

Vaardigheden 1

- 1 a** De richtingscoëfficiënt is -2 en het startgetal is 8 , dus $l: y = -2x + 8$.
- b** De richtingscoëfficiënt is $\frac{5-3}{1-0} = 2$ en het startgetal is 3 , dus $m: y = 2x + 3$.
- c** n gaat door de oorsprong, dus het startgetal is nul. $n: y = ax$.
De richtingscoëfficiënt is $\frac{96}{8} = 12$, dus $n: y = 12x$.
- 2 a** m is een horizontale lijn dus de richtingscoëfficiënt van m is 0 .
 m gaat door $(0, 4\frac{1}{2})$ dus $m: y = 4\frac{1}{2}$.
- b** n is een verticale lijn door $(6, 0)$, dus $n: x = 6$.
- c** k gaat door $(0, 3)$ en $(2, 6)$, dus de richtingscoëfficiënt is $\frac{6-3}{2-0} = 1\frac{1}{2}$.
Het startgetal is 3 , dus $k: y = 1\frac{1}{2}x + 3$.
 l gaat door $(0, 8)$ en $(4, 6)$, dus de richtingscoëfficiënt is $\frac{6-8}{4-0} = -\frac{1}{2}$.
Het startgetal is 8 , dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 8$.
- 3 a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- b** De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{41-14}{19-13} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$
- c** De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{36-12}{14-(-2)} = \frac{24}{16} = 1\frac{1}{2}$
- 4 a** Dit is een verticale lijn, dus er is geen richtingscoëfficiënt.
- b** Dit is een horizontale lijn, de richtingscoëfficiënt is 0 .
- c** De richtingscoëfficiënt is $\frac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}-0} = 1$.
- d** De richtingscoëfficiënt is $\frac{1-(-\sqrt{3})}{0-2\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \approx -0,789$.
- 5** $k: y = 4\frac{1}{2}x + b$
 $41 = 4\frac{1}{2} \cdot 19 + b$ geeft $41 = 85\frac{1}{2} + b$, dus $b = -44\frac{1}{2}$
Een vergelijking van k is $y = 4\frac{1}{2}x - 44\frac{1}{2}$
- 6 a** De richtingscoëfficiënt is $\frac{52-10}{17-3} = 3$.
 $l: y = 3x + b$ door $(3, 10)$ geeft $10 = 3 \cdot 3 + b$, dus $b = 1$.
 $l: y = 3x + 1$.
- b** De richtingscoëfficiënt is $\frac{10-8}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$.
 $l: y = \frac{1}{2}x + b$ door $(-2, 8)$ geeft $8 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + b$, dus $b = 9$.
 $l: y = \frac{1}{2}x + 9$.
- c** De richtingscoëfficiënt is $\frac{29-89}{21-25} = 15$.
 $l: y = 15x + b$ door $(25, 89)$ geeft $89 = 15 \cdot 25 + b$, dus $b = -286$.
 $l: y = 15x - 286$.
- d** Een richtingscoëfficiënt is er niet, want het is een verticale lijn. Dus $l: x = 10$.
- e** De richtingscoëfficiënt is 0 , want het is een horizontale lijn. Dus $l: y = 3$.
- f** De richtingscoëfficiënt is $\frac{35-7}{-2-0} = -14$ en het startgetal is 7 . Dus $l: y = -14x + 7$.

7 a $\sqrt{121} = 11$
 b $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
 c $\sqrt{0,36} = 0,6$

d $\sqrt{225} = 15$
 e $\sqrt{169} = 13$
 f $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

8 a $(6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2 = 72$
 b $4\sqrt{7} \cdot 8\sqrt{3} = 32\sqrt{21}$

c $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12} = 10\sqrt{36} = 10 \cdot 6 = 60$
 d $(7\sqrt{3})^2 = 49 \cdot 3 = 147$

9 a $7\sqrt{2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{98}$
 b $9\sqrt{5} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{405}$

c $2\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{6\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{50}$
 d $\frac{1}{2}\sqrt{32} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8}$

10 a $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
 b $\sqrt{54} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$
 c $\sqrt{200} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
 d $\sqrt{75} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
 e $\sqrt{98} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

f $\sqrt{125} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
 g $3\sqrt{24} = 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$
 h $2\sqrt{45} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
 i $8\sqrt{63} = 8 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} = 24\sqrt{7}$
 j $80\sqrt{80} = 80 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 80 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 320\sqrt{5}$

11 a $\sqrt{32} - \sqrt{2} =$
 $4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
 b $4\sqrt{3} + \sqrt{27} =$
 $4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
 c $\sqrt{45} + \sqrt{20} =$
 $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

d $\sqrt{180} - 2\sqrt{80} =$
 $6\sqrt{5} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} =$
 $6\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$
 e $8\sqrt{6} + \sqrt{54} =$
 $8\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 11\sqrt{6}$
 f $18\sqrt{2} - 2\sqrt{18} =$
 $18\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2} =$
 $18\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

12 a $y = \sqrt{4x} + \sqrt{9x}$
 $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$
 $y = 5\sqrt{x}$
 b A $y = \sqrt{16x} + \sqrt{169x}$
 $y = 4\sqrt{x} + 13\sqrt{x}$
 $y = 17\sqrt{x}$
 B $y = \sqrt{18x} + \sqrt{50x}$
 $y = 3\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x}$
 $y = 8\sqrt{2x}$

C $y = \sqrt{100x} - \sqrt{16x}$
 $y = 10\sqrt{x} - 4\sqrt{x}$
 $y = 6\sqrt{x}$
 D $y = \sqrt{\frac{1}{4}x} + \sqrt{25x}$
 $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 5\sqrt{x}$
 $y = 5\frac{1}{2}\sqrt{x}$

13 Dan komt er in de noemer een kwadraat te staan en kun je de breuk voor het wortelteken halen.

14 a $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$

b $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{24}{64}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{24}}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{24} = \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$

c $\frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$

Vaardigheden 1

$$d \quad \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = 1\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$e \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{11} = \frac{1}{11}\sqrt{33}$$

$$f \quad \frac{24}{3\sqrt{2}} = \frac{24}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{24\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{24\sqrt{2}}{6} = 4\sqrt{2}$$

$$15 \quad a \quad \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$$

$$b \quad \frac{5}{9} - \frac{2}{4} = \frac{20}{36} - \frac{18}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$c \quad \frac{11}{9} - \frac{1}{3} = \frac{11}{9} - \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$$

$$d \quad 3 - 1\frac{6}{7} = \frac{3}{1} - \frac{13}{7} = \frac{21}{7} - \frac{13}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$$

$$e \quad 2\frac{3}{7} + 1\frac{1}{2} = \frac{17}{7} + \frac{3}{2} = \frac{34}{14} + \frac{21}{14} = \frac{55}{14} = 3\frac{13}{14}$$

$$f \quad -1\frac{5}{8} + 2\frac{3}{4} = -\frac{13}{8} + \frac{11}{4} = -\frac{13}{8} + \frac{22}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

$$16 \quad a \quad \frac{3}{8} + \frac{5}{9} = \frac{27}{72} + \frac{40}{72} = \frac{67}{72}$$

$$b \quad \frac{7}{9} - \frac{2}{5} = \frac{35}{45} - \frac{18}{45} = \frac{17}{45}$$

$$c \quad \frac{8}{x} + \frac{4}{x} = \frac{12}{x}$$

$$d \quad \frac{6}{17} \times \frac{-3}{4} = -\frac{18}{68} = -\frac{9}{34}$$

$$e \quad \frac{2}{p} \times \frac{5}{p} = \frac{10}{p^2}$$

$$f \quad \frac{a}{6} \times \frac{5}{a} = \frac{5a}{6a} = \frac{5}{6}$$

$$g \quad \frac{3p}{13} \times \frac{2p}{-3} = -\frac{6p^2}{39} = -\frac{2p^2}{13}$$

$$h \quad \frac{3a}{2b} \times \frac{4b}{7a} = \frac{12ab}{14ab} = \frac{6}{7}$$

17 Door 72 als gemeenschappelijke noemer te nemen.

$$18 \quad a \quad \frac{8}{q} + \frac{4}{5q} = \frac{8 \times 5}{5q} + \frac{4}{5q} = \frac{40}{5q} + \frac{4}{5q} = \frac{44}{5q}$$

$$b \quad \frac{12}{8a} - \frac{1}{2a} = \frac{12}{8a} - \frac{4}{8a} = \frac{8}{8a} = \frac{1}{a}$$

$$c \quad \frac{6}{4a} + \frac{5}{7a} = \frac{6 \times 7}{4a \times 7} + \frac{5 \times 4}{7a \times 4} = \frac{42}{28a} + \frac{20}{28a} = \frac{62}{28a} = \frac{31}{14a}$$

$$d \quad \frac{3}{7p} + \frac{q}{p} = \frac{3}{7p} + \frac{7q}{7p} = \frac{3 + 7q}{7p}$$

$$e \quad \frac{8}{a} - \frac{7}{a^2} = \frac{8a}{a^2} - \frac{7}{a^2} = \frac{8a - 7}{a^2}$$

$$f \quad \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{7a} = \frac{2 \times 7}{3a^2 \times 7} + \frac{4 \times 3a}{7a \times 3a} = \frac{14}{21a^2} + \frac{12a}{21a^2} = \frac{14 + 12a}{21a^2}$$

Vaardigheden 2

$$1 \text{ a } \frac{3}{6} - \frac{2}{5} = \frac{15}{30} - \frac{12}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

$$\text{b } \frac{7}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{21}{3x} + \frac{2}{3x} = \frac{23}{3x}$$

$$\text{c } \frac{3}{13} \times \frac{-2}{5} = \frac{-6}{65} = -\frac{6}{65}$$

$$\text{d } \frac{3}{p} \times \frac{4}{p} = \frac{12}{p^2}$$

$$\text{e } \frac{3p}{4} \times \frac{2p}{-5} = \frac{6p^2}{-20} = -\frac{3p^2}{10}$$

$$\text{f } \frac{2a}{5b} \times \frac{3b}{4a} = \frac{6ab}{20ab} = \frac{3}{10}$$

$$2 \text{ a } 3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \times 7}{1 \times 7} = \frac{21}{7} \text{ dus } 3\frac{5}{7} = \frac{21}{7} + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}$$

$$\text{b } \frac{3}{x} + 2 = \frac{3}{x} + \frac{2}{1} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{3+2x}{x}$$

$$\text{c } \text{A } 5\frac{3}{8} = \frac{5 \times 8 + 3}{8} = \frac{43}{8}$$

$$\text{B } \frac{5}{p} + 4 = \frac{5}{p} + \frac{4p}{p} = \frac{5+4p}{p}$$

$$\text{C } 7 - \frac{4}{x} = \frac{7x}{x} - \frac{4}{x} = \frac{7x-4}{x}$$

$$\text{D } 8 + \frac{2}{3x} = \frac{24x}{3x} + \frac{2}{3x} = \frac{24x+2}{3x}$$

$$3 \text{ a } \frac{5p}{3p} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\text{b } \frac{36}{\frac{3}{7}} = \frac{36 \times 7}{3} = \frac{252}{3} = 84$$

$$\text{c } \frac{8p}{12p} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d } \frac{2p}{\frac{1}{p}} = \frac{2p \times p}{1} = 2p^2$$

$$\text{e } \frac{\frac{3}{p}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{p} \times 3}{\frac{1}{3} \times 3} = \frac{9}{p}$$

$$\text{f } \frac{p}{\frac{1}{2}} = \frac{p \times 2}{\frac{1}{2} \times 2} = \frac{2p}{1} = 2p$$

$$\text{g } \frac{\frac{8}{9}}{4} = \frac{\frac{8}{9} \times 9}{4 \times 9} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\text{h } \frac{4p^2}{\frac{2}{p}} = \frac{4p^2 \times p}{\frac{2}{p} \times p} = \frac{4p^3}{2} = 2p^3$$

$$4 \text{ a } -(a+5) - 3 = -a - 5 - 3 = -a - 8$$

$$\text{b } (-2v+3)(3v+8) = -6v^2 - 16v + 9v + 24 = -6v^2 - 7v + 24$$

$$\text{c } (p^3+2)(p-3) = p^4 - 3p^3 + 2p - 6$$

$$\text{d } (3h-2)(2h^2-4) = 6h^3 - 12h - 4h^2 + 8 = 6h^3 - 4h^2 - 12h + 8$$

$$\text{e } \left(\frac{1}{2}n+4\right)\left(\frac{1}{2}n-8\right) = \frac{1}{4}n^2 - 4n + 2n - 32 = \frac{1}{4}n^2 - 2n - 32$$

$$\text{f } -17(3u+5) + 6u = -51u - 85 + 6u = -45u - 85$$

$$\text{g } (2p+4)(8-3p^2) = 16p - 6p^3 + 32 - 12p^2$$

$$\text{h } -5,7(3,5x+6,2) = -19,95x - 35,34$$

$$5 \text{ a } (2h+1)(2h+1) = 4h^2 + 4h + 1$$

$$\text{b } (w-9)(w-9) = w^2 - 18w + 81$$

$$\text{c } (p+4)^2 = p^2 + 8p + 16$$

$$\text{d } (r-4)^2 = r^2 - 8r + 16$$

$$\text{e } (5+p)(5-p) = 25 - p^2$$

$$\text{f } (2e-3)(2e+3) = 4e^2 - 9$$

$$\text{g } (5-q)^2 = 25 - 10q + q^2$$

$$\text{h } \left(v - \frac{1}{3}\right)\left(v - \frac{1}{3}\right) = v^2 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{9}$$

$$6 \text{ a } (p+5)^2 = p^2 + 10p + 25$$

$$\text{b } (2v-4)^2 = 4v^2 - 16v + 16$$

$$\text{c } (b+5)(b-5) = b^2 - 25$$

$$\text{d } (3x-6)(3x+6) = 9x^2 - 36$$

$$\text{e } (2l+3)(l^2-7) =$$

$$2l^3 + 3l^2 - 14l - 21$$

$$\text{f } (3u-0,5)^2 = 9u^2 - 3u + 0,25$$

$$\text{g } \left(\frac{1}{2}r+2\right)^2 = \frac{1}{4}r^2 + 2r + 4$$

$$\text{h } (p^2-5)(p^2+5) = p^4 - 25$$

$$\text{i } x(x+1)^2 = x(x^2+2x+1) =$$

$$x^3 + 2x^2 + x$$

$$\text{j } (x-y^2)(x+y^2) = x^2 - y^4$$

7 a $(x + 3)^2 = 4(x + 2) + 1$

$$x^2 + 6x + 9 = 4x + 8 + 1$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -2$$

b $(x + 4)(x - 4) = x(x + 8)$

$$x^2 - 16 = x^2 + 8x$$

$$8x = -16$$

$$x = -2$$

8 a $3k = 2(k + 5)$

$$3k = 2k + 10$$

$$k = 10$$

c $2(t + 5)^2 = 14 + 2t$

$$2(t^2 + 10t + 25) = 14 + 2t$$

$$2t^2 + 20t + 50 = 14 + 2t$$

$$2t^2 + 18t + 36 = 0$$

$$t^2 + 9t + 18 = 0$$

$$(t + 3)(t + 6) = 0$$

$$t + 3 = 0 \text{ of } t + 6 = 0$$

$$t = -3 \text{ of } t = -6$$

b $(c + 2)(c - 2) = 5$

$$c^2 - 4 = 5$$

$$c^2 = 9$$

$$c = 3 \text{ of } c = -3$$

d $(b - 10)(b + 1) = 12$

$$b^2 - 9b - 10 = 12$$

$$b^2 - 9b - 22 = 0$$

$$(b - 11)(b + 2) = 0$$

$$b - 11 = 0 \text{ of } b + 2 = 0$$

$$b = 11 \text{ of } b = -2$$

9 a Vergelijking A en D kun je oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken.

A $(x + 2)(0,2x - 8) = 0$

$$x + 2 = 0 \text{ of } 0,2x - 8 = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 40$$

D $(x + 7)^2 - 11 = 25$

$$(x + 7)^2 = 36$$

$$x + 7 = 6 \text{ of } x + 7 = -6$$

$$x = -1 \text{ of } x = -13$$

b B $(2x - 5)(2x + 5) = 24$

$$4x^2 - 25 = 24$$

$$4x^2 = 49$$

$$2x = 7 \text{ of } 2x = -7$$

$$x = 3\frac{1}{2} \text{ of } x = -3\frac{1}{2}$$

C $(2x + 3)^2 + 2x = 3$

$$4x^2 + 12x + 9 + 2x = 3$$

$$4x^2 + 14x + 6 = 0$$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

$$x = \frac{-7 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 + 5}{4} = -\frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 - 5}{4} = -3$$

E $(-4x + 1)(4x + 1) = 17$

$$-16x^2 + 1 = 17$$

$$-16x^2 = 16$$

$$x^2 = -1, \text{ dus geen oplossing.}$$

Vaardigheden 2

$$F \quad 6x(x-1) = 1 - 5x$$

$$6x^2 - 6x = 1 - 5x$$

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot -1 = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{25}}{12} = \frac{1 + 5}{12} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{1 - \sqrt{25}}{12} = \frac{1 - 5}{12} = -\frac{1}{3}$$

- 10 a** Als $3x + 6 = 15$, dan kun je in de vergelijking $3x + 6$ door 15 vervangen.

Dan staat er links en rechts hetzelfde, namelijk $15 \cdot (x + 4) = 15 \cdot (x + 4)$.

- b** Als $x - 4 = 0$, dan kun je in de vergelijking $x - 4$ door 0 vervangen en staat er $(3x + 6) \cdot 0 = 15 \cdot 0$ ofwel $0 = 0$ en dat is ook waar.

- c** $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$

$$3x + 6 = 15 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$3x = 9 \text{ of } x = 4$$

$$x = 3 \text{ of } x = 4$$

- 11 a** $(2x + 5)(x - 1) = 3(x - 1)$

$$2x + 5 = 3 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$2x = -2 \text{ of } x = 1$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

- b** $x^2(2x - 9) = 7x^2$

$$x^2 = 0 \text{ of } 2x - 9 = 7$$

$$x = 0 \text{ of } 2x = 16$$

$$x = 0 \text{ of } x = 8$$

- c** $(3x - 4)(2x - 3) = (x + 1)(2x - 3)$

$$3x - 4 = x + 1 \text{ of } 2x - 3 = 0$$

$$2x = 5 \text{ of } 2x = 3$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 1\frac{1}{2}$$

- d** $(5x + 3)(x^2 - 9) = 7(5x + 3)$

$$5x + 3 = 0 \text{ of } x^2 - 9 = 7$$

$$5x = -3 \text{ of } x^2 = 16$$

$$x = -\frac{3}{5} \text{ of } x = 4 \text{ of } x = -4$$

- 12 a** $2 - (x - 4)^2 = 1$

$$(x - 4)^2 = 1$$

$$x - 4 = 1 \text{ of } x - 4 = -1$$

$$x = 5 \text{ of } x = 3$$

- b** $(5x - 125)(x^2 - 81) = 0$

$$5x - 125 = 0 \text{ of } x^2 - 81 = 0$$

$$5x = 125 \text{ of } x^2 = 81$$

$$x = 25 \text{ of } x = 9 \text{ of } x = -9$$

- c** $(x + 2)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$

$$(x + 2)^2 = (3 - 2x)^2$$

$$x + 2 = 3 - 2x \text{ of } x + 2 = -3 + 2x$$

$$3x = 1 \text{ of } -x = -5$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ of } x = 5$$

- d** $(0,5x + 2)^2 - 2x = 20$

$$0,25x^2 + 2x + 4 - 2x = 20$$

$$0,25x^2 = 16$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8 \text{ of } x = -8$$

- 13 a** $2x^2 + 3x - 5 = 7x + 1$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

- b** De grafiek van f ligt boven de grafiek van g op $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$.

- c** $f(x) > g(x)$.

14 a $(1 - x)^2 = 5$

$$1 - x = \sqrt{5} \text{ of } 1 - x = -\sqrt{5}$$

$$x = 1 - \sqrt{5} \approx -1,24 \text{ of } x = 1 + \sqrt{5} \approx 3,24$$

Uit de grafiek blijkt $g(x) < 5$ voor $1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}$.

b $g(0) = (1 - 0)^2 = 1^2 = 1$ en $h(0) = \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + 1\right)^2 = 1^2 = 1$, klopt.

Dus het punt $(1, 0)$ is een snijpunt van de grafieken.

c Een kwadratische vergelijking heeft alleen één oplossing als de snijpunten samenvallen, dat is hier niet het geval, dus moet er nog een snijpunt zijn.

d Een kwadratische vergelijking heeft maximaal twee oplossingen.

e Eerst het tweede snijpunt berekenen.

$$(1 - x)^2 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$$

$$1 - x = \frac{1}{2}x + 1 \text{ of } 1 - x = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$-1\frac{1}{2}x = 0 \text{ of } -\frac{1}{2}x = -2$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

Het tweede snijpunt ligt bij $x = 4$.

Uit de grafiek blijkt dat $h(x) > g(x)$ voor $0 < x < 4$.

15 a $k(x) = \sqrt{4 - 2x}$

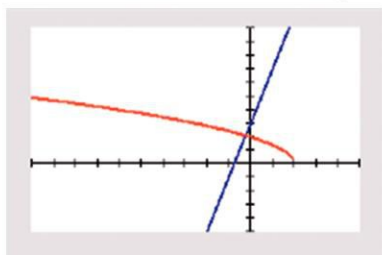
$$4 - 2x \geq 0$$

$$2x \leq 4$$

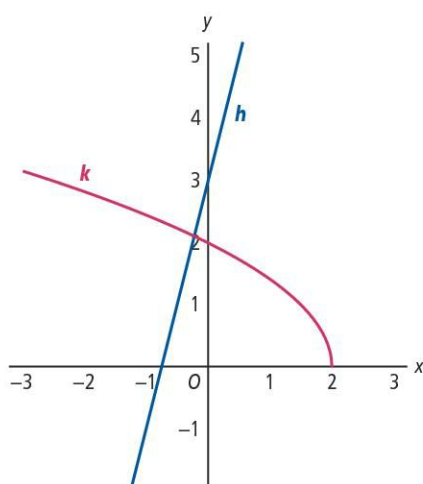
$x \leq 2$, dus het domein is $\langle \leftarrow, 2 \rangle$ en het bereik is $[0, \rightarrow)$.

b Invoer: $y_1 = 4x + 3$ en $y_2 = \sqrt{4 - 2x}$

Venster: $-10 \leq x \leq 5$ en $-5 \leq y \leq 8$



Schets:



Vaardigheden 2

c $h(x) = k(x)$

$$4x + 3 = \sqrt{4 - 2x}$$

$$(4x + 3)^2 = 4 - 2x$$

$$16x^2 + 24x + 9 = 4 - 2x$$

$$16x^2 + 26x + 5 = 0$$

$$D = 26^2 - 4 \cdot 16 \cdot 5 = 356$$

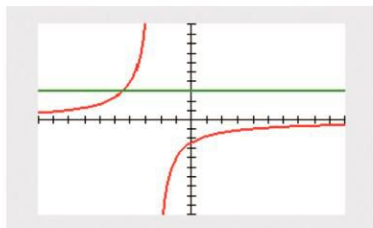
$$x = \frac{-26 + \sqrt{356}}{32} \approx -0,22 \text{ of } x = \frac{-26 - \sqrt{356}}{32} \approx -1,40$$

Uit de grafiek blijkt dat alleen $x \approx -0,22$ voldoet.

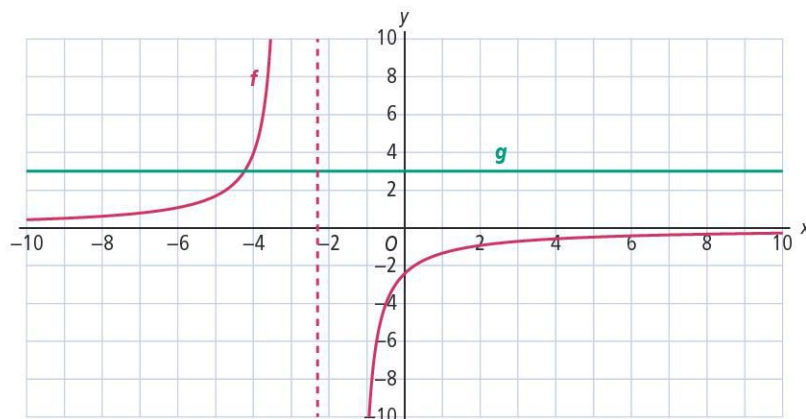
$$h(x) \geq k(x) \text{ voor } -0,22 \leq x \leq 2.$$

16 a Invoer: $y_1 = -\frac{12}{2x+5}$ en $y_2 = 3$.

Venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$.



Schets:



b Het domein van f is $\langle \leftarrow, -2\frac{1}{2} \rangle \cup \langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

$$-\frac{12}{2x+5} = 3$$

$$-12 = 3(2x+5)$$

$$-12 = 6x + 15$$

$$6x = -27$$

$$x = -4\frac{1}{2}$$

Uit de grafiek blijkt $f(x) < g(x)$ voor $\langle \leftarrow, -4\frac{1}{2} \rangle \cup \langle -2\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

Vaardigheden 3

$$1 \text{ a } \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{3} = \frac{21}{36} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{b } \frac{2}{-11} \cdot \frac{-3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{-6}{-77} + \frac{2}{7} = \frac{6}{77} + \frac{22}{77} = \frac{28}{77} = \frac{4}{11}$$

$$\text{c } \frac{2}{3p} \cdot \frac{3}{p} + \frac{1}{2p} = \frac{6}{3p^2} + \frac{1}{2p} = \frac{12}{6p^2} + \frac{3p}{6p^2} = \frac{12+3p}{6p^2} = \frac{4+p}{2p^2}$$

$$\text{d } \frac{2a}{3} \cdot \frac{6}{4a} - \frac{1}{2} = \frac{12a}{12a} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e } \frac{3p}{7\frac{1}{2}} \cdot \frac{2p}{-3} = \frac{6p^2}{-22\frac{1}{2}} = -\frac{12p^2}{45} = -\frac{4p^2}{15}$$

$$\text{f } \frac{5}{4b^2} \cdot \frac{2b}{5a} = \frac{10b}{20ab^2} = \frac{1}{2ab}$$

$$2 \text{ a } \frac{9a}{27a} = \frac{1}{3}$$

$$\text{d } \frac{2p}{\frac{4}{3p}} = \frac{2p \times 3p}{\frac{4}{3p} \times 3p} = \frac{6p^2}{4} = 1\frac{1}{2}p^2$$

$$\text{b } \frac{9q}{7\frac{1}{2}q} = \frac{18q}{15q} = \frac{6 \times 3 \times q}{5 \times 3 \times q} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

$$\text{e } \frac{\frac{9}{11}}{3} = \frac{\frac{9}{11} \times 11}{3 \times 11} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$$

$$\text{c } \frac{12}{\frac{p}{3}} = \frac{12 \times 3}{\frac{p}{3} \times 3} = \frac{36}{p}$$

$$\text{f } \frac{\frac{3}{p}}{8p} = \frac{\frac{3}{p} \times p}{8p \times p} = \frac{3}{8p^2}$$

$$3 \text{ a } \frac{2}{a} - \frac{a}{2} = \frac{4}{2a} - \frac{a^2}{2a} = \frac{4-a^2}{2a}$$

$$\text{b } \frac{a}{b} + \frac{b}{2a} = \frac{2a^2}{2ab} + \frac{b^2}{2ab} = \frac{2a^2+b^2}{2ab}$$

$$\text{c } (2x+x^2) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2x+x^2}{x^3} = \frac{x(2+x)}{x \cdot x^2} = \frac{2+x}{x^2}$$

$$\text{d } \frac{3}{x} \cdot \frac{x+1}{3x} = \frac{3(x+1)}{3x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$

$$\text{e } \frac{4(x+1)}{x} - \frac{1}{4}x = \frac{4(x+1)}{x} - \frac{x}{4} = \frac{16(x+1)}{4x} - \frac{x^2}{4x} = \frac{16x+16-x^2}{4x} = \frac{-x^2+16x+16}{4x}$$

$$\text{f } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} - \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{4x}{x^2-1}$$

$$\text{g } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{x^2+x+1}{x^3}$$

$$\text{h } \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-1-(x+1)+1}{x^2-1} = \frac{-1}{x^2-1}$$

$$4 \text{ a } y = \sqrt{16x} + \sqrt{25x}$$

$$y = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{x}$$

$$y = 4\sqrt{x} + 5\sqrt{x}$$

$$y = 9\sqrt{x}$$

$$\text{b A } y = \sqrt{25x} + \sqrt{144x}$$

$$y = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{144} \cdot \sqrt{x}$$

$$y = 5\sqrt{x} + 12\sqrt{x}$$

$$y = 17\sqrt{x}$$

$$\text{B } y = \sqrt{27x} + \sqrt{75x}$$

$$y = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3x} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{3x}$$

$$y = 3\sqrt{3x} + 5\sqrt{3x}$$

$$y = 8\sqrt{3x}$$

$$C \quad y = \sqrt{121x} - \sqrt{64x}$$

$$y = \sqrt{121} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{64} \cdot \sqrt{x}$$

$$y = 11\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$$

$$y = 3\sqrt{x}$$

$$D \quad y = \sqrt{\frac{1}{9}x} + \sqrt{\frac{4}{25}x}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \sqrt{x}$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{5}\sqrt{x}$$

$$y = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)\sqrt{x}$$

$$y = \left(\frac{5}{15} + \frac{6}{15}\right)\sqrt{x}$$

$$y = \frac{11}{15}\sqrt{x}$$

$$5 \quad a \quad (\sqrt{2} + 4\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$$

$$b \quad (\sqrt{5} + 4\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5} + 3\sqrt{5})^2 = (4\sqrt{5})^2 = 16 \cdot 5 = 80$$

$$c \quad (\sqrt{6} + 4\sqrt{24})^2 = (\sqrt{6} + 4 \cdot 2\sqrt{6})^2 = (\sqrt{6} + 8\sqrt{6})^2 = (9\sqrt{6})^2 = 81 \cdot 6 = 486$$

$$d \quad (7\sqrt{2} - 2\sqrt{32})^2 = (7\sqrt{2} - 2 \cdot 4\sqrt{2})^2 = (7\sqrt{2} - 8\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2$$

$$6 \quad a \quad \frac{12}{\sqrt{7}} = \frac{12}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{7}}{7} = 1\frac{5}{7}\sqrt{7}$$

$$b \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$$

$$c \quad \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$d \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1,25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1,25}} \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{15}}{5} = \frac{2\sqrt{15}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$$

7 a Lijn 1 gaat door (0, 0) en (2, -4).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{-4}{2} = -2$ en het startgetal is 0.

Een vergelijking van lijn 1 is $y = -2x$.

Lijn 2 gaat door (-4, 0) en (0, 2).

Een vergelijking van lijn 2 is $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$.

Lijn 3 gaat door (3, 4) en (4, 0).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{4-0}{3-4} = -4$.

$y = -4x + b$ door (4, 0) geeft $0 = -4 \cdot 4 + b$ dus $b = 16$.

Een vergelijking van lijn 3 is $y = -4x + 16$.

Lijn 4 gaat door (3, -3) en (4, 0).

De richtingscoëfficiënt is $\frac{-3-0}{3-4} = 3$.

$y = 3x + b$ door (3, -3) geeft $-3 = 3 \cdot 3 + b$ dus $b = -12$.

Een vergelijking van lijn 4 is $y = 3x - 12$.

$$b \quad y = 3$$

$$c \quad x = 1$$

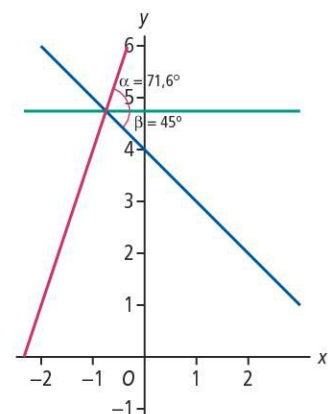
Vaardigheden 3

- 8 a** $l: y = -3x + b$ door $(3, 7)$ geeft $7 = -3 \cdot 3 + b$ dus $b = 16$.
Een vergelijking van l is $y = -3x + 16$.
- b** De richtingscoëfficiënt is $\frac{16-1}{0-2} = 7\frac{1}{2}$ en het startgetal is 16.
Een vergelijking van m is $y = 7\frac{1}{2}x + 16$.
- c** De richtingscoëfficiënt van n is ook $-0,25$, dus een vergelijking van n is $y = -0,25x + b$.
Invullen van $x = 16$ en $y = -12$ geeft $-12 = -0,25 \cdot 16 + b$ dus $b = -12 + 4 = -8$. Een vergelijking van n is $y = -0,25x - 8$.
- d** q staat loodrecht op de lijn met richtingscoëfficiënt 4, dus geldt voor de richtingscoëfficiënt a van q dat $a \cdot 4 = -1$, dus $a = -\frac{1}{4}$.
 $q: y = -\frac{1}{4}x + b$ door $(-2, 4)$ geeft $4 = -\frac{1}{4} \cdot -2 + b$ dus $b = 3\frac{1}{2}$.
Een vergelijking van q is $y = -\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{2}$.

- 9 a** $3x - 7 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 $2\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2}$
 $x = 3$ en $y = 3 \cdot 3 - 7 = 2$
Het snijpunt is $(3, 2)$.
- b** $2x - 3y = 5$
 $-3y = -2x + 5$
 $y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$
Gelijkstellen:
 $\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$
 $4x - 10 = -3x + 39$
 $7x = 49$
 $x = 7$ en $y = -\frac{1}{2} \cdot 7 + 6\frac{1}{2} = 3$
Het snijpunt is $(7, 3)$.

- c** $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$
 $3x + 2y = 12$
 $y = -1\frac{1}{2}x + 6$
Gelijkstellen:
 $-1\frac{1}{2}x + 6 = 3x + 4$
 $-4\frac{1}{2}x = -2$
 $9x = 4$
 $x = \frac{4}{9}$ en $y = 3 \cdot \frac{4}{9} + 4 = 1\frac{1}{3} + 4 = 5\frac{1}{3}$
Het snijpunt is $(\frac{4}{9}, 5\frac{1}{3})$.

- 10 a** $y = 3x + 7$
 $\tan(\alpha) = 3$ geeft $\alpha \approx 71,6^\circ$.
 $y = -x + 4$
 $\tan(\beta) = 1$ geeft $\beta = 45^\circ$.
Uit de schets blijkt dat de scherpe hoek die de lijnen maken gelijk is aan $180^\circ - 45^\circ - 71,6^\circ \approx 63^\circ$.

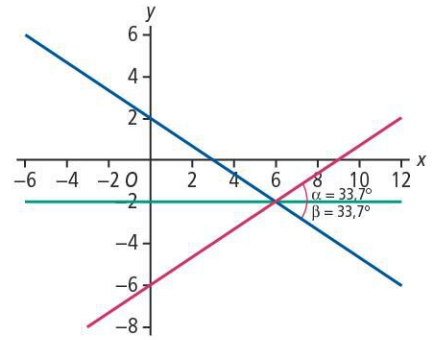


$$\begin{aligned} \text{b } 2x - 3y &= 18 \\ 3y &= 2x - 18 \\ y &= \frac{2}{3}x - 6 \\ \tan(\alpha) &= \frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha \approx 33,7^\circ. \end{aligned}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ y &= -\frac{2}{3}x + 2 \\ \tan(\beta) &= \frac{2}{3} \text{ geeft } \beta \approx 33,7^\circ. \end{aligned}$$

Uit de schets blijkt dat de scherpe hoek die de lijnen maken gelijk is aan $33,7^\circ + 33,7^\circ \approx 67^\circ$.



11 A De groeifactor is $\frac{400}{500} = 0,8$, de beginhoeveelheid is 500.

Een formule bij tabel A is $N = 500 \cdot 0,8^t$

B De groeifactor is $\frac{5400}{4500} = 1,2$, de beginhoeveelheid is $4500 : 1,2^2 = 3125$.

Een formule bij tabel B is $N = 3125 \cdot 1,2^t$

12 a De groeifactor per 4 jaar is $\frac{2916}{36} = 81$.

b De groeifactor per jaar is $81^{\frac{1}{4}} = 3$.

c De groeifactor per jaar is 3, dan is het groeipercentage $(3 - 1) \cdot 100\% = 200\%$.

d De beginhoeveelheid is $36 : 3^2 = 4$.

Een formule bij de tabel is $A = 4 \cdot 3^t$ met t in jaren.

e De groeifactor per jaar is 3, dus de groeifactor per maand is $3^{\frac{1}{12}} \approx 1,096$.

Met t in maanden is een formule $A = 4 \cdot 1,096^t$

13 a $128 = 2^7$

b $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{16} \sqrt{2} = \frac{1}{2^4} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-4} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-3\frac{1}{2}}$

d $\frac{1}{4} \sqrt{32} = \frac{1}{2^2} \cdot (32)^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

e $16\sqrt[3]{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{4\frac{1}{3}}$

f $\frac{1}{8} \sqrt[3]{8} = \frac{1}{2^3} \cdot (8)^{\frac{1}{3}} = 2^{-3} \cdot (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{-3} \cdot 2^1 = 2^{-2}$

14 a $x^3 \cdot x^2 = x^5$

b $x \cdot (x^4)^3 = x \cdot x^{12} = x^{13}$

c $(x^{-3} \cdot x^3)^2 = x^{-6} \cdot x^6 = x^0 = 1$

d $x^3 \cdot (x^{2a})^3 = x^3 \cdot x^{6a} = x^{3+6a}$

e $x^{3a} \cdot (x^{a+1})^2 = x^{3a} \cdot x^{2a+2} = x^{5a+2}$

f $(x^a \cdot x^{2a} \cdot x^{3a})^3 = (x^{6a})^3 = x^{18a}$

15 a $(a^2 \cdot 2a^3)^4 = (2a^5)^4 = 16a^{20}$

b $\frac{(4a^3)^3}{(2a)^2} = \frac{64a^9}{4a^2} = 16a^7$

c $\frac{6a}{2\sqrt{a}} = \frac{6a}{2a^{\frac{1}{2}}} = 3a^{\frac{1}{2}}$

d $a \cdot \sqrt[3]{125a^2} \cdot \sqrt{25a} = a \cdot 5 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot 5 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 25a^{2\frac{1}{6}}$

Vaardigheden 3

$$\text{e} \quad \frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{8a}}{\sqrt{a}} = \frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot 2 \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot a^{\frac{3}{12}} \cdot a^{\frac{4}{12}} \cdot a^{-\frac{6}{12}} = 2a^{\frac{1}{12}}$$

$$\text{f} \quad \frac{3}{a^2} \cdot \frac{a^5}{a^4 \sqrt[3]{a^3}} = \frac{3 \cdot a^5}{a^2 \cdot a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = 3 \cdot a^5 \cdot a^{-2} \cdot a^{-1} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = 3a^{\frac{1}{4}}$$

$$16 \text{ a} \quad y = 4\left(\frac{1}{2}t - 1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}t - 1\right) + 8$$

$$y = 4\left(\frac{1}{4}t^2 - t + 1\right) - t + 2 + 8$$

$$y = t^2 - 4t + 4 - t + 10$$

$$y = t^2 - 5t + 14$$

$$\text{b} \quad y = 4\left(\frac{1}{2}t^2 + 4\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}t^2 + 4\right) - 40$$

$$y = 4\left(\frac{1}{4}t^4 + 4t^2 + 16\right) - 3t^2 - 24 - 40$$

$$y = t^4 + 16t^2 + 64 - 3t^2 - 64$$

$$y = t^4 + 13t^2$$

$$17 \text{ a} \quad y = \frac{1}{8}(2t^5)^4 - \frac{1}{2}(2t^5)^3$$

$$y = \frac{1}{8} \cdot 16t^{20} - \frac{1}{2} \cdot 8t^{15}$$

$$y = 2t^{20} - 4t^{15}$$

$$\text{c} \quad y = 2(t^{-1})^{-2} - 3(t^{-1})^{-1} + 4$$

$$y = 2t^2 - 3t + 4$$

$$\text{b} \quad y = \frac{(t+2)^2 + (t+2)}{(t+2)^2 - 4(t+2) + 4}$$

$$y = \frac{t^2 + 4t + 4 + t + 2}{t^2 + 4t + 4 - 4t - 8 + 4}$$

$$y = \frac{t^2 + 5t + 6}{t^2}$$

$$\text{d} \quad y = \frac{1}{\frac{1}{t} + 2 - 2} + 5$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{t}} + 5$$

$$y = t + 5$$

$$18 \quad y = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \text{ met } x = \frac{1}{t} \text{ geeft}$$

$$y = \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1} - \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1}$$

$$y = \frac{1}{t^{-2} - 1} - \frac{1}{t^{-2} + 1}$$

$$y = \frac{1}{t^{-2} - 1} \cdot \frac{t^2}{t^2} - \frac{1}{t^{-2} + 1} \cdot \frac{t^2}{t^2}$$

$$y = \frac{t^2}{1 - t^2} - \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$y = \frac{t^2(1 + t^2)}{(1 - t^2)(1 + t^2)} - \frac{t^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)(1 - t^2)}$$

$$y = \frac{t^2 + t^4}{1 - t^4} - \frac{t^2 - t^4}{1 - t^4}$$

$$y = \frac{2t^4}{1 - t^4}$$

19 a $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$ met $\sqrt{x} = t$ en dus $x = t^2$ geeft

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$(t - 3)(t - 4) = 0$$

$$t - 3 = 0 \text{ of } t - 4 = 0$$

$$t = 3 \text{ of } t = 4$$

$$\sqrt{x} = 3 \text{ of } \sqrt{x} = 4$$

$$x = 9 \text{ of } x = 16$$

b $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ met $x^3 = t$ en dus $x^6 = t^2$ geeft

$$t^2 + 7t - 8 = 0$$

$$(t + 8)(t - 1) = 0$$

$$t = -8 \text{ of } t = 1$$

$$x^3 = -8 \text{ of } x^3 = 1$$

$$x = -2 \text{ of } x = 1$$

c $4(2x - 1)^2 + 8(2x - 1) - 5 = 0$ met $2x - 1 = t$ geeft

$$4t^2 + 8t - 5 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5 = 64 + 80 = 144$$

$$t = \frac{-8 + \sqrt{144}}{8} = \frac{-8 + 12}{8} = \frac{1}{2} \text{ of } t = \frac{-8 - \sqrt{144}}{8} = \frac{-8 - 12}{8} = -2\frac{1}{2}$$

$$2x - 1 = \frac{1}{2} \text{ of } 2x - 1 = -2\frac{1}{2}$$

$$2x = 1\frac{1}{2} \text{ of } 2x = -1\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ of } x = -\frac{3}{4}$$

d $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ met $3^x = t$ en dus $3^{2x} = t^2$ geeft

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$(t - 1)(t - 9) = 0$$

$$t = 1 \text{ of } t = 9$$

$$3^x = 1 \text{ of } 3^x = 9$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

20 a $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

Neem $3^x = p$, dit geeft

$$p^2 - 12p + 27 = 0$$

$$(p - 3)(p - 9) = 0$$

$$p - 3 = 0 \text{ of } p - 9 = 0$$

$$p = 3 \text{ of } p = 9$$

$$3^x = 3 \text{ of } 3^x = 9$$

$$x = 1 \text{ of } x = 2$$

b $4^{2x} - 4^x - 12 = 0$

Neem $4^x = p$, dit geeft

$$p^2 - p - 12 = 0$$

$$(p - 4)(p + 3) = 0$$

$$p - 4 = 0 \text{ of } p + 3 = 0$$

$$p = 4 \text{ of } p = -3$$

$$4^x = 4 \text{ of } 4^x = -3 \text{ (geen opl.)}$$

$$x = 1$$

e $8(x - 2)^2 = 2(x - 2)$

Neem $x - 2 = p$, dit geeft

$$8p^2 = 2p$$

$$8p^2 - 2p = 0$$

$$2p(4p - 1) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = \frac{1}{4}$$

$$x - 2 = 0 \text{ of } x - 2 = \frac{1}{4}$$

$$x = 2 \text{ of } x = 2\frac{1}{4}$$

f $4x^4 + 7x^2 = 2$

Neem $x^2 = p$, dit geeft

$$4p^2 + 7p = 2$$

$$4p^2 + 7p - 2 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 49 + 32 = 81$$

$$p = \frac{-7 + \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 + 9}{8} = \frac{1}{4} \text{ of }$$

$$p = \frac{-7 - \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 - 9}{8} = -2$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \text{ of } x^2 = -2 \text{ (geen opl.)}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ of } x = -\frac{1}{2}$$

Vaardigheden 3

c $(4^x - 1)(4^x + 1) = 3$

Neem $4^x = p$, dit geeft

$$(p - 1)(p + 1) = 3$$

$$p^2 - 1 = 3$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2 \text{ of } p = -2$$

$$4^x = 2 \text{ of } 4^x = -2 \text{ (geen opl.)}$$

$$(2^2)^x = 2$$

$$2^{2x} = 2^1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

d $x - 2\sqrt{x} = 0$

Neem $\sqrt{x} = p$, en $x = p^2$, dit geeft

$$p^2 - 2p = 0$$

$$p(p - 2) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p - 2 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = 2$$

$$\sqrt{x} = 0 \text{ of } \sqrt{x} = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

g $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Neem $\sqrt{x} = p$ en $x = p^2$, dit geeft

$$p^2 - 5p + 6 = 0$$

$$(p - 2)(p - 3) = 0$$

$$p - 2 = 0 \text{ of } p - 3 = 0$$

$$p = 2 \text{ of } p = 3$$

$$\sqrt{x} = 2 \text{ of } \sqrt{x} = 3$$

$$x = 4 \text{ of } x = 9$$

h $5^{2x} - 125 \cdot 5^x = 0$

Neem $5^x = p$, dit geeft

$$p^2 - 125p = 0$$

$$p(p - 125) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p - 125 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = 125$$

$$5^x = 0 \text{ (kan niet) of } 5^x = 125 = 5^3$$

$$x = 3$$

Vaardigheden 4

- 1 a** $x^3 \cdot (x^2)^4 = x^3 \cdot x^8 = x^{11}$
- b** $(x\sqrt{x})^3 = (x \cdot x^{\frac{1}{2}})^3 = (x^{\frac{3}{2}})^3 = x^{\frac{9}{2}}$
- c** $(x \cdot x^2\sqrt[3]{x^2})^3 = (x \cdot x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}})^3 = (x^{\frac{10}{3}})^3 = x^{10}$
- d** $((x^2)^3)^4 = (x^6)^4 = x^{24}$
- e** $(x^{-2} \cdot \sqrt{x})^{-3} = (x^{-2} \cdot x^{\frac{1}{2}})^{-3} = (x^{-\frac{3}{2}})^{-3} = x^{\frac{9}{2}}$
- f** $\frac{x\sqrt{x}}{x^3} = \frac{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-3} = x^{-\frac{5}{2}}$
- 2 a** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$
- b** $5\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 30\sqrt{6}$
- c** $(3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$
- d** $(-2\sqrt{5})^4 = 16 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$
- e** $4\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$
- f** $8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + 7\sqrt{6} = 16\sqrt{6} + 7\sqrt{6} = 23\sqrt{6}$
- g** $(\sqrt{6})^2 + 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 6 + 5\sqrt{6}$
- h** $(5\sqrt{6})^3 = 5^3 \cdot (\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{6} = 125 \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 750\sqrt{6}$
- 3 a** $\sqrt{200} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
- b** $\sqrt{63} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$
- c** $\sqrt{108} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
- d** $\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
- e** $\frac{1}{4}\sqrt{32} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$
- f** $\frac{1}{5}(\sqrt{40} + \sqrt{90}) = \frac{1}{5}(\sqrt{4} \cdot \sqrt{10} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}) = \frac{1}{5}(2\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) = \sqrt{10}$
- g** $\sqrt{75} - \sqrt{48} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$
- h** $\sqrt{98} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
- 4 a** $\frac{8}{3a} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3a} + \frac{2a}{3a} = \frac{8+2a}{3a}$
- b** $\frac{13}{2p} - \frac{7}{3p} = \frac{13 \cdot 3}{6p} - \frac{7 \cdot 2}{6p} = \frac{39}{6p} - \frac{14}{6p} = \frac{25}{6p}$
- c** $\frac{a}{3b} + \frac{4}{5b} = \frac{a \cdot 5}{15b} + \frac{4 \cdot 3}{15b} = \frac{5a+12}{15b}$
- d** $\frac{11}{4a^2} - \frac{4}{2a} = \frac{11}{4a^2} - \frac{4 \cdot 2a}{4a^2} = \frac{11-8a}{4a^2}$
- e** $\frac{d^2}{4} \cdot \frac{7}{d} = \frac{7d^2}{4d} = \frac{7d}{4}$
- f** $\frac{2a}{7} \cdot \frac{21}{8a} = \frac{42a}{56a} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$
- g** $\frac{3a^2}{2b} \cdot \frac{4b}{7a} = \frac{12a^2b}{14ab} = \frac{6a}{7}$
- h** $\frac{2a}{5} \cdot \frac{7}{4a^3} = \frac{14a}{20a^3} = \frac{7}{10a^2}$
- 5 a** $3(2\frac{1}{4}p - 4) = 5p - 3$
 $6\frac{3}{4}p - 12 = 5p - 3$
 $1\frac{3}{4}p = 9$
 $7p = 36$
 $p = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$
- b** $-10\frac{1}{2}s = 7 - (13 - 9s)$
 $-10\frac{1}{2}s = 7 - 13 + 9s$
 $-19\frac{1}{2}s = -6$
 $39s = 12$
 $s = \frac{12}{39} = \frac{4}{13}$
- c** $\frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}m + 2\frac{1}{4}$
 $-\frac{3}{4}m = 2\frac{3}{4}$
 $-3m = 11$
 $m = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}$
- d** $3\frac{1}{2} - 4(2x - 8) = 13$
 $3\frac{1}{2} - 8x + 32 = 13$
 $-8x + 35\frac{1}{2} = 13$
 $-8x = -22\frac{1}{2}$
 $16x = 45$
 $x = \frac{45}{16} = 2\frac{13}{16}$

6 a $(x-6)(2x+7)=0$

$$x-6=0 \text{ of } 2x+7=0$$

$$x=6 \text{ of } 2x=-7$$

$$x=6 \text{ of } x=-3\frac{1}{2}$$

b $(5p+10)(p-3)=18(p-3)$

$$p-3=0 \text{ of } 5p+10=18$$

$$p=3 \text{ of } 5p=8$$

$$p=3 \text{ of } p=1\frac{3}{5}$$

c $(8a+1)^2=81$

$$8a+1=9 \text{ of } 8a+1=-9$$

$$8a=8 \text{ of } 8a=-10$$

$$a=1 \text{ of } a=-1\frac{1}{4}$$

d $2x^2+5x+2=0$

$$D=5^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$$

$$x=\frac{-5+\sqrt{9}}{4} \text{ of } x=\frac{-5-\sqrt{9}}{4}$$

$$x=\frac{-5+3}{4}=-\frac{1}{2} \text{ of } x=\frac{-5-3}{4}=-2$$

e $3x^2+3x=5x+4$

$$3x^2-2x-4=0$$

$$D=(-2)^2-4\cdot 3\cdot -4=4+48=52$$

$$x=\frac{2+\sqrt{52}}{6} \text{ of } x=\frac{2-\sqrt{52}}{6}$$

$$x=\frac{2+2\sqrt{13}}{6} \text{ of } x=\frac{2-2\sqrt{13}}{6}$$

$$x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{13} \text{ of } x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{13}$$

7 a $2^x=8\sqrt{2}$

$$2^x=2^3\cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^x=2^{3\frac{1}{2}}$$

$$x=3\frac{1}{2}$$

b $\frac{1}{4}\cdot 3^x=25$

$$3^x=100$$

$$x={}^3\log(100)$$

c $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=8\cdot 2^x$

$$2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^3\cdot 2^x$$

$$2^2(2^{-1})^x=2^{3+x}$$

$$2^2\cdot 2^{-x}=2^{3+x}$$

$$2^{2-x}=2^{3+x}$$

$$2-x=3+x$$

$$-2x=1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

f $(x+4)(\frac{1}{2}x-7)=(\frac{1}{2}x-7)(6-x)$

$$\frac{1}{2}x-7=0 \text{ of } x+4=6-x$$

$$\frac{1}{2}x=7 \text{ of } 2x=2$$

$$x=14 \text{ of } x=1$$

g $15-(3-a)^2=6$

$$(3-a)^2=9$$

$$3-a=3 \text{ of } 3-a=-3$$

$$a=0 \text{ of } a=6$$

h $x^2=11x$

$$x=0 \text{ of } x=11$$

i $(2x-3)^2=x$

$$4x^2-12x+9=x$$

$$4x^2-13x+9=0$$

$$D=(-13)^2-4\cdot 4\cdot 9=25$$

$$x=\frac{13+\sqrt{25}}{8} \text{ of } x=\frac{13-\sqrt{25}}{8}$$

$$x=\frac{13+5}{8}=2\frac{1}{4} \text{ of } x=\frac{13-5}{8}=1$$

j $(7-s)^2=9s^2$

$$7-s=3s \text{ of } 7-s=-3s$$

$$-4s=-7 \text{ of } 2s=-7$$

$$s=1\frac{3}{4} \text{ of } s=-3\frac{1}{2}$$

d $25\cdot 5^{4x-1}=5\sqrt{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$

$$5^2\cdot 5^{4x-1}=5\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot (5^{-1})^{2x}$$

$$5^{4x+1}=5^{1\frac{1}{2}}\cdot 5^{-2x}$$

$$5^{4x+1}=5^{1\frac{1}{2}-2x}$$

$$4x+1=1\frac{1}{2}-2x$$

$$6x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{12}$$

e $7^{x+2}=500$

$$x+2={}^7\log(500)$$

$$x=-2+{}^7\log(500)$$

f $10\cdot 0,1^{x+10}=0,1\cdot (\sqrt[5]{100})^x$

$$10\cdot (10^{-1})^{x+10}=10^{-1}\cdot (10^{\frac{2}{5}})^x$$

$$10^1\cdot 10^{-x-10}=10^{-1}\cdot 10^{\frac{2}{5}x}$$

$$10^{-x-9}=10^{-1+\frac{2}{5}x}$$

$$-x-9=-1+\frac{2}{5}x$$

$$-1\frac{2}{5}x=8$$

$$x=-5\frac{5}{7}$$

Vaardigheden 4

- g** $15 \cdot 3^{7x+9} = 5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{8-x}$
 $3 \cdot 3^{7x+9} = \left(\frac{1}{9}\right)^{8-x}$
 $3 \cdot 3^{7x+9} = (3^{-2})^{8-x}$
 $3^{7x+10} = 3^{-16+2x}$
 $7x + 10 = -16 + 2x$
 $5x = -26$
 $x = -5\frac{1}{5}$
- h** $21 \cdot 9^{6-x} = 63 \cdot 27^{\frac{1}{2}x+4}$
 $9^{6-x} = 3 \cdot 27^{\frac{1}{2}x+4}$
 $(3^2)^{6-x} = 3 \cdot (3^3)^{\frac{1}{2}x+4}$
 $3^{12-2x} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+12}$
 $12 - 2x = 1\frac{1}{2}x + 13$
 $-3\frac{1}{2}x = 1$
 $x = -\frac{2}{7}$
- 8 a** $a^3 = 100$
 $a = \sqrt[3]{100} \approx 4,64$
- b** $-2a^2 = -34$
 $a^2 = 17$
 $a = \sqrt{17}$ of $a = -\sqrt{17}$
 $a \approx 4,12$ of $a \approx -4,12$
- c** $a^4 - 12 = 9$
 $a^4 = 21$
 $a = \sqrt[4]{21}$ of $a = -\sqrt[4]{21}$
 $a \approx 2,14$ of $a \approx -2,14$
- d** $8 + 3a^{\frac{1}{3}} = 14$
 $3a^{\frac{1}{3}} = 6$
 $a^{\frac{1}{3}} = 2$
 $a = 2^3 = 8$
- e** $1,5a^4 = -10$
 geen oplossing
- f** $0,2a^5 = -10$
 $a^5 = -50$
 $a = -\sqrt[5]{50} \approx -2,19$
- g** $15 - 3p^{\frac{2}{3}} = 9$
 $-3p^{\frac{2}{3}} = -6$
 $p^{\frac{2}{3}} = 2$
 $p = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \approx 2,83$
- h** $8 + 0,5x^{0,25} = 9$
 $0,5x^{0,25} = 1$
 $x^{0,25} = 2$
 $x = 2^{\frac{1}{0,25}} = 2^4 = 16$
- 9** $x + 4 = 4x^2 - 8x + 4$
 $4x^2 - 9x = 0$
 $x(4x - 9) = 0$
 $x = 0$ of $4x - 9 = 0$
 $x = 0$ of $4x = 9$
 $x = 0$ of $x = 2\frac{1}{4}$
 controle: $x = 0$ invullen: $1 + \sqrt{4} = -1$ klopt niet.
 $x = 2\frac{1}{4}$ invullen: $1 + \sqrt{6\frac{1}{4}} = 4\frac{1}{2} - 1$ klopt.
 De oplossing is $x = 2\frac{1}{4}$
- 10 a** $\sqrt{x-8} = 5$
 $x - 8 = 25$
 $x = 33$
 controle: $\sqrt{25} = 5$ klopt.
 oplossing: $x = 33$
- b** $\sqrt{2a+3} = 5$
 $2a + 3 = 25$
 $2a = 22$
 $a = 11$
 controle: $\sqrt{22+3} = 5$, klopt.
 oplossing: $a = 11$
- c** $3 + \sqrt{2p+4} = 10$
 $\sqrt{2p+4} = 7$
 $2p + 4 = 49$
 $2p = 45$
 $p = 22\frac{1}{2}$
 controle: $3 + \sqrt{2 \cdot 22\frac{1}{2} + 4} = 10$, klopt.
 oplossing: $p = 22\frac{1}{2}$
- d** $3 + \sqrt{x} = x - 3$
 $\sqrt{x} = x - 6$
 $x = (x - 6)^2$
 $x = x^2 - 12x + 36$
 $x^2 - 13x + 36 = 0$
 $(x - 4)(x - 9) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x - 9 = 0$
 $x = 4$ of $x = 9$
 controle: $3 + \sqrt{4} = 4 - 3$, klopt niet.
 $3 + \sqrt{9} = 9 - 3$, klopt.
 oplossing: $x = 9$

e $2 + \sqrt{q-2} = 6$
 $\sqrt{q-2} = 4$
 $q-2 = 16$
 $q = 18$
 controle: $2 + \sqrt{18-2} = 6$, klopt.
 oplossing: $q = 18$

g $\sqrt{3d+1} = 2+d$
 $3d+1 = (2+d)^2$
 $3d+1 = 4+4d+d^2$
 $d^2+d+3=0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$
 geen oplossing.

f $\sqrt{6a-5} = a$
 $6a-5 = a^2$
 $a^2-6a+5=0$
 $(a-5)(a-1)=0$
 $a=5$ of $a=1$
 controle: $\sqrt{30-5} = 5$ klopt.
 $\sqrt{6-5} = 1$ klopt.
 oplossing: $a=5$ of $a=1$

h $6x + \sqrt{x} = 7x - 20$
 $\sqrt{x} = x - 20$
 $x = (x-20)^2$
 $x = x^2 - 40x + 400$
 $x^2 - 41x + 400 = 0$
 $(x-16)(x-25) = 0$
 $x-16=0$ of $x-25=0$
 $x=16$ of $x=25$
 controle:
 $96 + \sqrt{16} = 112 - 20$, klopt niet.
 $150 + \sqrt{25} = 175 - 20$ klopt.
 oplossing: $x=25$

11 $8q^2 - 20q + 12 = 0$
 $D = (-20)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 12 = 400 - 384 = 16$
 $q = \frac{20 + \sqrt{16}}{2 \cdot 8} = \frac{20+4}{16} = 1\frac{1}{2}$ of $q = \frac{20 - \sqrt{16}}{2 \cdot 8} = \frac{20-4}{16} = 1$

12 a $\frac{1}{h+4} + 8 = 8\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{h+4} = \frac{1}{2}$
 $1 = \frac{1}{2}(h+4)$ mits $h \neq -4$
 $1 = \frac{1}{2}h + 2$
 $\frac{1}{2}h = -1$
 $h = -2$

b $\frac{7}{2a-3} = 2a+3$
 $7 = (2a+3)(2a-3)$
 $7 = 4a^2 - 9$ mits $a \neq 1\frac{1}{2}$
 $4a^2 = 16$
 $a^2 = 4$
 $a = 2$ of $a = -2$

c $\frac{3x^2}{x+1} = x$
 $3x^2 = x(x+1)$ mits $x \neq -1$
 $3x^2 = x^2 + x$
 $2x^2 - x = 0$
 $x(2x-1) = 0$
 $x=0$ of $2x-1=0$
 $x=0$ of $2x=1$
 $x=0$ of $x=\frac{1}{2}$

d $\frac{p}{p+3} = \frac{1}{2p}$
 $p \cdot 2p = 1 \cdot (p+3)$
 $2p^2 = p+3$ mits $p \neq -3$ en $p \neq 0$
 $2p^2 - p - 3 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$
 $p = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$ of $p = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$
 $p = \frac{1+5}{4} = 1\frac{1}{2}$ of $p = \frac{1-5}{4} = -1$

13 a $\sin(2x) = 1$
 $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
 de oplossingen op het interval $[0, 3\pi]$ zijn $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$ of $x = 2\frac{1}{4}\pi$.

Vaardigheden 4

b $\cos(3x) = 1$

$$3x = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$x = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

de oplossingen op het interval $[0, 3\pi]$ zijn $x = 0$ of $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 1\frac{1}{3}\pi$ of $x = 2\pi$ of $x = 2\frac{2}{3}\pi$.

c $2\cos(3x) = 1$

$$\cos(3x) = \frac{1}{2}$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \frac{5}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

de oplossingen op het interval $[0, 3\pi]$ zijn $x = \frac{1}{9}\pi$ of $x = \frac{5}{9}\pi$ of $x = \frac{7}{9}\pi$ of $x = 1\frac{2}{9}\pi$ of

$$x = 1\frac{4}{9}\pi \text{ of } x = 1\frac{8}{9}\pi \text{ of } x = 2\frac{1}{9}\pi \text{ of } x = 2\frac{5}{9}\pi \text{ of } x = 2\frac{7}{9}\pi.$$

d $2\sin(\pi x) = \sqrt{2}$

$$\sin(\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\pi x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4} + k \cdot 2 \text{ of } x = \frac{3}{4} + k \cdot 2$$

de oplossingen op het interval $[0, 3\pi]$ zijn $x = \frac{1}{4}$ of $x = \frac{3}{4}$ of $x = 2\frac{1}{4}$ of $x = 2\frac{3}{4}$ of

$$x = 4\frac{1}{4} \text{ of } x = 4\frac{3}{4} \text{ of } x = 6\frac{1}{4} \text{ of } x = 6\frac{3}{4} \text{ of } x = 8\frac{1}{4} \text{ of } x = 8\frac{3}{4}$$

14 $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ herleid je tot $\begin{cases} x + 6y = 15 \\ x + y = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 6y = 15 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad -$$

$$5y = 11$$

$$\text{dus } y = 2\frac{1}{5} \text{ en } x = 4 - 2\frac{1}{5} = 1\frac{4}{5}$$

15 a $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$ substitueren van de onderste vergelijking in de bovenste geeft

$$4x + 3(-4x + 3) = 1$$

$$4x - 12x + 9 = 1$$

$$-8x = -8$$

$$\text{dus } x = 1 \text{ en } y = -4 \cdot 1 + 3 = -1$$

b $\begin{cases} y + 3x = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$ schrijf je als $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$ en elimineer y :

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases} \quad -$$

$$-2x = -4$$

$$\text{dus } x = 2 \text{ en } y = -3 \cdot 2 = -6$$

c $\begin{cases} 4p - q = 10 \\ 13q - 7p = 5 \end{cases}$ herleid je tot $\begin{cases} -13q + 52p = 130 \\ 13q - 7p = 5 \end{cases}$ en elimineer q :

$$\begin{cases} -13q + 52p = 130 \\ 13q - 7p = 5 \end{cases} \quad +$$

$$45p = 135$$

$$\text{dus } p = 3 \text{ en } q = 4 \cdot 3 - 10 = 2$$

d $\begin{cases} 8a - 12 = 3b \\ 6b - 7a + 2 = 0 \end{cases}$ herleid je tot $\begin{cases} 16a - 6b = 24 \\ -7a + 6b = -2 \end{cases}$ en elimineer b :

$$\begin{cases} 16a - 6b = 24 \\ -7a + 6b = -2 \end{cases} +$$

$$\frac{9a}{9a} = 22$$

dus $a = 2\frac{4}{9}$ en $3b = 8 \cdot 2\frac{4}{9} - 12$

$$3b = 19\frac{5}{9} - 12$$

$$3b = 7\frac{5}{9}$$

$$b = \frac{68}{27} = 2\frac{14}{27}$$

e $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ herleid je tot $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$ en elimineer y :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} +$$

$$\frac{5x}{5x} = 20$$

dus $x = 4$ en $y = 6 - 4 = 2$

f $\begin{cases} 3b + 7a = 18 \\ a - 4b = 7 \end{cases}$ herleid je tot $\begin{cases} 7a + 3b = 18 \\ 7a - 28b = 49 \end{cases}$ en elimineer a :

$$\begin{cases} 7a + 3b = 18 \\ 7a - 28b = 49 \end{cases} -$$

$$31b = -31$$

dus $b = -1$ en $a = 7 + 4 \cdot -1 = 3$

16 a $f(x) = 4x^2 - 6x + 13$
 $f'(x) = 8x - 6$

c $h(x) = (2x + 7)^2$
 $h(x) = 4x^2 + 28x + 49$
 $h'(x) = 8x + 28$

b $g(x) = (3x + 7)(8 - x)$
 $g(x) = 24x - 3x^2 + 56 - 7x$
 $g(x) = -3x^2 + 17x + 56$
 $g'(x) = -6x + 17$

d $k(x) = 4x^3(x^2 + 7)$
 $k(x) = 4x^5 + 28x^3$
 $k'(x) = 20x^4 + 84x^2$

17 a $f(x) = 3x^2 + 6$
 $f'(x) = 6x$

de helling in het punt $(1, 9)$ is $f'(1) = 6 \cdot 1 = 6$

b $g(x) = 2x^3$
 $g'(x) = 6x^2$

de helling in het punt $(-2, -16)$ is $g'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 = 24$

c $h(x) = 5x(x^2 - x^4)$
 $h(x) = 5x^3 - 5x^5$
 $h'(x) = 15x^2 - 25x^4$

de helling in het punt $(1, 0)$ is $h'(1) = 15 - 25 = -10$

18 $f(x) = x^3 + ax^2 + x$
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$

de helling is -1 voor $x = 2$, dus $f'(2) = -1$.

$$3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + 1 = -1$$

$$12 + 4a + 1 = -1$$

$$4a = -14$$

$$a = -3\frac{1}{2}$$

Vaardigheden 5

- 1 a** $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$ **c** $x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$
b $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$ **d** $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
- 2 a** $y = x^2 + 4x + 7$ **c** $y = x^2 - 1,2x - 1$
 $y = (x + 2)^2 - 4 + 7$ $y = (x - 0,6)^2 - 0,36 - 1$
 $y = (x + 2)^2 + 3$ $y = (x - 0,6)^2 - 1,36$
b $y = x^2 - 7x - 8$ **d** $y = x^2 + 5x + 4$
 $y = \left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4} - 8$ $y = \left(x + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} + 4$
 $y = \left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 - 20\frac{1}{4}$ $y = \left(x + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4}$
- 3 a** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$ geeft $y = \frac{1}{2}(x^2 + 6x - 4)$
b $x^2 + 6x - 4 = (x + 3)^2 - 9 - 4 = (x + 3)^2 - 13$
c $y = \frac{1}{2}((x + 3)^2 - 13)$
 $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 6\frac{1}{2}$
- 4 a** $y = 2x^2 + 5x + 3$ **c** $y = 3x^2 - x$
 $y = 2\left(x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}\right)$ $y = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right)$
 $y = 2\left(\left(x + 1\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right)$ $y = 3\left(\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right)$
 $y = 2\left(x + 1\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ $y = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$
b $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$ **d** $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$
 $y = \frac{1}{4}(x^2 - 12x - 4)$ $y = 1\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
 $y = \frac{1}{4}((x - 6)^2 - 40)$ $y = 1\frac{1}{2}((x - 2)^2 - 2)$
 $y = \frac{1}{4}(x - 6)^2 - 10$ $y = 1\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$
- 5 a** $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$ $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$
 $f(x) = 3(x^2 - 2x - 8)$ $f(x) = 3(x^2 - 2x - 8)$
 $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ $f(x) = 3((x - 1)^2 - 9)$
 $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$
b Met $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$ bereken je handig de coördinaten van de top, deze zijn namelijk $(1, -27)$.
c Met $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$ bereken je handig de coördinaten van de snijpunten met de x -as, deze zijn $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.
d Met $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ bereken je handig de coördinaten van het snijpunt met de y -as, deze zijn $(0, -24)$.
- 6 a** De parabool snijdt de x -as in de punten $(6, 0)$ en $(-12, 0)$.
De symmetrieas is de lijn $x = -3$.
 $f(-3) = -6(-3 - 6)(-3 + 12) = -6 \cdot -9 \cdot 9 = 486$.
De top is het punt $(-3, 486)$.
b $2(x + 1)^2 - 18 = 0$ geeft $(x + 1)^2 = 9$.
 $x + 1 = -3$ of $x + 1 = 3$
 $x = -4$ of $x = 2$
De snijpunten met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(2, 0)$.
De top is het punt $(-1, -18)$.

- c** $h(x) = x^2 + 4x - 12$ is te schrijven als $h(x) = (x + 6)(x - 2)$.
De snijpunten met de x -as zijn $(-6, 0)$ en $(2, 0)$.
 $h(x) = x^2 + 4x - 12$ is ook te schrijven als $h(x) = (x + 2)^2 - 16$.
De top is het punt $(-2, -16)$.
- d** $-2x^2 + 16x + 18 = 0$ geeft $x^2 - 8x - 9 = 0$.
 $(x - 9)(x + 1) = 0$
 $x = 9$ of $x = -1$
De snijpunten met de x -as zijn $(9, 0)$ en $(-1, 0)$.
 $k(x) = -2(x^2 - 8x - 9)$
 $k(x) = -2((x - 4)^2 - 25)$
 $k(x) = -2(x - 4)^2 + 50$
De top is het punt $(4, 50)$.

7 a $10x + 5y = 12$
 $10x = -5y + 12$
 $x = -0,5y + 1,2$

c $y = 2\sqrt{x - 10}$
 $\frac{1}{2}y = \sqrt{x - 10}$
 $\frac{1}{4}y^2 = x - 10$
 $x = \frac{1}{4}y^2 + 10$

b $y = \frac{8}{x - 1}$
 $y(x - 1) = 8$
 $x - 1 = \frac{8}{y}$
 $x = \frac{8}{y} + 1$

d $y = {}^2\log(x + 6)$
 $x + 6 = 2^y$
 $x = 2^y - 6$

8 a $pq + 2q = 4$
 $q(p + 2) = 4$
 $p + 2 = \frac{4}{q}$
 $p = \frac{4}{q} - 2$

c $q = \frac{4}{\sqrt{p + 2}}$
 $q\sqrt{p + 2} = 4$
 $\sqrt{p + 2} = \frac{4}{q}$
 $p + 2 = \frac{16}{q^2}$
 $p = \frac{16}{q^2} - 2$

b $q = \frac{4}{2p + 5}$
 $q(2p + 5) = 4$
 $2p + 5 = \frac{4}{q}$
 $2p = \frac{4}{q} - 5$
 $p = \frac{2}{q} - 2\frac{1}{2}$

d $q = 3^{p+3} + 3$
 $q - 3 = 3^{p+3}$
 $p + 3 = {}^3\log(q - 3)$
 $p = {}^3\log(q - 3) - 3$

9 a $y = 2(t + 1)^2 - 3(t + 1) + 1$
 $y = 2(t^2 + 2t + 1) - 3t - 3 + 1$
 $y = 2t^2 + 4t + 2 - 3t - 2$
 $y = 2t^2 + t$

b $y = (t - 3) \cdot 2^{9-2(t-3)}$
 $y = (t - 3) \cdot 2^{9-2t+6}$
 $y = (t - 3) \cdot 2^{15-2t}$

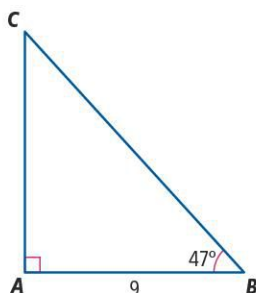
Vaardigheden 5

$$\begin{aligned} \text{c } y &= \log((3t-2)^2 - 4) \\ y &= \log(9t^2 - 12t + 4 - 4) \\ y &= \log(9t^2 - 12t) \end{aligned}$$

$$\text{d } y = \frac{\sqrt{2(0,5t^2 + 2) - 4}}{2(0,5t^2 + 2)}$$

$$y = \frac{\sqrt{t^2}}{t^2 + 4} \text{ ofwel } y = \frac{t}{t^2 + 4}$$

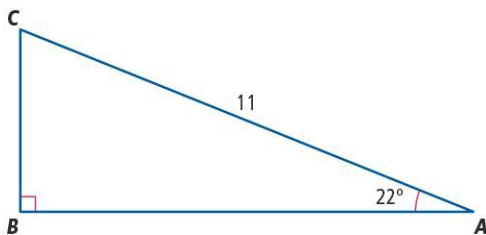
10 a



$$\tan(47^\circ) = \frac{AC}{9} \text{ dus } AC = 9 \cdot \tan(47^\circ) \approx 9,7$$

$$\cos(47^\circ) = \frac{9}{BC} \text{ dus } BC = \frac{9}{\cos(47^\circ)} \approx 13,2$$

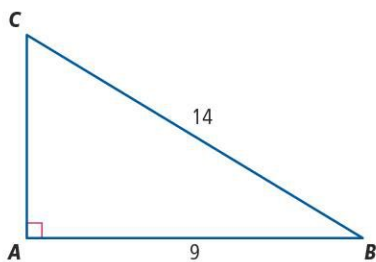
b



$$\cos(22^\circ) = \frac{AB}{11} \text{ dus } AB = 11 \cdot \cos(22^\circ) \approx 10,2$$

$$\sin(22^\circ) = \frac{BC}{11} \text{ dus } BC = 11 \cdot \sin(22^\circ) \approx 4,1$$

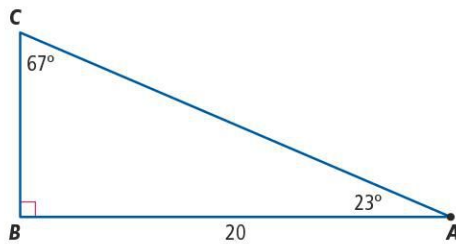
c



$$AC = \sqrt{14^2 - 9^2} = \sqrt{115}$$

$$\cos(\angle B) = \frac{9}{14} \text{ dus } \angle B \approx 50^\circ \text{ en } \angle C \approx 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ \approx 40^\circ$$

d $\angle B = 180^\circ - 23^\circ - 67^\circ = 90^\circ$



$$\tan(23^\circ) = \frac{BC}{20} \text{ dus } BC = 20 \cdot \tan(23^\circ) \approx 8,5$$

$$\cos(23^\circ) = \frac{20}{AC} \text{ dus } AC = \frac{20}{\cos(23^\circ)} \approx 21,7$$

11 a $BC = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$

b $\text{zijde}^2 + \text{zijde}^2 = 10^2$, dus $2 \cdot \text{zijde}^2 = 100$

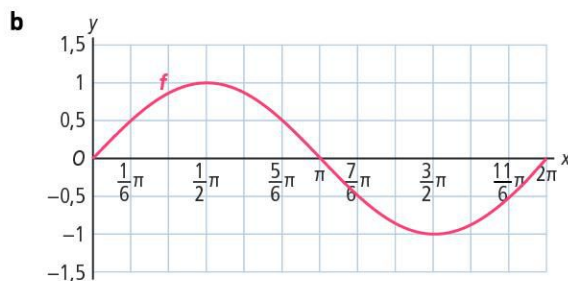
$\text{zijde}^2 = 50$, dus de oppervlakte van het vierkant is 50.

c De diagonalen van een ruit delen elkaar loodrecht doormidden, dus de diagonalen verdelen de ruit in 4 gelijke rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden 6 en $4\frac{1}{2}$.

$$\sqrt{6^2 + \left(4\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{56\frac{1}{4}} = 7\frac{1}{2} \text{ dus de zijden van de ruit zijn } 7\frac{1}{2}.$$

12 a

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0



c Het punt $(\frac{1}{2}\pi, -1)$ ligt op de grafiek van f .

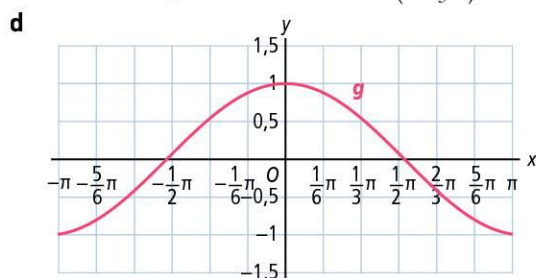
68 perioden naar rechts ligt het punt $(137\frac{1}{2}\pi, -1)$. Dus $\sin(137\frac{1}{2}\pi) = -1$.

Omdat de periode 2π is, is $\sin(-1\frac{1}{4}\pi) = \sin(\frac{3}{4}\pi)$ en omdat de grafiek lijnsymmetrisch

is in $x = \frac{1}{2}\pi$ is $\sin(-1\frac{1}{4}\pi) = \sin(\frac{3}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Omdat de grafiek puntsymmetrisch is in $(\pi, 0)$ is $\sin(1\frac{5}{6}\pi) = -\sin(\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$.

Omdat de periode 2π is, is $\sin(-3\frac{2}{3}\pi) = \sin(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.



Vaardigheden 5

- e De snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $\dots(-1\frac{1}{2}\pi, 0), (-\frac{1}{2}\pi, 0), (\frac{1}{2}\pi, 0), (1\frac{1}{2}\pi, 0)\dots$
 en dus ook $(-137\frac{1}{2}\pi, 0)$, dus $\cos(-137\frac{1}{2}\pi) = 0$.
 Omdat de periode 2π is, is $\cos(3\frac{3}{4}\pi) = \cos(-\frac{1}{4}\pi)$ en omdat de grafiek lijnsymmetrisch is in de y -as, is $\cos(3\frac{3}{4}\pi) = \cos(-\frac{1}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 Omdat de periode 2π is, is $\cos(2\frac{2}{3}\pi) = \cos(\frac{2}{3}\pi)$ en omdat de grafiek puntsymmetrisch is in $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ is $\cos(2\frac{2}{3}\pi) = \cos(\frac{2}{3}\pi) = -\cos(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$
 Omdat de periode 2π is, is $\cos(-1\frac{5}{6}\pi) = \cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

13 a $\sin(\frac{1}{2}x) = 1$

$$\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \pi + k \cdot 4\pi$$

de oplossingen op het gegeven interval zijn $x = \pi, x = 5\pi, x = 9\pi, x = 13\pi$.

b $2\sin(x) = -\sqrt{3}$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin(-\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } \sin(-\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

de oplossingen op het gegeven interval zijn $x = -4\frac{2}{3}\pi, x = -4\frac{1}{3}\pi, x = -2\frac{2}{3}\pi,$

$$x = -2\frac{1}{3}\pi, x = -\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{1}{3}\pi.$$

c $3\cos(2x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } \cos(1\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$$

de oplossingen op het gegeven interval zijn $x = \frac{1}{12}\pi, x = \frac{11}{12}\pi, x = 1\frac{1}{12}\pi, x = 1\frac{11}{12}\pi.$

d $\sin(6x) = -1$

$$\sin(1\frac{1}{2}\pi) = -1$$

$$6x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

De oplossingen op het gegeven interval zijn $x = -\frac{3}{4}\pi, x = -\frac{5}{12}\pi, x = -\frac{1}{12}\pi,$

$$x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{7}{12}\pi, x = \frac{11}{12}\pi.$$

14 a $8 \cdot 2^{3x+7} = 64$

$$2^{3x+7} = 8$$

$$2^{3x+7} = 2^3$$

$$3x + 7 = 3$$

$$3x = -4$$

$$x = -1\frac{1}{3}$$

b $5^{4-x} = 5\sqrt{5}$

$$5^{4-x} = 5^{1\frac{1}{2}}$$

$$4 - x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

c $5 - 4^{2x+7} = -27$

$$4^{2x+7} = 32$$

$$2^{2(2x+7)} = 2^5$$

$$2^{4x+14} = 2^5$$

$$4x + 14 = 5$$

$$4x = -9$$

$$x = -2\frac{1}{4}$$

d $\frac{1}{9} \cdot 3^{x-4} = 27 \cdot 3^{2x+1}$

$$3^{-2} \cdot 3^{x-4} = 3^3 \cdot 3^{2x+1}$$

$$3^{x-6} = 3^{2x+4}$$

$$x - 6 = 2x + 4$$

$$-x = 10$$

$$x = -10$$

e $3 \cdot 4^{6-x} = 12 \cdot 8^x$

$$4^{6-x} = 4 \cdot 8^x$$

$$2^{2(6-x)} = 2^2 \cdot 2^{3x}$$

$$2^{12-2x} = 2^{2+3x}$$

$$12 - 2x = 2 + 3x$$

$$-5x = -10$$

$$x = 2$$

f $\frac{1}{2} \cdot 16^{2-3x} = 2 \cdot 4^{2x-9}$

$$16^{2-3x} = 4 \cdot 4^{2x-9}$$

$$4^{2(2-3x)} = 4^1 \cdot 4^{2x-9}$$

$$4^{4-6x} = 4^{2x-8}$$

$$4 - 6x = 2x - 8$$

$$-8x = -12$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

15 a ${}^5\log\left(\frac{1}{25}\right) = -2$, want $\frac{1}{25} = 5^{-2}$

b ${}^3\log(9\sqrt{3}) = 2\frac{1}{2}$, want $9\sqrt{3} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2\frac{1}{2}}$

c ${}^8\log(2) = \frac{1}{3}$, want $2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$

16 a ${}^4\log(x) = \frac{1}{2}$

$$x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

b ${}^4\log(3x) + 7 = 9$

$${}^4\log(3x) = 2$$

$$3x = 4^2 = 16$$

$$x = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

c ${}^{0,1}\log(x) = 0$

$$x = 0,1^0$$

$$x = 1$$

d ${}^2\log(x^2 - 4) = 5$

$$x^2 - 4 = 2^5 = 32$$

$$x^2 = 36$$

$$x = -6 \text{ of } x = 6$$

e ${}^5\log(6 - 4x) = 1$

$$6 - 4x = 5^1 = 5$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

f ${}^2\log(4x + 1) = -2$

$$4x + 1 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$4x = -\frac{3}{4}$$

$$x = -\frac{3}{16}$$

17 a stijgend

b stijgend

c dalend

d stijgend

e dalend

f dalend

g stijgend

h dalend

18 a De grafiek van $y = x^3$ is stijgend. Deze grafiek is 7 naar beneden verschoven en dus is de grafiek van g ook stijgend.

b De grafiek van $y = x^3$ is stijgend. Deze grafiek is met factor 5 ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en dus is de grafiek van h ook stijgend.

c De grafiek van $y = x^3$ is stijgend. Deze grafiek is met factor -2 ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en dus is de grafiek van k dalend.

Vaardigheden 5

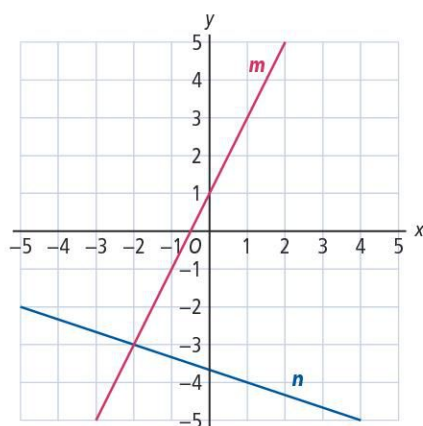
- d** De grafiek van $y = x^3$ is stijgend. Als x toeneemt, neemt $-x$ af, dus neemt ook $(-x)^3$ af en dus is de grafiek van m dalend.
- e** De grafiek van $y = x^3$ is stijgend. Als x toeneemt, neemt $2 - x$ af, dus neemt ook $(2 - x)^3$ af en dus is de grafiek van n dalend.
- f** De grafiek van $y = x^3$ is stijgend. Deze grafiek is 4 naar rechts verschoven en is dan nog steeds stijgend. Vervolgens met factor -6 ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en dus is de grafiek van p dalend.
- 19 a** De grafiek van $y = 2^x$ is stijgend. Deze grafiek is met factor $0,3$ ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en dus is de grafiek van f ook stijgend.
- b** De grafiek van $y = 0,3^x$ is dalend. Deze grafiek is met factor 2 ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd en dus is de grafiek van g ook dalend.
- c** De grafiek van $y = 2^x$ is stijgend. Als x toeneemt, neemt 2^x toe en dus $100 - 2^x$ af. De grafiek van h is dus dalend.
- d** De grafiek van $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$ is dalend. Deze grafiek wordt gespiegeld in de y -as en dus is de grafiek van k stijgend.
- e** De grafiek van $y = \sqrt{x}$ is stijgend. Als x toeneemt, neemt $8 - x$ af en neemt $\sqrt{8 - x}$ dus ook af. De grafiek van m is dus dalend.
- f** De grafiek van $y = {}^2\log(x)$ is stijgend. Als x toeneemt, neemt ${}^2\log(x)$ toe en neemt $3 - {}^2\log(x)$ dus af. De grafiek van n is dus dalend.
- 20 a** juist.
- b** niet juist, want als $f(x) = x - 10$ en $g(x) = 2x + 5$, dan is $v(x) = x - 10 - (2x + 5) = -x - 15$ en dit is een dalende functie.
- c** niet juist, want als $f(x) = x - 10$ en $g(x) = x + 5$, dan is $p(x) = (x - 10)(x + 5) = x^2 - 5x - 50$ en dit is een kwadratische functie die niet overal stijgt.

Vaardigheden 6

- 1 a** De vergelijking $y = \frac{3}{4}x - 5$ links en rechts vermenigvuldigen met 4 geeft
 $4y = 3x - 20$ oftewel $3x - 4y = 20$
- b** De vergelijking $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ is te schrijven als $1\frac{1}{2}x + y = 4\frac{1}{2}$
 Delen door $4\frac{1}{2}$ geeft $\frac{x}{3} + \frac{y}{4\frac{1}{2}} = 1$
- c** De vergelijking $\frac{x}{-5} + \frac{y}{4} = 1$ links en rechts vermenigvuldigen met 20 geeft
 $-4x + 5y = 20$
 $5y = 4x + 20$
 $y = \frac{4}{5}x + 4$
- 2 a** De lijn snijdt de assen in de punten (5, 0) en (0, 20) en heeft dus als
 vergelijking $\frac{x}{5} + \frac{y}{20} = 1$
 Vermenigvuldigen met 20 geeft $4x + y = 20$
 Dit kun je ook schrijven als $y = -4x + 20$
- b** Het hellingsgetal is $\frac{4-8}{1-(-1)} = -2$, de lijn heeft als vergelijking $y = -2x + b$
 Invullen van $x = 1$ en $y = 4$ geeft $4 = -2 \cdot 1 + b$ dus $b = 6$
 Een vergelijking is $y = -2x + 6$ ofwel $2x + y = 6$ ofwel $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$
- c** Het hellingsgetal is $\frac{25-0}{2-(-3)} = 5$. De lijn heeft als vergelijking $y = 5x + b$
 Invullen van $x = 2$ en $y = 25$ geeft $25 = 5 \cdot 2 + b$ dus $b = 15$
 Een vergelijking is $y = 5x + 15$ ofwel $-5x + y = 15$ ofwel $\frac{x}{-3} + \frac{y}{15} = 1$
- d** Het hellingsgetal is $\frac{-27-(-6)}{5-(-2)} = -3$. De lijn heeft als vergelijking $y = -3x + b$
 Invullen van $x = -2$ en $y = -6$ geeft $-6 = -3 \cdot (-2) + b$ ofwel $b = -12$
 Een vergelijking is $y = -3x - 12$ ofwel $3x + y = -12$ ofwel $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-12} = 1$

- 3 a** Uit $3y + x = -11$ volgt $3y = -x - 11$ dus $y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{2}{3}$

b



- c** $y = 2x + 1$ substitueren in de vergelijking van n geeft $3(2x + 1) + x = -11$
 $6x + 3 + x = -11$
 $7x = -14$
 $x = -2$ en $y = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$. Het snijpunt is $(-2, -3)$

- 4 a** $2x - \frac{1}{3}y = 2\frac{2}{3}$ geeft $6x - y = 8$ ofwel $y = 6x - 8$
 Uit $\tan(\alpha) = 6$ volgt $\alpha = 80,53 \dots^\circ$
 $3y + 4\frac{1}{2}x = 9$ geeft $3y = -4\frac{1}{2}x + 9$ ofwel $y = -1\frac{1}{2}x + 3$
 Uit $\tan(\beta) = 1\frac{1}{2}$ volgt $\beta \approx 56,30 \dots^\circ$
 $80,53 \dots^\circ + 56,30 \dots^\circ = 136,84 \dots^\circ$
 De hoek die de lijnen met elkaar maken is $180^\circ - 136,84 \dots^\circ \approx 43^\circ$
- b** $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} = 1$ geeft $5y - 2x = 10$ ofwel $y = \frac{2}{5}x + 2$
 Uit $\tan(\alpha) = \frac{2}{5}$ volgt $\alpha = 21,80 \dots^\circ$
 $6y + 10x = 3$ geeft $6y = -10x + 3$ ofwel $y = -1\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$
 Uit $\tan(\beta) = 1\frac{2}{3}$ volgt $\beta = 59,03 \dots^\circ$
 De hoek die de lijnen met elkaar maken is $21,80 \dots^\circ + 59,03 \dots^\circ \approx 81^\circ$
- 5 a** $x = -1$ en $y = 2$ substitueren in $y = x + 3$ geeft $2 = -1 + 3$ en dat klopt, dus de lijn gaat door P .
 $l: x + y = 3$ geeft $l: y = -x + 3$, de richtingscoëfficiënt van l is -1 .
 De richtingscoëfficiënt van de lijn met vergelijking $y = x + 3$ is 1 .
 Het product van de richtingscoëfficiënten is $1 \times -1 = -1$, dus de lijnen staan loodrecht op elkaar.
- b** Het midden van lijnstuk QR is het punt $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{16+32}{2}\right)$ ofwel $(1, 24)$.
 Lijn $m: 3x - \frac{1}{4}y = 1$ is te schrijven als $y = 12x - 4$. De richtingscoëfficiënt van lijn m is dus 12 . Een lijn loodrecht hierop heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{12}$.
 Een loodlijn op m is van de vorm $y = -\frac{1}{12}x + b$
 Substitutie van $x = 1$ en $y = 24$ geeft $24 = -\frac{1}{12} \cdot 1 + b$ ofwel $b = 24\frac{1}{12}$
 Een vergelijking van de lijn is $y = -\frac{1}{12}x + 24\frac{1}{12}$
- 6 a** $4x - 2y = 3$ is te schrijven als $y = 2x - 1\frac{1}{2}$. De richtingscoëfficiënt van lijn l is dus 2 . Een lijn loodrecht hierop heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.
 Een loodlijn is van de vorm $y = -\frac{1}{2}x + b$
 Substitutie van $x = -3$ en $y = 1$ geeft $1 = -\frac{1}{2} \cdot -3 + b$ ofwel $b = -\frac{1}{2}$
 Een vergelijking van lijn n is $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
- b** $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ is te schrijven als $2x - 5y = 10$ ofwel $y = \frac{2}{5}x - 2$
 De richtingscoëfficiënt van lijn m is dus $\frac{2}{5}$
 Een lijn loodrecht hierop heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$ dus een loodlijn is van de vorm $y = -2\frac{1}{2}x + b$
 Substitutie van $x = 5$ en $y = 3$ geeft $3 = -2\frac{1}{2} \cdot 5 + b$ ofwel $b = 15\frac{1}{2}$
 Een vergelijking van lijn n is $y = -2\frac{1}{2}x + 15\frac{1}{2}$
- 7 a** $\sqrt{x+2} = x$
 $x+2 = x^2$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x-2)(x+1) = 0$
 $x-2 = 0$ of $x+1 = 0$
 $x = 2$ of $x = -1$
 Alleen $x = 2$ voldoet.
- b** $\sqrt{x+2} = x-4$
 $x+2 = x^2 - 8x + 16$
 $x^2 - 9x + 14 = 0$
 $(x-7)(x-2) = 0$
 $x-7 = 0$ of $x-2 = 0$
 $x = 7$ of $x = 2$
 Alleen $x = 7$ voldoet.

Vaardigheden 6

c $\frac{3\sqrt{x}}{2} = x$
 $3\sqrt{x} = 2x$
 $9x = 4x^2$
 $4x^2 - 9x = 0$
 $x(4x - 9) = 0$
 $x = 0$ of $4x - 9 = 0$
 $x = 0$ of $4x = 9$
 $x = 0$ of $x = 2\frac{1}{4}$
 Beide voldoen.

d $3\sqrt{x} - x = 2$
 $3\sqrt{x} = x + 2$
 $9x = 4 + 4x + x^2$
 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x - 4)(x - 1) = 0$
 $x - 4 = 0$ of $x - 1 = 0$
 $x = 4$ of $x = 1$
 Beide voldoen.

8 a $\frac{2x}{x+1} = \frac{1}{6x}$
 $6x \cdot x = 1(x+1)$
 $12x^2 = x + 1$
 $12x^2 - x - 1 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 12 \cdot -1 = 49$
 $x = \frac{1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 12}$ of $x = \frac{1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 12}$
 $x = -\frac{1}{4}$ of $x = \frac{1}{3}$
 Beide voldoen.

b $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 5$
 $x^2 + 1 = 5(x^2 - 1)$
 $x^2 + 1 = 5x^2 - 5$
 $4x^2 = 6$
 $x^2 = 1\frac{1}{2}$
 $x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$ of $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$
 Beide voldoen.

c $\frac{2}{x-1} = \frac{4x}{x+2}$
 $2(x+2) = 4x(x-1)$
 $2x+4 = 4x^2-4x$
 $4x^2-6x-4 = 0$
 $x^2-1\frac{1}{2}x-1 = 0$
 $(x+\frac{1}{2})(x-2) = 0$
 $x+\frac{1}{2} = 0$ of $x-2 = 0$
 $x = -\frac{1}{2}$ of $x = 2$
 Beide voldoen.

e $3\sqrt{x+2} - 2 = -x$
 $3\sqrt{x+2} = -x + 2$
 $9(x+2) = x^2 - 4x + 4$
 $9x + 18 = x^2 - 4x + 4$
 $x^2 - 13x - 14 = 0$
 $(x+1)(x-14) = 0$
 $x+1 = 0$ of $x-14 = 0$
 $x = -1$ of $x = 14$
 Alleen $x = -1$ voldoet.

f $\frac{5}{2\sqrt{x}} = 3x$
 $\frac{25}{4x} = 9x^2$
 $36x^3 = 25$
 $x^3 = \frac{25}{36}$
 $x = \sqrt[3]{\frac{25}{36}}$
 voldoet

d $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 3$
 $2x + 1 = 3x^2$
 $3x^2 - 2x - 1 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -1 = 16$
 $x = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 3}$ of $x = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 3}$
 $x = -\frac{1}{3}$ of $x = 1$
 Beide voldoen.

e $\frac{2^x - 3}{2^x + 1} = \frac{-1}{2^x}$
 $2^x(2^x - 3) = -1(2^x + 1)$
 $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x = -1 \cdot 2^x - 1$
 $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$
 $(2^x - 1)^2 = 0$
 $2^x = 1$
 $x = 0$
 voldoet

f $\frac{3 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 = 0$, stel $\sqrt{x} = t$
 $\frac{3-t}{1+t} \cdot \frac{2}{t} + 1 = 0$
 $(3-t) \cdot t - 2(1+t) + t(1+t) = 0$
 $3t - t^2 - 2 - 2t + t + t^2 = 0$
 $2t = 2$
 $t = 1$
 $\sqrt{x} = 1$
 $x = 1$
 voldoet

9 a $3x^4 - 6x^3 = 9x^2$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x^2(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } x - 3 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3 \text{ of } x = -1$$

b $(2 \cdot {}^2\log(x) + 3)^2 = 25$

$$2 \cdot {}^2\log(x) + 3 = 5 \text{ of } 2 \cdot {}^2\log(x) + 3 = -5$$

$${}^2\log(x) = 1 \text{ of } {}^2\log(x) = -4$$

$$x = 2^1 = 2 \text{ of } x = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

c $(3x + 7)(2x - 1) = -12$

$$6x^2 - 3x + 14x - 7 = -12$$

$$6x^2 + 11x + 5 = 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 1$$

$$x = \frac{-11 - \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = -1 \text{ of } x = \frac{-11 + \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = -\frac{5}{6}$$

d $3^{2x-1} = 81$

$$3^{2x-1} = 3^4$$

$$2x - 1 = 4$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

e $3x^2 - 7x < 10$

Eerst oplossen $3x^2 - 7x = 10$

$$3x^2 - 7x - 10 = 0$$

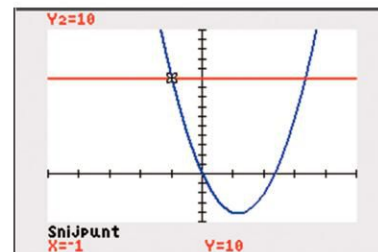
$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 169$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = -1 \text{ of } x = \frac{7 + \sqrt{169}}{2 \cdot 3} = 3\frac{1}{3}$$

Invoer: $y_1 = 3x^2 - 7x$ en $y_2 = 10$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 15$

Zie plot, de oplossing van de ongelijkheid is $-1 < x < 3\frac{1}{3}$



f $x^2 \geq 20 - x^4$

Eerst oplossen $x^2 = 20 - x^4$

$$x^4 + x^2 - 20 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 5) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ of } x^2 + 5 = 0$$

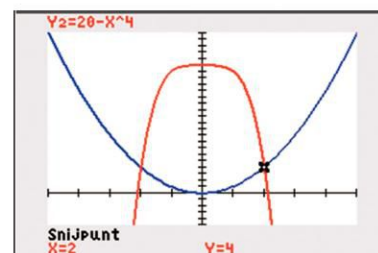
$$x^2 = 4(x^2 + 5 = 0 \text{ heeft geen oplossingen})$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2$$

Invoer: $y_1 = x^2$ en $y_2 = 20 - x^4$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 25$

Zie plot, de oplossing van de ongelijkheid is $x \leq -2$ of $x \geq 2$



g $x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} \geq 0$

Eerst oplossen $x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} = 0$

$$\sqrt{x} \cdot (x - 7) = 0$$

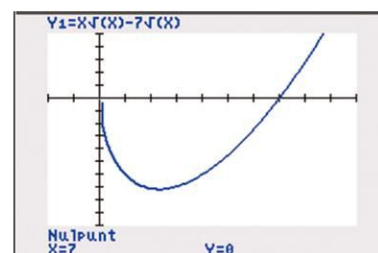
$$\sqrt{x} = 0 \text{ of } x - 7 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 7$$

Invoer: $y_1 = x\sqrt{x} - 7\sqrt{x}$

Venster: $-2 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 5$

Zie plot, de oplossing van de ongelijkheid is $x = 0$ of $x \geq 7$



Vaardigheden 6

h $2x - 28 \leq \sqrt{x}$

Eerst oplossen $2x - 28 = \sqrt{x}$

$$(2x - 28)^2 = x$$

$$4x^2 - 113x + 784 = 0$$

$$D = (-113)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 784 = 225$$

$$x = \frac{113 - \sqrt{225}}{2 \cdot 4} \text{ of } x = \frac{113 + \sqrt{225}}{2 \cdot 4}$$

$$x = 12\frac{1}{4} \text{ of } x = 16$$

Alleen $x = 16$ voldoet.

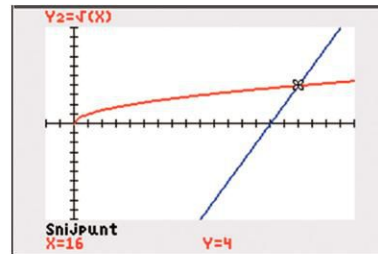
$\sqrt{x}$ bestaat alleen als $x \geq 0$

Invoer: $y_1 = 2x - 28$ en $y_2 = \sqrt{x}$

Venster: $-2 \leq x \leq 20$, $-10 \leq y \leq 10$

Zie plot, de oplossing van de ongelijkheid is

$$0 \leq x \leq 16$$



10 a $\frac{x+2}{x^2} + \frac{2}{x-1} =$
 $\frac{x+2}{x^2} \cdot \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x^2}{x^2} =$
 $\frac{(x+2)(x-1) + 2x^2}{x^2(x-1)} =$

$$\frac{3x^2 + x - 2}{x^2(x-1)}$$

b $\frac{x-1}{x+4} - \frac{x+4}{x-1} =$
 $\frac{x-1}{x+4} \cdot \frac{x-1}{x-1} - \frac{x+4}{x-1} \cdot \frac{x+4}{x+4} =$
 $\frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 8x + 16)}{(x+4)(x-1)} =$
 $\frac{-10x - 15}{(x+4)(x-1)}$

c $\frac{1}{2x-1} + \frac{2x+1}{x+1} =$
 $\frac{1}{2x-1} \cdot \frac{x+1}{x+1} + \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{2x-1}{2x-1} =$
 $\frac{x+1 + 4x^2 - 1}{(2x-1)(x+1)} =$
 $\frac{4x^2 + x}{(2x-1)(x+1)}$

d $\frac{-x^3}{2x-1} + \frac{2x^2+1}{4} =$
 $\frac{-4x^3}{4(2x-1)} + \frac{(2x^2+1)(2x-1)}{4(2x-1)} =$
 $\frac{-2x^2 + 2x - 1}{4(2x-1)}$

11 a $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} =$
 $\frac{2x^2}{x^4} + \frac{3x}{x^4} - \frac{4}{x^4} =$
 $\frac{2x^2 + 3x - 4}{x^4}$

b $\frac{-x}{x-2} + 3 =$
 $\frac{-x}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} =$
 $\frac{2x-6}{x-2}$

c $\frac{x}{x+1} - x =$
 $\frac{x}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1} =$
 $\frac{-x^2}{x+1}$

d $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} =$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$
 $\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1 + \sqrt{x}}{x}$

12 a $\frac{-2x^2}{5} \cdot \frac{10}{3x} = \frac{-20x^2}{15x} = -\frac{4x}{3}$

b $\frac{5}{3x} \cdot -\frac{1}{3}x = \frac{-5x}{9x} = -\frac{5}{9}$

c $3x \cdot \frac{-2}{x} \cdot -\frac{3}{4} = \frac{18x}{4x} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$

d $-x^2 \cdot \frac{-1}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
 13 \text{ a } y &= \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 \\
 y &= \left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x}\right) \\
 y &= 4x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} - 2x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \\
 y &= 4x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } y &= -2x^3 \left(\frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} - 1\right) \\
 y &= -\frac{8x^3}{x^2} - \frac{6x^3}{x} + 2x^3 \\
 y &= -8x - 6x^2 + 2x^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } y &= \frac{1}{3}x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) \\
 y &= \frac{x}{3x^2} - \frac{2x}{3x} \\
 y &= \frac{1}{3x} - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } y &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) \\
 y &= x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \\
 y &= x^2 - \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \text{ a } f(x) &= \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - x + 8 \\
 f'(x) &= 2x^2 - 8x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } M(a) &= 4 + a - \sqrt{6-a} \\
 M(a) &= 4 + a - (6-a)^{\frac{1}{2}} \\
 M'(a) &= 1 - \frac{1}{2}(6-a)^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 \\
 M'(a) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{6-a}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } f(x) &= (5x^4 - 9x)^3 \\
 f'(x) &= 3(5x^4 - 9x)^2 \cdot (20x^3 - 9) \\
 f'(x) &= (60x^3 - 27)(5x^4 - 9x)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } q(x) &= \frac{1}{6+7x} \\
 q(x) &= (6+7x)^{-1} \\
 q'(x) &= -1(6+7x)^{-2} \cdot 7 \\
 q'(x) &= \frac{-7}{(6+7x)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e } l(s) &= s^3(s^2 + 4) \\
 l(s) &= s^5 + 4s^3 \\
 l'(s) &= 5s^4 + 12s^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f } w(p) &= p^2\sqrt{p} \\
 w(p) &= p^2 \cdot p^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{5}{2}} \\
 w'(p) &= 2\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}} \\
 w'(p) &= 2\frac{1}{2}p\sqrt{p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g } V(p) &= 4\sqrt{6p+8} \\
 V(p) &= 4(6p+8)^{\frac{1}{2}} \\
 V'(p) &= 2(6p+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 \\
 V'(p) &= \frac{12}{\sqrt{6p+8}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h } B(u) &= \frac{6}{u} - \frac{1}{u^6} - 6u \\
 B(u) &= 6u^{-1} - u^{-6} - 6u \\
 B'(u) &= -6u^{-2} + 6u^{-7} - 6 \\
 B'(u) &= \frac{-6}{u^2} + \frac{6}{u^7} - 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \text{ a } f(x) &= 5(4x-11)^{\frac{1}{2}} \\
 f'(x) &= 2\frac{1}{2}(4x-11)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 \text{ ofwel } f'(x) = \frac{10}{\sqrt{4x-11}}
 \end{aligned}$$

$$f'(5) = \frac{10}{\sqrt{4 \cdot 5 - 11}} = \frac{10}{\sqrt{9}} = 3\frac{1}{3}$$

De helling van de grafiek in het punt (5, 15) is $3\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
 \text{b } g(x) &= 36x^{-2} \\
 g'(x) &= -72x^{-3} \text{ ofwel } g'(x) = \frac{-72}{x^3}
 \end{aligned}$$

$$g'(-2) = \frac{-72}{(-2)^3} = \frac{-72}{-8} = 9$$

De helling van de grafiek in het punt (-2, 9) is 9

Vaardigheden 6

c $h(x) = x^{2\frac{1}{2}}$

$$h'(x) = 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \text{ ofwel } h'(x) = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$$

$$h'(4) = 2\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} = 20$$

De helling van de grafiek in (4, 32) is 20

d $k(x) = 4 \cdot (3x + 2)^{-1}$

$$k'(x) = -4(3x + 2)^{-2} \cdot 3 \text{ ofwel } k'(x) = \frac{-12}{(3x + 2)^2}$$

$$k'(-1) = \frac{-12}{(3 \cdot -1 + 2)^2} = \frac{-12}{(-1)^2} = -12$$

De helling van de grafiek in het punt (-1, -4) is -12

16 a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 7\frac{1}{2}x$

$$f'(x) = x^2 + 5x - 7\frac{1}{2}$$

$$f'(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 - 7\frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$$

De helling van de grafiek in het punt (3, 9) is $16\frac{1}{2}$

De raaklijn is van de vorm $y = 16\frac{1}{2}x + b$

Substitutie van $x = 3$ en $y = 9$ geeft $9 = 16\frac{1}{2} \cdot 3 + b$ ofwel $b = -40\frac{1}{2}$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 16\frac{1}{2}x - 40\frac{1}{2}$

b $g(x) = \frac{5x^3 + 1}{x^2} = \frac{5x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 5x + x^{-2}$

$$g'(x) = 5 - 2x^{-3} \text{ ofwel } g'(x) = 5 - \frac{2}{x^3}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 - \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 5 - \frac{2}{\frac{1}{8}} = 5 - 16 = -11$$

De helling van de grafiek in het punt $\left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$ is -11

De raaklijn is van de vorm $y = -11x + b$

Substitutie van $x = \frac{1}{2}$ en $y = 6\frac{1}{2}$ geeft $6\frac{1}{2} = -11 \cdot \frac{1}{2} + b$ ofwel $b = 12$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -11x + 12$

c $h(x) = 3x - 1 + \sqrt{6x + 3}$

$$h(x) = 3x - 1 + (6x + 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = 3 + \frac{1}{2}(6x + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 \text{ ofwel } h'(x) = 3 + \frac{3}{\sqrt{6x + 3}}$$

$$h'(1) = 3 + \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 1 + 3}} = 3 + \frac{3}{\sqrt{9}} = 4$$

De helling van de grafiek in het punt (1, 5) is 4

De raaklijn is van de vorm $y = 4x + b$

Substitutie van $x = 1$ en $y = 5$ geeft $5 = 4 \cdot 1 + b$ ofwel $b = 1$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 4x + 1$

17 $f_a(x) = 8x^3 - 6x^2 + a$

$$f'_a(x) = 24x^2 - 12x$$

De x -as loopt horizontaal, dus heeft als helling nul.

$$24x^2 - 12x = 0$$

$$12x(2x - 1) = 0$$

$$12x = 0 \text{ of } 2x - 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{2}$$

Het raakpunt moet op de x -as liggen dus $y = 0$.

Als $x = 0$ dan is $y = 8 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + a = a$. Dit geeft $a = 0$

Als $x = \frac{1}{2}$ dan is $y = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = 1 - 1\frac{1}{2} + a = -\frac{1}{2} + a$. Dit geeft $a = \frac{1}{2}$

18 $g_a(x) = 3x + a$

$$g'_a(x) = 3$$

De grafiek van g_a heeft als richtingscoëfficiënt 3, dus deze raakt de grafiek van f als $f'(x) = 3$

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 + 1 = 1$$

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -\frac{1}{3}$$

De coördinaten van de raakpunten zijn $(3, 1)$ en $(-1, -\frac{1}{3})$

$(3, 1)$ is een punt van de grafiek van g_a als $3 \cdot 3 + a = 1$ dus als $a = -8$

$(-1, -\frac{1}{3})$ is een punt van de grafiek van g_a als $3 \cdot -1 + a = -\frac{1}{3}$ dus als $a = 2\frac{2}{3}$

Vaardigheden 7

- 1 a** $s(x) = -2x^2 - 3 + 2x^2 + 4x + 1$
 $s(x) = 4x - 2$
 $v(x) = -2x^2 - 3 - (2x^2 + 4x + 1)$
 $v(x) = -2x^2 - 3 - 2x^2 - 4x - 1$
 $v(x) = -4x^2 - 4x - 4$
 $w(x) = 2x^2 + 4x + 1 - (-2x^2 - 3)$
 $w(x) = 2x^2 + 4x + 1 + 2x^2 + 3$
 $w(x) = 4x^2 + 4x + 4$
- b** De functie $s(x) = 4x - 2$ is lineair.

2 a $s(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}$
 $s(x) = \frac{x}{x+x^2} + \frac{1+x}{x+x^2}$
 $s(x) = \frac{2x+1}{x+x^2}$

De noemer mag geen nul zijn.

$$x + x^2 = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -1$$

Dus het domein is $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

$$v(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}$$

$$v(x) = \frac{x}{x+x^2} - \frac{1+x}{x+x^2}$$

$$v(x) = \frac{-1}{x+x^2}$$

Ook hiervoor geldt dat de noemer geen nul mag zijn, dus het domein is

$$\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle.$$

- b** $s(x) = 2 \cdot \log(2x+3) + 1 + \log(x)$
 $s(x) = \log(2x+3)^2 + \log(10) + \log(x)$
 $s(x) = \log(10x(2x+3)^2)$
 Er moet gelden dat $10x(2x+3)^2 > 0$.

Omdat $(2x+3)^2 \geq 0$ voor elke $x \neq -1\frac{1}{2}$ moet gelden $10x > 0$.

Dus het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

$$v(x) = 2 \cdot \log(2x+3) - (1 + \log(x))$$

$$v(x) = 2 \cdot \log(2x+3) - (\log(10) + \log(x))$$

$$v(x) = \log(2x+3)^2 - \log(10x)$$

$$v(x) = \log\left(\frac{(2x+3)^2}{10x}\right)$$

$$\text{Er moet gelden dat } \frac{(2x+3)^2}{10x} > 0.$$

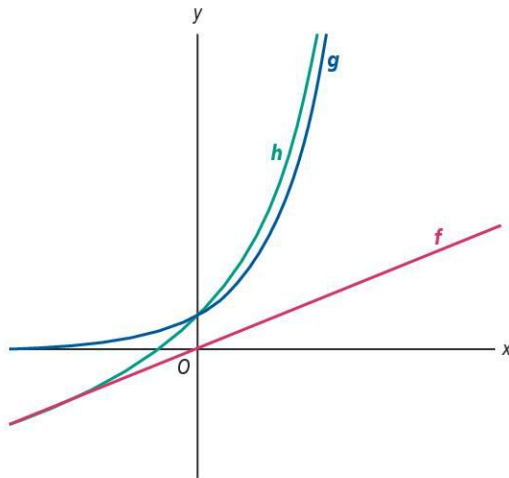
Dus het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

- 3 a** In het deel rechts van de y -as, omdat hier de grafiek het meest op een parabool lijkt. Dus voor $x > 0$ heeft de functie p het meest invloed op de functie f .

Vaardigheden 7

- b** In het deel links van de y -as, omdat hier de grafiek het meest op een hyperbool lijkt. Dus voor $x < 0$ heeft de functie g het meest invloed op de functie f .

4 a



- b** In het deel links van de y -as, omdat de grafiek van h hier het meest op die van f lijkt.
c Voor grote waarden van x nadert 2^{-x} naar 0, dus nadert $k(x) = f(x) + g(-x)$ naar $f(x)$.

5 a $a = \frac{1}{4}\pi$

b $x = -1\frac{3}{4}\pi, x = -1\frac{1}{4}\pi, x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{3}{4}\pi, x = 2\frac{1}{4}\pi, x = 2\frac{3}{4}\pi$

6 a $\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = \frac{2}{3}\pi$

b $\cos(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$t = \frac{3}{4}\pi$ of $t = 1\frac{1}{4}\pi$

c $2\cos(t) + 1 = 0$

$2\cos(t) = -1$

$\cos(t) = -\frac{1}{2}$

$t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$

d $\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$

$\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = 0$

$t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$

7 a $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$

b $\sin(3x) = \frac{1}{2}$

$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Op het gegeven interval zijn de oplossingen $x = \frac{1}{18}\pi$ of $x = \frac{5}{18}\pi$ of $x = \frac{13}{18}\pi$ of

$x = \frac{17}{18}\pi$ of $x = 1\frac{7}{18}\pi$ of $x = 1\frac{11}{18}\pi$.

8 a $\sin(2t) = -1$

$$2t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Op het gegeven interval zijn de oplossingen $t = -\frac{1}{4}\pi$ of $t = \frac{3}{4}\pi$ of $t = 1\frac{3}{4}\pi$ of

$$t = 2\frac{3}{4}\pi.$$

b $\cos(\frac{1}{4}t) - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$

$$\cos(\frac{1}{4}t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{4}t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{4}t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \pi + k \cdot 8\pi \text{ of } t = -\pi + k \cdot 8\pi$$

Op het gegeven interval zijn de oplossingen $t = -\pi$ of $t = \pi$.

c $2\sin(3t) = \sqrt{3}$

$$\sin(3t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$3t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } t = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Op het gegeven interval zijn de oplossingen $t = -\frac{5}{9}\pi$ of $t = -\frac{4}{9}\pi$ of $t = \frac{1}{9}\pi$

of $t = \frac{2}{9}\pi$ of $t = \frac{7}{9}\pi$ of $t = \frac{8}{9}\pi$ of $t = 1\frac{4}{9}\pi$ of $t = 1\frac{5}{9}\pi$ of $t = 2\frac{1}{9}\pi$ of $t = 2\frac{2}{9}\pi$ of

$t = 2\frac{7}{9}\pi$ of $t = 2\frac{8}{9}\pi$.

d $-10\cos(4t) = 5$

$$\cos(4t) = -\frac{1}{2}$$

$$4t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 4t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ of } t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Op het gegeven interval zijn de oplossingen $t = -\frac{5}{6}\pi$ of $t = -\frac{2}{3}\pi$ of $t = -\frac{1}{3}\pi$

of $t = -\frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ of $t = 1\frac{1}{6}\pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$ of

$t = 1\frac{2}{3}\pi$ of $t = 1\frac{5}{6}\pi$ of $t = 2\frac{1}{6}\pi$ of $t = 2\frac{1}{3}\pi$ of $t = 2\frac{2}{3}\pi$ of $t = 2\frac{5}{6}\pi$.

9 a $6\cos(\frac{1}{2}x) = 3\sqrt{2}$

$$\cos(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$$

Op het gegeven interval is de oplossing $x = \frac{1}{2}\pi$.

b $5\sin(2x) = 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

Op het gegeven interval zijn de oplossingen $x = -\frac{5}{6}\pi$ of $x = -\frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi$ of

$x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{3}\pi$.

Vaardigheden 7

10 a $\cos(x) = 0,43$

Met de rekenmachine:

Invoer: $y_1 = \cos(x)$ en $y_2 = 0,43$

Venster: $0 \leq x \leq 2\pi$, $-1 \leq y \leq 1$

Optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 1,126$ of $x \approx 5,157$.

b $2\cos(x) + 2,3 = 1,5$

Met de rekenmachine:

Invoer: $y_1 = 2\cos(x) + 2,3$ en $y_2 = 1,5$

Venster: $0 \leq x \leq 3\pi$, $0 \leq y \leq 5$

Optie: snijpunt

De oplossing is $x \approx 1,982$ of $x \approx 4,301$ of $x \approx 8,265$.

11 a $\int_1^{11} (x^3 - 6x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 \right]_1^{11} =$

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 11^4 - 3 \cdot 11^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 \right) = 3297\frac{1}{4} - -2\frac{3}{4} = 3300$$

b $\int_1^4 \left(\frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2} \right) dx = \int_1^4 (x^2 + 3 + 5x^{-2}) dx =$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + 3x - 5x^{-1} \right]_1^4 = \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 3 \cdot 4 - 5 \cdot 4^{-1} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1^{-1} \right) =$$

$$32\frac{1}{12} - -1\frac{2}{3} = 33\frac{3}{4}$$

c $\int_1^{16} (2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}) dx = \int_1^{16} (2x^{1\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}) dx =$

$$\left[\frac{4}{5}x^{2\frac{1}{2}} - 2x^{1\frac{1}{2}} \right]_1^{16} = \left(\frac{4}{5} \cdot 16^{2\frac{1}{2}} - 2 \cdot 16^{1\frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{4}{5} \cdot 1^{2\frac{1}{2}} - 2 \cdot 1^{1\frac{1}{2}} \right) =$$

$$691\frac{1}{5} - -1\frac{1}{5} = 692\frac{2}{5}$$

d $\int_0^1 (\sqrt[3]{x^2} + 3x^4) dx = \int_0^1 (x^{\frac{2}{3}} + 3x^4) dx =$

$$\left[\frac{3}{5}x^{1\frac{2}{3}} + \frac{3}{5}x^5 \right]_0^1 = \left(\frac{3}{5} \cdot 1^{1\frac{2}{3}} + \frac{3}{5} \cdot 1^5 \right) - \left(\frac{3}{5} \cdot 0^{1\frac{2}{3}} + \frac{3}{5} \cdot 0^5 \right) = 1\frac{1}{5}$$

12 a $\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 5x + 12 = -4x^2 + 7x + 12$

$$\frac{1}{2}x^3 - 2x = 0$$

$$x\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 4$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = -2$$

$$f(0) = 12, f(2) = 10 \text{ en } f(-2) = -18$$

De snijpunten zijn (0, 12), (2, 10) en (-2, -18).

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & \int_{-2}^0 \left(\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 5x + 12 \right) - \left(-4x^2 + 7x + 12 \right) \right) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x \right) dx = \\ & \left[\frac{1}{8}x^4 - x^2 \right]_{-2}^0 = \left(\frac{1}{8} \cdot 0^4 - 0^2 \right) - \left(\frac{1}{8} \cdot (-2)^4 - (-2)^2 \right) = 0 - (-2) = 2 \end{aligned}$$

De oppervlakte van het linker gebied is 2.

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left(\left(-4x^2 + 7x + 12 \right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 5x + 12 \right) \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x \right) dx = \\ & \left[-\frac{1}{8}x^4 + x^2 \right]_0^2 = \left(-\frac{1}{8} \cdot 2^4 + 2^2 \right) - \left(-\frac{1}{8} \cdot 0^4 + 0^2 \right) = 2 - 0 = 2. \end{aligned}$$

De oppervlakte van het rechter gebied is ook 2.

$$\begin{aligned} \text{13 a} \quad & \int_3^4 \left(\frac{5}{x-2} \right) dx = \int_3^4 125(x-2)^{-3} dx = \left[-62\frac{1}{2}(x-2)^{-2} \right]_3^4 = \left[\frac{-125}{2(x-2)^2} \right]_3^4 = \\ & \frac{-125}{8} + \frac{125}{2} = \frac{375}{8} = 46\frac{7}{8} \\ \text{b} \quad & \int_2^6 (5x+9) dx = \left[2\frac{1}{2}x^2 + 9x \right]_2^6 = 144 - 28 = 116 \\ \text{c} \quad & \int_{-2}^3 (2-3x)^2 dx = \left[-\frac{1}{9}(2-3x)^3 \right]_{-2}^3 = 38\frac{1}{9} - -56\frac{8}{9} = 95 \\ \text{d} \quad & \int_{-1}^3 \left(\frac{4}{\sqrt{2x+3}} \right) dx = \int_{-1}^3 \left(4(2x+3)^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \left[4(2x+3)^{\frac{1}{2}} \right]_{-1}^3 = 12 - 4 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{14 a} \quad & \int_{-3}^0 (x^4-3) dx + \int_0^2 (x^4-3) dx = \int_{-3}^2 (x^4-3) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 3x \right]_{-3}^2 = \frac{2}{5} - -39\frac{3}{5} = 40 \\ \text{b} \quad & \int_1^{14} \left(\frac{1}{2x} - x \right) dx - \int_1^{14} \left(\frac{1}{2x} + x \right) dx = \int_1^{14} (-2x) dx = \left[-x^2 \right]_1^{14} = -196 - -1 = -195 \\ \text{c} \quad & \int_5^7 (-x^2+2x+7) dx + \int_5^7 (3x+7) dx = \int_5^7 (-x^2+5x+14) dx = \\ & \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + 14x \right]_5^7 = 106\frac{1}{6} - 90\frac{5}{6} = 15\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{15 a} \quad & \sqrt{x^2-4} = x-2 \\ & x^2-4 = x^2-4x+4 \\ & -4 = -4x+4 \\ & 4x = 8 \\ & x = 2 \text{ (voldoet)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & \sqrt{6+\sqrt{x}} = 4 \\ & 6+\sqrt{x} = 16 \\ & \sqrt{x} = 10 \\ & x = 100 \text{ (voldoet)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & \frac{3}{\sqrt{2x+4}} = 2 \\ & \sqrt{2x+4} = 1\frac{1}{2} \\ & 2x+4 = 2\frac{1}{4} \\ & 2x = -1\frac{3}{4} \\ & x = -\frac{7}{8} \text{ (voldoet)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad & \frac{2+x}{\sqrt{x}} = 3 \\ & 3\sqrt{x} = 2+x \\ & 9x = 4+4x+x^2 \\ & x^2-5x+4 = 0 \\ & (x-4)(x-1) = 0 \\ & x = 4 \text{ of } x = 1 \text{ (beide voldoen)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & 2\sqrt{x} = \sqrt{2x} \\ & 4x = 2x \\ & x = 0 \text{ (voldoet)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f} \quad & \sqrt{x^2+2x} = x+2 \\ & x^2+2x = x^2+4x+4 \\ & 0 = 2x+4 \\ & x = -2 \text{ (voldoet)} \end{aligned}$$

Vaardigheden 7

16 a Door substitutie krijg je $2t^2 - 2t - 60 = 0$.

$$t^2 - t - 30 = 0$$

$$(t - 6)(t + 5) = 0$$

$$t = 6 \text{ of } t = -5$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = 6 \text{ of } \frac{1}{2}x + 3 = -5$$

$$\frac{1}{2}x = 3 \text{ of } \frac{1}{2}x = -8$$

$$x = 6 \text{ of } x = -16$$

b Door substitutie krijg je $t^2 - 5t + 6 = 0$.

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

$$t = 2 \text{ of } t = 3$$

$$5^x = 2 \text{ of } 5^x = 3$$

$$x = {}^5\log(2) \text{ of } x = {}^5\log(3)$$

17 a $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$$\text{stel } x^2 = p$$

$$p^2 - 13p + 36 = 0$$

$$(p - 4)(p - 9) = 0$$

$$p = 4 \text{ of } p = 9$$

$$x^2 = 4 \text{ of } x^2 = 9$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3$$

b $\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{3}x\right) - 2 = 0$

$$\text{stel } 1 + \frac{1}{3}x = p$$

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p - 2)(p + 1) = 0$$

$$p = 2 \text{ of } p = -1$$

$$1 + \frac{1}{3}x = 2 \text{ of } 1 + \frac{1}{3}x = -1$$

$$\frac{1}{3}x = 1 \text{ of } \frac{1}{3}x = -2$$

$$x = 3 \text{ of } x = -6$$

c $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x} + 15 = 0$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 8 \cdot \frac{1}{x} + 15 = 0$$

$$\text{stel } \frac{1}{x} = p$$

$$p^2 + 8p + 15 = 0$$

$$(p + 3)(p + 5) = 0$$

$$p = -3 \text{ of } p = -5$$

$$\frac{1}{x} = -3 \text{ of } \frac{1}{x} = -5$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ of } x = -\frac{1}{5}$$

d $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x} + 14 = 0$

$$-(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 28 = 0$$

$$\text{stel } \sqrt{x} = p$$

$$-p^2 + 3p + 28 = 0$$

$$p^2 - 3p - 28 = 0$$

$$(p - 7)(p + 4) = 0$$

$$p = 7 \text{ of } p = -4 \text{ (voldoet niet)}$$

$$\sqrt{x} = 7$$

$$x = 49$$

e $-6^{-2x} + \frac{37}{6} \cdot 6^{-x} - 1 = 0$

$$\text{stel } 6^{-x} = p$$

$$-p^2 + \frac{37}{6} \cdot p - 1 = 0$$

$$6p^2 - 37p + 6 = 0$$

$$D = (-37)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 1225$$

$$p = 6 \text{ of } p = \frac{1}{6}$$

$$6^{-x} = 6 \text{ of } 6^{-x} = \frac{1}{6} = 6^{-1}$$

$$-x = 1 \text{ of } -x = -1$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

f $\frac{25}{4a^2} + \frac{10}{a} + 4 = 0$

$$\frac{25}{4} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 10 \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0$$

$$\text{stel } \frac{1}{a} = p$$

$$6\frac{1}{4} \cdot p^2 + 10p + 4 = 0$$

$$\left(2\frac{1}{2}p + 2\right)^2 = 0$$

$$2\frac{1}{2}p + 2 = 0$$

$$2\frac{1}{2}p = -2$$

$$p = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{a} = -\frac{4}{5}$$

$$a = -\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4}$$

18 a $6(x - 21)(x + 13) = 0$

$$x - 21 = 0 \text{ of } x + 13 = 0$$

$$x = 21 \text{ of } x = -13$$

b $x^2(x - 9) = 3x^2$

$$x^2 = 0 \text{ of } x - 9 = 3$$

$$x = 0 \text{ of } x = 12$$

c $3(5x - 2)^2 = 48$

$$(5x - 2)^2 = 16$$

$$5x - 2 = -4 \text{ of } 5x - 2 = 4$$

$$5x = -2 \text{ of } 5x = 6$$

$$x = -\frac{2}{5} \text{ of } x = 1\frac{1}{5}$$

d $\left(x^{\frac{1}{6}} - 5\right)(3x^5 - 21)(4 - x) = 0$

$$x^{\frac{1}{6}} = 5 \text{ of } 3x^5 = 21 \text{ of } x = 4$$

$$x^{\frac{1}{6}} = 5 \text{ of } x^5 = 7 \text{ of } x = 4$$

$$x = 15625 \text{ of } x = \sqrt[5]{7} \text{ of } x = 4$$

e $(x - 9)^2 = (2x + 3)^2$

$$x - 9 = 2x + 3 \text{ of}$$

$$x - 9 = -2x - 3$$

$$x = -12 \text{ of } 3x = 6$$

$$x = -12 \text{ of } x = 2$$

f $3(x^4 - 9) = (x^4 - 9)^2$

$$3 = x^4 - 9 \text{ of } x^4 - 9 = 0$$

$$x^4 = 12 \text{ of } x^4 = 9$$

$$x = \sqrt[4]{12} \text{ of } x = -\sqrt[4]{12} \text{ of}$$

$$x = \sqrt[4]{9} \text{ of } x = -\sqrt[4]{9}$$

19 a $\frac{1}{|x + 1|} = \frac{2}{3}$

Voor $x \geq -1$ wordt de vergelijking $\frac{1}{x + 1} = \frac{2}{3}$

$$2(x + 1) = 3$$

$$2x + 2 = 3$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ (voldoet aan } x \geq -1)$$

Voor $x < -1$ wordt de vergelijking $\frac{1}{-x - 1} = \frac{2}{3}$

$$2(-x - 1) = 3$$

$$-2x - 2 = 3$$

$$-2x = 5$$

$$x = -2\frac{1}{2} \text{ (voldoet aan } x < -1)$$

De oplossing is $x = \frac{1}{2}$ of $x = -2\frac{1}{2}$.

b $|x^3 + 1| = 12$

Voor $x \leq 1$ wordt de vergelijking $-x^3 + 1 = 12$.

$$-x^3 = 11$$

$$x^3 = -11$$

$$x = \sqrt[3]{-11} \text{ (voldoet aan } x \leq 1)$$

Voor $x > 1$ wordt de vergelijking $x^3 - 1 = 12$.

$$x^3 = 13$$

$$x = \sqrt[3]{13} \text{ (voldoet aan } x > 1)$$

De oplossing is $x = \sqrt[3]{-11}$ of $x = \sqrt[3]{13}$.

Vaardigheden 7

c $|x^2 - 5x| = 6$

Voor $x^2 - 5x \geq 0$, dus voor $x \leq 0$ of $x \geq 5$ wordt de vergelijking $x^2 - 5x = 6$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$x = 6$ of $x = -1$ (voldoen aan $x \leq 0$ of $x \geq 5$)

Voor $x^2 - 5x < 0$, dus voor $0 < x < 5$ wordt de vergelijking $-x^2 + 5x = 6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$x = 2$ of $x = 3$ (voldoen aan $0 < x < 5$)

De oplossing is $x = -1$ of $x = 2$ of $x = 3$ of $x = 6$.

d $|4x - x\sqrt{x}| = x$

Voor $4x - x\sqrt{x} \geq 0$, dus voor $0 \leq x \leq 16$ (zie plot) wordt de vergelijking

$$4x - x\sqrt{x} = x$$

$$3x - x\sqrt{x} = 0$$

$$x(3 - \sqrt{x}) = 0$$

$x = 0$ of $x = 9$ (voldoen aan $0 \leq x \leq 16$)

Voor $4x - x\sqrt{x} < 0$, dus voor $x > 16$ wordt de vergelijking $-4x + x\sqrt{x} = x$.

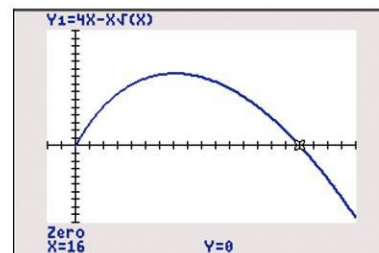
$$-5x + x\sqrt{x} = 0$$

$$x(-5 + \sqrt{x}) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } \sqrt{x} = 5$$

$x = 0$ of $x = 25$ (voldoet aan $x > 16$)

De oplossing is $x = 0$ of $x = 9$ of $x = 25$.



Vaardigheden 8

1 a $y = 12 \cdot 3^{2-x}$

$$y = 12 \cdot 3^2 \cdot (3^{-1})^x$$

$$y = 12 \cdot 9 \cdot 3^{-x}$$

$$y = 108 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

b $y = 6^{1-2x}$

$$y = 6^1 \cdot 6^{-2x}$$

$$y = 6 \cdot (6^{-2})^x$$

$$y = 6 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^x$$

2 a $y = (3^t - 2)^2$

$$y = 3^{2t} - 4 \cdot 3^t + 4$$

$$y = (3^2)^t - 4 \cdot 3^t + 4$$

$$y = 9^t - 4 \cdot 3^t + 4$$

b $y = (4^x + 3)(4^{-x} - 2)$

$$y = 4^0 - 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{-x} - 6$$

$$y = -5 - 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{-x}$$

$$y = -5 - 2 \cdot 4^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

3 a $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot 2\sqrt{x}$

$$y = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = x^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = 2 \cdot x^{\frac{1}{6}}$$

b $y = \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 \cdot \left(\sqrt[5]{x^3}\right)^2$

$$y = -\frac{1}{8}x^3 \cdot \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^2$$

$$y = -\frac{1}{8}x^3 \cdot x^{\frac{6}{5}}$$

$$y = -\frac{1}{8} \cdot x^{4\frac{1}{5}}$$

c $y = \frac{(3x)^2}{2\sqrt[4]{x}}$

$$y = \frac{9x^2}{2x^{\frac{1}{4}}}$$

$$y = 4\frac{1}{2} \cdot x^{1\frac{3}{4}}$$

c $y = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x+5}$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x} \cdot 2^5$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (2^{-2})^x \cdot 32$$

$$y = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

d $y = 4 \cdot 9^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

$$y = 4 \cdot 9^{\frac{1}{2}x} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$$

$$y = 4 \cdot \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^x \cdot 3$$

$$y = 12 \cdot 3^x$$

c $y = 5^{3p}(5^{\frac{1}{2}p} - 5^{-p})$

$$y = 5^{3\frac{1}{2}p} - 5^{2p}$$

d $y = (8^{3p} + 3)(8^p - p)$

$$y = 8^{4p} - p \cdot 8^{3p} + 3 \cdot 8^p - 3p$$

d $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

$$y = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}}$$

$$y = x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot x^{1\frac{1}{3}}$$

e $y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2 \cdot (2x)^2}}\right)^3$

$$y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2 \cdot 4x^2}}\right)^3$$

$$y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{8x^2}}\right)^3$$

$$y = \left(\frac{x}{2x^{\frac{2}{3}}}\right)^3$$

$$y = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$y = \frac{1}{8} \cdot x^1$$

f $y = (\sqrt{3x})^3 \cdot (-2)^{-3}$

$$y = ((3x)^{\frac{1}{2}})^3 \cdot \frac{1}{(-2)^3}$$

$$y = (3x)^{1\frac{1}{2}} \cdot -\frac{1}{8}$$

$$y = 3\sqrt{3} \cdot x^{1\frac{1}{2}} \cdot -\frac{1}{8}$$

$$y = -\frac{3}{8}\sqrt{3} \cdot x^{1\frac{1}{2}}$$

Vaardigheden 8

4 a Er is gebruikgemaakt van de rekenregel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b Omdat $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ op een geheel getal uitkomt.

c $\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8 \cdot 3}}{\sqrt{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{24} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{2}{3} \sqrt{6}$

5 a $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\sqrt{1875} = \sqrt{625 \cdot 3} = \sqrt{625} \cdot \sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

c $(\frac{2}{3}\sqrt{3})^4 = \frac{16}{81} \cdot 3^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9} (= 1\frac{7}{9} \cdot \sqrt{1})$

d $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

e $\sqrt{2048} = \sqrt{1024 \cdot 2} = \sqrt{1024} \cdot \sqrt{2} = 32\sqrt{2}$

f $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

6 a $y = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}$

$$y = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt{x}$$

b $y = x^2\sqrt{x} \cdot \frac{4}{(\sqrt{3}x)^2}$

$$y = \frac{4x^2\sqrt{x}}{3x^2}$$

$$y = \frac{4\sqrt{x}}{3}$$

$$y = 1\frac{1}{3}\sqrt{x}$$

7 a De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - -5}{-3 - 2} = \frac{7}{-5} = -1\frac{2}{5}$.

b $x = 2$ en $y = -5$ invullen in $y = -1\frac{2}{5}x + n$ geeft

$$-5 = -1\frac{2}{5} \cdot 2 + n \text{ dus } n = -2\frac{1}{5}.$$

Een vergelijking van l is $y = -1\frac{2}{5}x - 2\frac{1}{5}$.

c Links en rechts vermenigvuldigen met 5 geeft $5y = -7x - 11$ ofwel $7x + 5y = -11$.

8 a De richtingscoëfficiënt van l is $1\frac{1}{2}$, dus $l: y = 1\frac{1}{2}x + n$.

$x = 2$ en $y = 5$ invullen geeft $5 = 1\frac{1}{2} \cdot 2 + n$ dus $n = 2$.

Een vergelijking van l is $y = 1\frac{1}{2}x + 2$ ofwel $-3x + 2y = 4$.

b $rc_m \cdot 4\frac{1}{2} = -1$ geeft $rc_m \cdot \frac{9}{2} = -1$ ofwel $rc_m = -\frac{2}{9}$, dus $m: y = -\frac{2}{9}x + n$.

$x = 4$ en $y = -3$ invullen geeft $-3 = -\frac{2}{9} \cdot 4 + n$ dus $n = -2\frac{1}{9}$.

Een vergelijking van m is $y = -\frac{2}{9}x - 2\frac{1}{9}$ ofwel $2x + 9y = -19$.

c De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 5}{-8 - 0} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$, dus $p: y = \frac{1}{2}x + n$.

Lijn p gaat door $(0, 5)$, dus $n = 5$.

Een vergelijking van p is $y = \frac{1}{2}x + 5$ ofwel $-x + 2y = 10$.

9 a $x^2 + 12x + y^2 + 5y = 0$

$$(x + 6)^2 - 36 + \left(y + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} = 0$$

$$(x + 6)^2 + \left(y + 2\frac{1}{2}\right)^2 = 42\frac{1}{4}$$

Het middelpunt is $(-6, -2\frac{1}{2})$ en de straal is $\sqrt{42\frac{1}{4}} = 6\frac{1}{2}$.

b $x^2 + y^2 - x + 3y + 2\frac{1}{4} = 0$

$$x^2 - x + y^2 + 3y + 2\frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + 1\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Het middelpunt is $(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$ en de straal is $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

c $x^2 - 4y = 8x - y^2$

$$x^2 - 8x + y^2 - 4y = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

Het middelpunt is $(4, 2)$ en de straal is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

10 a Substitutie van $y = 2x - 1$ geeft $x^2 + (2x - 1)^2 - 3(2x - 1) - 19 = 0$.

$$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 6x + 3 - 19 = 0$$

$$5x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 3$$

Dit invullen in $y = 2x - 1$ geeft $y = -3$ of $y = 5$.

De snijpunten zijn $(-1, -3)$ en $(3, 5)$.

b Substitutie van $x = 3 - 7y$ geeft $(3 - 7y + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

$$(-7y + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$49y^2 - 56y + 16 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$50y^2 - 50y = 0$$

$$50y(y - 1) = 0$$

$$y = 0 \text{ of } y = 1$$

Dit invullen in $x = 3 - 7y$ geeft $x = 3$ of $x = -4$.

De snijpunten zijn $(3, 0)$ en $(-4, 1)$.

c Substitutie van $y = x + 2$ geeft $x^2 + (x + 2)^2 - 2x - 10(x + 2) - 74 = 0$.

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 2x - 10x - 20 - 74 = 0$$

$$2x^2 - 8x - 90 = 0$$

$$x^2 - 4x - 45 = 0$$

$$(x + 5)(x - 9) = 0$$

$$x = -5 \text{ of } x = 9$$

Dit invullen in $y = x + 2$ geeft $y = -3$ of $y = 11$.

De snijpunten zijn $(-5, -3)$ en $(9, 11)$.

11 $x^2 + 7x + y^2 + 5y = 0$

$$\left(x + 3\frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4} + \left(y + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + 3\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + 2\frac{1}{2}\right)^2 = 18\frac{1}{2}$$

c is een cirkel met middelpunt $M(-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$ en straal $\sqrt{18\frac{1}{2}}$.

Punt $P(1, 8)$ ligt buiten de cirkel, dus $d(P, c) = PM - \sqrt{18\frac{1}{2}}$

Vaardigheden 8

$$PM = \sqrt{\left(1 - -3\frac{1}{2}\right)^2 + \left(8 - -2\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{130\frac{1}{2}}, \text{ dus } d(P, c) = \sqrt{130\frac{1}{2}} - \sqrt{18\frac{1}{2}}.$$

12 c snijden met de y -as:

$$(0 - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

$$9 + y^2 + 2y + 1 = 25$$

$$y^2 + 2y - 15 = 0$$

$$(y + 5)(y - 3) = 0$$

$$y = -5 \text{ of } y = 3$$

De cirkel c : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ snijdt de positieve y -as in $(0, 3)$.

Het middelpunt van de cirkel is $(3, -1)$ en de richtingscoëfficiënt van het

middelpunt naar het snijpunt met de positieve y -as is $\frac{-1 - 3}{3 - 0} = -\frac{4}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van raaklijn q is dan $\frac{3}{4}$ want $\frac{3}{4} \cdot -\frac{4}{3} = -1$.

Een vergelijking van q is $y = \frac{3}{4}x + 3$.

13 a $f(4) = \frac{12}{4 \cdot 4 - 1} = \frac{12}{16 - 1} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ en $g\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{\frac{4}{5}} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4} + \frac{1}{4} = 4$

b $f(g(x)) = \frac{12}{4\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{4}\right) - 1} = \frac{12}{\frac{12}{x} + 1 - 1} = \frac{12}{\frac{12}{x}} = x$

$$g(f(x)) = \frac{3}{\frac{12}{4x - 1}} + \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{4x - 1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{12x - 3}{12} + \frac{1}{4} = x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = x$$

c De functies f en g zijn elkaars inverse.

14 a $y = 12 - 5x$

$$x = 12 - 5y$$

$$5y = 12 - x$$

$$y = 2\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x$$

$$f^{inv}(x) = 2\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x$$

b $y = 1 + (2x - 7)^3$

$$x = 1 + (2y - 7)^3$$

$$(2y - 7)^3 = x - 1$$

$$2y - 7 = \sqrt[3]{x - 1}$$

$$2y = 7 + \sqrt[3]{x - 1}$$

$$y = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x - 1}$$

$$g^{inv}(x) = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x - 1}$$

c $y = \frac{20}{x - 4}$

$$x = \frac{20}{y - 4}$$

$$y - 4 = \frac{20}{x}$$

$$y = \frac{20}{x} + 4$$

$$h^{inv}(x) = \frac{20}{x} + 4$$

d $y = 8 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

$$x = 8 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2y}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2y} = \frac{1}{7}x - 1\frac{1}{7}$$

$$3^{-2y} = \frac{1}{7}x - 1\frac{1}{7}$$

$$-2y = {}^3\log\left(\frac{1}{7}x - 1\frac{1}{7}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot {}^3\log\left(\frac{1}{7}x - 1\frac{1}{7}\right)$$

$$k^{inv}(x) = -\frac{1}{2} \cdot {}^3\log\left(\frac{1}{7}x - 1\frac{1}{7}\right)$$

$$\text{e } y = \frac{1}{5} \cdot 2^{3x-1}$$

$$x = \frac{1}{5} \cdot 2^{3y-1}$$

$$5x = 2^{3y-1}$$

$$3y - 1 = {}^2\log(5x)$$

$$3y = {}^2\log(5x) + 1$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log 5x + \frac{1}{3}$$

$$p^{inv}(x) = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log 5x + \frac{1}{3}$$

$$\text{f } y = \ln(5x - 10)$$

$$x = \ln(5y - 10)$$

$$5y - 10 = e^x$$

$$5y = e^x + 10$$

$$y = \frac{1}{5} e^x + 2$$

$$q^{inv}(x) = \frac{1}{5} e^x + 2$$

15 a Het domein van f is $\langle \leftarrow, 12 \rangle$ en het bereik is $[1, \rightarrow)$.

$$\text{b } y = 1 + \sqrt{12 - x}$$

$$x = 1 + \sqrt{12 - y}$$

$$\sqrt{12 - y} = x - 1$$

$$12 - y = x^2 - 2x + 1$$

$$y = -x^2 + 2x + 11$$

$$f^{inv}(x) = -x^2 + 2x + 11$$

Het domein van f^{inv} is $[1, \rightarrow)$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 12 \rangle$.

c Het domein van g is $[3, \rightarrow)$ en het bereik is $[1, \rightarrow)$.

$$y = 1 + \sqrt[4]{2x - 6}$$

$$x = 1 + \sqrt[4]{2y - 6}$$

$$\sqrt[4]{2y - 6} = x - 1$$

$$2y - 6 = (x - 1)^4$$

$$2y = (x - 1)^4 + 6$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^4 + 3$$

$$g^{inv}(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^4 + 3$$

Het domein van g^{inv} is $[1, \rightarrow)$ en het bereik is $[3, \rightarrow)$.

d Het domein van h is $\langle \leftarrow, 1 \rangle$ en het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

$$y = \frac{3}{2\sqrt{1-x}}$$

$$x = \frac{3}{2\sqrt{1-y}}$$

$$\sqrt{1-y} = \frac{3}{2x}$$

$$1-y = \left(\frac{3}{2x}\right)^2$$

$$y = 1 - \frac{9}{4x^2}$$

$$h^{inv}(x) = 1 - \frac{9}{4x^2}$$

Het domein van h^{inv} is $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 1 \rangle$.

Vaardigheden 8

- 16 a** Het domein van f is $\mathbb{R}$.
- b** f moet een inverse functie hebben, omdat er bij spiegeling in de lijn $y = x$ weer de grafiek van een functie ontstaat.
- c** $y = \frac{1 - 3^x}{2 + 3^x}$
 $x = \frac{1 - 3^y}{2 + 3^y}$
 $x(2 + 3^y) = 1 - 3^y$
 $2x + x \cdot 3^y = 1 - 3^y$
 $x \cdot 3^y + 3^y = 1 - 2x$
 $3^y(x + 1) = 1 - 2x$
 $3^y = \frac{1 - 2x}{x + 1}$
 $y = {}^3\log\left(\frac{1 - 2x}{x + 1}\right)$ ofwel $f^{\text{inv}}(x) = {}^3\log\left(\frac{1 - 2x}{x + 1}\right)$
- d** Het domein van de inverse functie is het bereik van f .
 Voor grote positieve waarden van x nadert $f(x)$ naar -1 , voor grote negatieve waarden nadert 3^x naar 0 en dus $f(x)$ naar $\frac{1}{2}$. Het bereik van f is $\langle -1, \frac{1}{2} \rangle$.
 Dus het domein van de inverse functie van f is ook $\langle -1, \frac{1}{2} \rangle$.

- 17 a** $f(x) = \frac{4x}{4 + x^2}$
 $f'(x) = \frac{4 \cdot (4 + x^2) - 4x \cdot 2x}{(4 + x^2)^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $4 \cdot (4 + x^2) - 4x \cdot 2x = 0$.
 $-4x^2 + 16 = 0$
 $x^2 = 4$
 $x = -2$ of $x = 2$
 $f(-2) = \frac{4 \cdot -2}{4 + (-2)^2} = \frac{-8}{8} = -1$ en $f(2) = \frac{4 \cdot 2}{4 + 2^2} = \frac{8}{8} = 1$
 De toppen zijn $(-2, -1)$ en $(2, 1)$.
- b** Ze zijn elkaars spiegelbeeld in de oorsprong.

- 18 a** $f(a) = 2a^4 - 3a^2 + 5$
 $f(-a) = 2(-a)^4 - 3(-a)^2 + 5$
 $f(-a) = 2a^4 - 3a^2 + 5$
 Omdat $f(-a) = f(a)$ is de grafiek van f lijnsymmetrisch in de y -as.
- b** $h(a) = {}^2\log(1 + a^2)$
 $h(-a) = {}^2\log(1 + (-a)^2)$
 $h(-a) = {}^2\log(1 + a^2)$
 Omdat $h(-a) = h(a)$ is de grafiek van h lijnsymmetrisch in de y -as.

$$\text{c } k(a) = \frac{2a^2 + 1}{3a}$$

$$k(-a) = \frac{2(-a)^2 + 1}{3 \cdot -a}$$

$$k(-a) = \frac{2a^2 + 1}{-3a}$$

$$k(-a) = -\frac{2a^2 + 1}{3a}$$

Omdat $k(-a) = -k(a)$ is de grafiek van k puntsymmetrisch in de oorsprong.

$$\text{d } p(a) = \cos^2(a) + 2 \cos(a)$$

$$p(-a) = \cos^2(-a) + 2 \cos(-a)$$

$$p(-a) = \cos^2(a) + 2 \cos(a)$$

Omdat $p(-a) = p(a)$ is de grafiek van p lijnsymmetrisch in de y -as.

$$\text{e } r(a) = \frac{1}{2} a^3 - 2a$$

$$r(-a) = \frac{1}{2} (-a)^3 - 2 \cdot -a$$

$$r(-a) = -\frac{1}{2} a^3 + 2a$$

$$r(-a) = -\left(\frac{1}{2} a^3 - 2a\right)$$

Omdat $r(-a) = -r(a)$ is de grafiek van r puntsymmetrisch in de oorsprong.

$$\text{f } s(a) = \frac{a^3 - a}{a^2 + 1}$$

$$s(-a) = \frac{(-a)^3 - -a}{(-a)^2 + 1}$$

$$s(-a) = \frac{-a^3 + a}{a^2 + 1}$$

$$s(-a) = \frac{-(a^3 - a)}{a^2 + 1}$$

$$s(-a) = -\frac{a^3 - a}{a^2 + 1}$$

Omdat $s(-a) = -s(a)$ is de grafiek van s puntsymmetrisch in de oorsprong.

19 Als de grafiek van $f(x) = \frac{1 - 3^{-x}}{1 + 3^{-x}}$ puntsymmetrisch is in de oorsprong, dan is

$f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a .

$$f(a) = \frac{1 - 3^{-a}}{1 + 3^{-a}}$$

$$f(-a) = \frac{1 - 3^{-(-a)}}{1 + 3^{-(-a)}}$$

$$f(-a) = \frac{1 - 3^a}{1 + 3^a} \cdot \frac{3^{-a}}{3^{-a}} \text{ geeft } f(-a) = \frac{3^{-a} - 1}{3^{-a} + 1}$$

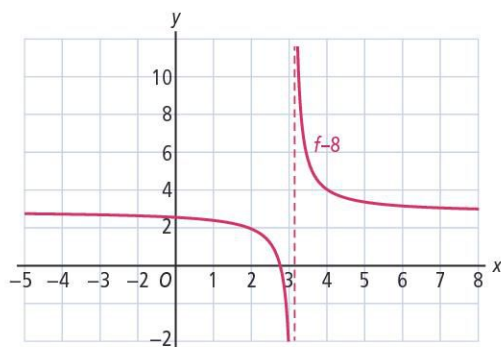
$$f(-a) = \frac{-1 + 3^{-a}}{1 + 3^{-a}} \text{ ofwel } f(-a) = \frac{-(1 - 3^{-a})}{1 + 3^{-a}}$$

$$f(-a) = -\frac{1 - 3^{-a}}{1 + 3^{-a}} \text{ en dus is } f(-a) = -f(a)$$

De grafiek van f is inderdaad puntsymmetrisch in de oorsprong.

Vaardigheden 8

20 a $f_{-8}(x) = \frac{3x-8}{x-3}$



b Dan zou de inverse functie van f_{-8} gelijk zijn aan f_{-8} zelf.

c $y = \frac{3x-8}{x-3}$

$$x = \frac{3y-8}{y-3}$$

$$x(y-3) = 3y-8$$

$$xy - 3x = 3y - 8$$

$$xy - 3y = 3x - 8$$

$$y(x-3) = 3x-8$$

$$y = \frac{3x-8}{x-3}$$

$$f_{-8}^{inv}(x) = \frac{3x-8}{x-3} \text{ dus de conclusie is juist.}$$

d $y = \frac{3x+p}{x-3}$

$$x = \frac{3y+p}{y-3}$$

$$x(y-3) = 3y+p$$

$$xy - 3x = 3y+p$$

$$xy - 3y = 3x+p$$

$$y(x-3) = 3x+p$$

$$y = \frac{3x+p}{x-3}$$

$$f_p^{inv}(x) = \frac{3x+p}{x-3} \text{ dus de eigenschap geldt voor alle functies } f_p \text{ (} p \neq 9 \text{).}$$

Vaardigheden 9

- 1** Invullen van $y = -3x + 2$ in $2x - 5y = 24$ geeft $2x - 5(-3x + 2) = 24$.
 $2x + 15x - 10 = 24$
 $17x = 34$
 $x = 2$ en $y = -3 \cdot 2 + 2 = -4$
 Het snijpunt is $(2, -4)$.

2 a
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 4y = 8 & (\text{keer } 2) \\ 6x + 9y = 6 & (\text{keer } 3) \end{cases} \quad -$$

$$\hline -13y = 2$$

$$y = -\frac{2}{13}$$

$$3x - 2 \cdot -\frac{2}{13} = 4$$

$$3x = 3\frac{9}{13}$$

$$x = 1\frac{3}{13}$$

 oplossing $x = 1\frac{3}{13}$ en $y = -\frac{2}{13}$

b
$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4y - x = 5\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ -x + 4y = 5\frac{1}{3} \end{cases} \quad -$$

$$\hline -4x = 6\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$3 \cdot \frac{5}{3} + 4y = 12$$

$$4y = 7$$

$$y = 1\frac{3}{4}$$

 oplossing $x = 1\frac{2}{3}$ en $y = 1\frac{3}{4}$

3 a
$$\begin{cases} x - py = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2py = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad -$$

$$\hline y - 2py = 7$$

$$(1 - 2p)y = 7$$

 Het stelsel is strijdig als deze vergelijking geen oplossing heeft, dus als $1 - 2p = 0$ ofwel $p = \frac{1}{2}$.

b
$$\begin{cases} qx + 3y = 4 \\ 3y = 3x + 7 \end{cases}$$

 Substitutie van de 2e vergelijking in de 1e geeft $qx + 3x + 7 = 4$.
 $(q + 3)x = -3$
 Het stelsel is strijdig als deze vergelijking geen oplossing heeft, dus als $q + 3 = 0$ ofwel $q = -3$.

c
$$\begin{cases} rx + 3y = 1\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} - y \end{cases}$$

 Substitutie van de 2e vergelijking in de 1e geeft $r(\frac{1}{2} - y) + 3y = 1\frac{1}{2}$.
 $\frac{1}{2}r - ry + 3y = 1\frac{1}{2}$
 $(3 - r)y = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r$
 Voor $r = 3$ wordt deze vergelijking $0y = 0$. Het stelsel heeft dan oneindig veel oplossingen en is daarmee een afhankelijk stelsel.

- 4 a** $6x - y = 8$ geeft $y = 6x - 8$, dus lijn l heeft richtingscoëfficiënt 6.
 $\tan^{-1}(6) = 80,537\dots^\circ$
 $4y + 6x = 12$ geeft $y = -1\frac{1}{2}x + 3$, dus lijn m heeft richtingscoëfficiënt $-1\frac{1}{2}$.
 $\tan^{-1}(1,5) = 56,309\dots^\circ$
 De hoek tussen de lijnen l en m is $180^\circ - 80,537\dots^\circ - 56,309\dots^\circ \approx 43^\circ$.
- b** Lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{5}$.
 $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 11,309\dots^\circ$
 $2y + 5x = 1$ geeft $y = -2\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, dus lijn m heeft richtingscoëfficiënt $-2\frac{1}{2}$.
 $\tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) = 68,198\dots^\circ$
 De hoek tussen de lijnen l en m is $11,309\dots^\circ + 68,198\dots^\circ \approx 80^\circ$.
- c** $\frac{x}{-1} - \frac{y}{2\frac{1}{2}} = 1$ geeft $-2\frac{1}{2}x - y = 2\frac{1}{2}$ ofwel $y = -2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$.
 Lijn l heeft richtingscoëfficiënt $-2\frac{1}{2}$.
 $\tan^{-1}\left(2\frac{1}{2}\right) = 68,198\dots^\circ$
 $\frac{x}{-6} - \frac{y}{3} = 1$ geeft $x + 2y = -6$ ofwel $y = -\frac{1}{2}x - 3$.
 Lijn m heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.
 $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,565\dots^\circ$
 De hoek tussen de lijnen l en m is $68,198\dots^\circ - 26,565\dots^\circ \approx 42^\circ$.
- 5 a** $4x - 10y = 5$ geeft $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}$.
 De richtingscoëfficiënt van m is $-2\frac{1}{2}$ want $-2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = -1$.
 $x = 1$ en $y = 2$ invullen bij $y = -2\frac{1}{2}x + n$ geeft $2 = -2\frac{1}{2} \cdot 1 + n$ ofwel $n = 4\frac{1}{2}$.
 Een vergelijking van m is $y = -2\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.
- b** Lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{7}{4}$.
 Uit $4x + 7y = 14$ volgt $y = -\frac{4}{7}x + 2$, dus lijn m heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{4}{7}$.
 Uit $\frac{7}{4} \cdot -\frac{4}{7} = -1$ volgt dat de lijnen l en m loodrecht op elkaar staan.
- c** Uit $2x - \frac{1}{3}y = 3$ volgt $y = 6x - 9$.
 Het midden van $P(2, 3)$ en $Q(-2, -21)$ is $(0, -9)$.
 De gezochte lijn is $y = -\frac{1}{6}x - 9$.
 Een vectorvoorstelling van deze lijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- 6 a** Met de waarden $t = 1$ en $N = 36$ kun je c berekenen.
- b** Deze waarden invullen bij $N = c \cdot t^a$ geeft $36 = c \cdot 1^a$ ofwel $c = 36$.
 Dus $N = 36 \cdot t^a$.
 Invullen van $t = 16$ en $N = 1152$ geeft $1152 = 36 \cdot 16^a$ ofwel $16^a = 32$.
 $16^a = 32$ geeft $(2^4)^a = 2^5$.
 $2^{4a} = 2^5$
 $4a = 5$
 $a = 1\frac{1}{4}$
- c** $N = 36 \cdot 17^{1\frac{1}{4}} \approx 1243$

Vaardigheden 9

- 7 a** $k = 10$ en $l = 25$ invullen geeft $25 = a \cdot 10$

$$a = 2\frac{1}{2}$$

- b** Dan wordt ook l vier keer zo groot.

- c** $q = 5$ en $p = 100$ invullen geeft $100 = b \cdot 5^2$

$$100 = 25b$$

$$b = 4$$

- d** p wordt dan $4^2 = 16$ keer zo groot.

- 8 a** Er geldt $p = a \cdot k^3$.

$$k = 2 \text{ en } p = 12 \text{ invullen geeft } 12 = a \cdot 2^3$$

$$12 = 8a$$

$$a = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Een formule is } p = 1\frac{1}{2} \cdot q^3.$$

- b** Invullen van $x = 2$, $y = 48$ en geeft $48 = c \cdot 2^a$.

$$\text{Invullen van } x = 4 \text{ en } y = 768 \text{ geeft } 768 = c \cdot 4^a.$$

$$\text{De twee vergelijkingen op elkaar delen geeft } \frac{c \cdot 4^a}{c \cdot 2^a} = \frac{768}{48}$$

$$\left(\frac{4}{2}\right)^a = \frac{768}{48} \text{ ofwel } 2^a = 16$$

$$a = 4$$

$$48 = c \cdot 2^4 \text{ geeft } 48 = 16c$$

$$c = 3$$

- 9 a** Invullen van de gegevens in $P = a \cdot L^2 \cdot v^3$ geeft $6 \cdot 10^5 = a \cdot 20^2 \cdot 12^3$

$$\text{Dus } a = 6 \cdot 10^5 \cdot 20^{-2} \cdot 12^{-3} \approx 0,868 \text{ en dus geldt } P \approx 0,868 \cdot L^2 \cdot v^3$$

- b** Als de windsnelheid v vermenigvuldigd wordt met een factor 0,8, wordt de uitkomst van de formule vermenigvuldigd met de factor $0,8^3 = 0,512$.

Het vermogen neemt af met 48,8%.

- 10 a** $c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(67^\circ) = 37,556\dots$, dus $c \approx 6,1$

- b** $a^2 = 10^2 + 13^2 - 2 \cdot 10 \cdot 13 \cdot \cos(22^\circ) = 27,932\dots$, dus $a \approx 5,3$

- c** Uit $\frac{8}{\sin(\alpha)} = \frac{11}{\sin(56^\circ)}$ volgt $\sin(\alpha) = \frac{8 \cdot \sin(56^\circ)}{11} = 0,602\dots$, dus $\alpha \approx 37^\circ$

$$\gamma \approx 180 - 56 - 37 = 87^\circ$$

$$c^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cos(87^\circ) = 175,788\dots$$
, dus $c \approx 13,3$

- d** $\alpha = 180 - 55 - 61 = 64^\circ$

$$\text{Uit } \frac{a}{\sin(64^\circ)} = \frac{23}{\sin(61^\circ)} \text{ volgt } a = \frac{23 \cdot \sin(64^\circ)}{\sin(61^\circ)} \text{ dus } a \approx 23,6$$

$$\text{Uit } \frac{b}{\sin(55^\circ)} = \frac{23}{\sin(61^\circ)} \text{ volgt } b = \frac{23 \cdot \sin(55^\circ)}{\sin(61^\circ)} \text{ dus } b \approx 21,5$$

- 11 a** $10^2 = 13^2 + 17^2 - 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \cos(\alpha)$

$$100 = 458 - 442 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{358}{442} \text{ dus } \alpha \approx 36^\circ$$

$$\text{Uit } \frac{10}{\sin(36^\circ)} = \frac{13}{\sin(\beta)} \text{ volgt } \sin(\beta) = \frac{13 \cdot \sin(36^\circ)}{10}, \text{ dus } \beta \approx 50^\circ$$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta \approx 94^\circ$$

b Met Pythagoras vind je dat dit een rechthoekige driehoek is.

$$\beta = 90^\circ \text{ en } \sin(\alpha) = \frac{33}{65} \text{ dus } \alpha \approx 31^\circ$$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta \approx 59^\circ$$

c $7^2 = 9^2 + 14^2 - 2 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cos(\alpha)$

$$49 = 277 - 252 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{228}{252} \text{ dus } \alpha \approx 25^\circ$$

$$\text{Uit } \frac{7}{\sin(25^\circ)} = \frac{9}{\sin(\beta)} \text{ volgt } \sin(\beta) = \frac{9 \cdot \sin(25^\circ)}{7}, \text{ dus } \beta \approx 33^\circ$$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta \approx 122^\circ$$

12 Met de stelling van Pythagoras is te berekenen dat $AC = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}$,

$$CF = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \text{ en } AF = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

De cosinusregel in $\triangle ACF$ geeft $\sqrt{61}^2 = \sqrt{180}^2 + 13^2 - 2 \cdot \sqrt{180} \cdot 13 \cdot \cos(\alpha)$

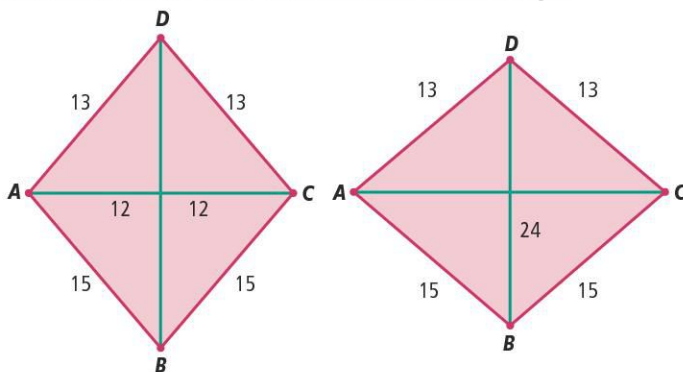
$$61 = 349 - 26\sqrt{180} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{288}{26\sqrt{180}} \text{ dus } \alpha \approx 34^\circ$$

$$\text{Uit } \frac{\sqrt{61}}{\sin(34,35^\circ)} = \frac{13}{\sin(\gamma)} \text{ volgt } \sin(\gamma) = \frac{13 \cdot \sin(34,35^\circ)}{\sqrt{61}}, \text{ dus } \gamma \approx 70^\circ$$

$$\angle A \approx 34^\circ, \angle C \approx 70^\circ \text{ en } \angle F = 180 - \alpha - \gamma \approx 76^\circ$$

13 Schetsen van de twee verschillende vormen zijn:



Van de linkerfiguur is de andere diagonaal $\sqrt{15^2 - 12^2} + \sqrt{13^2 - 12^2} = 9 + 5 = 14$

Van de rechterfiguur eerst $\angle B$ in driehoek ABD berekenen.

$$13^2 = 24^2 + 15^2 - 2 \cdot 24 \cdot 15 \cdot \cos(\beta)$$

$$169 = 801 - 720 \cdot \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{632}{720}, \text{ dus } \beta \approx 29^\circ$$

$$\text{Als } S \text{ het snijpunt is van } AC \text{ en } BD, \text{ dan is } \sin(28,62\dots^\circ) = \frac{AS}{15}$$

$$AS = 15 \cdot \sin(28,62\dots^\circ) = 7,186\dots$$

De andere diagonaal van de rechterfiguur is dan $2 \times 7,186\dots \approx 14,4$

Vaardigheden 9

14 a $f(x) = 5x^4 - 4x^5 + 20$

$$f'(x) = 20x^3 - 20x^4$$

b $g(x) = \frac{3}{x^2} + 4x\sqrt{x}$

$$g(x) = 3x^{-2} + 4x^{1\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = -6x^{-3} + 6x^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{-6}{x^3} + 6\sqrt{x}$$

c $h(x) = (2 - 2x) \cdot \ln(2x)$

$$h'(x) = -2 \cdot \ln(2x) + (2 - 2x) \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$$

$$h'(x) = -2 \ln(2x) + \frac{2 - 2x}{x}$$

d $k(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\frac{1}{2}x - 1}$

$$k'(x) = \frac{(4x + 3)\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - (2x^2 + 3x) \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2}$$

$$k'(x) = \frac{(2x^2 - 2\frac{1}{2}x - 3) - (x^2 + 1\frac{1}{2}x)}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2}$$

$$k'(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2}$$

e $m(x) = 3x + e^{4x - x^2}$

$$m'(x) = 3 + e^{4x - x^2} \cdot (4 - 2x)$$

$$m'(x) = 3 + (4 - 2x)e^{4x - x^2}$$

f $n(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$n(x) = x^2 \cdot \cos(x^{-1})$$

$$n'(x) = 2x \cdot \cos(x^{-1}) + x^2 \cdot -\sin(x^{-1}) \cdot -x^{-2}$$

$$n'(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

g $p(x) = \frac{1 - \sin(2x)}{1 + \sin(2x)}$

$$p'(x) = \frac{-2\cos(2x)(1 + \sin(2x)) - (1 - \sin(2x)) \cdot 2\cos(2x)}{(1 + \sin(2x))^2}$$

$$p'(x) = \frac{-4\cos(2x)}{(1 + \sin(2x))^2}$$

h $q(x) = \frac{2}{\cos(5x)}$

$$q(x) = 2 \cdot (\cos(5x))^{-1}$$

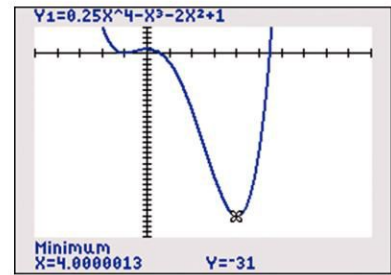
$$q'(x) = -2 \cdot (\cos(5x))^{-2} \cdot -5\sin(5x)$$

$$q'(x) = \frac{10\sin(5x)}{\cos^2(5x)}$$

15 a $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 1$
 $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$
 $x(x^2 - 3x - 4) = 0$
 $x(x - 4)(x + 1) = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$ of $x = -1$

Zie de plot hiernaast.

Maximum $f(0) = 1$, minima $f(-1) = \frac{1}{4}$ en $f(4) = -31$.



b $g(x) = \frac{1-x}{3+x^2}$

$$g'(x) = \frac{-1(3+x^2) - (1-x) \cdot 2x}{(3+x^2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \text{ geeft } -3 - x^2 - 2x + 2x^2 = 0$$

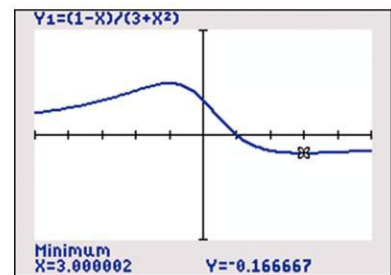
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

Zie de plot hiernaast.

Maximum $g(-1) = \frac{1}{2}$, minimum $g(3) = -\frac{1}{6}$.



c $h(x) = \sqrt{-x^4 + 4x^2 + 5}$

$$h(x) = (-x^4 + 4x^2 + 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}(-x^4 + 4x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x^3 + 8x)$$

$$h'(x) = \frac{-2x^3 + 4x}{\sqrt{-x^4 + 4x^2 + 5}}$$

$$h'(x) = 0 \text{ geeft } -2x^3 + 4x = 0$$

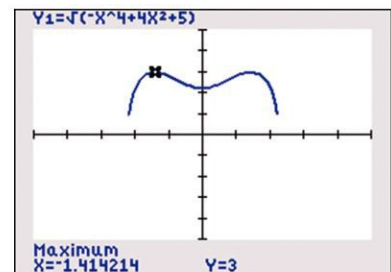
$$-2x(x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{2} \text{ of } x = \sqrt{2}$$

Zie de plot hiernaast.

Minimum $h(0) = \sqrt{5}$, maxima $h(-\sqrt{2}) = 3$ en $h(\sqrt{2}) = 3$,
 randminima $h(-\sqrt{5}) = h(\sqrt{5}) = 0$.



d $k(x) = 2 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$

$$k'(x) = 6 \cos^2(x) \cdot -\sin(x) + 3 \sin(x)$$

$$k'(x) = -6 \cos^2(x) \cdot \sin(x) + 3 \sin(x)$$

$$k'(x) = 0 \text{ geeft } -6 \cos^2(x) \cdot \sin(x) + 3 \sin(x) = 0$$

$$-3 \sin(x)(2 \cos^2(x) - 1) = 0$$

$$-3 \sin(x) = 0 \text{ of } 2 \cos^2(x) - 1 = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ zijn de oplossingen:

$$x = 0 \text{ of } x = \pi \text{ of } x = -\frac{1}{4}\pi \text{ of } x = \frac{1}{4}\pi \text{ of } x = \frac{3}{4}\pi \text{ of } x = \frac{1}{4}\pi$$

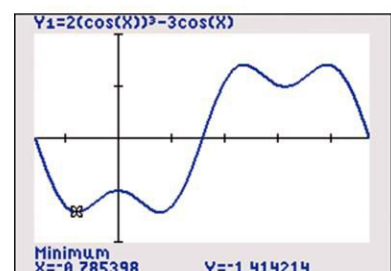
Zie de plot hiernaast.

$$\text{Minima } k(-\frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{2}, k(\frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{2} \text{ en } k(\pi) = 1.$$

$$\text{Maxima } k(0) = -1, k(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2} \text{ en } k(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}.$$

Op het domein $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ heeft k een randmaximum $k(-\frac{1}{2}\pi) = 0$

en een randminimum $k(\frac{1}{2}\pi) = 0$.



Vaardigheden 9

16 a Met de rekenmachine:

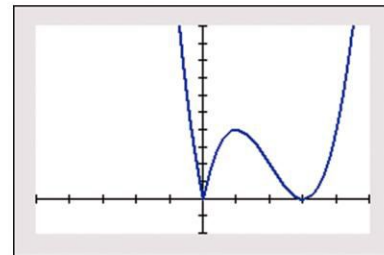
Invoer: $y_1 = |-x^3 + 6x^2 - 9x|$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-2 \leq y \leq 10$

Optie: maximum en minimum

Zie de plot hiernaast.

Minima $f(0) = 0$ en $f(3) = 0$ en maximum $f(1) = 4$.



b Met de rekenmachine:

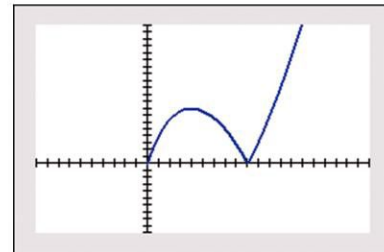
Invoer: $y_1 = |-6x + 2x\sqrt{x}|$

Venster: $-10 \leq x \leq 20$, $-10 \leq y \leq 20$

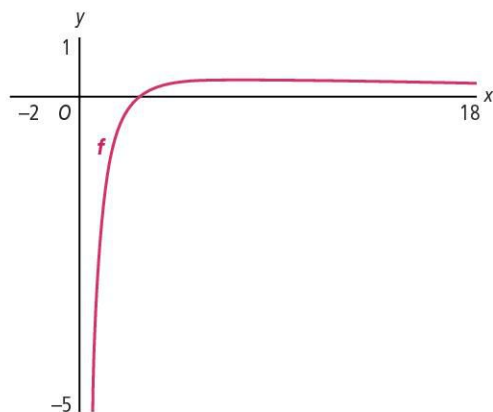
Optie: maximum en minimum

Zie de plot hiernaast.

Minimum $g(9) = 0$, randminimum $g(0) = 0$ en maximum $g(4) = 8$



17 a



b $f(x) = 0$ geeft $\frac{2\ln(x) - 2}{x} = 0$

$$2 \ln(x) - 2 = 0$$

$$2 \ln(x) = 2$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

De x -coördinaat van het snijpunt met de x -as is $x = e$.

c $f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 1 \cdot (2 \ln(x) - 2)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{2 - 2 \ln(x) + 2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 - 2 \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{4 - 2 \ln(x)}{x^2} = 0$$

$$4 - 2 \ln(x) = 0$$

$$2 \ln(x) = 4$$

$$\ln(x) = 2$$

$$x = e^2$$

Zie de grafiek bij opdracht a, maximum $f(e^2) = \frac{2 \cdot 2 - 2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$

$$\text{d } f'''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (4 - 2 \ln(x))}{x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-2x - 8x + 4x \ln(x)}{x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-10x + 4x \ln(x)}{x^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-10 + 4 \ln(x)}{x^3}$$

$$f'''(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-10 + 4 \ln(x)}{x^3} = 0$$

$$-10 + 4 \ln(x) = 0$$

$$4 \ln(x) = 10$$

$$\ln(x) = 2\frac{1}{2}$$

$$x = e^{2\frac{1}{2}} = e^2 \sqrt{e} \text{ en } y = f(e^{2\frac{1}{2}}) = \frac{2 \cdot 2\frac{1}{2} - 2}{e^{2\frac{1}{2}}} = \frac{3}{e^2 \sqrt{e}}$$

$$\text{Het buigpunt is het punt } \left(e^2 \sqrt{e}, \frac{3}{e^2 \sqrt{e}} \right).$$

18 a Als $p = -5$, dan is $g(x) = x^2 + 9x - 5$.

$$g'(x) = 2x + 9$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt met x -coördinaat -1 is

$$g'(-1) = 2 \cdot -1 + 9 = 7.$$

De raaklijn is van de vorm $y = 7x + b$.

$$g(-1) = (-1)^2 + 9 \cdot -1 - 5 = -13, \text{ dus het raakpunt is het punt } (-1, -13).$$

$$x = -1 \text{ en } y = -13 \text{ invullen in } y = 7x + b \text{ geeft } -13 = 7 \cdot -1 + b \text{ dus } b = -6.$$

Een vergelijking van de gevraagde raaklijn is $y = 7x - 6$.

$$\text{b } f''(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4x - 9$$

$$f''(x) = g'(x) \text{ geeft } 1\frac{1}{2}x^2 - 4x - 9 = 2x + 9$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 6x - 18 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x - 6)(x + 2) = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -2$$

c De grafieken van f en g raken elkaar als $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.

$$f(6) = -18 \text{ en } g(6) = 90 + p, \text{ dus voor } p = -108.$$

$$f(-2) = 6 \text{ en } g(-2) = -14 + p, \text{ dus ook voor } p = 20.$$

Vaardigheden 10

- 1 a** $y = x^2 - 12x - 4$
 $y = x^2 - 12x + 36 - 36 - 4$
 $y = (x - 6)^2 - 40$
- b** $y = 2x^2 + 4x + 3$
 $y = 2(x^2 + 2x) + 3$
 $y = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3$
 $y = 2(x + 1)^2 - 2 \cdot 1 + 3$
 $y = 2(x + 1)^2 + 1$
- c** $y = 3x^2 - 6x$
 $y = 3(x^2 - 2x)$
 $y = 3(x^2 - 2x + 1 - 1)$
 $y = 3(x - 1)^2 - 3 \cdot 1$
 $y = 3(x - 1)^2 - 3$
- d** $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$
 $y = 1\frac{1}{2}(x^2 - 4x) + 3$
 $y = 1\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3$
 $y = 1\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1\frac{1}{2} \cdot 4 + 3$
 $y = 1\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$
- 2 a** $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$
 $f(x) = 3(x^2 - 2x - 8)$ $f(x) = 3(x^2 - 2x) - 24$
 $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$ $f(x) = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) - 24$
 $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$
- b** Met $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$, de top is $(1, -27)$.
- c** Met $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$, de snijpunten met de x -as zijn $(-2, 0)$ en $(4, 0)$.
- d** Met $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ kun je handig het snijpunt met de y -as berekenen, deze is $(0, -24)$.
- 3 a** $f(x) = 0$ geeft $x = 6$ of $x = -12$.
 De snijpunten met de x -as zijn $(-12, 0)$ en $(6, 0)$.
 $x_{top} = \frac{1}{2}(6 + (-12)) = -3$ en $y_{top} = f(-3) = -6 \cdot -9 \cdot 9 = 486$
 De coördinaten van de top zijn $(-3, 486)$.
- b** De coördinaten van de top zijn $(-1, -18)$.
 $g(x) = 0$ geeft $2(x + 1)^2 - 18 = 0$ ofwel $2(x + 1)^2 = 18$.
 $(x + 1)^2 = 9$
 $x + 1 = -3$ of $x + 1 = 3$
 $x = -4$ of $x = 2$
 De snijpunten met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(2, 0)$.
- c** $h(x) = x^2 + 4x - 12$
 $h(x) = (x + 6)(x - 2)$
 $h(x) = 0$ geeft $x = -6$ of $x = 2$.
 De snijpunten met de x -as zijn $(-6, 0)$ en $(2, 0)$.
 $x_{top} = \frac{1}{2}(-6 + 2) = -2$ en $y_{top} = h(-2) = (-2 + 6)(-2 - 2) = 4 \cdot -4 = -16$
 De coördinaten van de top zijn $(-2, -16)$.

- 4** De coördinaten van de top zijn $(2, -3)$ dus

$$f(x) = a(x - 2)^2 - 3.$$

De grafiek gaat door het punt $(5, 6)$, dus $f(5) = 6$.

$$f(5) = a(5 - 2)^2 - 3 = 6$$

$$9a - 3 = 6$$

$$9a = 9, \text{ dus } a = 1$$

Het functievoorschrift is $f(x) = (x - 2)^2 - 3$.

$$f(0) = (0 - 2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

5 a $y = (2^t + 1)^2$
 $y = (2^t)^2 + 2 \cdot 2^t + 1$
 $y = 2^{2t} + 2^{t+1} + 1$

b $y = (3^{2x} - 4)(3^{-2x} + 2)$
 $y = 3^0 + 3^{2x} \cdot 2 - 4 \cdot 3^{-2x} - 8$
 $y = 2 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{-2x} - 7$

c $y = 4^{2p}(4^{\frac{1}{3}p} - 4^{-3p})$
 $y = 4^{2\frac{1}{3}p} - 4^{-p}$

d $y = (7^{2p} + p)(7^{3p} - 6)$
 $y = 7^{5p} - 6 \cdot 7^{2p} + p \cdot 7^{3p} - 6p$

6 a $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot 3\sqrt{x}$
 $y = x^{-\frac{1}{4}} \cdot 3x^{\frac{1}{2}}$
 $y = 3 \cdot x^{\frac{1}{4}}$

d $y = \frac{4}{\sqrt[5]{x}} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$
 $y = 4 \cdot x^{-\frac{1}{5}} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$
 $y = 2 \cdot x^{2\frac{7}{15}}$

b $y = (-2x)^3 \cdot (\sqrt[3]{x^4})^3$
 $y = (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (x^{\frac{4}{3}})^3$
 $y = -8 \cdot x^3 \cdot x^4$
 $y = -8 \cdot x^7$

e $y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2x}}\right)^3$
 $y = \left(\frac{x}{(2x)^{\frac{1}{3}}}\right)^3$
 $y = \frac{x^3}{2x}$
 $y = \frac{1}{2}x^2$

c $y = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{4\sqrt[3]{x}}$
 $y = \frac{\frac{1}{8}x^3}{4x^{\frac{1}{3}}}$
 $y = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{8}x^3$
 $y = \frac{1}{32} \cdot x^{2\frac{2}{3}}$

f $y = (\sqrt{5x})^4 \cdot (-2x)^{-3}$
 $y = \left((5x)^{\frac{1}{2}}\right)^4 \cdot (-2)^{-3} \cdot x^{-3}$
 $y = (5x)^2 \cdot -\frac{1}{8} \cdot x^{-3}$
 $y = 25 \cdot x^2 \cdot -\frac{1}{8} \cdot x^{-3}$
 $y = -3\frac{1}{8} \cdot x^{-1}$

7 a $f(x) = 2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(3x)$
 $f(x) = {}^3\log(x^2) + {}^3\log(3x)$
 $f(x) = {}^3\log(x^2 \cdot 3x)$
 $f(x) = {}^3\log(3x^3)$

b $f(x) = {}^7\log(x - 3) + 2 \cdot {}^7\log(x) - 2$
 $f(x) = {}^7\log(x - 3) + {}^7\log(x^2) - {}^7\log(49)$
 $f(x) = {}^7\log((x - 3) \cdot x^2 : 49)$
 $f(x) = {}^7\log\left(\frac{1}{49}x^2(x - 3)\right)$
 $f(x) = {}^7\log\left(\frac{1}{49}x^3 - \frac{3}{49}x^2\right)$

Vaardigheden 10

c $f(x) = 5 \cdot \log(x) + 2 \cdot \log(3x) - \frac{1}{2} \cdot \log(x^4)$

$$f(x) = \log(x^5) + \log((3x)^2) - \log((x^4)^{\frac{1}{2}})$$

$$f(x) = \log(x^5) + \log(9x^2) - \log(x^2)$$

$$f(x) = \log\left(\frac{x^5 \cdot 9x^2}{x^2}\right)$$

$$f(x) = \log(9x^5)$$

d $f(x) = 3 \cdot \log(2x) + 2 \cdot \log(4 + x) - 1$

$$f(x) = \log((2x)^3) + \log((4 + x)^2) - \log(10)$$

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{10} \cdot 8x^3 \cdot (4 + x)^2\right)$$

$$f(x) = \log\left(\frac{4}{5}x^3 \cdot (4 + x)^2\right)$$

8 $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x}$

$$f(x) = \frac{2x}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x(x-1)} + \frac{3x-3}{x(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{5x-3}{x(x-1)}$$

9 a $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+3}$

$$f(x) = \frac{1 \cdot (x+3)}{x(x+3)} - \frac{2x}{x(x+3)}$$

$$f(x) = \frac{-x+3}{x(x+3)}$$

b $g(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{x+3}$

$$g(x) = \frac{2(x+3)}{3x^2(x+3)} - \frac{3x^2}{3x^2(x+3)}$$

$$g(x) = \frac{2x+6-3x^2}{3x^2(x+3)}$$

c $h(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \frac{2x}{\cos(x)}$

$$h(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x\cos(x)} - \frac{2x^2}{x\cos(x)}$$

$$h(x) = \frac{\sin(x)\cos(x) - 2x^2}{x\cos(x)}$$

d $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x\sqrt{x}}$

$$k(x) = \frac{x}{x\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{x\sqrt{x}}$$

$$k(x) = \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x\sqrt{x}}$$

$$10 \text{ a } y = \sqrt{\frac{1}{9}x} + \sqrt{121x} = \frac{1}{3}\sqrt{x} + 11\sqrt{x} = 11\frac{1}{3}\sqrt{x}$$

$$\text{b } y = \sqrt{27x} - \sqrt{75x} = 3\sqrt{3x} - 5\sqrt{3x} = -2\sqrt{3x}$$

$$\text{c } y = 2\sqrt{18x} + \frac{1}{2}\sqrt{288x} = 6\sqrt{2x} + \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2x} = 12\sqrt{2x}$$

$$11 \text{ a } 2pq = p + q$$

$$2pq - p = q$$

$$p(2q - 1) = q$$

$$p = \frac{q}{2q - 1}$$

$$\text{c } 4p^3 = q - 6$$

$$p^3 = \frac{1}{4}q - 1\frac{1}{2}$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{1}{4}q - 1\frac{1}{2}}$$

$$\text{b } \sqrt{p} + q = 4$$

$$\sqrt{p} = 4 - q$$

$$p = (4 - q)^2$$

$$\text{d } e^p = \sqrt{q}$$

$$p = \ln(\sqrt{q})$$

$$p = \frac{1}{2} \ln(q)$$

12 a Bij spiegelen in de lijn $y = x$ verwissel je y en x .

De formule $y = x^2 - 2x$ wordt dan $x = y^2 - 2y$.

Nu kwadraat afsplitsen, dit geeft $x = y^2 - 2y + 1 - 1 = (y - 1)^2 - 1$.

b Uit $x = (y - 1)^2 - 1$ volgt $(y - 1)^2 = x + 1$ en hieruit volgt

$$y - 1 = -\sqrt{x + 1} \text{ of } y - 1 = \sqrt{x + 1}$$

$$y = 1 - \sqrt{x + 1} \text{ of } y = 1 + \sqrt{x + 1}.$$

Dit is niet de grafiek van een functie, want bij sommige x -waarden zijn er twee y -waarden.

13 a Dit is het geval bij C: $x - 3 = y^2 - 4y + 4$ want

$$x - 3 = (y - 2)^2$$

$$y - 2 = -\sqrt{x - 3} \text{ of } y - 2 = \sqrt{x - 3}.$$

Bij sommige waarden van x zijn er twee waarden van y .

b A $\sqrt{xy} = x$ geeft $xy = x^2$ dus $y = x$ (mits $x \geq 0$)

$$\text{B } x + 1 = \frac{2}{y(x - 1)} \text{ geeft } y = \frac{2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$\text{D } x = {}^3\log\left(\frac{y - 2}{7}\right) \text{ geeft } \frac{y - 2}{7} = 3^x \text{ dus } y = 2 + 7 \cdot 3^x$$

$$14 \text{ a } p = \frac{t + 4}{t + 3} = \frac{t + 3 + 1}{t + 3} = 1 + \frac{1}{t + 3} \text{ dus } p - 1 = \frac{1}{t + 3}$$

$$\text{b } t = 2 - \frac{1}{2}s \text{ invullen in } p - 1 = \frac{1}{t + 3} \text{ geeft } p - 1 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}s + 3}$$

$$p - 1 = \frac{1}{5 - \frac{1}{2}s}$$

$$5 - \frac{1}{2}s = \frac{1}{p - 1}$$

$$\frac{1}{2}s = 5 - \frac{1}{p - 1} \text{ dus } s = 10 - \frac{2}{p - 1}$$

Vaardigheden 10

c $t = 2 - \frac{1}{2}s$ geeft $\frac{1}{2}s = 2 - t$ ofwel $s = 4 - 2t$.

$s = 3$ invullen in $s = 4 - 2t$ geeft $3 = 4 - 2t$ dus $t = \frac{1}{2}$.

Dit laatste invullen in $p = \frac{t+4}{t+3}$ geeft $p = \frac{\frac{1}{2}+4}{\frac{1}{2}+3} = \frac{4\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$

15 a $12 - 2(3q - 4) = 4$

$12 - 6q + 8 = 4$

$-6q = -16$

$q = 2\frac{2}{3}$

b $4 - 3(k - 2) = 3 - 5k$

$4 - 3k + 6 = 3 - 5k$

$2k = -7$

$k = -3\frac{1}{2}$

c $3p + 5(6 - 1,2p) = 0$

$3p + 30 - 6p = 0$

$-3p = -30$

$p = 10$

d $2,3y - 5(5,3 - 2y) = 1,7y$

$2,3y - 26,5 + 10y = 1,7y$

$10,6y = 26,5$

$y = 2,5$

16 a $\begin{cases} 3a + 2b = 14 \\ -2a + b = 5 \end{cases}$

Uit de onderste vergelijking volgt $b = 2a + 5$.

Dit substitueren in de bovenste vergelijking geeft

$3a + 2(2a + 5) = 14$

$3a + 4a + 10 = 14$

$7a = 4$

De oplossing is: $a = \frac{4}{7}$ en $b = 2 \cdot \frac{4}{7} + 5 = 6\frac{1}{7}$

b $\begin{cases} 0,1p - 1,3q = 2,4 \\ 0,4p + 2q = 2,4 \end{cases}$ vermenigvuldigen met 10 geeft

$\begin{cases} p - 13q = 24 \\ 4p + 20q = 24 \end{cases}$

Uit de bovenste vergelijking volgt $p = 13q + 24$.

Dit substitueren in de onderste vergelijking geeft

$4(13q + 24) + 20q = 24$

$52q + 96 + 20q = 24$

$72q = -72$

De oplossing is: $q = -1$ en $p = 13 \cdot -1 + 24 = 11$.

c $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ 5x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$

Uit de bovenste vergelijking volgt $y = 5 - x^2$.

Dit substitueren in de onderste vergelijking geeft

$5x + 3(5 - x^2) - 7 = 0$

$5x + 15 - 3x^2 - 7 = 0$

$-3x^2 + 5x + 8 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot -3 \cdot 8 = 121$

$x = \frac{-5 - 11}{-6} = 2\frac{2}{3}$ of $x = \frac{-5 + 11}{-6} = -1$

De oplossingen zijn: $x = 2\frac{2}{3}$ en $y = -2\frac{1}{9}$ of $x = -1$ en $y = 4$.

$$d \quad \begin{cases} x^2 + 5y + 4 = 0 \\ 3x^2 + 2y^2 = 80 \end{cases}$$

Uit de bovenste vergelijking volgt $x^2 = -5y - 4$.

Dit substitueren in de onderste vergelijking geeft

$$3(-5y - 4) + 2y^2 = 80$$

$$2y^2 - 15y - 92 = 0$$

$$D = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot -92 = 961$$

$$y = \frac{15 - 31}{4} = -4 \text{ of } y = \frac{15 + 31}{4} = 11\frac{1}{2} \text{ (voldoet niet)}$$

$y = -4$ geeft $x^2 = 16$, dus $x = 4$ of $x = -4$.

De oplossingen zijn: $x = -4$ en $y = -4$ of $x = 4$ en $y = -4$.

$$17 \quad a \quad 4 \cdot 3^{2x} = 24$$

$$3^{2x} = 6$$

$$2x = {}^3\log(6)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(6)$$

$$d \quad 3x^{-5} = 96$$

$$x^{-5} = 32$$

$$x^{-5} = 2^5$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$b \quad 12 \cdot 2^{3-5x} + 8 = 32$$

$$12 \cdot 2^{3-5x} = 24$$

$$2^{3-5x} = 2$$

$$3 - 5x = 1$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$e \quad 10 - \left(\frac{1}{2}x\right)^5 = -34$$

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^5 = 44$$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt[5]{44}$$

$$x = 2\sqrt[5]{44}$$

$$c \quad 5 \cdot 4^{-x+1} - 35 = 0$$

$$5 \cdot 4^{-x+1} = 35$$

$$4^{-x+1} = 7$$

$$-x + 1 = {}^4\log(7)$$

$$x = 1 - {}^4\log(7)$$

$$f \quad \frac{1}{2}x^8 + 12 = 15$$

$$\frac{1}{2}x^8 = 3$$

$$x^8 = 6$$

$$x = -\sqrt[8]{6} \text{ en } x = \sqrt[8]{6}$$

$$18 \quad a \quad {}^3\log(x) + {}^3\log(7) = 2$$

$${}^3\log(7x) = 2$$

$$7x = 9$$

$$x = 1\frac{2}{7}$$

$$b \quad \frac{1}{2}\log(x+4) - \frac{1}{2}\log(2x) = -1$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+4}{2x}\right) = -1$$

$$\frac{x+4}{2x} = 2$$

$$x+4 = 4x$$

$$4 = 3x$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$$c \quad 6 - {}^3\log(x+5) = 4$$

$${}^3\log(x+5) = 2$$

$$x+5 = 9$$

$$x = 4$$

$$d \quad {}^4\log(2x+1) + 2 \cdot {}^4\log(3) = 1\frac{1}{2} + {}^4\log(9x)$$

$${}^4\log(2x+1) + {}^4\log(9) = {}^4\log(8) + {}^4\log(9x)$$

$$9(2x+1) = 8 \cdot 9x$$

$$2x+1 = 8x$$

$$1 = 6x$$

$$x = \frac{1}{6}$$

Vaardigheden 10

- 19 a** $x^2(2^x - 1) = 36(2^x - 1)$
 $x^2 = 36$ of $2^x - 1 = 0$
 $x^2 = 36$ of $2^x = 1$
 $x = -6$ of $x = 6$ of $x = 0$
- b** $({}^3\log(4x - 1) + 2)^2 = 16$
 ${}^3\log(4x - 1) + 2 = 4$ of ${}^3\log(4x - 1) + 2 = -4$
 ${}^3\log(4x - 1) = 2$ of ${}^3\log(4x - 1) = -6$
 $4x - 1 = 9$ of $4x - 1 = 3^{-6}$
 $4x = 10$ of $4x = 1 + 3^{-6}$
 $x = 2\frac{1}{2}$ of $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 729} = \frac{730}{2916} = \frac{365}{1458}$
- c** $(x^3 + 2)^2 = (3 - 2x^3)^2$
 $x^3 + 2 = 3 - 2x^3$ of $x^3 + 2 = -3 + 2x^3$
 $3x^3 = 1$ of $-x^3 = -5$
 $x^3 = \frac{1}{3}$ of $x^3 = 5$
 $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ of $x = \sqrt[3]{5}$
- d** $(\ln(x) + 5)^2(x - 1) = 16(x - 1)$
 $x - 1 = 0$ of $(\ln(x) + 5)^2 = 16$
 $x = 1$ of $\ln(x) + 5 = -4$ of $\ln(x) + 5 = 4$
 $x = 1$ of $\ln(x) = -9$ of $\ln(x) = -1$
 $x = 1$ of $x = \frac{1}{e^9}$ of $x = \frac{1}{e}$
- 20 a** $5 + \sqrt{3x - 10} = 8$
 $\sqrt{3x - 10} = 3$
 $3x - 10 = 9$
 $3x = 19$
 $x = 6\frac{1}{3}$
- b** $4x + \sqrt{x} = 2x + 6$
 $\sqrt{x} = -2x + 6$
 $x = 4x^2 - 24x + 36$
 $4x^2 - 25x + 36 = 0$
 $D = 625 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$
 $x = \frac{25 - 7}{8} = 2\frac{1}{4}$ of $x = \frac{25 + 7}{8} = 4$ (voldoet niet)
Oplossing: $x = 2\frac{1}{4}$
- c** $\sqrt{8 - 4x} = 4x + 4$
 $8 - 4x = (4x + 4)^2$
 $8 - 4x = 16x^2 + 32x + 16$
 $16x^2 + 36x + 8 = 0$
 $4x^2 + 9x + 2 = 0$
 $D = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$
 $x = \frac{-9 - 7}{8} = -2$ (voldoet niet) of $x = \frac{-9 + 7}{8} = -\frac{1}{4}$
Oplossing: $x = -\frac{1}{4}$

d $4x - 3\sqrt{6+x} = 2x - 7$
 $3\sqrt{6+x} = 2x + 7$
 $9(6+x) = (2x+7)^2$
 $54 + 9x = 4x^2 + 28x + 49$
 $4x^2 + 19x - 5 = 0$
 $D = 19^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5 = 441$
 $x = \frac{-19 - 21}{8} = -5$ (voldoet niet) of $x = \frac{-19 + 21}{8} = \frac{1}{4}$
 Oplossing: $x = \frac{1}{4}$

21 a $\frac{-27}{x-4} = 9x$
 $-27 = 9x(x-4)$
 $9x^2 - 36x + 27 = 0$
 $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x-3)(x-1) = 0$
 $x = 3$ of $x = 1$

b $\frac{5}{2-3^x} = \frac{6}{3^x}$
 $5 \cdot 3^x = 12 - 6 \cdot 3^x$
 $11 \cdot 3^x = 12$
 $3^x = \frac{12}{11}$
 $x = {}^3\log(\frac{12}{11})$

c $1 + \frac{3}{x^4+1} = x^4$
 $\frac{3}{x^4+1} = x^4 - 1$
 $(x^4+1)(x^4-1) = 3$
 $x^8 - 1 = 3$
 $x^8 = 4$
 $x^4 = 2$
 $x = -\sqrt[4]{2}$ of $x = \sqrt[4]{2}$

d $\frac{x}{x+5} = \frac{4}{x} - 3$
 $\frac{x}{x+5} = \frac{4-3x}{x}$
 $x^2 = (x+5)(4-3x)$
 $x^2 = 4x - 3x^2 + 20 - 15x$
 $4x^2 + 11x - 20 = 0$
 $D = 121 - 4 \cdot 4 \cdot -20 = 441$
 $x = \frac{-11 - 21}{8}$ of $x = \frac{-11 + 21}{8}$
 $x = -4$ of $x = 1\frac{1}{4}$

22 a $4^x - 2^x - 12 = 0$
 $(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$ substitutie van $2^x = t$ geeft
 $t^2 - t - 12 = 0$
b $t^2 - t - 12 = 0$
 $(t-4)(t+3) = 0$
 $t = 4$ of $t = -3$
c $t = 4$ of $t = -3$ substitutie van $t = 2^x$ geeft
 $2^x = 4$ of $2^x = -3$
 $x = 2$ ($2^x = -3$ heeft geen oplossing)
d $9^x - 3^{x+1} = 18$
 $(3^x)^2 - 3^{x+1} = 18$
 $(3^x)^2 - 3^1 \cdot 3^x - 18 = 0$ substitutie van $3^x = t$ geeft
 $t^2 - 3t - 18 = 0$
 $(t-6)(t+3) = 0$
 $t = 6$ of $t = -3$ substitutie van $t = 3^x$ geeft
 $3^x = 6$ of $3^x = -3$ (geen oplossing)
 $x = {}^3\log(6)$

Vaardigheden 10

23 a $\frac{2}{^3\log(x)} + 1 = ^3\log(x)$ substitutie van $^3\log(x) = t$ geeft

$$\frac{2}{t} + 1 = t$$

$$\frac{2+t}{t} = t$$

$$2+t = t^2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

$$t = 2 \text{ of } t = -1 \text{ substitutie van } t = ^3\log(x) \text{ geeft}$$

$$^3\log(x) = 2 \text{ of } ^3\log(x) = -1$$

$$x = 3^2 = 9 \text{ of } x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

b $\left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{2a-1}{a+1} + 2$ substitutie van $\frac{2a-1}{a+1} = t$ geeft

$$t^2 = t + 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

$$t = 2 \text{ of } t = -1 \text{ substitutie van } t = \frac{2a-1}{a+1} \text{ geeft}$$

$$\frac{2a-1}{a+1} = 2 \text{ of } \frac{2a-1}{a+1} = -1$$

$$2a-1 = 2a+2 \text{ (geen oplossing) of } 2a-1 = -a-1 \text{ dus } a = 0$$

c $4(4^x + 1)^2 + 25 = 25(4^x + 1)$ substitutie van $4^x + 1 = t$ geeft

$$4t^2 + 25 = 25t$$

$$4t^2 - 25t + 25 = 0$$

$$D = 625 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 225$$

$$x = \frac{25-15}{8} = 1\frac{1}{4} \text{ of } x = \frac{25+15}{8} = 5 \text{ substitutie van } t = 4^x + 1 \text{ geeft}$$

$$4^x + 1 = 1\frac{1}{4} \text{ of } 4^x + 1 = 5$$

$$4^x = \frac{1}{4} \text{ of } 4^x = 4$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

d $2 \cdot \frac{e^x - 1}{e^x - e} = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - e}\right)^2$ substitutie van $\frac{e^x - 1}{e^x - e} = t$ geeft

$$2t = t^2$$

$$t^2 - 2t = 0$$

$$t(t-2) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 2 \text{ substitutie van } t = \frac{e^x - 1}{e^x - e} \text{ geeft}$$

$$\frac{e^x - 1}{e^x - e} = 0 \text{ of } \frac{e^x - 1}{e^x - e} = 2$$

$$e^x - 1 = 0 \text{ of } e^x - 1 = 2e^x - 2e$$

$$e^x = 1 \text{ of } e^x = 2e - 1$$

$$x = 0 \text{ of } x = \ln(2e - 1)$$

24 a $4^{2x} + 4^{x+2} + 4 = 516$

$$(4^x)^2 + 4^x \cdot 4^2 + 4 = 516 \text{ substitutie van } 4^x = t \text{ geeft}$$

$$t^2 + 16t - 512 = 0$$

$$(t-16)(t+32) = 0$$

$$t = 16 \text{ of } t = -32 \text{ substitutie van } t = 4^x \text{ geeft}$$

$$4^x = 16 \text{ of } 4^x = -32$$

$$x = 2 \quad (4^x = -32 \text{ heeft geen oplossing})$$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4^{2x} + 4^{x+2} + 4) = 0 + 0 + 4$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (4^{2x} + 4^{x+2} + 4) = \infty$

Het bereik van f is $\langle 4, \rightarrow \rangle$.

25 a voorwaarde: $x \neq 3$

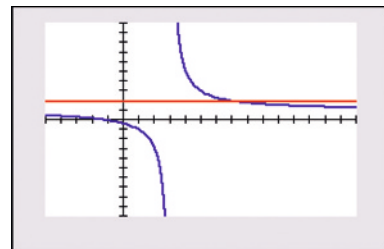
$$\frac{x+1}{x-3} = 2$$

$$x+1 = 2x-6$$

$$x = 7$$

Zie de plot hiernaast: de oplossing van

$$\frac{x+1}{x-3} < 2 \text{ is } x < 3 \text{ of } x > 7.$$



b voorwaarde: $x^2 - 1 > 0$

dus $x < -1$ of $x > 1$

$${}^4\log(x^2 - 1) = 1\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 1 = 4^{1\frac{1}{2}}$$

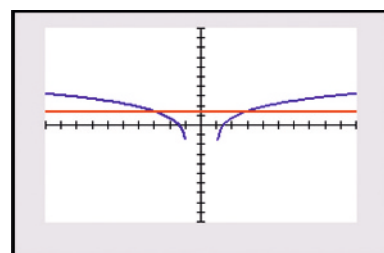
$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ of } x = 3$$

Zie de plot hiernaast: de oplossing van

$${}^4\log(x^2 - 1) < 1\frac{1}{2} \text{ is } -3 < x < -1 \text{ of } 1 < x < 3.$$



c voorwaarde: $2x + 4 > 0$

dus $x > -2$

$$\frac{3}{\sqrt{2x+4}} = 1$$

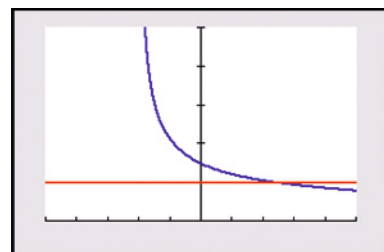
$$\sqrt{2x+4} = 3$$

$$2x + 4 = 9$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

Zie de plot hiernaast: de oplossing van

$$\frac{3}{\sqrt{2x+4}} > 1 \text{ is } -2 < x < 2\frac{1}{2}.$$



d voorwaarde: $x > 0$ en $x + 2 > 0$

dus $x > 0$

$${}^2\log(x) + {}^2\log(x+2) = 3$$

$${}^2\log(x^2 + 2x) = 3$$

$$x^2 + 2x = 2^3$$

$$x^2 + 2x = 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

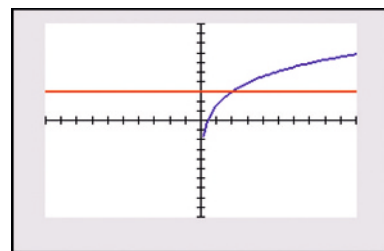
$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 2$$

alleen $x = 2$ voldoet

Zie de plot hiernaast: de oplossing van

$${}^2\log(x) + {}^2\log(x+2) \leq 3 \text{ is } 0 < x \leq 2.$$



Vaardigheden 10

26 a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x+3}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{7+0}{0-1} = -7$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3+4x^2-1}{2x^3+x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x}+1} = \frac{0+0-0}{0+1} = 0$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(3x^2-4x+1)}{8x^3+x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2-8x+2}{8x^2+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-\frac{8}{x}+\frac{2}{x^2}}{8+\frac{\sqrt{x}}{x^2}} = \frac{6-0+0}{8+0} = \frac{3}{4}$

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+6)(x^2-3)}{x^2(8-5x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1+\frac{6}{x^2}\right)\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{1 \cdot \left(\frac{8}{x^2}-5\right)} = \frac{(1+0)(1-0)}{1 \cdot (0-5)} = -\frac{1}{5}$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{0}{1+0} = 0$

f $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2(8-2x)^2}{9x-2x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{448x^2-224x^3+28x^4}{9x-2x^4} =$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{448}{x^2}-\frac{224}{x}+28}{\frac{9}{x^3}-2} = \frac{0-0+28}{0-2} = -14$

- 27 a** Voor de nulpunten geldt $3x^2 - 81 = 0$.
 $3x^2 = 81$
 $x^2 = 27$
 $x = \sqrt{27}$ of $x = -\sqrt{27}$
 $x = 3\sqrt{3}$ of $x = -3\sqrt{3}$
- b** Voor de verticale asymptoten geldt $x^2 - 16 = 0$ en $3x^2 - 81 \neq 0$.
 $x^2 = 16$
 $x = 4$ of $x = -4$
De verticale asymptoten hebben vergelijking $x = 4$ en $x = -4$.
- c** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-81}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{81}{x^2}}{1-\frac{16}{x^2}} = 3$ en ook $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.
Een vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = 3$.

- 28 a** Voor het nulpunt van g geldt $2e^x - e^{-x} = 0$ en $e^x - 1 \neq 0$.
Vermenigvuldiging met e^x geeft $2e^{2x} - 1 = 0$.
 $2e^{2x} = 1$
 $e^{2x} = \frac{1}{2}$
 $2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
Het nulpunt van g is $x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.
- b** Voor de verticale asymptoot geldt $e^x - 1 = 0$ en $2e^x - e^{-x} \neq 0$.
 $e^x = 1$
 $x = 0$
Een vergelijking van de verticale asymptoot is $x = 0$.
- c** $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x - e^{-x}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - e^{-2x}}{1 - e^{-x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - e^{-x}}{e^x - 1} = \frac{0-\infty}{0-1} = \infty$
- d** Een vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = 2$ (naar rechts).

Vaardigheden 11

1 a $f: y = \frac{2}{3x-6}$ dus

$$f^{inv}: x = \frac{2}{3y-6}$$

$$x(3y-6) = 2$$

$$3xy - 6x = 2$$

$$3xy = 6x + 2$$

$$y = 2 + \frac{2}{3x}$$

$$f^{inv}(x) = 2 + \frac{2}{3x}$$

b $f: y = 2^{3x+2}$ dus

$$f^{inv}: x = 2^{3y+2}$$

$$3y + 2 = {}^2\log(x)$$

$$3y = {}^2\log(x) - 2$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) - \frac{2}{3}$$

$$f^{inv}(x) = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(x) - \frac{2}{3}$$

c $f: y = {}^2\log(2 + 3x^3)$ dus

$$f^{inv}: x = {}^2\log(2 + 3y^3)$$

$$2 + 3y^3 = 2^x$$

$$3y^3 = 2^x - 2$$

$$y^3 = \frac{1}{3} \cdot 2^x - \frac{2}{3}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^x - \frac{2}{3}}$$

$$f^{inv}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^x - \frac{2}{3}}$$

d $f: y = \frac{4}{\ln(2x+4)} + 3$ dus

$$f^{inv}: x = \frac{4}{\ln(2y+4)} + 3$$

$$x - 3 = \frac{4}{\ln(2y+4)}$$

$$\ln(2y+4) = \frac{4}{x-3}$$

$$2y+4 = e^{\frac{4}{x-3}}$$

$$y = -2 + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{4}{x-3}}$$

$$f^{inv}(x) = -2 + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{4}{x-3}}$$

e $f: y = e^{2x+4}$ dus

$$f^{inv}: x = e^{2y+4}$$

$$2y + 4 = \ln(x)$$

$$2y = -4 + \ln(x)$$

$$y = -2 + \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$f^{inv}(x) = -2 + \frac{1}{2} \ln(x)$$

f $f: y = \sqrt{x^2 + 4} - x$ dus

$$f^{inv}: x = \sqrt{y^2 + 4} - y$$

$$\sqrt{y^2 + 4} = x + y$$

$$y^2 + 4 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$2xy = -x^2 + 4$$

$$y = \frac{-x^2 + 4}{2x}$$

$$f^{inv}(x) = \frac{4 - x^2}{2x}$$

2 a Uit $f: y = x^2$ volgt $f^{inv}: x = y^2$ dus $y = -\sqrt{x}$ of $y = \sqrt{x}$.

Dus zijn er bij sommige x -waarden twee y -waarden mogelijk.

Dit kan niet bij een functie.

b Tot $x = -1$ is de grafiek van g stijgend, tussen $x = -1$ en $x = 1$ is de grafiek

van g dalend en vanaf $x = 1$ is de grafiek van g weer stijgend.

Een horizontale lijn kan de grafiek van g in drie punten snijden.

Het spiegelbeeld van de grafiek van g in $y = x$ kan dan door een verticale lijn

in drie punten worden gesneden. Dus zouden er bij sommige x -waarden (de x -waarden tussen -1 en 1) maar liefst drie functiewaarden zijn.

Dat kan niet bij een functie.

3 a $f(x) = 8x^2 \cdot x^{\frac{1}{5}} = 8x^{2\frac{1}{5}}$
 $f'(x) = 8 \cdot 2\frac{1}{5} \cdot x^{1\frac{1}{5}} = 17\frac{3}{5}x^{\frac{6}{5}}$

b $f(x) = 6x^{-3} + 5$

$$f'(x) = -18x^{-4} = -\frac{18}{x^4}$$

c $f(x) = 5 - 3\cos(x)$

$$f'(x) = -3 \cdot -\sin(x) = 3\sin(x)$$

d $f(x) = 8e^x + e$

$$f'(x) = 8e^x$$

e $f(x) = 4 \cdot {}^2\log(x)$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(2)} = \frac{4}{x \cdot \ln(2)}$$

f $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0,3^x$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0,3^x \cdot \ln(0,3)$$

Vaardigheden 11

4 a $g'(x) = 2x \cdot \tan(3x) + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3$
 $g'(x) = 2x \cdot \tan(3x) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x)}$

b $g'(x) = \ln(5x) + x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 + 1$
 $g'(x) = \ln(5x) + 2$

c $g'(x) = \frac{3(x^2 - 4) - (3x + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$
 $g'(x) = -\frac{3x^2 + 2x + 12}{(x^2 - 4)^2}$

d $g'(x) = 2x \cdot {}^4\log(3x + 6) + x^2 \cdot \frac{1}{(3x + 6) \cdot \ln(4)} \cdot 3$
 $g'(x) = 2x \cdot {}^4\log(3x + 6) + \frac{3x^2}{(3x + 6) \cdot \ln(4)}$

e $g'(x) = \frac{1}{3}(10x^2 + 7)^{-\frac{2}{3}} \cdot 20x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{20x}{\sqrt[3]{10x^2 + 7}} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$
 $g'(x) = \frac{20x}{3\sqrt[3]{10x^2 + 7}} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$

f $g'(x) = \frac{\cos(4x) \cdot 4 \cdot (1 + \cos(4x)) - \sin(4x) \cdot -\sin(4x) \cdot 4}{(1 + \cos(4x))^2}$
 $g'(x) = \frac{4\cos(4x) + 4\cos^2(4x) + 4\sin^2(4x)}{(1 + \cos(4x))^2}$
 $g'(x) = \frac{4(1 + \cos(4x))}{(1 + \cos(4x))^2}$
 $g'(x) = \frac{4}{1 + \cos(4x)}$

5 a Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$.
 $x^3(3x^2 - 20) = 0$
 $x^3 = 0$ of $3x^2 = 20$
 $x = 0$ of $x = -\sqrt{\frac{20}{3}}$ of $x = \sqrt{\frac{20}{3}}$

b Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$.
 $f'(x) = 15x^4 - 60x^2$
 $f'(x) = 15x^2(x^2 - 4)$
 $f'(x) = 15x^2(x + 2)(x - 2)$
 $f'(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = -2$ of $x = 2$
 Uit de grafiek blijkt dat er geen top is voor $x = 0$.
 $f(-2) = 64$ en $f(2) = -64$
 De toppen zijn de punten $(-2, 64)$ en $(2, -64)$.

c Voor de buigpunten geldt $f''(x) = 0$.
 $f''(x) = 60x^3 - 120x$
 $f''(x) = 60x(x^2 - 2)$
 $f''(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$.
 $f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^5 - 20(\sqrt{2})^3 =$
 $f(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 40\sqrt{2} = -28\sqrt{2}$

d $f(0) = 0$ en $f(-\sqrt{2}) = 28\sqrt{2}$
 De twee andere buigpunten zijn $(0, 0)$ en $(-\sqrt{2}, 28\sqrt{2})$.

- 6 a** Voor de nulpunten geldt $h(x) = 0$.

$$(3x - 2x^2) \cdot e^{-x} = 0$$

$$x(3 - 2x) = 0$$

$$x = 0 \text{ en } x = 1\frac{1}{2}$$

- b** Voor de extreme waarden geldt $h'(x) = 0$.

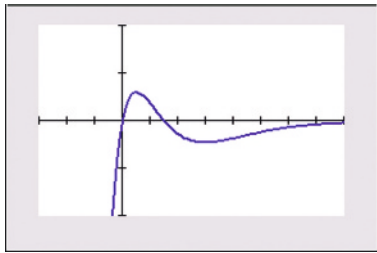
$$h'(x) = (3 - 4x) \cdot e^{-x} + (3x - 2x^2) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$h'(x) = e^{-x}(2x^2 - 7x + 3)$$

$$h'(x) = 0 \text{ geeft } 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{7 + \sqrt{25}}{4} = 3$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \left(3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \text{ en } h(3) = (3 \cdot 3 - 2 \cdot 9)e^{-3} = -9e^{-3}$$



Uit de plot blijkt dat er een maximum $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ is en een minimum

$$h(3) = -\frac{9}{e^3}$$

- c** Voor de buigpunten geldt $h''(x) = 0$.

$$h''(x) = (-7 + 4x) \cdot e^{-x} - (3 - 7x + 2x^2) \cdot e^{-x}$$

$$h''(x) = -(2x^2 - 11x + 10) \cdot e^{-x}$$

$$h''(x) = 0 \text{ geeft } 2x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$x = \frac{11 - \sqrt{41}}{4} = 2\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41} \approx 1,15 \text{ of } x = \frac{11 + \sqrt{41}}{4} = 2\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{41} \approx 4,35$$

$$h(1,15) \approx 0,26 \text{ en } h(4,35) \approx -0,32$$

De buigpunten zijn $(1,15; 0,26)$ en $(4,35, -0,32)$.

- d** $h'(0) = (3) \cdot e^{-0} = 3$ dus $\tan(\alpha) = 3$ en $\alpha \approx 72^\circ$.

- 7 a** $f(x) = 0$ geeft $\sin(2x) - 2\sin(x) = 0$ ofwel $\sin(2x) = 2\sin(x)$.

$$2\sin(x) \cdot \cos(x) = 2\sin(x)$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 1$$

$$x = k \cdot \pi \text{ of } x = k \cdot 2\pi, \text{ dus } x = k \cdot \pi.$$

Op het interval $[-\pi, 3\pi]$ zijn de oplossingen $x = -\pi, x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ en $x = 3\pi$.

- b** Voor een horizontale raaklijn moet $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2\cos(2x) - 2\cos(x) = 0$$

$$\cos(2x) = \cos(x)$$

$$2x = x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -x + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Op het interval $[-\pi, 3\pi]$ zijn de oplossingen $x = -\frac{2}{3}\pi, x = 0, x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{4}{3}\pi, x = 2\pi$ en $x = 2\frac{2}{3}\pi$.

$$f(0) = f(2\pi) = 0$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) - 2\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = f\left(2\frac{2}{3}\pi\right) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Vaardigheden 11

De punten met een horizontale raaklijn zijn

$$\left(-\frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), (0, 0), \left(\frac{2}{3}\pi, -1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, 1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), (2\pi, 0) \text{ en } \left(2\frac{2}{3}\pi, -1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

c $f'(\pi) = 2\cos(2\pi) - 2\cos(\pi) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot -1 = 4$

Een vergelijking van de raaklijn is van de vorm $y = 4x + b$.

Invullen van $(\pi, 0)$ geeft $b = -4\pi$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 4x - 4\pi$.

8 a $F(x) = -15 \cdot \ln(|5x + 7|) \cdot \frac{1}{5}$
 $F(x) = -3 \cdot \ln(|5x + 7|)$

b $F(x) = 6e^x - 2e^{2x-13} \cdot \frac{1}{2}$
 $F(x) = 6e^x - e^{2x-13}$

c $F(x) = -5\cos\left(3\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right) \cdot \frac{1}{3}$
 $F(x) = -1\frac{2}{3}\cos\left(3\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

d $f(x) = 28(4x - 8)^{-3}$
 $F(x) = 28 \cdot \frac{1}{-2} (4x - 8)^{-2} \cdot \frac{1}{4}$
 $F(x) = -\frac{7}{2(4x - 8)^2}$

e $F(x) = 25 \cdot 2^{3x-1} \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{3}$
 $F(x) = \frac{25 \cdot 2^{3x-1}}{3\ln(2)}$

f $f(x) = 3 + 2\frac{1}{2}x^{-1} - 1\frac{1}{2}x^{-2}$
 $F(x) = 3x + 2\frac{1}{2}\ln(|x|) + 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$
 $F(x) = 3x + 2\frac{1}{2}\ln(|x|) + \frac{3}{2x}$

9 a $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} 2\sin(3x) dx =$
 $\left[-\frac{2}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{1}{3}\pi} =$
 $0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

b $\int_e^{e^2} \left(\frac{4}{x} + x\right) dx =$
 $\left[4\ln(|x|) + \frac{1}{2}x^2\right]_e^{e^2} =$
 $\left(4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot e^4\right) - \left(4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot e^2\right) =$
 $4 + \frac{1}{2} \cdot e^4 - \frac{1}{2} \cdot e^2$

c $\int_0^2 \sqrt[3]{13x + 1} dx =$
 $\left[\frac{1}{1\frac{1}{3}} (13x + 1)^{1\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{13}\right]_0^2 =$
 $\left(\frac{3}{52} \cdot 27 \cdot 3\right) - \left(\frac{3}{52} \cdot \frac{1}{13} \cdot 1\right) =$
 $\frac{243}{52} - \frac{3}{52} = \frac{240}{52} = 4\frac{8}{13}$

d $\int_1^e \left(\frac{6x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{x^2}\right) dx =$
 $\int_1^e \left(6x + 4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx =$
 $\left[3x^2 + 4x + 3\ln(|x|) + \frac{1}{x}\right]_1^e =$
 $\left(3e^2 + 4e + 3 + \frac{1}{e}\right) - \left(3 + 4 + 0 + 1\right) =$
 $3e^2 + 4e + \frac{1}{e} - 5$

10 a $f(0) = 3^0 = 1$ en $g(0) = 4\sqrt{0} + 1 = 1$
 $f(2) = 3^2 = 9$ en $g(2) = 4\sqrt{4} + 1 = 8 + 1 = 9$
Dus de grafieken snijden elkaar in $(0, 1)$ en $(2, 9)$.

b $\int_0^2 (g(x) - f(x)) dx =$
 $\int_0^2 (4\sqrt{2x} + 1 - 3^x) dx =$
 $\left[4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x)^{1\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} + x - 3^x \cdot \frac{1}{\ln(3)}\right]_0^2 =$
 $\left[\frac{4}{3} \cdot (2x)^{1\frac{1}{2}} + x - 3^x \cdot \frac{1}{\ln(3)}\right]_0^2 =$
 $\left(\frac{4}{3} \cdot 8 + 2 - \frac{9}{\ln(3)}\right) - \left(0 + 0 - \frac{1}{\ln(3)}\right) = 12\frac{2}{3} - \frac{8}{\ln(3)}$

$$\begin{aligned}
 \text{c } \pi \cdot \int_0^2 \left(g^2(x) - f^2(x) \right) dx &= \\
 \pi \cdot \int_0^2 (32x + 8\sqrt{2x} + 1 - 3^{2x}) dx &= \\
 \pi \cdot \left[16x^2 + \frac{8}{3}(2x)^{1\frac{1}{2}} + x - \frac{3^{2x}}{2\ln(3)} \right]_0^2 &= \\
 \pi \cdot \left(16 \cdot 4 + \frac{8}{3} \cdot 8 + 2 - \frac{3^4}{2\ln(3)} \right) - \pi \cdot \left(0 + 0 + 0 - \frac{1}{2\ln(3)} \right) &= \\
 \pi \cdot \left(66 + 21\frac{1}{3} - \frac{80}{2\ln(3)} \right) &\approx 159,98
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \text{ a } \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \tan^3(x) dx &\approx 0,78 \\
 \text{b } \int_1^e \ln(x^2 + 3) dx &\approx 3,20
 \end{aligned}$$

12 a De grafiek van $y = \ln(x)$ spiegelen in de lijn $y = x$ geeft $x = \ln(y)$ ofwel $y = e^x$.
Het functievoorschrift is dan $g(x) = e^x$.

b De oppervlakte van het rode vlakdeel is $\int_0^1 (e - e^x) dx$.

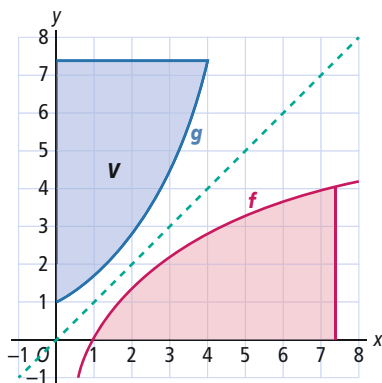
$$\begin{aligned}
 \text{c } \int_0^1 (e - e^x) dx &= \\
 [ex - e^x]_0^1 &= \\
 (e \cdot 1 - e^1) - (e \cdot 0 - e^0) &= \\
 0 - -1 &= 1
 \end{aligned}$$

d De exacte waarde van $\int_1^e \ln(x) dx = 1$.

$$13 \text{ a } F'(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2 = 2\ln(x) + 2 - 2 = 2\ln(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } \int_1^{e^2} 2\ln(x) dx &= \\
 [2x\ln(x) - 2x]_1^{e^2} &= \\
 (2 \cdot e^2 \cdot 2 - 2e^2) - (0 - 2) &= \\
 2e^2 + 2
 \end{aligned}$$

c Spiegel de grafiek van f in de lijn $y = x$
Bij het spiegelbeeld hoort de vergelijking $x = 2\ln(y)$.
 $\ln(y) = \frac{1}{2}x$, dus $y = e^{\frac{1}{2}x}$. De inverse functie is $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Wentel het gebied V om de x -as.



Vaardigheden 11

De inhoud I van het omwentelingslichaam is gelijk aan de inhoud van de cilinder met hoogte 4 en straal grondvlak e^2 minus $\pi \int_0^4 (e^{\frac{1}{2}x})^2 dx$, dus

$$I = \pi(e^2)^2 \cdot 4 - \pi \int_0^4 e^x dx = 4\pi e^4 - \pi[e^x]_0^4 = 4\pi e^4 - \pi e^4 + \pi$$

$$I = \pi(4e^4 - e^4 + 1) = \pi(3e^4 + 1) (\approx 518)$$

d $\int_1^p (2\ln(x)) dx =$
 $\left[2x\ln(x) - 2x \right]_1^p =$

$$2p\ln(p) - 2p + 2$$

De vergelijking $2p\ln(p) - 2p + 2 = 100$ moet worden opgelost.

Invoer: $y_1 = 2x\ln(x) - 2x + 2$ en $y_2 = 100$

Optie: snijpunt

Dit geeft $x = 22,9628\dots$

Dus $h(p) = 100$ voor $p \approx 22,96$.

14 a $f(x) = x^3 - 2x$

Een translatie 3 naar links geeft $y = (x + 3)^3 - 2(x + 3)$.

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 2 geeft $y = 2(x + 3)^3 - 4(x + 3)$.

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 4 geeft

$$g(x) = 2\left(\left(\frac{1}{4}x + 3\right)^3 - 4\left(\frac{1}{4}x + 3\right)\right) \text{ ofwel}$$

$$g(x) = 2\left(\left(\frac{1}{4}x + 3\right)^3 - x - 12\right)$$

b $f(x) = {}^2\log(x)$

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 4 geeft

$$y = {}^2\log\left(\frac{1}{4}x\right).$$

Een translatie 3 naar links geeft $y = {}^2\log\left(\frac{1}{4}(x + 3)\right)$ ofwel $y = {}^2\log\left(\frac{x + 3}{4}\right)$.

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 2 geeft

$$g(x) = 2 \cdot {}^2\log\left(\frac{x + 3}{4}\right) \text{ ofwel } g(x) = 2 \cdot {}^2\log\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right).$$

15 De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ is puntsymmetrisch in $(0, 0)$ immers

$$f(p) + f(-p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{-p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} = 0 \text{ voor elke waarde van } p.$$

Door de translaties 3 naar rechts en 2 omlaag verschuift $(0, 0)$ naar het punt $(3, -2)$ en daarom is de grafiek van g puntsymmetrisch in $(3, -2)$.

16 a Ga uit van de grafiek van $f(x) = 3^x$.

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 2 geeft de grafiek van $y = 3^{\frac{1}{2}x}$.

Een vermenigvuldiging met factor 4 ten opzichte van de x -as geeft de grafiek van $g(x) = 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$ (deze volgorde mag ook andersom).

b Ga uit van de grafiek van $f(x) = {}^4\log(x)$.

Een translatie 4 naar links geeft de grafiek van $y = {}^4\log(x + 4)$.

Spiegelen in de y -as geeft de grafiek van $y = {}^4\log(-x + 4)$.

Een translatie 6 omhoog geeft de grafiek van $g(x) = 6 + {}^4\log(4 - x)$.

c Bedenk dat $g(x) = \frac{3}{12+4x} = \frac{3}{4(x+3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x+3}$

Ga uit van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$

Een translatie 3 naar links geeft de grafiek van $y = \frac{1}{x+3}$

Een vermenigvuldiging met factor $\frac{3}{4}$ ten opzichte van de x -as geeft de grafiek

van $g(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+3} = \frac{\frac{3}{4}}{x+3}$ ofwel $g(x) = \frac{3}{12+4x}$

d Ga uit van de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$.

Spiegelen in x -as geeft $y = -\sqrt{x}$.

Een vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{5}$ ten opzichte van de y -as geeft $y = -\sqrt{5x}$.

Een translatie 4 naar rechts en 6 omhoog geeft $g(x) = -\sqrt{5(x-4)} + 6$ ofwel $g(x) = -\sqrt{5x-20} + 6$.

17 a De noemer is $x^2 - 8x + 16$ ofwel $(x-4)^2$.

Voor $x = 4$ is de noemer 0 en de teller ongelijk aan 0.

Dus heeft de grafiek een verticale asymptoot $x = 4$.

b Dan moet de grafiek 4 naar links worden verschoven.

Dit geeft de grafiek van $g(x) = 2 + \frac{3}{(x+4-4)^2}$ ofwel $g(x) = 2 + \frac{3}{x^2}$

c $g(-x) = 2 + \frac{3}{(-x)^2} = 2 + \frac{3}{x^2} = g(x)$, dus de grafiek is symmetrisch in de y -as.

d De grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = 4$.

18 Een translatie 2 naar rechts geeft de grafiek van

$y = (x+2-2)^4 - (x+2-2)^2 + 6$ ofwel $y = x^4 - x^2 + 6$.

$g(x) = x^4 - x^2 + 6$ is een even functie, dus deze grafiek is symmetrisch in de y -as. De grafiek van f is daarom symmetrisch in de lijn $x = -2$.

19 a $2x + 8 = 0$ geeft een verticale asymptoot $x = -4$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-3}{2x+8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{8}{x}} = \frac{6-0}{2+0} = 3$$

De grafiek heeft een horizontale asymptoot $y = 3$.

b Het snijpunt van de asymptoten is het punt $(-4, 3)$.

Door verschuiving 4 naar rechts en 3 naar beneden van de grafiek van f komt het snijpunt van de asymptoten van de beeldgrafiek in de oorsprong.

Nu moet aangetoond worden dat de beeldgrafiek symmetrisch is in O .

$$y = \frac{6(x-4)-3}{2(x-4)+8} - 3$$

$$y = \frac{6x-27}{2x} - 3$$

$$y = \frac{6x-27}{2x} - \frac{6x}{2x}$$

$$y = -\frac{27}{2x}$$

$g(x) = -\frac{27}{2x}$ is een oneven functie, dus de grafiek is symmetrisch in O .

Vaardigheden 11

- 20 a** De grafiek heeft een verticale asymptoot als $x - 3 = 0$ en $x^2 + 5x + 1 \neq 0$.

De verticale asymptoot is $x = 3$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 1}{x - 3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 8x - 1}{x - 3}$$

$$f(x) = \frac{x(x - 3) + 8x - 1}{x - 3}$$

$$f(x) = x + \frac{8(x - 3) + 24 - 1}{x - 3}$$

$$f(x) = x + 8 + \frac{23}{x - 3}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (x + 8)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{23}{x - 3} = 0$, dus de grafiek heeft een scheve asymptoot $y = x + 8$.

- b** Het snijpunt van de asymptoten is $(3, 11)$.

Door verschuiving 3 naar links en 11 omlaag van de grafiek van f komt het snijpunt van de asymptoten van de beeldgrafiek in de oorsprong.

Nu moet aangetoond worden dat de beeldgrafiek symmetrisch is in O .

$$y = \frac{(x + 3)^2 + 5(x + 3) - 1}{(x + 3) - 3} - 11$$

$$y = \frac{x^2 + 6x + 9 + 5x + 15 - 1}{x} - 11$$

$$y = \frac{x^2 + 11x + 23}{x} - \frac{11x}{x}$$

$$y = \frac{x^2 + 23}{x}$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 23}{x} \text{ en } g(-x) = \frac{(-x)^2 + 23}{-x} = -\frac{x^2 + 23}{x} = -g(x)$$

De grafiek van g is dus symmetrisch in O en daarmee is de grafiek van f symmetrisch in $(3, 11)$.