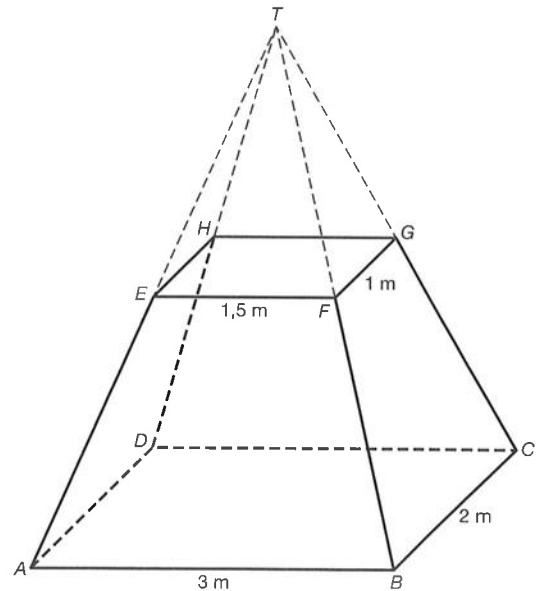
$$\text{Dus } I_{\text{kegel}} : I_{\text{bol}} : I_{\text{cilinder}} = \frac{2}{3} \pi r^3 : \frac{4}{3} \pi r^3 : 2\pi r^3 = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2 = 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3.$$

- 67 Zie de figuur hiernaast met het kiepkarretje 'op de kop'

De hoogte van hele piramide is $2 \cdot 2 = 4$ meter.

$$I(\text{kar}) = I(TABCD) - I(TEFGH)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 8 - 1 = 7 \text{ m}^3$$



- 68 De emmer heeft de vorm van een afgeknotten kegel.
Zie de figuur hiernaast.

$$\left. \begin{array}{l} \angle T = \angle T \\ \angle D = \angle B = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle CDT \sim \triangle ABT$$

CD	DT	10	x
AB	BT	15	x + 25

geeft

$$15x = 10(x + 25)$$

$$15x = 10x + 250$$

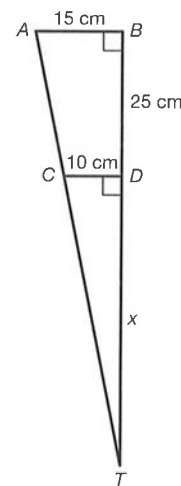
$$5x = 250$$

$$x = 50$$

Dus $DT = 50$ cm en $BT = 25 + 50 = 75$ cm.

$$I(\text{emmer}) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 75 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 50 \approx 12435 \text{ cm}^3.$$

Dus de inhoud van de emmer is ongeveer 12,4 L.



Bladzijde 78

- 69 a Op halve hoogte afgeknot, dus $h = \frac{1}{2}H$ en $b = \frac{1}{2}a$. Dit geeft

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}H \left(a^2 + a \cdot \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{2}a \right)^2 \right) = \frac{1}{6}H \left(a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 \right) = \frac{1}{6}H \cdot 1\frac{3}{4}a^2 = \frac{7}{24}Ha^2.$$

- b De piramide wordt op halve hoogte afgeknot, dus gebruik de formule van vraag a.

$$I = 84 \text{ en } H = 18 \text{ geeft } \frac{7}{24} \cdot 18a^2 = 84$$

$$5\frac{1}{4}a^2 = 84$$

$$a^2 = \frac{84}{5\frac{1}{4}} = 16$$

$$a = 4$$

Dus de zijde van het grondvlak is 4.

- c $h = 8$ en $H = 24$ dus de piramide wordt op een derde deel van de hoogte afgeknot, dus $b = \frac{2}{3}a$.

$$\text{Dit geeft } I = \frac{1}{3} \cdot 8 \left(a^2 + a \cdot \frac{2}{3}a + \left(\frac{2}{3}a \right)^2 \right) = \frac{8}{3} \left(a^2 + \frac{2}{3}a^2 + \frac{4}{9}a^2 \right) = \frac{8}{3} \cdot 2\frac{1}{9}a^2 = 5\frac{17}{27}a^2.$$

$$I = 456 \text{ geeft } 5\frac{17}{27}a^2 = 456$$

$$a^2 = \frac{456}{5\frac{17}{27}} = 81$$

$$a = 9$$

$a = 9$ geeft $b = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$, dus de zijde van het bovenvlak van de afgeknotten piramide is 6.

$$\begin{aligned}
 \text{d } I = 395, h = 15 \text{ en } b = a - 4 \text{ geeft } & \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot (a^2 + a(a-4) + (a-4)^2) = 395 \\
 & 5(a^2 + a^2 - 4a + a^2 - 8a + 16) = 395 \\
 & 5(3a^2 - 12a + 16) = 395 \\
 & 3a^2 - 12a + 16 = 79 \\
 & 3a^2 - 12a - 63 = 0 \\
 & a^2 - 4a - 21 = 0 \\
 & (a+3)(a-7) = 0 \\
 & a = -3 \vee a = 7
 \end{aligned}$$

Dus de zijde van het grondvlak is 7.

2.5 Vergrotingen

Bladzijde 81

- 70 a $O(ABFE) = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$
 b $O(\text{balk}) = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24 + 16 + 12 = 52 \text{ cm}^2$
 c $I(\text{balk}) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^3$
 d 20 bij 10 bij 15 cm
 e opp = $20 \cdot 15 = 300 \text{ cm}^2$
 f De oppervlakte is met $\frac{300}{12} = 25$ vermenigvuldigd. Dat is precies k^2 .
 g De totale oppervlakte is $20 \cdot 15 \cdot 2 + 20 \cdot 10 \cdot 2 + 10 \cdot 15 \cdot 2 = 1300 \text{ cm}^2$.
 De oppervlakte is met $\frac{1300}{52} = 25$ vermenigvuldigd.
 Dus het verband bestaat ook voor de totale oppervlakte.
 h De inhoud van balk II is $20 \cdot 10 \cdot 15 = 3000 \text{ cm}^3$.

$$\frac{I(\text{balk II})}{I(\text{balk I})} = \frac{3000}{24} = 125$$

Dit is precies k^3 .

Bladzijde 82

- 71 tennisbal (origineel) $\xrightarrow{\times k}$ basketbal (beeld)
 dus $k^2 = 20$
 $k = \sqrt{20}$
 Dit geeft $k^3 = (\sqrt{20})^3 \approx 89,4$.
 Dus de inhoud van de basketbal is 89,4 keer zo groot als de inhoud van de tennisbal.
- 72 kleine ballon (origineel) $\xrightarrow{\times k}$ grote ballon (beeld)
 dus $k = 2$
 $k^3 = 2^3 = 8$
 De inhoud wordt $8 \cdot 3 = 24$ liter.
 De inhoud moet met $24 - 3 = 21$ liter toenemen.

- 73 a $\left. \begin{aligned} \angle T &= \angle T \\ \angle TCD &= \angle TAB \text{ (F-hoeken)} \end{aligned} \right\} \triangle CDT \sim \triangle ABT$

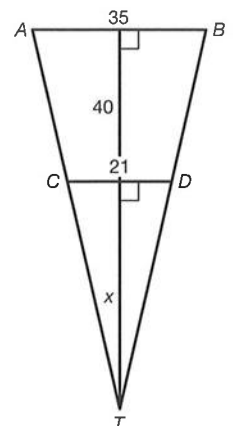
$$\text{Uit de gelijkvormigheid volgt } \frac{21}{35} = \frac{x}{x+40}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Kruislings vermenigvuldigen geeft } & 35x = 21(x+40) \\
 & 35x = 21x + 840 \\
 & 14x = 840 \\
 & x = 60
 \end{aligned}$$

$$I(\text{afgeknotten kegel}) = \frac{1}{3} \pi \cdot 17,5^2 \cdot 100 - \frac{1}{3} \pi \cdot 10,5^2 \cdot 60 \approx 25143 \text{ cm}^3 = 25143 \text{ mL}$$

Dus de inhoud van de afgeknotten kegel is ongeveer 251 dL.

- b De factor is $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$.
 De inhoud van de vaas is $(\frac{4}{7})^3 \cdot 251 \approx 46,9 \text{ dL}$ ofwel ongeveer 4,7 L.
 Dus Joost heeft niet gelijk.



Bladzijde 83

- 74 kleine bol (origineel) $\xrightarrow{\times k}$ grote bol (beeld)

$$\text{dus } k^3 = \frac{150}{50} = 3$$

$$k = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{Dit geeft } k^2 = (\sqrt[3]{3})^2 \approx 2,1.$$

Harm moet de bollen 2,1 keer zo lang bakken.

- 75 a De bovenkanten van de poten dragen in totaal 57.

$$\text{Per vierkante eenheid is dat } \frac{57}{4} = 14,25.$$

- b De poten dragen in totaal $432 + 24 = 456$.

Het gewicht wordt gedragen door een oppervlakte van $4 \cdot 2^2 = 16$ vierkante eenheden.

$$\text{Per vierkante eenheid is het gewicht } \frac{456}{16} = 28,5.$$

- c Het gewicht per vierkante eenheid is verdubbeld.

Bladzijde 84

- 76 a 4 zijvlakken van 6 bij 3 en 2 zijvlakken van 3 bij 3.

$$\text{oppervlakte} = 4 \times 6 \times 3 + 2 \times 3 \times 3 = 90 \text{ eenheidsvierkanten}$$

- b inhoud = $6 \times 3 \times 3 = 54$

$$\text{oppervlakte romp : inhoud romp} = 90 : 54 = 1\frac{2}{3} : 1$$

- c De romp van het vergrote model is een balk van 12 bij 6 bij 6.

$$\text{inhoud} = 12 \times 6 \times 6 = 432$$

$$\text{oppervlakte} = 4 \times 12 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 = 360$$

$$\text{oppervlakte romp : inhoud romp} = 360 : 432 = 1 : 1\frac{1}{5}$$

- d Grote dieren hebben naar verhouding minder oppervlakte dan inhoud.

Daarom kunnen grote dieren moeilijker hun warmte kwijt.

- 77 a Het totale gewicht is $\frac{1 \times 2 \times 2}{\text{kop}} + \frac{1 \times 1 \times 2}{\text{hals}} + \frac{5 \times 2 \times 2}{\text{romp}} + \frac{4 \times 1 \times 1 \times 2}{\text{poten}} = 34 \text{ kg.}$

De oppervlakte van de bovenkant van de poten is 4 dm^2 .

$$\text{Het gewicht dat de poten gemiddeld per } \text{dm}^2 \text{ moeten dragen is } \frac{34}{4} = 8\frac{1}{2} \text{ kg.}$$

- b De totale oppervlakte is $\frac{14}{\text{kop}} + \frac{6}{\text{hals}} + \frac{42}{\text{romp}} + \frac{4 \times 9}{\text{poten}} = 98 \text{ dm}^2$.

$$\text{oppervlakte : inhoud} = 98 : 34 = 2\frac{15}{17} : 1$$

- c Het gewicht wordt 5^3 keer zo groot.

De oppervlakte van de bovenkant van de poten wordt 5^2 keer zo groot.

$$\text{Dus moeten de poten per } \text{dm}^2 \frac{5^3}{5^2} = 5 \text{ keer zo veel dragen.}$$

$$\text{d oppervlakte : inhoud} = (98 \cdot 5^2) : (34 \cdot 5^3) = 2\frac{15}{17} : 5 = 1 : 1\frac{36}{49}$$

$$\text{e oppervlakte : inhoud} = (98 \cdot 10^2) : (34 \cdot 10^3) = 2\frac{15}{17} : 10 = 1 : 3\frac{23}{49}$$

- 78 a Het gewicht hangt af van de inhoud.

$$\text{De kleine olifant is een vergroting van de grote olifant met factor } k = \frac{220}{330} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{De kleine olifant weegt } \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 5400 = 1600 \text{ kg.}$$

- b De druk op de poten van de kleine olifant is $\frac{2}{3} \cdot 900 = 600 \text{ gram/cm}^2$.

- c De grote olifant is een vergroting van de kleine olifant met factor $k = \frac{330}{220} = 1\frac{1}{2}$.

De oppervlakte van de oren van de grote olifant is $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$ keer zo groot als de oppervlakte van de oren van de kleine olifant.

Diagnostische toets

Bladzijde 86

1 a $O(\triangle ABF) = O(\text{halve cirkel}) - O(\text{blauwe vlakdelen})$
 $= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6^2 - 9\pi$
 $= 18\pi - 9\pi$
 $= 9\pi$

$$O(\triangle ABF) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \text{bijbehorende hoogte} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \text{bijbehorende hoogte} = 6 \cdot \text{bijbehorende hoogte}$$

$$\text{Dus } 6 \cdot \text{bijbehorende hoogte} = 9\pi \text{ ofwel bijbehorende hoogte} = 1\frac{1}{2}\pi.$$

$$\text{Dus de afstand van } F \text{ tot } AB \text{ is } 1\frac{1}{2}\pi.$$

b Teken het lijnstuk DM .

$$DM = 6 \text{ (straal cirkel)}$$

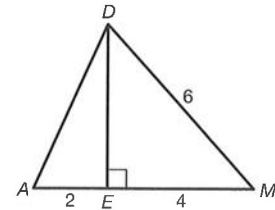
$$DE = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20}$$

$$O(\text{groene vlakdelen}) = O(\text{halve cirkel}) - O(ABCD)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot (12 + 8) \cdot \sqrt{20}$$

$$= 18\pi - 10\sqrt{20}$$

$$\approx 11,83$$



2 a Zie de figuur hiernaast.

$$\angle AMB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\angle ABM = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$$

$$\angle ABC = 2 \cdot \angle ABM = 2 \cdot 67,5^\circ = 135^\circ$$

b Stel de straal van de omgeschreven cirkel is r .

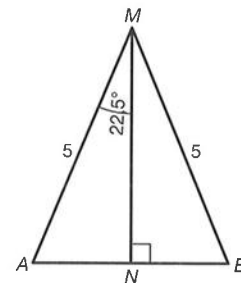
$$\text{Er geldt } \pi r^2 = 25\pi \text{ ofwel } r^2 = 25, \text{ dus } r = 5.$$

$$\sin(22,5^\circ) = \frac{AN}{5} \text{ geeft } AN = 5 \cdot \sin(22,5^\circ) = 1,91\dots$$

$$\text{Dus } AB = 2 \cdot 1,91\dots = 3,82\dots \text{ en de omtrek van de achthoek is } 8 \cdot 3,82\dots \approx 30,6.$$

$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(45^\circ) = 8,83\dots$$

$$\text{Dus de oppervlakte van de achthoek is } 8 \cdot 8,83\dots \approx 70,7.$$



3 $BM = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle ABM$ geeft

$$BM \times AE = AB \times AM$$

$$\sqrt{40} \times AE = 6 \times 2$$

$$AE = \frac{6 \times 2}{\sqrt{40}} \approx 1,90$$

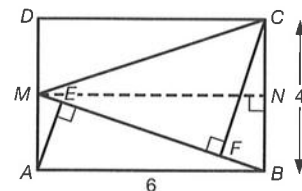
$$CM = BM = \sqrt{40}$$

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCM$ geeft

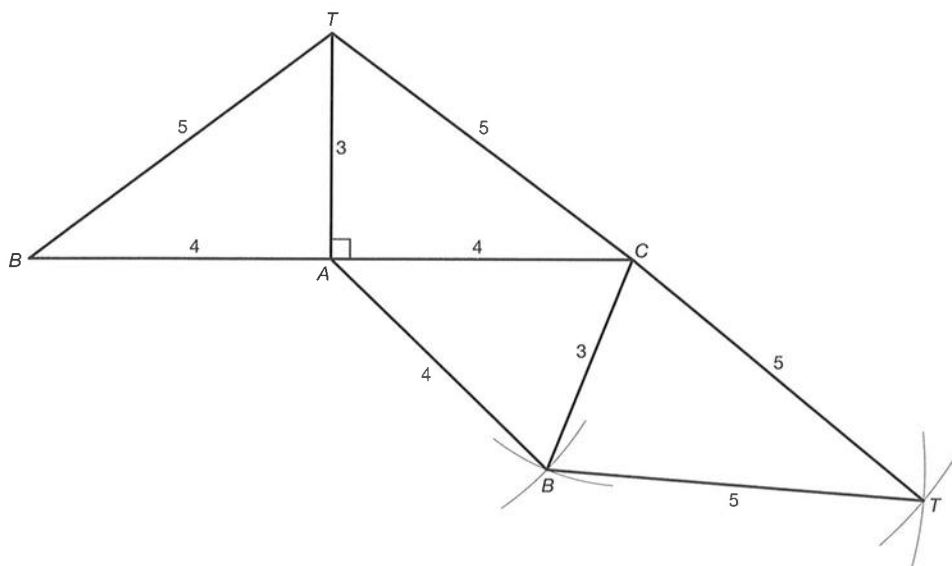
$$BM \times CF = BC \times MN$$

$$\sqrt{40} \times CF = 4 \times 6$$

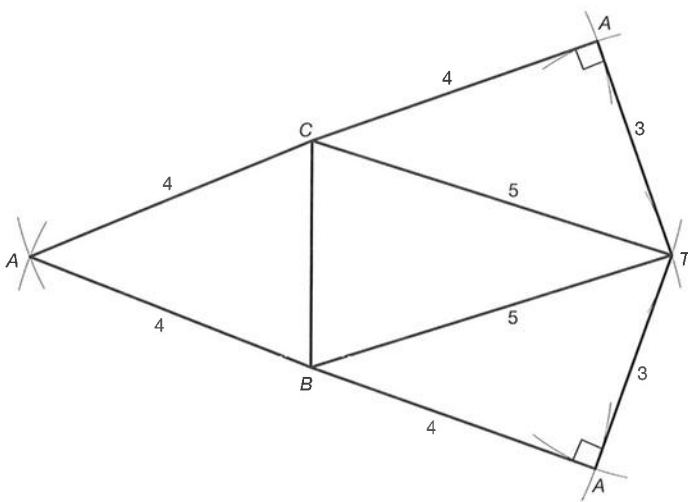
$$CF = \frac{4 \times 6}{\sqrt{40}} \approx 3,79$$



4 a $BT = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$



b



5 $7 - 1 = 6$ meter

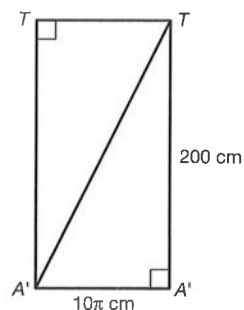
Drie keer per 6 meter, dus één keer per 2 meter ofwel één keer per 200 cm.
In de schets hiernaast is een uitslag van een deel van de mast gegeven waarbij het touw precies eenmaal om de mast is gewonden.

Er geldt $A'T^2 = (10\pi)^2 + 200^2$

$$A'T^2 = 100\pi^2 + 40\,000 = 40986,96\dots$$

$$A'T = \sqrt{40986,96\dots} = 202,45\dots$$

De lengte van het vlaggentouw is $3 \cdot 202,45\dots \approx 607$ cm.



6 a $R = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,32\dots$ cm

Dus de straal van de uitslag van de kegelmantel is 63 mm.

Stel de middelpuntshoek is p° .

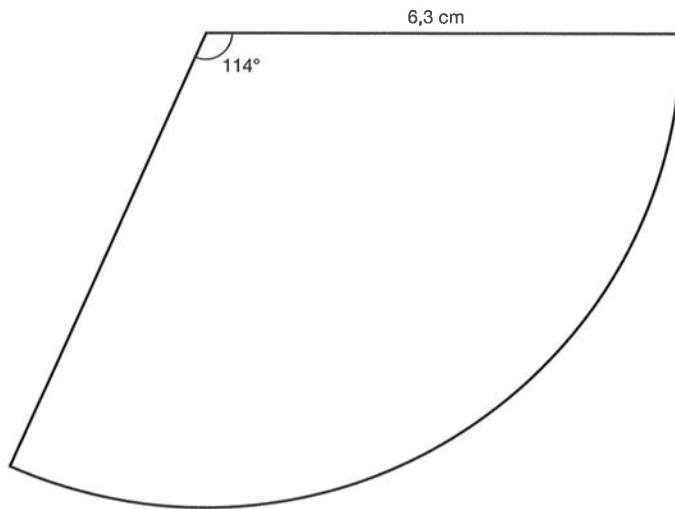
Er geldt $\frac{p}{360} \cdot 2\pi \cdot 6,32\dots = 2\pi \cdot 2$

$$\frac{p}{360} = \frac{2}{6,32\dots}$$

$$p = 360 \cdot \frac{2}{6,32\dots} \approx 113,8$$

Dus de middelpuntshoek van de uitslag is $113,8^\circ$.

b

**Bladzijde 87**

7 $O_{\text{bol}} = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$
 $O_{\text{cilinder}} = 2\pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 32\pi + 64\pi = 96\pi$
 $O_{\text{cilinder}} - O_{\text{bol}} = 96\pi - 64\pi = 32\pi$
 Dus O_{cilinder} is $\frac{32\pi}{64\pi} \times 100\% = 50\%$ groter dan O_{bol} .

8 a $R = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 11,18\dots$
 oppervlakte kegel $= \pi \cdot 5 \cdot 11,18\dots + \pi \cdot 5^2 \approx 254,2$

b $\left. \begin{array}{l} \angle T = \angle T \\ \angle P = \angle M = 90^\circ \end{array} \right\} \triangle PQT \sim \triangle MAT$

$\frac{PQ}{MA} \mid \frac{PT}{MT}$ geeft $\frac{PQ}{5} \mid \frac{6}{10}$, dus $PQ = 3$.

$QT = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6,70\dots$

De oppervlakte van de mantel van de afgeknotte kegel is
 $\pi \cdot 5 \cdot 11,18\dots - \pi \cdot 3 \cdot 6,70\dots \approx 112,4$.

9 $O_{\text{grondeirkel}} = 40 \text{ cm}^2$, dus $\pi r^2 = 40$
 $r^2 = \frac{40}{\pi}$
 $r = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 3,56\dots$

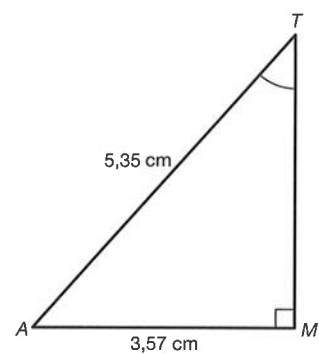
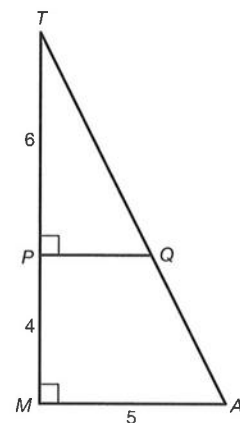
$O_{\text{kegelmantel}} = 60 \text{ cm}^2$, dus $\pi r R = 60$
 $\pi \cdot 3,56\dots \cdot R = 60$
 $R = \frac{60}{\pi \cdot 3,56\dots} = 5,35\dots$

$\sin(\angle ATM) = \frac{AM}{AT} = \frac{3,56\dots}{5,35\dots}$

$\angle ATM = 41,81\dots^\circ$

Dus de tophoek van de kegel is $2 \cdot 41,81\dots^\circ \approx 83,6^\circ$.

10 Van de bol is $r = 5$.
 $I_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 \approx 524$



- 11 a** Het grondvlak is driehoek ABC .

$$CD = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{27} = 3\sqrt{27}$$

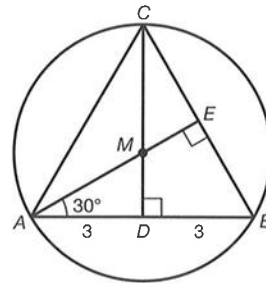
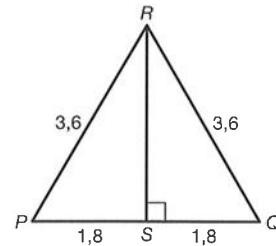
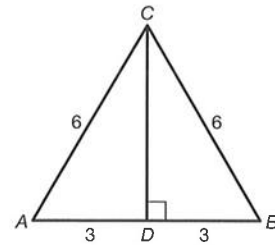
Het bovenvlak van de afgeknotte piramide is een gelijkzijdige driehoek met zijden van $\frac{6}{10} \cdot 6 = 3,6$.

$$RS = \sqrt{3,6^2 - 1,8^2} = \sqrt{9,72}$$

$$O(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot \sqrt{9,72} = 1,8\sqrt{9,72}$$

Dus de inhoud van de afgeknotte piramide is

$$\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{27} \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot 1,8\sqrt{9,72} \cdot 6 \approx 40,74.$$



- b** In $\triangle ADM$ is $\cos(30^\circ) = \frac{3}{AM}$, dus $AM = \frac{3}{\cos(30^\circ)} = 3,46\dots$

$$I_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3,46\dots^2 \cdot 10 = 125,66\dots$$

De inhoud van het deel van de kegel dat buiten de piramide ligt is $125,66\dots - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{27} \cdot 10 \approx 73,70$.

- 12 a** $I(\text{grote kogel}) = 10\,000 \cdot I(\text{kleine kogel})$

$$\text{dus } k^3 = 10\,000$$

$$k = \sqrt[3]{10\,000}$$

$$\text{diameter grote kogel} = \sqrt[3]{10\,000} \cdot 3 \approx 65 \text{ mm}$$

- b** $k^2 = (\sqrt[3]{10\,000})^2 \approx 464$

Dus de oppervlakte is 464 keer zo groot.

- 13** De kleine neushoorn is een vergroting van de grote neushoorn met factor $\frac{120}{380} = \frac{6}{19}$.

De kleine neushoorn weegt $(\frac{6}{19})^3 \cdot 2500 = 78,7286\dots$ kg ofwel 78728,6... gram.

De oppervlakte van de vier poten van kleine neushoorn is $(\frac{6}{19})^2 \cdot 2800 = 279,22\dots$

De druk op de poten van de kleine neushoorn is $\frac{78\,728,6\dots}{279,22\dots} \approx 282 \text{ gram/cm}^2$.

3 Kansrekening

Voorkennis Combinatoriek

Bladzijde 91

- 1**
- a aantal = $5^3 = 125$
 - b aantal = $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
 - c aantal = $5^2 + 5^3 + 5^4 = 775$
 - d aantal = $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 85$
 - e aantal = $1^2 \cdot 5^3 = 125$
 - f aantal = $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$
- 2**
- a aantal = $2^{20} = 1\,048\,576$
 - b aantal = $1^{14} \cdot 2^6 = 64$
 - c Per rij zijn er $\binom{4}{1} = 4$ mogelijkheden met precies één zwart vakje.
aantal = $4^5 = 1024$
 - d Per kolom zijn er $\binom{5}{2} = 10$ mogelijkheden met precies twee zwarte vakjes.
aantal = $10^4 = 10\,000$
 - e aantal = $\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 2500$
 - f Per rij zijn er $2^4 = 16$ mogelijkheden.
Per rij is er 1 mogelijkheid met 4 zwarte vakjes.
Dus per rij zijn er $16 - 1 = 15$ mogelijkheden met geen vier zwarte vakjes.
aantal = $15^5 = 759\,375$
- 3**
- a 6 6 1 1 1 1 1
 $N(\text{twee zessen en vijf enen}) = \binom{7}{2} = 21$
 - b $N(\text{geen enkele zes}) = 5^7 = 78\,125$
 - c 6 6 6 6 6 6 5
 $N(41 \text{ ogen}) = \binom{7}{1} = 7$
 - d 6 6 6 6 6 6 4 $\binom{7}{6} = 7$ keer
6 6 6 6 6 5 5 $\binom{7}{5} = 21$ keer
 $N(40 \text{ ogen}) = 7 + 21 = 28$
 - e 7 ogen 1 1 1 1 1 1 1 1 keer
8 ogen 1 1 1 1 1 1 2 $\binom{7}{6} = 7$ keer
9 ogen 1 1 1 1 1 1 3 $\binom{7}{6} = 7$
1 1 1 1 1 2 2 $\binom{7}{5} = 21$
 $N(\text{hoogstens 9 ogen}) = 1 + 7 + 7 + 21 = 36$