

12 Logaritmen

Voorkennis

- V1**
- a Er zijn $125\,300 \times 1,02 = 127\,806$ inwoners in 2016.
 - b Bij een groei van 2% hoort een groeifactor van 1,02.
 - c Het aantal inwoners in 2022 is $125\,300 \times 1,02^7 \approx 143\,930$.
 - d Bij een afname van 3,5% hoort een groeifactor van 0,965.
- V2**
- a $100\% + 12,35\% = 112,35\%$ dus de groeifactor is 1,1235.
 - b $100\% - 0,2\% = 99,8\%$ dus de groeifactor is 0,998.
 - c $100\% - 45\% = 55\%$ dus de groeifactor is 0,55.
 - d $100\% + 100\% = 200\%$ dus de groeifactor is 2.
- V3**
- a $1,09 \times 100\% = 109\%$ dus de toename is $109\% - 100\% = 9\%$.
 - b $2,34 \times 100\% = 234\%$ dus de toename is $234\% - 100\% = 134\%$.
 - c $0,016 \times 100\% = 1,6\%$ dus de afname is $100\% - 1,6\% = 98,4\%$.
 - d $0,9207 \times 100\%$ is 92,07% dus de afname is $100\% - 92,07\% = 7,93\%$.
- V4**
- a $100\% + 34\% = 134\%$ dus de groeifactor per drie uur is 1,34.
De groeifactor per uur is $1,34^{\frac{1}{3}} = 1,10247\dots$
De procentuele toename per uur is 10,2%.
 - b $100\% + 1,07\% = 101,07\%$ dus de groeifactor per minuut is 1,0107.
De groeifactor per uur is $1,0107^{60} = 1,89380\dots$
De procentuele toename per uur is 89,4%.
 - c $100\% + 28\% = 128\%$ dus de groeifactor per etmaal is 1,28.
De groeifactor per uur is $1,28^{\frac{1}{24}} = 1,01033\dots$
De procentuele toename per uur is 1,0%.
 - d $100\% - 0,04\% = 99,96\%$ dus de groeifactor per seconde is 0,9996.
De groeifactor per uur is $0,9996^{3600} = 0,23685\dots$
De procentuele afname per uur is 76,3%.
 - e De groeifactor per vier uur is $632 : 520 = 1,21538\dots$
De groeifactor per uur is $1,21538^{\frac{1}{4}} = 1,04997\dots$
De procentuele toename per uur is 5,0%.
 - f De groeifactor per half uur is $711 : 840 = 0,84643\dots$
De groeifactor per uur is $0,84643^2 = 0,71644\dots$
De procentuele afname per uur is 28,4%.
- V5**
- a Op 2 februari zijn er $14\,800 \times 1,063^1 \approx 15\,732$ insecten.
 - b Op 29 januari zijn er $14\,800 \times 1,063^{-3} \approx 12\,321$ insecten.
 - c De groeifactor per week is $1,063^7 = 1,53367\dots$
Het aantal insecten neemt per week met 53,4% toe.
 - d De groeifactor per acht uur is $1,063^{\frac{8}{24}} = 1,02057\dots$
De procentuele toename per acht uur is 2,1%.
 - e Invoer: $y_1 = 14\,800 \times 1,063^x$ en $y_2 = 50\,000$
Venster: $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 100\,000$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (19,93; 50 000).
Na 20 dagen is het aantal insecten gegroeid tot 50 000.

- V6 a Een mogelijke functievoorschrift is $f(t) = 1720 \cdot 1,057^t$.
 b De groeifactor per jaar is $0,76^4 = 0,33362\dots$.
 De beginhoeveelheid is $152 : 0,33362\dots \approx 456$.
 Een mogelijke functievoorschrift is $f(t) = 456 \cdot 0,33^t$.
 c De groeifactor per maand is 1,15.
 De groeifactor per jaar is $1,15^{12} = 5,35025\dots$.
 Een mogelijke functievoorschrift is $f(t) = 69 \cdot 5,35^t$.
 d De groeifactor per week is 0,995.
 De groeifactor per jaar is $0,995^{52} = 0,77054\dots$.
 Een mogelijke functievoorschrift is $f(t) = 37980 \cdot 0,77^t$.
- V7 a De exponentiële functies zijn f , g en j .
 b De grafieken bij g en j zijn stijgend omdat het grondtal groter dan 1 is.
 c De grafiek bij f snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$.
 De grafiek bij g snijdt de y -as in het punt $(0, 2)$.
 De grafiek bij j snijdt de y -as in het punt $(0, 7)$.

12.1 Logaritmen

intro 1000 kun je schrijven als een macht van 10, namelijk 10^3 .
 De oplossing van $10^t = 1000$ is dus $t = 3$.
 2000 kun je niet makkelijk schrijven als een macht van 10. Je kunt daarom niet makkelijk berekenen na hoeveel uren er 2000 bacteriën zijn.

- 1 a De oplossing van de vergelijking geeft aan na hoeveel weken er 1200 griepgevallen zijn.
 b Links en rechts delen door 150 geeft $2^t = 8$.
 c Je weet dat $2^3 = 8$, dus $t = 3$ is de oplossing van de vergelijking.
 d $150 \cdot 2^t = 1650$ links en rechts delen door 150 geeft $2^t = 11$.
 e $2^3 = 8$ en $2^4 = 16$, dus de oplossing van $2^t = 11$ ligt ergens tussen 3 en 4 maar is geen geheel getal.
 f Invoer: $y_1 = 2^x$ en $y_2 = 11$
 Venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 20$
 Optie: snijpunt
 De coördinaten van het snijpunt zijn $(3,46; 11)$.
 De oplossing van de vergelijking $2^t = 11$ is $t \approx 3,46$.
- 2 a Je kunt 125 schrijven als 5^3 , dus de oplossing van $5^x = 125$ is $x = 3$.
 b Je kunt 625 schrijven als 5^4 , dus de oplossing van $5^x = 625$ is $x = 4$.
 c Je weet dat $5^3 = 125$ en $5^4 = 625$. Het getal 500 ligt hier tussen, dus de oplossing van $5^x = 500$ ligt tussen 3 en 4.
 d Je weet dat $5^2 = 25$ en $5^3 = 125$. Het getal 100 ligt hier tussen, dus de oplossing van $5^x = 100$ ligt tussen 2 en 3.
 e Je kunt de vergelijkingen A, C en D oplossen zonder rekenmachine.
 A: $9 = 3^2$, dus de oplossing van $3^x = 9$ is $x = 2$.
 C: $27 = 3^3$, dus de oplossing van $3^x = 27$ is $x = 3$.
 D: $81 = 3^4$, dus de oplossing van $3^x = 81$ is $x = 4$.

12 Logaritmen

- 3 a** $7^x = 4$
 $x = {}^7\log(4)$
- b** $7^x = 10$
 $x = {}^7\log(10)$
- c** $5^x = 20$
 $x = {}^5\log(20)$
- d** $10^x = 14$
 $x = {}^{10}\log(14)$
- 4 a** $x = {}^3\log(5)$
 $3^x = 5$
- b** $x = {}^7\log\left(\frac{1}{2}\right)$
 $7^x = \frac{1}{2}$
- c** $x = {}^2\log(100)$
 $2^x = 100$
- d** $x = {}^3\log(81)$
 $3^x = 81$
- 5 a** $\log(5) \approx 0,70$; $\log(10) = 1$; $\log(50) \approx 1,70$; $\log(100) = 2$; $\log(1000) = 3$
- b** Omdat bijvoorbeeld $\log(100)$ en $\log(1000)$ gehele getallen zijn ($10^2 = 100$ en $10^3 = 1000$).
- c** Voor $x = 10^5$, dus voor $x = 100\,000$.
- d** $\log(0,0001) = -4$, omdat $10^{-4} = 0,0001$.
- 6 a** ${}^2\log(8) = 3$ want $2^3 = 8$.
- b** $\log(8) = 0,903\,08\dots$ en $\log(2) = 0,301\,02\dots$
 $\frac{\log(8)}{\log(2)} = \frac{0,903\,08\dots}{0,301\,02\dots} = 3 = {}^2\log(8)$
- c** ${}^3\log(81) = 4$ want $3^4 = 81$
 $\frac{\log(81)}{\log(3)} = \frac{1,908\,48\dots}{0,477\,12\dots} = 4 = {}^3\log(81)$
- 7 a** ${}^9\log(35) = \frac{\log(35)}{\log(9)} \approx 1,62$
- b** ${}^{\frac{1}{3}}\log(128) = \frac{\log(128)}{\log(\frac{1}{3})} \approx -4,42$
- c** ${}^5\log(10) = \frac{\log(10)}{\log(5)} \approx 1,43$
- d** ${}^4\log\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{\log(\frac{1}{13})}{\log(4)} \approx -1,85$
- e** $\log(450) \approx 2,65$
- f** ${}^{250}\log(45) = \frac{\log(45)}{\log(250)} \approx 0,69$
- 8 a** $t = {}^{1,54}\log(6,72) = \frac{\log(6,72)}{\log(1,54)} \approx 4,41$
- b** $5 \cdot 2,7^t = 150$ links en rechts delen door 5 geeft $2,7^t = 30$.
- c** $t = {}^{2,7}\log(30) = \frac{\log(30)}{\log(2,7)} \approx 3,42$
- d** A $120 \cdot 3^t = 600$ links en rechts delen door 120 geeft $3^t = 5$, dus
 $t = {}^3\log(5) = \frac{\log(5)}{\log(3)} \approx 1,46$
- B $1,02^t + 14 = 17,5$ links en rechts 14 er af trekken geeft $1,02^t = 3,5$, dus
 $t = {}^{1,02}\log(3,5) = \frac{\log(3,5)}{\log(1,02)} \approx 63,26$
- C $1500 \cdot 0,35^t = 300$ links en rechts delen door 1500 geeft $0,35^t = 0,2$, dus
 $t = {}^{0,35}\log(0,2) = \frac{\log(0,2)}{\log(0,35)} \approx 1,53$

D $0,78 \cdot 1,56^t + 3,05 = 5$ links en rechts 3,05 er af trekken geeft
 $0,78 \cdot 1,56^t = 1,95$ links en rechts delen door 0,78 geeft
 $1,56^t = 2,5$, dus $t = {}^{1,56}\log(2,5) = \frac{\log(2,5)}{\log(1,56)} \approx 2,06$

- 9 De groeifactor per minuut is 0,975.
 De vergelijking $75 \cdot 0,975^t = 40$ moet worden opgelost.
 $0,975^t = \frac{40}{75}$

$$t = {}^{0,975}\log\left(\frac{40}{75}\right) = \frac{\log\left(\frac{40}{75}\right)}{\log(0,975)} \approx 24,83$$

Om 09.25 uur is de temperatuur gedaald tot 40 °C.

- 04 a Oplossing B hoort bij vergelijking 1, oplossing D hoort bij vergelijking 2, oplossing C hoort bij vergelijking 3 en oplossing A hoort bij vergelijking 4.
 b De oplossing van de vergelijking $3^x = 17$ is $x = {}^3\log(17)$.
 De oplossing van de vergelijking $5^t = 67$ is $t = {}^5\log(67)$.
 c $x = {}^2\log(7)$ is de oplossing van de vergelijking $2^x = 7$
 $x = {}^5\log(60)$ is de oplossing van de vergelijking $5^x = 60$.
 d $3^x = 35$
 e $6^x = 5\frac{1}{2}$
 f $2^x = 88$
 g $5^x = 25$

- 08 a Er is links en rechts gedeeld door 50.
 b $t = {}^{2,75}\log(8)$
 $t \approx 2,06$
 c Links en rechts 21 optellen geeft $4 \cdot 7^p = 99$.
 Vervolgens links en rechts delen door 4 geeft $7^p = 24,75$.
 d $p = {}^7\log(24,75)$
 $p = \frac{\log(24,75)}{\log(7)} \approx 1,65$

- U1 a De exacte oplossing is $t = {}^2\log(9)$.
 b De oplossing geeft aan hoeveel weken het duurt voordat er 9 m² aan waterplanten is.
 c De oppervlakte verdubbelt elke week. Dat betekent dat één week nadat er 9 m² aan waterplanten is, er $9 \times 2 = 18$ m² aan waterplanten is.
 d Eén week nadat er 9 m² aan waterplanten is, is er $2 \times 18 = 36$ m² aan waterplanten. Twee weken later is er $2 \times 36 = 72$ m² aan waterplanten. Drie weken later is er $2 \times 72 = 144$ m² aan waterplanten.

12.2 Verdubbelingstijd en halveringstijd

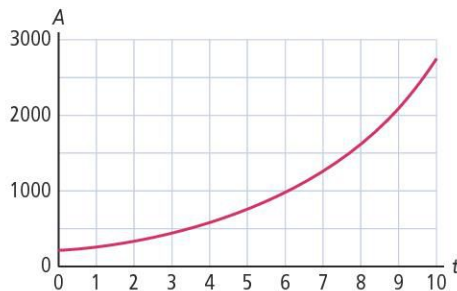
- intro De groeifactor per week is 1,00486.
 2025 is 7 jaar later, dus ongeveer $7 \times 52 = 364$ weken later.
 De groeifactor per 7 jaar is $1,00486^{364} \approx 5,84$.
 Het aantal apparaten zal in 2025 zelfs bijna zes keer zoveel zijn als in 2018.
 Het aantal apparaten zal voor 2025 zijn verdubbeld.

12 Logaritmen

10 a $A = 200 \cdot 1,3^t$

b Invoer: $y_1 = 200 \cdot 1,3^x$

Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 3000$



c $200 \cdot 1,3^t = 3000$

$$1,3^t = 15$$

$$t = {}^{1,3}\log(15) = \frac{\log(15)}{\log(1,3)} = 10,321\,71\dots$$

In april 2008 hadden 3000 studenten een mobiele telefoon.

d 40% van 6000 is 2400 studenten.

$$200 \cdot 1,3^t = 2400$$

$$1,3^t = 12$$

$$t = {}^{1,3}\log(12) = \frac{\log(12)}{\log(1,3)} = 9,471\,20\dots, \text{ dus na 9 jaar en}$$

$$0,471\,20\dots \times 12 = 5,7 \text{ maanden.}$$

40% van de studenten had een mobiele telefoon in juni 2007.

e Als het aantal gebruikers is verdubbeld, dan is $A = 2 \times 200 = 400$.

f Je kunt links en rechts delen door 200.

g $t = {}^{1,3}\log(2)$

h $t = \frac{\log(2)}{\log(1,3)} = 2,641\,92\dots, \text{ dus na 2 jaar en } 0,641\,92\dots \times 12 \approx 7,7 \text{ maanden}$

Het aantal gebruikers is verdubbeld in augustus 2000.

11 a $1,05^t = 2$

b De verdubbelingstijd is $t = {}^{1,05}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,05)} = 14,206\,69\dots \text{ jaren.}$

De verdubbelingstijd is ongeveer 14 jaren.

12 a De groeifactor per uur is 0,80.

b $Z = 50 \cdot 0,80^t$

c Er is nog $50 \cdot 0,80^{12} \approx 3,44 \text{ mg}$ over na 12 uur.

d Er is dan nog 25 mg over, dus $50 \cdot 0,80^t = 25$.

$$0,80^t = 0,5$$

$$t = {}^{0,80}\log(0,5) = \frac{\log(0,5)}{\log(0,80)} = 3,106\,28\dots$$

Na 3 uur en $0,106\,28\dots \times 60 \approx 6 \text{ minuten}$ is de helft van het medicijn nog in het lichaam aanwezig.

13 a $0,25^t = \frac{1}{2}$ geeft $t = {}^{0,25}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,25)} = 0,5$

De halveringstijd is 0,5 uur.

b $0,9^t = \frac{1}{2}$ geeft $t = {}^{0,9}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,9)} = 6,578\,81\dots$

De halveringstijd is 6,58 maanden.

c De afname is 5% per jaar, de groeifactor is 0,95.

$0,95^t = \frac{1}{2}$ geeft $t = {}^{0,95}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,95)} = 13,513\,40\dots$

De halveringstijd is 13,51 jaar.

14 a De afname is 11% per jaar, de groeifactor is 0,89.

$0,89^t = \frac{1}{2}$ geeft $t = {}^{0,89}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,89)} = 5,948\,03\dots$

Na ongeveer 6 jaar is de waarde van dit bedrag gehalveerd.

b Het bedrag is dan drie keer gehalveerd.

Het bedrag is dan $25\,000 \times 0,5^3 = \text{€ } 3.125,-$ waard.

15 a De verdubbelingstijd is vijf weken, want dan zijn er 20 muizen.

b Na 10 weken zijn er 40 muizen.

c In het begin waren er 10 muizen.

Het aantal muizen verdubbelt elke vijf weken.

Na tien weken zijn er dus $10 \times 2 \times 2 = 40$ muizen.

d Het aantal muizen is dan nogmaals verdubbeld.

Er zijn 80 muizen na $10 + 5 = 15$ weken.

e $80 \times 2 = 160$, dus $t = 15 + 5 = 20$ weken.

16 a In 6,6 jaar tijd is de hoeveelheid stof 50% van wat het oorspronkelijk was.

De groeifactor per 6,6 jaar is dan 0,5.

b De groeifactor per jaar is $0,5^{\frac{1}{6,6}} \approx 0,90$.

c Als de straling met 90% is afgenomen, is er nog 10% over.

$0,90^t = 0,10$

$t = {}^{0,90}\log(0,10) = \frac{\log(0,10)}{\log(0,90)} = 21,854\,34\dots$

Na ongeveer 21,9 jaar is de hoeveelheid straling met 90% afgenomen.

17 a De diameter van de vijfde monitor is $48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3$ cm.

b De eerste monitor heeft een diameter van 48 cm = 480 mm.

$480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{480}$

$n = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{480}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{480}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = 8,906\,89\dots$

Na negen keer halveren is de diameter kleiner dan 1 mm.

Dit is de tiende monitor in de rij.

12 Logaritmen

- 011** a $100\% + 12\% = 112\%$. De groeifactor is dan 1,12.
 b De vergelijking waarmee je de verdubbelingstijd kunt oplossen is $g^t = 2$ en de groeifactor g is hier gelijk aan 1,12.
 c De basisregel van logaritmen is toegepast. Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.
 d $t = {}^{1,12}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,12)} = 6,11625\dots$
 De hoeveelheid algen is na 6,1 weken verdubbeld.

- 013** a $100\% - 24\% = 76\%$. De groeifactor is 0,76.
 b De vergelijking waarmee je de halveringstijd kunt oplossen is $g^t = \frac{1}{2}$ en de groeifactor g is hier gelijk aan 0,76.
 c De basisregel van logaritmen is toegepast. Uit $g^t = a$ volgt $t = {}^g\log(a)$.
 d $t = {}^{0,76}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,76)} = 2,52570\dots$
 De hoeveelheid koolwittjes is na 2,5 weken gehalveerd.
 e $0,35^t = \frac{1}{2}$ geeft $t = {}^{0,35}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,35)} = 0,66025\dots$
 De halveringstijd is 0,66 dagen.
 f $0,89^t = \frac{1}{2}$ geeft $t = {}^{0,89}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,89)} = 5,94803\dots$
 De halveringstijd is 5,95 weken.
 g De afname is 7% per jaar, de groeifactor is 0,93.
 $0,93^t = \frac{1}{2}$ geeft $t = {}^{0,93}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,93)} = 9,55133\dots$
 De halveringstijd is 9,55 jaar.

- U2** De groeifactor per zeven weken is $\frac{11000}{8000} = 1,375$.
 De groeifactor per week is $1,375^{\frac{1}{7}} \approx 1,04654\dots$
 $1,0465\dots^t = 2$
 $t = {}^{1,0465}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,0465\dots)} = 15,23621\dots$
 De verdubbelingstijd is 15,2 weken.

- U3** Je weet van soort A dat $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^{6,52} = \frac{1}{2}$.
 $1 - \frac{p}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6,52}}$
 $1 - \frac{p}{100} \approx 0,89914\dots$
 $\frac{p}{100} = 0,10085\dots$ dus $p \approx 10,085\dots$
 De toename van soort B is 10,085...% per uur, de groeifactor is 1,10085...
 $1,10085\dots^t = 2$
 $t = {}^{1,101}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,10085\dots)} = 7,21373\dots$
 De verdubbelingstijd van soort B is 7,21 uren.

12.3 Grafieken van logaritmische functies

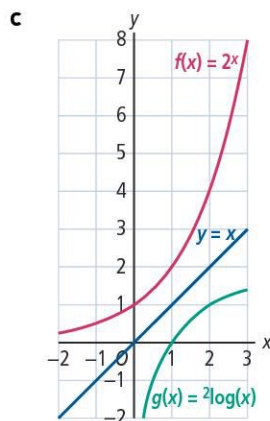
intro Dion heeft ongelijk. De tijd is nu op de verticale as af te lezen. Als de tijd toeneemt, neemt het aantal deelnemers steeds sneller toe.

18 a

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

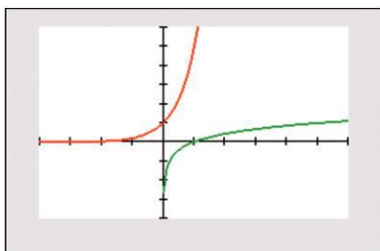
b

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3



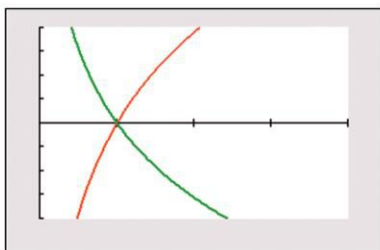
- d** Zie opdracht 18c.
De grafieken van f en g zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

- 19 a** Invoer: $y_1 = 5^x$ en $y_2 = {}^5\log(x)$
Venster: $-4 \leq x \leq 6$, $-4 \leq y \leq 6$



- b** De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as is $(0, 1)$.
c De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de x -as is $(1, 0)$.
d De asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 0$.
De asymptoot van de grafiek van k is de lijn $x = 0$.

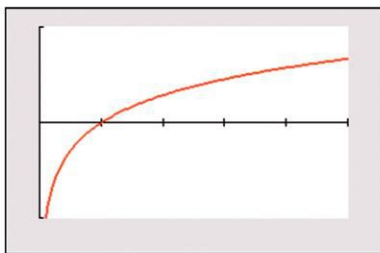
- 20 a** Invoer: $y_1 = {}^{1,2}\log(x)$ en $y_2 = {}^{0,8}\log(x)$
Venster: $0 \leq x \leq 4$, $-4 \leq y \leq 4$



- b** De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g met de horizontale as zijn $(1, 0)$.
c Het functievoorschrift van h is $h(x) = 1,2^x$.
d Het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as is $(0, 1)$.

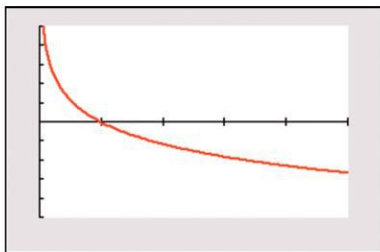
12 Logaritmen

- 21 a** Invoer: $y_1 = {}^{11}\log(x)$
Venster: $0 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 1$



- b** De coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as zijn $(1, 0)$. Dit betekent dat er aan het begin van het experiment één bacterie was.
c De grafiek van t is afnemend stijgend.
d Het aantal bacteriën zal steeds sneller toenemen.

- 22 a** Invoer: $y_1 = {}^{0,97}\log(x)$
Venster: $0 \leq x \leq 5, -100 \leq y \leq 100$

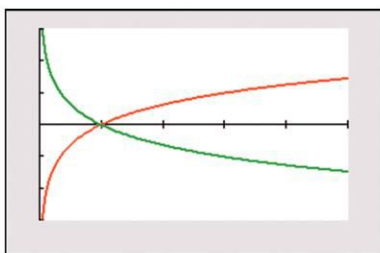


- b** De grafiek van t is afnemend dalend.
c De coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de horizontale as zijn $(1, 0)$. Dit betekent dat het dorp 10 000 inwoners had op 1 januari 2005.
d Als het dorp 8000 inwoners heeft, dan is $A = 0,8$.

$${}^{0,97}\log(0,8) = \frac{\log(0,8)}{\log(0,97)} = 7,325\,98\dots$$

In $2005 + 7 = 2012$ heeft het dorp nog maar 8000 inwoners.

- 23 a** Invoer: $y_1 = {}^3\log(x)$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$
Venster: $0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3$

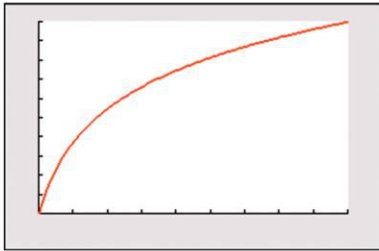


- b** De grafiek van f is afnemend stijgend.
c De andere grafiek is afnemend dalend.
d De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f vier eenheden omhoog te verschuiven.
e De grafiek van j ontstaat door de grafiek van g drie eenheden omlaag te verschuiven.

- 24** Grafiek 1 en grafiek 4 zijn afnemend stijgend. De waarde van g is bij deze grafieken dan groter dan 1. Grafiek 1 ligt boven grafiek 4.
 Functie g hoort bij grafiek 1 en functie i hoort bij grafiek 4.
 Grafiek 2 en grafiek 3 zijn afnemend dalend. De waarde van g ligt bij deze grafieken tussen 0 en 1. Grafiek 2 ligt boven grafiek 3.
 Functie f hoort bij grafiek 2 en functie h hoort bij grafiek 3.

- 25 a** Als $s = 18$ dan is $P = 100$.
 Dit invullen geeft $100 = a \cdot \log(18 + 1)$.
 Dan is $100 = a \cdot 1,27875\dots$ ofwel $a = \frac{100}{1,27875\dots} \approx 78,2$.

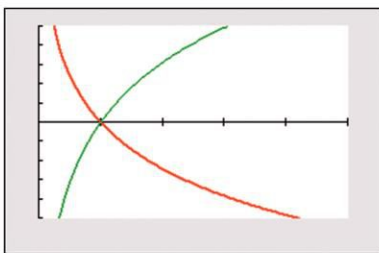
- b** Invoer: $y_1 = 78,2 \cdot \log(x + 1)$
 Venster: $0 \leq x \leq 18, 0 \leq y \leq 100$



De grafiek van P is afnemend stijgend.

- c** Hoe hoger de stand van de volumeknop, des te langzamer het geluidsniveau toeneemt.
d De grafiek snijdt de horizontale as in het punt $(0, 0)$.
 In stand 0 geeft de versterker geen geluid.
e $78,2 \cdot \log(s + 1) = 50$
 $\log(s + 1) = 0,63938\dots$
 $s + 1 = 10^{0,63938\dots}$
 $s + 1 = 4,35899\dots$
 $s \approx 3,36$
 Als de volumeknop stand 4 of hoger heeft, dan is $P > 50$.

- 020 a** Invoer: $y_1 = {}^{0,75}\log(x)$ en $y_2 = {}^{1,25}\log(x)$
 Venster: $0 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$



- b** $f(1) = {}^{0,75}\log(1) = 0$, dus $(1, 0)$ ligt op de grafiek van f .
 $g(1) = {}^{1,25}\log(1) = 0$, dus $(1, 0)$ ligt op de grafiek van g .
c De tweede coördinaat van dit punt is 0.
d Het spiegelbeeld van de grafiek van $g(x) = {}^{1,25}\log(x)$ in de lijn $y = x$ is de grafiek van $h(x) = 1,25^x$.
e De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de verticale as zijn $(0, 1)$.

12 Logaritmen

- 024 a** De grafiek van f is afnemend stijgend omdat het grondtal groter is dan 1.
b De grafiek van g is afnemend dalend omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt.
c De grafiek van h is afnemend stijgend omdat het grondtal groter is dan 1.
 De grafiek van i is afnemend dalend omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt.
d De grafiek van f ontstaat door elke punt op de grafiek van h twee omhoog te verschuiven.
e De grafiek van i ontstaat door elke punt op de grafiek van g twee omlaag te verschuiven.
f Grafiek 1 hoort bij functie h . Grafiek 2 hoort bij functie i .
 Grafiek 3 hoort bij functie f . Grafiek 4 hoort bij functie g .

U4 Omdat de grafiek door de oorsprong gaat is $f(0) = 0$.

$$p + {}^2\log(0 + 4) = 0$$

$$p + {}^2\log(4) = 0$$

$$p + 2 = 0 \text{ dus } p = -2.$$

Het functievoorschrift van f is $f(x) = -2 + {}^2\log(x + 4)$.

$$f(12) = -2 + {}^2\log(12 + 4) = -2 + {}^2\log(16) = -2 + 4 = 2$$

Ja, het punt (12, 2) ligt op de grafiek van f .

12.4 Formules met logaritmen

intro De groeifactor per 10°C is 0,88.

De groeifactor per $^\circ\text{C}$ is dan $0,88^{\frac{1}{10}} \approx 0,9873$.

Een exponentiële formule waarmee je het gewicht dat de ballon kan tillen kunt berekenen bij een gegeven buitentemperatuur is $G = 334 \cdot 0,9873^t$.

Links en rechts door 334 delen geeft $0,9873^t = \frac{G}{334}$. De basisregel voor

logaritmen toepassen geeft $t = {}^{0,9873}\log\left(\frac{G}{334}\right)$. Met deze formule kun je aan de hand van het gewicht dat de ballon kan tillen de buitentemperatuur bepalen.

- 26 a** $8^a = b$
 $a = {}^8\log(b)$
b $0,5^k = n$
 $k = {}^{0,5}\log(n)$
c $A = 1,3^n$
 $n = {}^{1,3}\log(A)$
d $p = 3^q$
 $q = {}^3\log(p)$
- 27 a** In stap 1 zijn links en rechts verwisseld.
 In stap 2 links en rechts -6 .
b In stap 3 gebruikt Corinne de basisregel voor logaritmen.
c $x = {}^4\log(y - 6)$
- 28 a** $q = 14^p$
 $14^p = q$
 $p = {}^{14}\log(q)$
b $q = 9 + 2^p$
 $9 + 2^p = q$
 $2^p = q - 9$
 $p = {}^2\log(q - 9)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c} & q = 9 \cdot 10^p \\
 & 9 \cdot 10^p = q \\
 & 10^p = \frac{1}{9} q \\
 & p = \log\left(\frac{1}{9} q\right) \\
 \text{d} & q = 5 \cdot 3^p \\
 & 5 \cdot 3^p = q \\
 & 3^p = \frac{1}{5} q \\
 & p = {}^3\log\left(\frac{1}{5} q\right) \\
 \text{e} & q = 8^p - 5 \\
 & 8^p - 5 = q \\
 & 8^p = q + 5 \\
 & p = {}^8\log(q + 5) \\
 \text{f} & q = 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^p \\
 & 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^p = q \\
 & \left(\frac{2}{7}\right)^p = \frac{1}{3} q \\
 & p = {}^{\frac{2}{7}}\log\left(\frac{1}{3} q\right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 29 \text{ a} & N = 3 \cdot 4^{0,2t} \\
 & 3 \cdot 4^{0,2t} = N \\
 & 4^{0,2t} = \frac{1}{3} N \\
 & 0,2t = {}^4\log\left(\frac{1}{3} N\right) \\
 & t = 5 \cdot {}^4\log\left(\frac{1}{3} N\right) \\
 \text{b} & N = -16 + 4 \cdot 5^t \\
 & -16 + 4 \cdot 5^t = N \\
 & 4 \cdot 5^t = N + 16 \\
 & 5^t = \frac{1}{4}(N + 16) \\
 & 5^t = \frac{1}{4} N + 4 \\
 & t = {}^5\log\left(\frac{1}{4} N + 4\right) \\
 \text{c} & 6 \cdot 10^{2t} + 2 = 8N \\
 & 6 \cdot 10^{2t} = 8N - 2 \\
 & 10^{2t} = \frac{1}{6}(8N - 2) \\
 & 10^{2t} = \frac{4}{3} N - \frac{1}{3} \\
 & 2t = \log\left(\frac{4}{3} N - \frac{1}{3}\right) \\
 & t = \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{4}{3} N - \frac{1}{3}\right) \\
 \text{d} & 3N - 2 = \frac{1}{12} \cdot 4^t \\
 & \frac{1}{12} \cdot 4^t = 3N - 2 \\
 & 4^t = 12(3N - 2) \\
 & 4^t = 36N - 24 \\
 & t = {}^4\log(36N - 24) \\
 \text{e} & 15N \cdot 6^t = 5 \\
 & 6^t = \frac{5}{15N} \\
 & 6^t = \frac{1}{3N} \\
 & t = {}^6\log\left(\frac{1}{3N}\right) \\
 \text{f} & 4N + 2 \cdot 2^t = 16 \\
 & 2 \cdot 2^t = 16 - 4N \\
 & 2^t = \frac{1}{2}(16 - 4N) \\
 & 2^t = 8 - 2N \\
 & t = {}^2\log(8 - 2N)
 \end{array}$$

30 a Elk uur gaat een vast percentage van de lading af; er is dan sprake van een exponentiële verband van de vorm $P = b \cdot g^t$. Aan het begin is de lading 100%, dus $b = 100$. Per uur verliest de batterij 4% van zijn lading, dus $g = 0,96$. De formule is daarom $P = 100 \cdot 0,96^t$.

$$\text{b} \quad P = 100 \cdot 0,96^t$$

$$100 \cdot 0,96^t = P$$

$$0,96^t = \frac{1}{100} P$$

$$t = {}^{0,96}\log\left(\frac{1}{100} P\right)$$

$$\text{c} \quad P = 20 \text{ invullen in de formule geeft } t = {}^{0,96}\log\left(\frac{1}{100} \cdot 20\right).$$

$$t = {}^{0,96}\log(0,2) = \frac{\log(0,2)}{\log(0,96)} = 39,42575\dots$$

De batterij is na 39,4 uur onbruikbaar geworden.

12 Logaritmen

31 a Een formule dat bij dit groeiproces hoort, is $N = 600 \cdot 2^t$.

b $600 \cdot 2^t = N$

$$2^t = \frac{1}{600} N$$

$$t = {}^2\log\left(\frac{1}{600} N\right)$$

c $N = 30\,000$ invullen in de formule geeft

$$t = {}^2\log\left(\frac{1}{600} \cdot 30\,000\right) = {}^2\log(50) = \frac{\log(50)}{\log(2)} = 5,643\,85\dots$$

Na ${}^2\log(50) \approx 5,64$ dagen zijn er 30 000 bacteriën.

32 a $7600 : 8000 = 0,95$; $7220 : 7600 = 0,95$; $6859 : 7220 = 0,95$ en $6516 : 6859 \approx 0,95$

De groeifactor per jaar is 0,95 dus neemt het aantal knaagdieren exponentieel af met 5% per jaar.

b $K = 8000 \cdot 0,95^t$

c $0,95^t = \frac{1}{2}$

$$t = {}^{0,95}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 13,513\,40\dots$$

De halveringstijd van het aantal knaagdieren is 13,5 jaar.

d $K = 8000 \cdot 0,95^t$

$$8000 \cdot 0,95^t = K$$

$$0,95^t = \frac{1}{8000} K$$

$$t = {}^{0,95}\log\left(\frac{1}{8000} K\right)$$

e Er zijn dan $8000 : 2 = 4000$ knaagdieren, dus $K = 4000$ invullen.

$$t = {}^{0,95}\log\left(\frac{1}{8000} \cdot 4000\right) = {}^{0,95}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,95)} = 13,513\,40\dots$$

Dit klopt met het antwoord van opdracht c, de halveringstijd van het aantal knaagdieren is inderdaad 13,5 jaar.

33 a $t = 0$ invullen in de formule geeft $T = 21 + 66 \cdot 0,9^0 = 21 + 66 \cdot 1 = 87$.

De temperatuur van de thee toen hij ingeschonken werd, was 87 °C.

b De omgevingstemperatuur is 21 °C.

c $21 + 66 \cdot 0,9^t = T$

$$66 \cdot 0,9^t = T - 21$$

$$0,9^t = \frac{T - 21}{66}$$

$$t = {}^{0,9}\log\left(\frac{T - 21}{66}\right)$$

d $T = 60$ invullen in de formule geeft

$$t = {}^{0,9}\log\left(\frac{60 - 21}{66}\right) = {}^{0,9}\log\left(\frac{39}{66}\right) = \frac{\log\left(\frac{39}{66}\right)}{\log(0,9)} = 4,993\,26\dots$$

$T = 35$ invullen in de formule geeft

$$t = {}^{0,9}\log\left(\frac{35 - 21}{66}\right) = {}^{0,9}\log\left(\frac{14}{66}\right) = \frac{\log\left(\frac{14}{66}\right)}{\log(0,9)} = 14,717\,06\dots$$

De thee is $14,717\,06\dots - 4,993\,26\dots \approx 9,7$ minuten goed drinkbaar.

34 a $R = b \cdot 2,3^S$

$$b \cdot 2,3^S = R$$

$$2,3^S = \frac{R}{b}$$

$$S = {}^{2,3}\log\left(\frac{R}{b}\right)$$

b $b \cdot 2,3^S = R$

$$b = \frac{R}{2,3^S}$$

$$R = 10 \text{ en } S = 2,5 \text{ invullen, geeft } b = \frac{10}{2,3^{2,5}} \approx 1,25.$$

028 a In stap 1 zijn links en rechts verwisseld.

In stap 2 zijn links en rechts door 12 gedeeld.

In stap 3 is de breuk geschreven als een getal keer h .

b In stap 4 wordt gebruik gemaakt van de basisregel voor logaritmen.

c $2^t = \frac{1}{12}h$

$$t = {}^2\log\left(\frac{1}{12}h\right)$$

d $h = 9^t$

$$9^t = h$$

$$t = {}^9\log(h)$$

g $h = 5 + 6^t$

$$5 + 6^t = h$$

$$6^t = h - 5$$

$$t = {}^6\log(h - 5)$$

e $h = \frac{1}{10} \cdot 3^t$

$$\frac{1}{10} \cdot 3^t = h$$

$$3^t = 10h$$

$$t = {}^3\log(10h)$$

h $h = 2 \cdot 10^t$

$$2 \cdot 10^t = h$$

$$10^t = \frac{1}{2}h$$

$$t = \log\left(\frac{1}{2}h\right)$$

f $h = 12^t + 8$

$$12^t + 8 = h$$

$$12^t = h - 8$$

$$t = {}^{12}\log(h - 8)$$

i $h = 7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t$

$$7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t = h$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^t = \frac{1}{7}h$$

$$t = {}^{\frac{3}{5}}\log\left(\frac{1}{7}h\right)$$

029 a In stap 1 zijn links en rechts verwisseld.

In stap 2 links en rechts $+ 8$.

b Op de puntjes in stap 3 komt het getal 4 te staan omdat er links en rechts door 4 is gedeeld.

c In stap 4 is de breuk gesplitst.

d $5^x = \frac{y+8}{4}$

$$5^x = \frac{1}{4}y + 2$$

$$x = {}^5\log\left(\frac{1}{4}y + 2\right)$$

e $y = 2 \cdot 5^x + 4$

$$2 \cdot 5^x + 4 = y$$

$$2 \cdot 5^x = y - 4$$

$$5^x = \frac{y-4}{2}$$

$$5^x = \frac{1}{2}y - 2$$

$$x = {}^5\log\left(\frac{1}{2}y - 2\right)$$

12 Logaritmen

U5 a $2(4p - 3) \cdot 3^q = 32$

$$(4p - 3) \cdot 3^q = 16$$

$$4p - 3 = \frac{16}{3^q}$$

$$4p = \frac{16}{3^q} + 3$$

$$p = \frac{1}{4} \left(\frac{16}{3^q} + 3 \right)$$

$$p = \frac{4}{3^q} + \frac{3}{4}$$

b $10^p - 3 \cdot 10^p = 10q$

$$-2 \cdot 10^p = 10q$$

$$10^p = -5q$$

$$p = \log(-5q)$$

c $7 \cdot 3^{2p+2} - 14q = 0$

$$7 \cdot 3^{2p+2} = 14q$$

$$3^{2p+2} = 2q$$

$$2p + 2 = {}^3\log(2q)$$

$$2p = {}^3\log(2q) - 2$$

$$p = \frac{1}{2}({}^3\log(2q) - 2)$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(2q) - 1$$

d $q = 2(3 - 5^{3p+4})$

$$2(3 - 5^{3p+4}) = q$$

$$3 - 5^{3p+4} = \frac{1}{2}q$$

$$-5^{3p+4} = \frac{1}{2}q - 3$$

$$5^{3p+4} = 3 - \frac{1}{2}q$$

$$3p + 4 = {}^5\log\left(3 - \frac{1}{2}q\right)$$

$$3p = -4 + {}^5\log\left(3 - \frac{1}{2}q\right)$$

$$p = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^5\log\left(3 - \frac{1}{2}q\right)$$

e $7^{p \cdot q} = 10$

$$p \cdot q = {}^7\log(10)$$

$$p = \frac{{}^7\log(10)}{q}$$

f $3^{2p-6} = 9q$

$$3^{2p-6} = (3^2)^q$$

$$3^{2p-6} = 3^{2q}$$

$$2p - 6 = 2q$$

$$2p = 2q + 6$$

$$p = q + 3$$

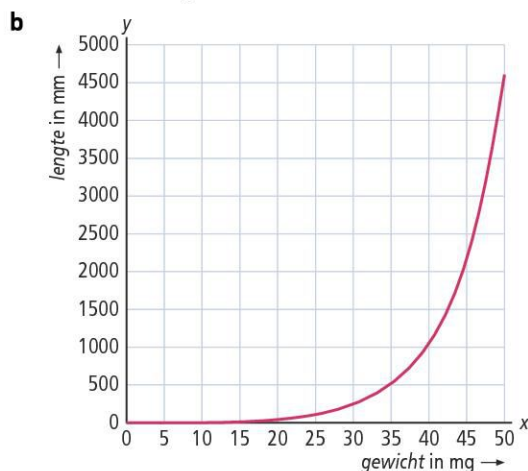
12.5 Logaritmische schalen

intro Een bacterie is 10 keer zo groot als een virus en een rode bloedcel is 10 keer zo groot als een bacterie.

Bij de schaalverdeling valt het op dat bij gelijke stappen telkens met een factor van 10 wordt vermenigvuldigd.

35 a $53 : 12 \approx 4,4$; $233 : 53 \approx 4,4$; $1029 : 233 \approx 4,4$ en $4539 : 1029 \approx 4,4$

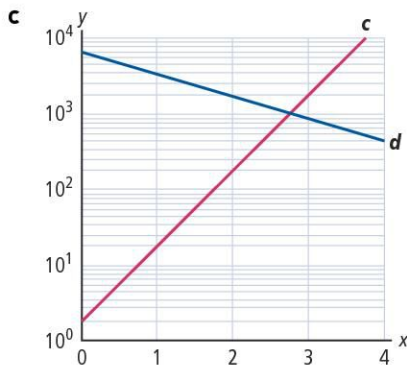
Er is een exponentieel verband tussen de lengte en het gewicht van de visjes.



- c** De laatste punt dat uit de tabel volgt, heeft coördinaten (50, 4539). Als je dit punt in de grafiek tekent is het erg lastig om bijvoorbeeld de eerste punt dat uit de tabel volgt (10, 12) te tekenen en om dat punt af te lezen.

- 36 a** Bij a hoort het getal $3\frac{1}{2}$ en bij b hoort het getal $\frac{1}{4}$.
- b** De getallen als machten van 10 zijn $0,01 = 10^{-2}$; $0,1 = 10^{-1}$; $1 = 10^0$; $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$ en $10\,000 = 10^4$.
- c** Bij a hoort het getal $10^{3\frac{1}{2}}$ en bij b hoort het getal $10^{\frac{1}{4}}$.
- d** De waarden zijn $a = 10^{3\frac{1}{2}} \approx 3162,28$ en $b = 10^{\frac{1}{4}} \approx 1,78$.
- e** Op de schaalverdeling A hoort het getal x dat voldoet aan $10^x = 550$.
 $x = \log(550) \approx 2,74$.

- 37 a**
- | | | | | | |
|-----|---|----|-----|------|--------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 2 | 20 | 200 | 2000 | 20 000 |
- b** Op de verticale as wordt bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor, in dit geval 10, vermenigvuldigd.



d

x	0	1	2	3	4
y	8000	4000	2000	1000	500

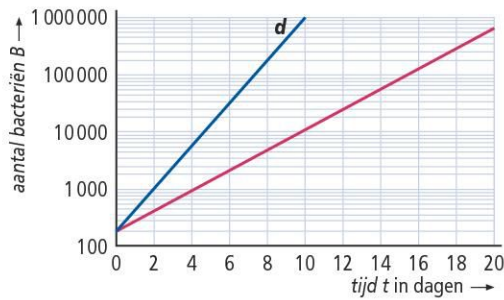
Zie voor de grafiek opdracht 37c.

- e** De grafieken zijn rechte lijnen.
- 38 a** De concentratie is 10 na 10 dagen, na 15 dagen en na 25 dagen.
 De concentratie is 100 na 30 dagen.
 De concentratie is 1000 na 35 dagen en na 48 dagen.
- b** De concentratie is $10^{3\frac{1}{2}} \approx 3162$ in punt A.
- c** De concentratie bij 25 dagen is 10.
 De concentratie bij 40 dagen is 10 000.
- d** De groeifactor per dag is $\left(\frac{10\,000}{10}\right)^{\frac{1}{15}} \approx 1,5849$.
- e** De beginwaarde is $10 : 1,5849^{25} \approx 0,0001$.
 Een formule bij dit deel van de grafiek is $a = 0,0001 \cdot 1,5849^t$, waarbij a de antistoffenconcentratie is en t de tijd in dagen.

- 39 a** Het aantal bacteriën nam exponentieel toe omdat de bijbehorende grafiek een rechte lijn is in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.
- b** Na 0 dagen zijn er 200 bacteriën. Na 20 dagen zijn er 500 000 bacteriën.
 De groeifactor per dag is $\left(\frac{500\,000}{200}\right)^{\frac{1}{20}} = 2500^{\frac{1}{20}} \approx 1,4788$.
 Een formule bij de grafiek is $B = 200 \cdot 1,4788^t$.
- c** $1,4788^t = 2$ dus $t = \frac{\log(2)}{\log(1,4788)} = 1,771\,70\dots$
 De verdubbelingstijd is ongeveer 1,77 dagen.

12 Logaritmen

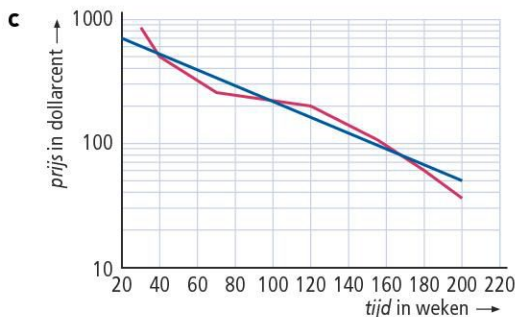
- d De grafiek is een rechte lijn door (0, 200) en (10, 1 000 000).



- e De groeifactor per dag is $\left(\frac{1\,000\,000}{200}\right)^{\frac{1}{10}} = 5000^{\frac{1}{10}} \approx 2,3437$.

Een formule bij deze grafiek is $B = 200 \cdot 2,3437^t$.

- 40 a Aflezen bij 120 weken geeft een prijs van 200 dollarcent.
b Het verband is vrijwel exponentieel omdat de grafiek bij benadering een rechte lijn is in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.



- d De grafiek gaat door (20, 700) en (200, 50).

De groeifactor per week is $\left(\frac{50}{700}\right)^{\frac{1}{180}} \approx 0,9854$.

De beginwaarde is $700 : 0,9854^{20} \approx 940$.

Een formule bij de lijn is $P = 940 \cdot 0,9854^t$ met P de prijs in dollarcent en t de tijd in weken.

- e $t = 250$ invullen in de formule geeft $940 \cdot 0,9854^{250} \approx 23,783\,03\dots$

Na 250 weken zal de cryptomunt ongeveer 24 dollarcent waard zijn.

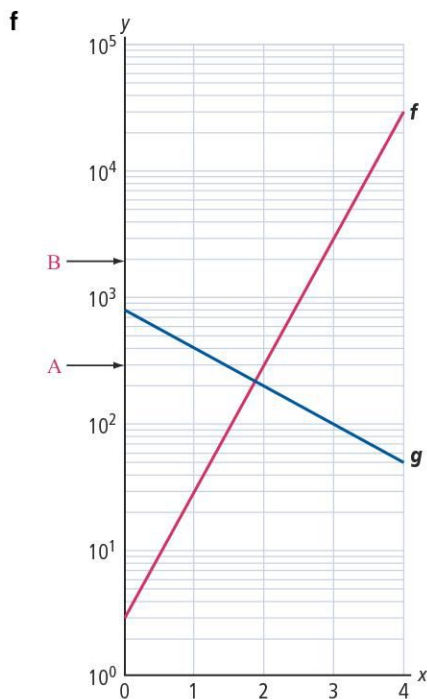
- 037 a Intikken op de rekenmachine geeft $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$ en $10^5 = 100\,000$.

- b Op de verticale as wordt bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor vermenigvuldigd.

- c De waarde 100 hoort bij de lijn bij 10^2 . Elke horizontale lijn boven deze lijn hoort bij een waarde dat 100 meer is dan de waarde bij de voorgaande lijn. De lijn bij pijltje A hoort bij de waarde $100 + 100 + 100 = 300$.

- d De waarde 1000 hoort bij de lijn bij 10^3 . Elke horizontale lijn boven deze lijn hoort bij een waarde dat 1000 meer is dan de waarde bij de voorgaande lijn. De lijn bij pijltje B hoort bij de waarde $1000 + 1000 = 2000$.

- e
- | | | | | | |
|-----|---|----|-----|------|--------|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 3 | 30 | 300 | 3000 | 30 000 |



g

x	0	1	2	3	4
y	800	400	200	100	50

Zie voor de grafiek opdracht O37f.

h De grafieken zijn rechte lijnen.

- U6** Bij een diameter van 100 cm = 1 m is $d = 1$ en $H = 40$.
 Dit invullen in $H = c \cdot d^a$ geeft $40 = c \cdot 1^a$ dus $c = 40$.
 Bij een diameter van 10 cm = 0,10 m is $d = 0,10$ en $H = 10$.
 Dit invullen in $H = 40 \cdot d^a$ geeft $10 = 40 \cdot 0,1^a$.
 Dan is $0,1^a = 0,25$, en $a = {}^{0,1}\log(0,25) = \frac{\log(0,25)}{\log(0,1)} \approx 0,60$.

12.6 Gemengde opdrachten

- 41 a** $P = 3^{2t+5}$
 $3^{2t+5} = P$
 $2t + 5 = {}^3\log(P)$
 $2t = {}^3\log(P) - 5$
 $t = \frac{1}{2}({}^3\log(P) - 5)$
 $t = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(P) - 2\frac{1}{2}$
- b** $2P - 4 \cdot 6^t = 12$
 $-4 \cdot 6^t = 12 - 2P$
 $6^t = -\frac{1}{4}(12 - 2P)$
 $6^t = -3 + \frac{1}{2}P$
 $t = {}^6\log(-3 + \frac{1}{2}P)$
- c** $P = 7(1 - 2^t)$
 $7(1 - 2^t) = P$
 $1 - 2^t = \frac{1}{7}P$
 $-2^t = \frac{1}{7}P - 1$
 $2^t = -\frac{1}{7}P + 1$
 $t = {}^2\log(-\frac{1}{7}P + 1)$
- d** $P = 2 \cdot 1,3^{2t} - 5$
 $2 \cdot 1,3^{2t} - 5 = P$
 $2 \cdot 1,3^{2t} = P + 5$
 $1,3^{2t} = \frac{1}{2}P + 2\frac{1}{2}$
 $2t = {}^{1,3}\log(\frac{1}{2}P + 2\frac{1}{2})$
 $t = \frac{1}{2} \cdot {}^{1,3}\log(\frac{1}{2}P + 2\frac{1}{2})$

12 Logaritmen

- 42 a** $47\,126 : 45\,843 \approx 1,028$; $48\,446 : 47\,126 \approx 1,028$; $49\,802 : 48\,446 \approx 1,028$;
 $51\,197 : 49\,802 \approx 1,028$ en $52\,630 : 51\,197 \approx 1,028$
 Er is sprake van exponentiële groei en de groeifactor per jaar is 1,028.
- b** Een formule is $E = 45\,843 \cdot 1,028^t$.
- c** $1,028^t = 2$

$$t = {}^{1,028}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,028)} = 25,100\,23\dots$$
 De verdubbelingstijd is 25,1 jaar.
- d** Het jaar 2025 komt overeen met $t = 23$.
 $45\,843 \times 1,028^{23} = 86\,519,632\,81\dots$
 Het energieverbruik in 2025 is dan ongeveer 86 520.
- 43 a** Er is dan sprake van exponentiële groei omdat de grafiek een rechte lijn is in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.
- b** In 1959 waren 3000 rupsen. In 1962 waren 20 000 000 rupsen.
 De groeifactor per 3 jaar is $\frac{20\,000\,000}{3000}$.
 De groeifactor per jaar is $\left(\frac{20\,000\,000}{3000}\right)^{\frac{1}{3}} = 18,820\,72\dots$
 De jaarlijkse procentuele toename is $18,820\,72\dots \times 100\% - 100\% \approx 1782\%$.
- c** $18,82^t = 2$

$$t = {}^{18,82}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(18,82)} = 0,236\,17\dots$$
 Het aantal rupsen per km² is in $0,236\,17\dots \times 365 \approx 86$ dagen verdubbeld.
- d** Van 1 juli 1962 tot 1 juli 1963 was de jaarlijkse absolute toename van het aantal rupsen het grootst.
- e** In 1965 waren 10 000 000 rupsen. In 1966 waren 20 000 rupsen.
 De groeifactor per jaar is $\frac{20\,000}{10\,000\,000} = 0,002$.
 Een formule voor het aantal rupsen per km² is $A = 10\,000\,000 \cdot 0,002^t$.
- 44 a** Per dag wordt 25% procent afgebroken, er blijft dan 75% over.
 Het functievoorschrift is $g(t) = 100 \cdot 0,75^t$.
- b** $100 \cdot 0,75^t = 15$
 $0,75^t = 0,15$

$$t = {}^{0,75}\log(0,15) = \frac{\log(0,15)}{\log(0,75)} = 6,594\,50\dots$$
 Na 6 dagen en $0,594\,50\dots \times 24 \approx 14$ uren zit er nog 15 mg geneesmiddel in het bloed.
- c** De halveringstijd is de oplossing van de vergelijking $0,75^t = \frac{1}{2}$.
 Dit is ${}^{0,75}\log\left(\frac{1}{2}\right)$.
- d**
$${}^{0,75}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,75)} = 2,409\,42\dots$$
 De halveringstijd is 2 dagen en $0,409\,42\dots \times 24 \approx 10$ uren.

Onderzoeksopdrachten

- 45** Per 14 dagen wordt 70% van Jodium-131 afgebroken, dus is er 30% over.
De groeifactor per 14 dagen is 0,30.
De groeifactor per dag is $0,30^{\frac{1}{14}} = 0,91759\dots$

$$0,91759\dots^t = \frac{1}{2} \text{ dus } t = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(0,91759\dots)} \approx 8,06003\dots$$

De halfwaardetijd van Jodium-131 is ongeveer 8,06 dagen.

Per 15 jaar wordt 30% van Cesium-137 afgebroken dus is er 70% over.

De groeifactor per 15 jaar is 0,70.

De groeifactor per jaar is $0,70^{\frac{1}{15}} = 0,97650\dots$

$$0,97650\dots^t = \frac{1}{2} \text{ dus } t = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(0,97650\dots)} \approx 29,15037\dots$$

De halfwaardetijd van Cesium-137 is $29,15037\dots \times 365 \approx 10639,89$ dagen.

De halfwaardetijd van Cesium-137 is $10639,89 : 8,06 \approx 1320$ keer langer.

- 46** Volgens de Amerikaanse norm is de geluidsterkte
 $-16,6 \cdot \log(6) + 105 \approx 92$ dB.
Volgens de Europese norm is $L = 80$ als $t = 8$ en $L = 83$ als $t = 4$.

t	8	4	2	1	0,5
L	80	83	86	89	92

Men zou dan maximaal een half uur in de Europese fabriek mogen werken.

Samenvatting

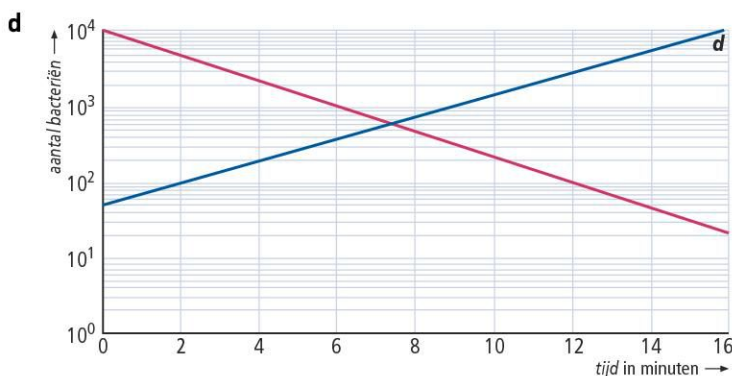
- S1 a** $8^t = 3$
 $t = {}^8\log(3)$
b $10^t = 50$
 $t = \log(50)$
c $0,5^t = 0,1$
 $t = {}^{0,5}\log(0,1)$
d $3^t = 24$
 $t = {}^3\log(24)$
- S2 a** De grafiek van f is afnemend dalend omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt.
b De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f zeven eenheden omhoog te verschuiven.
- S3** Bij assenstelsel A en assenstelsel B heeft de verticale as een logaritmische schaalverdeling. Op de verticale as wordt bij gelijke stappen telkens met dezelfde factor vermenigvuldigd.
- S4 a** $4^x = 7$
 $x = {}^4\log(7)$
 $x = \frac{\log(7)}{\log(4)} \approx 1,40$
b $2 \cdot 9^x = 14$
 $9^x = 7$
 $x = {}^9\log(7)$
 $x = \frac{\log(7)}{\log(9)} \approx 0,89$

12 Logaritmen

- S5 a** $0,8^t = \frac{1}{2}$
 $t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 3,11$ jaar
- b** $1,8^t = 2$
 $t = {}^{1,8}\log(2) \approx 1,18$ uur
- c** De groeifactor per week is $\frac{221}{166} = 1,33132\dots$
 $1,33132\dots^t = 2$
 $t = {}^{1,33132\dots}\log(2) = 2,42211\dots$ weken
 De verdubbelingstijd is $2,42211\dots \times 7 \approx 16,95$ dagen.

- S6 a** $p = 2,3^q$
 $2,3^q = p$
 $q = {}^{2,3}\log(p)$
- b** $p = 5 + 2 \cdot 3^q$
 $5 + 2 \cdot 3^q = p$
 $2 \cdot 3^q = p - 5$
 $3^q = \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{2}$
 $q = {}^3\log\left(\frac{1}{2}p - 2\frac{1}{2}\right)$
- c** $p = 6^q - 3$
 $6^q - 3 = p$
 $6^q = p + 3$
 $q = {}^6\log(p + 3)$
- d** $p = 0,25 \cdot 7^{5q}$
 $0,25 \cdot 7^{5q} = p$
 $7^{5q} = 4p$
 $5q = {}^7\log(4p)$
 $q = \frac{1}{5} \cdot {}^7\log(4p)$

- S7 a** b ligt precies tussen 10^2 en 10^3 in, dus $b = 10^{2\frac{1}{2}} \approx 316,23$
- b** Er waren $10^4 = 10000$ bacteriën in het begin van het experiment.
- c** Na 10 minuten waren er 200 bacteriën.



Test jezelf

- T1 a** $8^t = 5$
 $t = {}^8\log(5)$
 $t = \frac{\log(5)}{\log(8)} \approx 0,77$
- b** $3^t + 1 = 14$
 $3^t = 13$
 $t = {}^3\log(13)$
 $t = \frac{\log(13)}{\log(3)} \approx 2,33$
- c** $10^t = 19$
 $t = \log(19)$
 $t \approx 1,28$
- d** $4^t - 2 = 12$
 $4^t = 14$
 $t = {}^4\log(14)$
 $t = \frac{\log(14)}{\log(4)} \approx 1,90$
- e** $6 + 9^t = 23$
 $9^t = 17$
 $t = {}^9\log(17)$
 $t = \frac{\log(17)}{\log(9)} \approx 1,29$
- f** $3 \cdot 5^t = 21$
 $5^t = 7$
 $t = {}^5\log(7)$
 $t = \frac{\log(7)}{\log(5)} \approx 1,21$

- T2 a** Het aantal neemt elk jaar met 20% af, dus de groeifactor per jaar is 0,80.

$$0,80^t = \frac{1}{2}$$

$$t = {}^{0,80}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,80)} = 3,10628\dots$$

Het aantal pinguïns is na ongeveer 3,1 jaar gehalveerd.

- b** Het aantal pinguïns wordt gehalveerd, dit is de halveringstijd.

3,1 jaar later is het aantal pinguïns afgenomen tot 50.

- c** De groeifactor van het aantal zeevogels is 1,054.

$$1,054^t = 2$$

$$t = {}^{1,054}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,054)} = 13,17959\dots$$

De verdubbelingstijd van het aantal zeevogels is ongeveer 13,18 jaar.

De groeifactor van het aantal zeehonden is 0,982.

$$0,982^t = \frac{1}{2}$$

$$t = {}^{0,982}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,982)} = 38,16055\dots$$

De halveringstijd van het aantal zeehonden is ongeveer 38,16 jaar.

Het verschil is $38,16 - 13,18 \approx 25$ jaar.

- T3 a** $1,07^t = 2$

$$t = {}^{1,07}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,07)} = 10,24476\dots$$

Na 10,2 jaar is de beginhoeveelheid verdubbeld.

- b** De hoeveelheid is dan $2000 : 250 = 8$ keer zo groot geworden.

Dit is drie keer de verdubbelingstijd omdat $2^3 = 8$.

Het duurt $3 \times 10,2 \approx 31$ jaar totdat die hoeveelheid is toegenomen tot 2000.

- T4 a** De grafiek is afnemend dalend. Het grondtal ligt dan tussen 0 en 1.

- b** De grafiek is toenemend stijgend. Het grondtal is dan groter dan 1.

- c** Een functievoorschrift wordt $i(x) = 2^x$.

- d** Grafiek 4 ligt drie eenheden boven grafiek 3.

Een functievoorschrift wordt $j(x) = {}^2\log(x) + 3$.

- T5 a**

t in jaren	0	1	2	3	4
A in km^2	$10^{0,8} \approx 6,31$	$10^{1,05} \approx 11,22$	$10^{1,3} \approx 19,95$	$10^{1,55} \approx 35,48$	$10^{1,8} \approx 63,10$

t in jaren	5	6	7	8
A in km^2	$10^{2,05} \approx 112,2$	$10^{2,25} \approx 177,8$	$10^{2,4} \approx 251,2$	$10^{2,5} \approx 316,2$

- b** $11,22 : 6,31 \approx 1,78$; $19,95 : 11,22 \approx 1,78$; $35,48 : 19,95 \approx 1,78$;

$63,10 : 35,48 \approx 1,78$ en $112,2 : 63,10 \approx 1,78$.

En hierna $177,8 : 112,2 \approx 1,58$; $251,2 : 177,8 \approx 1,41$; $316,2 : 251,2 \approx 1,26$

De groeifactor is eerst ongeveer gelijk (1,78) en neemt daarna af.

- c** Het eerste deel van de grafiek is een rechte lijn in een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling.

- d** Een functievoorschrift is $A(t) = 6,31 \cdot 1,78^t$.

- e** In de grafiek zie je dat de oppervlakte niet boven $10^{2,5} = 316,22776\dots$ komt.

De grootte van het meer is ongeveer 316 km^2 .

12 Logaritmen

- T6 a** $N = 6^t$
 $6^t = N$
 $t = {}^6\log(N)$
- b** $N = 3 \cdot 4^t$
 $3 \cdot 4^t = N$
 $4^t = \frac{1}{3} \cdot N$
 $t = {}^4\log\left(\frac{1}{3}N\right)$
- c** $N = 12 + 3^t$
 $12 + 3^t = N$
 $3^t = N - 12$
 $t = {}^3\log(N - 12)$
- d** $N = -16 + 4 \cdot 5^t$
 $-16 + 4 \cdot 5^t = N$
 $4 \cdot 5^t = N + 16$
 $5^t = \frac{1}{4}N + 4$
 $t = {}^5\log\left(\frac{1}{4}N + 4\right)$
- e** $N + 4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$
 $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = N + 4$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{2}N + 2$
 $t = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{2}N + 2\right)$
- f** $5N - 2 = \frac{1}{2} \cdot 4^t$
 $\frac{1}{2} \cdot 4^t = 5N - 2$
 $4^t = 10N - 4$
 $t = {}^4\log(10N - 4)$

- T7 a** De groeifactor per dag is 0,92.
 $0,92^t = \frac{1}{2}$
 $t = {}^{0,92}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,92)} = 8,31295\dots$

Na ongeveer 8,3 dagen zit er nog maar de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon.

- b** De hoeveelheid helium is dan weer gehalveerd.
 Na $2 \times 8,31295\dots \times 24 \approx 399$ uur zit er nog maar 25% van de oorspronkelijke hoeveelheid helium in de ballon.

Extra oefening

- E1 a** ${}^{100}\log(175) = \frac{\log(175)}{\log(100)} \approx 1,122$
- b** ${}^{1,5}\log(75) = \frac{\log(75)}{\log(1,5)} \approx 10,648$
- c** ${}^{0,3}\log(23,78) = \frac{\log(23,78)}{\log(0,3)} \approx -2,632$
- d** ${}^{\frac{1}{4}}\log(15) = \frac{\log(15)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)} \approx -1,953$
- E2 a** $15^t = 30$
 $t = {}^{15}\log(30)$
 $t = \frac{\log(30)}{\log(15)} \approx 1,26$
- b** $3 + 5^t = 40$
 $5^t = 37$
 $t = {}^5\log(37)$
 $t = \frac{\log(37)}{\log(5)} \approx 2,24$
- c** $6^t = 3$
 $6^t = 3$
 $t = {}^6\log(3)$
 $t = \frac{\log(3)}{\log(6)} \approx 0,61$
- d** $3 \cdot 8^t - 13 = 5$
 $3 \cdot 8^t = 18$
 $8^t = 6$
 $t = {}^8\log(6)$
 $t = \frac{\log(6)}{\log(8)} \approx 0,86$

E3 a De groeifactor per week is 1,032.

$$1,032^t = 2$$

$$t = {}^{1,032}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,032)} = 22,005\,60\dots$$

De verdubbelingstijd is 22 weken.

b De groeifactor per jaar is 0,9835.

$$0,9835^t = \frac{1}{2}$$

$$t = {}^{0,9835}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,9835)} = 41,661\,38\dots$$

De halveringstijd is 42 jaar.

E4 a $P = 4^t - 3$

$$4^t - 3 = P$$

$$4^t = P + 3$$

$$t = {}^4\log(P + 3)$$

b $P = 9^{t-1}$

$$9^{t-1} = P$$

$$t - 1 = {}^9\log(P)$$

$$t = {}^9\log(P) + 1$$

d $P - 5^t = 0$

$$-5^t = -P$$

$$5^t = P$$

$$t = {}^5\log(P)$$

e $15P \cdot 3^t = 45$

$$3^t = \frac{45}{15P}$$

$$3^t = \frac{3}{P}$$

$$t = {}^3\log\left(\frac{3}{P}\right)$$

c $P = 3 \cdot 2^t$

$$3 \cdot 2^t = P$$

$$2^t = \frac{1}{3} \cdot P$$

$$t = {}^2\log\left(\frac{1}{3}P\right)$$

f $5 \cdot 6^t - 15P = 30$

$$5 \cdot 6^t = 15P + 30$$

$$6^t = 3P + 6$$

$$t = {}^6\log(3P + 6)$$

E5 a Aflezen geeft $10^{7,6} \approx 39\,810\,717$.

Er zaten ongeveer 40 miljoen transistors in een Pentium 4 processor.

b De groeifactor per 36 jaar is $\frac{730\,000\,000}{2500} = 292\,000$.

De groeifactor per jaar is $292\,000^{\frac{1}{36}} \approx 1,4185$.

Een formule bij dit groeimodel is $T = 2500 \cdot 1,4185^t$.

c $1,4185^t = 2$

$$t = {}^{1,4185}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,4185)} \approx 1,98$$

De verdubbelingstijd van dit groeimodel is ongeveer 2 jaar.

E6 a De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

b Het functievoorschrift $g(x) = 3^x$ hoort bij grafiek 2.

c Een functievoorschrift is $h(x) = {}^3\log(x) - 7$.

d Het grondtal ligt tussen 0 en 1. De grafiek van j is dan afnemend dalend.

E7 a De groeifactor per week is 1,048.

Een formule is $K = 80 \cdot 1,048^t$.

b $1,048^t = 2$

$$t = {}^{1,048}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(1,048)} = 14,78443\dots$$

De verdubbelingstijd is ongeveer 14,8 weken.

c $K = 80 \cdot 1,048^t$

$$80 \cdot 1,048^t = K$$

$$1,048^t = \frac{1}{80} \cdot K$$

$$t = {}^{1,048}\log\left(\frac{1}{80}K\right)$$

12 Logaritmen

d $K = 1000$ invullen in de formule $t = {}^{1,048}\log\left(\frac{1}{80}K\right)$ geeft

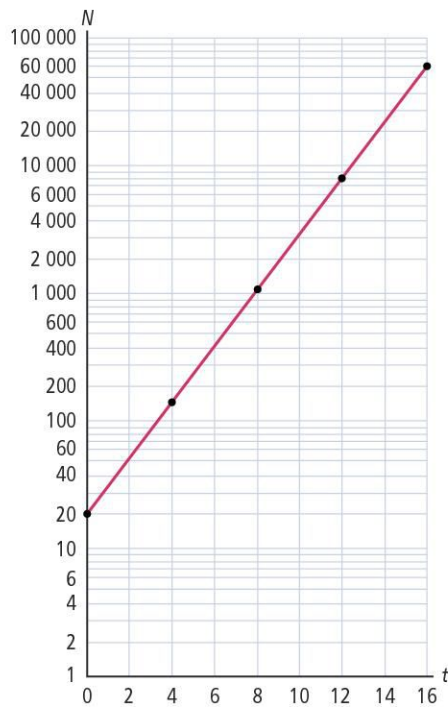
$$t = {}^{1,048}\log\left(\frac{1}{80} \times 1000\right)$$

$$t = {}^{1,048}\log(12,5)$$

$$t = \frac{\log(12,5)}{\log(1,048)} = 53,87234\dots$$

Na ongeveer 54 weken waren er 1000 kakkerlakken.

E8 a



b Er waren ongeveer 3000 algen.

c $20 \cdot 1,65^0 = 20$

$$20 \cdot 1,65^4 = 148,24013\dots \approx 150$$

$$20 \cdot 1,65^8 = 1098,75673\dots \approx 1100$$

$$20 \cdot 1,65^{12} = 8143,99177\dots \approx 8100$$

$$20 \cdot 1,65^{16} = 60363,31792\dots \approx 60000$$

De waarden in de tabel voldoen bij benadering aan de formule.

d $20 \cdot 1,65^t = 25000$

$$1,65^t = 1250$$

$$t = {}^{1,65}\log(1250) = \frac{\log(1250)}{\log(1,65)} = 14,23971\dots$$

De waarde van t is ongeveer 14,24.

e $N = 20 \cdot 1,65^t$

$$20 \cdot 1,65^t = N$$

$$1,65^t = \frac{1}{20} \cdot N$$

$$t = {}^{1,65}\log\left(\frac{1}{20}N\right)$$

$N = 25000$ invullen geeft

$$t = {}^{1,65}\log\left(\frac{1}{20} \times 25000\right) = {}^{1,65}\log(1250) \approx 14,24$$

Het antwoord van opdracht d klopt.

13 Binomiale verdelingen

Voorkennis

V1 a

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

- b De kans dat $S = 2$ is $\frac{1}{16}$.
 c De kans op uitkomst 5 is $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.
 d $P(S = 4)$ is groter dan $P(S = 2)$, omdat er meer mogelijkheden zijn om uitkomst 4 te krijgen dan er zijn om uitkomst 2 te krijgen.
 e Er zijn $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ mogelijkheden om uitkomst 5 of meer te krijgen.
 $P(S \geq 5) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

V2 a De kans op kop is elke worp gelijk aan $\frac{1}{2}$.

$$P(U = 4) = P(kkkk) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

- b $P(kkkk) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
 c Er zijn vier verschillende rijtjes, namelijk $kkkm$, $kkmk$, $kmkk$ en $mkkk$.
 d $P(U = 3) = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

V3 Er zijn drie mogelijkheden met twee vieren namelijk $44a$, $4a4$, $a44$ en elk met kans $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$, dus $P(X = 2) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$.

V4 a $P(B = 0) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{64}{1000} = 0,064$
 $P(B = 1) = 3 \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{288}{1000} = 0,288$
 $P(B = 2) = 3 \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{432}{1000} = 0,432$
 $P(B = 3) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{216}{1000} = 0,216$

u	0	1	2	3
$P(B = u)$	0,064	0,288	0,432	0,216

$$E(B) = 0 \times 0,064 + 1 \times 0,288 + 2 \times 0,432 + 3 \times 0,216 = 1,8$$

- b Er zijn drie mogelijkheden om twee blauwe balletjes te trekken, namelijk bbr , brb en rbb .

$$\text{De kans op twee blauwe balletjes is } 3 \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}.$$

V5 a $P(WRWRW) = \frac{8}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{8}{20} = \frac{73728}{3200000} = 0,02304$

b $P(WWWRR) = \frac{8}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{8}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{12}{20} = \frac{73728}{3200000} = 0,02304$

- c In het rooster neem je vanaf linksonder twee stappen naar rechts (rood) en drie stappen naar boven (wit). Het getal 10 hoort bij het bijbehorende roosterpunt, dus zijn er 10 rijtjes.
 d Je neemt in totaal 5 stappen in het rooster. Het aantal rijtjes waarbij je twee stappen naar rechts en drie stappen naar boven gaat, is gelijk aan het aantal rijtjes waarbij je drie stappen naar rechts en twee stappen naar boven gaat.

13 Binomiale verdelingen

- e Er zijn 10 rijtjes met twee keer rood en drie keer wit.
 $P(\text{twee keer rood en drie keer wit}) = 10 \times \left(\frac{12}{20}\right)^2 \times \left(\frac{8}{20}\right)^3 = 0,2304$
- f $P(\text{drie keer rood en twee keer wit}) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{12}{20}\right)^3 \times \left(\frac{8}{20}\right)^2$
 $= 10 \times 0,03456 = 0,3456$

- V6 a $P(X=4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{12}{20}\right)^4 \times \frac{8}{20} = 5 \times 0,05184 = 0,2592$
- b $P(\text{hoogstens vier rode knikkers}) = 1 - P(\text{vijf rode knikkers})$
 $= 1 - \left(\frac{12}{20}\right)^5 = 1 - 0,07776 = 0,92224$

- V7 a Voor de eerste kaart zijn er 48 kaarten, waarvan 44 geen mees zijn.
 Voor de tweede kaart zijn er 47 kaarten, waarvan 43 geen mees zijn.
 Voor de derde kaart zijn er 46 kaarten, waarvan 42 geen mees zijn.
 Voor de vierde kaart zijn er 45 kaarten, waarvan 41 geen mees zijn.

$$P(\text{geen enkele mees}) = \frac{44}{48} \times \frac{43}{47} \times \frac{42}{46} \times \frac{41}{45}$$

- b $\frac{44}{48} \times \frac{43}{47} \times \frac{42}{46} \times \frac{41}{45} \approx 0,6977$
- c $P(\text{minstens één mees}) = 1 - P(\text{geen enkele mees})$
 $= 1 - 0,6977 = 0,3023$
- d $P(\text{hoogstens drie mezen}) = 1 - P(\text{vier mezen})$
 $= 1 - \frac{4}{48} \times \frac{3}{47} \times \frac{2}{46} \times \frac{1}{45} = 1 - 0,000005139... \approx 0,999994$

13.1 De binomiale verdeling

intro De kans dat het eerste lot een prijs wint is $\frac{100}{10000} = 0,01$. De kans dat het tweede lot dan ook een prijs wint is $\frac{99}{9999} = 0,0099...$ dus niet 0,01. De kans dat de derde lot ook een prijs wint is $\frac{98}{9998} = 0,0098...$ dus ook niet 0,01. De kansen wijken niet veel van 0,01 af, maar Guus heeft ongelijk.

- 1 a $P(BBABAB) = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = (0,5)^6 = 0,015625$
- b $P(BBABAB) = 0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,4 = (0,4)^4 \times (0,6)^2 = 0,009216$
 $P(ABBBAB) = 0,6 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,4 = (0,4)^4 \times (0,6)^2 = 0,009216$
- c $\binom{6}{3} = 20$ manieren
- d $P(\text{eindstand 3-3}) = 20 \times 0,6^3 \times 0,4^3 = 0,27648$
- 2 a Die kans is $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,01607... \approx 0,0161$.
- b $\binom{5}{2} = 10$ uitkomsten
- c De kans is $10 \times 0,01607... \approx 0,1608$.
- 3 a Hier wordt een kansexperiment 20 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten goed en fout. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
 X is het aantal goed beantwoorde vragen, $n = 20$ en $p = \frac{1}{3}$.
- b Hierbij hoort geen binomiale verdeling. De kans op het kiezen van een jongen verandert na elke keuze.

- c Hierbij hoort geen binomiale verdeling. Er zijn bij elke worp zes mogelijke uitkomsten en geen twee.
- d Hier wordt een kansexperiment vijf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten een twee of niet een twee. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
 X is het aantal tweeën, $n = 5$ en $p = \frac{1}{6}$.
- e Hierbij hoort geen binomiale verdeling. De kans op een rode knikker verandert na elke herhaling.
- 4 a Hier wordt een kansexperiment vijf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten rood of niet rood. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. De kansverdeling van X is dus binomiaal verdeeld.

$$b \quad P(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{4}{10}\right)^3 \times \left(\frac{6}{10}\right)^2 = 10 \times 0,02304 \approx 0,2304$$

- 5 a Je kunt een greep van vijf knikkers opvatten als vijf keer een knikker trekken zonder terugleggen. De kans op een rode knikker verandert na elke trekking dus stochast Y is niet binomiaal verdeeld.

$$b \quad P(Y = 5) = \frac{20}{25} \times \frac{19}{24} \times \frac{18}{23} \times \frac{17}{22} \times \frac{16}{21} = 0,29181... \approx 0,2918$$

$$c \quad P(Y = 4) = \binom{5}{4} \times \frac{20}{25} \times \frac{19}{24} \times \frac{18}{23} \times \frac{17}{22} \times \frac{5}{21} = 0,45595... \approx 0,4560$$

$$P(Y < 4) = 1 - P(Y = 4) - P(Y = 5)$$

$$P(Y < 4) = 1 - 0,45595... - 0,29181... \approx 0,2522$$

6 a

vaas	aantal ballen		$P(X = 2)$	
	rood	wit	niet terugleggen	zonder terugleggen
A	4	6	$\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = 0,16$	$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \approx 0,1333$
B	40	60	$\frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = 0,16$	$\frac{40}{100} \times \frac{39}{99} \approx 0,1576$
C	400	600	$\frac{400}{1000} \times \frac{400}{1000} = 0,16$	$\frac{400}{1000} \times \frac{399}{999} \approx 0,1598$

- b Hoe groter het aantal ballen, hoe meer de kans bij de trekking zonder terugleggen op de kans bij de trekking met terugleggen gaat lijken. Als je zonder terugleggen een kleine hoeveelheid uit een groot aantal trekt, dan mag je dit opvatten als een trekking met terugleggen.
- 7 a Sanne neemt een greep uit het aantal toffees. Dit mag je opvatten als een trekking zonder terugleggen. De kans op succes (een droptoffee) verandert na elke trekking. Het aantal droptoffees is niet binomiaal verdeeld.
- b Er wordt een kleine steekproef van drie toffees getrokken uit een grote populatie van 200 toffees.

- c X is binomiaal verdeeld met $n = 3$ en $p = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

u	0	1	2	3
$P(X = u)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

13 Binomiale verdelingen

- 04 a** De kans dat de pijl op rood komt, is $\frac{1}{5}$.
 De kans dat de pijl niet op rood komt is $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
- b** Hier wordt een kansexperiment tien keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten rood en niet rood. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling. R is het aantal keren dat de tol op rood komt, $n = 10$ en $p = \frac{1}{5}$.
- c** Dit is het aantal rijtjes met vier keer rood en zes keer niet rood.
- d** De kans op rood is 0,2 en komt vier keer voor en het wordt daarom vier keer met zichzelf vermenigvuldigd dus $0,2^4$. De kans op niet rood is 0,8 en komt zes keer voor en het wordt daarom zes keer met zichzelf vermenigvuldigd dus $0,8^6$.
- e** $\binom{10}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^6 = 210 \times 0,000419... \approx 0,0881$
- f** Hier wordt een kansexperiment 12 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten blauw en niet blauw. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling. B is het aantal keren dat ze blauw draait, $n = 12$ en $p = \frac{2}{5}$.
- g** $P(B = 7) = \binom{12}{7} \times \left(\frac{2}{5}\right)^7 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 792 \times 0,000127... \approx 0,1009$
- U1 a** $P(\text{Jackpot}) = \frac{6}{45} \times \frac{5}{44} \times \frac{4}{43} \times \frac{3}{42} \times \frac{2}{41} \times \frac{1}{40} \times \frac{1}{6} = 2,046 \cdot 10^{-8}$
 Dit komt overeen met 1 op de 1 : $2,046 \cdot 10^{-8} = 48\,870\,360$.
 De kans op een Jackpot is inderdaad ongeveer 1 op de 49 miljoen.
- b** Het aantal keren prijs X is bij benadering binomiaal verdeeld omdat je een kleine steekproef van tien formulieren neemt uit een groot aantal formulieren.
 Hierbij is $n = 10$ en $p = 0,175$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,825^{10} = 1 - 0,14606... \approx 0,8539$

13.2 Werken met binomiale verdelingen

intro $P(\text{drie keer kop}) = \binom{8}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{8}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 56 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$$P(\text{één keer kop}) = \binom{8}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \binom{8}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

Die kans is $\frac{56}{8} = 7$ keer zo groot.

- 8 a** Hier wordt een kansexperiment 20 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten wel aan de maximumsnelheid gehouden en niet aan de maximumsnelheid gehouden. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling. X is het aantal mensen dat zich aan de maximumsnelheid houdt, $n = 20$ en $p = 0,75$.
- b** $P(X = 20) = 0,75^{20} \approx 0,0032$
- c** $P(X = 15) = \binom{20}{15} \times 0,75^{15} \times 0,25^5 = 15\,504 \times 0,000013... \approx 0,2023$

- d Het aantal mogelijke uitkomsten waarbij precies 16 mensen zich aan de maximumsnelheid houden is $\binom{20}{16}$. De kans op elk van deze uitkomsten is gelijk aan $0,75^{16} \times 0,25^4$. De kans op precies 16 mensen is dan gelijk aan het product van deze factoren.

$$P(X = 16) = \binom{20}{16} \times 0,75^{16} \times 0,25^4 = 4845 \times 0,000\,039... \approx 0,1897$$

- 9 a X is $\text{Bin}(15; 0,85)$ -verdeeld.

$$P(X = 12) = \binom{15}{12} \times 0,85^{12} \times 0,15^3 \approx 0,2184$$

b $P(X = 15) = \binom{15}{15} \times 0,85^{15} \times 0,15^0 \approx 0,0874$

- 10 a Hier wordt een kansexperiment vijf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten wel een 2 gegoooid en niet een 2 gegoooid. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.

- b De parameters zijn $n = 5$ en $p = \frac{1}{6}$.

c $P(X = 4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \frac{5}{6} \approx 0,0032$

d $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,1608$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,0322$$

11 a $P(X = 5) = \binom{13}{5} \times 0,65^5 \times 0,35^8 \approx 0,0336$

$$P(X = 13) = \binom{13}{13} \times 0,65^{13} \times 0,35^0 \approx 0,0037$$

- b Optie: binomiaal

Invoer: $n = 13$, $p = 0,65$ en $X = 5$

Dit geeft $P(X = 5) \approx 0,0336$.

Neem nu bij invoer $X = 13$.

Dit geeft $P(X = 13) \approx 0,0037$.

- 12 a De parameters zijn $n = 5$ en $p = \frac{1}{4}$.

- b Optie: binomiaal

Invoer: $n = 5$, $p = \frac{1}{4}$ en $X = 3$

Dit geeft $P(X = 3) \approx 0,0879$.

c

$X = k$	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0146	0,0010

- 13 a X is het aantal schuiven dat weigert.

X is hierbij $\text{Bin}\left(62; \frac{1}{100}\right)$ verdeeld, met $n = 62$ en $p = \frac{1}{100}$.

- b Optie: binomiaal

Invoer: $n = 62$, $p = \frac{1}{100}$ en $X = 0$

Dit geeft $P(X = 0) \approx 0,5363$.

- c Optie: binomiaal

Invoer: $n = 62$, $p = \frac{1}{10000}$ en $X = 0$

Dit geeft $P(X = 0) \approx 0,9938$.

13 Binomiale verdelingen

d Optie: binomiaal

Invoer: $n = 62$, $p = \frac{1}{10000}$ en $X = 2$

Dit geeft $P(X = 2) \approx 0,000019$.

e Als de schuiven niet onafhankelijk bestuurd zouden worden dan zijn de kansen dat een afzonderlijke schuif weigert niet allemaal gelijk aan elkaar. Er is dan geen sprake van een binomiale verdeling en je moet de kansen dus anders berekenen. Het is voor de berekening van de kansen wel van belang dat de schuiven onafhankelijk bestuurd worden.

- 09 a Hier wordt een kansexperiment 30 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten groene ogen of geen groene ogen. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
- b Als 12% van de leerlingen groene ogen heeft, dan heeft 88% van de leerlingen geen groene ogen. Dit is een kans van 0,88.
Als 6 leerlingen groene ogen hebben, dan hebben $30 - 6 = 24$ leerlingen geen groene ogen.
- c $P(Y = 6) = \binom{30}{6} \times 0,12^6 \times 0,88^{24} \approx 0,0825$
- d In dat geval is $n = 25$ en $p = 0,12$.
- e $P(\text{vijf studenten}) = \binom{25}{5} \times 0,12^5 \times 0,88^{20} \approx 0,1025$

U2 Optie: binomiaal

Invoer: $y_1 = \text{binomiaal}$, $p = 0,8$, $X = X$

Maak een tabel met de waarden a van 0 tot en met 10.

Voor $a = 7$, $a = 8$ en $a = 9$ is $P(X = a) \geq 0,2$.

X	Y1				
0	1E-7				
1	4.1E-6				
2	7.4E-5				
3	7.9E-4				
4	0.0055				
5	0.0264				
6	0.0881				
7	0.2013				
8	0.302				
9	0.2684				
10	0.1074				

X=0

- U3 a De uitkomst is p_1 , p_2 of p_3 . Dit zijn alle uitkomsten.
De som van de kansen op alle uitkomsten is 1, dus $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
- b In totaal zijn er n uitvoeringen.
Uitkomst 1 komt k keer voor, steeds met kans p_1 .
Uitkomst 2 komt l keer voor, steeds met kans p_2 .
Uitkomst 3 komt dan $n - k - l$ keer voor, steeds met kans p_3 .
Uitkomst 1 kan op $\binom{n}{k}$ manieren.
Er zijn dan $n - k$ plaatsen in het rijtje waar uitkomst 2 kan staan.
Uitkomst 2 kan dan op $\binom{n-k}{l}$ manieren.
De uitkomst 3 kan dan nog maar op 1 manier ingevuld worden (namelijk allemaal een 3).
Er zijn dus $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l}$ manieren om de uitkomsten 1, 2 en 3 te krijgen.
De kans op elke volgorde is $p_1^k \cdot p_2^l \cdot p_3^{n-k-l}$
Dan is $P(X_1 = k \text{ en } X_2 = l) = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} \cdot p_1^k \cdot p_2^l \cdot p_3^{n-k-l}$.

13.3 Cumulatieve binomiale verdeling

intro De kans dat geel ten minste twee keer boven komt is gelijk aan de kans dat geel twee keer boven komt plus de kans dat geel drie, vier, of tien keer boven komt. De kans dat geel ten minste twee keer boven komt, is daarom altijd groter dan de kans dat geel twee keer boven komt.

14 a Optie: binomiaal

Invoer: $n = 8$, $p = 0,9$ en $X = 8$

Dit geeft $P(X = 8) \approx 0,4305$.

Neem nu $X = 7$ in plaats van $X = 8$.

Dit geeft $P(X = 7) \approx 0,3826$.

- b** De kans dat ze één of meer keer mist is gelijk aan de kans dat ze nul tot en met zeven keer scoort. Ofwel $1 -$ de kans dat ze acht keer scoort.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 8$, $p = 0,9$ en $X = 8$

$P(X = 8) = 0,4304\dots$

De kans dat ze één of meer keer mist is $1 - 0,4304\dots \approx 0,5695$.

- c** In opdracht 14a was $P(X = 7) \approx 0,3826$ en $P(X = 8) \approx 0,4305$.

$P(X \leq 6) = 1 - P(X = 7) - P(X = 8)$

$= 1 - 0,3826 - 0,4305 \approx 0,1869$

15 a Optie: binomiaal

Invoer: $n = 6$, $p = 0,5$ en $X = 0, 1, 2$ of 3

$P(K \leq 3) = P(K = 0) + P(K = 1) + P(K = 2) + P(K = 3) \approx 0,6563$

- b** Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 6$, $p = 0,5$ en $X = 3$

$P(K \leq 3) \approx 0,6563$, klopt.

- 16 a** Hier wordt een kansexperiment acht keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten goed of fout. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk, namelijk $\frac{1}{3}$. Hierbij hoort een binomiale verdeling. X is het aantal vragen dat ze goed gokt, $n = 8$ en $p = \frac{1}{3}$.

- b** Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 8$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 3$

$P(X \leq 3) \approx 0,7414$

- c** De rode punten horen bij de gebeurtenis 'minimaal vier vragen goed' of 'meer dan drie vragen goed'.

- d** De kans bij de rode punten is $P(X \geq 4)$.

- e** De som van de kansen in opdracht b en d is gelijk aan 1.

De kans van opdracht d is dan gelijk aan 1 min de kans van opdracht b.

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,7413\dots \approx 0,2586$

- f** Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 8$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 4$

$P(X \leq 4) \approx 0,9121$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,9120\dots \approx 0,0879$

17 a Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 14$, $p = 0,35$ en $X = 6$

$P(X \leq 6) \approx 0,8164$

- b** $P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0,8164\dots \approx 0,1836$

13 Binomiale verdelingen

- c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 14$, $p = 0,35$ en $X = 8$

$$P(X \leq 8) = 0,9756\dots$$

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0,9756\dots \approx 0,0243$$

- 18 a De parameters zijn $n = 20$ en $p = \frac{1}{2}$.

- b Er worden dan minimaal 11 jongens geboren.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{2}$ en $X = 10$

$$P(Y \leq 10) = 0,5880\dots$$

$$P(Y \geq 11) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - 0,5880\dots \approx 0,4119$$

- c 

- d De kans op minder dan 15 maar meer dan 8 jongens is $P(Y \leq 14) - P(Y \leq 8)$.

- e Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{2}$ en $X = 14$ of $X = 8$

$$P(Y \leq 14) = 0,9793\dots \text{ en } P(Y \leq 8) = 0,2517\dots$$

$$P(Y \leq 14) - P(Y \leq 8) = 0,9793\dots - 0,2517\dots \approx 0,7276$$

- 19 a Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 11$

$$P(X < 12) = P(X \leq 11) \approx 0,0002$$

- b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 22$

$$P(X \geq 23) = 1 - P(X \leq 22) = 1 - 0,7186\dots \approx 0,2814$$

- c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 24$ of $X = 17$

$$P(17 < X < 25) = P(X \leq 24) - P(X \leq 17) = 0,9234\dots - 0,0844\dots \approx 0,8389$$

- d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 19$ of $X = 8$

$$P(9 \leq X \leq 19) = P(X \leq 19) - P(X \leq 8) = 0,2696\dots - 0,000001 \approx 0,2696$$

- e Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 21$

$$P(X > 21) = 1 - P(X \leq 21) = 1 - 0,5684\dots \approx 0,4315$$

- f Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 30$, $p = 0,7$ en $X = 24$ of $X = 6$

$$P(7 \leq X < 25) = P(X \leq 24) - P(X \leq 6) = 0,9234\dots - 0,00000002 \approx 0,9234$$

- 20 a De stochast X is het aantal succesvolle deelnemers.

X is $\text{Bin}(50; 0,30)$ -verdeeld.

Meer dan de helft betekent dat $X > 25$.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 50$, $p = 0,30$ en $X = 25$

$$P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - 0,9990\dots \approx 0,0009$$

- b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 50$, $p = 0,30$ en $X = 17$ of $X = 12$

$$P(12 < X < 18) = P(X \leq 17) - P(X \leq 12) = 0,7821\dots - 0,2228\dots \approx 0,5593$$

- 21 a Dit kun je opvatten als een trekking zonder terugleggen. De kans om een rotte tulpenbol te vinden blijft niet steeds hetzelfde.

- b Je neemt een kleine steekproef van 20 uit een groot aantal van 2000.

Hierbij is $n = 20$ en $p = 0,18$.

- c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = 0,18$ en $X = 2$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,2747... \approx 0,7252$$

- d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = 0,18$ en $X = 5$ of $X = 2$

$$P(2 < X < 6) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0,8644... - 0,2747... \approx 0,5896$$

- e Je kunt de tulpenbollen indelen in twee selecties. Y is het aantal rotte tulpenbollen in de eerste selectie van 12. Y is $\text{Bin}(12; 0,18)$ -verdeeld. Z is het aantal rotte tulpenbollen in de tweede selectie van 8.

Z is $\text{Bin}(8; 0,18)$ -verdeeld. De rotte tulpenbollen moeten allemaal in de tweede selectie zitten.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 12$, $p = 0,18$ en $X = 0$

$$P(Y = 0) = 0,0924...$$

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 8$, $p = 0,18$ en $X = 1$

$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,5633... = 0,4366...$$

De gevraagde kans is $0,0924... \times 0,4366... \approx 0,0404$.

- 017 a $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 5$

- b Optie: binomiaal cumulatief

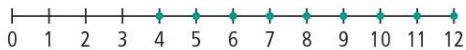
Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 5$

$$P(X \leq 5) \approx 0,6111$$

- c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 6$

$$P(X \leq 6) \approx 0,8041$$

- d 

- e $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$

- f Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 3$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,1852... \approx 0,8147$$

- g Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 8$ of $X = 5$

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0,9782... \approx 0,0218$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,6110... \approx 0,3889$$

- 019 a 

- b $P(2 \leq A \leq 7) = P(A \leq 7) - P(A \leq 1)$

- c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 10$, $p = 0,3$ en $X = 7$ of $X = 1$

$$P(2 \leq A \leq 7) = P(A \leq 7) - P(A \leq 1) = 0,9984... - 0,1493... \approx 0,8491$$

- d 

- e $P(3 \leq A < 7) = P(A \leq 6) - P(A \leq 2)$

- f Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 10$, $p = 0,3$ en $X = 6$ of $X = 2$

$$P(3 \leq A < 7) = P(A \leq 6) - P(A \leq 2) = 0,9894... - 0,3827... \approx 0,6066$$

13 Binomiale verdelingen

- U4 a** X is het aantal doosjes waar minder dan 25 schroeven in zitten.

X is $\text{Bin}(3; 0,10)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 3$, $p = 0,10$ en $X = 2$

$P(X = 2) = 0,027$

- b** X is het aantal doosjes waar te weinig schroeven in zitten.

X is $\text{Bin}(20; p)$ -verdeeld.

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$. Deze kans moet kleiner dan 0,01 zijn.

Zoek in een tabel waarvoor $P(X > 2) < 0,01$ is.

Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = 20$, $p = X$ en $X = 2$

Uit de tabel blijkt dat als $p = 0,022$, $P(X > 2) < 0,01$.

Maximaal 2,2% van de doosjes mag te weinig schroeven bevatten.

X	Y1				
0.02	0.0071				
0.021	0.0081				
0.022	0.0092				
0.023	0.0103				
0.024	0.0116				
0.025	0.013				
0.026	0.0144				
0.027	0.0159				
0.028	0.0175				
0.029	0.0192				
0.03	0.021				
Y1=0.00917203524784					

13.4 Verwachtingswaarde en standaardafwijking

intro Je verwacht na vijf keer verkeerd parkeren dat je in 20% van de gevallen een parkeerbon had. Je verwacht dus 20% van 5 = 1 parkeerbon en na 50 keer verkeerd parkeren verwacht je 20% van 50 = 10 parkeerbonnen.

Na 50 keer zal het aantal meer afwijken. Je kunt dan bijvoorbeeld slechts 4 parkeerbonnen krijgen. Dit wijkt 6 af van het werkelijke aantal, wat meer is dan het aantal parkeerbonnen dat je na vijf keer kunt krijgen.

- 22 a** Je trekt één kaart, dat is of een hartenkaart of niet een hartenkaart. Het aantal hartenkaarten X is dus 0 of 1.

Er zijn 13 hartenkaarten in een volledig kaartspel van 52 kaarten. De kans op een hartenkaart is $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ en de kans op geen hartenkaart is $\frac{39}{52} = \frac{3}{4}$.

$E(X) = 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = 0,25$.

- b** $E(T) = 0 \times 0,178 + 1 \times 0,356 + 2 \times 0,2966 + 3 \times 0,1318 + 4 \times 0,033 + 5 \times 0,0044 + 6 \times 0,0002 = 1,4998 \approx 1,5$

- c** Er zijn zes stochasten: X_1 tot en met X_6 die allemaal een trekking van één kaart weergeven.

$$\begin{aligned} E(T) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) + E(X_6) \\ &= 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 = 1,5 \end{aligned}$$

- 23 a** M is $\text{Bin}\left(3; \frac{1}{2}\right)$ -verdeeld.

Invoer: y_1 binomiaal met $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$ en $X = X$

u	0	1	2	3
$P(M = u)$	0,125	0,375	0,375	0,125

- b** $E(M) = 1,5$ en $\sigma(M) \approx 0,866$

- c** $E(M) = 3 \times \frac{1}{2} = 1,5$ en $\sigma(M) = \sqrt{3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,866$
Je krijgt dezelfde antwoorden.

- d** X is het aantal enen. X is $\text{Bin}\left(5; \frac{1}{6}\right)$ -verdeeld.

Met de rekenmachine krijg je $E(X) \approx 0,8333$ en $\sigma(X) \approx 0,8333$.

$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} \approx 0,8333$ en $\sigma(X) = \sqrt{5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{25}{36}} \approx 0,8333$
De regels van opdracht c kloppen ook hier.

- 24 a** X is $\text{Bin}(50; 0,58)$ -verdeeld.

$$n = 50 \text{ en } p = 0,58$$

$$E(X) = 50 \times 0,58 = 29 \text{ en } \sigma(X) = \sqrt{50 \times 0,58 \times (1 - 0,58)} = \sqrt{12,18} \approx 3,49$$

- b** Y is het dat het eerste jaar haalt in deze groep. Y is $\text{Bin}(70; 0,58)$ -verdeeld.

$$E(Y) = 70 \times 0,58 = 40,6 \text{ en } \sigma(Y) = \sqrt{70 \times 0,58 \times (1 - 0,58)} = \sqrt{17,052} \approx 4,13$$

- 25 a** X is $\text{Bin}(250; 0,06)$ -verdeeld.

$E(X) = 250 \times 0,06 = 15$, dit betekent dat 15 reizigers naar verwachting gebruik zullen maken van de fietsenstalling.

$$\text{De standaardafwijking is } \sigma(X) = \sqrt{250 \times 0,06 \times (1 - 0,06)} = \sqrt{14,1} \approx 3,75.$$

De standaardafwijking is ongeveer 3,75 reizigers.

- b** $15 - 3,75 = 11,25$ en $15 + 3,75 = 18,75$

Minder dan één keer afwijken, betekent dat het aantal reizigers tussen deze waarden moet liggen.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 250$, $p = 0,06$ en $X = 18$ of $X = 11$

$$P(11,25 < X < 18,75) = P(X \leq 18) - P(X \leq 11)$$

$$P(11,25 < X < 18,75) = 0,8260... - 0,1765... \approx 0,6495$$

De kans dat X minder dan één keer de standaardafwijking afwijkt is 0,6495.

- 26 a** X is het aantal defecte radio's. X is $\text{Bin}(500; 0,04)$ -verdeeld.

$$E(X) = 500 \times 0,04 = 20 \text{ defecte radio's.}$$

- b** $\sigma(X) = \sqrt{500 \times 0,04 \times (1 - 0,04)} = \sqrt{19,2} \approx 4,38$ defecte radio's.

- c** $20 + 4,38 = 24,38$

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 500$, $p = 0,04$ en $X = 24$

$$P(X > 24,38) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - 0,8477... \approx 0,1522$$

- 27 a** Je neemt een kleine steekproef van vijftig wiskundedocenten uit een groot aantal.

- b** T is het aantal tegenstanders. T is $\text{Bin}(50; 0,15)$ -verdeeld.

$$E(T) = 50 \times 0,15 = 7,5 \text{ verwachte tegenstanders.}$$

De standaardafwijking is $\sigma(T) = \sqrt{50 \times 0,15 \times (1 - 0,15)} = \sqrt{6,375} \approx 2,52$ tegenstanders.

- c** Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 50$, $p = 0,15$ en $X = 7$

$$P(T \geq 8) = 1 - P(T \leq 7) = 1 - 0,5187... \approx 0,4812$$

- d** Ja. Als slechts 15% van de wiskundedocenten ertegen is, dan verwacht je 7,5 tegenstanders in een groep van vijftig. Acht tegenstanders is ongeveer wat je zou verwachten, dan is het waarschijnlijk dat de minister gelijk heeft.

- e** X is $\text{Bin}(50; 0,15)$ -verdeeld.

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a - 1)$$

Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met

$$n = 50, p = 0,15 \text{ en } X = X - 1.$$

Maak een tabel met waarden van a .

Bij $a \geq 12$ is $P(X \geq a)$ kleiner dan 10%.

De vakbond zal een grootschalig onderzoek starten bij minimaal 12 tegenstanders.

X	Y1				
7	0.6387				
8	0.4812				
9	0.3319				
10	0.2089				
11	0.1199				
12	0.0623				
13	0.0301				
14	0.0132				
15	0.0053				
16	0.0019				
17	6.6E-4				

$Y_1 = 0.06281206784611$

13 Binomiale verdelingen

- 024 a** Er zijn twee uitkomsten oranje of groen. De kans op succes (oranje) bij de n herhalingen blijft gelijk. X is $\text{Bin}(n; \frac{3}{10})$ -verdeeld.
- b** Drie van de tien knikkers zijn oranje, dus $p = \frac{3}{10}$.
- c** De parameters zijn $n = 10$ en $p = \frac{3}{10}$.
- d** $E(X) = n \cdot p$
- e** $E(X) = 10 \times \frac{3}{10} = 3$ oranje knikkers.
- f** $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
- g** $\sigma(X) = \sqrt{10 \times \frac{3}{10} \times (1 - \frac{3}{10})} = \sqrt{2,1} \approx 1,45$ oranje knikkers.
- h** G is $\text{Bin}(6; \frac{7}{10})$ -verdeeld.
- $E(G) = 6 \times \frac{7}{10} = 4,2$ groene knikkers.
- $\sigma(G) = \sqrt{6 \times \frac{7}{10} \times (1 - \frac{7}{10})} = \sqrt{1,26} \approx 1,12$ groene knikkers.

- U5** X is het aantal te lichte pakken suiker. X is $\text{Bin}(50; 0,005)$ -verdeeld.
Een doos wordt afgekeurd als $X \geq 1$ is.
Optie: binomiaal
Invoer: $n = 50$, $p = 0,005$ en $X = 0$
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,7783... \approx 0,2217$
 Y is het aantal afgekeurde dozen. Y is $\text{Bin}(20; 0,2217)$ -verdeeld.
 $E(Y) = 20 \times 0,2217 \approx 4,43$ dozen
Er zullen naar verwachting ongeveer 4 dozen worden afgekeurd.

13.5 Gemengde opdrachten

- 28 a** X is het aantal weken dat Janneke een prijs wint. X is $\text{Bin}(5; \frac{3}{100})$ -verdeeld.
Optie: binomiaal
Invoer: $n = 5$, $p = \frac{3}{100}$ en $X = 2$
 $P(X = 2) \approx 0,0082$
- b** Janneke moet $5 \times 2 = 10$ euro betalen voor de loten. Zij maakt winst als zij minimaal één keer een prijs wint.
Optie: binomiaal
Invoer: $n = 5$, $p = \frac{3}{100}$ en $X = 0$
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,8587 \approx 0,1413$
- 29 a** X is het aantal linkshandige spelers. X is $\text{Bin}(20; 0,10)$ -verdeeld.
Er zijn te weinig rechterhandschoenen als $X > 2$.
Optie: binomiaal cumulatief
Invoer: $n = 20$, $p = 0,10$ en $X = 1$
 $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,6769... \approx 0,3231$
- b** Als minstens één leerling met een verkeerde handschoen moet softballen dan weet je dat het aantal linkshandige spelers ongelijk is aan 2.
Optie: binomiaal
Invoer: $n = 20$, $p = 0,10$ en $X = 2$
 $P(X \neq 2) = 1 - P(X = 2) = 1 - 0,2851... \approx 0,7148$
- c** Y is het aantal lessen waar er een tekort is aan een bepaalde soort handschoenen. Y is $\text{Bin}(8; 0,7148)$ -verdeeld.
 $E(Y) = 8 \times 0,7148 \approx 5,72$ lessen.
Hij kan in zes lessen een tekort verwachten.

- 30 a** X is het aantal personen dat kan fietsen. X is $\text{Bin}(20; 0,75)$ -verdeeld.
 $E(X) = 20 \times 0,75 = 15$ personen.
 $\sigma(X) = \sqrt{20 \times 0,75 \times (1 - 0,75)} = \sqrt{3,75} \approx 1,94$ personen.
- b** Y is het aantal personen dat kan fietsen. Y is $\text{Bin}(20; 0,40)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 20$, $p = 0,40$ en $X = 14$ of $X = 7$
 $P(8 \leq Y \leq 14) = P(Y \leq 14) - P(Y \leq 7) = 0,9983... - 0,4158... \approx 0,5825$
- c** Stel dat Ard gelijk heeft en X is het aantal personen dat kan fietsen, dan is X is $\text{Bin}(20; 0,75)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 20$, $p = 0,75$ en $X = 11$
 $P(X < 12) = P(X \leq 11) \approx 0,0409$
- d** Als Ard ten onrechte gelijk krijgt, dan heeft Gert gelijk, dus $p = 0,40$ en 12 of meer mensen in de steekproef konden fietsen.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 20$, $p = 0,40$ en $X = 11$
 $P(Y \geq 12) = 1 - P(Y \leq 11) \approx 1 - 0,9435 \approx 0,0565$

Onderzoeksoopdrachten

- 31** X is het aantal waardebonnen. X is $\text{Bin}(n; 0,5)$ -verdeeld.
 Je wilt weten voor welke n de kans $P(X \geq 5)$ groter is dan 0,95.
 $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$
 Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = X$, $p = 0,5$ en $X = 4$
 Maak een tabel met mogelijke waarden voor n .

X	Y1			
10	0.623			
11	0.7256			
12	0.8062			
13	0.8666			
14	0.9102			
15	0.9408			
16	0.9616			
17	0.9755			
18	0.9846			
19	0.9904			
20	0.9941			
Y1=0.96159362792957				

Je hebt dus minstens 16 enveloppen nodig en je moet minstens $16 \times 20 = 320$ euro besteden.

- 32 a** X is het aantal mensen dat komt. X is $\text{Bin}(n; 0,60)$ -verdeeld.
 De kans dat er meer mensen komen dan er plaatsen zijn, is $P(X > 900)$.
 De kans moet kleiner zijn dan 0,01.
 $P(X > 900) = 1 - P(X \leq 900)$
 Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = X$, $p = 0,60$ en $X = 900$
 Maak een tabel met mogelijke waarden voor n .

X	Y1			
1425	0.0067			
1426	0.0074			
1427	0.0081			
1428	0.0089			
1429	0.0097			
1430	0.0107			
1431	0.0116			
1432	0.0127			
1433	0.0138			
1434	0.0151			
1435	0.0164			
Y1=0.00974615768173				

Het bestuur kan maximaal 1429 mensen uitnodigen.

- b** Er zullen naar verwachting $1429 \times 0,60 \approx 857$ personen komen.
 Er blijven dan $900 - 857 = 43$ stoelen naar verwachting leeg.

13 Binomiale verdelingen

Samenvatting

- S1 a** Hier wordt een kansexperiment twaalf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten; groter dan vier of maximaal vier. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
 X is het aantal uitkomsten groter dan vier, $n = 12$ en $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- b** Je trekt in één keer vier kaarten. Dit mag je opvatten als een trekking zonder terugleggen. De kans op succes (een schoppen) is niet voor elke trekking van één kaart gelijk. Het aantal schoppen is niet binomiaal verdeeld.
- c** Hier wordt een kansexperiment 20 keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten wit of zwart. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. Hierbij hoort een binomiale verdeling.
 X is het aantal witte knikkers, $n = 20$ en $p = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.
- d** Je neemt een kleine steekproef van 20 knikkers uit een groot aantal van 5000 knikkers. Dit mag je benaderen met een binomiale verdeling.
 X is het aantal witte knikkers, $n = 20$ en $p = \frac{3000}{5000} = \frac{3}{5}$.
- S2 a** Stochast X is het aantal keer raak. X is $\text{Bin}(20; 0,85)$ -verdeeld.

$$P(X = 16) = \binom{20}{16} \times 0,85^{16} \times 0,15^4 \approx 0,1821$$
- b** Stochast Y is het aantal keer raak. Y is $\text{Bin}(10; 0,85)$ -verdeeld.

$$P(Y = 7) = \binom{10}{7} \times 0,85^7 \times 0,15^3 \approx 0,1298$$
- S3 a** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 4$
 $P(A \leq 4) \approx 0,3825$
- b** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 5$
 $P(A \geq 6) = 1 - P(A \leq 5) = 1 - 0,6110... \approx 0,3889$
- c** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 8$ of $X = 3$
 $P(3 < A \leq 8) = P(A \leq 8) - P(A \leq 3) = 0,9782... - 0,1852... \approx 0,7930$
- d** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 12$, $p = 0,42$ en $X = 10$
 $P(A > 10) = 1 - P(A \leq 10) = 1 - 0,9994... \approx 0,0005$
- S4 a** Stochast X is het aantal geslaagde deelnemers. X is $\text{Bin}(30; 0,85)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 30$, $p = 0,85$ en $X = 25$
 $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - 0,4755... \approx 0,5245$
- b** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 30$, $p = 0,85$ en $X = 24$ of $X = 20$
 $P(20 < X < 25) = P(X \leq 24) - P(X \leq 20) = 0,2894... - 0,0096... \approx 0,2798$
- S5 a** X is het aantal rode smarties. X is $\text{Bin}(36; 0,15)$ -verdeeld.
 de verwachtingswaarde is $E(X) = 36 \times 0,15 = 5,4$ rode smarties en de standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{36 \times 0,15 \times (1 - 0,15)} = \sqrt{4,59} \approx 2,14$ smarties
- b** Y is het aantal rode smarties. Y is $\text{Bin}(400; 0,15)$ -verdeeld.
 Naar verwachting zijn er $E(Y) = 400 \times 0,15 = 60$ smarties rood.
 $\sigma(X) = \sqrt{400 \times 0,15 \times (1 - 0,15)} = \sqrt{51} \approx 7,14$ smarties

Test jezelf

T1 a X is $\text{Bin}(15; 0,08)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 15$, $p = 0,08$ en $X = 3$

$P(X = 3) \approx 0,0857$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 15$, $p = 0,08$ en $X = 2$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,8870... \approx 0,1130$

c $E(X) = 15 \times 0,08 = 1,2$ en $\sigma(X) = \sqrt{15 \times 0,08 \times (1 - 0,08)} = \sqrt{1,104} \approx 1,05$

d De kans moet kleiner zijn dan 0,01.

$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a - 1)$

Invoer: $y_1 = 1 -$ binomiaal cumulatief met $n = 15$, $p = 0,08$ en $X = X - 1$

X	Y1			
0	1			
1	0.7137			
2	0.3403			
3	0.113			
4	0.0273			
5	0.005			
6	7E-4			
7	7.6E-5			
8	6.5E-6			
9	4.3E-7			
10	2.2E-8			
Y1=0.00496968449173				

Als $5 \leq a \leq 15$ is $P(X \geq a) \leq 0,01$.

T2 a Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 8$

$P(Y \leq 8) \approx 0,5376$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 4$

$P(Y < 5) = P(Y \leq 4) \approx 0,0462$

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 14$

$P(Y \geq 15) = 1 - P(Y \leq 14) = 1 - 0,9943... \approx 0,0056$

d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 14$ of $X = 5$

$P(5 < Y \leq 14) = P(Y \leq 14) - P(Y \leq 5) = 0,9943... - 0,1119... \approx 0,8824$

e Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 10$

$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - 0,8820... \approx 0,1180$

f Optie: binomiaal

Invoer: $n = 25$, $p = \frac{1}{3}$ en $X = 7$ of $X = 8$

$P(7 \leq Y < 9) = P(Y = 7) + P(Y = 8) = 0,1487... + 0,1673... \approx 0,3160$

T3 a Hier wordt een kansexperiment vijf keer herhaald met twee mogelijke uitkomsten; munt en kop. De kans op succes bij de herhalingen is steeds gelijk. K is het aantal keer kop, $n = 5$ en $p = 0,55$.

b Invoer: y_1 binomiaal met $n = 5$, $p = 0,55$, $X = X$

Maak een tabel van de waarden van a van 0 tot en met 5.

u	0	1	2	3	4	5
$P(K = u)$	0,0185	0,1128	0,2757	0,3369	0,2059	0,0503

c $P(K \leq 2) = 0,01845... + 0,11276... + 0,27565... \approx 0,4069$

13 Binomiale verdelingen

- d** Meer dan drie keer munt, dat is 4 of 5 keer munt oftewel 1 of 0 keer kop.
Zie de tabel bij opdracht b. De kans hierop is
 $0,01845... + 0,11276... \approx 0,1311$

T4 a Het aantal punten dat Tom haalt is gelijk aan het aantal keer dat er een even aantal ogen is gegooit. De kans op een even aantal ogen is $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

T is het aantal keer dat Tom een punt haalt. T is $\text{Bin}\left(12; \frac{1}{2}\right)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 12$, $p = \frac{1}{2}$, $X = 8$

$P(T = 8) \approx 0,1208$

- b** Tom krijgt $\frac{8}{12} \times 30 = 20$ euro en Harry krijgt dan $\frac{4}{12} \times 30 = 10$ euro.

- c** Zij moeten nog $25 - 12 = 13$ keer gooien.

De winnaar moet minimaal 13 punten halen en Tom moet hiervoor nog minimaal 5 punten halen in de laatste 13 worpen.

X is het aantal keer dat Tom een punt haalt. X is $\text{Bin}\left(13; \frac{1}{2}\right)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = \frac{1}{2}$, $X = 4$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,1334... \approx 0,8666$

De kans dat Harry wint is $1 - 0,8666 = 0,1334$.

Tom krijgt $0,8666 \times 30 \approx 26$ euro en Harry krijgt $0,1334 \times 30 \approx 4$ euro.

T5 a Een leerling die een zes haalt heeft acht keer een halve punt aftrek gekregen.

De leerling heeft dan 12 vragen goed beantwoord.

X is $\text{Bin}\left(20; \frac{1}{4}\right)$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$, $X = 12$

$P(X = 12) \approx 0,0008$

- b** De leerling heeft dan minimaal 12 vragen goed beantwoord.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$, $X = 11$

$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - 0,9990... \approx 0,0009$

- c** Y is het aantal leerlingen dat een zes of meer scoort.

Y is $\text{Bin}(124; 0,0009)$ -verdeeld.

$E(Y) = 124 \times 0,0009 \approx 0,11$

De verwachting is dat niemand een zes of meer scoort.

- d** $E(X) = 20 \times \frac{1}{4} = 5$ vragen

- e** $\sigma(X) = \sqrt{20 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{3,75} \approx 1,94$ leerlingen

Het aantal goed beantwoorde vragen moet tussen $5 - 1,94 = 3,06$ en $5 + 1,94 = 6,94$ liggen.

Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$, $X = 6$ of $X = 3$

$P(3,06 \leq X \leq 6,94) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$

$= 0,7857... - 0,2251... \approx 0,5606$

- f** Je gokt dan het antwoord op $20 - 4 = 16$ vragen.

Z is het aantal goed beantwoorde vragen. Z is $\text{Bin}\left(16; \frac{1}{4}\right)$ -verdeeld.

$E(Z) = 16 \times \frac{1}{4} = 4$

Je verwacht dan $16 - 4 = 12$ vragen fout te hebben. Dit aantal fouten kost $12 \times \frac{1}{2} = 6$ punten.

Je verwacht dan het cijfer $10 - 6 = 4$ te halen.

- g** J is het aantal goed beantwoorde vragen. J is $\text{Bin}\left(20; \frac{1}{2}\right)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 20$, $p = \frac{1}{2}$, $X = 11$
 $P(J \geq 12) = 1 - P(J \leq 11) = 1 - 0,7482... \approx 0,2517$
- T6 a** B is het aantal bollen dat zal bloeien. B is $\text{Bin}(50; 0,90)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 50$, $p = 0,90$, $X = 45$
 $P(B = 45) \approx 0,1849$
- b** Bij de doos van 50 bollen gaat het om minstens $0,90 \times 50 = 45$ bollen.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 50$, $p = 0,90$, $X = 44$
 $P(B \geq 45) = 1 - P(B \leq 44) \approx 1 - 0,3839 \approx 0,6161$
 X is het aantal bollen dat zal bloeien. X is $\text{Bin}(100; 0,90)$ -verdeeld.
 Bij de doos van 100 bollen gaat het om minstens $0,90 \times 100 = 90$ bollen.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 100$, $p = 0,90$, $X = 89$
 $P(X \geq 90) = 1 - P(X \leq 89) \approx 1 - 0,4168 \approx 0,5832$
 Bij de doos van 50 bollen is de kans het grootst.
- c** D is het aantal dozen waarin minstens 45 bollen tot bloei komen.
 D is $\text{Bin}(5; 0,6161)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 5$, $p = 0,6161$, $X = 4$
 $P(D = 4) \approx 0,2766$
- T7 a** X is het aantal gewichtsheffers dat stimulerende middelen heeft gebruikt.
 X is $\text{Bin}(10; 0,12)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 10$, $p = 0,12$, $X = 0$
 $P(X = 0) \approx 0,2785$
- b** De kans dat niemand in een wedstrijd wordt betrapt is 0,2785.
 W is het aantal wedstrijden waarin niemand betrapt wordt.
 W is $\text{Bin}(5; 0,2785)$ -verdeeld.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 5$, $p = 0,2785$, $X = 5$
 $P(W = 5) \approx 0,0017$

Extra oefening

- E1 a** De parameters zijn $n = 10$ en $p = 0,25$.
- b** $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,25^3 \times 0,75^7 \approx 0,2503$
- c** Y is het aantal keer dat de speler een vrije worp scoort.
 Y is $\text{Bin}(10; 0,75)$ -verdeeld.
 $P(Y = 8) = \binom{10}{8} \times 0,75^8 \times 0,25^2 \approx 0,2816$

13 Binomiale verdelingen

E2 a X is het aantal klanten dat met iDEAL betaalt.

X is $\text{Bin}(8; 0,58)$ -verdeeld.

$$P(X = 5) = \binom{8}{5} \times 0,58^5 \times 0,42^3 \approx 0,2723$$

b $P(X = 4) = \binom{8}{4} \times 0,58^4 \times 0,42^4 \approx 0,2465$

E3 a Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 4$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,0320... \approx 0,9679$$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 5$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0,0977$$

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 7$ of $X = 4$

$$P(4 < X < 8) = P(X \leq 7) - P(X \leq 4) = 0,4256... - 0,0320... \approx 0,3935$$

d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 6$ of $X = 1$

$$P(2 \leq X < 7) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) = 0,2288... - 0,0001... \approx 0,2287$$

e Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 9$

$$P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx 0,8314$$

f Optie: binomiaal

Invoer: $n = 13$, $p = 0,6$, $X = 0$

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,000006... \approx 0,999993$$

E4 a X is het aantal zessen. X is $\text{Bin}(15; \frac{1}{6})$ -verdeeld.

Optie: binomiaal

Invoer: $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$, $X = 0$

$$P(X = 0) \approx 0,0649$$

b Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$, $X = 3$

$$P(X \leq 3) \approx 0,7685$$

c Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$, $X = 3$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,7684... \approx 0,2315$$

d Optie: binomiaal cumulatief

Invoer: $n = 15$, $p = \frac{1}{6}$, $X = 6$ of $X = 2$

$$P(2 < X < 7) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) = 0,9933... - 0,5322... \approx 0,4612$$

E5 a De parameters zijn $n = 20$ en $p = 0,15$.

b $E(X) = 20 \times 0,15 = 3$ en $\sigma(X) = \sqrt{20 \times 0,15 \times (1 - 0,15)} = \sqrt{2,55} \approx 1,60$

E6 a R is het aantal gekochte rode paraplu's. R is $\text{Bin}(100; 0,45)$ -verdeeld.

$$E(R) = 100 \times 0,45 = 45 \text{ paraplu's.}$$

b Optie: binomiaal

Invoer: $n = 100$, $p = 0,45$, $X = 45$

$$P(R = 45) \approx 0,0800$$

- c** Als er meer zwarte dan rode paraplu's worden verkocht, dan worden er maximaal 49 rode paraplu's verkocht.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 100$, $p = 0,45$, $X = 49$
 $P(R \leq 49) \approx 0,8173$
- d** Er worden dan minimaal 51 rode paraplu's verkocht.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 100$, $p = 0,45$, $X = 50$
 $P(R \geq 51) = 1 - P(R \leq 50) = 1 - 0,8654... \approx 0,1346$
- E7 a** Je kunt een greep van vijf knikkers opvatten als vijf keer een knikker trekken zonder terugleggen. De kans op een rode knikker verandert na elke trekking dus stochast Y is niet binomiaal verdeeld.
- b** $P(Y = 5) = \frac{15}{25} \times \frac{14}{24} \times \frac{13}{23} \times \frac{12}{22} \times \frac{11}{21} = \frac{360360}{6375600} = \frac{13}{230} \approx 0,0565$
- c** Je neemt een kleine steekproef van vijf knikkers uit een groot aantal van 1250 knikkers.
- d** De kans op een rode knikker is $\frac{750}{1250} = 0,6$.
 X is het aantal getrokken rode knikkers. X is $\text{Bin}(5; 0,6)$ -verdeeld.
 $E(X) = 5 \times 0,6 = 3$ rode knikkers.
 $\sigma(X) = \sqrt{5 \times 0,6 \times (1 - 0,6)} = \sqrt{1,2} \approx 1,10$ rode knikkers.
- e** Z is het aantal witte knikkers. Z is $\text{Bin}(5; 0,4)$ -verdeeld.
 Meer dan twee, maar hoogstens vier betekent drie of vier witte knikkers.
 Optie: binomiaal
 Invoer: $n = 5$, $p = 0,4$, $X = 3$ of $X = 4$
 $P(2 < Z \leq 4) = P(Z = 3) + P(Z = 4) = 0,2304 + 0,0768 = 0,3072$
- E8 a** X is het aantal vrouwen dat rookt. X is $\text{Bin}(40; 0,19)$ -verdeeld.
- b** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 40$, $p = 0,19$, $X = 7$
 $P(X < 8) = P(X \leq 7) \approx 0,5009$
- c** Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 40$, $p = 0,19$, $X = 5$
 $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,2020... \approx 0,7980$
- d** 15% van 40 vrouwen is gelijk aan $0,15 \cdot 40 = 6$ vrouwen.
 25% van 40 vrouwen is gelijk aan $0,25 \cdot 40 = 10$ vrouwen.
 Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 40$, $p = 0,19$, $X = 9$ en $X = 6$
 $P(6 < X < 10) = P(X \leq 9) - P(X \leq 6) = 0,7833... - 0,3417... \approx 0,4416$

14 Rijen

Voorkennis

- V1**
- a** Als x met 1 toeneemt, neemt y steeds met 4 toe.
 - b** Vanwege de regelmaat in de tabel is de waarde van y bij $x = 10$ eenvoudig te berekenen met behulp van de waarde van y bij $x = 8$.
 - c** Bij $x = 10$ is $y = 43 + 2 \times 4 = 51$.
 - d** Bij $x = 82,7$ is de toename lastig te berekenen.
 - e** Bij $x = 0$ is $y = 19 - 2 \cdot 4 = 11$. Het startgetal is 11.
Het hellingsgetal is 4.
De formule bij de tabel is $y = 4x + 11$.
 - f** Bij $x = 20$ is $y = 4 \times 20 + 11 = 91$.
Bij $x = 82,7$ is $y = 4 \times 82,7 + 11 = 341,8$.

- V2**
- tabel A:
Als in de tabel t met 1 toeneemt, neemt p met 2 toe.
De richtingscoëfficiënt is 2.
Bij $t = 0$ is $p = 9 - 7 \times 2 = -5$.
De formule bij de tabel is $p = 2t - 5$.
Bij $t = 20$ is $p = 2 \times 20 - 5 = 35$.
- tabel B:
Als in de tabel t met 2 toeneemt, neemt p met 5 af.
Dus als t met 1 toeneemt, neemt p met $2\frac{1}{2}$ af.
De richtingscoëfficiënt is $-2\frac{1}{2}$.
Bij $t = 0$ is $p = 120 - 2 \times 2\frac{1}{2} = 125$.
De formule bij de tabel is $p = -2\frac{1}{2}t + 125$.
Bij $t = 20$ is $p = -2\frac{1}{2} \times 20 + 125 = 75$.
- tabel C:
Als in de tabel t met 1 toeneemt, neemt p met 0,3 toe.
De richtingscoëfficiënt is 0,3.
Bij $t = 0$ is $p = 4,8 - 3 \times 0,3 = 3,9$.
De formule bij de tabel is $p = 0,3t + 3,9$.
Bij $t = 20$ is $p = 0,3 \times 20 + 3,9 = 9,9$.

- V3**
- a** $80 : 64 = 1,25$
 $100 : 80 = 1,25$
 $125 : 100 = 1,25$
 $156,25 : 125 = 1,25$
Als in de tabel x met 1 toeneemt, wordt y steeds met 1,25 vermenigvuldigd.
 - b** Je hoeft maar één keer met 1,25 te vermenigvuldigen.
 - c** Bij $x = 8$ is $y = 156,25 \times 1,25 = 195,3125$.
 - d** Het is veel minder werk.
 - e** Bij $x = 0$ is $y = 64 : 1,25^3 = 32,768$.
De formule bij de tabel is $y = 32,768 \cdot 1,25^x$.

- V4**
- tabel A:
De groeifactor is $11 : 10 = 1,1$
Bij $t = 0$ is $p = 10$.
De formule bij de tabel is $p = 10 \cdot 1,1^t$.
Bij $t = 15$ is $p = 10 \cdot 1,1^{15} \approx 41,77$.

tabel B:

De groeifactor is $96 : 48 = 2$.

Bij $t = 7$ is $p = 48$ dus $b = \frac{48}{2^7} = 0,375$.

De formule bij de tabel is $p = 0,375 \cdot 2^t$.

Bij $t = 15$ is $p = 0,375 \cdot 2^{15} = 12\,288$.

tabel C:

De groeifactor is $256 : 1024 = 0,25$.

Bij $t = 6$ is $p = 1024$ dus $b = \frac{1024}{0,25^6} = 4\,194\,304$.

De formule bij de tabel is $p = 4\,194\,304 \cdot 0,25^t$.

Bij $t = 15$ is $p = 4\,194\,304 \cdot 0,25^{15} = 0,00390625$.

V5 a Tabel A:

$81 : 90 = 0,9$; $72,9 : 81 = 0,9$; $65,61 : 72,9 = 0,9$ en $59,05 : 65,61 \approx 0,9$.

Er is sprake van een exponentieel verband.

Tabel B: $1 - 3 = -2$ en $0 - 1 = -1$; $1 : 3 = \frac{1}{3}$ en $0 : 1 = 0$.

Geen lineair of exponentieel verband.

Tabel C: $1 - (-1,5) = 2,5$; $3,5 - 1 = 2,5$; $6 - 3,5 = 2,5$ en $8,5 - 6 = 2,5$.

Er is sprake van een lineair verband.

b A: Bij $x = 12$ is $y = 59,05 \cdot 0,9^6 \approx 31,38$.

B: Bij $x = 12$ is $y = 10 + 5 + 6 = 21$.

C: Bij $x = 12$ is $y = 8,5 + 3 \cdot 2,5 = 16$.

14.1 Recursieve formules

intro Rij A De toename is steeds 3. Het volgende getal is $16 + 3 = 19$.

Rij B Het volgende getal is steeds de helft van het voorgaande getal.

Het volgende getal is $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$.

Rij C Er is afwisselend een verdubbeling en een aftrek van 3.

Het volgende getal is $27 \times 2 = 54$.

Rij D Het zijn kwadraten. Het volgende getal is $6^2 = 36$.

Rij E Het volgende getal is het voorgaande keer 2 plus 1.

Het volgende getal is $63 \times 2 + 1 = 127$.

1 a Het verschil tussen de getallen is 1, 2, 3 en 4.

Het verschil tussen twee opeenvolgende neemt steeds met 1 toe.

b Het 6e getal is $13 + 5 = 18$.

Het 7e getal is $18 + 6 = 24$.

Het 8e getal is $24 + 7 = 31$.

c $4 \times 3 - 7 = 5$

$5 \times 3 - 7 = 8$

$8 \times 3 - 7 = 17$, klopt allemaal.

d Het 5e getal is $17 \times 3 - 7 = 44$

Het 6e getal is $44 \times 3 - 7 = 125$

Het 7e getal is $125 \times 3 - 7 = 368$

e $\text{nieuwe waarde} = 3 \times \text{oude waarde} - 7$

14 Rijen

2 a De vijfde term is $2 \times 23 + 1 = 47$ en de zesde term is $2 \times 47 + 1 = 95$.

b $\text{nieuwe waarde} = \frac{1}{2} \times \text{oude waarde}$ of $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} : 2$

De vijfde term is $\frac{1}{2} \times 100 = 50$ en de zesde term is $\frac{1}{2} \times 50 = 25$.

c $\text{nieuwe waarde} = 3 \times \text{oude waarde} - 2$

De vijfde term is $3 \times 55 - 2 = 163$ en de zesde term is $3 \times 163 - 2 = 487$.

3 a De 1e term is 46

De 2e term is $1,5(46 - 10) = 54$

De 3e term is $1,5(54 - 10) = 66$

De 4e term is $1,5(66 - 10) = 84$, klopt allemaal.

b De 5e term is $1,5(84 - 10) = 111$

De 6e term is $1,5(111 - 10) = 151,5$.

c De 1e term is 74

De 2e term is $1,5(74 - 10) = 96$

De 3e term is $1,5(96 - 10) = 129$

De 4e term is $1,5(129 - 10) = 178,5$, klopt allemaal.

d De 1e term is 34

De 2e term is $1,5(34 - 10) = 36$

De 3e term is $1,5(36 - 10) = 39$

De 4e term is $1,5(39 - 10) = 43,5$

4 a

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	3	7	11	15	19	23	27

b $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} + 4$ met $u(0) = 3$

c $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} \times 4$ met $w_1 = 5$

5 a $u(1) = 4$

$u(2) = 2 \times 4 + 1 = 9$

$u(3) = 2 \times 9 + 1 = 19$

$u(4) = 2 \times 19 + 1 = 39$

$u(5) = 2 \times 39 + 1 = 79$

b Als $u(n)$ de oude waarde is, dan is $u(n + 1)$ de volgende ofwel nieuwe waarde.

6 $u(n + 1) = 1,4 \cdot u(n) - 5$

7 a $\text{nieuwe waarde} = 10 \cdot \text{oude waarde} + 4$

$u(1) = 2$

$u(2) = 10 \cdot u(1) + 4 = 10 \times 2 + 4 = 24$

$u(3) = 10 \cdot u(2) + 4 = 10 \times 24 + 4 = 244$

$u(4) = 10 \cdot u(3) + 4 = 10 \times 244 + 4 = 2444$

b $\text{nieuwe waarde} = \frac{1}{2} \cdot \text{oude waarde}$

$u(0) = 34$

$u(1) = \frac{1}{2} \cdot u(0) = \frac{1}{2} \times 34 = 17$

$u(2) = \frac{1}{2} \cdot u(1) = \frac{1}{2} \times 17 = 8\frac{1}{2}$

$u(3) = \frac{1}{2} \cdot u(2) = \frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$

c $\text{nieuwe waarde} = 2 \cdot \text{oude waarde} + 3$

$$u_0 = -\frac{1}{2}$$

$$u_1 = 2 \cdot u_0 + 3 = 2 \times -\frac{1}{2} + 3 = 2$$

$$u_2 = 2 \cdot u_1 + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$u_3 = 2 \cdot u_2 + 3 = 2 \times 7 + 3 = 17$$

8 a De oppervlakte van A1 is $0,5 \times 1 = 0,5 \text{ m}^2$.

De oppervlakte van A2 is $0,5 \times 0,5 = 0,25 \text{ m}^2$.

De oppervlakte van A3 is $0,5 \times 0,25 = 0,125 \text{ m}^2$.

b $A(n+1) = 0,5 \times A(n)$ met $A(0) = 1$

c De oppervlakte van een A6 vel is $0,5^6 = 0,015625 \text{ m}^2$ (of $\frac{1}{64} \text{ m}^2$).

04 a

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	-1	2	5	8	11	14

b Elke volgende term is 3 groter dan de voorgaande term.

c Zie a.

$$u(4) = 8 + 3 = 11 \text{ en } u(5) = 11 + 3 = 14$$

d $\text{nieuwe waarde} = \text{oude waarde} + 3$ met beginterm $u(0) = -1$

e $w(6) = \frac{1}{2} \times 15 = 7,5$ en $w(7) = \frac{1}{2} \times 7,5 = 3,75$

n	1	2	3	4	5	6	7
w_n	240	120	60	30	15	7,5	3,75

f Elke volgende term is steeds de helft van de voorgaande term.

g $\text{nieuwe waarde} = \frac{1}{2} \times \text{oude waarde}$ met beginterm $w_1 = 240$.

07 a Als $u(1)$ de oude waarde is, dan is $u(2)$ de nieuwe waarde.

b $u(2) = 3 \cdot u(1) - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$

c $u(3) = 3 \times 10 - 2 = 28$

$$u(4) = 3 \times 28 - 2 = 82$$

$$u(5) = 3 \times 82 - 2 = 244$$

d $u_1 = 0$

$$u_2 = 7 \cdot u_1 + 1 = 7 \times 0 + 1 = 1$$

$$u_3 = 7 \cdot u_2 + 1 = 7 \times 1 + 1 = 8$$

$$u_4 = 7 \cdot u_3 + 1 = 7 \times 8 + 1 = 57$$

e $u(0) = 0,5$

$$u(1) = 6 \cdot u(0) + 1 = 6 \times 0,5 + 1 = 4$$

$$u(2) = 6 \cdot u(1) + 1 = 6 \times 4 + 1 = 25$$

$$u(3) = 6 \cdot u(2) + 1 = 6 \times 25 + 1 = 151$$

U1 $2 \times 3 = 6$

$$3 \times 6 = 18$$

$$6 \times 18 = 108$$

De recursieve formule is $u(n+1) = u(n-1) \times u(n)$ met $u(0) = 2$ en $u(1) = 3$.

14 Rijen

14.2 Rijen weergeven

intro Eens in de twee jaar wordt er geteld hoeveel het er ongeveer zijn.
 Het is niet goed te zien of het verband lineair of exponentieel is.
 In twintig jaar is het aantal gedaald met 30 000, dat is per jaar 1500.
 De recursieve formule vanaf het jaar 2000 zou dus kunnen zijn:

$$u(n+1) = u(n) - 1500 \text{ met } u(0) = 68\,000.$$

Of:

$$\text{de groeifactor per 20 jaar is } \frac{38\,000}{68\,000} = 0,558... \text{ dus per jaar } 0,558...^{\frac{1}{20}} \approx 0,97.$$

Dan is de recursieve formule $u(n+1) = 0,97 \cdot u(n)$ met $u(0) = 68\,000$

9 a $u(2) = 4 \cdot u(1) + 7 = 4 \times 0 + 7 = 7$

b $u(3) = 4 \cdot u(2) + 7 = 4 \times 7 + 7 = 35$

$$u(4) = 4 \cdot u(3) + 7 = 4 \times 35 + 7 = 147$$

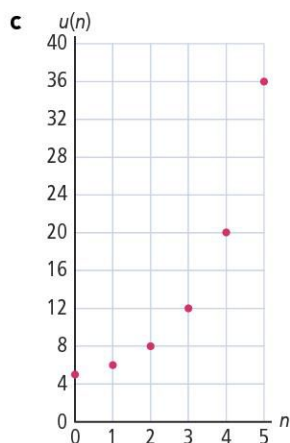
$$u(5) = 4 \cdot u(4) + 7 = 4 \times 147 + 7 = 595$$

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	0	7	35	147	595

10 a $u(0) = 5$ dus $u(1) = 2 \cdot u(0) - 4 = 2 \times 5 - 4 = 6$

b

n	0	1	2	3	4	5
$u(n)$	5	6	8	12	20	36



d Voor n gebruik je alleen gehele getallen. De waarden tussen de punten komen dus niet voor in de rij getallen.

11 a Invoer: $u(n+1) = 2 \cdot u(n) + 24$ met $u(0) = 10$

Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.

In de tabel lees je af dat $u(11) = 69\,608$ en $u(12) = 139\,240$

Dus vanaf $n = 12$ is de bijbehorende term groter dan 100 000.

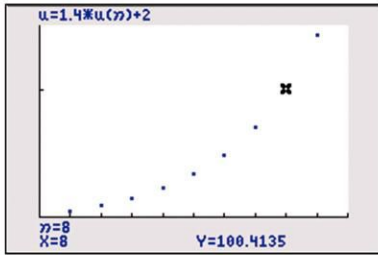
b Invoer: $u(n+1) = 1,5 \cdot (u(n))^2 - 10$ met $u(1) = 3$

Maak een tabel vanaf $n = 1$ met stapgrootte 1.

In de tabel lees je af dat $u(5) = 13\,588$ en $u(6) = 2,77 \cdot 10^8$.

Dus vanaf $n = 6$ is de bijbehorende term groter dan 100 000.

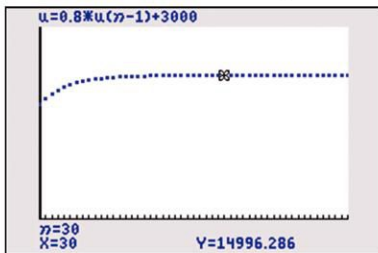
- 12 a** Invoer: $u(n+1) = 1,4 \cdot u(n) + 2$ met $u(1) = 5$
 Venster: $0 \leq n \leq 10$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 120$



- b** In de plot zie je dat $P(7) \approx 70,3$ en $P(8) \approx 100,4$.
 $P(t) > 100$ vanaf rangnummer 8.
- 13 a** $u(1) = 0$
 $u(2) = 3 \cdot u(1) + 10 = 3 \times 0 + 10 = 10$
 $u(3) = 3 \cdot u(2) + 10 = 3 \times 10 + 10 = 40$
 $u(4) = 3 \cdot u(3) + 10 = 3 \times 40 + 10 = 130$
 $u(5) = 3 \cdot u(4) + 10 = 3 \times 130 + 10 = 400$
- b** In woorden is de formule $u(n+1) = 3 \cdot u(n) + 10$
nieuwe waarde = $3 \times$ *oude waarde* + 10.
 De term met rangnummer n is de term na die met rangnummer $n-1$.
 Dus ook bij de formule $u(n) = 3 \cdot u(n-1) + 10$ hoort de woordformule
nieuwe waarde = $3 \times$ *oude waarde* + 10.
 Dus ook hier geldt: $u(2) = 3 \cdot u(1) + 10 = 3 \times 0 + 10 = 10$ enzovoort.
- c** $a(n+1) = a(n) - 5$ kun je ook schrijven als $a(n) = a(n-1) - 5$.
- 14 a** Invoer: $u(n) = 0,9 \cdot u(n-1) + 2000$ met $u(0) = 40\,000$
 Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.
- | t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $a(t)$ | 40 000 | 38 000 | 36 200 | 34 580 | 33 122 |
- b** In de tabel lees je af dat $a(13) \approx 25\,084$ en $a(14) \approx 24\,575$.
 Dus na 14 jaar ofwel in 2025 zijn er voor het eerst minder dan 25 000 bezoekers.
- 15 a** Een toename van 1,2% betekent een groeifactor van 1,012.
 De recursieve formule is $V(t) = 1,012 \cdot V(t-1) - 500$ met $V(0) = 10\,000$.
- b** Invoer: $u(n) = 1,012 \cdot u(n-1) - 500$ met $u(0) = 10\,000$
 Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.
 $u(10) \approx 5988$, dus na 10 jaar zijn er ongeveer 6000 vissen.
- c** Het aantal vissen blijft afnemen, op den duur zullen er dus geen vissen meer zijn.
- d** Een groei van 1,2% bij een beginaantal van 10 000 betekent dat er meer dan 100 vissen bijkomen. Als je dus maar 100 vissen vangt, neemt het aantal toe.

14 Rijen

- 16 a** Het getal 3000 is het aantal nieuwe bomen dat elk jaar wordt bij geplant.
De factor 0,8 betekent dat elk jaar 20% van de bomen wordt gekapt.
- b** Invoer: $u(n+1) = 0,8 \cdot u(n) + 3000$ met $u(0) = 12000$
Venster: $0 \leq n \leq 50$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 20000$



Het aantal bomen neemt toe tot 15000 en blijft daarna stabiel op dit aantal.

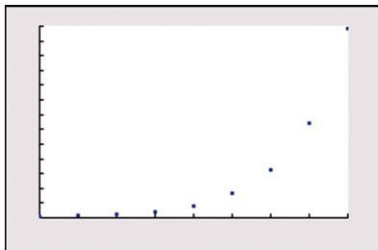
- c** Als er 3500 bomen geplant worden dan moet de formule veranderd worden:
Invoer: $u(n+1) = 0,8 \cdot u(n) + 3500$ met $u(0) = 12000$.
Als er 3500 bomen geplant worden staan er op den duur 17500 bomen in het bos.

- 011 a** Voor n gebruik je alleen gehele getallen. De waarden tussen de punten komen dus niet voor in de rij getallen.

- b** Invoer: $u(n+1) = 2 \cdot u(n) - 3$ met $u(0) = 8$
Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N_t	8	13	23	43	83	163	323	643	1283

- c** Venster: $0 \leq n \leq 8$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 1300$



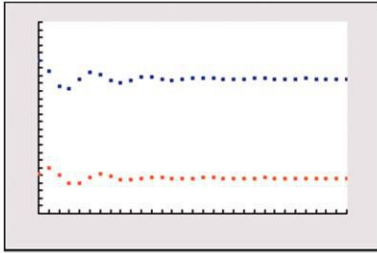
- d** In de tabel zie je dat $N_4 = 83$ en $N_5 = 163$.
Dus bij $t \geq 5$ is $N_t > 100$.
- e** In de tabel zie je dat $u(8) = 114820$ en $u(9) = 344455$.
Vanaf $n = 9$ is $u(n) > 300000$.

- 014 a** $\text{nieuwe waarde} = 1,6 \times \text{oude waarde} + 2$.
- b** De nieuwe waarde is $a(t+1)$.
- c** De oude waarde is $a(t)$.
- d** De oude waarde is nu $a(t-1)$, het rangnummer is één lager dan de nieuwe waarde.
- e** Invoer: $u(n) = 1,6 \cdot u(n-1) + 2$ met $u(0) = 10$
Maak een tabel vanaf $n = 0$ met stapgrootte 1.
 $u(4) \approx 84$ en $u(5) \approx 136$
Na 5 weken zijn er voor het eerst meer dan 100 grieppatiënten.

n	$u(n)$				
0	10				
1	18				
2	30.8				
3	51.28				
4	84.048				
5	136.48				
6	220.36				
7	354.58				
8	569.33				
9	912.93				
10	1462.7				

$u(5)=136.4768$

- U2 a** Invoer: $u(n+1) = 0,8 \cdot u(n) - 1,4 \cdot v(n) + 1000$ met $u(0) = 2000$
 $v(n+1) = 0,6 \cdot u(n) - 0,2 \cdot v(n) - 500$ met $v(0) = 525$
 Venster: $0 \leq n \leq 30$, start $n = 0$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 2500$



- b** In de eerste jaren beïnvloeden de twee populaties elkaar en is er een schommeling van de aantallen binnen de twee populaties. Na een jaar of 10 ontstaat er een evenwicht.
 Populatie a stabiliseert zich en heeft ongeveer 1760 dieren, het aantal van populatie b stabiliseert zich bij ongeveer 460 dieren.

14.3 Directe formules

intro Bij de eerste formule moet je 40 keer een berekening maken om elke keer de nieuwe waarde te berekenen. Bij de tweede formule kun je v_{40} in één keer berekenen door 40 in te vullen in de formule.

- 17 a** In het 5e figuur zijn er $5 \times 5 = 25$ sterren.

b

n	1	2	3	4	5
$u(n)$	1	4	9	16	25

c $a(1) = 1$

$$a(2) = a(1) + 2 \cdot n - 1 = 1 + 2 \times 2 - 1 = 4$$

$$a(3) = a(2) + 2 \cdot n - 1 = 4 + 2 \times 3 - 1 = 9$$

$$a(4) = a(3) + 2 \cdot n - 1 = 9 + 2 \times 4 - 1 = 16$$

$$a(5) = a(4) + 2 \cdot n - 1 = 16 + 2 \times 5 - 1 = 25$$

d $a(6) = a(5) + 2 \cdot n - 1 = 25 + 2 \times 6 - 1 = 36$

$$a(7) = a(6) + 2 \cdot n - 1 = 36 + 2 \times 7 - 1 = 49$$

$$a(8) = a(7) + 2 \cdot n - 1 = 49 + 2 \times 8 - 1 = 64$$

Het 8e figuur heeft voor het eerst meer dan 50 sterren.

e $a(1) = 1^2 = 1$, $a(2) = 2^2 = 4$, $a(3) = 3^2 = 9$, enz.

f De formules geven dezelfde uitkomsten.

g De formule $a(n) = n^2$ is makkelijker. Je kunt daarmee direct uitrekenen hoe groot de 30e term is. Bij de formule $a(n) = a(n-1) + 2n - 1$ moet je steeds verder rekenen met de voorgaande term.

- 18 a** Formule A en D zijn recursieve formules.

b Bij formule B en C kun je de waarden berekenen met behulp van het rangnummer n .

14 Rijen

19 a $u(6) = \frac{1}{2}(6 - 3) + 2 = 3\frac{1}{2}$
 $u(10) = \frac{1}{2}(10 - 3) + 2 = 5\frac{1}{2}$

b $t_6 = \frac{6}{7} + 1 = 1\frac{6}{7}$
 $t_{10} = \frac{10}{7} + 1 = 2\frac{3}{7}$

c $p_6 = (6 + 2)^2 - 5 = 59$
 $p_{10} = (10 + 2)^2 - 5 = 139$

d $v_6 = \frac{-4 + 2 \times 6}{6} = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$
 $v_{10} = \frac{-4 + 2 \times 10}{10} = \frac{16}{10} = 1\frac{3}{5}$

20 a 7e term is $5 + 8 = 13$
 8e term is $8 + 13 = 21$
 9e term $13 + 21 = 34$
 10e term $21 + 34 = 55$

b *nieuwe waarde = de som van de twee voorafgaande waarden.*

c invoer: $y_1 = \frac{(1 + \sqrt{5})^x - (1 - \sqrt{5})^x}{\sqrt{5} \cdot 2^x}$

tabel:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

d $u(30) = 832\,040$ en $u(31) = 1\,346\,269$
 Dus vanaf $n = 31$.

21 a 1e term is 4

2e term is $4 + -\frac{4}{3} = 2\frac{2}{3}$

3e term is $2\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = 3\frac{7}{15}$

4e term is $3\frac{7}{15} - \frac{4}{7} = 2,8952\dots$

5e term is $2,8952\dots + \frac{4}{9} = 3,3396\dots$

6e term is $3,3396\dots - \frac{4}{11} = 2,9760\dots$

7e term is $2,9760\dots + \frac{4}{13} = 3,2837\dots$

8e term is $3,2837\dots - \frac{4}{15} = 3,0170\dots$

9e term is $3,0170\dots + \frac{4}{17} = 3,2523\dots$

10e term is $3,2523\dots - \frac{4}{19} = 3,0418\dots$

Bij de 10^e term is het verschil kleiner dan 0,1.

- b** Formule B kan niet goed zijn want alle breuken liggen tussen -1 en 1 .
 Bij formule B is de waarde voor bijvoorbeeld $n = 3$ groter dan 1 .
 Formule A is juist want de teller van de breuken is overal 4 of -4 en de noemer neemt steeds met 2 toe.

$$\begin{aligned}
 \text{c } v_0 &= \sqrt{12} \cdot \frac{(-1)^n}{(2 \times 0 + 1) \times 3^0} = \frac{\sqrt{12}}{1} = \sqrt{12} \\
 v_1 &= \sqrt{12} \cdot \frac{(-1)^1}{(2 \times 1 + 1) \times 3^1} = \frac{-\sqrt{12}}{9} = -\frac{1}{9} \sqrt{12} \\
 v_2 &= \sqrt{12} \cdot \frac{(-1)^2}{(2 \times 2 + 1) \times 3^2} = \frac{\sqrt{12}}{45} = \frac{1}{45} \sqrt{12} \\
 v_0 + v_1 + v_2 &= \sqrt{12} - \frac{1}{9} \sqrt{12} + \frac{1}{45} \sqrt{12} = \frac{41}{45} \sqrt{12} \approx 3,156... \\
 \text{Het verschil met } \pi &\text{ is dus } 3,156... - \pi \approx 0,01.
 \end{aligned}$$

019 a Je kunt de waarden bij de termen berekenen door het rangnummer n in de formule in te vullen.

b $u(1) = 4(1 + 2) - 5 = 7$

$u(2) = 4(2 + 2) - 5 = 11$

c $u(3) = 4(3 + 2) - 5 = 15$

$u(4) = 4(4 + 2) - 5 = 19$

$u(5) = 4(5 + 2) - 5 = 23$

d A: $t_6 = \frac{600}{6} - 5 = 95$ en $t_{10} = \frac{600}{10} - 5 = 55$

B: $p_6 = (6 - 2)^3 = 64$ en $p_{10} = (10 - 2)^3 = 512$

C: $u(6) = -3 \times 6(6 - 4) = -36$ en $u(10) = -3 \times 10(10 - 4) = -180$

D: $v_6 = \frac{8 \times 6}{6 - 3} = 16$ en $v_{10} = \frac{8 \times 10}{10 - 3} = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$

U3 a De spiraal wordt gevormd door kwart cirkelbogen. De grootte van de stralen van deze cirkelbogen volgen waarden van de rij van Fibonacci.

b De term voorafgaand aan 46 368 is $75\,025 - 46\,368 = 28\,567$

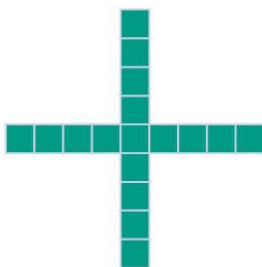
De term voorafgaand aan 28 5467 is $46\,368 - 28\,567 = 17\,711$

14.4 Rijen bij een lineair verband

intro Je ziet dat er per uur 20 bacteriën bij komen. In 50 uur is dat dus $50 \times 20 = 1000$.

Na 50 uur zullen er dus $10 + 1000 = 1010$ bacteriën zijn.

22 a



b

n	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	5	9	13	17	21	25

c $u(n + 1) = u(n) + 4$ met $u(1) = 5$

d Als n met 1 toe neemt $u(n)$ telkens met 4 toe.

e De figuur $u(0)$ heeft $5 - 4 = 1$ vierkantje.

f $u(0) = 1$ dus het startgetal is 1.

De toename is 4, dus het hellingsgetal is 4.

g $u(50) = 1 + 4 \times 50 = 201$, dus 201 vierkantjes.

14 Rijen

23 a tabel A:

De toename is 5.

De recursieve formule is $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 12$.

tabel B:

De toename is -3 .

De recursieve formule is $v_n = v_{n-1} - 3$ met $v_1 = 20$.

tabel C:

De toename is $-2\frac{1}{2}$.

De recursieve formule is $w_n = w_{n-1} - 2\frac{1}{2}$ met $w_1 = 2$.

b tabel A: $u_n = 12 + 5n$

tabel B: $v_0 = v_1 + 3 = 20 + 3 = 23$ dus $v_n = 23 - 3n$

tabel C: $w_0 = w_1 + 2\frac{1}{2} = 2 + 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ dus $w_n = 4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}n$

c $u_{10} = 12 + 5 \times 10 = 62$

$$v_{10} = 23 - 3 \times 10 = -7$$

$$w_{10} = 4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} \times 10 = -20\frac{1}{2}$$

24 a De toename is 4 en $u_0 = 7$.

$$u_n = 4n - 7$$

b De toename is $-0,5$ en $v(0) = v(1) - 0,5 = 3 + 0,5 = 3,5$.

$$v(n) = 3,5 - 0,5n$$

c De toename is -2 en $w_0 = -5 - -2 = -5 + 2 = -3$.

$$w_n = -3 - 2n$$

d De toename is $5,5$ en $z(0) = 16$.

$$z(n) = 16 + 5,5n$$

25 a De toename is 4 en $u_0 = 4 \cdot 0 = 0$.

$$u_n = u_{n-1} + 4 \text{ met } u_0 = 0$$

b De toename is -3 en $v(0) = -3 \times 0 + 5 = 5$.

$$v(n) = v(n-1) - 3 \text{ met } v(0) = 5$$

c De toename is $-2\frac{1}{2}$ met $w_0 = 19 - 2\frac{1}{2} \times 0 = 19$.

$$w_n = w_{n-1} - 2\frac{1}{2} \text{ met } w_0 = 19$$

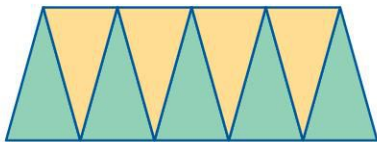
26 a De toename tussen $v(7)$ en $v(10)$ is $243 - 72 = 171$.

Dit is een toename van $171 : 3 = 57$ per stap van één.

b $v(0) = 72 - 7 \times 57 = -327$.

Een directe formule is $v(n) = 57n - 327$.

27 a



De figuur heeft $5 + 4 = 9$ driehoeken.

b Er komen steeds twee driehoekjes bij dus de figuur met rangnummer 0 bestaat uit $3 - 2 = 1$ driehoekje.

n	1	2	3	4	5	6
u(n)	3	5	7	9	11	13

d Als n met 1 toeneemt, neemt $u(n)$ steeds met 2 toe.e Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(0) = 1$ of $u(1) = 3$.

Een directe formule is $u(n) = 2n + 1$.

f $2n + 1 = 160$

$$2n = 159 \text{ dus } n = 79,5$$

Vanaf $n = 80$ heeft de figuur meer dan 160 driehoekjes.

- g** Het aantal gele driehoekjes neemt steeds met 1 toe.
 $v(1) = 1$ dus $v(0) = 1 - 1 = 0$.
 Een recursieve formule is $v(n+1) = u(n) + 1$ met $v(0) = 0$ of $v(1) = 1$.
 Een directe formule is $v(n) = n$.

- 28 a** De volgende term is de voorgaande term +12 met $L_0 = 75$.
 Een recursieve formule is $L_{t+1} = L_t + 12$ met $L_0 = 75$.
b Een directe formule bij rij L is $L_t = 12t + 75$.
c Een directe formule bij het aantal jongens is $J_t = 4t + 15$.
 1 augustus 2021 komt overeen met $t = 4$.
 Het totaal aantal leden is dan $L_{14} = 12 \times 4 + 75 = 123$.
 Het aantal jongens is $J_4 = 4 \times 4 + 15 = 31$.
 $(31 : 123) \times 100\% = 25,203\ldots\%$
 Op 1 augustus 2021 is ongeveer 25% van de leden een jongen.

- 023 a** De toename is 5.
b $u(0) = 40 - 5 = 35$
c Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 5$ met $u(0) = 35$
 Een directe formule is $u(n) = u(0) + 5 \cdot n$ dus $u(n) = 35 + 5 \cdot n$
d $u(10) = 35 + 5 \times 10 = 85$
e rij v : de toename is -2 en $v_0 = 8$.
 Een recursieve formule is $v_{n+1} = v_n - 2$ met $v_0 = 8$.
 Een directe formule is $v_n = 8 - 2 \cdot n$.
 rij w : de toename is $3\frac{1}{2}$ en $w_0 = w_1 - 3\frac{1}{2} = 16 - 3\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$.
 Een recursieve formule is $w_{n+1} = w_n + 3\frac{1}{2}$ met $w_0 = 12\frac{1}{2}$.
 Een directe formule is $w_n = 12\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \cdot n$.
f De termen bij $n = 15$ zijn $v_{15} = 8 - 2 \cdot 15 = -22$ en $w_{15} = 12\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \cdot 15 = 65$.

- 026 a** $v(8) - v(4) = 88 - 76 = 12$
b De toename van $v(n)$ als n met één toeneemt is $12 : 4 = 3$.
c $v(0) = 76 - 4 \times 3 = 64$
d Bij de rij v is de toename 3 en $v(0) = 64$.
 Een directe formule is $v(n) = 64 + 3n$.
e De toename is $(82 - 100) : 3 = -18 : 3 = -6$ per stap van één.
 $w(0) = 100 - 5 \times -6 = 130$
 Een directe formule is $w(n) = 130 - 6n$.

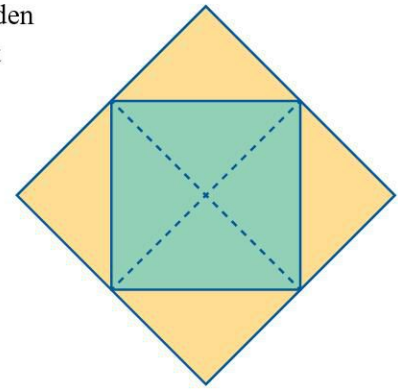
- U4** Een directe formule bij de rij u is $u(n) = 8 + 10n$.
 Een directe formule bij de rij z is $z(n) = 53 - 6n$.
 Een directe formule bij de rij v is $v(n) = 8 + 10n - (53 - 6n)$
 dus $v(n) = -45 + 16n$

14.5 Rijen bij een exponentieel verband

- intro** Op deze manier moet Alissa 26 keer geld in haar spaarpot doen.
 De 1e keer € 0,05; de 2e keer € 0,10; de 3e keer € 0,20; de 4e keer € 0,40;
 de 5e keer € 0,80; de 6e keer € 1,60 enzovoort.
 Het bedrag verdubbelt 25 keer. De 26e keer zou ze dus
 $2^{25} \times € 0,05 = € 1.677.721,60$ in haar spaarpot moeten doen.

14 Rijen

- 29 a** Als je de vier gele hoekpunten van het kleinste gele vierkant naar het midden vouwt, bedekken ze precies het kleinste groene vierkant. Het gele vierkant bedekt zichzelf en is dus in twee gelijke delen gesplitst. Het kleinste gele vierkant is dus twee keer zo groot als het kleinste groene vierkant.



- b** $u(0) = 4$ $u(3) = 2 \cdot 16 = 32$
 $u(1) = 2 \cdot 4 = 8$ $u(4) = 2 \cdot 32 = 64$
 $u(2) = 2 \cdot 8 = 16$
- c** $u(n+1) = 2 \cdot u(n)$ met $u(0) = 4$

- 30 a** Elke volgende term is tweemaal de voorgaande term.

$u(3)$ is tweemaal $u(2)$ en die is weer tweemaal $u(1)$ en die is weer tweemaal $u(0)$.

Dus is $u(3) = u(0) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ oftewel $u(3) = 4 \cdot 2^3$.

- b** $u(10) = 4 \cdot 2^{10} = 4096$

- c** De oppervlakte van vierkant met nummer n is 2^n keer zo groot als de oppervlakte van vierkant bij $u(0)$.

Het vierkant met nummer 0 heeft oppervlakte 4, dus vierkant met nummer n heeft oppervlakte $u(n) = 4 \cdot 2^n$.

- 31 a** Rij u : de groeifactor is $30 : 20 = 1,5$

De recursie formule is $u(n) = 1,5 \cdot u(n-1)$ met $u(0) = 20$

Rij v : de groeifactor is $12 : 6 = 2$

De recursieformule is $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$ met $v_1 = 6$

Rij w : de groeifactor is $54 : 172 = -\frac{1}{3}$

De recursie formule is $w_n = -\frac{1}{3} \cdot w_{n-1}$ met $w_1 = -162$

- b** $u(n) = 20 \cdot 1,5^n$

$v_0 = 6 : 2 = 3$ dus $v_n = 3 \cdot 2^n$

$w_0 = -162 : -\frac{1}{3} = 486$ dus $w_n = 486 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

- c** $u(9) = 20 \cdot 1,5^9 \approx 768,87$

$v_{10} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$

$w_{10} = 486 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{10} \approx -0,00823$

- 32 a** Rij u : de groeifactor is 4 en $u_0 = 13$

Een directe formule is $u_n = 13 \cdot 4^n$.

- b** Rij v : de groeifactor is $\frac{1}{3}$ en $v(0) = 56 : \frac{1}{3} = 168$

Een directe formule is $v(n) = 168 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

- c** Rij w : de groeifactor is $16 : -8 = -2$ en $w_0 = -8 : -2 = 4$

Een directe formule is $w_n = 4 \cdot (-2)^n$.

- d** Rij z : de groeifactor is $9000 : 18000 = \frac{1}{2}$ en $z(0) = 18000$

Een directe formule is $z(n) = 18000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- 33 a** De groeifactor is 5, $u_0 = 16 \cdot 5^0 = 16$

$u_n = 5 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 16$

- b** De groeifactor is -1 , $v(0) = -23 \cdot (-1)^0 = -23$

$v(n) = -1 \cdot v(n-1)$ met $v(0) = -23$

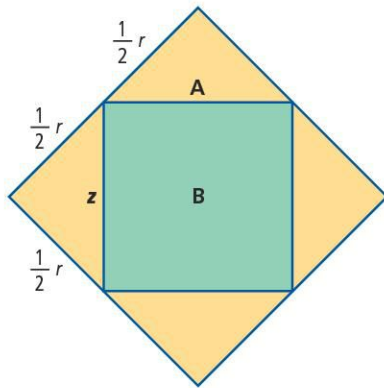
- c** De groeifactor is 5, $w_0 = \frac{5^0}{4} = \frac{1}{4}$

$w_n = 5 \cdot w_{n-1}$ met $w_0 = \frac{1}{4}$

- 34 a** $u(n) = 20 \cdot 1,1^n$ heeft als groeifactor 1,1.
b $u(5) = 20 \cdot 1,1^5 = 32,2102$
c Maak een tabel bij de formule.
 Invoer: $y_1 = 20 \cdot 1,1^x$
 Bij $x = 41$, is $y = 995,7$ en bij $x = 42$ is $y = 1095,3$
 Vanaf $n = 42$ geldt $u(n) > 1000$.
d De groeifactor is 1,1 en $u(0) = 20 \cdot 1,1^0 = 20$
 $u(n) = 1,1 \cdot u(n-1)$ met $u(0) = 20$.
- 35 a** $z(6) : z(4) = 75 : 12 = 6,25$
b Van de groeifactor g is $g^2 = 6,25$, dus de groeifactor g is $\sqrt{6,25} = 2,5$.
c $z(0) = 12 : 2,5^4 = 0,3072$
 Een directe formule is $z(n) = 0,3072 \cdot 2,5^n$.
- 36 a** De groeifactor is $101,3 : 100 = 1,013$.
 $B(n+1) = 1,013 \cdot B(n)$ met $B(0) = 500$.
b $B(n) = 500 \cdot 1,013^n$
c $B(18) = 500 \cdot 1,013^{18} \approx 630,87$
 Op zijn achttiende verjaardag krijgt Jasper € 630,87.
- 37 a** De groeifactor is 2 met $u(1) = 1$.
b $u(0) = 1 : 2 = 0,5$ dus $u(n) = \frac{1}{2} \cdot 2^n$
c Voor het 64e veld geldt $n = 64$.
 $u(64) = \frac{1}{2} \cdot 2^{64} \approx 9,22 \times 10^{18}$
 Dus op het 64e veld liggen ongeveer $9,22 \times 10^{18}$ graankorrels.
- 031 a** $100 : 200 = \frac{1}{2}$, $u(n)$ wordt steeds met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.
b $u(0) = 200 : \frac{1}{2} = 400$
c De recursieve formule is $u(n+1) = u(n) \cdot \frac{1}{2}$ met $u(0) = 400$.
d De groeifactor is $\frac{1}{2}$ met $u(0) = 400$.
 De directe formule is $u(n) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
e $u(10) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0,390625$
f Rij v : de groeifactor is $15 : 5 = 3$ en $v_0 = 5$
 De recursieve formule is $v_n = 3 \cdot v_{n-1}$ met $v_0 = 5$.
 De directe formule is $v_n = 5 \cdot 3^n$.
 Rij w : de groeifactor is $42 : -21 = -2$ en $w_0 = -21 : -2 = 10,5$
 De recursieve formule is $w_n = -2 \cdot w_{n-1}$ met $w_1 = -21$.
 De directe formule is $w_n = 10,5 \cdot (-2)^n$.
g $v_{14} = 5 \cdot 3^{14} = 23\,914\,855$
 $w_{15} = 10,5 \cdot (-2)^{15} = -344\,064$
- 035 a** $v(7) : v(2) = 800 : 25 = 32$
b Het verschil in rangnummer is $7 - 2 = 5$.
c De groeifactor is $32^{\frac{1}{5}} = 2$.
d $v(0) = 25 : 2^2 = 6,25$
e De groeifactor is 2 en $v(0) = 6,25$.
 Een directe formule is $v(n) = 6,25 \cdot 2^n$.
f $w(7) : w(3) = 10\,935 : 135 = 81$
 De groeifactor is $81^{\frac{1}{4}} = 3$ en $w(0) = 135 : 3^3 = 5$.
 Een directe formule is $w(n) = 5 \cdot 3^n$.

14 Rijen

U5 Kubus B staat op kubus A.



r is de lengte van de ribben van kubus A in cm.

De lengte van de ribben van de kubus B bereken je met Pythagoras.

De ribben van kubus B zijn

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 + \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}r^2} = \sqrt{\frac{1}{2}r^2} = r \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

De inhoud van kubus A is r^3 .

De inhoud van kubus B is $\left(r \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 = r^3 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}.$

De kubus van B is $\sqrt{\frac{1}{8}}$ keer de inhoud van kubus A.

Deze factor geldt voor elke kubus ten opzicht van de kubus waar deze op staat. De groeifactor is dus $\sqrt{\frac{1}{8}}.$

De inhoud van de blauwe kubus is $u(0) = 6^3 = 216 \text{ cm}^3.$

Een directe formule is $u(n) = 216 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^n.$

14.6 Gemengde opdrachten

38 a 1, 4, 7, 10, ... is een rekenkundige rij met toename 3.

Een recursieve formule is $t(n+1) = t(n) + 3$ met $t(0) = 1.$

Een directe formule is $t(n) = 3n + 1.$

$$t(10) = 3 \times 10 + 1 = 31.$$

b 0,3 : 0,33; 0,363; 0,3993; ... hoort bij een exponentieel verband met groeifactor $\frac{0,33}{0,3} = \frac{0,363}{0,33} = \frac{0,3993}{0,363} = 1,1.$

Een recursieve formule is $u(n+1) = 1,1 \cdot u(n)$ met $u(0) = 0,3.$

Een directe formule is $u(n) = 0,3 \cdot 1,1^n.$

$$u(10) = 0,3 \cdot 1,1^{10} \approx 0,778$$

c 9; 7,5; 6; 4,5; ... hoort bij een lineair verband met toename -1,5.

Een recursieve formule is $v(n+1) = v(n) - 1,5$ met

$$v(0) = v(1) - -1,5 = 9 + 1,5 = 10,5.$$

Een directe formule is $v(n) = -1,5n + 10,5.$

$$v(10) = -1,5 \cdot 10 + 10,5 = -4,5$$

d 1, -1, 1, -1, ... hoort bij een exponentieel verband met groeifactor $\frac{-1}{1} = -1.$

Een recursieve formule is $w(n+1) = -1 \cdot w(n)$ met

$$w(0) = -1 \cdot w(1) = -1 \times -1 = 1.$$

Een directe formule is $w(n) = (-1)^n.$

$$w(10) = (-1)^{10} = 1$$

- 39 a** 1,5 minuut = 90 seconden
 $90 = 152 - 2n$
 $2n = 62$
 $n = 31$
 De eenendertigste ronde loopt hij in precies 1,5 minuut.
- b** $T(n) = \frac{1}{2}n(t(1) + t(n))$ en $t(n) = 152 - 2n$
 $T(n) = \frac{1}{2}n(150 + 152 - 2n)$
 $T(n) = \frac{1}{2}n(302 - 2n)$
 $T(n) = 151n - n^2$
 30 minuten = 1800 seconden
 Op de rekenmachine:
 Invoer: $y_1 = 151x - x^2$ en $y_2 = 1800$
 Venster: $0 < x < 15$, $1500 < y < 2000$
 Optie: snijpunt
 Dit geeft $x = 13,05$.
 Joris kan 13 volledige ronden afleggen.
- 40 a** De figuur nummer 4 heeft 13 punten meer dan figuur 3, dus $22 + 13 = 35$.
- b** Bij elke stap heeft de zijde vanuit het punt linksonder 1 punt meer dan de voorafgaande figuur.
 Bij figuur 0 blijft alleen het punt linksonder over, dus figuur 0 heeft 1 punt.
- c** $u(0) = 1$ $u(3) = 12 + 10 = 22$
 $u(1) = 1 + 4 = 5$ $u(4) = 22 + 13 = 35$
 $u(2) = 5 + 7 = 12$ $u(5) = 35 + 16 = 51$
- d** Maak met de rekenmachine een tabel bij de formule.
 Invoer: $y_1 = 1,5x^2 + 2,5x + 1$
- | | | | | | | | | |
|--------|---|---|----|----|----|----|----|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $u(n)$ | 1 | 5 | 12 | 22 | 35 | 51 | 70 | 92 |
- Het klopt met de antwoorden van vraag c.
- e** In de tabel van opdracht d zie je dat $u(24) = 925$ en $u(25) = 1001$.
 Vanaf figuur 25 hebben de figuren meer dan 1000 punten.

Onderzoeksopdrachten

- 41** Het bedrag op de spaarrekening kun je berekenen met de formule
 $K_{t+1} = 1,008 \cdot K_t - 300$ met $K_0 = 4000$
 Een tabel op de rekenmachine maken:
 Invoer: $u(n+1) = 1,008 \times u(n) - 300$ en $u(0) = 4000$
 Bij $n = 14$ geeft dit $u(n) = 46,51$ en bij $n = 15$ is $u(n) = -253,1$
 Dit betekent dat hij in het 15e jaar ofwel in januari 2035 geen 300 euro meer van de bank kan halen.
- 42** Rij C is een meetkundige rij met directe formule $C(n) = 18,0 \cdot 0,91^n$.
 Plot de grafieken bij de formules op je rekenmachine.
 Invoer: $y_1 = 19,0 : (1 + 26,14 \times 0,73^x)$ en $y_2 = 18,0 \times 0,91^x$
 Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 20$
 Optie: snijpunt
 Het snijpunt is $(9,10; 7,63)$
 Dus in het 10e jaar na 2008 ofwel in 2018 is het aantal verkochte cd's kleiner dan het aantal downloadverkopen.

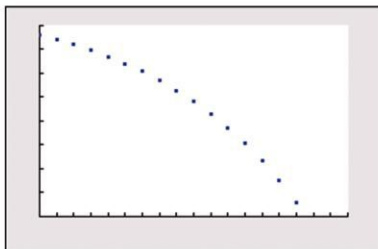
14 Rijen

Samenvatting

- S1** $u(1) = -2$
 $u(2) = (-2)^2 + 1 = 5$
 $u(3) = 5^2 + 1 = 26$
 De tweede term is 5 en de derde term 26.
- S2 a** Hier is de indexnotatie gebruikt.
b $a_1 = 1$
 $a_2 = \frac{2}{a_1} - 5 = \frac{2}{1} - 5 = -3$
 $a_3 = \frac{2}{a_2} - 5 = \frac{2}{-3} - 5 = -5\frac{2}{3}$
- S3 a** $u(0) = 4 \cdot (-1)^0 = 4$
 $u(1) = 4 \cdot (-1)^1 = -4$
 $u(2) = 4 \cdot (-1)^2 = 4$
 $u(3) = 4 \cdot (-1)^3 = -4$
b $u(0) = \frac{160}{0+6} = 26\frac{2}{3}$
 $u(1) = \frac{160}{1+6} = 22\frac{6}{7}$
 $u(2) = \frac{160}{2+6} = 20$
 $u(3) = \frac{160}{3+6} = 17\frac{7}{9}$
- S4** Bij de rij wordt steeds met $\frac{-72}{-108} = \frac{-48}{-72} = \frac{-32}{-48} = \frac{2}{3}$ vermenigvuldigd.
 Een recursieve formule is $u(n+1) = \frac{2}{3} \cdot u(n)$ met $u(0) = -108$
- S5** Maak een tabel op de rekenmachine.
 Invoer: $u(n+1) = 1,4 \cdot u(n) + n$ met $u(0) = 2$.
 $A(16) = 2292,5\dots$ en $A(17) = 3226,5\dots$
 Vanaf rangnummer 17 is $A(t) > 3000$.
- S6 a** Het aantal stippen neemt steeds met 2 toe.
 $z(n+1) = z(n) + 2$ met $u(1) = 3$.
 $u(1) = 3$ dus $u(0) = 3 - 2 = 1$.
 Een directe formule is $u(n) = 2n + 1$.
b De vijftiengste figuur heeft $2 \cdot 25 + 1 = 51$ stippen.
c $2n + 1 = 100$
 $2n = 99$ dus $n = 49,5$
 Vanaf $n = 50$ hebben de figuren meer dan 100 stippen.
- S7 a** $\frac{22\frac{1}{2}}{15} = 1,5$; $\frac{33\frac{3}{4}}{22\frac{1}{2}} = 1,5$; $\frac{50\frac{5}{8}}{33\frac{3}{4}} = 1,5$
 Er wordt dus steeds met 1,5 vermenigvuldigd.
b Een recursieve formule is $u(n+1) = 1,5 \cdot u(n)$ met $u(1) = 15$.
 De groeifactor is 1,5 en $u(0) = 15 : 1,5 = 10$.
 Een directe formule is $u(n) = 10 \cdot 1,5^n$.

Test jezelf

- T1** u : 200, 202, 204, 206, ...
 Rij u : De toename is steeds 2 en $u(0) = 200$.
 Een recursieve formule is $u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(0) = 200$.
 Een directe formule is $u(n) = 200 + 2n$
 Rij v : de groeifactor is 1,5 en $v(0) = 200$
 Een recursieve formule is $v(n+1) = 1\frac{1}{2} \cdot v(n)$ met $v(0) = 200$.
 Een directe formule is $v(n) = 200 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^n$.
 Rij w : de groeifactor is 0,5 en $w(0) = 200$
 Een recursieve formule is $w(n+1) = \frac{1}{2} \cdot w(n)$ met $w(0) = 200$.
 Een directe formule is $w(n) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- T2 a** Het is een rij bij een lineair verband, de toename is 15.
 $t(1) = 15$ dus $t(0) = 15 - 15 = 0$
 Een directe formule van rij t is $t(n) = 15n$.
- b** Er is een smalle rij van 7 witte tegels met daarboven een rechthoek van 4 bij 3 tegels, dus totaal $4 \times 3 + 1 \times 7$ tegels.
 Daar links van een smalle rij van $2 \times 7 = 14$ witte tegels met daarboven een rechthoek van 6 bij 3 tegels, dus $6 \times 3 + 2 \times 7$ tegels.
- c** De smalle rij witte tegels is 3×7 tegels lang.
 De rechthoek wordt twee tegels hoger dus 8×3 tegels groot.
 Totaal zijn er dus $8 \times 3 + 3 \times 7 = 45$ witte tegels.
- d** De witte rechthoeken zijn allemaal 3 breed. De eerste is 2 hoog en van elke volgende rechthoek is de hoogte 2 meer dan de vorige rechthoek, daarom bestaat het eerste deel van de formule uit $2n \cdot 3$.
 De rij witte tegels aan de onderkant begint bij de tweede rechthoek en is daar 7 lang. Elke rij tegels aan de onderkant wordt steeds 7 langer, de smalle rij witte tegels is dus $7(n-1)$ tegels lang.
- T3 a** Het aantal zeerobben in 2002 is $1,12 \times 760 - 110 \approx 741$.
 Het aantal zeerobben in 2003 is $1,12 \times 741 - 110 \approx 720$.
- b** Een recursieve formule voor deze groei is $a(n+1) = 1,12 \cdot a(n) - 110$ met $a(0) = 760$.
 Invoer: $u(n+1) = 1,12 \cdot u(n) - 110$ met $u(0) = 760$.
 Venster: $0 \leq n \leq 18$, start $n = 1$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 18, 0 \leq y \leq 800$

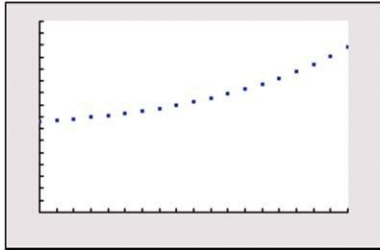


14 Rijen

- c Invoer: $u(n+1) = 1,12 \cdot u(n) - 80$ met $u(0) = 760$.

Venster: $0 \leq n \leq 18$, start $n = 1$ en stapgrootte 1

$$0 \leq x \leq 18 \text{ en } 0 \leq y \leq 1600$$



Je ziet dat het aantal dan toeneemt.

- d In het eerste jaar komen er $0,12 \cdot 760 = 91,2$ zeehonden bij.
Om het aantal zeerobben constant of net groeiend te houden mogen er 91,2 zeerobben gevangen worden.
Dus bij een vangstquotum van 91 zeerobben per jaar is het aantal nog net groeiend.

- T4 a $1,2 - 0,3 = 0,9$; $2,1 - 1,2 = 0,9$; $3 - 2,1 = 0,9$

De toename is steeds 0,9. Het verband tussen n en $z(n)$ is lineair.

- b Een recursieve formule is $z(n+1) = z(n) + 0,9$ met $z(1) = 0,3$.

$$z(0) = z(1) - 0,9 = 0,3 - 0,9 = -0,6$$

$$\text{Een directe formule is } z(n) = -0,6 + 0,9n.$$

- c $-0,6 + 0,9n = 1\,000\,000$

$$0,9n = 1\,000\,000,6$$

$$n = 1\,000\,000,6 : 0,9 \approx 1\,111\,111,8$$

Dus vanaf $n = 1\,111\,112$ zijn de termen groter dan 1 000 000.

- d De rij $u_{n+1} = \frac{u_n}{-5}$ is hetzelfde als $u_{n+1} = -\frac{1}{5} \cdot u_n$ en hoort dus bij een

exponentieel verband met groeifactor $-\frac{1}{5}$.

- e $u(1) = 40$ dus is $u(0) = 40 : -\frac{1}{5} = -200$.

$$\text{Een directe formule is } u(n) = -200 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n.$$

- T5 a Het aantal vissen groeit met 10% dus de groeifactor is 1,1 en $a = 1,1$.

Er worden 75 vissen gevangen dus het aantal neemt daardoor met 75 af en daarom is $b = -75$.

- b $A(n+1) = 1,1 \cdot A(n) - 75$ en $A(0) = 450$

$$A(1) = 1,1 \cdot 450 - 75 = 420$$

$$A(2) = 1,1 \cdot 420 - 75 = 387$$

$$A(3) = 1,1 \cdot 387 - 75 \approx 351$$

Na 3 jaar zijn er 351 vissen.

- c Maak een tabel op de rekenmachine

$$\text{Invoer: } u(n) = 1,1u \times (n-1) - 75 \text{ met } u(0) = 450.$$

In de tabel zie je dat $u(6) \approx 219$ en $u(7) \approx 165$.

Na 7 jaar, dus in 2028, wordt er een visverbod ingesteld.

- T6 a Omdat de lengten van de zijden van de gele driehoekjes steeds wordt gehalveerd is de directe formule $u(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- b $w(0) = 1$, $w(1) = 3$, $w(2) = 9$, $w(3) = 27$ en $w(4) = 81$.

Elk volgend figuur heeft driemaal zoveel gele driehoeken, dus een directe formule is $w(n) = 1 \cdot 3^n$

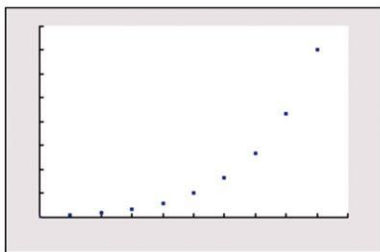
Extra oefening

- E1 a** $72 : 96 = 0,75$; $54 : 72 = 0,75$ en $40,5 : 54 = 0,75$
 Een recursieve formule is $u(n) = 0,75 \times u(n-1)$ met $u(0) = 96$.
- b** $5 - 12 = -7$; $-2 - 5 = -7$; $-9 - -2 = -7$
 Een recursieve formule is $v_n = v_{n-1} - 7$ met $v_0 = 12$.

- E2 a** Invoer: $u(n+1) = 1,6 \cdot u(n) + 5$ met $u(0) = 2$.

n	u			
0	2			
1	8,2			
2	18,12			
3	33,992			
4	59,387			
5	100,02			
6	165,03			
7	269,05			
8	435,48			
9	701,77			
10	1127,8			
$n=0$				

- b** Venster: $0 \leq n \leq 10$, start $n = 0$ en stapgrootte 1
 $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 1600$



- c** In de tabel zie je dat $B(t) > 300$ vanaf $t = 8$.

- E3 a** De toename is -8 en $u_0 = u_1 - -8 = 15 + 8 = 23$.
 Een directe formule is $u_n = 23 - 8n$.
- b** De toename is 3 en $v(0) = -53$.
 Een directe formule is $v(n) = -53 + 3n$.
- c** De toename is $52 - 56 = -4$ en $w_0 = w_1 - -4 = 56 + 4 = 60$.
 Een directe formule is $w_n = 60 - 4n$.
- d** De toename is $-150,5 - -158 = 7,5$ en $z(0) = -158$.
 Een directe formule is $z(n) = -158 + 7,5n$.

- E4 a** De groeifactor is $0,8$ en $u_0 = 500$.
 Een directe formule is $u_n = 500 \cdot 0,8^n$
- b** De groeifactor is $7\frac{1}{2}$ en $v(0) = v(1) : 7\frac{1}{2} = 15 : 7\frac{1}{2} = 2$.
 Een directe formule is $v(n) = 2 \cdot \left(7\frac{1}{2}\right)^n$
- c** De groeifactor is $30\,000 : 90\,000 = \frac{1}{3}$ en $w_0 = 90\,000 : \frac{1}{3} = 270\,000$.
 Een directe formule is $w_n = 270\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- d** De groeifactor is $20 : 16 = 1,25$ en $z(0) = 16$.
 Een directe formule is $z(n) = 16 \cdot 1,25^n$

- E5** $t : 72, 24, 8, \dots$ is een meetkundige rij met reden $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$, dus
 $t(n) = \frac{1}{3} \times t(n-1)$ met $t(1) = 72$.
 De eerste term is 72 , dus $t(0) = 72 : \frac{1}{3} = 216$.
 $t(n) = 216 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, dus de 10e term is $t(10) = 216 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{8}{2187}$.

14 Rijen

u : 111, 114, 117, 120, ... is een rekenkundige rij met verschil

$$114 - 111 = 3, \text{ dus } u(n+1) = u(n) + 3 \text{ met } u(1) = 111.$$

De eerste term is 111, dus $u(0) = 111 - 3 = 108$.

$$u(n) = 108 + 3n, \text{ dus de 10e term is } u(10) = 108 + 3 \cdot 10 = 138.$$

v : 1; 0,98; 0,9604; 0,941192; ... is een meetkundige rij met reden 0,98 dus

$$v(n) = 0,98 \times v(n-1) \text{ met } v(1) = 1.$$

De eerste term is 1, dus $v(0) = 1 : 0,98 = 1\frac{1}{49}$.

$$v(n) = 1\frac{1}{49} \cdot 0,98^n, \text{ dus de 10e term is } v(10) = 1\frac{1}{49} \cdot 0,98^{10} \approx 0,834.$$

w : 23, 14, 5, -4, ... is een rekenkundige rij met verschil $14 - 23 = -9$.

$$w(n+1) = u(n) - 9 \text{ met } w(1) = 23$$

De eerste term is 23, dus $w(0) = 23 - (-9) = 32$.

$$w(n) = 32 - 9n, \text{ dus de 10e term is } w(10) = 32 - 9 \cdot 10 = -58.$$

E6 a $w_n = 4 \cdot \frac{w_{n-1}}{3} = \frac{4}{3} \cdot w_{n-1}$

De groeifactor is $\frac{4}{3}$ en $w_0 = w_1 : \frac{4}{3} = 80 : \frac{4}{3} = 60$.

Een directe formule is $w_n = 60 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

b $60 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = 1\,000\,000\,000$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = 1\,000\,000\,000 : 60$$

$$n = \frac{4}{3} \log(1\,000\,000\,000 : 60) \approx 57,8$$

Dus vanaf $n = 58$ is w_n groter dan 1 miljard.

E7 De rij is 390, 570, 750, ...

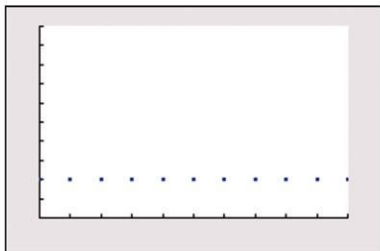
De toename is $570 - 390 = 180$ met $l(2) = 390$

$$l(0) = 390 - 2 \times 180 = 30$$

Een directe formule voor $n \geq 2$ is $l(n) = 30 + 180n$

E8 a Invoer: $u(n+1) = (8 - u(n)) : 3$ met $u(1) = 2$

Venster: $0 \leq n \leq 10$; $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$



b $v(1) = 2$ en $v(2) = \frac{8-2}{3} = 2$

De nieuwe waarde is steeds gelijk aan de oude waarde.

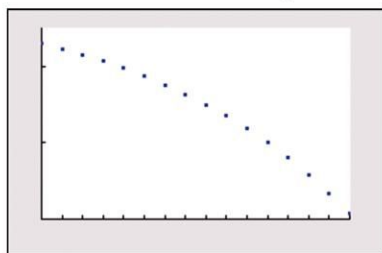
Het is dus een constante rij met waarde 2.

E9 a De populatie neemt jaarlijks met 30 walvissen af, in het begin zijn er 230 en na elk jaar is de populatie 1,1 keer groter door de geboorte van de jongen.

b Invoer: $u(n+1) = 1,1 \cdot u(n) - 30$ met $u(0) = 230$

Venster: $0 \leq n \leq 15$, start $n = 0$ en stapgrootte 1

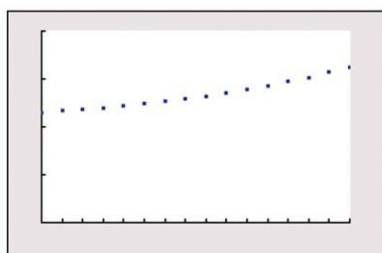
$0 \leq x \leq 15, 0 \leq y \leq 250$



c Invoer: $u(n+1) = 1,1 \cdot u(n) - 20$ met $u(0) = 230$.

Venster: $0 \leq n \leq 15$, start $n = 0$ en stapgrootte 1

$0 \leq x \leq 15, 0 \leq y \leq 400$



d Het aantal walvissen neemt toe met de factor 1,1.

Als er 230 walvissen zijn is dat dus een toename met $0,1 \times 230 = 23$.

Er mogen 23 walvissen gevangen worden om de walvispopulatie stabiel te laten blijven.

15 Normale verdelingen

Voorkennis

V1 a

u	1	2	3	4	5	6
$P(X=u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine krijg je $E(X) = 3\frac{1}{2}$ en $\sigma(X) \approx 1,71$.

b

u	11	12	13	14	15	16
$P(Y=u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine krijg je $E(Y) = 13\frac{1}{2}$ en $\sigma(Y) \approx 1,71$.

c

u	10	20	30	40	50	60
$P(Z=u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine krijg je $E(Z) = 35$ en $\sigma(Z) \approx 17,1$.

- d** Je ziet bij de verwachtingswaarden dat $E(Y) = E(X) + 10$ en dat $E(Z) = 10 \cdot E(X)$.
Je ziet bij de standaardafwijking dat $\sigma(X) = \sigma(Y)$ en $\sigma(X) = 10 \cdot \sigma(Z)$.

V2

$$E(C) = E(0,56 \cdot F - 17,78) = 0,56 \cdot E(F) - 17,78$$

$$= 0,56 \cdot 77 - 17,78 = 25,34$$

$$\sigma(C) = \sigma(0,56 \cdot F - 17,78) = 0,56 \cdot \sigma(F)$$

$$= 0,56 \cdot 4,2 = 2,352$$

V3 a

u	1	2	3	4
$P(X=u)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Met de rekenmachine krijg je $E(X) = 2,8$ en $\sigma(X) \approx 1,17$.

b

u	1	2	3
$P(Y=u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Met de rekenmachine krijg je $E(Y) = 2\frac{1}{3}$ en $\sigma(Y) \approx 0,75$.

c

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$= 2,8 + 2\frac{1}{3} = 5\frac{2}{15}$$

$$\sigma(Z) = \sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$$

$$= \sqrt{1,17^2 + 0,75^2} \approx 1,4$$

V4 a

$$E(S) = n \cdot E(X) = 10 \cdot 2,8 = 28$$

$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 1,17 \approx 3,70$$

b

$$E(\bar{X}) = E(X) = 2,8$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \frac{1,17}{\sqrt{10}} \approx 0,37$$

V5 a

$$E(\bar{Z}) = E(Z) = 12 \text{ gram}$$

$$\sigma(\bar{Z}) = \frac{\sigma(Z)}{\sqrt{n}} = \frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,03 \text{ gram}$$

b Stochast S is de som van het gewicht van 100 koekjes.

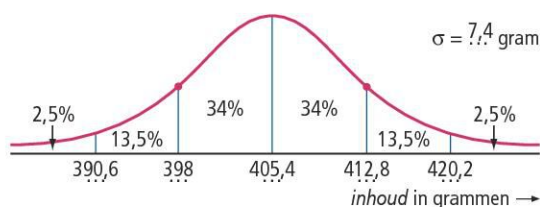
$$E(S) = n \cdot E(Z) = 100 \cdot 12 = 1200 \text{ gram}$$

$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(Z) = \sqrt{100} \cdot 0,3 = 3 \text{ gram}$$

$$E(D + S) = E(D) + E(S) = 46 + 1200 = 1246 \text{ gram}$$

$$\sigma(D + S) = \sqrt{\sigma(D)^2 + \sigma(S)^2} = \sqrt{1,2^2 + 3^2} \approx 3,23 \text{ gram}$$

V6 a

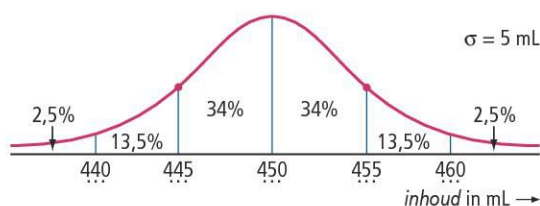


- b $P(X < 398) = 0,025 + 0,135 = 0,16$
 c $P(398 \leq X \leq 420,2) = 0,34 + 0,34 + 0,135 = 0,815$
 d Meer dan 420,2 gram kattenvoer.

15.1 Percentage berekenen

intro 1 kg zit precies midden tussen 0,98 kg en 1,02 kg. In de grafiek zie je dat de oppervlakte van het deel galiameloenen met een gewicht tussen 1 kg en 1,02 kg groter is dan het deel met een gewicht tussen 0,98 kg en 1 kg. Tussen 0,98 kg en 1,02 kg zitten 13,5% van de galiameloenen. Een schatting is dat ongeveer een derde van deze meloenen een gewicht heeft tussen 0,98 kg en 1 kg. Dit is ongeveer 4,5%. In totaal hebben $2,5\% + 4,5\% = 7\%$ een gewicht van minder dan 1 kg, dus heeft ongeveer 93% een gewicht van meer dan 1 kg.

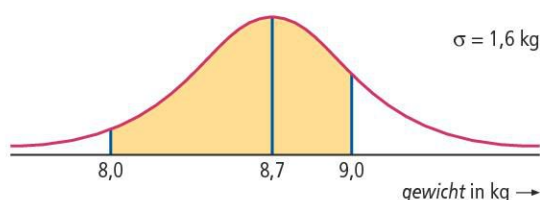
1 a



- b 2,5% van de flesjes bevat meer dan 460 mL.
 c De kans is $0,025 + 0,135 = 0,16$.
 d In de schets zie je dat dat de oppervlakte van het deel van de flesjes tussen 445 mL en 447,5 mL kleiner is dan van het deel tussen 447,5 mL en 450 mL. Minder dan 17% van de flesjes zal tussen de 445 mL en 447,5 mL afwasmiddel bevatten.

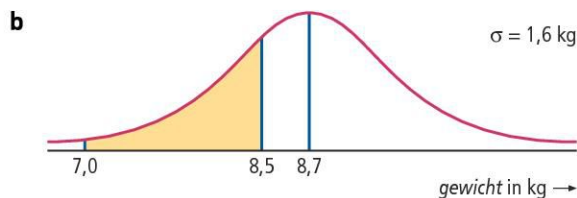
- 2 a Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 445, bovengrens = 447,5, $\mu = 450$, $\sigma = 5$
 Dit geeft 0,14988... dus de kans is afgerond 0,1499.
 b Ja, omdat 14,99% minder is dan 17%.

3 a



Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 8,0, bovengrens = 9,0, $\mu = 8,7$, $\sigma = 1,6$
 Dit geeft 0,24349...
 Dit is 24,35% van de zakken tuinaarde.

15 Normale verdelingen



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 7,0, bovengrens = 8,5, $\mu = 8,7$, $\sigma = 1,6$

Dit geeft 0,30625...

De kans is 0,3063.

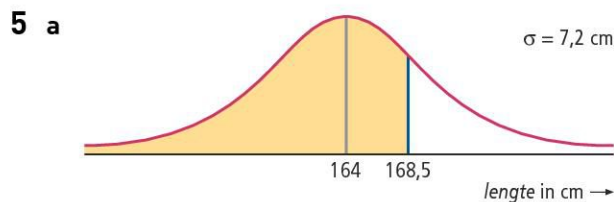
4 a Je weet het gewicht van de pot niet waarin de minste pindakaas zit.

b Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 350, $\mu = 352$, $\sigma = 0,9$

Dit geeft 0,01313...

Dit is 1,31% van de potten.

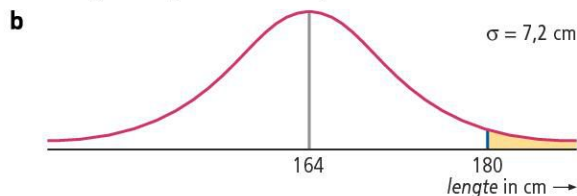


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 168,5, $\mu = 164$, $\sigma = 7,2$

Dit geeft 0,73401...

De gevraagde kans is 0,7340.

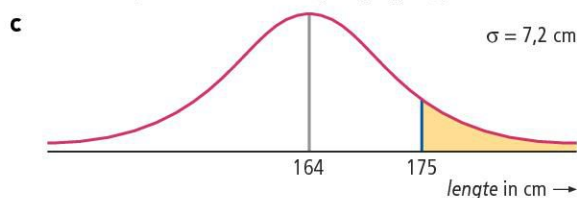


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 180, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 164$, $\sigma = 7,2$

Dit geeft 0,01313...

Dit is 1,31% van de 14-jarige jongens.



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 175, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 164$, $\sigma = 7,2$

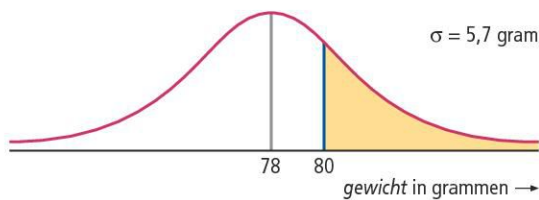
Dit geeft 0,06328...

De kans dat één jongen langer is dan 175 cm, is 0,06328...

De kans dat twee willekeurige jongens langer zijn dan 175 cm is $0,06328...^2 \approx 0,0040$.

d De kans dat één jongen langer is dan 175 cm, is 0,06328...

Je verwacht dat $0,06328... \times 292 \approx 18$ jongens langer zijn dan 175 cm.

6 a

Optie: normaal cumulatief

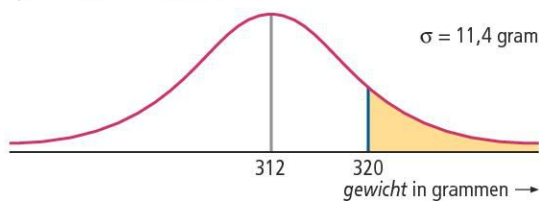
ondergrens = 80, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 78$, $\sigma = 5,7$

Dit geeft 0,36284...

De gevraagde kans is 0,3628.

- b** Je moet de $\sqrt{n}$ -wet gebruiken omdat je de som van een aantal onafhankelijke stochasten (de gewichten van de pannenkoeken) neemt.

- c** Het gemiddelde wordt $4 \times 78 = 312$ gram en de standaardafwijking wordt $\sqrt{4} \times 5,7 = 11,4$ gram.



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 320, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 312$, $\sigma = 11,4$

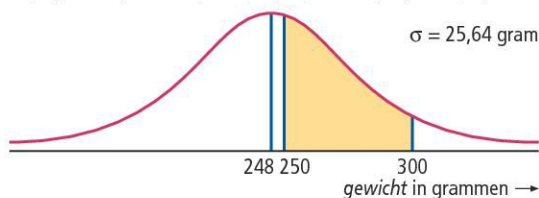
Dit geeft 0,24141...

De gevraagde kans is 0,2414.

- d** Stochast X is het gewicht van één pannenkoek in grammen.
 Stochast Y is het gewicht van een bord in grammen.
 Stochast S is het gewicht van één pannenkoek en een bord samen in grammen.

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 78 + 170 = 248 \text{ gram}$$

$$\sigma(S) = \sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} = \sqrt{5,7^2 + 25^2} \approx 25,64 \text{ gram}$$



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 250, bovengrens = 300, $\mu = 248$, $\sigma = 25,64$

Dit geeft 0,44763...

De gevraagde kans is 0,4476.

05 a Optie: normaal cumulatiefondergrens = -10^{99} , bovengrens = 168, $\mu = 171$, $\sigma = 6,3$

Dit geeft 0,31696...

De gevraagde kans is 0,3170.

- b** Je vult dan als rechtergrens het getal 10^{99} in.

Optie: normaal cumulatief

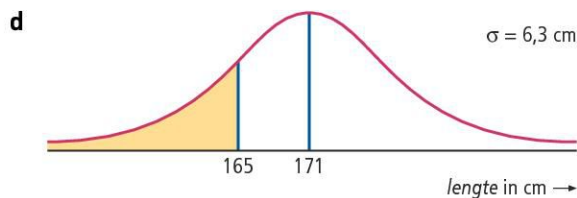
ondergrens = 180, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 171$, $\sigma = 6,3$

Dit geeft 0,07656...

De gevraagde kans is 0,0766.

- c** De kans dat twee willekeurige meisjes langer zijn dan 180 cm is $0,07656... \times 0,07656... \approx 0,0059$.

15 Normale verdelingen



Optie: normaal cumulatief

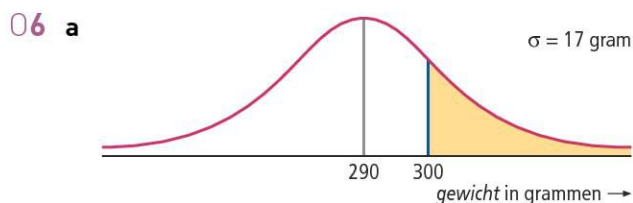
ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 165, $\mu = 171$, $\sigma = 6,3$

Dit geeft 0,17045...

De kans dat een meisje kleiner is dan 165 cm is 0,17045...

De kans dat twee willekeurige meisjes kleiner zijn dan 165 cm is $0,17045...^2 \approx 0,0291$.

e Je verwacht dat $0,07656... \times 198 \approx 15$ meisjes langer zijn dan 180 cm.



Optie: normaal cumulatief

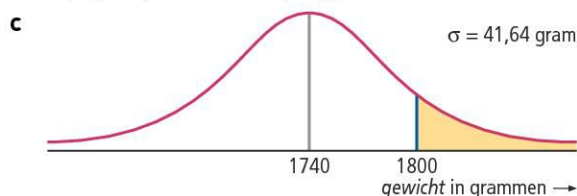
ondergrens = 300, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 290$, $\sigma = 17$

Dit geeft 0,27818...

De gevraagde kans is 0,2782.

b $E(T) = 6 \times 290 = 1740 \text{ gram}$

$\sigma(T) = \sqrt{6} \times 17 \approx 41,64 \text{ gram}$



Optie: normaal cumulatief

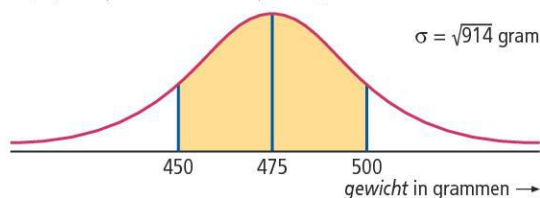
ondergrens = 1800, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 1740$, $\sigma = 41,64$

Dit geeft 0,07480...

De gevraagde kans is 0,0748.

d $E(S) = 290 + 185 = 475 \text{ gram}$

$\sigma(S) = \sqrt{17^2 + 25^2} = \sqrt{914} \text{ gram}$



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 450, bovengrens = 500, $\mu = 475$, $\sigma = \sqrt{914}$

Dit geeft 0,59175...

De gevraagde kans is 0,5918.

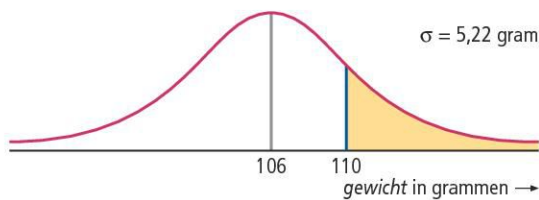
U1 a Stochast N is het nettogewicht van een pakje puddingpoeder in grammen.

Stochast T is het tarragewicht in grammen.

Stochast B is het brutogewicht van een pakje puddingpoeder in grammen.

$E(B) = E(N + T) = E(N) + E(T) = 100 + 6 = 106 \text{ gram}$

$\sigma(B) = \sigma(N + T) = \sqrt{\sigma(N)^2 + \sigma(T)^2} = \sqrt{5^2 + 1,5^2} \approx 5,22 \text{ gram}$



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 110, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 106$, $\sigma = 5,22$

Dit geeft 0,22175...

De gevraagde kans is 0,2218.

- b** Stochast S is het gewicht van 200 pakjes puddingpoeder in grammen.

$$E(S) = n \cdot E(B) = 200 \cdot 106 = 21\,200 \text{ gram}$$

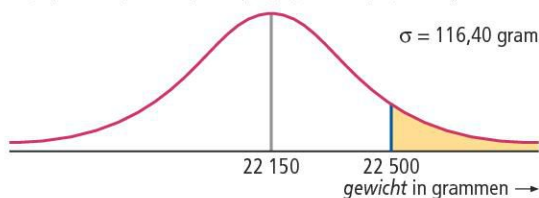
$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(B) = \sqrt{200} \cdot 5,22 = 73,821... \text{ gram}$$

Stochast D is het gewicht van een lege doos in grammen.

Stochast V is het gewicht van een volle doos in grammen.

$$E(V) = E(S + D) = E(S) + E(D) = 21\,200 + 950 = 22\,150 \text{ gram}$$

$$\sigma(V) = \sigma(S + D) = \sqrt{\sigma(S)^2 + \sigma(D)^2} = \sqrt{73,821...^2 + 90^2} \approx 116,40 \text{ gram}$$



Optie: normaal cumulatief

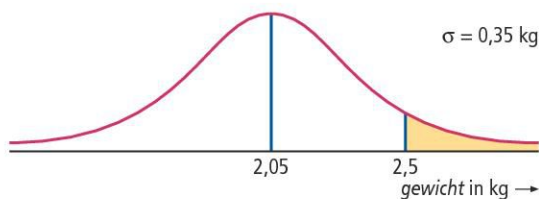
ondergrens = 22 500, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 22\,150$, $\sigma = 116,40$

Dit geeft 0,00131...

De genoemde kans is 0,0013.

15.2 Grenswaarden berekenen

intro



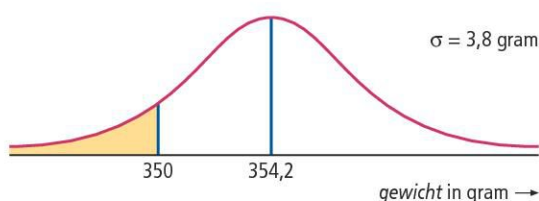
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 2,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 2,05$, $\sigma = 0,35$

Dit geeft 0,09927...

9,93% van dit ras konijnen heeft een gewicht van minimaal 2,5 kg, dus het is zeer waarschijnlijk dat Flip een gewicht van meer dan 2,5 kg heeft.

7 a



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 350, $\mu = 354,2$, $\sigma = 3,8$

Dit geeft 0,13452...

Deze kans is inderdaad ongeveer gelijk aan 0,1345.

15 Normale verdelingen

b Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 351 tot en met 354, $\mu = 354,2$, $\sigma = 3,8$

g in grammen	350	351	352	353	354
$P(G \leq g)$	0,1345	0,1999	0,2813	0,3761	0,4790

c De kans dat er maximaal 351 gram honing in een pot zit is 0,1999.

De kans dat er maximaal 352 gram honing in een pot zit, is 0,2813.

Er zit dan maximaal tussen 351 gram en 352 gram honing in de 25% lichtste potten.

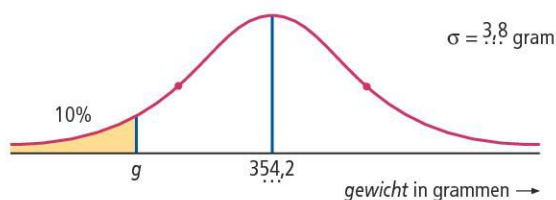
d Gebruik dezelfde instellingen als in opdracht b, alleen neem nu bovengrenzen vanaf 351,5 gram.

g in grammen	351,5	351,6	351,7	351,8
$P(G \leq g)$	0,2387	0,2469	0,2553	0,2638

Bij 351,6 gram zit de kans het dichtst bij 0,25.

Er zit dus maximaal 351,6 gram in de 25% lichtste potten.

8 a



b Links van het gemiddelde zit 50% van de potten.

De 10% lichtste potten zitten ook links van het gemiddelde.

c $\mu - \sigma = 354,2 - 3,8 = 350,4$ gram

$$\mu - 2 \cdot \sigma = 354,2 - 2 \cdot 3,8 = 346,6 \text{ gram}$$

d Onder 346,6 gram ligt 2,5% van de potten.

Onder 350,4 gram ligt 16% van de potten.

10% ligt hiertussen, dus g ligt ergens tussen 346,6 gram en 350,4 gram.

e Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 354,2; 3,8)$

$$y_2 = 0,10$$

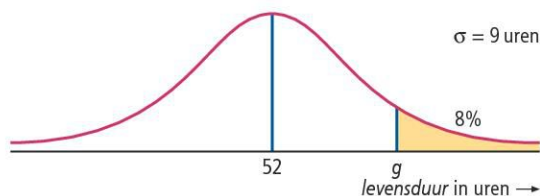
Venster: $346,6 \leq x \leq 350,4$, $0 \leq y \leq 0,20$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (349,33; 0,1).

De 10% lichtste potten bevatten maximaal 349,3 gram honing.

9 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 10^{99}, 52, 9)$

$$y_2 = 0,08$$

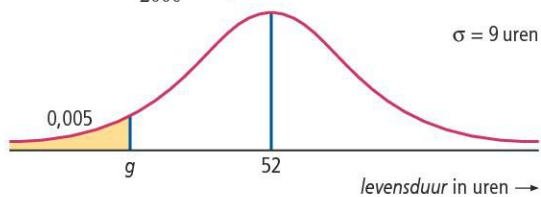
Venster: $52 \leq x \leq 70$, $0 \leq y \leq 0,16$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (64,65; 0,08).

De levensduur van de batterij is minimaal 64,7 uur.

- b De kans is $\frac{10}{2000} = 0,005$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 52, 9)$

$y_2 = 0,005$

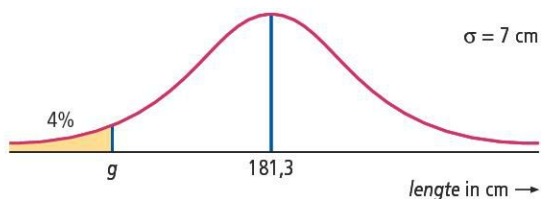
Venster: $25 \leq x \leq 52, 0 \leq y \leq 0,01$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (28,82; 0,005).

De levensduur van de batterij is maximaal 28,8 uur.

10 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x; 181,3; 7)$

$y_2 = 0,04$

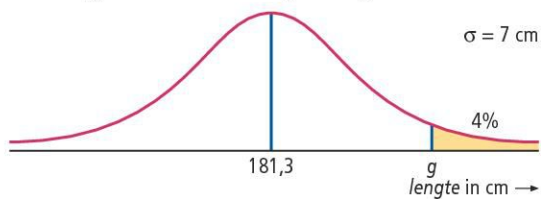
Venster: $160 \leq x \leq 181,3, 0 \leq y \leq 0,08$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (169,05; 0,08).

De lengte van de dienstplichtigen was maximaal 169,0 cm.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}, 181,3; 7)$

$y_2 = 0,04$

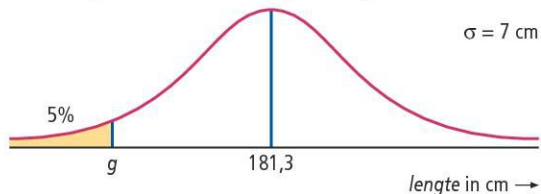
Venster: $181,3 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 0,08$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (193,55; 0,04).

De lengte van de dienstplichtigen was minimaal 193,6 cm.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x; 181,3; 7)$

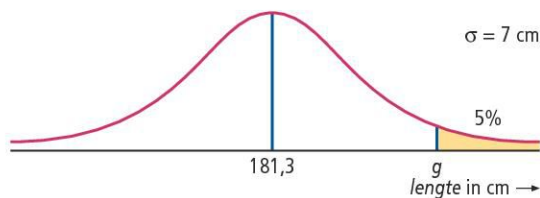
$y_2 = 0,05$

Venster: $160 \leq x \leq 181,3, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (169,79; 0,05).

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 181,3; 7)$

$y_2 = 0,05$

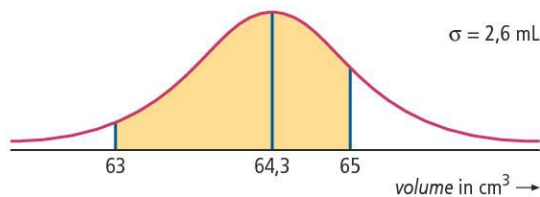
Venster: $181,3 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn $(192,81; 0,05)$.

De afgekeurde dienstplichtigen hadden een lengte kleiner dan 169,8 cm of groter dan 192,8 cm.

11 a



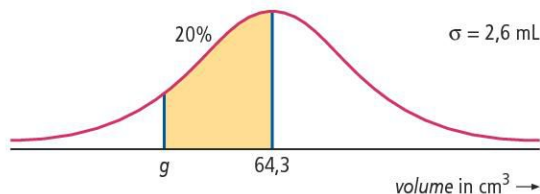
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 63, bovengrens = 65, $\mu = 64,3$, $\sigma = 2,6$

Dit geeft 0,29758...

29,8% van de leerlingen vinden een volume tussen 63 cm^3 en 65 cm^3 .

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 64,3; 64,3; 2,6)$

$y_2 = 0,20$

Venster: $60 \leq x \leq 64,3, 0 \leq y \leq 0,40$

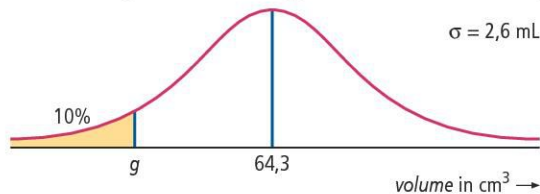
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn $(62,94; 0,2)$.

De ondergrens van het gemeten volume is 62,9 mL.

De bovengrens van het gemeten volume is $64,3 + (64,3 - 62,9) = 65,7$ mL.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 64,3; 2,6)$

$y_2 = 0,10$

Venster: $55 \leq x \leq 64,3, 0 \leq y \leq 0,20$

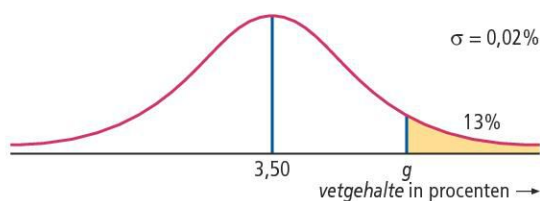
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn $(60,97; 0,1)$.

De ondergrens van deze volumes is 61,0 mL.

De bovengrens van de 10% grootste volumes is $64,3 + (64,3 - 61,0) = 67,6$ mL.

Deze leerlingen hebben een volume van minder dan 61,0 mL of meer dan 67,6 mL gemeten.

12 a

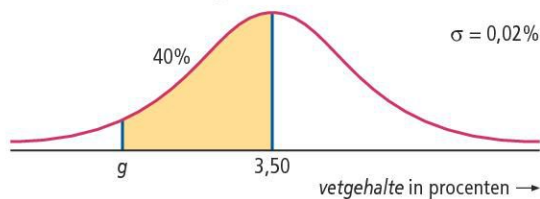
Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 3,50; 0,02)$
 $y_2 = 0,13$

Venster: $3,50 \leq x \leq 3,60$, $0 \leq y \leq 0,26$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3,52; 0,13).

Het minimale vetgehalte is 3,52%.

b

Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 3,50; 3,50; 0,02)$
 $y_2 = 0,40$

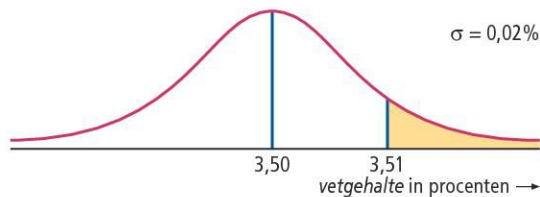
Venster: $3,40 \leq x \leq 3,50$, $0 \leq y \leq 0,60$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3,47; 0,4).

De ondergrens van het gemeten volume is 3,47%.

De bovengrens is $3,50 + (3,50 - 3,47) = 3,53\%$.

c

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 3,51, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 3,50$, $\sigma = 0,02$

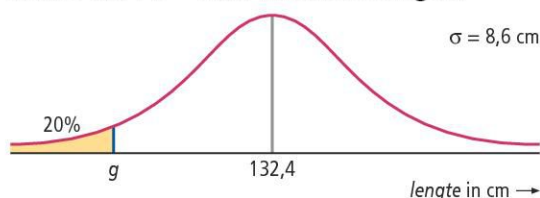
Dit geeft 0,30853...

De kans dat een pak een vetgehalte van meer dan 3,51% heeft, is 0,30853...

De kans dat alle drie de pakken een vetgehalte hebben van meer dan 3,51% is $0,30853...^3 \approx 0,0294$.

13

Als er vijf klassen zijn waarin evenveel leerlingen komen, dan zit in elke klasse $100 : 5 = 20\%$ van de leerlingen.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 132,4; 8,6)$
 $y_2 = 0,20$

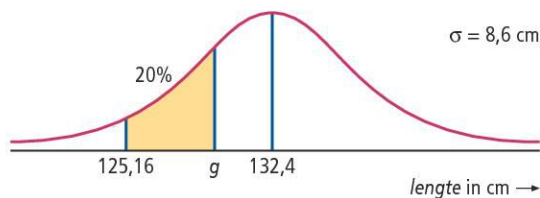
Venster: $120 \leq x \leq 132,4$, $0 \leq y \leq 0,40$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (125,16; 0,2).

De eerste klasse eindigt bij 125,16 cm.

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(125,16; x; 132,4; 8,6)$

$$y_2 = 0,20$$

Venster: $125,16 \leq x \leq 132,4$, $0 \leq y \leq 0,40$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (130,22; 0,2).

De tweede klasse eindigt bij 130,22 cm.

De derde klasse is de middelste 20%, de ondergrens daarvan ligt net zo ver van het gemiddelde als de bovengrens.

De derde klasse eindigt bij $132,4 + (132,4 - 130,22) = 134,58$ cm.

De klassenbreedte van de vierde klasse is gelijk aan de klassenbreedte van de tweede klasse.

De vierde klasse eindigt bij $134,58 + (130,22 - 125,16) = 139,64$ cm.

Samengevat:

De eerste klasse bevat kinderen die maximaal 125,2 cm lang zijn.

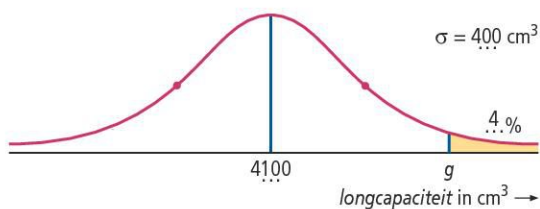
De tweede klasse bevat kinderen van 125,2 cm tot 130,2 cm lang.

De derde klasse bevat kinderen van 130,2 cm tot 134,6 cm lang.

De vierde klasse bevat kinderen van 134,6 cm lang tot 139,6 cm lang.

De vijfde klasse bevat kinderen die minimaal 139,6 cm lang zijn.

09 a



b Rechts van 4100 cm^3 zijn de longcapaciteiten die groter zijn dan het gemiddelde. De 4% grootste longcapaciteiten horen hier ook bij.

c $\mu + \sigma = 4100 + 400 = 4500 \text{ cm}^3$

$$\mu + 2 \cdot \sigma = 4100 + 2 \times 400 = 4900 \text{ cm}^3$$

d 16% van de waarnemingen is groter dan $\mu + \sigma = 4500 \text{ cm}^3$.

2,5% van de waarnemingen is groter dan $\mu + 2 \cdot \sigma = 4900 \text{ cm}^3$.

4% van de waarnemingen moeten groter dan g zijn. Hierdoor moet g ergens tussen 4500 en 4900 liggen.

e Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 10^{99}, 4100, 400)$

$$y_2 = 0,04$$

Venster: $4100 \leq x \leq 4900$, $0 \leq y \leq 0,08$

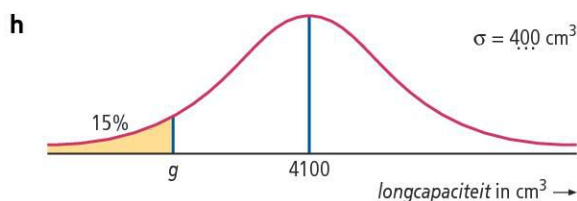
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (4800,27; 0,04).

De linkergrens is 4800,3.

f Deze studenten hebben een longcapaciteit van minimaal $4800,3 \text{ cm}^3$.

g $\frac{240}{1600} \times 100\% = 15\%$



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 4100, 400)$

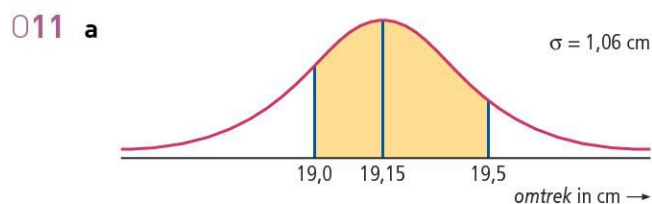
$$y_2 = 0,15$$

Venster: $3300 \leq x \leq 4100, 0 \leq y \leq 0,30$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3685,43; 0,15).

De maximale longcapaciteit is 3685,4 cm^3 .



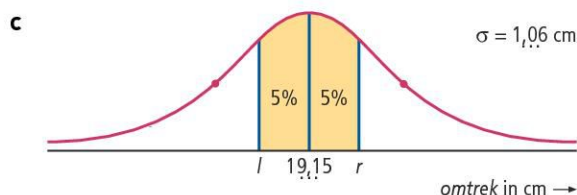
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 19,0; bovengrens = 19,5; $\mu = 19,15$; $\sigma = 1,06$

Dit geeft 0,18563...

Naar verwachting zal 18,6% van de leerlingen een omtrek tussen 19,0 cm en 19,5 cm vinden.

- b** De middelste 10% betekent dat 5% links van het gemiddelde zal zitten en 5% rechts van het gemiddelde.



- d** Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 19,15; 19,15; 1,06)$

$$y_2 = 0,05$$

Venster: $18 \leq x \leq 19,15, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (19,02; 0,05).

De waarde van de linkergrens l is 19,02.

- e** Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(19,15; x; 19,15; 1,06)$

$$y_2 = 0,05$$

Venster: $19,15 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

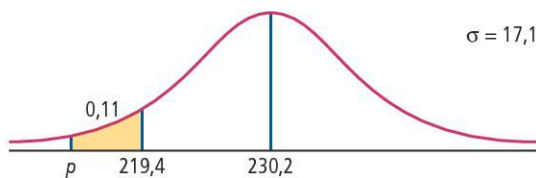
De coördinaten van het snijpunt zijn (19,28; 0,05).

De waarde van de rechtergrens r is 19,28.

- f** De gemeten omtrek ligt tussen 19,02 cm en 19,28 cm.

15 Normale verdelingen

U2 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 219,4; 230,2; 17,1)$

$y_2 = 0,11$

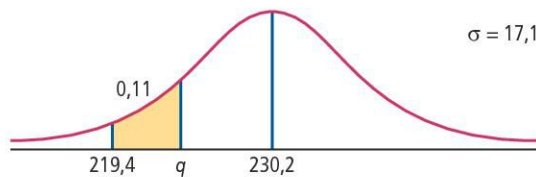
Venster: $190 \leq x \leq 219,4, 0 \leq y \leq 0,22$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (212,76; 0,11).

Dit geeft $p \approx 212,8$.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(219,4; x; 230,2; 17,1)$

$y_2 = 0,11$

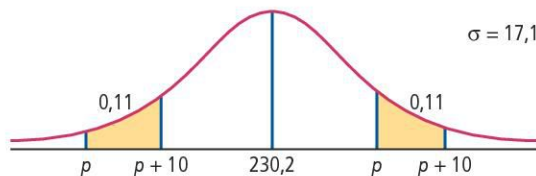
Venster: $219,4 \leq x \leq 230,2, 0 \leq y \leq 0,22$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (224,70; 0,11).

Dit geeft $q \approx 224,7$.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; x + 10; 230,2; 17,1)$

$y_2 = 0,11$

Venster: $200 \leq x \leq 260, 0 \leq y \leq 0,22$

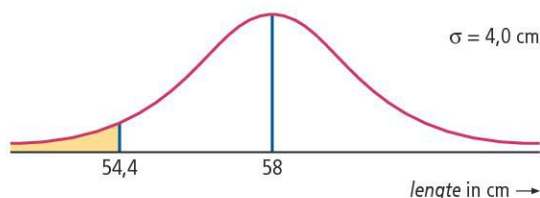
Optie: snijpunt (tweemaal)

De coördinaten van de snijpunten zijn (204,13; 0,11) en (246,27; 0,11).

Dit geeft $p \approx 204,1$ of $p \approx 246,3$.

15.3 Gemiddelde en standaardafwijking berekenen

intro



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 54,4, $\mu = 58$, $\sigma = 4,0$

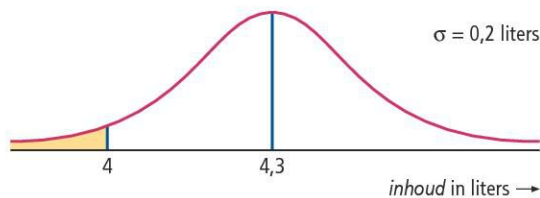
Dit geeft 0,18406...

Bij een gemiddelde van 58 cm is deze kans ongeveer 18,41%.

Als de gemiddelde lengte groter dan 58 cm is, dan ligt het deel onder de 54,4 cm verder van het gemiddelde af en de bedoelde kans zal dan kleiner dan 18,41% worden. Als de gemiddelde lengte kleiner dan 58 cm is, dan ligt het deel onder de 54,4 cm dicht bij het gemiddelde en de bedoelde kans zal dan groter dan 18,41% worden.

De gemiddelde lengte zal meer dan 58 cm zijn en Joop heeft geen gelijk.

14 a



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 4, $\mu = 4,3$, $\sigma = 0,2$

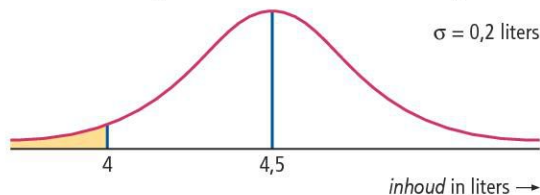
Dit geeft 0,06680...

Naar verwachting wordt 6,7% van de flessen opnieuw gevuld.

- b** Als het percentage slechts 1% wordt, dan moet de grenswaarde van 4 liter verder van het gemiddelde afliggen.

Het nieuwe gemiddelde wordt dan hoger dan 4,3 liter.

c



Optie: normaal cumulatief

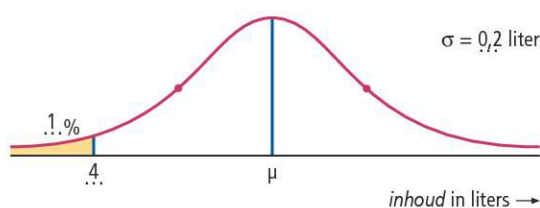
ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 4, $\mu = 4,5$, $\sigma = 0,2$

Dit geeft 0,00620...

Naar verwachting wordt 0,62% van de flessen opnieuw gevuld.

Dit is minder dan 1%, dus er wordt aan de eis voldaan.

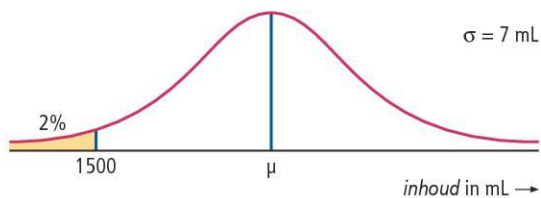
15 a



- b** Als het gemiddelde 4,4 liter is, dan is $\mu - 2 \cdot \sigma = 4$.
2,5% van de flessen zou dan een inhoud van minder dan 4 liter hebben.
Het gemiddelde moet verder van 4 liter af liggen, dus meer zijn dan 4,4 liter.
- c** Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 4; x; 0,2)$
 $y_2 = 0,01$
Venster: $4 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 0,02$
Optie: snijpunt
De coördinaten van het snijpunt zijn (4,465; 0,01).
Dit geeft $\mu \approx 4,47$.
- d** De machine wordt op een gemiddelde van 4,47 liter ingesteld.

15 Normale verdelingen

16 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 1500, x, 7)$

$y_2 = 0,02$

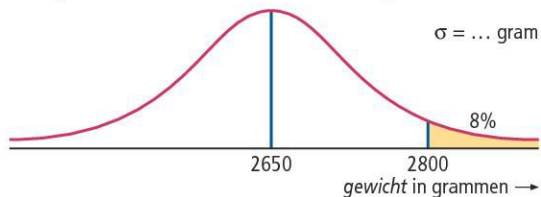
Venster: $1500 \leq x \leq 1520, 0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1514,38; 0,02).

De gemiddelde inhoud van een pak melk is ongeveer 1514 mL.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(2800, 10^{99}, 2650, x)$

$y_2 = 0,08$

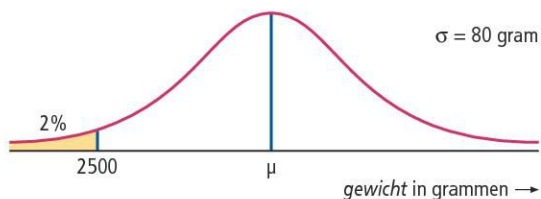
Venster: $0 \leq x \leq 150, 0 \leq y \leq 0,16$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (106,76; 0,08).

De standaardafwijking van het gewicht is ongeveer 106,8 gram.

17 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 2500, x, 80)$

$y_2 = 0,02$

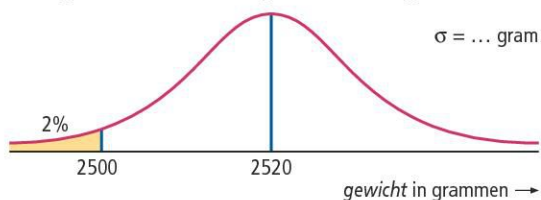
Venster: $2500 \leq x \leq 3000, 0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (2664,3; 0,02).

Het gemiddelde is ongeveer 2664 gram.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 2500, 2520, x)$

$y_2 = 0,02$

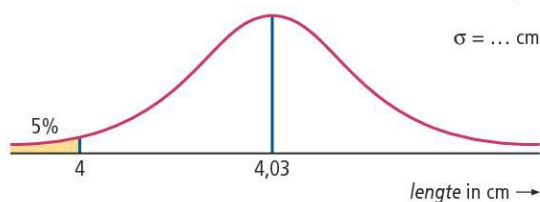
Venster: $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (9,73; 0,02).

De standaardafwijking is ongeveer 9,7 gram.

- 18 a** De kans dat een schroef korter is dan 4 cm, is $\frac{50}{1000} = 0,05$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 4; 4,03; x)$

$$y_2 = 0,05$$

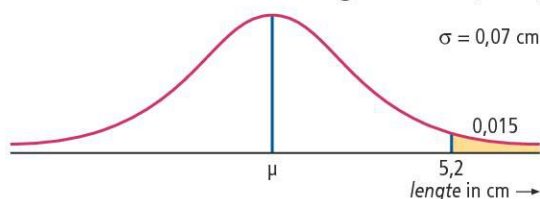
Venster: $0 \leq x \leq 0,10$, $0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (0,018; 0,05).

De standaardafwijking is 0,02 cm.

- b** De kans dat een schroef langer is dan 5,2 cm, is $\frac{12}{800} = 0,015$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(5,2; 10^{99}; x; 0,07)$

$$y_2 = 0,015$$

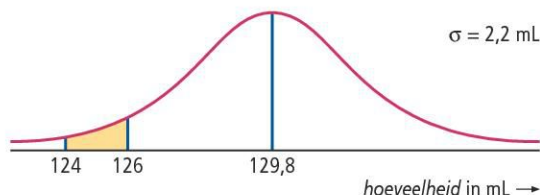
Venster: $4,5 \leq x \leq 5,2$, $0 \leq y \leq 0,03$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (5,048; 0,015).

Het gemiddelde is 5,05 cm.

19 a



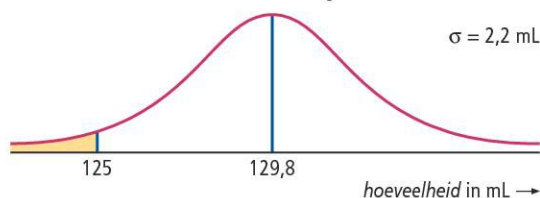
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 124, bovengrens = 126, $\mu = 129,8$, $\sigma = 2,2$

Dit geeft 0,03786...

Naar verwachting zullen er $0,03786... \times 2,94$ miljoen $\approx 111\,000$ bekertjes tussen 124 mL en 126 mL ijs bevatten.

b



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 125, $\mu = 129,8$, $\sigma = 2,2$

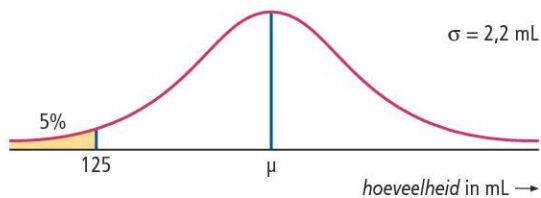
Dit geeft 0,01456...

Het klopt dat hooguit 1,5% van de bekertjes minder dan 125 mL bevat.

Pinguïn voldoet aan de eis van de overheid.

15 Normale verdelingen

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 125; x; 2,2)$

$$y_2 = 0,05$$

Venster: $125 \leq x \leq 135, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (128,62; 0,05).

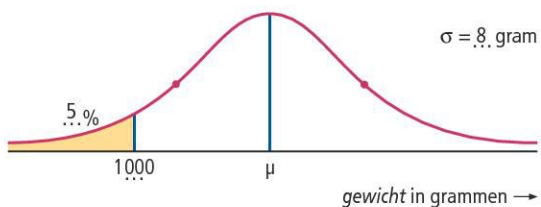
Het gemiddelde is 128,62 mL.

Het gemiddelde kan dus $129,8 - 128,62 = 1,18$ mL minder worden.

Er kan dan $2,94 \text{ miljoen} \times 1,18 \text{ mL} = 3469\,200 \text{ mL} = 3469,2$ liter ijs bespaard worden.

Dit is een besparing van $3469,2 \times 0,73 \approx \text{€}2.530,-$.

017 a

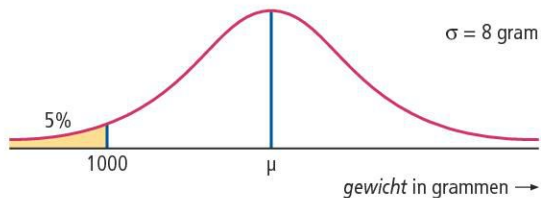


- b Als het gemiddelde 1008 gram is, dan is $\mu - \sigma = 1000$ en daaronder zit meer dan 5%, namelijk 16%.

Als het gemiddelde 1016 gram is, dan is $\mu - 2 \cdot \sigma = 1000$ en daaronder zit minder dan 5%, namelijk 2,5%.

Het gemiddelde moet dus tussen 1008 gram en 1016 gram zitten.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 1000, x, 8)$

$$y_2 = 0,05$$

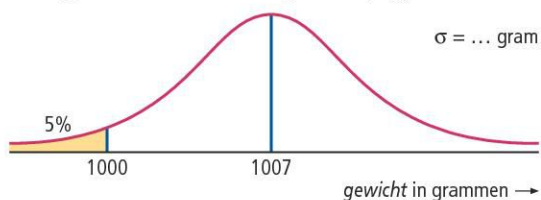
Venster: $1000 \leq x \leq 1050, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1013,16; 0,05).

Het gemiddelde moet op 1013,2 gram worden ingesteld.

d



- e Als de standaardafwijking 8 gram is, dan zit 16% onder $\mu - \sigma = 999$ gram. Dit is veel meer dan er onder 1000 gram zit. De standaardafwijking moet daarom kleiner dan 8 gram zijn.

- f Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 1000, 1007, x)$

$$y_2 = 0,05$$

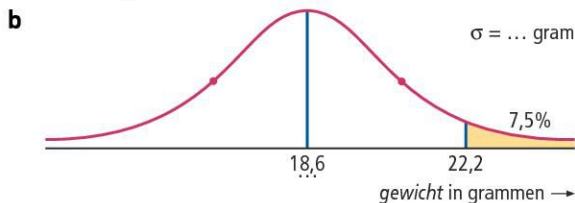
Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (4,26; 0,05).

De standaardafwijking is ongeveer 4,3 gram.

018 a Dit is $\frac{6}{80} \times 100\% = 7,5\%$.



c Als de standaardafwijking 3,6 gram is, dan is $\mu + \sigma = 22,2$. Hierboven zit 16% terwijl 7,5% boven 22,2 gram zit. Bij een grotere standaardafwijking zal de waarde van $\mu + \sigma > 22,2$ zijn waardoor er bij een nog grotere gewicht meer dan 16% zit. De standaardafwijking moet dus kleiner zijn dan 3,6 gram.

d Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(22,2; 10^{99}; 18,6; x)$

$$y_2 = 0,075$$

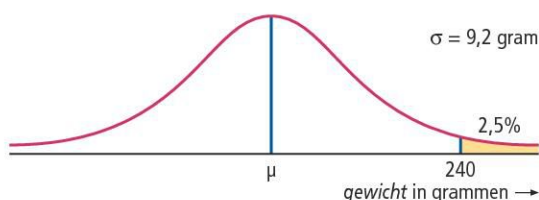
Venster: $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 0,15$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (2,50; 0,075).

De standaardafwijking is ongeveer 2,5 gram.

e Van deze peren is $\frac{3}{120} \times 100\% = 2,5\%$ zwaarder dan 240 gram.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(240; 10^{99}; x; 9,2)$

$$y_2 = 0,025$$

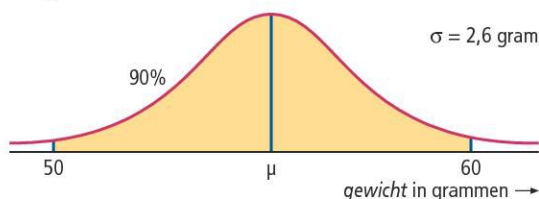
Venster: $200 \leq x \leq 240, 0 \leq y \leq 0,05$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (221,97; 0,025).

Het gemiddelde gewicht is 222 gram.

U3 $\frac{450}{500} \times 100\% = 90\%$ van de tennisballen heeft een gewicht tussen 50 gram en 60 gram.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(50; 60; x; 2,6)$

$$y_2 = 0,90$$

Venster: $50 \leq x \leq 60, 0,8 \leq y \leq 1,0$

Optie: snijpunt (tweemaal)

De coördinaten van de snijpunten zijn (53,42; 0,90) en (56,58; 0,90).

Het gemiddelde gewicht van de tennisballen kan 53,4 gram of 56,6 gram zijn.

15 Normale verdelingen

15.4 Normale verdeling met discrete waarden

intro Zij kan het percentage berekenen door het aantal doosjes met minder dan 20 spijkers bij elkaar op te tellen en dat te delen door het totaal aantal doosjes. Het staafdiagram lijkt op een klokkromme dat hoort bij een normale verdeling. Je kunt met een normale verdeling het percentage benaderen, maar moet dan wel afspraken maken over het afronden op hele spijkers.

- 20**
- a** Het aantal vruchten is altijd een geheel getal, dus de stochast X is discreet.
 - b** Het staafdiagram lijkt op een klokkromme. De verdeling van X kan daarom worden benaderd met een normale verdeling.
 - c** Alles in het interval $[32,5; 33,5)$ is afgerond op helen 33.
 - d** Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 32,5, bovengrens = 33,5, $\mu = 35,2$, $\sigma = 4,1$
 Dit geeft 0,08410...
 De kans $P(X = 33) \approx 0,0841$.
 - e** Je ziet dat de oppervlakte van de rode staaf niet precies gelijk is aan de oppervlakte van het deel onder de klokkromme tussen 32,5 en 33,5.
- 21**
- a** Alle getallen kleiner dan 37,5.
 - b** De kans op alle discrete getallen kleiner dan 38 is ongeveer gelijk aan de kans op alle continue getallen die afgerond 37 of kleiner zijn. Deze laatste getallen zijn allemaal kleiner dan 37,5.
 - c** Dit zijn alle getallen die kleiner of gelijk aan 34,5 zijn.
 - d** De kans op alle discrete getallen kleiner of gelijk aan 34 is ongeveer gelijk aan de kans op alle continue getallen die afgerond op helen kleiner of gelijk zijn aan 34. Deze laatste getallen zijn allemaal kleiner dan 34,5.
- 22**
- a** Het aantal dropjes X in een zak kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(62,1; 4,9)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(X \geq 65)$ en benader je met $P(Y \geq 64,5)$
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 64,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,31213...
 De kans $P(X \geq 65) \approx 0,3121$.
 - b** De gevraagde kans is $P(X < 60)$ en benader je met $P(Y < 59,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 59,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,29784...
 De kans $P(X < 60) \approx 0,2978$.
 - c** De gevraagde kans is $P(X \leq 66)$ en benader je met $P(Y < 66,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 66,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,81539...
 De kans $P(X \leq 66) \approx 0,8154$.
 - d** De gevraagde kans is $P(X = 58)$ en benader je met $P(57,5 \leq Y < 58,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 57,5, bovengrens = 58,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,05733...
 De kans $P(X = 58) \approx 0,0573$.

- e De gevraagde kans is $P(59 < X < 63)$ en benader je met $P(59,5 \leq Y < 62,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 59,5, bovengrens = 62,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,23468...
 De kans $P(59 < X < 63) \approx 0,2347$.
- f De gevraagde kans is $P(62 \leq X \leq 64)$ en benader je met $P(61,5 \leq Y < 64,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 61,5, bovengrens = 64,5, $\mu = 62,1$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,23658...
 De kans $P(62 \leq X \leq 64) \approx 0,2366$.

23 Het aantal vellen papier X in een pak kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(503, 2)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(X < 500)$ en benader je met $P(Y < 499,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 499,5, $\mu = 503$, $\sigma = 2$
 Dit geeft 0,04005...
 Het percentage pakken met minder dan 500 vellen is ongeveer 4,0%.

- 24 a** Het aantal broodjes X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(56,2; 4,9)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(X \geq 52)$ en benader je met $P(Y \geq 51,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 51,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 56,2$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,83126...
 De kans $P(X \geq 52) \approx 0,8313$.
- b** De gevraagde kans is $P(X = 52)$ en benader je met $P(51,5 \leq Y < 52,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 51,5, bovengrens = 52,5, $\mu = 56,2$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,05636...
 De kans $P(X = 52) \approx 0,0564$.
- c** De gevraagde kans is $P(X \leq 67)$ en benader je met $P(Y < 67,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 67,5, $\mu = 56,2$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,98944...
 De kans $P(X \leq 67) \approx 0,9894$.
- d** De gevraagde kans is $P(55 < X < 60)$ en benader je met $P(55,5 \leq Y < 59,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 55,5, bovengrens = 59,5, $\mu = 56,2$, $\sigma = 4,9$
 Dit geeft 0,30647...
 De kans $P(55 < X < 60) \approx 0,3065$.

- 25 a** Het aantal gasten X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(29,8; 5,4)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(X = 35)$ en benader je met $P(34,5 \leq Y < 35,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 34,5, bovengrens = 35,5, $\mu = 29,8$, $\sigma = 5,4$
 Dit geeft 0,04646...
 De kans $P(X = 35) \approx 0,0465$.

15 Normale verdelingen

- b** De gevraagde kans is $P(20 < X < 30)$ en benader je met $P(20,5 \leq Y < 29,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 20,5, bovengrens = 29,5, $\mu = 29,8$, $\sigma = 5,4$

Dit geeft 0,43533...

Naar verwachting zullen er $0,43533... \times 10 \approx 4$ zaterdagavonden zijn.

- c** De gevraagde kans is $P(X > 30)$ en benader je met $P(Y \geq 30,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 30,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 29,8$, $\sigma = 5,4$

Dit geeft 0,44842...

Naar verwachting zullen er $0,44842... \times 52 \approx 23$ zaterdagavonden zijn.

- d** $E(T) = 52 \times 29,8 = 1549,6$

$\sigma(T) = \sqrt{52} \times 5,4 \approx 38,94$

- e** Het totaal aantal gasten T kan worden benaderd met de continue stochast Z die Norm(1549,6; 38,94)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(T > 1500)$ en benader je met $P(Z \geq 1500,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 1500,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 1549,6$, $\sigma = \sqrt{52} \times 5,4$

Dit geeft 0,89633...

De kans $P(T > 1500) \approx 0,8963$.

- 26 a** Het aantal correct beantwoorde vragen X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(19,3; 2,7)-verdeeld is.

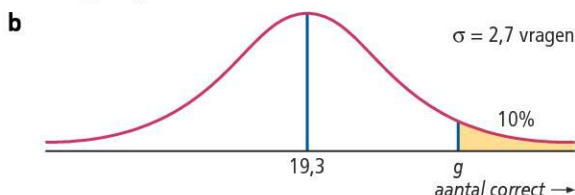
De gevraagde kans is $P(X > 15)$ en benader je met $P(Y \geq 15,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 15,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 19,3$, $\sigma = 2,7$

Dit geeft 0,92034...

Ongeveer 92% van de leerlingen beantwoordt meer dan de helft van de vragen goed.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 19,3; 2,7)$

$y_2 = 0,10$

Venster: $19,3 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 0,20$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (22,76; 0,10).

Govert heeft minstens 23 vragen goed.

- c** De kans dat een leerling meer dan de helft van de vragen goed heeft is 0,92034... (zie opdracht a).

De kans dat alle 25 leerlingen dit hebben is $0,92034...^{25} \approx 0,1255$.

- d** Het gemiddeld aantal goed beantwoorde vragen $\bar{X}$ van de leerlingen uit V2c is Norm($19,3; \frac{2,7}{\sqrt{25}} = 0,54$)-verdeeld. De stochast $\bar{X}$ is continu.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 20, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 19,3$, $\sigma = 0,54$

Dit geeft 0,09743...

De kans is 0,0974.

- 022** a Alle getallen vanaf 73,5 zijn afgerond op helen groter dan 73.
 b $P(X > 73) \approx P(Y \geq 73,5)$
 c Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 73,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 75,3$, $\sigma = 6,8$
 Dit geeft 0,60438...
 De kans $P(X > 73) \approx 0,6044$.
 d Alle getallen kleiner dan 76,5 zijn afgerond op helen kleiner of gelijk aan 76.
 e $P(X \leq 76) \approx P(Y < 76,5)$
 f Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 76,5, $\mu = 75,3$, $\sigma = 6,8$
 Dit geeft 0,57003...
 De kans $P(X \leq 76) \approx 0,5700$.
 g $P(74 \leq X < 77) \approx P(73,5 \leq Y < 76,5)$
 h Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 73,5, bovengrens = 76,5, $\mu = 75,3$, $\sigma = 6,8$
 Dit geeft 0,17441...
 De kans $P(74 \leq X < 77) \approx 0,1744$.

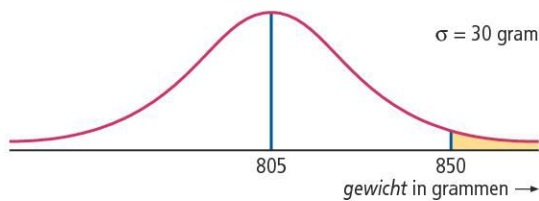
- 025** a Het aantal kelkbladeren A kan worden benaderd met de continue stochast B die Norm(4,99; 0,55)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(A \leq 4)$ en benader je met $P(B < 4,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 4,5, $\mu = 4,99$, $\sigma = 0,55$
 Dit geeft 0,18648...
 De kans $P(A \leq 4) \approx 0,1865$.
 b De gevraagde kans is $P(A = 6)$ en benader je met $P(5,5 \leq B < 6,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 5,5, bovengrens = 6,5, $\mu = 4,99$, $\sigma = 0,55$
 Dit geeft 0,17387...
 Het verwachte aantal ranonkels is $0,17387 \dots \times 150 \approx 26$.
 c $E(T) = 16 \times 4,99 = 79,84$ en $\sigma(T) = \sqrt{16} \times 0,55 = 2,2$.
 d Het totaal aantal kelkbladeren T kan worden benaderd met de continue stochast S die Norm(79,84; 2,2)-verdeeld is.
 De gevraagde kans is $P(T = 75)$ en benader je met $P(74,5 \leq S < 75,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 74,5, bovengrens = 75,5, $\mu = 79,84$, $\sigma = 2,2$
 Dit geeft 0,01665...
 De kans $P(T = 75) \approx 0,0167$.

- U4** a Optie: binomiaal cumulatief
 Invoer: $n = 800$, $p = 0,14$ en $X = 100$
 $P(X \leq 100) \approx 0,1196$
 b Het aantal fietsers dat zonder verlichting fietst X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm($800 \times 0,14 = 112$; $\sqrt{800 \times 0,14 \times (1 - 0,14)} = \sqrt{96,32} \approx 9,814$)-verdeeld is. De gevraagde kans is $P(X \leq 100)$ en benader je met $P(Y < 100,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 100,5, $\mu = 112$, $\sigma = 9,814$
 Dit geeft 0,12063...
 De kans $P(X \leq 100) \approx 0,1206$.
 c De eerste manier heeft meestal de voorkeur omdat het veel sneller gaat.

15 Normale verdelingen

15.5 Gemengde opdrachten

27 a



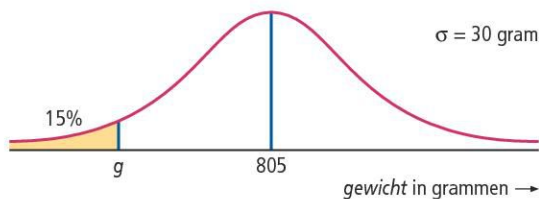
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 850, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 805$, $\sigma = 30$

Dit geeft 0,06680...

Het aantal broden dat meer dan 850 gram zal wegen is $0,06680... \times 400 \approx 27$ broden.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 805, 30)$

$y_2 = 0,15$

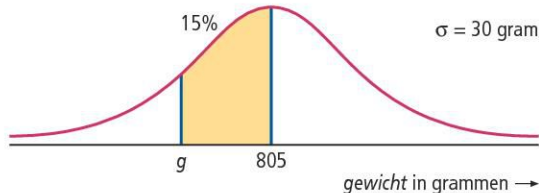
Venster: $750 \leq x \leq 805$, $0 \leq y \leq 0,30$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (773,91; 0,15).

De 15% lichtste broden wegen maximaal 773,9 gram.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 805, 805, 30)$

$y_2 = 0,15$

Venster: $750 \leq x \leq 805$, $0 \leq y \leq 0,30$

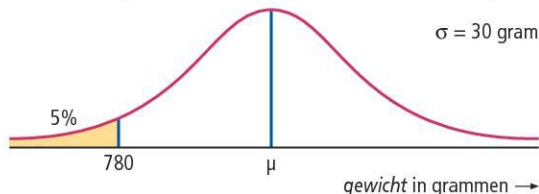
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (793,44; 0,15).

De ondergrens van het gewicht is 793,4 gram.

De bovengrens van het gewicht is $805 + (805 - 793,4) = 816,6$ gram.

d



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 780, x, 30)$

$y_2 = 0,05$

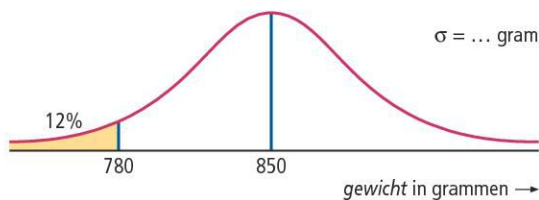
Venster: $780 \leq x \leq 850$, $0 \leq y \leq 0,10$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (829,35; 0,05).

De bakker moet zijn machine instellen op een gemiddelde gewicht van 829 gram.

e



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 780, 850, x)$

$y_2 = 0,12$

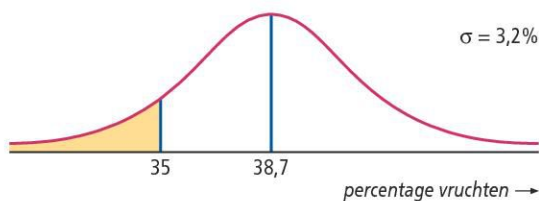
Venster: $0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 0,24$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (59,58; 0,12).

De standaardafwijking is 59,6 gram.

28 a



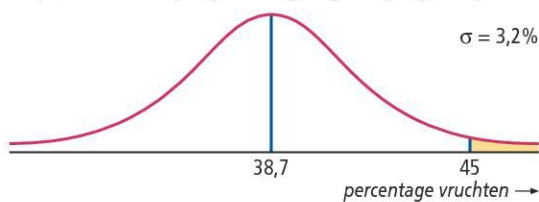
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 35, $\mu = 38,7$, $\sigma = 3,2$

Dit geeft 0,12378...

12,4% van de potjes mag eigenlijk geen jam heten.

b



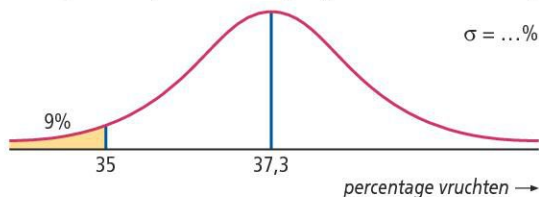
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 45, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 38,7$, $\sigma = 3,2$

Dit geeft 0,02449...

Philip zou 2,4% van de potjes kunnen verkopen als 'extra jam'.

c



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 35, 37,3, x)$

$y_2 = 0,09$

Venster: $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 0,18$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt zijn (1,715; 0,09).

De standaardafwijking is 1,72%.

29 a Het aantal paperclips in doosjes X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(202,3; 1,4)-verdeeld is.

A minimaal 200 paperclips

De gevraagde kans is $P(X \geq 200)$ en benader je met $P(Y \geq 199,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 199,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 202,3$, $\sigma = 1,4$

Dit geeft 0,97724...

De kans $P(X \geq 200) \approx 0,9772$.

15 Normale verdelingen

B precies 200 paperclips

De gevraagde kans is $P(X = 200)$ en benader je met $P(199,5 \leq Y < 200,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 199,5, bovengrens = 200,5, $\mu = 202,3$, $\sigma = 1,4$

Dit geeft 0,07652...

De kans $P(X = 200) \approx 0,0765$.

C tussen 199 paperclips en 205 paperclips

De gevraagde kans is $P(199 < X < 205)$ en benader je met $P(199,5 \leq Y < 204,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 199,5, bovengrens = 204,5, $\mu = 202,3$, $\sigma = 1,4$

Dit geeft 0,91920...

De kans $P(199 < X < 205) \approx 0,9192$.

b De kans is 0,91920...¹⁶ $\approx 0,2598$

c Het gemiddeld aantal paperclips in de 16 doosjes $\bar{X}$ is

$\text{Norm}(202,3; \frac{1,4}{\sqrt{16}} = 0,35)$ -verdeeld. De stochast $\bar{X}$ is continu.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 202, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 202,3$, $\sigma = 0,35$

Dit geeft 0,80431...

De kans is 0,8043.

Onderzoeksopdrachten

30 a Het aantal verhuurde fietsen X kan worden benaderd met de continue stochast Y die $\text{Norm}(186; 37)$ -verdeeld is.

Ten minste één klant wordt teleurgesteld als de vraag naar fietsen meer dan 195 is. De gevraagde kans is $P(X > 195)$ en benader je met $P(Y \geq 195,5)$.

Optie: normaal cumulatief

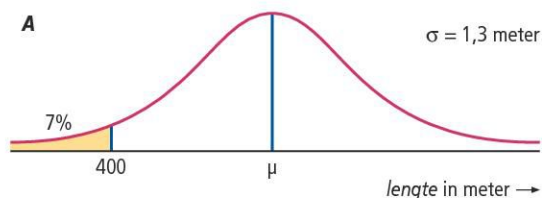
ondergrens = 195,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 186$, $\sigma = 37$

Dit geeft 0,39868...

Op ongeveer 40% van de dagen wordt tenminste één klant teleurgesteld.

b Er wordt $0,40 \times 365 \times 8 = \text{€ } 1.168$, – meer winst gemaakt als de fiets verhuurd wordt. Er wordt ook $0,60 \times 365 \times 2 = \text{€ } 438$, – minder winst gemaakt als de fiets niet verhuurd wordt. In totaal zou er $\text{€ } 1.168 - \text{€ } 438 = \text{€ } 730$,– extra winst per jaar worden gemaakt met deze 196e fiets.

31



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 400; x; 1,3)$

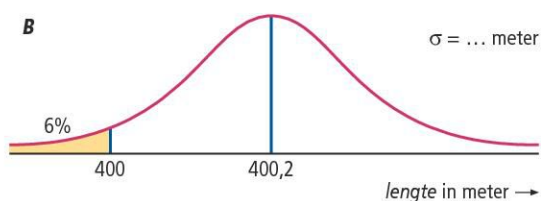
$y_2 = 0,07$

Venster: $400 \leq x \leq 410$, $0 \leq y \leq 0,14$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (401,92; 0,07).

Het gemiddelde bij machine A is 401,9 meter.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 400; 400,2; x)$

$$y_2 = 0,06$$

Venster: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,12$

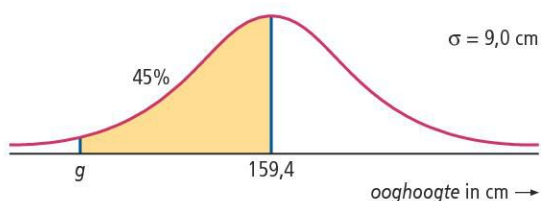
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (0,129; 0,06).

De standaardafwijking bij machine B is 0,13 meter.

Machine B wikkelt gemiddeld het minste linnen op een rol en heeft de kleinste standaardafwijking en is dus ook inderdaad het nauwkeurigst.

32



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 159,4; 159,4; 9,0)$

$$y_2 = 0,45$$

Venster: $140 \leq x \leq 159,4, 0 \leq y \leq 0,90$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (144,60; 0,45).

De ondergrens van de ooghoogtes is 144,6 cm.

De bovengrens van de ooghoogtes is $159,4 + (159,4 - 144,6) = 174,2$ cm.

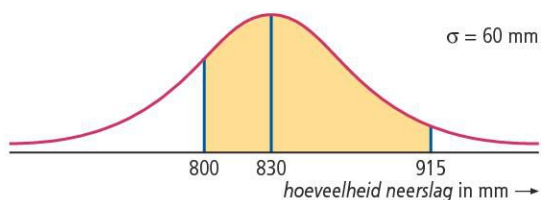
De onderkant van de spiegel moet minstens 12 cm beneden 144,6 cm hangen, dus op 132,6 cm hoogte.

De bovenkant van de spiegel moet minstens 12 cm boven 174,2 cm hangen, dus op 186,2 cm hoogte.

De spiegel moet minstens $186,2 - 132,6 = 53,6$ cm hoog zijn.

Samenvatting

S1 a



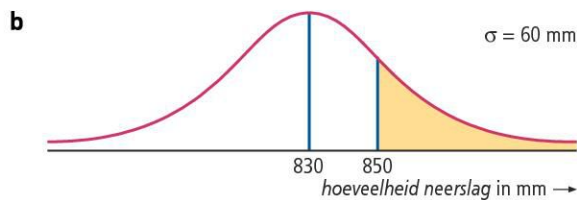
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 800, bovengrens = 915, $\mu = 830$, $\sigma = 60$

Dit geeft 0,61317...

In 61,3% van de jaren valt er tussen de 800 mm en 915 mm neerslag.

15 Normale verdelingen

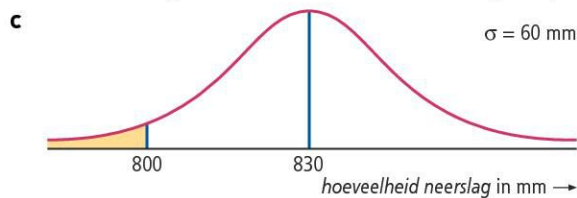


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 850, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 830$, $\sigma = 60$

Dit geeft 0,36944...

De kans op meer dan 850 mm neerslag is 0,3694.



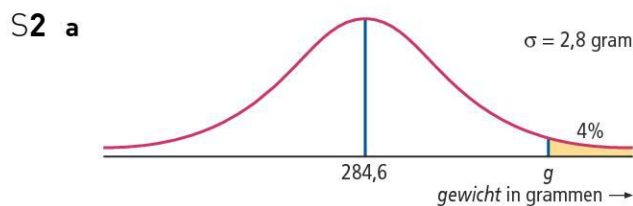
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 800, $\mu = 830$, $\sigma = 60$

Dit geeft 0,30853...

De kans op minder dan 800 mm neerslag is 0,3085.

d De kans is $0,30853...^2 \approx 0,0952$.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 284,6; 2,8)$

$y_2 = 0,04$

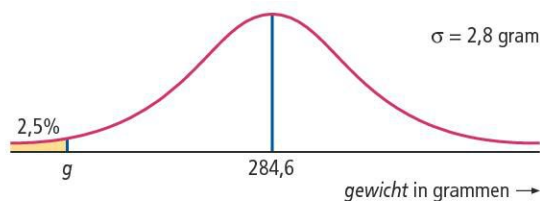
Venster: $284,6 \leq x \leq 295$, $0 \leq y \leq 0,08$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (289,50; 0,08).

De zwaarste 4% potten appelmoes wegen minimaal 289,5 gram.

b $\frac{20}{800} \times 100\% = 2,5\%$



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 284,6; 2,8)$

$y_2 = 0,025$

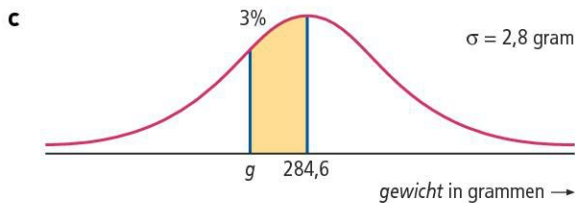
Venster: $275 \leq x \leq 284,6$, $0 \leq y \leq 0,05$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (279,11; 0,025).

De lichtste 20 potten appelmoes wegen maximaal 279,1 gram.

Of met de vuistregels: de lichtste 2,5% potten wegen maximaal $284,6 - 2 \cdot 2,8 = 279$ gram.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 284,6; 284,6; 2,8)$

$y_2 = 0,03$

Venster: $280 \leq x \leq 284,6$, $0 \leq y \leq 0,06$

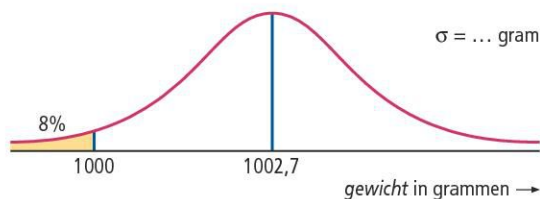
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (284,39; 0,03).

De ondergrens van het gewicht is 284,4 cm.

De bovengrens van het gewicht is $284,6 + (284,6 - 284,4) = 284,8$ cm.

S3 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 1000; 1002,7; x)$

$y_2 = 0,08$

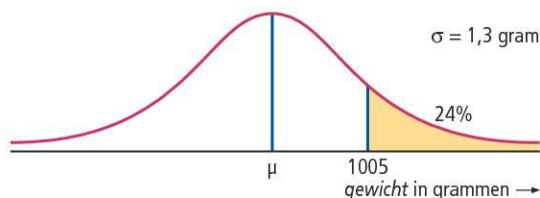
Venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 0,16$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1,922; 0,08).

De standaardafwijking van deze pakken suiker is 1,92 gram.

b $\frac{120}{500} \times 100\% = 24\%$



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(1005; 10^{99}; x; 1,3)$

$y_2 = 0,24$

Venster: $1000 \leq x \leq 1005$, $0 \leq y \leq 0,48$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1004,08; 0,24).

Het gemiddelde gewicht van deze pakken suiker is 1004,1 gram.

S4 a Het aantal snoepjes in een zak X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(83,6; 2,4)-verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X \leq 85)$ en benader je met $P(Y < 85,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 85,5, $\mu = 83,6$, $\sigma = 2,4$

Dit geeft 0,78572...

De kans $P(X \leq 85) \approx 0,7857$.

b De gevraagde kans is $P(X \geq 82)$ en benader je met $P(Y \geq 81,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 81,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 83,6$, $\sigma = 2,4$

Dit geeft 0,80921...

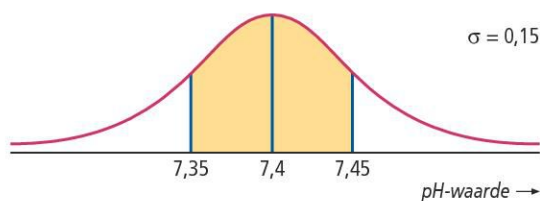
De kans $P(X \geq 82) \approx 0,8092$.

15 Normale verdelingen

- c** De gevraagde kans is $P(X = 85)$ en benader je met $P(84,5 \leq Y < 85,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 84,5, bovengrens = 85,5, $\mu = 83,6$, $\sigma = 2,4$
 Dit geeft 0,13955...
 De kans $P(X = 85) \approx 0,1396$.
- d** De gevraagde kans is $P(83 \leq X \leq 86)$ en benader je met $P(82,5 \leq Y < 86,5)$.
 Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 82,5, bovengrens = 86,5, $\mu = 83,6$, $\sigma = 2,4$
 Dit geeft 0,56318...
 De kans $P(83 \leq X \leq 86) \approx 0,5632$.

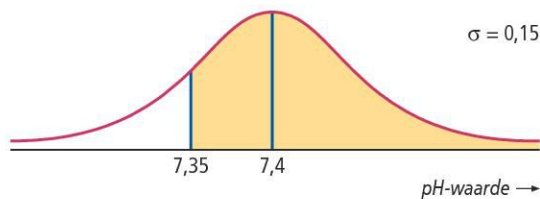
Test jezelf

T1 a



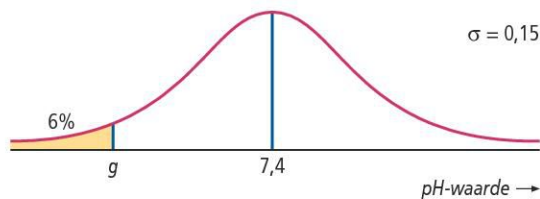
Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 7,35, bovengrens = 7,45, $\mu = 7,4$, $\sigma = 0,15$
 Dit geeft 0,26111...
 Het gevraagde percentage is 26,11%.

b



Optie: normaal cumulatief
 ondergrens = 7,35, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 7,4$, $\sigma = 0,15$
 Dit geeft 0,63055...
 Het gevraagde percentage is 63,06%.

c



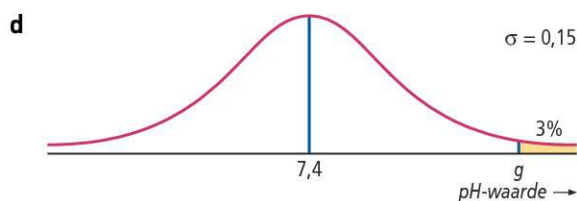
Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 7,4; 0,15)$
 $y_2 = 0,06$

Venster: $7 \leq x \leq 7,4$, $0 \leq y \leq 0,12$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (7,167; 0,06).

Deze mensen hebben een maximale pH-waarde van 7,16.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 7,4; 0,15)$

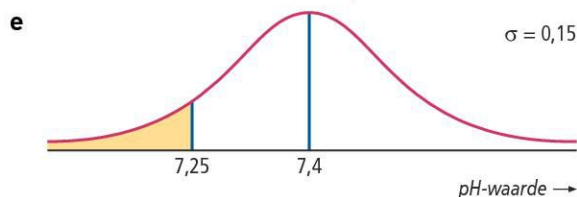
$y_2 = 0,03$

Venster: $7,4 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 0,06$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (7,682; 0,03).

Deze mensen hebben een pH-waarde van minimaal 7,69.

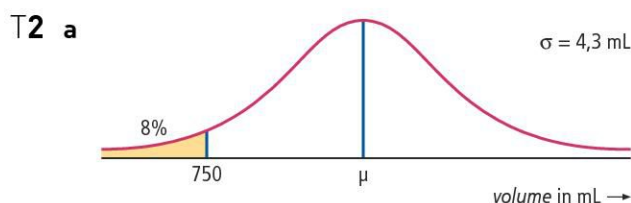


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 7,25, $\mu = 7,4$, $\sigma = 0,15$

Dit geeft 0,15865...

Er zullen naar verwachting $0,15865... \times 67 \approx 11$ mensen zijn met een pH-waarde kleiner dan 7,25.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; 750; x; 4,3)$

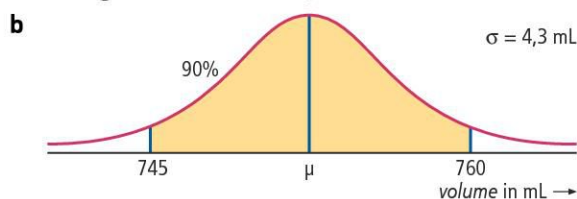
$y_2 = 0,08$

Venster: $750 \leq x \leq 770, 0 \leq y \leq 0,16$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (756,04; 0,08).

Het gemiddelde is 756,0 mL.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(745; 760; x; 4,3)$

$y_2 = 0,90$

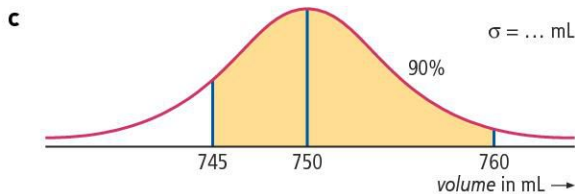
Venster: $745 \leq x \leq 760, 0 \leq y \leq 1,80$

Optie: snijpunt (tweemaal)

De coördinaten van de snijpunten zijn (750,99; 0,90) en (754,01; 0,90).

Het gemiddelde is 751,0 mL of 754,0 mL.

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(745, 760, 750, x)$

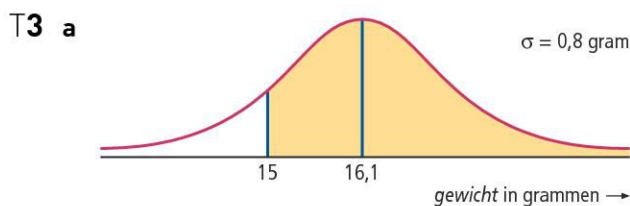
$y_2 = 0,90$

Venster: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 1,80$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3,824; 0,90).

De standaardafwijking is 3,82 mL.



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 15, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 16,1$, $\sigma = 0,8$

Dit geeft 0,91543...

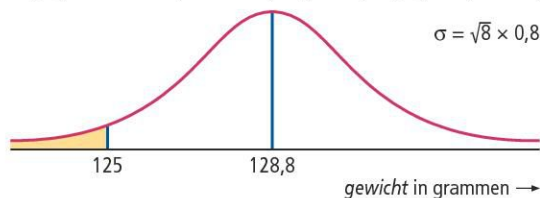
Die kans is 0,9154.

b De kans is $0,91543...^2 \approx 0,8380$.

c Stochast X is het gewicht van een pennywafel.

Stochast S is het gewicht van acht pennywafels.

$E(S) = 8 \times 16,1 = 128,8 \text{ gram}$; $\sigma(S) = \sqrt{8} \times 0,8 \text{ gram}$



Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 125, $\mu = 128,8$, $\sigma = \sqrt{8} \times 0,8$

Dit geeft 0,04653...

De kans is 0,0465.

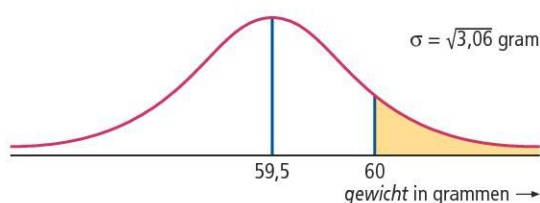
d Stochast X is het gewicht van een pennywafel. Stochast Y is het gewicht van een sprits. Stochast Z is het gewicht van twee spritsen.

Stochast T is het totale gewicht van één pennywafel en twee spritsen.

$E(Z) = 2 \times 21,7 = 43,4 \text{ gram}$; $\sigma(Z) = \sqrt{2} \times 1,1 = 1,555...$

$E(T) = E(X + Z) = E(X) + E(Z) = 16,1 + 43,4 = 59,5 \text{ gram}$

$\sigma(T) = \sigma(X + Z) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Z))^2} = \sqrt{0,8^2 + 1,555...^2} = \sqrt{3,06} \text{ gram}$

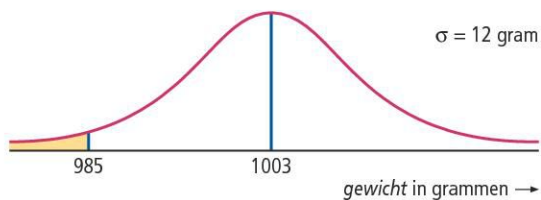


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 60, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 59,5$, $\sigma = \sqrt{3,06}$

Dit geeft 0,38754...

Deze kans is 0,3875.

T4 a

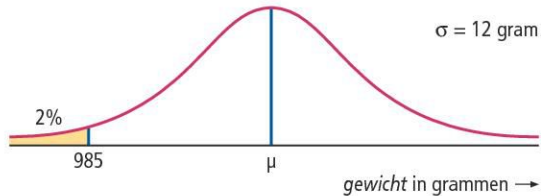
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 985, $\mu = 1003$, $\sigma = 12$

Dit geeft 0,06680...

De kans is dus 6,68% en dit is meer dan 2%.

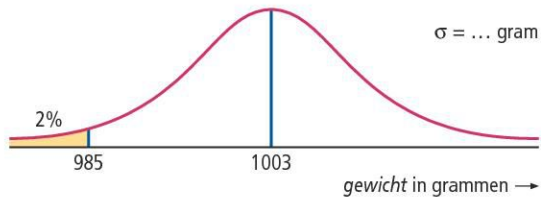
De fabrikant voldoet niet aan de EU-norm.

bInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 985, x, 12)$ $y_2 = 0,02$ Venster: $985 \leq x \leq 1020$, $0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (1009,645; 0,02).

Het gemiddelde is 1009,6 gram.

cInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 985, 1003, x)$ $y_2 = 0,02$ Venster: $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 0,04$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (8,76; 0,02).

De standaardafwijking moet dan 8,7 gram zijn.

T5 a Het aantal schubben X kan worden benaderd met de continue stochast Y die Norm(82, 4)-verdeeld is.De gevraagde kans is $P(X < 75)$ en benader je met $P(Y < 74,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 74,5, $\mu = 82$, $\sigma = 4$

Dit geeft 0,03039...

De kans $P(X < 75) \approx 0,0304$.**b** De gevraagde kans is $P(80 < X < 85)$ en benader je met $P(80,5 \leq Y < 84,5)$.

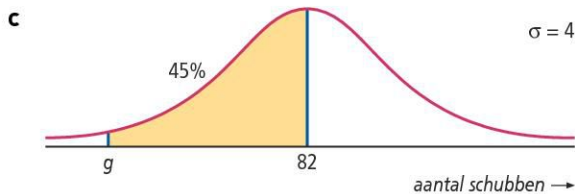
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 80,5, bovengrens = 84,5, $\mu = 82$, $\sigma = 4$

Dit geeft 0,38018...

De kans $P(80 < X < 85) \approx 0,3802$.

15 Normale verdelingen



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x, 82, 82, 4)$

$y_2 = 0,45$

Venster: $70 \leq x \leq 82, 0 \leq y \leq 0,90$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (75,42; 0,45).

De ondergrens van het aantal schubben is 75.

De bovengrens van het aantal schubben is $82 + (82 - 75,42) \approx 89$.

d Stochast T is het totaal aantal schubben bij tien willekeurige spiegelkarpers.

Stochast T is $\text{Norm}(10 \times 82 = 820; \sqrt{10} \times 4)$ -verdeeld.

Het totaal aantal schubben T kan worden benaderd met de continue stochast Y die $\text{Norm}(820, 4\sqrt{10})$ -verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(T < 800)$ en benader je met $P(Y < 799,5)$.

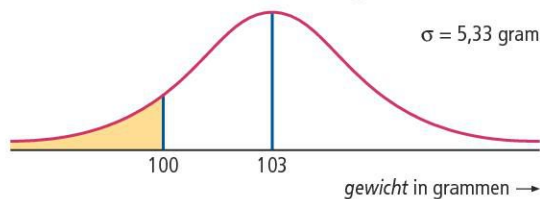
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 799,5, $\mu = 820$, $\sigma = 4\sqrt{10}$

Dit geeft 0,05254...

De kans $P(T < 800) \approx 0,0525$.

T6 a $\sigma = 1,21 + 0,04 \times 103 = 5,33$ gram

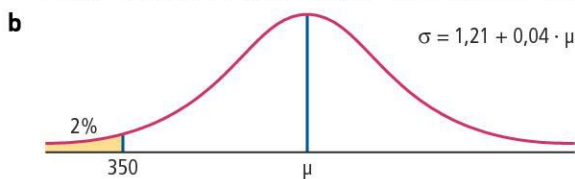


Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 100, $\mu = 103$, $\sigma = 5,33$

Dit geeft 0,28676...

28,7% van de verpakkingen bevat minder dan 100 gram.



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, 350, x, 1,21 + 0,04x)$

$y_2 = 0,02$

Venster: $350 \leq x \leq 400, 0 \leq y \leq 0,04$

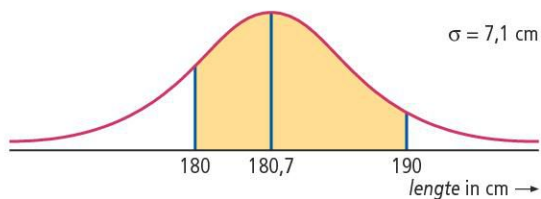
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (384,03; 0,04).

Het ingestelde vulgewicht moet 384,0 gram zijn.

Extra oefening

E1 a



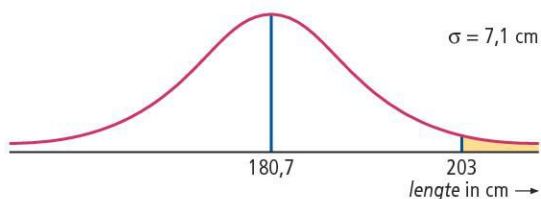
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 180, bovengrens = 190, $\mu = 180,7$, $\sigma = 7,1$

Dit geeft 0,44414...

44,4% van de Nederlandse mannen heeft een lengte tussen 180 cm en 190 cm.

b



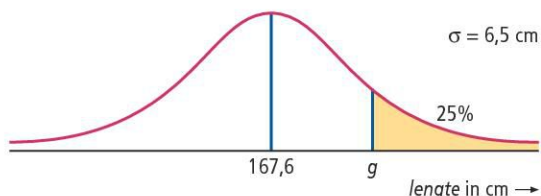
Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 203, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 180,7$, $\sigma = 7,1$

Dit geeft 0,00084...

Er moeten naar verwachting $0,00084... \times 6,5$ miljoen ≈ 5000 mannen bukken als ze door zo'n deur gaan.

E2 a

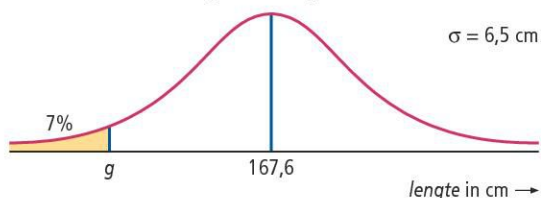
Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(x; 10^{99}; 167,6; 6,5)$ $y_2 = 0,25$ Venster: $167,6 \leq x \leq 200$, $0 \leq y \leq 0,50$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (171,98; 0,25).

De minimale lengte is ongeveer 172 cm.

b

Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}; x; 167,6; 6,5)$ $y_2 = 0,07$ Venster: $150 \leq x \leq 167,6$, $0 \leq y \leq 0,14$

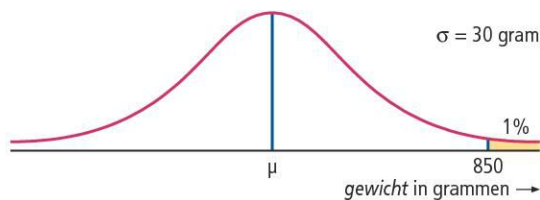
Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (158,01; 0,07).

De 7% kleinste vrouwen hebben een lengte van maximaal 158,0 cm.

15 Normale verdelingen

E3 a



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(850, 10^{99}, x, 30)$

$y_2 = 0,01$

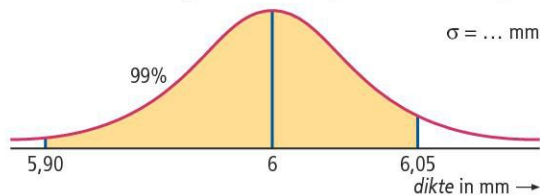
Venster: $750 \leq x \leq 850, 0 \leq y \leq 0,02$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (780,21; 0,01).

Het maximale gemiddelde gewicht is 780 gram.

b



Invoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(5,90; 6,05; 6; x)$

$y_2 = 0,99$

Venster: $0 \leq x \leq 0,1, 0 \leq y \leq 1,98$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (0,021; 0,99).

Het maximale toegestane waarde van de standaardafwijking is 0,02 mm.

E4 a Het aantal dropjes X kan worden benaderd met de continue stochast Y die

$\text{Norm}(47,2; 3,7)$ -verdeeld is.

De gevraagde kans is $P(X = 52)$ en benader je met $P(51,5 \leq Y < 52,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 51,5, bovengrens = 52,5, $\mu = 47,2$, $\sigma = 3,7$

Dit geeft 0,04657...

De kans $P(X = 52) \approx 0,0466$.

b De gevraagde kans is $P(X \geq 50)$ en benader je met $P(Y \geq 49,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 49,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 47,2$, $\sigma = 3,7$

Dit geeft 0,26709...

De kans $P(X \geq 50) \approx 0,2671$.

c $E(S) = 5 \times 47,2 = 236$ en $\sigma(S) = \sqrt{5} \times 3,7$

Het aantal dropjes in vijf zakken T kan worden benaderd met de continue stochast S die $\text{Norm}(236; \sqrt{5} \times 3,7)$ -verdeeld is.

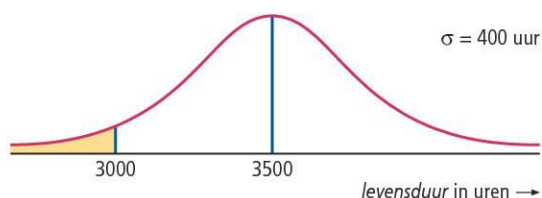
De gevraagde kans is $P(T \geq 250)$ en benader je met $P(S \geq 249,5)$.

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 249,5, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 236$, $\sigma = \sqrt{5} \times 3,7$

Dit geeft 0,05136...

De kans $P(T \geq 250) \approx 0,0514$.

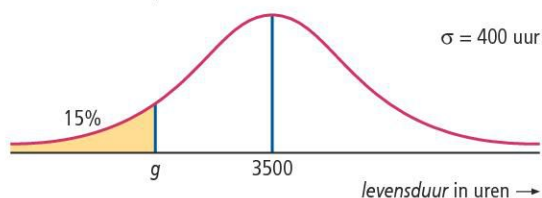
E5 a

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = -10^{99} , bovengrens = 3000, $\mu = 3500$, $\sigma = 400$

Dit geeft 0,10564...

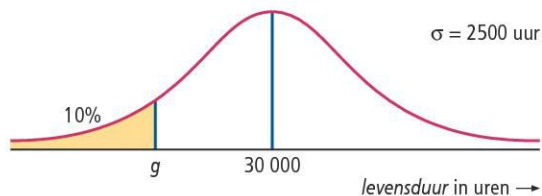
De kans is 0,1056.

bInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 3500, 400)$ $y_2 = 0,15$ Venster: $3000 \leq x \leq 3500$, $0 \leq y \leq 0,30$

Optie: snijpunt

De coördinaten van het snijpunt zijn (3085,43; 0,15).

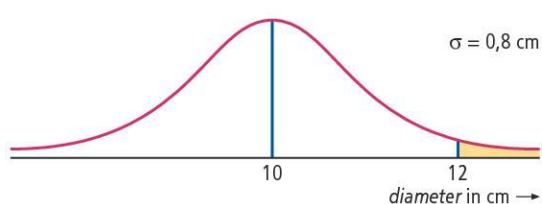
De lampen moeten om de 3085 uur worden vervangen.

cInvoer: $y_1 = \text{normaal cum.}(-10^{99}, x, 30\,000, 2500)$ $y_2 = 0,10$ Venster: $25\,000 \leq x \leq 30\,000$, $0 \leq y \leq 0,20$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt zijn (26 796,12; 0,10).

Deze lampen moeten worden vervangen om de 26 796 uur.

Een LED-lamp mag $26\,796 : 3085 \approx 8,7$ keer zo duur zijn.**E6 a**

Optie: normaal cumulatief

ondergrens = 12, bovengrens = 10^{99} , $\mu = 10$, $\sigma = 0,8$

Dit geeft 0,00620...

De gevraagde kans is 0,0062.

b

Dan moet elke bol in een bakje van 12 cm passen.

De kans dat een bol een diameter van maximaal 12 cm heeft, is

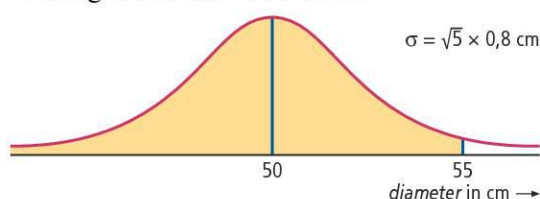
 $1 - 0,00620... = 0,99379...$ De kans dat een tiental in doos 1 past is $0,99379...^{10} \approx 0,9396$.

15 Normale verdelingen

- c Stochast S stelt de lengte van 5 bollen op een rij voor.

$$E(S) = 5 \times 10 = 50 \text{ cm en } \sigma(S) = \sqrt{5} \times 0,8 \text{ cm}$$

De lengte van doos 2 is 55 cm.



Optie: normaal cumulatief

$$\text{ondergrens} = -10^{99}, \text{ bovengrens} = 55, \mu = 50, \sigma = \sqrt{5} \times 0,8$$

Dit geeft 0,99740...

De kans dat de bollen in een vakje passen is 0,9974.

- d De kans dat vijf willekeurige bollen in de lengte passen is ongeveer 0,9974.

Voor de breedte moet de diameter van elke bol kleiner dan 12 cm zijn.

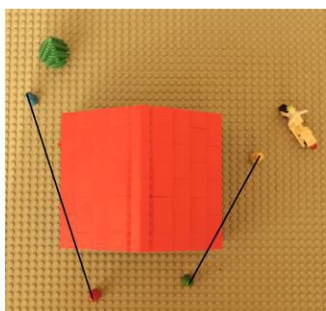
De kans daarop is ongeveer $(0,9938)^2 \approx 0,9876$. De kans dat twee willekeurige bollen in de breedte passen is dus 0,9876.

De kans dat de bollen in de breedte passen is kleiner dan de kans dat ze in de lengte passen, dus het heeft meer zin om de breedte te vergroten.

16 Perspectief

Voorkennis

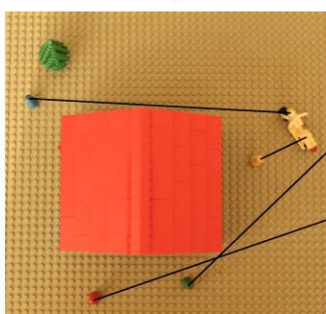
V1 a



De gele en groene persoon kunnen elkaar niet zien, want de lijn van de groene naar de gele persoon gaat over het huis.

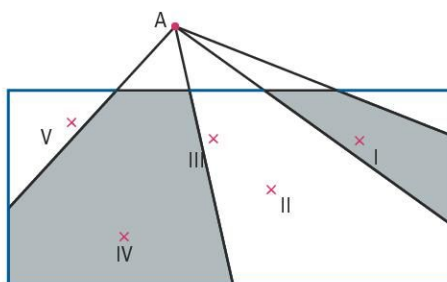
- b Zie opdracht a, de rode en blauwe persoon kunnen elkaar ook niet zien, want ook de lijn van de rode naar de blauwe persoon gaat over het huis.

c



Je kunt vanaf zowel de blauwe als de gele persoon een lijn naar de motor trekken die niet door het huis gaat. De blauwe en de gele persoon kunnen de motor geheel of gedeeltelijk zien. De rode en groen persoon kunnen de motor niet zien, want de lijn langs het hoekpunt van het huis komt niet bij de motor.

V2 a

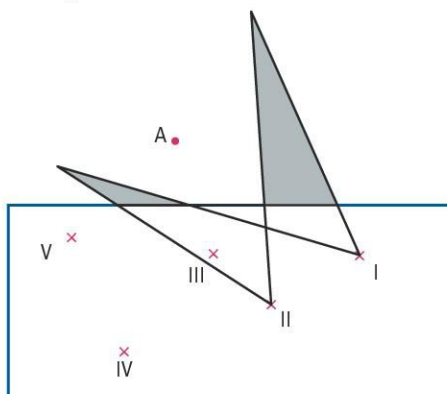


Persoon A kan object I zien.

- b Persoon A ziet de objecten II, III en V niet.

c Zie opdracht a.

d



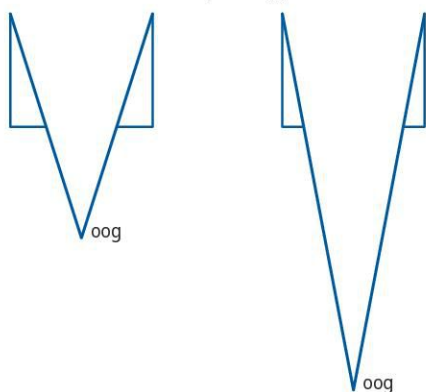
16 Perspectief

- V3 a** De lens van de camera bevond zich op de hoogte van de zesde trede. Je kunt namelijk van de vijfde trede nog iets van de bovenkant van de trede zien en bij de zevende trede zie je iets van de onderkant.
- b** De zesde trede bevindt zich ter hoogte van de taille van de persoon bij de trap, dat is op circa 1,25 meter hoogte.

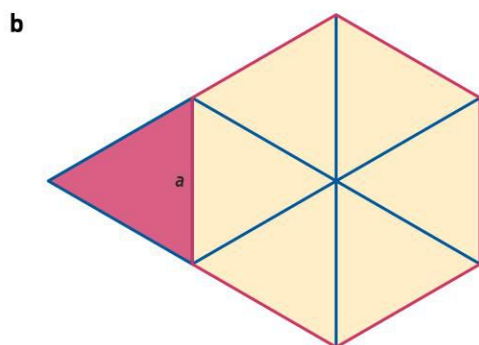
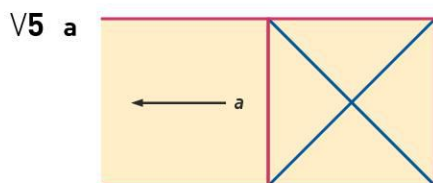


Punt A is het punt waar je in de buis de linkerkant van de linkerbuis ziet en de rechterkant van de rechterbuis. Ook zie je boven punt A de binnen-bovenkant van de buis boven A en onder punt A de binnen-onderzijde van de buis eronder. De lens van de camera bevond zich ongeveer op de hoogte van A .

- b** In de bovenaanzichten kun je zien dat in situatie 2 het oog zich op groter afstand van de opening bevindt.



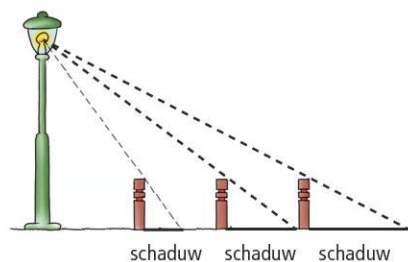
- c** In situatie 3 bevindt het oog zich aan de linkerkant van de buis, halverwege de hoogte van de buis.
- d** In situatie 4 bevindt het oog zich aan de bovenkant van de buis, halverwege de breedte van de buis.



16.1 Centrale projectie

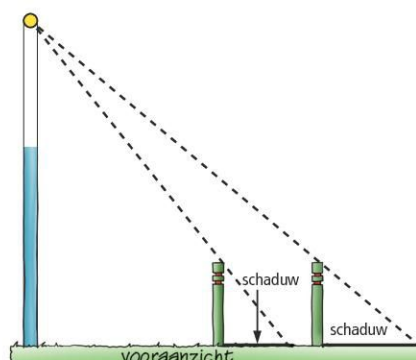
intro Als de bus dichterbij het raam komt, wordt de afstand tussen A en B groter.

1 a



b Nee, de schaduwen zijn niet even lang.

c

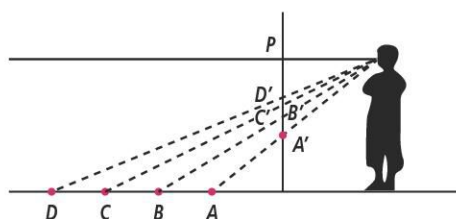


Je tekent het lijn vanaf het einde van de schaduw over het paaltje paal. Tevens maak je de lantaarnpaal langer. Het snijpunt is het punt waar de lamp zich bevindt.

d Zie opdracht c.

e Je tekent de schaduw even lang als de schaduw van de linker paal en laat de schaduw halverwege de lantaarnpaal en het eerste paaltje beginnen. Dan verbindt je het einde van de schaduw met de lamp. Op die manier bepaal je de hoogte van de paal.

2 a

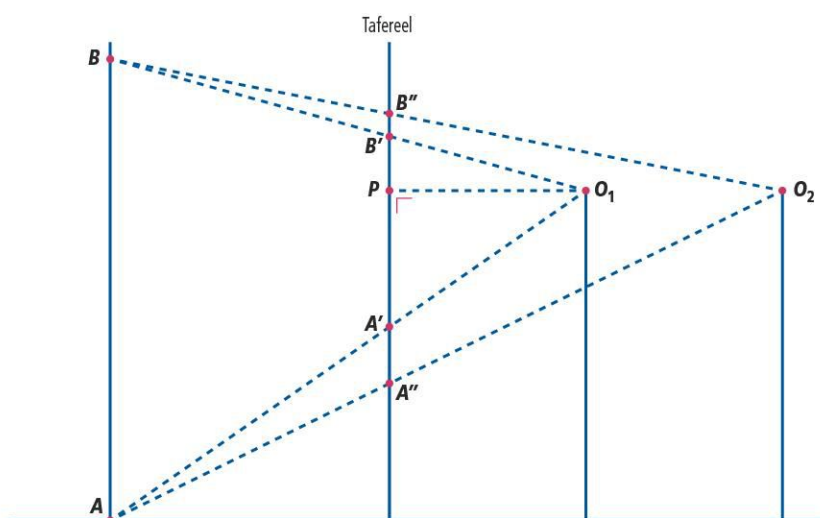


b De punten A' , B' , C' en D' liggen niet op gelijke afstanden van elkaar. De afstanden worden steeds kleiner.

c Voor elk punt op de lijn door P geldt, dat het snijpunt op het raam in punt P ligt. Het punt op de lijn loodrecht op het raam kan ook oneindig ver weg liggen. Een steen ligt op de grond en zal daarom altijd lager dan het punt P te zien zijn.

16 Perspectief

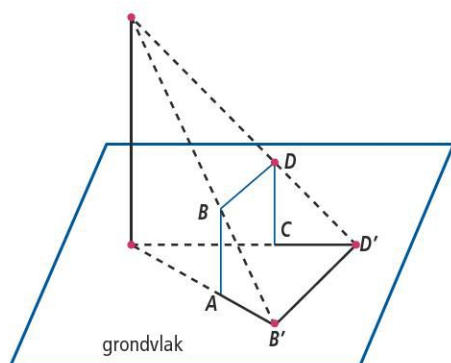
3



In de tekening is te zien dat het beeld $A'B'$ niet twee keer zo groot wordt als de afstand van het oog tot het tafereel twee keer zo groot wordt.

- 4 a Teken vanuit het voetpunt van de lantaarn een lijn door het punt A en teken vanuit het punt dat de lamp voorstelt een lijn door punt B . Het snijpunt van deze lijnen is het schaduwbeeld van punt B .

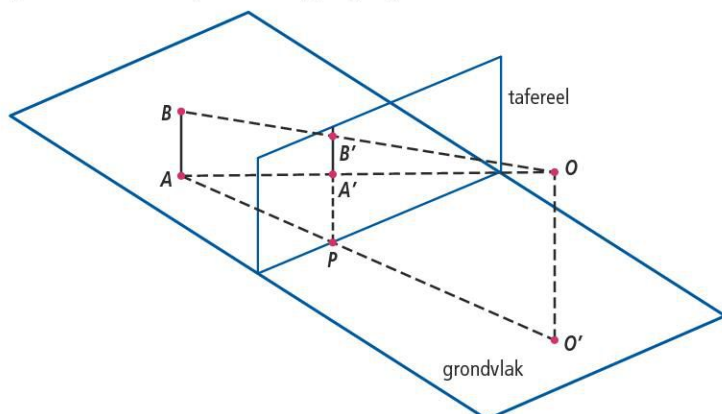
b c



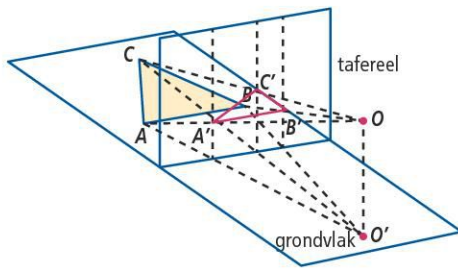
- d BD en zijn schaduwbeeld zijn niet even lang.

- 5 a Noem de lijn door P loodrecht op de grond lijn m . Driehoek APA' is een verkleining van driehoek $AO'O$, dus beide driehoeken zijn gelijkvormig. Hieruit volgt dat $A'P$ en $O'O$ evenwijdig lopen. Omdat $O'O$ evenwijdig is met het tafereel en het tafereel loodrecht op het grondvlak staat, staat ook $O'O$ loodrecht op het grondvlak. Hieruit volgt dat $A'P$ loodrecht op het grondvlak staat, dus A' ligt op lijn m .

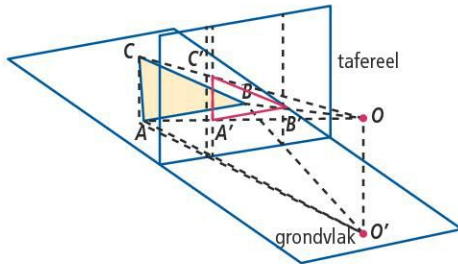
b



6

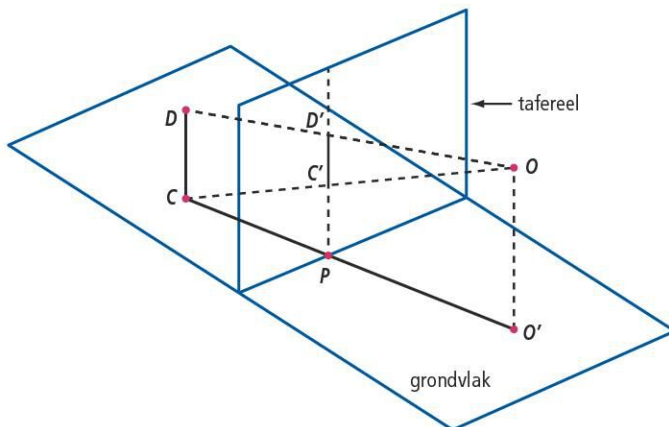


7 a

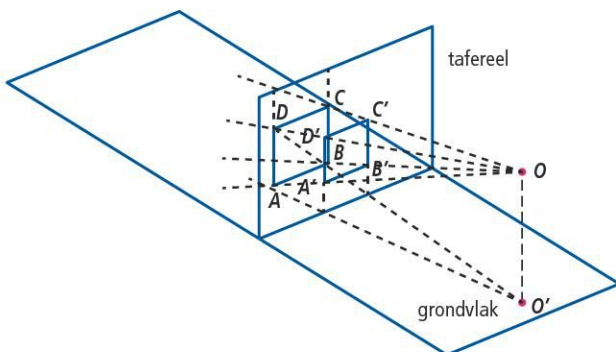


- b Alle overeenkomstige zijden zijn evenwijdig, want driehoek $A'B'C'$ is een verkleining van driehoek ABC .

05 a b c



U1



16.2 Perspectief

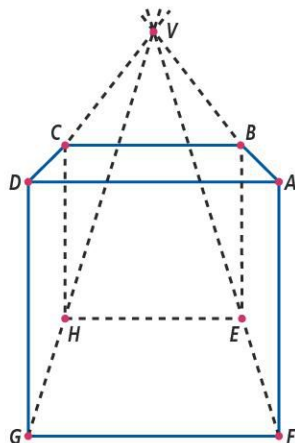
intro Twee verschillen tussen de twee tekeningen zijn:

- In de linker tekening lopen ribben die in werkelijkheid evenwijdig lopen ook in de tekening evenwijdig. In de rechter tekening is dat niet bij alle ribben het geval.
- In de linker tekening zijn twee zijvlakken die tegenover elkaar liggen even groot. In de rechter tekening is dat niet het geval.

16 Perspectief

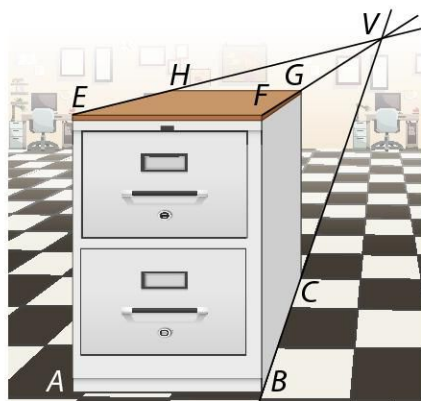
- 8 a Klopt, de letters in de tekening komen overeen met de letters bij de hoekpunten van de kubus op de prent.
 b De achterkant $BCHE$ van de kubus is evenwijdig aan de voorkant van de kubus en is dus ook evenwijdig aan het tafereel. De vorm in de tekening is een vierkant.

c d e



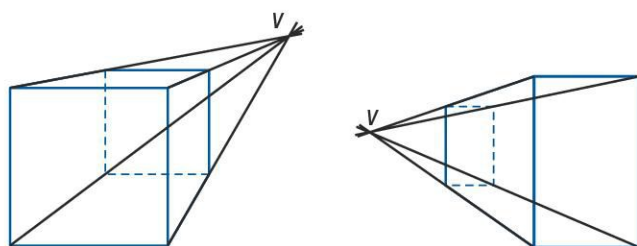
- 9 a Dat geldt niet voor de bovenkant, want dat is in werkelijkheid een rechthoek.
 b De vloertegels zijn in de tekening geen vierkanten meer. De tegels die verder weg liggen, zijn in de tekening kleiner.

c d

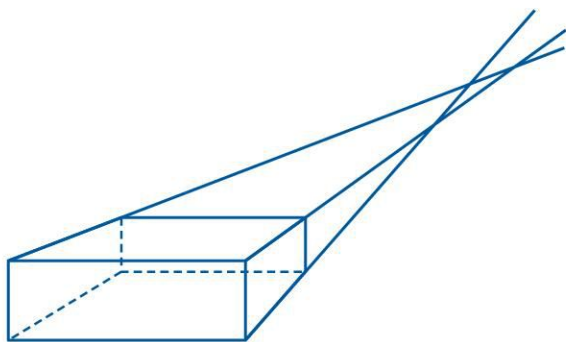


- 10 De archiefkast is twee tegels breed en ruim twee en halve tegel diep. De tegels zijn vierkant, dus de breedte is juist kleiner dan de diepte.

11



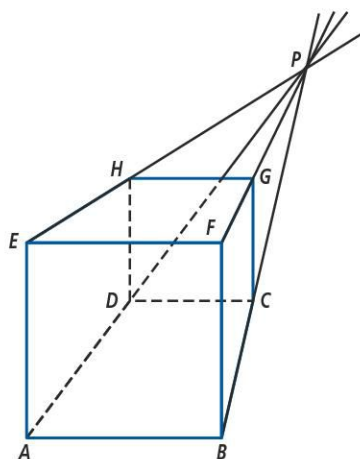
12



Na verlenging van ribben die in werkelijkheid evenwijdig zijn, zie je dat deze lijnen niet hetzelfde verdwijnpunt hebben, wat wel moet bij een perspectieftekening.

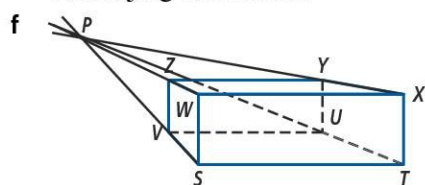
011 a AD en BC zijn in werkelijkheid evenwijdig omdat het zijden zijn van het rechthoekige grondvlak.

b c



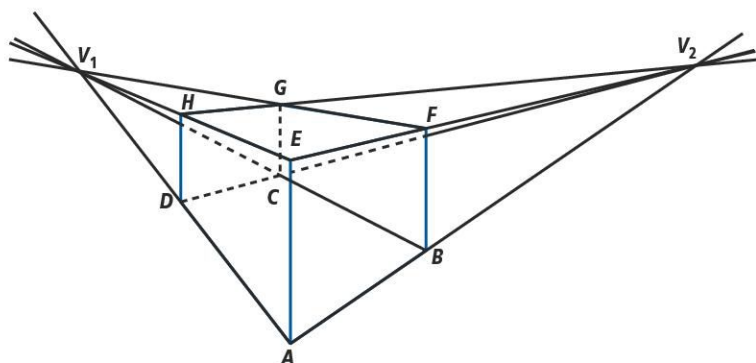
d De lijnen EF en GH snijden elkaar niet in de perspectieftekening omdat deze evenwijdig aan het tafereel zijn.

e Bij balk $STUV.WXYZ$ zijn in werkelijkheid de ribben WX , ST , UV en YZ evenwijdig aan elkaar.



Het verdwijnpunt is het punt P .

U2 a



De verdwijnpunten zijn de punten V_1 en V_2 .

16 Perspectief

- b** De evenwijdige lijnen die van voor naar achter lopen komen samen in punt V_1 en de evenwijdige lijnen die van links naar rechts lopen komen samen in punt V_2 .

16.3 Eenpuntsperspectief

intro



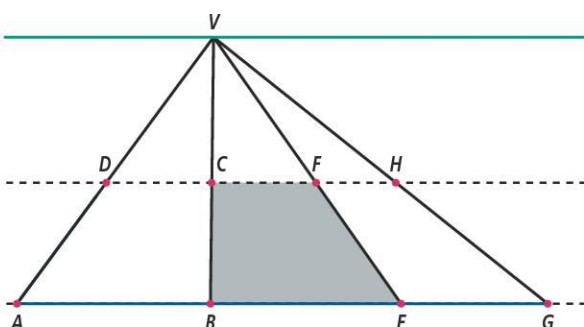
Het verdwijnpunt ligt precies op de horizon.

13



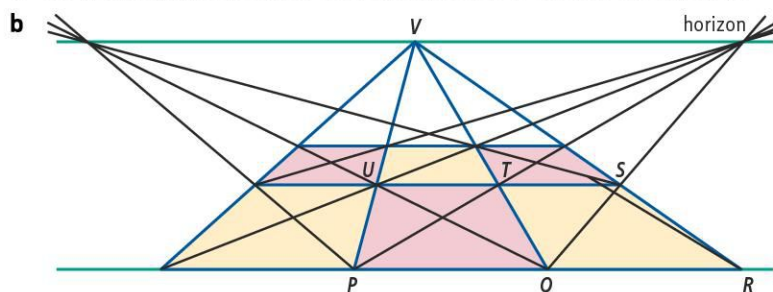
- 14 a** De horizon is gestippeld getekend.
b Hoofdrichting 1: diepte, deze zie je in de gestippeld lijnen die naar het verdwijnpunt gaan.
 Hoofdrichting 2: breedte, deze zie je in het vooraanzicht van het bordes met de pilaren in de drie treden, maar ook in de tegelvloer in de lijnen evenwijdig aan de horizon.
 Hoofdrichting 3: hoogte, deze zie je in de opgaande lijnen van de zuilen.

15 a



- b De lijnen BC en EF gaan ook door V omdat ze evenwijdig lopen aan AD .
- c De zijden AB , BE , CD en CF lopen evenwijdig aan de horizon.
- d Zie opdracht a.
- e Teken EG even lang als BE .
Zie opdracht a.

16 a In werkelijkheid lopen de diagonalen PT en SQ evenwijdig.



- c QU en RT snijden elkaar na verlenging ook op de horizon omdat ze in werkelijkheid evenwijdig lopen.
- d Teken de voorste zijde van de tegel even lang als PQ .
Zie opdracht b.
- e Zie opdracht b.

17



In de linker tekening snijden de muren en dak elkaar na verlenging in één punt, maar dit is niet het geval voor het raam aan de zijkant van het huis. De regels voor eenpuntperspectief zijn niet overal correct toegepast.



In de middelste tekening snijden de lijnen die naar achteren lopen elkaar na verlenging niet in één punt.

De regels voor eenpuntperspectief zijn niet correct toegepast.

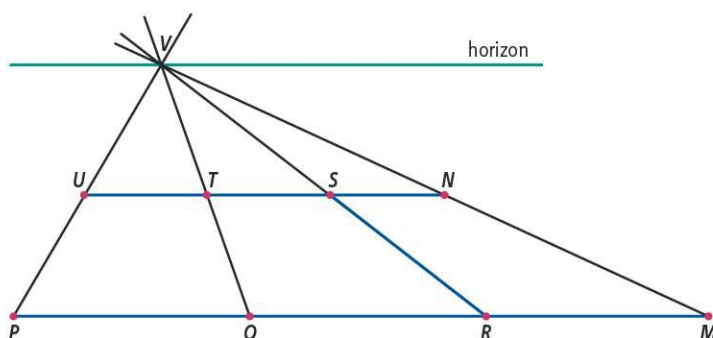
16 Perspectief



Na verlenging van een aantal lijnen die in werkelijkheid evenwijdig lopen, zie je dat deze lijnen in één punt snijden.

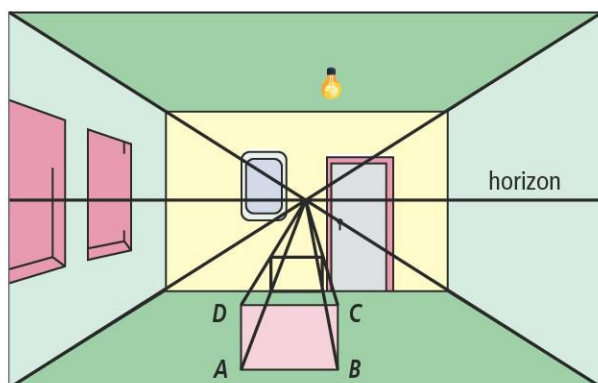
De regels voor eenpuntperspectief zijn hier wel correct toegepast.

015 a



- b In de rechthoekige vloertegel $QRST$ is zijde RS evenwijdig met zijde QT .
- c Het verlengde van zijde QT gaat ook door V .
- d Het verlengde van zijde PU gaat ook door V omdat PU evenwijdig is met RS en QT .
- e Zijde US is ook evenwijdig aan de horizon.
- f Zie opdracht a.
- g Zie opdracht a.
- h Je mag lijn MV tekenen omdat zijde MN evenwijdig is aan zijde RS .
- i Zie opdracht a.

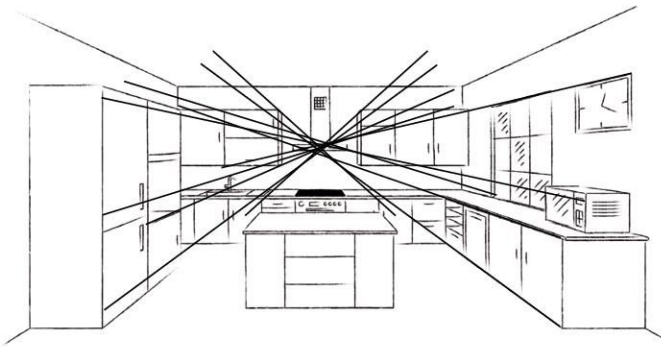
U3 a



- b In de tekening zie je dat wanneer het schilderij tegen de muur staat, dat de hoogte van het schilderij ongeveer $\frac{3}{10}$ deel is van de hoogte van de deur. Het schilderij is ongeveer $\frac{3}{10} \times 200 = 60$ cm hoog.

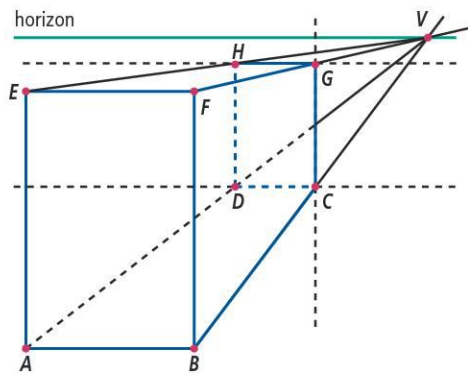
16.4 Teken in eenpuntperspectief

intro

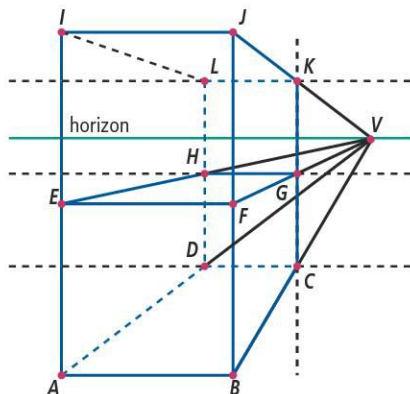


Wanneer je een aantal lijnen tekent langs evenwijdige delen van de keuken, dan zie dat deze door één punt gaan. Ja, de hele keuken is in eenpuntperspectief getekend.

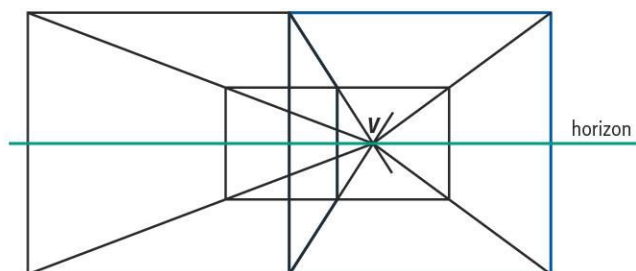
18 a b c d e



19 a b

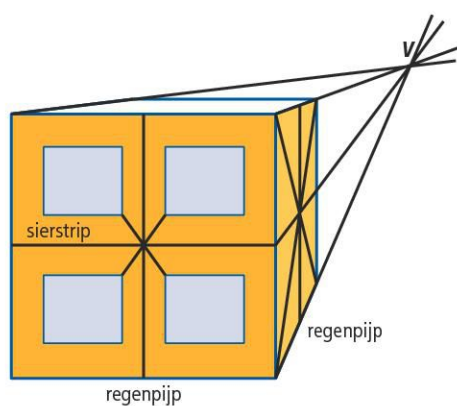


20 a b c



-

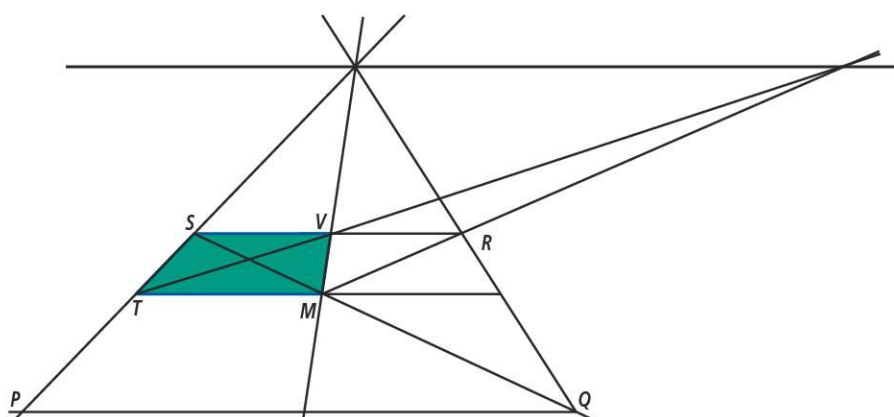
- 22** **a** **b** **c**



- 019 a
-
- Diagram illustrating the construction of a perspective drawing of a rectangular prism. A horizon line is shown at the top. A vanishing point V is marked on the left. A series of lines radiate from V , passing through points H, E, G, F, U on the top edge of the prism. The bottom edge of the prism is a horizontal line segment AB . The vertical edges are AD and BC . The top edge is $HEFGU$. The lines from V to H, E, G, F, U are parallel to the lines from V to D, C, B respectively, indicating they are vanishing lines for the top face. The lines from V to A, B, T are parallel to the lines from V to D, C, B respectively, indicating they are vanishing lines for the bottom face. The lines from V to H, E, G, F, U are parallel to the lines from V to D, C, B respectively, indicating they are vanishing lines for the top face.

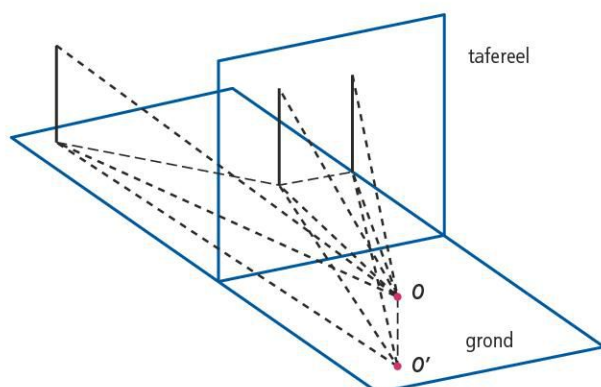
- © Noordhoff Uitgevers bv

U4



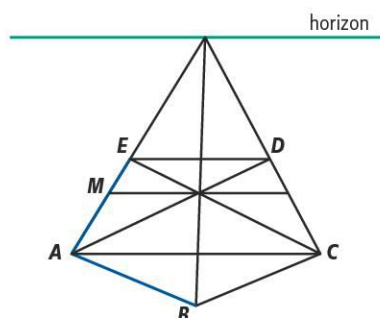
16.5 Gemengde opdrachten

23



- 24 a** Op de tekening zijn de linker man en de rechterman even groot. Omdat het een perspectieftekening is, moeten zaken die verder weg zijn juist kleiner getekend worden.
- b** Noem de afstand tussen de evenwijdige lijnen a . Dan is de linker man ongeveer $3a$ groot en de rechter man $12a$. De linker man is 19 mm groot getekend, de rechter man is vier keer zo groot getekend. Dus zijn lengte zou op de tekening ongeveer $19 : 4 = 4,8$ mm moeten zijn.
- c** De lengte van de tweede man is ongeveer $4a$. Uit $3a = 1,65$ volgt $a = 1,65 : 3 = 0,55$. Dus $4a = 4 \times 0,55 = 2,2$. Hieruit volgt dat de tweede man ongeveer 2,2 meter lang is.

25 a

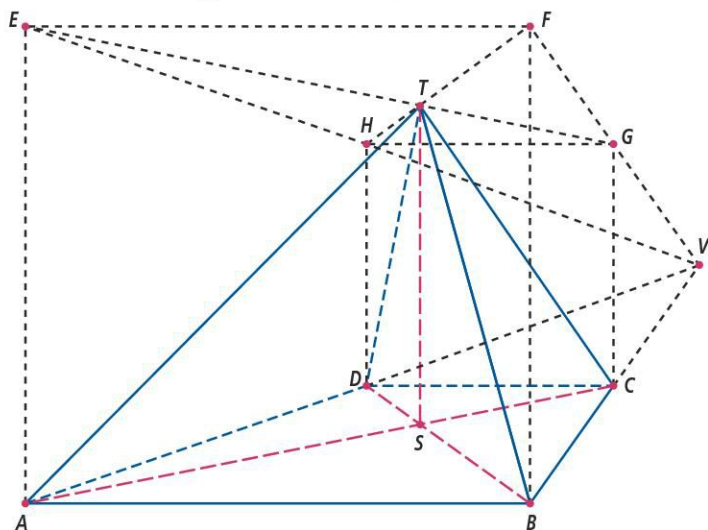


- b** Zie opdracht a.
Punt M is het midden van zijde AE .

16 Perspectief

Onderzoeksoopdrachten

- 26** Piramide $T.ABCD$ past in de kubus $ABCD.EFGH$.
Punt T is het snijpunt van de diagonalen van het bovenvlak van de kubus.



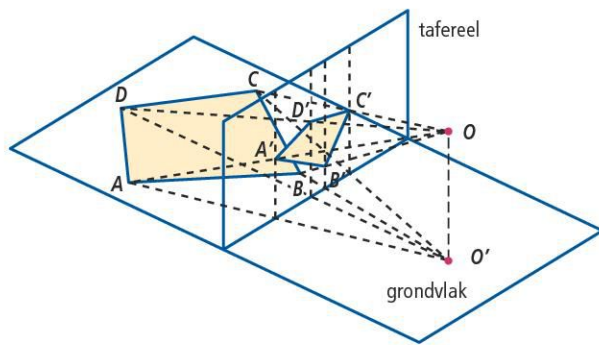
- 27 a** Een aantal elementen die de ruimtelijkheid versterken zijn:
- het plafond van de kapel
 - de trap vooraan de kapel
 - de lichte voorgrond met de donkere achtergrond



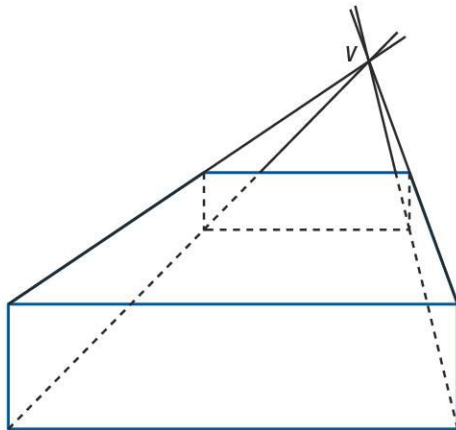
Er is op twee manieren gezocht naar het verdwijnpunt. Er zijn twee verdwijnpunten gevonden, zie de figuur hierboven. Dit betekent dat er inderdaad foutief gebruik is gemaakt van eenpuntperspectief. De wetenschappers hebben gelijk.

Samenvatting

S1



S2



S3 a | hoofdrichting



horizon

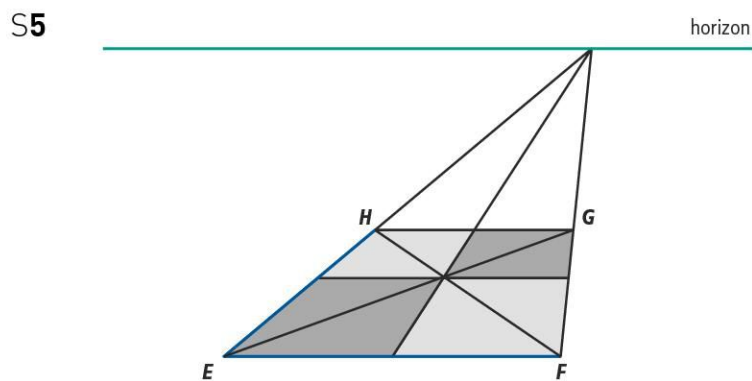
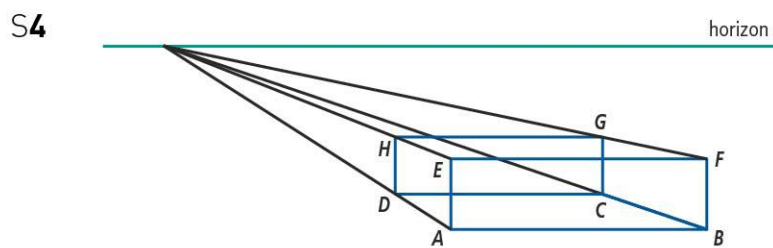
hoofdrichting

b

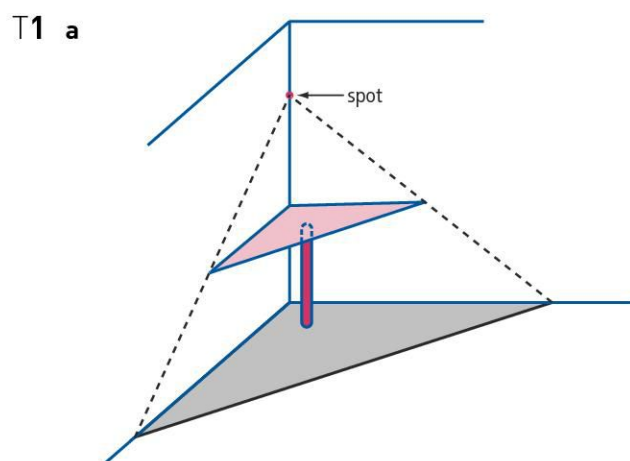


Er zijn twee hoofdrichtingen evenwijdig aan het tafereel, bijvoorbeeld de hoogte en breedte van het gebouw rechtsvoor. Alle lijnen die evenwijdig zijn aan de derde hoofdrichting hebben één verdwijnpunt. De regels voor het tekenen in eenpuntperspectief zijn hier correct toegepast.

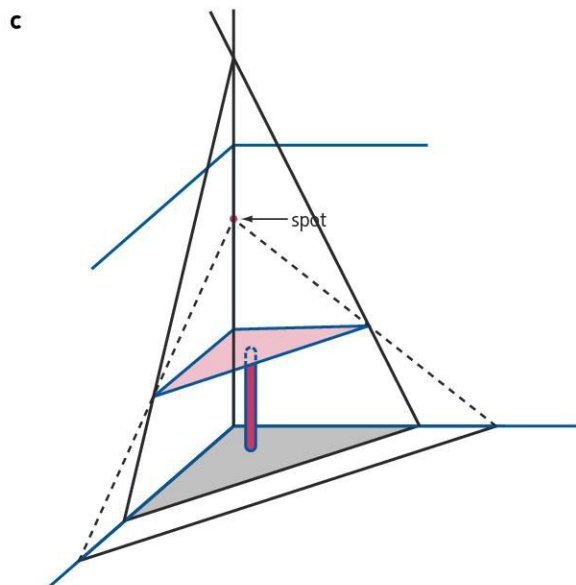
16 Perspectief



Test jezelf

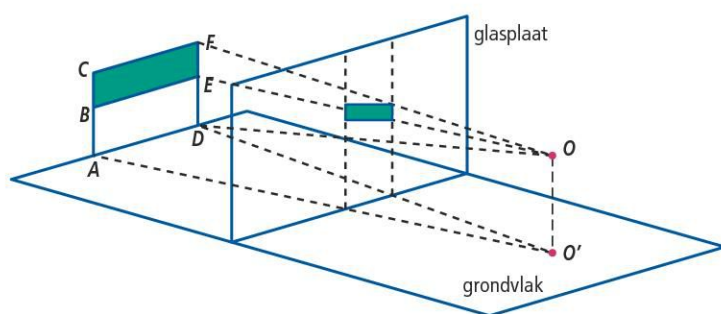


b Als de spot lager wordt opgehangen, wordt de oppervlakte van de schaduw groter.



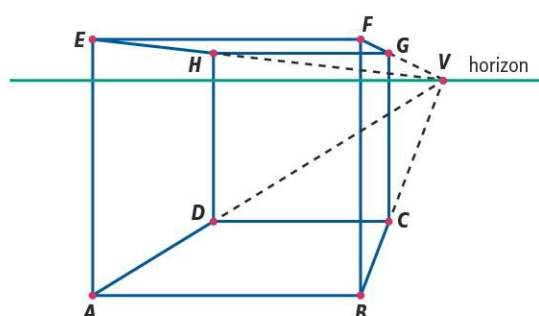
Om de afmetingen van de schaduw $\frac{2}{3}$ deel te laten zijn van die in opdracht a, moet de spot zo hoog worden opgehangen dat hij op de volgende verdieping komt, dus dat zal niet gaan.

T2 a

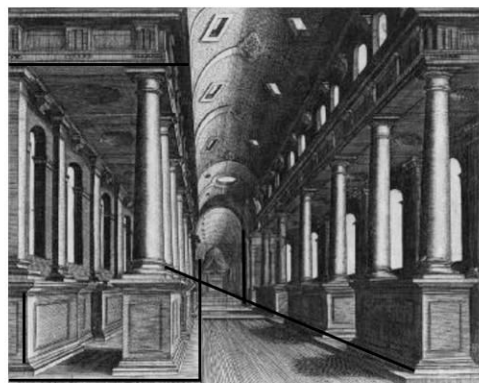


- b Als het spandoek verder van de glasplaat wordt geplaatst, dan wordt het beeld op de glasplaat kleiner.

T3

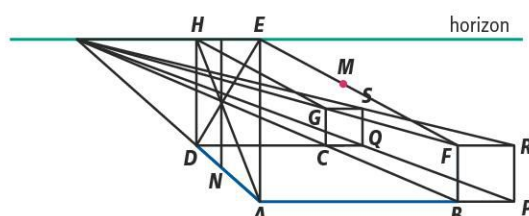


T4 a



- b Ja, want er zijn twee hoofdrichtingen evenwijdig met het tafereel en alle lijnen die evenwijdig zijn aan de derde hoofdrichting hebben één verdwijnpunt.

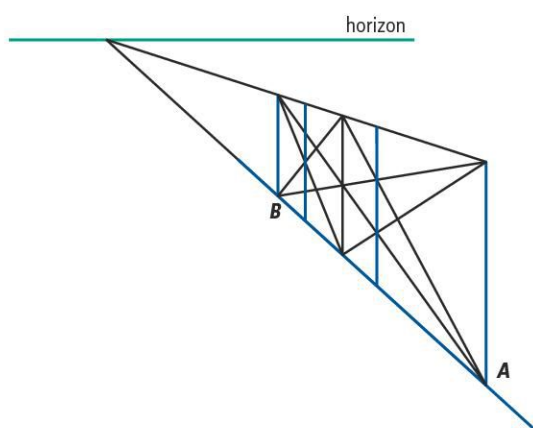
T5 a



- b Zie opdracht a.
 EF loopt evenwijdig met het tafereel. Punt M mag je daarom bepalen door te meten. Punt N bepaal je met behulp van de diagonalen van vlak $ADHE$.
 c Zie opdracht a.

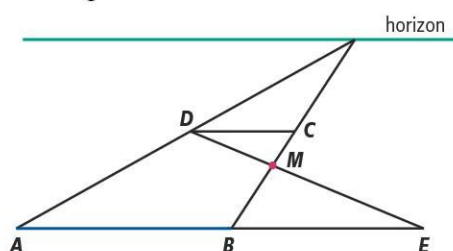
16 Perspectief

T6



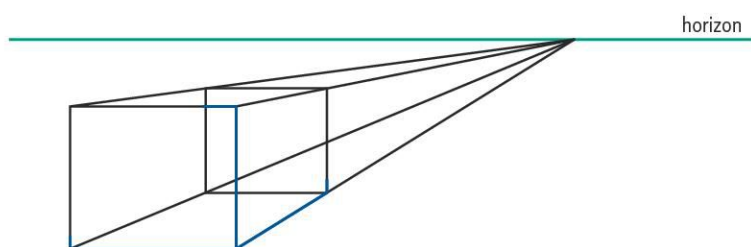
T7

Teken punt E met $AB = BE$.

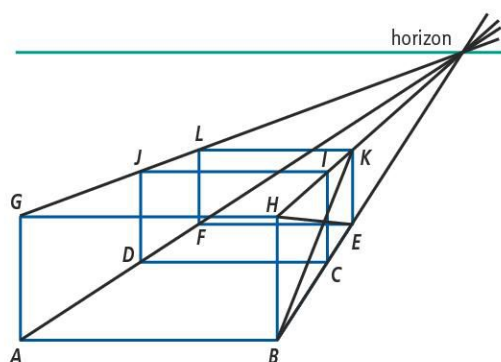


Extra oefening

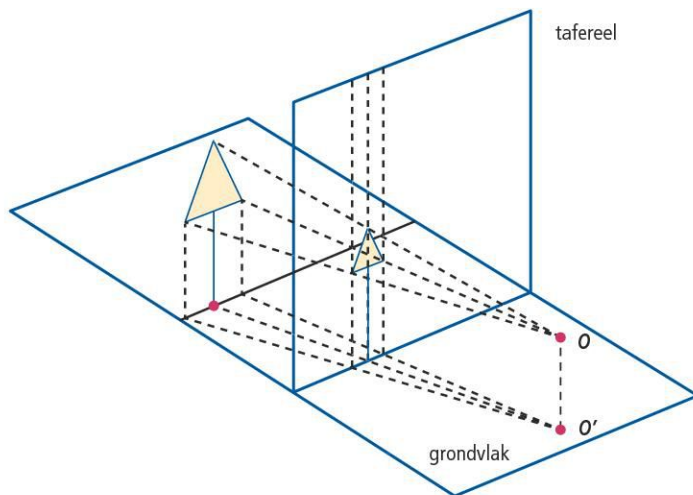
E1



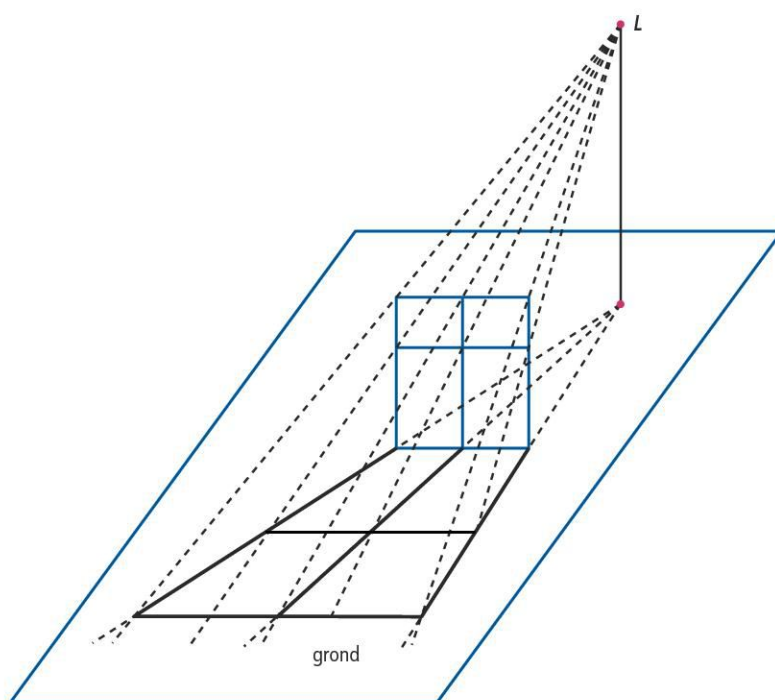
E2



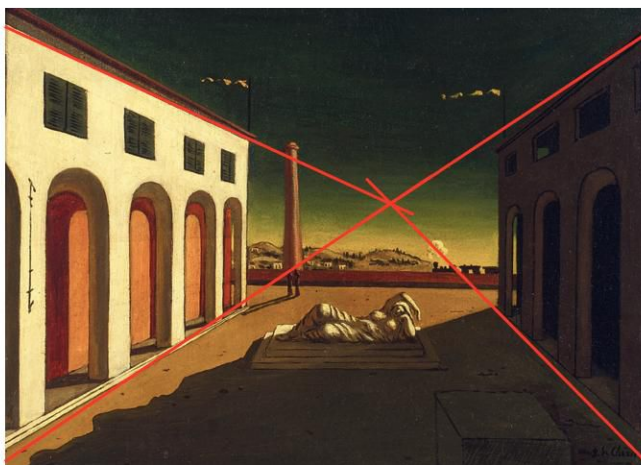
E3



E4



E5



Er zijn twee hoofdrichtingen evenwijdig met het tafereel en alle lijnen die evenwijdig zijn aan de derde hoofdrichting hebben één verdwijnpunt. De regels van het eenpuntperspectief zijn hier correct toegepast.

16 Perspectief

E6

