

15 Examentraining

15.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 130

- 1 a** $1,32 \cdot 1,04 \cdot 1,16 \approx 1,592$
Dus de populatie is gegroeid met 59,2%.
- b** $g_{2\text{ jaar}} = 1,32 \cdot 1,04 = 1,3728$, dus $g_{\text{jaar}} = 1,3728^{\frac{1}{2}} = 1,171\dots$
Dus de gemiddelde jaarlijkse toename is 17,1% en niet 18%.
- c** Los op $380 \cdot 1,08^x = 750$.
Voer in $y_1 = 380 \cdot 1,08^x$ en $y_2 = 750$.
De optie snijpunt geeft $x = 8,83\dots$
Dus in het jaar $2021 + 8 = 2029$.
- d** In 2015 is de winst $\frac{25\,000}{0,32} = 78\,125$ euro.
In 2020 is de winst $\frac{42\,000}{0,35} = 120\,000$ euro.
Dus de toename is $\frac{120\,000 - 78\,125}{78\,125} \times 100\% = 53,6\%$.
- e** In 2018 is de gemiddelde verblijfsduur $\frac{350}{280} = 1,25$ uur = 1 uur en 15 minuten.
In 2020 is de gemiddelde verblijfsduur $\frac{1,8 \cdot 350}{340} = 1,85\dots$ uur $\approx$ 1 uur en 51 minuten.
Dus de gemiddelde verblijfsduur is $51 - 15 = 36$ minuten langer.
- f** $T = at + b$ met $a = \frac{\Delta T}{\Delta t}$
Bij $t = 15$ hoort $T = 9,9$.
Bij $t = 45$ hoort $T = 11,1$.
$$\left. \begin{array}{l} T = 9,9 \\ T = 11,1 \end{array} \right\} a = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{11,1 - 9,9}{45 - 15} = \frac{1,2}{30} = 0,04$$

$$\left. \begin{array}{l} T = 0,04t + b \\ t = 15 \text{ en } T = 9,9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,04 \cdot 15 + b = 9,9 \\ 0,6 + b = 9,9 \\ b = 9,3 \end{array}$$

Dus $T = 0,04t + 9,3$.
Los op $0,04t + 9,3 = 12,1$
 $0,04t = 2,8$
 $t = 70$
Dus in het jaar $1975 + 70 = 2045$.

Bladzijde 131

- g** In 14 jaar 2335 minder, dus in 1 jaar $\frac{2335}{14} \approx 167$ minder.
 $3515 - 2500 = 1015$, dus de afname tot 2500 duurt $\frac{1015}{167} = 6,0\dots$ jaar.
Dus in het jaar $2019 + 6 = 2025$.
- h** 1 Ja, de tijd tussen de tweede en vijfde melding is $3 + 14 + 5 = 22$ uur, dus die kunnen op dezelfde dag zijn geweest.
2 Nee, want als bijvoorbeeld de eerste melding van april op 1 april om 22:00 uur was, dan was de laatste melding van maart op 31 maart om 20:00 uur.

Bladzijde 135

- 2** 15% van € 6299 is € 944,85.
De subsidie is dan € 650, dus de aanschafprijs is $6299 - 650 = 5649$ euro.
De jaarlijkse opbrengst in euro's is $2500 \cdot 0,225 = 562,50$.
De terugverdientijd is $\frac{5649}{562,50} \approx 10,04$ jaar, dus in 2023 is het volledige aankoopbedrag terugverdiend.

Bladzijde 136

- 3 a** Er zijn minstens 80 bokken, 105 hinds, 40 jonge bokken en 50 jonge hinds.
Dus er zijn minstens $80 + 105 + 40 + 50 = 275$ damherten aanwezig in dit telgebied.
- b** De verhouding in 2005 is $\frac{1401}{512} = 2,74... \approx 2,7$.
De verhouding in 2006 is $\frac{1742}{654} = 2,66... \approx 2,7$.
De verhouding in 2007 is $\frac{1802}{660} = 2,73... \approx 2,7$.
De verhoudingen waren dus telkens ongeveer gelijk.
De gemiddelde verhouding is $\frac{2,74... + 2,66... + 2,73...}{3} \approx 2,71$.
De totaalschatting in 2008 is $726 \cdot 2,71 \approx 2000$.
De totaalschatting in 2009 is $1084 \cdot 2,71 \approx 2900$.
De totaalschatting in 2010 is $1178 \cdot 2,71 \approx 3200$.

Bladzijde 137

- c** Lees af: de toename in 1999 is 76% en de toename in 2000 is 14%.
Over de periode 1997-2000 is de groeifactor $1,39 \cdot 1,76 \cdot 1,14 \approx 2,79$.
Dus de populatie damherten is gegroeid met 179%.
- d** Neem twee groeipercents die gemiddeld 29% zijn, bijvoorbeeld 5% en 53%.
Dan is $g_{2 \text{ jaar}} = 1,05 \cdot 1,53 = 1,6065$ en $g_{\text{jaar}} = 1,6065^{\frac{1}{2}} \approx 1,267$.
Dus de groei per jaar is dan 26,7% en niet 29%.

Bladzijde 138

- e** In de AWD is ruimte voor $34 \cdot 200 = 6800$ damherten.
Los op $1802 \cdot 1,15^x = 6800$.
Voer in $y_1 = 1802 \cdot 1,15^x$ en $y_2 = 6800$.
De optie snijpunt geeft $x = 9,502...$
Dus in het jaar $2007 + 10 = 2017$.
- 4** Het minimale gemiddeld aantal tekens is $\frac{10}{7} \approx 1,4$.
Het maximale gemiddeld aantal tekens is $\frac{11}{5} = 2,2$.
Dus het gemiddeld aantal tekens per woord op een tablet ligt tussen de 1,4 en 2,2.
- 5** In 30 jaar 115 gram minder, dus in 1 jaar $\frac{115}{30} = 3,83...$ gram minder.
 $135 - 50 = 85$ gram, dus de afname tot 50 gram duurt $\frac{85}{3,83...} = 22,1...$ jaar.
Dus in het jaar $2010 + 23 = 2033$.

Bladzijde 139

- 6 1** De toename van de gasproductie is $\frac{47 - 22}{22} \times 100\% \approx 114\%$.
De toename van het aantal aardbevingen is $\frac{31 - 3}{3} \times 100\% \approx 933\%$.
Dus bewering 1 is niet waar.
- 2** In 2003 daalde gasproductie, maar in 2004 steeg het aantal aardbevingen.
Dus bewering 2 is niet waar.
- 3** In de periode 2005-2011 is de gemiddelde toename $\frac{31 - 17}{6} \approx 2,3$ per jaar.
In de periode 1998-2004 is de gemiddelde toename $\frac{11 - 6}{6} \approx 0,8$ per jaar.
Dus bewering 3 is waar.

Bladzijde 140

- 7 a** In 2012 is het aantal bezochte pagina's $2\,861\,948 \cdot 5,62 \approx 16\,084\,148$.
 In 2013 is het aantal bezochte pagina's $6\,091\,312 \cdot 7,35 \approx 44\,771\,143$.
 Dus de toename is $\frac{44\,771\,143 - 16\,084\,148}{16\,084\,148} \times 100\% \approx 178\%$.
- b** In 2012 is de gemiddelde verblijfsduur $\frac{15\,025\,248}{2\,861\,948} \approx 5,25$ minuten.
 In 2013 is de gemiddelde verblijfsduur $\frac{15\,025\,248 \cdot 3,75}{6\,091\,312} \approx 9,25$ minuten.
 Dus de gemiddelde verblijfsduur per bezoek is $9,25 - 5,25 = 4$ minuten langer.
- c** Los op $110 \cdot (x - 1,5) = 200$
 $110x - 165 = 200$
 $110x = 365$
 $x = 3,318\dots$
 Dus bij 3 320 000 bezoekers.

Bladzijde 141

- d** Het aantal voetgangers per dag op een drukke dag is $3 \cdot 15\,100 = 45\,300$.
 Het aantal voetgangers in een piekuur op een drukke dag is $\frac{1}{5} \cdot 45\,300 = 9060$.
 Het aantal voetgangers in een minuut tijdens een piekuur op een drukke dag is $\frac{1}{60} \cdot 9060 = 151$.
 $k = \frac{151}{60 \times 0,75 \times 6} = 0,5\dots$
 Dus de voetgangersdichtheid blijft onder de 0,71.

Bladzijde 142

- 8 a** $k_z = at + 18$ met $a = \frac{\Delta k_z}{\Delta t} = \frac{8 - 18}{21 - 9} = -\frac{5}{6}$
 Dus $k_z = -\frac{5}{6}t + 18$.
 Los op $-0,31t + 10 = -\frac{5}{6}t + 18$
 $0,52\dots t = 8$
 $t \approx 15,3$
 Dus in het jaar $2009 + 15 = 2024$.

Bladzijde 143

- b** Los op $k_m = 2 \cdot k_l$
 $0,28t + 4,3 = 2(-0,31t + 10)$
 $0,28t + 4,3 = -0,62t + 20$
 $0,9t = 15,7$
 $t \approx 17,4$
 Dus in het jaar $2009 + 17 = 2026$.
- c** $k_g = \frac{1}{2}(k_l + k_m) = \frac{1}{2}(-0,31 \cdot t + 10,0 + 0,28 \cdot t + 4,3) = \frac{1}{2}(-0,03 \cdot t + 14,3) \approx -0,02 \cdot t + 7,15$
 Dus $a = -0,02$ en $b = 7,15$.
- d** In 2013 wordt $228\,000 \cdot 365 \cdot 5 = 416\,100\,000$ kWh opgewekt.
 Daarmee kunnen $\frac{416\,100\,000}{3500} \approx 118\,900$ huishoudens van energie worden voorzien.
- e** In 2013 is de totale energiebehoefte $\frac{5,95}{0,05} = 119$ miljard kWh.
 In 2023 is de totale energiebehoefte $\frac{23}{0,15} = 153,3\dots$ miljard kWh.
 Dus de toename is $\frac{153,3\dots - 119}{119} \times 100\% \approx 29\%$.

Bladzijde 144

- 9 a** Aflezen (2005, 30 000) en (2012, 27 000).

In 7 jaar 3000 minder, dus in 1 jaar $\frac{3000}{7}$ minder.

2020 is 8 jaar na 2012, dus in 2020 is het aantal $27\,000 - 8 \cdot \frac{3000}{7} \approx 24\,000$.

Bladzijde 145

- b** In het voorjaar neemt het gewicht in 20 dagen ongeveer 46 gram toe, dat is gemiddeld 2,3 gram per dag.
In het najaar neemt het gewicht gemiddeld 0,6 gram per dag toe (zie de tekst bij de lijn).
Dus de gemiddelde toename in het voorjaar is $\frac{2,3}{0,6} \approx 3,8$ keer zo groot als in het najaar. Dus stelling I is niet waar.
Uit de onderste figuur blijkt dat er in het voorjaar geen toename is van de hoeveelheid vet. Dus stelling II is waar.
- c** Het lichaamsgewicht G in gram in het voorjaar is $G = at + 198$ met
 $a = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{244 - 198}{20} = 2,3$.
Dus $G = 2,3t + 198$.
De hoeveelheid vet in het voorjaar is steeds 16 gram.
Dus het vetpercentage is $P_{\text{voorjaar}} = \frac{16}{2,3t + 198} \times 100 = \frac{1600}{2,3t + 198}$.

Bladzijde 146

- 10 a** De metingen in de figuur beslaan heel 2015, heel 2016 en de eerste vijf maanden van 2017.
aantal dagen = $365 + 366 + 31 + 28 + 31 + 30 + 31 = 882$
aantal metingen = $882 \cdot 24 = 21\,168$
- b** Lees af: op 01-01-15 was de hoogte 47,092 meter en op 29-12-16 was de hoogte 47,083 meter.
In $4 \cdot 26 = 104$ weken 0,009 meter minder, dus in 1 week $\frac{0,009}{104}$ meter minder.
 $47,083 - 47 = 0,083$ meter, dus de afname tot 47 meter duurt
 $\frac{0,083}{\frac{0,009}{104}} = 959,1... \text{ weken} \approx 18,4 \text{ jaar}$.
Dus in het jaar $2017 + 18 = 2035$.

Bladzijde 147

- c** 1 Tussen de tweede en vierde beving zitten $7 + 14 = 21$ dagen. Elke kalendermaand heeft ten minste 28 dagen, dus ze zouden in één kalendermaand kunnen hebben plaatsgevonden.
- 2 Twee opeenvolgende kalendermaanden hebben samen maximaal 62 dagen. Dat is minder dan 63, dus zelfs als de voorgaande aardbeving op de eerste dag van een kalendermaand plaats zou hebben gevonden, dan zou de eerste aardbeving in 1993 minstens twee kalendermaanden later kunnen zijn.

- 11** Voor 12 cupcakes heb je 135 gram suiker nodig, dus $\frac{135}{12} = 11,25$ gram suiker per cupcake.

Met 300 gram suiker kun je dan $\frac{300}{11,25} = 26,6... \text{ cupcakes}$ maken.

Dus Carmen kan maximaal 26 cupcakes bakken.

Bladzijde 148

- 12 a** 4 minuten en 12 seconden = 4,2 minuten
 Dus in totaal $2,2 \cdot 10^9 \cdot 4,2 \text{ minuten} = \frac{2,2 \cdot 10^9 \cdot 4,2}{60 \cdot 24 \cdot 365} \approx 17\,600 \text{ jaar}$.
- b** Eerst komen er dagelijks meer views bij, dus de totaalgrafiek is toenemend stijgend.
 Daarna komen er dagelijks steeds minder views bij, dus de totaalgrafiek is afnemend stijgend.
 Dus bewering III is juist.

15.2 Combinatoriek en rijen**Bladzijde 149**

- 13 a** aantal = $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 9216$
- b** De rechthoekjes kunnen verticaal OF horizontaal worden geplaatst.
 Met twee vierkantjes kun je kiezen uit 6 kolommen en 3 rijen OF 4 rijen en 5 kolommen.
 aantal = $6 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 38$
 Met drie vierkantjes kun je kiezen uit 6 kolommen en 2 rijen OF 4 rijen en 4 kolommen.
 aantal = $6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 28$
 Totaal aantal manieren is $38 + 28 = 66$.
- c** aantal = $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 72\,072\,000$
- d** aantal = $\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} \approx 1,17 \cdot 10^{10}$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{20!}{(5!)^4} \approx 1,17 \cdot 10^{10}$$

- e** aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 7\,741\,440$
- f** Formule I geeft $u_1 = \frac{1}{-5}$ en $u_2 = \frac{4}{25}$; dus I hoort niet bij de gegeven rij.
 Formule II geeft $u_1 = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$; dus II hoort niet bij de gegeven rij.
 Formule III geeft $u_1 = \frac{-1}{5}$, $u_2 = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$, ...; dus III hoort bij de gegeven rij.
- g** $u_0 = \sqrt{115} \cdot \frac{(-2)^0}{1 \cdot 5^0} = \sqrt{115}$
 $u_1 = \sqrt{115} \cdot \frac{(-2)^1}{5 \cdot 5^1} = \sqrt{115} \cdot \frac{-2}{25}$
 $u_2 = \sqrt{115} \cdot \frac{(-2)^2}{9 \cdot 5^2} = \sqrt{115} \cdot \frac{4}{225}$
 $u_3 = \sqrt{115} \cdot \frac{(-2)^3}{13 \cdot 5^3} = \sqrt{115} \cdot \frac{-8}{1625}$
 $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \sqrt{115} \left(1 - \frac{2}{25} + \frac{4}{225} - \frac{8}{1625} \right) \approx 10,004$
- h** $A_n = 7 + 12 \cdot (n-1) = 7 + 12n - 12 = 12n - 5$
 $A_n = 200$ geeft $12n - 5 = 200$, dus $n = 17,08...$
 Dus vanaf de 18^e laag zitten er meer dan 200 blokken in een laag.

Bladzijde 150

- i** $a^9 = \frac{1}{20}$, dus $a = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 0,717$
 $b = \frac{20-1}{10-1} = \frac{19}{9}$
 Dus $l_n = 20 \cdot 0,717^{n-1}$ en $L_n = 20 - \frac{19}{9}(n-1)$.
 Voer in $y_1 = 20 - \frac{19}{9}(x-1) - 20 \cdot 0,717^{x-1}$.
 Tabel geeft bij $x = 3$ geldt $y = 5,4959...$, bij $x = 4$ geldt $y = 6,2946...$ en bij $x = 5$ geldt $y = 6,2698...$
 Dus bij het 4^e vierkant is het verschil maximaal en dat verschil is ongeveer 6,29.

j $B_1 + B_2 + \dots + B_7 = 44 + B_5 + B_6 + B_7 = 44 + 29 + 45 + 70 = 188$

k $C_n = r \cdot C_{n-1}$ met $C_0 = 10$

$$r^{15} = \frac{19,8}{10} = 1,98, \text{ dus } r = 1,98^{\frac{1}{15}} \approx 1,0466$$

Dus $C_n = 1,0466 \cdot C_{n-1}$ met $C_0 = 10$.

l $K_0 = 2$ geeft $\frac{a(1-g^2)}{1-g^2} = 2$, dus $a = 2$.

$$K_n = \frac{2(1-g^{n+2})}{1-g^2} \text{ en } K_1 = 6,5 \text{ geeft } \frac{2(1-g^3)}{1-g^2} = 6,5.$$

Voer in $y_1 = \frac{2(1-x^3)}{1-x^2}$ en $y_2 = 6,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 3$, dus $g = 3$.

$$\text{Dus } K_n = \frac{2(1-3^{n+2})}{1-3^2} = -\frac{1}{4}(1-3^{n+2}).$$

Voer in $y_1 = -\frac{1}{4}(1-3^{n+2})$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $K_9 = 44\,286,5$ en $K_{10} = 132\,860$.

Dus vanaf $n = 10$ is $K_n > 100\,000$.

m $B_n = 2000 \cdot g^{n-1}$

$$g^2 = \frac{1000}{2000} = 0,5, \text{ dus } g = 0,5^{\frac{1}{2}} \approx 0,7071$$

$$\text{Dus } B_n = 2000 \cdot 0,7071^{n-1}.$$

Voer in $y_1 = 2000 \cdot 0,7071^{x-1}$ en maak een tabel.

Uit de tabel volgt $B_{16} \approx 11,05$ en $B_{17} \approx 7,81$.

Dus 16 personen ontvangen een bedrag.

Bladzijde 154

- 14 a Voor de eerste, vijfde en negende kolom is er steeds 1 mogelijkheid, voor de tweede en achtste kolom zijn er 4 mogelijkheden, voor de derde en zevende zijn er $\binom{4}{2}$ mogelijkheden, en voor de vierde en zesde zijn er $\binom{4}{3}$ mogelijkheden.
- $$\text{aantal} = 4 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4 = 9216$$

Bladzijde 155

- b Het aantal zwarte vakjes in kolom 42 tot en met 82 is precies gelijk aan het aantal witte vakjes in kolom 1 tot en met 41. Als je deze zwarte vakjes en witte vakjes omruilt, dan krijg je als eindresultaat een vierkant van 41 bij 41 zwarte vakjes.
- $$\text{aantal} = 41^2 = 1681$$

15 a $\text{aantal} = 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 = 17\,576\,000 \approx 17\,600\,000$

b $\text{aantal} = 99 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 10 - 99 \cdot 82 \cdot 10 = 3\,849\,120 - 81\,180 = 3\,767\,940$

Dat is $\frac{3\,767\,940}{17\,576\,000} \times 100\% \approx 21,4\%$, dus de verslaggever heeft geen gelijk.

Bladzijde 156

- 16 a Voor de klinkers zijn er $5 \cdot 4$ mogelijkheden en voor de medeklinkers zijn er $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$ mogelijkheden.
- $$\text{aantal} = 5 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 37\,209\,600$$

Bladzijde 157

- b Uit het teken so volgt dat medeklinker 2 een s is en klinker 2 een o. Hieruit volgen de tekens voor to en no.
- Woord 1 eindigt op no-so en dat moet dus wel Ko-no-so zijn.
- Woord 2 en 3 eindigen allebei op to, dus dat kunnen Pa-i-to of Ru-ki-to zijn. De andere tekens in deze woorden zijn echter onbekend, dus deze woorden kun je met de uitgangspunten niet aan een plaatsnaam koppelen.

Bladzijde 158

- 17** 1 vierkant van 1 bij 1, 1 vierkant van 3 bij 3 en 4 vierkanten van 2 bij 2, dus totaal $1 + 1 + 4 = 6$ vierkanten.
 4 rechthoeken van 2 bij 1
 2 rechthoeken van 3 bij 1
 4 rechthoeken van 3 bij 2
 Totaal $6 + 4 + 2 + 4 = 16$ verschillende vormen.

18 $A_n = r \cdot A_{n-1}$ met $A_0 = 12$

$$r^{220} = \frac{200}{12} = \frac{50}{3}, \text{ dus } r = \left(\frac{50}{3}\right)^{\frac{1}{220}} \approx 1,0129$$

Dus $A_n = 1,0129 \cdot A_{n-1}$ met $A_0 = 12$.

Bladzijde 159

19 a aantal $= \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 1680$

Alternatieve uitwerking

$$\text{aantal} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{9!}{6^3} = 1680$$

b $r^9 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ geeft $r = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 0,836$

c $u_n = u_0 + v \cdot n = 20 + v \cdot n$, want $u_0 = 20$

$$u_9 = 4 \text{ geeft } 20 + 9v = 4$$

$$9v = -16$$

$$v \approx -1,78$$

d De directe formule van een rij die hoort bij een exponentieel verband is $u_n = 20 \cdot 0,84^n$.

Voor het verschil geldt $V = 20 - 1,78n - 20 \cdot 0,84^n$.

Voer in $y_1 = 20 - 1,78x - 20 \cdot 0,84^x$.

De tabel geeft dat het maximale verschil is bij $x = 4$.

Dus bij achthoek 4 is het verschil maximaal.

Het maximale verschil is ongeveer 2,9 cm.

Bladzijde 160

20 a omtrek cirkel $= (100 + 4) \cdot 8 + 62\,000 = 62\,832$

$$\pi = \frac{\text{omtrek cirkel}}{\text{diameter cirkel}} = \frac{62\,832}{20\,000} \approx 3,1416$$

b Bij 9 termen geeft de rij $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} = 3,252\dots$

$$3,252\dots - \pi = 0,110\dots > 0,1$$

Bij 10 termen geeft de rij $3,252\dots - \frac{4}{19} = 3,0418\dots$

$$\pi - 3,0418\dots = 0,09975\dots < 0,1$$

Dus je hebt minimaal 10 termen nodig.

c Formule II geeft $u_1 = \frac{4 \cdot (-1)^0}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{1} = 1$, dus II hoort niet bij de gegeven rij.

Dus formule I is juist.

Bladzijde 161

d $\sqrt{12} \left(\frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 1) \cdot 3^0} \right) + \sqrt{12} \left(\frac{(-1)^1}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 3^1} \right) + \sqrt{12} \left(\frac{(-1)^2}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot 3^2} \right) = 3,156\dots$

$$\pi - 3,156\dots \approx -0,01$$

Dus het verschil is 0,01.

- 21 a** $A_4 = 1,4 \cdot 11,76 = 16,464$
 $A_5 = 1,4 \cdot 16,464 = 23,049...$
 $A_6 = 1,4 \cdot 23,049... = 32,269...$, dus 32 cupcakes.
 $A_7 = 1,4 \cdot 32,269... = 45,177...$, dus 45 cupcakes.
 $A_8 = 1,4 \cdot 45,177... = 63,248...$, dus 63 cupcakes.
 $A_9 = 1,4 \cdot 63,248... = 88,547$, dus 89 cupcakes.
Totaal aantal cupcakes is $32 + 45 + 63 + 89 = 294$.
Dus het model wijkt 6 cupcakes af van de werkelijkheid.
- b** $A_n = 6 + 18 \cdot (n - 1) = 6 + 18n - 18 = 18n - 12$
 $A_n = 160$ geeft $18n - 12 = 160$, dus $n = 9,55...$
Dus vanaf de 10^e laag staan er meer dan 160 cupcakes op een laag.

Bladzijde 162

- 22 a** De vaste factor is $\sqrt{0,5}$, dus de lengte van de zijde van een vierkant in cm na n stappen is gelijk aan $u_n = 13 \cdot (\sqrt{0,5})^n$.
- Voer in $y_1 = 13 \cdot (\sqrt{0,5})^x$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $u_{14} \approx 0,102$ en $u_{15} \approx 0,072$.
Dus Fleur stopt na stap 14.
- b** $r = 2$ en $b = 1$ geeft $S_n = \frac{1 \cdot (1 - 2^{n+1})}{1 - 2}$, oftewel $S_n = 2^{n+1} - 1$.
- Voer in $y_1 = 2^{x+1} - 1$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $S_9 = 1023$ en $S_{10} = 2047$.
Dus bij stap 10 is het totale aantal vierkantjes voor het eerst meer dan 2000.

15.3 Werken met formules en grafieken**Bladzijde 163**

- 23 a** $G = 500$ en $x = 2y$ geeft $F = 500 \cdot \left(\frac{2y}{y}\right)^{1,3} = 500 \cdot 2^{1,3} \approx 1231$.
- b** $A = 4$ invullen in de formule geeft $B = 50 \cdot 4^{0,1} = 57,43...$
Bij $A = 4$ aflezen in de grafiek geeft $B = 60$.
Dus de meetwaarde ligt $\frac{60 - 57,43...}{57,43...} \times 100\% \approx 4,5\%$ boven de berekende waarde.
- c** $P = (4x - 3 + 3y - 4) \cdot 5 + (15 - 2x)(10 - y)$
 $= 20x - 15 + 15y - 20 + 150 - 15y - 20x + 2xy$
 $= 2xy + 115$
- d** De teller is constant en positief.
Als q toeneemt, dan neemt de noemer toe en dus neemt de breuk af.
Dus H wordt kleiner.
- e** Bij $g = 1$ hoort $G = 0,453$, dus $g = \frac{1}{0,453} G$.
1 foot = 30,48 cm = 0,3048 m, dus bij $l = 1$ hoort $L = 0,3048$ en $l = \frac{1}{0,3048} L$.
- In de formule invullen geeft $S = \frac{12 \cdot \frac{1}{0,453} G}{\left(\frac{1}{0,3048} L\right)^2} = \frac{\frac{12}{0,453} G}{\left(\frac{1}{0,3048}\right)^2 L^2} \approx 2,46 \cdot \frac{G}{L^2}$.
- Dus $c = 2,46$.

- f Maak een tabel, bijvoorbeeld:

x	10	20	30	40
y	48,837	56,522	63,265	69,231

$+ 7,68$ $+ 6,74$ $+ 5,97$

De toename van y bij stapgrootte 10 wordt steeds kleiner, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

- g $y = ax^2 + b$ door $(0, 5)$ geeft $b = 5$.
 $y = ax^2 + 5$ door $A(3, -1)$ geeft $9a + 5 = -1$, dus $a = -\frac{2}{3}$.

Bladzijde 164

h $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 + 7$

Oplossen $-\frac{1}{2}x^2 + 4 = 0$ geeft $x^2 = 8$, dus $x_A = -\sqrt{8}$ en $x_B = \sqrt{8}$, oftewel $AB = 2\sqrt{8}$.

Oplossen $-\frac{1}{2}x^2 + 7 = -3$ geeft $x^2 = 20$, dus $x_C = -\sqrt{20}$ en $x_D = \sqrt{20}$, oftewel $CD = 2\sqrt{20}$.

Dus CD is $\frac{2\sqrt{20}}{2\sqrt{8}} \approx 1,58$ keer zo lang als AB .

Bladzijde 170

- 24 a 4 minuten en 52 seconden is 292 seconden, dus $T_1 = 292$.

$$T_2 = 292 \cdot \left(\frac{10000}{1500}\right)^{1,07} \approx 2223$$

Dus de te verwachten tijd is 37 minuten en 3 seconden.

- b $d_1 = 3000$, $T_1 = 509$ en $d_2 = 2 \cdot 3000 = 6000$ geeft $T_2 = 509 \cdot \left(\frac{6000}{3000}\right)^{1,07} = 1068,61\dots$

De gemiddelde snelheid over 3000 meter is $\frac{3000}{509} = 5,893\dots$ m/s.

De gemiddelde snelheid over 6000 meter is $\frac{6000}{1068,61\dots} = 5,614\dots$ m/s.

$$\frac{5,614\dots - 5,893\dots}{5,893\dots} \times 100\% \approx -4,7\%$$

Dus de gemiddelde snelheid neemt af met 4,7%.

Bladzijde 171

- c $T = 206$ en $d = 1,5$ geeft $K = \frac{T}{d} = \frac{206}{1,5}$.

$$a \cdot 1,5^{0,07} = \frac{206}{1,5}, \text{ dus } a = \frac{\left(\frac{206}{1,5}\right)}{1,5^{0,07}} \approx 133,49.$$

- d $d = 30$ invullen in de formule geeft $K = 133 \cdot 30^{0,07} = 168,75\dots$

Bij 30 km aflezen in de grafiek geeft 175 seconden.

Dus de kilometertijd is $\frac{175 - 168,75\dots}{168,75\dots} \times 100\% \approx 3,7\%$ hoger dan de formule voorspelt.

- 25 a De teller is constant en positief.

Als t toeneemt, dan neemt de noemer toe en dus neemt de breuk af.

Dus P_{voorjaar} wordt kleiner en dus neemt het vetpercentage af.

- b Maak een tabel, bijvoorbeeld:

t	0	20	40	60
P_{najaar}	11,1	16,0	20,4	24,4

$+ 4,9$ $+ 4,4$ $+ 4,0$

De toename van P_{najaar} bij stapgrootte 20 wordt steeds kleiner, dus de grafiek van P_{najaar} is afnemend stijgend.

Bladzijde 172

- 26 a** Aan beide handen moeten $5 - 5 = 0$ vingers omgebogen worden.
De optelsom van de omgebogen vingers is 0, vermenigvuldigd met 10 geeft 0.
De vermenigvuldiging van de opgestoken vingers is $5 \cdot 5 = 25$.
Het antwoord is $0 + 25 = 25$ en dat is het goede antwoord.
- b** Het aantal omgebogen vingers is $x - 5$.
Het aantal omgebogen en opgestoken vingers op één hand samen is 5.
Het aantal opgestoken vingers is $5 - (x - 5) = 5 - x + 5 = 10 - x$.
- c** Eerste deel: $(x - 5 + y - 5) \cdot 10 = (x + y - 10) \cdot 10 = 10x + 10y - 100$.
Tweede deel: $(10 - x)(10 - y) = 100 - 10x - 10y + x \cdot y$.
Verder herleiden: $10x + 10y - 100 + 100 - 10x - 10y + x \cdot y = x \cdot y$.

Bladzijde 173

- 27 a** $L = 15$ en $R = 0,18$ geeft $\frac{G}{15^3} = 0,18$, dus $G = 607,5$.
 $L = 15$ en $R = 0,22$ geeft $\frac{G}{15^3} = 0,22$, dus $G = 742,5$.
Dus tussen 607 en 743 gram.
- b** Bij meten over het schild heen is L groter.
Als L groter is, dan is L^3 groter, dus dan is $\frac{G}{L^3}$ kleiner.
Dus de Jackson Ratio is dan kleiner dan in werkelijkheid.
- c** Bij $W = 1$ hoort $G = 454$, dus $G = 454W$.
Bij $l = 1$ hoort $L = 2,54$, dus $L = 2,54l$.
In de formule invullen geeft $R = \frac{454W}{(2,54l)^3} = \frac{454}{2,54^3} \cdot \frac{W}{L^3}$.
Dus $c = \frac{454}{2,54^3} \approx 27,7$.

Bladzijde 174

- 28 a** $h = ax^2 + b$ door $(0, -32)$ geeft $b = -32$.
 $h = ax^2 - 32$ door $(4, -30)$ geeft $16a - 32 = -30$, dus $a = \frac{1}{8}$.

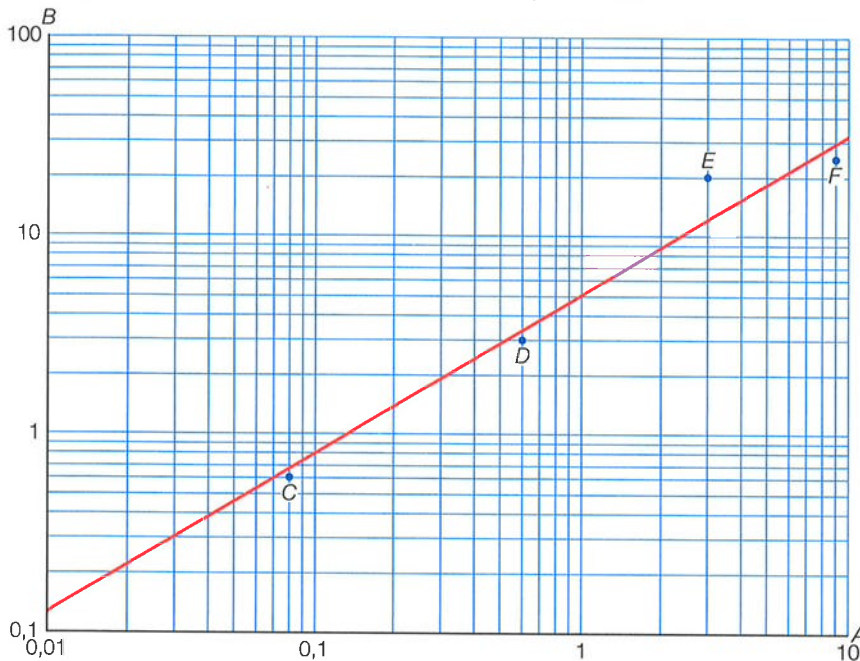
Bladzijde 175

- b** De oppervlakte van het gebied in 2013 is $\pi \cdot 4^2 = 50,2... \text{ km}^2$.
Oplossen $0,084x^2 - 47 = -30$ geeft $x^2 = \frac{17}{0,084}$, dus $x \approx 14,2...$ of $x \approx -14,2...$
Dus de straal van het gebied in 2080 is $14,22... \text{ km}$ en de oppervlakte is $\pi \cdot 14,2...^2 = 635,7... \text{ km}^2$.
Dus de oppervlakte is $\frac{635,7...}{50,2...} \approx 13$ keer zo groot.

15.4 Formules met exponenten en logaritmen**Bladzijde 176**

- 29 a** Er geldt $g^{15} = 2$, met g de groeifactor per jaar.
 $g^{15} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{15}} \approx 1,047$
Het groeipcentage per jaar is 4,7%.
- b** Stel g is de groeifactor per jaar in de tweede situatie.
Er geldt dan dat $600 \cdot 1,045^{10} = 500 \cdot g^{12}$.
Dit geeft $g^{12} = \frac{600 \cdot 1,045^{10}}{500} = 1,863...$, dus $g = 1,863...^{\frac{1}{12}} \approx 1,053$.
Dus $x = 5,3$.
- c** Aflezen in de grafiek geeft $P(0,04; 0,5)$, dus $B = 0,5$.
 $A = 0,04$ invullen in de formule geeft $B = 5 \cdot 0,04^{0,8} = 0,380...$
Dus de afgelezen waarde is $\frac{0,5 - 0,380...}{0,380...} \times 100\% \approx 31,3\%$ groter dan de berekende waarde.

- d** $A = 0,08$ geeft $B = 5 \cdot 0,08^{0,8} = 0,66...$ C ligt er onder
 $A = 0,6$ geeft $B = 5 \cdot 0,6^{0,8} = 3,32...$ D ligt er onder
 $A = 3$ geeft $B = 5 \cdot 3^{0,8} = 12,04...$ E ligt er boven
 $A = 9$ geeft $B = 5 \cdot 9^{0,8} = 28,99...$ F ligt er onder



- e** Neem $2A$ voor A in de formule $B = 5 \cdot A^{0,8}$.
Dit geeft $B = 5 \cdot (2A)^{0,8} = 5 \cdot 2^{0,8} \cdot A^{0,8} = 2^{0,8} \cdot 5 \cdot A^{0,8} \approx 1,74 \cdot 5 \cdot A^{0,8}$.
Dus B wordt 1,74 keer zo groot.
- f** $F = a \cdot g^p$ met $g^{18} = \frac{1}{2}$, dus $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{18}} \approx 0,962$.
- g** Bij $t = 5$ lees je af $N = 10^{3,5} \approx 3200$.
- h** Bij $t = 1$ lees je af $N = 100$. Bij $t = 5$ hoort $N = 3200$ (zie vraag g).
 $N = b \cdot g^t$ met $g^4 = \frac{3200}{100} = 32$, dus $g = 32^{\frac{1}{4}} = 2,3784...$

$$\left. \begin{array}{l} N = b \cdot 2,3784...^t \\ t = 1 \text{ en } N = 100 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 2,3784... = 100 \\ b = \frac{100}{2,3784...} \approx 42 \end{array}$$

Dus de formule is $N = 42 \cdot 2,378^t$.
 $t = 8$ geeft $N = 42 \cdot 2,378^8 \approx 43\,000$
- i** $k = 2,5$ en $F = 80$ geeft $a \cdot \log(2,5) = 80$, dus $a = \frac{80}{\log(2,5)} \approx 201$.

Bladzijde 177

- j** $H_1 = at + b$ met $a = \frac{\Delta H_1}{\Delta t} = \frac{1770 - 300}{21} = 70$ en $b = 300$, dus $H_1 = 70t + 300$.
 $H_e = b \cdot g^t$ met $b = 300$ en $g_{21 \text{ dagen}} = \frac{1770}{300} = 5,9$, dus $g_{\text{dag}} = 5,9^{\frac{1}{21}} \approx 1,088$.
Dus $H_e = 300 \cdot 1,088^t$.
 $t = 15$ geeft $H_1 = 70 \cdot 15 + 300 = 1350$ en $H_e = 300 \cdot 1,088^{15} \approx 1063$.
Dus het exponentiële model past het beste.
- k** $\frac{p}{q} = \frac{7}{4}$ geeft $R = 350 \cdot \log\left(\frac{7}{4}\right) = 85,063...$
 $\frac{p}{q} = \frac{87}{50}$ geeft $R = 350 \cdot \log\left(\frac{87}{50}\right) = 84,192...$
Dus het verschil is $85,063... - 84,192... \approx 0,87$.

Bladzijde 183

- 30 a** Bij 1973 lees je af aantal = $10^{1,5} \approx 32$.
- b** $g_{15 \text{ jaar}} = \frac{5000}{220}$, dus $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{5000}{220}\right)^{\frac{1}{15}} = 1,231\dots$
 Het aantal in 2012 is dan $5000 \cdot 1,231\dots^{14} \approx 92\,000$.
 Dat is niet gelijk aan 83 000, dus dat aantal past niet bij gelijkblijvende exponentiële groei.
- c** In de winter van 2009/2010 zijn er $0,85 \cdot 190\,000 = 161\,500$ zomerganzen.
 In de winter van 2009/2010 zijn er in totaal $161\,500 + 301\,800 = 463\,300$ ganzen.
 In de winter van 2017/2018 zijn er $161\,500 \cdot 1,19^4 \approx 649\,453$ zomerganzen.
 In de winter van 2017/2018 zijn er $301\,800 \cdot 1,04^8 \approx 413\,034$ winterganzen.
 In de winter van 2017/2018 zijn er in totaal $649\,453 + 413\,034 = 1\,062\,487$ ganzen.
 De schade in de winter van 2017/2018 is $\frac{1\,062\,487}{463\,300} \cdot 2\,690\,000 \approx 6\,169\,000$ euro.
- d** In 2013 waren er $190\,000 \cdot 1,19^4 \approx 381\,000$ zomerganzen.
 Het aantal zomerganzen N na t jaar met $t = 0$ in 2013 is gelijk aan $N = 381\,000 \cdot 0,86^t$.
 Los op $381\,000 \cdot 0,86^t = 100\,000$.
 Voer in $y_1 = 381\,000 \cdot 0,86^x$.
 De optie snijpunt geeft $x = 8,868\dots$
 Dus in de zomer van $2013 + 9 = 2022$.

Bladzijde 184

- 31 a** $A_6 = L - 20$ invullen in $A_n = L \cdot 0,9439^n$ geeft
 $L - 20 = L \cdot 0,9439^6$
 $L - L \cdot 0,9439^6 = 20$
 $L(1 - 0,9439^6) = 20$
 $L = \frac{20}{1 - 0,9439^6} \approx 68$
 Dus de lengte van een snaar is 68 cm.
 Opmerking: de vergelijking $L - 20 = L \cdot 0,9439^6$ mag je ook grafisch-numeriek oplossen.
- b** Bij $n = 12$ hoort groeifactor $\frac{1}{2}$, dus $g^{12} = \frac{1}{2}$.
 Dit geeft $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 0,94387$.

Bladzijde 185

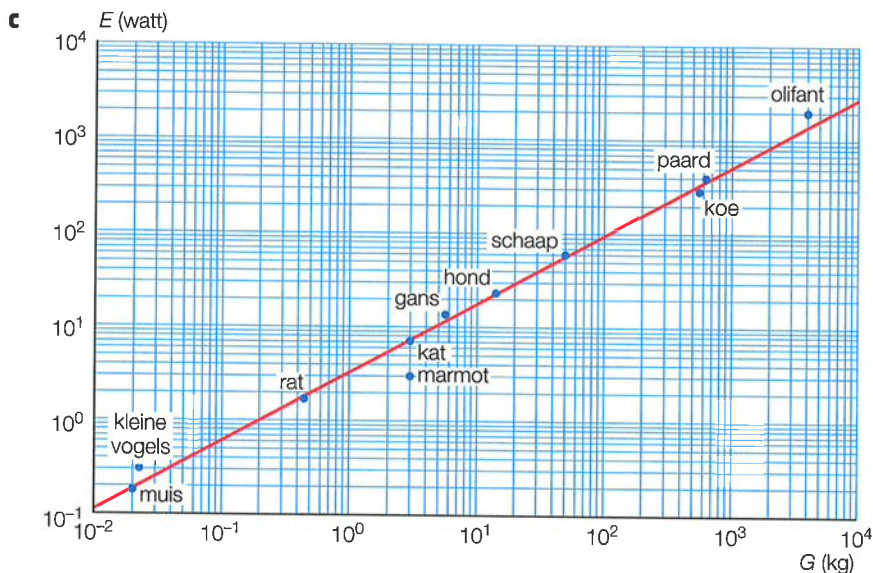
- c** $A_n = 0,9439 \cdot A_{n-1}$ met $A_0 = L$
- d** Voor d_3 geldt: volgens de vuistregel $\frac{1}{6} \cdot 65 \approx 10,83$ cm en volgens de formule $65 - 65 \cdot 0,9439^3 \approx 10,34$ cm.
 Voor d_5 geldt: volgens de vuistregel $\frac{1}{4} \cdot 65 = 16,25$ cm en volgens de formule $65 - 65 \cdot 0,9439^5 \approx 16,30$ cm.
 Voor d_7 geldt: volgens de vuistregel $\frac{1}{3} \cdot 65 \approx 21,67$ cm en volgens de formule $65 - 65 \cdot 0,9439^7 \approx 21,61$ cm.
 Voor d_{12} geldt: volgens de vuistregel $\frac{1}{2} \cdot 65 = 32,5$ cm en volgens de formule $65 - 65 \cdot 0,9439^{12} \approx 32,49$ cm.
 Dus alleen bij de derde fret is het verschil groter dan 1 mm = 0,1 cm.
- e** Los op $1 - 0,9439^n = \frac{2}{3}$.
 Voer in $y_1 = 1 - 0,9439^x$ en $y_2 = \frac{2}{3}$.
 De optie snijpunt geeft $x = 19,02\dots$
 Dus de 19e fret.
- 32 a** $g_{20 \text{ minuten}} = \frac{95}{20}$ geeft $g_{1 \text{ minuut}} = \left(\frac{95}{20}\right)^{\frac{1}{20}} \approx 1,08102$
- b** Lineaire model: $K = at + b$ met $a = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{95 - 20}{20} = 3,75$ en $b = 20$, dus
 $K = 3,75t + 20$.
 $t = 15$ geeft bij het lineaire model $K = 3,75 \cdot 12 + 20 = 65$ en bij het exponentiële model $K = 20 \cdot 1,081^{12} \approx 50,9$.
 Dus het exponentiële model past het beste.

Bladzijde 186

- 33 a** Bij een stijging van 5% hoort een groeifactor van 1,05.
De opbrengst in jaar 1 is $1750 \cdot 0,225 = 393,75$ euro.
Dat is de opbrengst in jaar 1, en niet jaar 0, dus in de exponent moet $t - 1$ worden gebruikt.
- b** $g_{12 \text{ jaar}} = \frac{0,22}{0,11} = 2$ geeft $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{12}} \approx 1,059$
Het groeipercentage per jaar is 5,9%.
- c** Stel g is de groeifactor per jaar in die situatie.
Er geldt dan dat $393,75 \cdot g^{19} = 500$.
Dit geeft $g^{19} = \frac{500}{393,75} = 1,269\dots$, dus $g = 1,269\dots^{\frac{1}{19}} \approx 1,0127$.
Dus de prijs moet per jaar minstens met 1,3% toenemen.

Bladzijde 187

- 34 a** Los op $3,27 \cdot G^{0,73} = 100$.
Voer in $y_1 = 3,27 \cdot x^{0,73}$ en $y_2 = 100$.
De optie snijpunt geeft $x = 108,35\dots$
Dus 108 kg.
- b** Aflezen in de grafiek geeft $E = 0,3$ watt.
 $G = 0,022$ invullen in de formule geeft $E = 3,27 \cdot 0,022^{0,73} = 0,201\dots$ watt.
Dus het energieverbruik is $\frac{0,3 - 0,201\dots}{0,201\dots} \times 100\% \approx 50\%$ groter dan je zou verwachten.



- d** Bij $G = 1000$ lees je af $E = 500$ en bij $G = 2000$ lees je af $E = 850$.
Als G twee keer zo groot is, dan is E minder dan twee keer zo groot. Het vermoeden is dus niet juist.

Bladzijde 188

- 35 a** Lees af: in augustus 2012 ($t = 220$) is het aantal aardbevingen met magnitude $\geq 2,0$ ongeveer 65 en het aantal aardbevingen met magnitude $\geq 2,5$ ongeveer 22.
Dat is dus $\frac{22}{65} \times 100\% \approx 34\%$.

Bladzijde 189

- b** $M = 1,0$ en $N = 10$ geeft $10^{a-1} = 10$ oftewel $10^{a-1} = 10^1$ en dit geeft $a - 1 = 1$, dus $a = 2$.

36 a $g_{64 \text{ weken}} = \frac{0,77}{10,4}$ geeft $g_{\text{week}} = \left(\frac{0,77}{10,4}\right)^{\frac{1}{64}} \approx 0,960$

b $100\,000 = 0,1 \text{ miljoen}$

Los op $10,4 \cdot 0,96^x = 0,1$.

Voer in $y_1 = 10,4 \cdot 0,96^x$ en $y_2 = 0,1$.

De optie snijpunt geeft $x = 113,77\dots$

Dat is 114 weken, oftewel 2 jaar en 9 weken, na 10 oktober 2012. Dus in december 2014.

Bladzijde 190

37 a De snaar trilt 440 keer per seconde.

Dus de duur van één trilling is $\frac{1}{440} \approx 0,0023$ seconde.

b De toonhoogtes van alle A's vormen een rij met constante factor 2.

Stel n het aantal octaven. Los op $27,5 \cdot 2^n = 3520$.

Voer in $y_1 = 27,5 \cdot 2^x$ en $y_2 = 3520$.

De optie snijpunt geeft $x = 7$.

Dus 7 octaven.

c Er zitten 12 stappen tussen de twee C's.

Dus de verhouding tussen twee opeenvolgende toetsen is $2^{\frac{1}{12}} : 1 \approx 1,0595 : 1$.

Bladzijde 191

d Los op $a \cdot \log(1,0595) = 100$.

$a = \frac{100}{\log(1,0595)} \approx 3983,911$

e De toonafstand van de samengestelde klank op een gestemde piano is 400 cent.

Volgens de muziektheorie geldt $TA = 3983,9 \cdot \log\left(\frac{5}{4}\right) = 386,07\dots$

Dus de afwijking is $400 - 386,07\dots \approx 14$ cent.

Bladzijde 192

38 a In 1980 was de uitstoot 250, dus $a = 250 - 40 = 210$.

In 2010 was de uitstoot 135, dus los op $40 + 210 \cdot b^{30} = 135$.

Voer in $y_1 = 40 + 210 \cdot x^{30}$ en $y_2 = 135$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,9739\dots$

Dus $b \approx 0,974$.

b Bij 1980 lees je af 1000 miljard vliegtuigkilometers en bij 2015 lees je af 6000 miljard.

$g_{35 \text{ jaar}} = \frac{6000}{1000} = 6$ geeft $g_{\text{jaar}} = 6^{\frac{1}{35}} = 1,052\dots$

Een afname van 2,7% komt overeen met een groeifactor van 0,973.

De totale uitstoot stijgt met een groeifactor van $0,973 \cdot 1,052\dots = 1,024\dots$

Dus de totale jaarlijkse CO₂-uitstoot stijgt met 2,4%.

15.5 Logisch redeneren

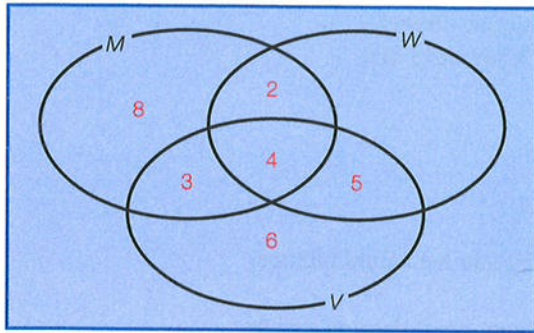
Bladzijde 193

39 a Als het wel regent, hoeft dat nog niet te betekenen dat je een paraplu nodig hebt, omdat je ook bijvoorbeeld een regenjas kunt gebruiken. Uit de gegeven zin volgt dus niet dat $R \Rightarrow P$.

b $\neg D \Rightarrow \neg K$

De bewering in de eerste zin geeft alleen informatie over dappere mensen en zegt niets over hoe niet-dappere mensen zich afdouchen (niet-dappere mensen kunnen dus wel of niet koud afdouchen).

c Als je een slappeling bent, dan volgt uit de tweede bewering dat je niet koud afdoucht. Als je niet koud afdoucht, dan volgt uit de eerste bewering dat je niet dapper bent. Dus ja, de genoemde conclusie kun je trekken.

d 35 DEELNEMERS

$8 + 2 + 4 + 3 + 5 + 6 = 28$, dus $35 - 28 = 7$ behoren uitsluitend tot W .

Op woensdag komen er $7 + 2 + 4 + 5 = 18$ deelnemers.

- e** Als je op maandag komt en op woensdag en niet op alle drie de dagen, dan kom je niet op vrijdag.

De bewering is waar, want als een deelnemer op twee dagen komt en niet op alle drie de dagen, komt hij dus niet op de derde dag.

Bladzijde 194

f $E_{13} \Rightarrow (B_{12} \vee K_{22})$

- g** • In vak 23 komt een kastanje en in vak 32 komt een eik, dus in de vakken 22 en 33 komt een beuk.
- $(E_{13} \wedge B_{22}) \Rightarrow K_{12}$
 - $(B_{22} \wedge K_{31}) \Rightarrow E_{21}$
 - $(K_{12} \wedge E_{21}) \Rightarrow B_{11}$

Bladzijde 196

40 a $\neg S \Rightarrow \neg L$

De bewering in de eerste zin geeft alleen informatie over stoere mensen en zegt niets over het slaapgedrag van niet-stoere mensen (niet-stoere mensen kunnen dus wel of niet laat naar bed gaan).

- b** Als je een watje bent, dan volgt uit de tweede bewering dat je niet laat naar bed gaat. Als je niet laat naar bed gaat, dan volgt uit de eerste bewering dat je niet stoer bent. Dus ja, de genoemde conclusie kun je trekken.

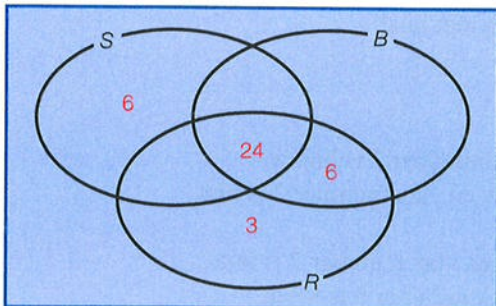
Bladzijde 197

- 41 a** Als een schrift een karakterschrift is, dan heeft het duizend of meer tekens. Als een schrift een alfabet is, dan heeft het veertig of minder tekens.

- b** $\neg D \Rightarrow \neg K$
 $\neg V \Rightarrow \neg A$
 $(\neg K \wedge \neg A) \Rightarrow L$

Bladzijde 198

42 a 39 LETTERS



$30 - 24 = 6$ letters behoren zowel tot B als R , maar niet tot S .

$6 + 24 + 6 + 3 = 39$, dus er zijn geen letters die wel tot S en R behoren, maar niet tot B . Dus het Servische alfabet heeft $6 + 24 = 30$ letters.

- b** Het gaat om de letters die in het Griekse én Latijnse alfabet zitten, maar niet in alle alfabetten voorkomen. Dat zijn de letters N, Z en I.

- c Als een letter in het Russische en het Griekse alfabet voorkomt, en niet in alle alfabetten voorkomt, dan komt die letter voor in het Latijnse alfabet.
De bewering is niet waar, want voor de letters Φ , Π , Γ klopt deze niet.

Bladzijde 199

- 43 a Het aantal nieuwe eerstejaars in 2014 is $\frac{1820}{0,32} \approx 5690$.
b $(A \wedge S) \Rightarrow D$
c Als afschaffing van de studiebeurs zorgt voor een daling van het aantal nieuwe eerstejaars, dan wordt het collegegeld verlaagd.
d De bewering volgt niet uit de tekst, want als ze wel slagen, hoeft dat nog niet te betekenen dat ze naar het tweede jaar mogen.

Bladzijde 200

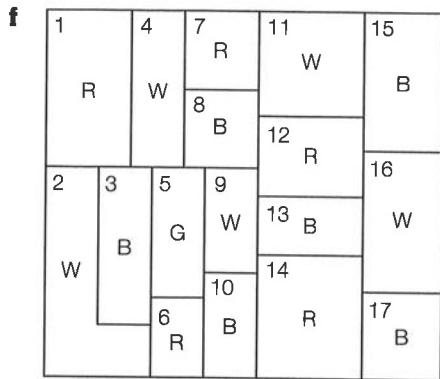
- 44 a Als Carina op 20 september jarig is, dan zegt ze tegen Amir dat ze in september jarig is en tegen Bob dat ze op de 20e jarig is.
b Als Carina aan Bob had verteld dat ze op de 23e of op de 24e jarig is, dan zou Bob direct hebben geweten wanneer ze jarig is, omdat voor beide dagen maar één maand mogelijk is.
Amir weet niet welk getal Carina tegen Bob gezegd heeft, maar weet wel zeker dat het niet 23 of 24 is.
Kennelijk heeft Carina dus niet 'september' of 'oktober' tegen Amir gezegd.
Dus Carina is in november of december jarig.

Bladzijde 201

- c $B(19) \Rightarrow (C(19 \text{ november}) \vee C(19 \text{ december}))$
 $B(21) \Rightarrow C(21 \text{ november})$
 $B(22) \Rightarrow C(22 \text{ december})$
Alleen bij $B(19)$ is er meer dan één mogelijkheid, dus op basis van dat gegeven zou Bob niet kunnen weten wanneer Carina jarig is. Hij weet het wel, dus Carina kan niet op de 19e jarig zijn.
d Als Amir december doorgekregen zou hebben van Carina, dan zouden er twee mogelijkheden zijn geweest (20e en 22e), en zou hij niet hebben geweten wanneer ze jarig is.
Carina heeft Amir dus verteld dat ze in november jarig is.
Dus Carina is jarig op 21 november.
- 45 a Er moet dan gelden $3^V > 5\,000\,000$.
Los op $3^V = 5\,000\,000$.
Voer in $y_1 = 3^x$ en maak een tabel.
Uit de tabel volgt $x = 14$ geeft $y_1 = 4\,782\,969$ en $x = 15$ geeft $y_1 = 14\,348\,907$.
Dus minstens 15 vlakken.
b $V = 2$ geeft $M = 3^2 = 9$
 $V = 4$ geeft $M = 3^4 = 81$
Dat is veel meer dan een verdubbeling, dus de bewering is niet juist.

Bladzijde 202

- c $R_1 \Rightarrow (B_4 \vee W_4)$
d Vlak nummer 1 is rood en vlak nummer 4 is wit, dus vlak nummer 3 is blauw.
Vlak nummer 3 is blauw, dus vlak nummer 5 is niet blauw en vlak nummer 2 is niet blauw.
Vlak nummer 1 is rood en vlak nummer 2 is niet blauw, dus vlak nummer 2 is wit.
Vlak nummer 2 is wit en vlak nummer 3 is blauw, dus vlak nummer 6 is rood.
e $(B_3 \wedge W_4) \Rightarrow R_5$
 $R_6 \Rightarrow \neg R_5$
Dit is een tegenspraak, dus er is geen kleur mogelijk voor vlak nummer 5.



15.6 Meetkunde

Bladzijde 203

- 46 a** In $\triangle CDE$ is $CE = DE$, $CD = AB = a$ en $\angle E = 90^\circ$, dus $CE^2 + DE^2 = CD^2$
 $CE^2 + CE^2 = a^2$
 $2CE^2 = a^2$
 $CE^2 = \frac{1}{2}a^2$

In $\triangle CEF$ is $CE = EF$ en $\angle E = 90^\circ$, dus $CF^2 = CE^2 + EF^2$
 $CF^2 = CE^2 + CE^2$
 $CF^2 = 2CE^2$
 $CF^2 = a^2$
 $CF = a$

Dus F ligt $a + a = 2a$ boven de lijn door A en B .

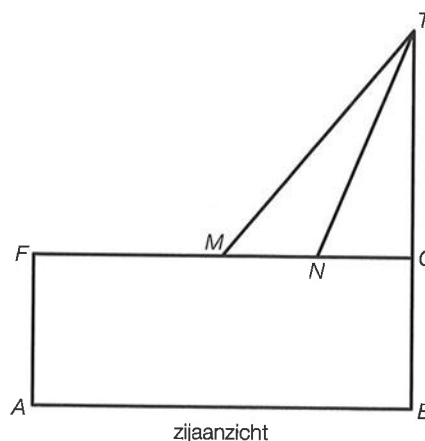
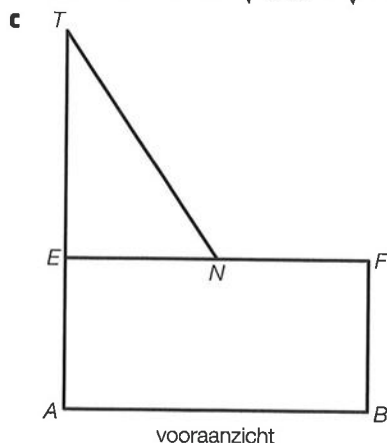
- b** Zie de figuur hiernaast.

In $\triangle BCE$ is $\angle C = 90^\circ$, dus $BE^2 = 40^2 + 40^2$
 $BE^2 = 3200$
 $BE = \sqrt{3200}$

$BF = \frac{1}{2}BE$ en in $\triangle BFC$ is $\angle F = 90^\circ$, dus $40^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{3200})^2 + CF^2$
 $1600 = 800 + CF^2$
 $CF^2 = 800$
 $CF = \sqrt{800}$

$AD = CF$ en in $\triangle DAE$ is $\angle A = 90^\circ$, dus $60^2 = (\sqrt{800})^2 + AE^2$
 $3600 = 800 + AE^2$
 $AE^2 = 2800$
 $AE = \sqrt{2800}$

$AB = AE + BE = \sqrt{2800} + \sqrt{3200} \approx 109,5$



- d** $O(HMN) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 40 = 1000 \text{ cm}^2$
 $I(THMN) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot O(HMN) \cdot HT = \frac{1}{3} \cdot 1000 \cdot 60 = 20\,000 \text{ cm}^3 = 20 \text{ dm}^3$
 inhoud schaalmodel = $\frac{20\,000}{8^3} = 39,0625 \approx 39 \text{ cm}^3$

e $a = 40$ en $b = 24$ geeft $\frac{b}{a} = \frac{24}{40} = 0,6$ en $\frac{a}{a+b} = \frac{40}{64} = 0,625$.

$0,6 \neq 0,625$, dus de rechthoek heeft niet de gulden-snede-verhouding.

Bladzijde 204

f Alle gelijke rechthoeken hebben hoogte $\frac{24}{3} = 8$ cm.

Stel de breedte x cm, dan moet gelden dat $\frac{8}{x} = \varphi$, oftewel $x = \frac{8}{\varphi} \approx \frac{8}{1,618} \approx 4,94$.

Dus de rechthoek moet in $\frac{40}{4,94} \approx 8$ kolommen worden verdeeld.

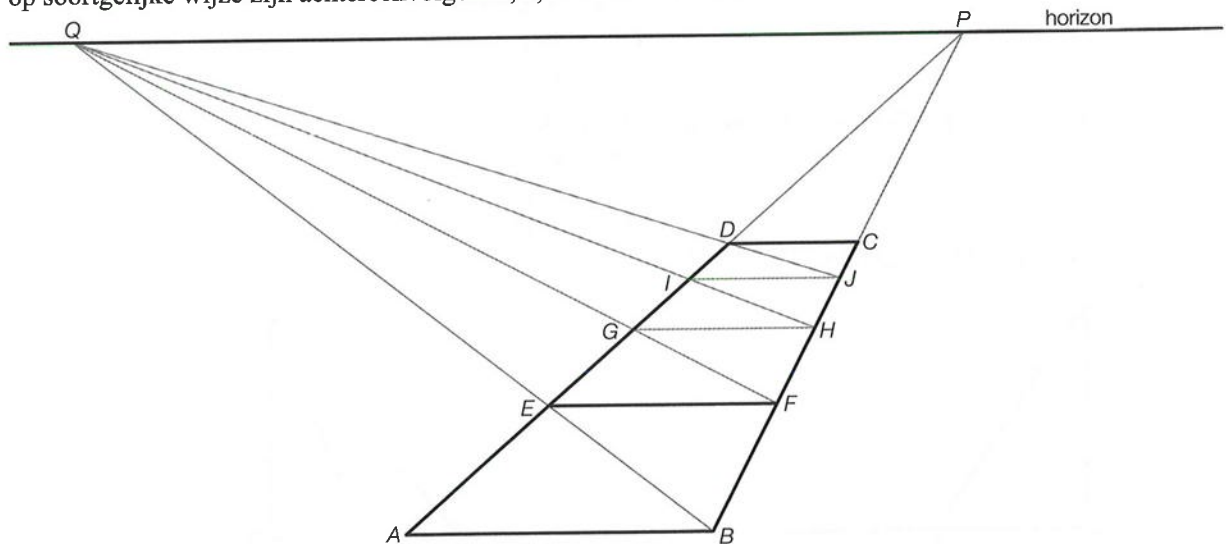
g



Opmeten geeft $AB = 1,1$ cm en $AC = 3,5$ cm.

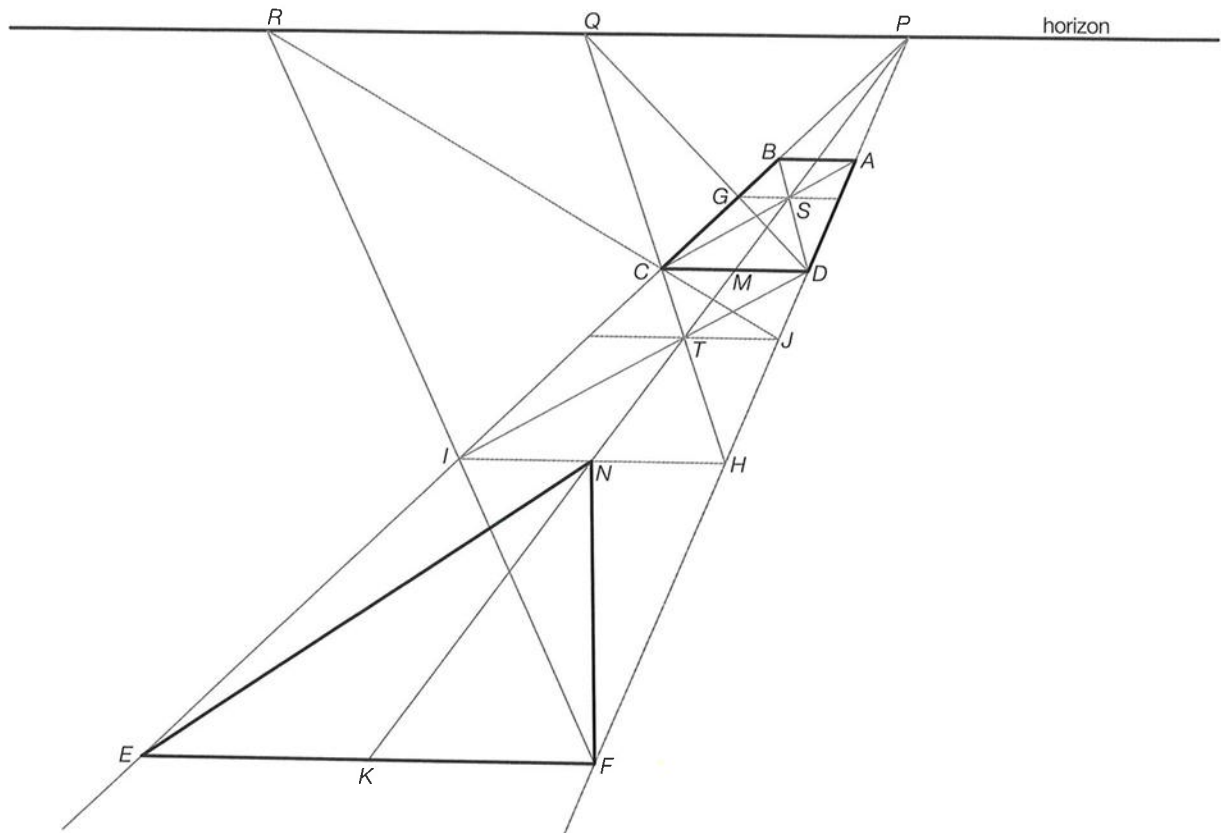
Dus de hoogte van de blokhut is $\frac{3,5}{1,1} \cdot 120 \approx 382$ cm.

- h
- verdwijnpunt P en horizon
 - BE heeft verdwijnpunt Q
 - FQ snijden met AP geeft G
 - horizontale lijn door G snijden met BP geeft H
 - op soortgelijke wijze zijn achtereenvolgens I, J, D en C te vinden



- i
- verdwijnpunt P en horizon
 - snijpunt S van diagonalen rechthoek $ABCD$
 - horizontale lijn door S snijden met BC geeft G
 - DG heeft verdwijnpunt Q
 - QC snijden met PD geeft H
 - horizontale lijn door H snijden met PC geeft I
 - snijpunt T van diagonalen rechthoek $CDHI$
 - horizontale lijn door T snijden met PD geeft J
 - JC heeft verdwijnpunt R
 - RI snijden met PD geeft F
 - horizontale lijn door F snijden met PC geeft E

- lijn PM snijden met HI geeft N
- driehoek EFN



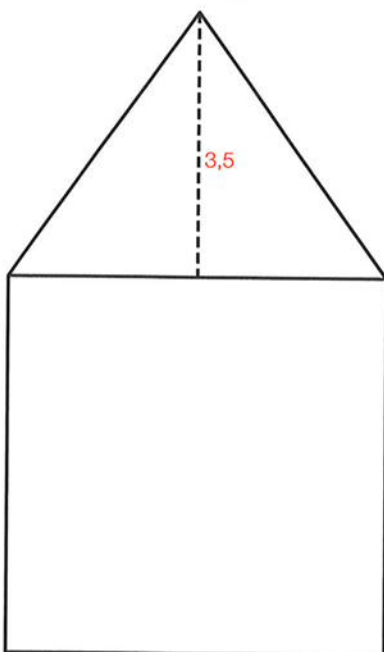
Bladzijde 210

47 $k = \frac{41,9}{41} = 1,02... \text{ cm}$ en $l = \frac{114,9}{83} = 1,38... \text{ cm}$ geeft $\frac{k}{l} = \frac{1,02...}{1,38...} \approx 0,74$ en $\frac{l}{k+l} = \frac{1,38...}{1,02... + 1,38...} \approx 0,58$.

$0,74 \neq 0,58$, dus zo'n vakje heeft niet de gulden-snede-verhouding.

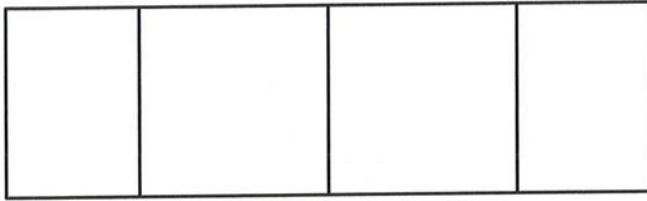
48 De hoogte van de piramide is $0,7071 \times 20 = 14,142 \text{ cm}$, dus in het aanzicht op schaal $1 : 4$ is dat $\frac{14,142}{4} \approx 3,5 \text{ cm}$.

Teken het hoogste punt 3,5 cm boven het midden van de bovenkant van het voorvlak en maak het aanzicht af.

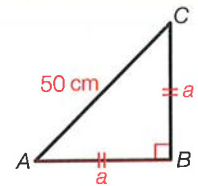


Bladzijde 211

- 49 a** Meet de benodigde afstanden op in het bovenaanzicht.
 Teken een rechthoek van 85,5 mm bij 25 mm.
 Teken een lijn in het midden van deze rechthoek.
 Teken twee lijnen op een afstand van 18 mm vanaf de buitenkanten van de rechthoek.

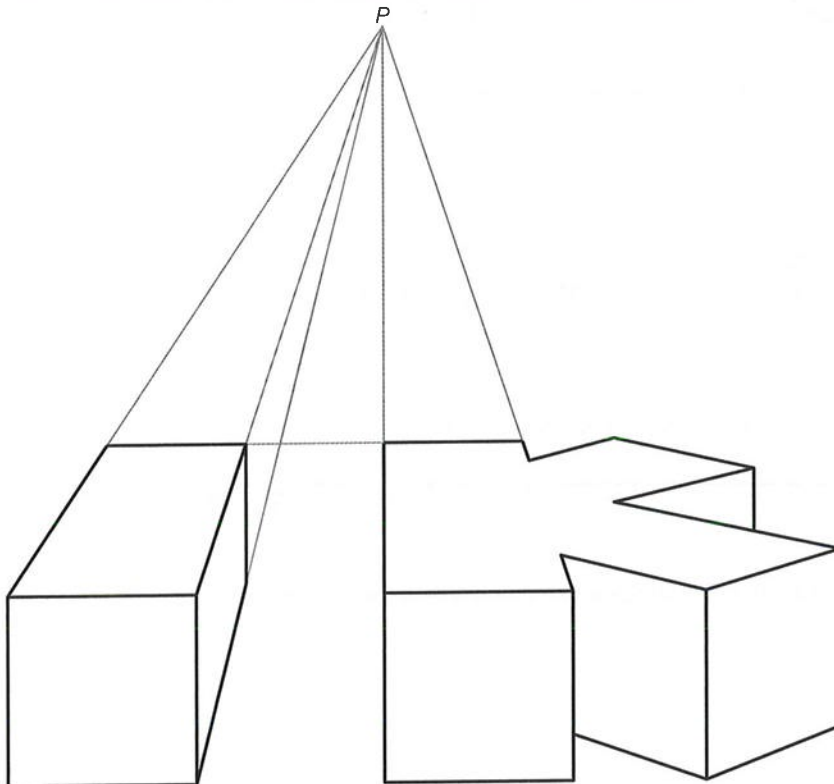


- b** In $\triangle ABC$ is $AB = BC = a$ en $\angle B = 90^\circ$, dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$
 $a^2 + a^2 = 50^2$
 $2a^2 = 2500$
 $a^2 = 1250$
 $a = \sqrt{1250} \approx 35,4 \text{ cm}$



De breedte van de letter K is $2a + 50 = 2 \cdot 35,4 + 50 \approx 121 \text{ cm}$.

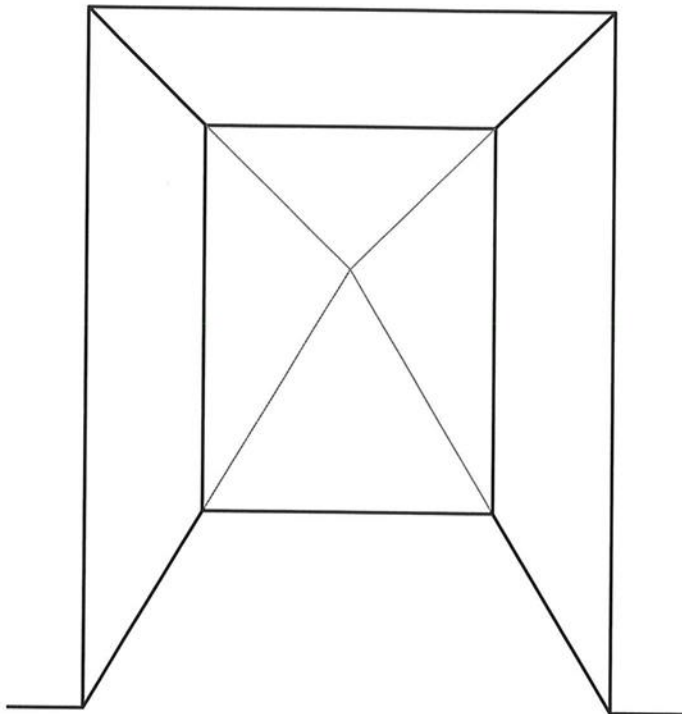
- c**
- verdwijnpunt P
 - opmeten zijden voorzijde letter K geeft 25 mm
 - vierkant met zijden van 25 mm op afstand van 25 mm links van letter K
 - letter I met behulp van P en verlengde bovenzijde van letter K



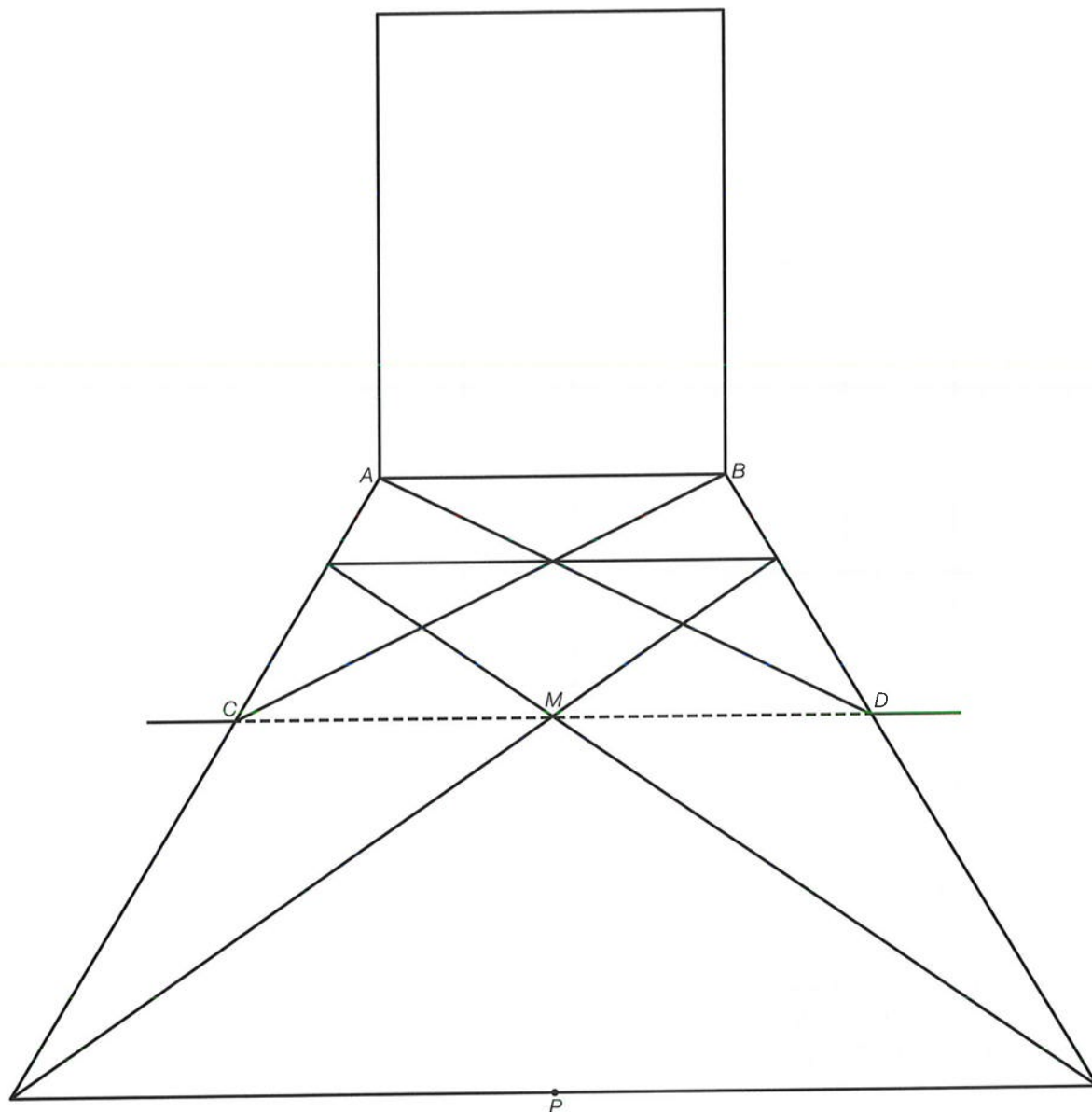
- d** De zijden van het I-paviljoen zijn $171 \cdot 8 = 1368 \text{ cm} = 13,68 \text{ m}$ en $5 \cdot 8 = 40 \text{ cm} = 4 \text{ m}$.
 Dus de oppervlakte van het I-paviljoen is $13,68 \cdot 4 \approx 55 \text{ m}^2$.

Bladzijde 212

- 50 a** Teken zowel het verdwijnpunt van de linker- en rechterkant van het plafond als het verdwijnpunt van de linker- en rechterkant van de vloer.
Deze verdwijnpunten zijn niet hetzelfde, en bij een balk zou dat volgens de regels van het perspectief wel zo moeten zijn.
- b** Teken het verdwijnpunt met behulp van de linker- en rechterkant van de vloer.
Teken met behulp van dit verdwijnpunt de linker- en rechterkant van het plafond.
Maak de tekening af.



- c**
- diagonalen AD en BC
 - middens AC en BD
 - lijnen vanuit middens door M
 - punt P met behulp van deze lijnen en verlengde AC en BD



Bladzijde 213

- 51 a** breedte bouwblok = $3 \cdot 4 \cdot 26 = 312 \text{ cm} = 3,12 \text{ m}$
 lengte bouwblok = $21 \cdot 4 \cdot 26 = 2184 \text{ cm} = 21,84 \text{ m}$
 inhoud bouwblok = $3,12 \cdot 3,12 \cdot 21,84 = 212,59... \text{ m}^3$
 inhoud paviljoen = $2 \cdot 212,59... \text{ m}^3 \approx 425 \text{ m}^3$
- b** Teken een verdwijnpunt met behulp van het bovenste bouwblok.

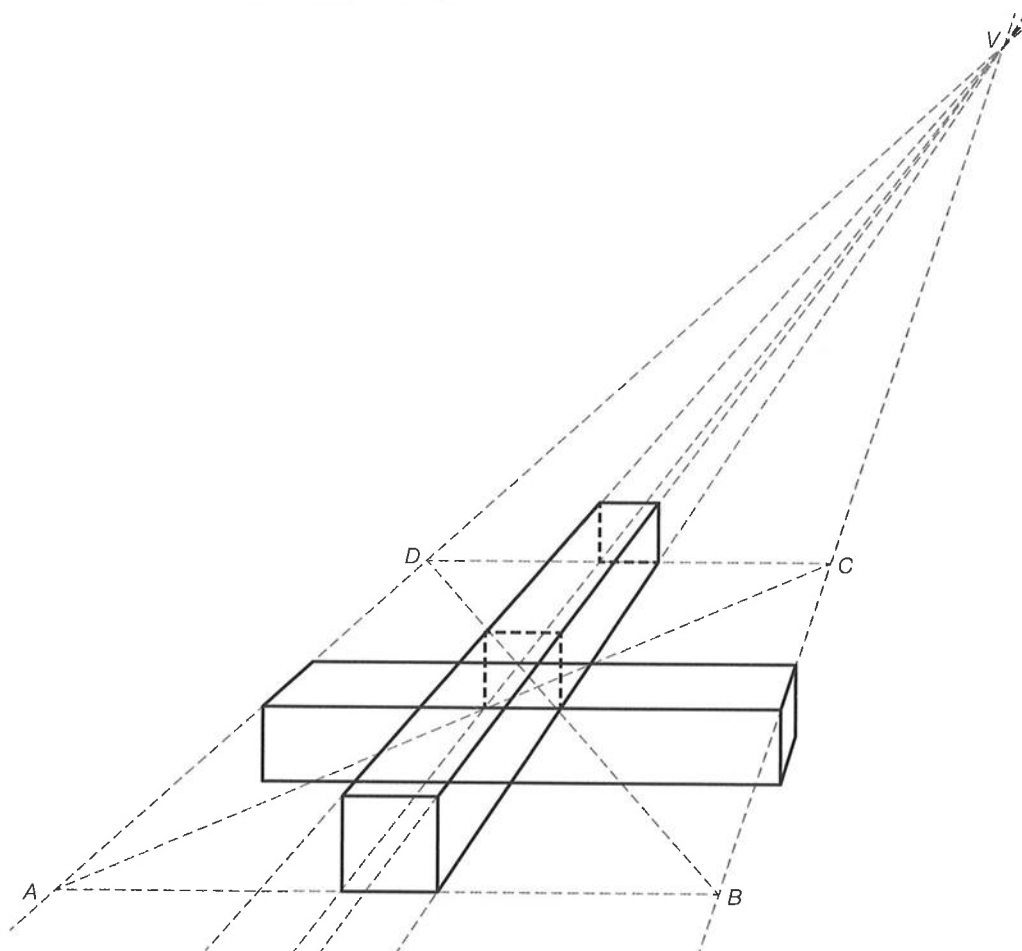


Opmeten geeft $AB = 0,5$ cm en $AC = 1,6$ cm.

De hoogte van het onderste bouwblok is in werkelijkheid $3 \cdot 5 \cdot 26 = 390$ cm = 39 dm.

Dus de hoogte waarop de foto is genomen is $\frac{0,5}{1,6} \cdot 39 \approx 12$ dm.

- c**
- lijnen van gegeven punten naar V geven vierkant waar bovenste bouwblok op ligt
 - verlengde diagonalen van dit vierkant
 - vierkant $ABCD$
 - opmeten afstand tussen gegeven punten geeft 10 mm
 - vierkante dwarsdoorsnede met zijden 10 mm, met gegeven punten als onderste hoekpunten
 - bovenste bouwblok met behulp van V , dwarsdoorsnede en $ABCD$

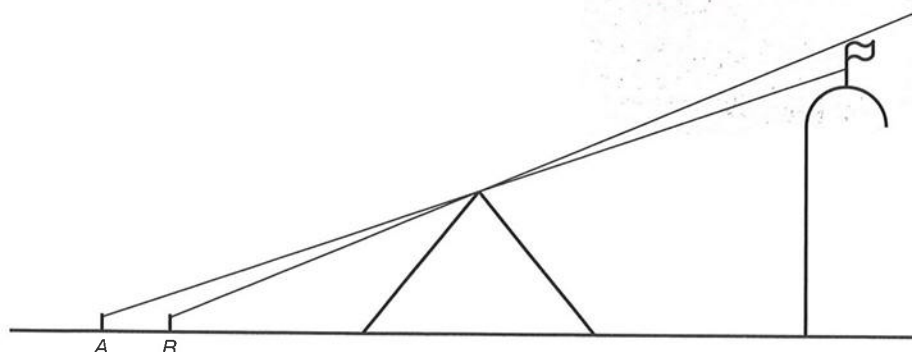


Bladzijde 214

- 52 a** Een zijvlak zonder ingang heeft $18 + 17 + 16 + \dots + 1 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot (1 + 18) = 171$ panelen.
 Het zijvlak met ingang heeft $2 + 9 = 11$ panelen minder, dus $171 - 11 = 160$ panelen.
 Dus in totaal zijn er $3 \cdot 171 + 160 = 673$ panelen.

Bladzijde 215

- b** In de schets hieronder is te zien dat de maker B van de foto in figuur 15.98, waarop de vlag achter de piramide niet zichtbaar is, dichterbij de piramide stond dan de maker A van de foto in figuur 15.97.



Bladzijde 216

c Vierhoek $ABCD$ is een trapezium met hoogte h waarvoor geldt $165^2 + 130^2 = h^2$

$$h^2 = 44\,125$$

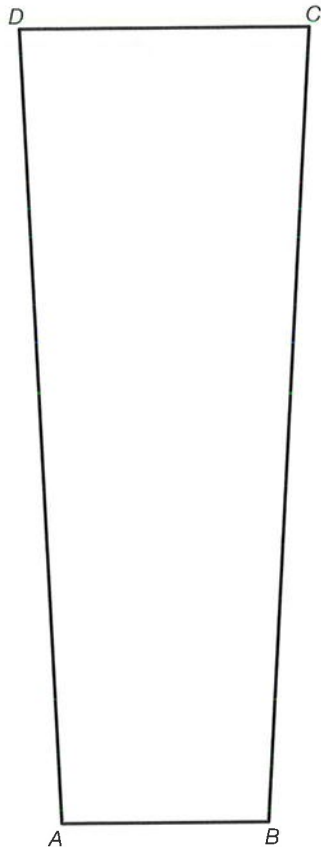
$$h = 210,0... \text{ cm}$$

Driehoek OCD is een vergroting van driehoek $OC'D'$ met vergrotingsfactor $\frac{325 + 130}{325} = 1,4$.

$$CD = 1,4 \cdot CD' = 1,4 \cdot 55 = 77 \text{ cm}$$

$ABCD$ heeft hoogte $\frac{210,0...}{20} \approx 10,5 \text{ cm}$, breedte $CD = \frac{77}{20} \approx 3,9 \text{ cm}$ en

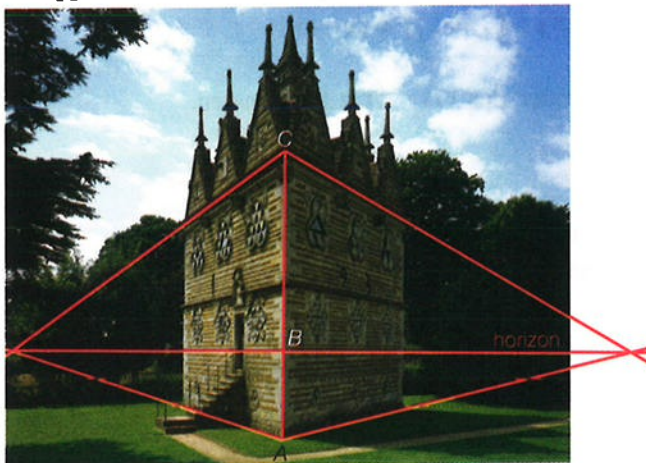
$$\text{breedte } AB = \frac{55}{20} \approx 2,8 \text{ cm}.$$



Bladzijde 217

53 a 1 foot = 0,3048 m, dus 1 square foot = $0,3048^2 \text{ m}^2$.
De oppervlakte is $471,55 \cdot 0,3048^2 \approx 43,8 \text{ m}^2$.

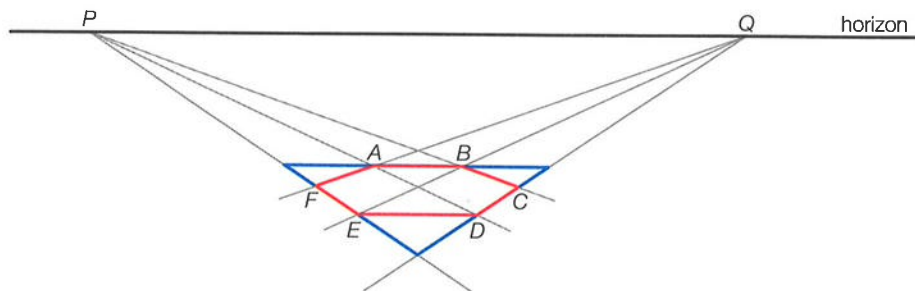
b



Opmeten geeft $AB = 1,2 \text{ cm}$ en $AC = 3,8 \text{ cm}$.

Dus de hoogte waarop de foto is genomen is $\frac{1,2}{3,8} \cdot 8,22 \approx 2,60 \text{ m} = 260 \text{ cm}$.

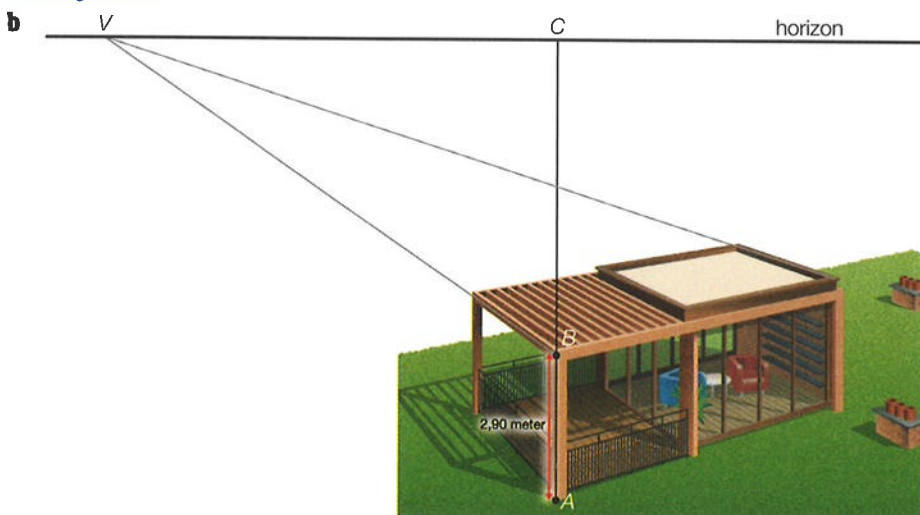
- c
- verdwijnpunten P en Q met behulp van niet-horizontale zijden van de driehoek en horizon
 - hoekpunten A en B door horizontale zijde van de driehoek in drie gelijke delen te verdelen
 - hoekpunten C, D, E en F met behulp P, Q, A en B
 - zeshoek $ABCDEF$



Bladzijde 218

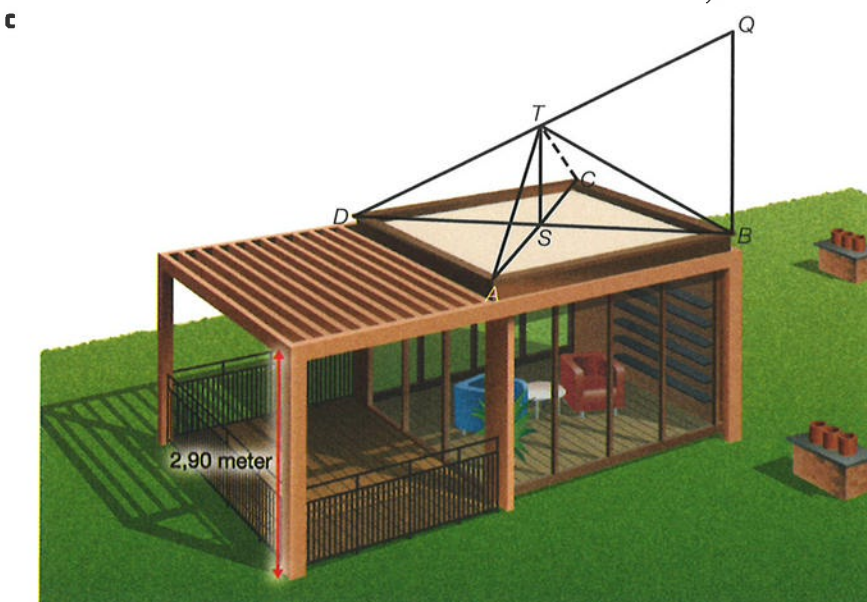
- 54 a oppervlakte slaapkamer en tuinkamer voor uitbreiding = $11 + 8,5 = 19,5 \text{ m}^2$
 oppervlakte slaapkamers en tuinkamer na uitbreiding = $9 + 8,5 + 17 = 34,5 \text{ m}^2$
 De oppervlakte van het binnengedeelte is met $34,5 - 19,5 = 15 \text{ m}^2$ toegenomen.
 Dus de inhoud van het binnengedeelte is met $15 \cdot 2,6 = 39 \text{ m}^3$ toegenomen.

Bladzijde 219



Opmeten geeft $AB = 2,0 \text{ cm}$ en $AC = 6,1 \text{ cm}$.

Dus het denkbeeldige punt is gekozen op een hoogte van $\frac{6,1}{2,0} \cdot 2,9 \approx 9 \text{ m}$.



- verdubbelen staander rechtsvoor geeft Q
- diagonalen AC en BD snijden geeft S
- DQ en verticale lijn door S snijden geeft T
- piramide $TABCD$

Bladzijde 220

- 55 a** Als a^2 de oppervlakte van een vierkant is, dan is de zijde van het vierkant a .
Als x de zijde van het volgende vierkant is, dan geldt voor de gelijkbenige rechthoekige driehoek ertussen $x^2 + x^2 = a^2$.
Hieruit volgt $2x^2 = a^2$, oftewel $x^2 = \frac{1}{2}a^2$.

Bladzijde 221

- b** Zowel hoogte vierkant 0 als diagonaallengte vierkant 1 is 10 cm.
Zowel hoogte vierkant 2 als diagonaallengte vierkant 3 is 5 cm.
Zowel hoogte vierkant 4 als diagonaallengte vierkant 4 is 2,5 cm.
totale hoogte = $10 + 10 + 5 + 5 + 2,5 + 2,5 = 35 \text{ cm} = 350 \text{ mm}$
 $350 \text{ mm} < 420 \text{ mm}$, dus het past.