

Vaardigheden

1

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

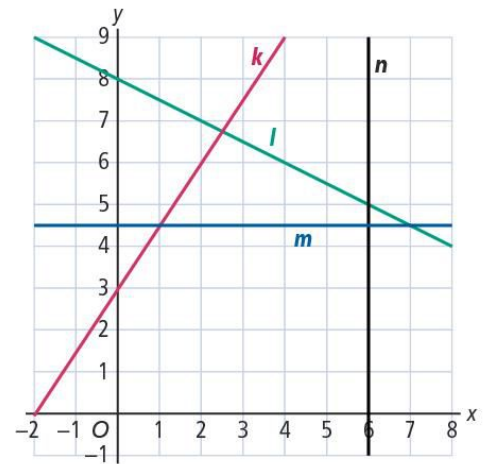
- Lineaire vergelijkingen opstellen
- Rekenen met wortels
- Rekenen met breuken



Vaardigheden 1

Lineaire vergelijkingen opstellen

- 1 Stel een vergelijking op van de lijn in de volgende gevallen.
 - a Lijn l gaat door $(0, 8)$ en heeft richtingscoëfficiënt -2 .
 - b Lijn m gaat door $(0, 3)$ en $(1, 5)$.
 - c Lijn n gaat door de oorsprong en $(8, 96)$.
- 2 In een assenstelsel zijn de vier lijnen k , l , m en n getekend.
 - a Geef de richtingscoëfficiënt van m en stel een vergelijking van m op.
 - b Stel een vergelijking van n op.
 - c Stel een vergelijking van de lijnen k en l op.



Theorie

Bij de lineaire formule $y = ax + b$ is de bijbehorende grafiek een rechte lijn. Bij een horizontale lijn is $a = 0$ en is de vergelijking $y = b$. Bij een verticale lijn is de vergelijking $x = c$.

- 3 Lijn k gaat door de punten $A(13, 14)$ en $B(19, 41)$.
 - a Leg uit dat de richtingscoëfficiënt van k gelijk is aan $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
 - b Bereken de richtingscoëfficiënt van k .
 - c Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn m door de punten $(-2, 12)$ en $(14, 36)$.
- 4 Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn door de twee gegeven punten.
 - a $(1, 13; 17)$ en $(1, 13; 119)$
 - c $(0, 0)$ en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
 - b $(57\frac{2}{3}, 9)$ en $(7\frac{3}{25}, 9)$
 - d $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ en $(0, 1)$
- 5 Lijn k met richtingscoëfficiënt $4\frac{1}{2}$ gaat door het punt $R(19, 41)$. Op het blaadje zie je hoe het startgetal van k berekend wordt. Maak de berekening af en stel een vergelijking van k op.
- 6 Stel een vergelijking op van de lijn door de twee punten.
 - a $(3, 10)$ en $(17, 52)$
 - d $(10, 4)$ en $(10, -1)$
 - b $(-2, 8)$ en $(2, 10)$
 - e $(3, 3)$ en $(8, 3)$
 - c $(25, 89)$ en $(21, 29)$
 - f $(0, 7)$ en $(-2, 35)$

De vergelijking is
 $y = 4\frac{1}{2}x + b$
 met b als startgetal.
 Lijn k gaat door $(19, 41)$,
 dus als je $x = 19$ invult,
 moet er $y = 41$ uitkomen.
 $41 = 4\frac{1}{2} \cdot 19 + b$
 $41 = \dots + b$
 $b = \dots$

Rekenen met wortels**7** Bereken zonder rekenmachine.

a $\sqrt{121}$

d $\sqrt{225}$

b $\sqrt{\frac{1}{4}}$

e $\sqrt{169}$

c $\sqrt{0,36}$

f $\sqrt{\frac{1}{100}}$

Theorie

Voor het rekenen met wortels kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$

Voorbeeld 1

Bereken.

$$(2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$5\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{7} = 30\sqrt{14}$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één wortel.

$$3\sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{45}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{76} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{76} = \sqrt{19}$$

8 Bereken.

a $(6\sqrt{2})^2$

c $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12}$

b $4\sqrt{7} \cdot 8\sqrt{3}$

d $(7\sqrt{3})^2$

9 Schrijf als één wortel.

a $7\sqrt{2} = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\dots}$

c $2\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{\dots}$

b $9\sqrt{5} = \sqrt{\dots}$

d $\frac{1}{2}\sqrt{32} = \sqrt{\dots}$

10 Met behulp van de rekenregels kun je ook wortels vereenvoudigen. Zo is $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Vereenvoudig op dezelfde manier.

a $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \dots$

f $\sqrt{125}$

b $\sqrt{54} = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\dots} = \dots$

g $3\sqrt{24}$

c $\sqrt{200}$

h $2\sqrt{45}$

d $\sqrt{75}$

i $8\sqrt{63}$

e $\sqrt{98}$

j $80\sqrt{80}$

Hiernaast zie je het begin van de lijst kwadraten.

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

$3^2 = 9$

$4^2 = 16$

Bij het vereenvoudigen van wortels maak je vaak gebruik van deze lijst.

$5^2 = 25$

$6^2 = 36$

$7^2 = 49$

$8^2 = 64$

Theorie

Optellen en aftrekken van wortels kan alleen maar als de wortels gelijksoortig zijn. Soms zie je na het vereenvoudigen van wortels dat ze gelijksoortig zijn.

VoorbeeldSchrijf korter $\sqrt{48} - \sqrt{27}$.**Oplossing**

$$\sqrt{48} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

11 Schrijf korter.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| a $\sqrt{32} - \sqrt{2}$ | d $\sqrt{180} - 2\sqrt{80}$ |
| b $4\sqrt{3} + \sqrt{27}$ | e $8\sqrt{6} + \sqrt{54}$ |
| c $\sqrt{45} + \sqrt{20}$ | f $18\sqrt{2} - 2\sqrt{18}$ |

12 a Herleid de formule $y = \sqrt{4x} + \sqrt{9x}$ tot $y = 5\sqrt{x}$.

b Herleid op dezelfde manier.

- | | |
|---|---|
| A $y = \sqrt{16x} + \sqrt{169x}$ | C $y = \sqrt{100x} - \sqrt{16x}$ |
| B $y = \sqrt{18x} + \sqrt{50x}$ | D $y = \sqrt{\frac{1}{4}x} + \sqrt{25x}$ |

13 Bekijk het voorbeeld. De eerste opdracht is om $\sqrt{\frac{3}{5}}$ te herleiden tot een wortelvorm waar onder het wortelteken een geheel getal staat.
 Waarom is het dan handig om de teller en de noemer van de breuk onder het wortelteken beide te vermenigvuldigen met 5?

Voorbeeld

1 Laat zien dat $\sqrt{\frac{3}{5}}$ gelijk is aan $\frac{1}{5}\sqrt{15}$.

Oplossing

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} =$$

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$$

2 Laat zien dat $\frac{30}{\sqrt{5}}$ gelijk is aan $6\sqrt{5}$.

Oplossing

$$\frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

14 Herleid. Laat geen breuk onder het wortelteken staan en ook geen wortelvormen in de noemer.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| a $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5}{7} \cdot \frac{\dots}{\dots}} =$ | d $\frac{10}{\sqrt{6}}$ |
| b $\sqrt{\frac{3}{8}}$ | e $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ |
| c $\frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$ | f $\frac{24}{3\sqrt{2}}$ |

Rekenen met breuken

15 Bereken en schrijf het antwoord als één breuk.

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a $\frac{3}{4} + \frac{7}{8}$ | d $3 - 1\frac{6}{7}$ |
| b $\frac{5}{9} - \frac{2}{4}$ | e $2\frac{3}{7} + 1\frac{1}{2}$ |
| c $\frac{11}{9} - \frac{1}{3}$ | f $-1\frac{5}{8} + 2\frac{3}{4}$ |

Breuken optellen:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \dots$$

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{5} = \frac{5}{35} + \frac{21}{35} = \dots \text{ want}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1 \times 5}{7 \times 5} \text{ en } \frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7}$$

Theorie

Breuken kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken als ze gelijknamig zijn. Bij ongelijknamige breuken maak je eerst de noemers gelijk.

Breuken kun je met elkaar vermenigvuldigen door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Bij het vereenvoudigen van breuken kun je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen.

Voorbeeld

Optellen

$$\frac{3}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{2}{p} + \frac{3}{p} = \frac{5}{p}$$

Vermenigvuldigen

$$-\frac{3}{8} \times \frac{9}{2} = -\frac{3 \times 9}{8 \times 2} = -\frac{27}{16}$$

$$\frac{2}{p} \times \frac{3}{p} = \frac{2 \times 3}{p \times p} = \frac{6}{p^2}$$

Vereenvoudigen

$$\frac{45}{72} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{3pq}{p^2} = \frac{3 \times p \times q}{p \times p} = \frac{3q}{p}$$

- 16** Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{3}{8} + \frac{5}{9}$

e $\frac{2}{p} \times \frac{5}{p}$

b $\frac{7}{9} - \frac{2}{5}$

f $\frac{a}{6} \times \frac{5}{a}$

c $\frac{8}{x} + \frac{4}{x}$

g $\frac{3p}{13} \times \frac{2p}{-3}$

d $\frac{6}{17} \times \frac{-3}{4}$

h $\frac{3a}{2b} \times \frac{4b}{7a}$

- 17** Peter gaat de breuken $\frac{5}{24}$ en $\frac{7}{36}$ bij elkaar optellen. Hij maakt de breuken gelijknamig door de noemers te vermenigvuldigen. Hiernaast zie je zijn berekening. Na het optellen moet de breuk nog vereenvoudigd worden. Hoe kun je de breuken $\frac{5}{24}$ en $\frac{7}{36}$ gelijknamig maken waarbij je niet de noemers 24 en 36 met elkaar vermenigvuldigt?

					Peter
	$\frac{5}{24}$	+	$\frac{7}{36}$	=	$\frac{180}{864} + \frac{168}{864} =$
	$\frac{348}{864}$	=	$\frac{174}{432}$	=	$\frac{87}{216} = \frac{29}{72}$

- 18** In het voorbeeld zie je hoe je twee breuken met variabelen er in gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen. Bereken op dezelfde manier.

a $\frac{8}{q} + \frac{4}{5q}$

d $\frac{3}{7p} + \frac{q}{p}$

b $\frac{12}{8a} - \frac{1}{2a}$

e $\frac{8}{a} - \frac{7}{a^2}$

c $\frac{6}{4a} + \frac{5}{7a}$

f $\frac{2}{3a^2} + \frac{4}{7a}$

Voorbeeld

$$\frac{5}{3a} + \frac{7}{2a} = \frac{5 \times 2}{3a \times 2} + \frac{7 \times 3}{2a \times 3} =$$

$$\frac{10}{6a} + \frac{21}{6a} = \frac{31}{6a}$$

Vaardigheden

2

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met breuken
- Haakjes wegwerken en bijzondere producten
- Vergelijkingen oplossen
- Ongelijkheden oplossen



Vaardigheden 2

Rekenen met breuken

- 1 Bereken en schrijf het antwoord in een breuk. Vereenvoudig, indien mogelijk, het antwoord.

a $\frac{3}{6} - \frac{2}{5}$

d $\frac{3}{p} \times \frac{4}{p}$

b $\frac{7}{x} + \frac{2}{3x}$

e $\frac{3p}{4} \times \frac{2p}{-5}$

c $\frac{3}{13} \times \frac{-2}{5}$

f $\frac{2a}{5b} \times \frac{3b}{4a}$

- 2 a Leg uit hoe je het getal $3\frac{5}{7}$ kunt herleiden tot de breuk $\frac{26}{7}$.

b Maak verder af: $\frac{3}{x} + 2 = \frac{3}{x} + \frac{2}{1} = \frac{3}{x} + \frac{\dots}{x} = \frac{3 + \dots}{x}$

- c Herleid tot één breuk:

A $5\frac{3}{8}$

C $7 - \frac{4}{x}$

B $\frac{5}{p} + 4$

D $8 + \frac{2}{3x}$

Theorie

Breuken kun je vereenvoudigen door de teller en de noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen of door hetzelfde getal te delen.

Voorbeeld 1

Vereenvoudig $\frac{40}{56}$

Oplossing

$$\frac{40}{56} = \frac{5 \times 8}{7 \times 8} = \frac{5}{7}$$

Voorbeeld 2

Vereenvoudig $\frac{4}{\frac{1}{3}}$

Oplossing

$$\frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{4 \times 3}{\frac{1}{3} \times 3} = \frac{12}{1} = 12$$

Voorbeeld 3

Vereenvoudig $\frac{\frac{3}{5}}{7}$

Oplossing

$$\frac{\frac{3}{5}}{7} = \frac{\frac{3}{5} \times 5}{7 \times 5} = \frac{3}{35}$$

- 3 Vereenvoudig. Neem aan dat $p \neq 0$.

a $\frac{5p}{3p}$

e $\frac{\frac{3}{p}}{\frac{1}{3}}$

b $\frac{36}{\frac{3}{7}}$

f $\frac{p}{\frac{1}{2}}$

c $\frac{8p}{12p}$

g $\frac{\frac{8}{9}}{4}$

d $\frac{2p}{\frac{1}{p}}$

h $\frac{4p^2}{\frac{2}{p}}$

Haakjes wegwerken en bijzondere producten**4** Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

- a** $-(a+5)-3$ **e** $(\frac{1}{2}n+4)(\frac{1}{2}n-8)$
b $(-2v+3)(3v+8)$ **f** $-17(3u+5)+6u$
c $(p^3+2)(p-3)$ **g** $(2p+4)(8-3p^2)$
d $(3h-2)(2h^2-4)$ **h** $-5,7(3,5x+6,2)$

5 Schrijf de producten zonder haakjes en zo kort mogelijk.

- a** $(2h+1)(2h+1)$ **e** $(5+p)(5-p)$
b $(w-9)(w-9)$ **f** $(2e-3)(2e+3)$
c $(p+4)^2$ **g** $(5-q)^2$
d $(r-4)^2$ **h** $(v-\frac{1}{3})(v-\frac{1}{3})$

Theorie

Voor het product van tweetermen geldt

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Bijzondere gevallen zijn:

- 1** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Voorbeeld 1Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x+3)(x^2-4)$ **Oplossing**

Geen bijzonder geval

$$(x+3)(x^2-4) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

Voorbeeld 2Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x-3)^2$ **Oplossing**

Bijzonder geval 2

$$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

Voorbeeld 3Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk: $(x+3)(x-3)$ **Oplossing**

Bijzonder geval 3

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

6 Schrijf zonder haakjes.

- a** $(p+5)^2$ **f** $(3u-0,5)^2$
b $(2v-4)^2$ **g** $(\frac{1}{2}r+2)^2$
c $(b+5)(b-5)$ **h** $(p^2-5)(p^2+5)$
d $(3x-6)(3x+6)$ **i** $x(x+1)^2$
e $(2l+3)(l^2-7)$ **j** $(x-y^2)(x+y^2)$

Vergelijkingen oplossen

- 7** a Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $(x + 3)^2 = 4(x + 2) + 1$.
 Los deze vergelijking verder op.
 b Los ook de vergelijking $(x + 4)(x - 4) = x(x + 8)$ op.
- 8** Los exact op.
 a $3k = 2(k + 5)$ c $2(t + 5)^2 = 14 + 2t$
 b $(c + 2)(c - 2) = 5$ d $(b - 10)(b + 1) = 12$

☐	$(x + 3)^2 = 4(x + 2) + 1$			
☐	$x^2 + 6x + 9 = 4x + 8 + 1$			
☐	$x^2 + 2x = 0$			
☐	$x(\dots + \dots) = 0$			

Theorie

Bij het oplossen van vergelijkingen moet je soms eerst de haakjes wegwerken. In een aantal gevallen is het handiger om juist niet de haakjes weg te werken.

- 9** Hiernaast staat een aantal vergelijkingen.
 a Welke vergelijkingen kun je exact oplossen zonder eerst de haakjes weg te werken? Los deze vergelijkingen op.
 b Los de overige vergelijkingen ook exact op. Soms moet je daarbij de *abc*-formule gebruiken.

- A** $(x + 2)(0,2x - 8) = 0$
B $(2x - 5)(2x + 5) = 24$
C $(2x + 3)^2 + 2x = 3$
D $(x + 7)^2 - 11 = 25$
E $(-4x + 1)(4x + 1) = 17$
F $6x(x - 1) = 1 - 5x$

- 10** Je gaat in deze opdracht de vergelijking $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$ oplossen.
 a De oplossing van $3x + 6 = 15$ is een oplossing van $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$. Leg uit waarom.
 b De oplossing van $x - 4 = 0$ is ook een oplossing van $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$. Leg uit waarom.
 c Los de vergelijking $(3x + 6)(x - 4) = 15(x - 4)$ op zonder eerst de haakjes weg te werken.

Theorie

Bij het oplossen van vergelijkingen moet je eerst goed naar de vergelijking kijken. Vaak is het nodig dat je de vergelijking eerst op nul herleid. Soms is er een handigere manier. Je mag gebruik maken van de regels hiernaast.

$A \cdot B = 0$ dus $A = 0$ of $B = 0$
 $A \cdot B = A \cdot C$ dus $A = 0$ of $B = C$
 $A^2 = B^2$ dus $A = B$ of $A = -B$

Voorbeeld 1

Los op
 $(2x + 3)(x - 4) = 0$
 $2x + 3 = 0$ of $x - 4 = 0$
 $2x = -3$ of $x = 4$
 $x = -1\frac{1}{2}$ of $x = 4$

Voorbeeld 2

Los op
 $(2x + 3)(x - 4) = 6(2x + 3)$
 $2x + 3 = 0$ of $x - 4 = 6$
 $2x = -3$ of $x = 10$
 $x = -1\frac{1}{2}$ of $x = 10$

Voorbeeld 3

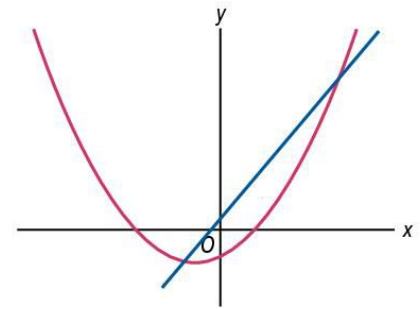
Los op
 $(2x + 3)^2 = 16$
 $2x + 3 = 4$ of $2x + 3 = -4$
 $2x = 1$ of $2x = -7$
 $x = \frac{1}{2}$ of $x = -3\frac{1}{2}$

- 11** Los op de manier van voorbeeld 2 de vergelijkingen op.
- a** $(2x + 5)(x - 1) = 3(x - 1)$ **c** $(3x - 4)(2x - 3) = (x + 1)(2x - 3)$
b $x^2(2x - 9) = 7x^2$ **d** $(5x + 3)(x^2 - 9) = 7(5x + 3)$

- 12** Los exact op.
- a** $2 - (x - 4)^2 = 1$ **c** $(x + 2)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$
b $(5x - 125)(x^2 - 81) = 0$ **d** $(0,5x + 2)^2 - 2x = 20$

Ongelijkheden oplossen

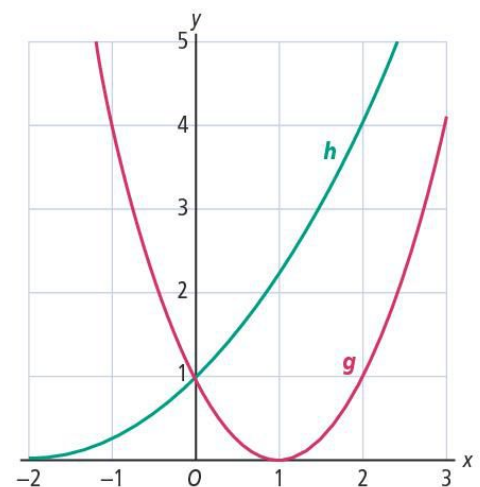
- 13** De grafieken van de functies $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ en $g(x) = 7x + 1$ zijn geschetst.
- a** Los exact op $f(x) = g(x)$.
b Bij welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g ? Geef je antwoord in de intervalnotatie.
c Welke van de ongelijkheden hoort bij opdracht b: $f(x) < g(x)$ of $f(x) > g(x)$?



Theorie

Bij het oplossen van een ongelijkheid stel je eerst de bijbehorende functies aan elkaar gelijk en los je de verkregen vergelijking (eventueel exact) op. Vervolgens lees je uit de grafieken van de functies of uit een plot de oplossing van de ongelijkheid af.

- 14** Gegeven zijn de functies $g(x) = (1 - x)^2$ en $h(x) = (\frac{1}{2}x + 1)^2$.
- a** Voor welke waarden van x geldt $g(x) < 5$?
b Controleer met een berekening dat het punt $(0, 1)$ een snijpunt is van de grafieken van g en h .
c Beredeneer dat de grafieken nóg een snijpunt hebben.
d Waarom weet je zeker dat er niet nog een derde snijpunt is?
e Voor welke waarden van x geldt $h(x) > g(x)$?



- 15** Gegeven zijn de functies $h(x) = 4x + 3$ en $k(x) = \sqrt{4 - 2x}$.
- a** Geef het domein en bereik van k .
b Plot en schets de grafieken van h en k .
c Los op $h(x) \geq k(x)$.

- 16** Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{12}{2x + 5}$ en $g(x) = 3$.
- a** Plot en schets de grafieken van f en g .
b Los op $f(x) < g(x)$.

Vaardigheden 3

SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Breuken en wortels herleiden
- Lijnen
- Exponentiële formules
- Rekenen met machten
- Substitutie



Vaardigheden 3

Breuken en wortels herleiden

- 1** Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{3}$

d $\frac{2a}{3} \cdot \frac{6}{4a} - \frac{1}{2}$

b $\frac{2}{-11} \cdot \frac{-3}{7} + \frac{2}{7}$

e $\frac{3p}{7\frac{1}{2}} \cdot \frac{2p}{-3}$

c $\frac{2}{3p} \cdot \frac{3}{p} + \frac{1}{2p}$

f $\frac{5}{4b^2} \cdot \frac{2b}{5a}$

- 2** Vereenvoudig de breuken.

a $\frac{9a}{27a}$

d $\frac{2p}{\frac{4}{3p}}$

b $\frac{9q}{7\frac{1}{2}q}$

e $\frac{\frac{9}{11}}{3}$

c $\frac{12}{\frac{p}{\frac{3}{5}}}$

f $\frac{\frac{3}{p}}{8p}$

- 3** Schrijf als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk.

a $\frac{2}{a} - \frac{a}{2}$

e $\frac{4(x+1)}{x} - \frac{1}{4}x$

b $\frac{a}{b} + \frac{b}{2a}$

f $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$

c $(2x+x^2) \cdot \frac{1}{x^3}$

g $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

d $\frac{3}{x} \cdot \frac{x+1}{3x}$

h $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1}$

- 4** **a** Laat zien dat de formule $y = \sqrt{16x} + \sqrt{25x}$ te herleiden is tot $y = 9\sqrt{x}$.

- b** Herleid de formules zoals in opdracht a.

A $y = \sqrt{25x} + \sqrt{144x}$

C $y = \sqrt{121x} - \sqrt{64x}$

B $y = \sqrt{27x} + \sqrt{75x}$

D $y = \sqrt{\frac{1}{9}x} + \sqrt{\frac{4}{25}x}$

- 5** Bereken exact en schrijf het resultaat zo eenvoudig mogelijk.

a $(\sqrt{2} + 4\sqrt{2})^2$

c $(\sqrt{6} + 4\sqrt{24})^2$

b $(\sqrt{5} + \sqrt{45})^2$

d $(7\sqrt{2} - 2\sqrt{32})^2$

6 Schrijf in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een geheel getal.

a $\frac{12}{\sqrt{7}}$

c $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

b $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1,25}}$

Voorbeeld

Schrijf $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ in de vorm $a\sqrt{b}$.

Oplossing

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{14}$$

Lijnen

Theorie

Vergelijkingen van lijnen kun je in verschillende vormen geven. Veel gebruikte vormen zijn

$$y = mx + n, ax + by = c \text{ en } \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Kies steeds die vorm die het beste bij de gegevens past.

- 7 a In het assenstelsel staan vier rechte lijnen.
Stel een vergelijking op van elk van de lijnen.
b Stel een vergelijking op van de lijn door (1, 3) evenwijdig aan de x-as.
c Stel een vergelijking op van de lijn door (1, 3) evenwijdig aan de y-as.

8 Stel een vergelijking op van de lijn in de volgende gevallen.

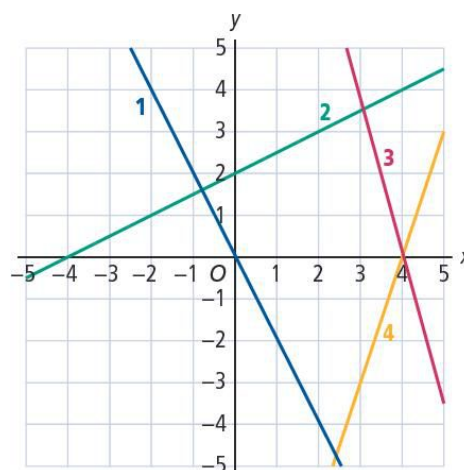
- a Lijn l gaat door (3, 7) en heeft richtingscoëfficiënt -3 .
b Lijn m gaat door $(-2, 1)$ en $(0, 16)$.
c Lijn n is evenwijdig aan lijn k : $y = -0,25x + 6$ en gaat door $(16, -12)$.
d Lijn q snijdt de lijn $y = 4x + 12$ in $(-2, 4)$ loodrecht.

9 Bereken exact de coördinaten van de snijpunten.

- a $y = 3x - 7$ en $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
b $2x - 3y = 5$ en $x + 2y = 13$
c $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ en $3x - y + 4 = 0$

10 Bereken in hele graden de hoeken die de lijnen met elkaar maken.

- a $y = 3x + 7$ en $y = -x + 4$
b $2x - 3y = 18$ en $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$



Exponentiële formules

- 11** De tabellen horen bij een exponentieel verband.
 Stel bij beide tabellen een passende formule op.

A	t	0	1	2	3	4
	N	500	400	320	256	204,8

B	t	2	3	4	5	6
	N	4500	5400	6480	7776	9331,2

- 12** De tabel hoort bij een exponentieel groeiproces.

Hierin is t de tijd in jaren en A het aantal.

- a** Bereken de groeifactor per vier jaar.
b Bereken de groeifactor per jaar.
c Hoe groot is het groeipcentage per jaar?
d Stel een formule op met t in jaren.
e Stel ook een formule op met t in maanden. Rond daarbij de groeifactor af op drie decimalen.

t in jaren	2	6
A	36	2916

Rekenen met machten

- 13** Voor het rekenen met machten maak je gebruik van de rekenregels. Bedenk bij elke rekenstap van welke rekenregel je gebruik maakt.
 Schrijf als een macht van 2.

- a** $128 = 2 \cdots$
b $\sqrt{2}$
c $\frac{1}{16}\sqrt{2}$
d $\frac{1}{4}\sqrt[3]{32}$
e $16\sqrt[3]{2}$
f $\frac{1}{8}\sqrt{8}$

$$\begin{array}{ll}
 g^a \cdot g^b = g^{a+b} & g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g} \\
 \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} & g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m} \\
 (g^a)^b = g^{a \cdot b} & (p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a \\
 g^{-n} = \frac{1}{g^n} & \left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a} \\
 g^0 = 1 &
 \end{array}$$

- 14** Schrijf de producten als één macht van x .

- a** $x^3 \cdot x^2$
b $x \cdot (x^4)^3$
c $(x^{-3} \cdot x^3)^2$
d $x^3 \cdot (x^{2a})^3$
e $x^{3a} \cdot (x^{a+1})^2$
f $(x^a \cdot x^{2a} \cdot x^{3a})^3$

- 15** Schrijf in de vorm $b \cdot a^p$.

- a** $(a^2 \cdot 2a^3)^4$
b $\frac{(4a^3)^3}{(2a)^2}$
c $\frac{6a}{2\sqrt{a}}$
d $a \cdot \sqrt[3]{125a^2} \cdot \sqrt{25a}$
e $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{8a}}{\sqrt{a}}$
f $\frac{3}{a^2} \cdot \frac{a^5}{a\sqrt[4]{a^3}}$

Substitutie

- 16** Als je in de formule $y = 4x^2 - 2x + 8$ de formule $x = \frac{1}{2}t - 1$ substitueert, dan druk je y uit in t en krijg je $y = 4(\frac{1}{2}t - 1)^2 - 2(\frac{1}{2}t - 1) + 8$.
- a** Vereenvoudig de formule die je door de substitutie krijgt.
- b** Substitueer $x = \frac{1}{2}t^2 + 4$ in $y = 4x^2 - 6x - 40$ en vereenvoudig het resultaat.
- 17** Druk y uit in t en vereenvoudig het resultaat.
- a** $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ en $x = 2t^5$
- b** $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 4}$ en $x = t + 2$
- c** $y = 2x^{-2} - 3x^{-1} + 4$ en $x = t^{-1}$
- d** $y = \frac{1}{x-2} + 5$ en $x = \frac{1}{t} + 2$
- 18** Gegeven zijn $x = \frac{1}{t}$ en $y = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$
- Toon aan dat geldt: $y = \frac{2t^4}{1 - t^4}$

Theorie

Je kunt soms een substitutie gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen. In het voorbeeld zie je hoe je de vergelijking $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$ oplost met behulp van de substitutie $\sqrt{x} = t$.

De wortelvergelijking gaat hierdoor over in een tweedegraadsvergelijking.

Voorbeeld

Los exact op $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$.

Oplossing

Neem $\sqrt{x} = t$ dus $x = t^2$.

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \quad (\text{substitutie})$$

$$(t + 5)(t - 2) = 0 \quad (\text{ontbonden})$$

$$t = -5 \text{ of } t = 2$$

Dus is $\sqrt{x} = -5$ of $\sqrt{x} = 2$.

$\sqrt{x} = -5$ heeft geen oplossingen.

$\sqrt{x} = 2$ geeft $x = 4$.

De oplossing is $x = 4$.

- 19**
- a** Los $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$ op met de substitutie $\sqrt{x} = t$.
- b** Los $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ op met de substitutie $x^3 = t$.
- c** Los $4(2x - 1)^2 + 8(2x - 1) - 5 = 0$ op met de substitutie $2x - 1 = t$.
- d** Los $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ op met de substitutie $3^x = t$.
- 20** Los exact op. Kies steeds een geschikte substitutie.
- a** $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ **e** $8(x - 2)^2 = 2(x - 2)$
- b** $4^{2x} - 4^x - 12 = 0$ **f** $4x^4 + 7x^2 = 2$
- c** $(4^x - 1)(4^x + 1) = 3$ **g** $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$
- d** $x - 2\sqrt{x} = 0$ **h** $5^{2x} - 125 \cdot 5^x = 0$

SE

CE

K

Departures

Flt No.	Remarks
	Gate Opens 16:50
	Gate Opens 16:40
	Gate Opens 16:50
	Gate Opens 16:55
	Gate Opens 16:55
	Gate Opens 17:00
	Gate Opens 17:00
	Gate Opens 17:10
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met machten, wortels en breuken
- Vergelijkingen oplossen
- Oplossen van stelsels vergelijkingen
- Differentiëren

Departures

Time	Destination	Flt No.	Remarks
20:05	Vienna		Gate Open
20:05	an Bergamo		Gate Open
20:05	Barcelona		Gate Open
20:10	Cologne		Gate Open
20:10	Bologna		Gate Open
20:20	Hanover		Gate Open
20:25	Stuttgart		Gate Open
20:25	Wroclaw		Gate Ope

Vaardigheden 4

Rekenen met machten, wortels en breuken

1 Schrijf als één macht van x .

a $x^3 \cdot (x^2)^4$

d $((x^2)^3)^4$

b $(x\sqrt{x})^3$

e $(x^{-2} \cdot \sqrt{x})^{-3}$

c $(x \cdot x^2 \sqrt[3]{x^2})^3$

f $\frac{x\sqrt{x}}{x^3}$

2 Bereken.

a $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$

e $4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

b $5\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2}$

f $8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + 7\sqrt{6}$

c $(3\sqrt{2})^2$

g $(\sqrt{6})^2 + 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

d $(-2\sqrt{5})^4$

h $(5\sqrt{6})^3$

3 Vereenvoudig de wortelvormen.

a $\sqrt{200} = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\dots} = \dots$

e $\frac{1}{4}\sqrt{32}$

b $\sqrt{63}$

f $\frac{1}{5}(\sqrt{40} + \sqrt{90})$

c $\sqrt{108}$

g $\sqrt{75} - \sqrt{48}$

d $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

h $\sqrt{98}$

4 Bereken en schrijf het antwoord als één breuk. Vereenvoudig indien mogelijk het antwoord.

a $\frac{8}{3a} + \frac{2}{3}$

e $\frac{d^2}{4} \cdot \frac{7}{d}$

b $\frac{13}{2p} - \frac{7}{3p}$

f $\frac{2a}{7} \cdot \frac{21}{8a}$

c $\frac{a}{3b} + \frac{4}{5b}$

g $\frac{3a^2}{2b} \cdot \frac{4b}{7a}$

d $\frac{11}{4a^2} - \frac{4}{2a}$

h $\frac{2a}{5} \cdot \frac{7}{4a^3}$

Vergelijkingen oplossen

5 Los exact op.

a $3(2\frac{1}{4}p - 4) = 5p - 3$

c $\frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}m + 2\frac{1}{4}$

b $-10\frac{1}{2}s = 7 - (13 - 9s)$

d $3\frac{1}{2} - 4(2x - 8) = 13$

Theorie

Kwadratische vergelijkingen los je meestal op met ontbinden, en als dat niet lukt met de *abc*-formule. Soms is er een handigere manier door gebruik te maken van de regels hiernaast. Vaak is het nodig dat je de vergelijking eerst op nul herleidt.

Als ontbinden in factoren niet lukt kun je de *abc*-formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ gebruiken.}$$

$$A \cdot B = 0 \text{ dus } A = 0 \text{ of } B = 0$$

$$A \cdot B = A \cdot C \text{ dus } A = 0 \text{ of } B = C$$

$$A^2 = B^2 \text{ dus } A = B \text{ of } A = -B$$

6 Los exact op.

a $(x - 6)(2x + 7) = 0$ **f** $(x + 4)\left(\frac{1}{2}x - 7\right) = \left(\frac{1}{2}x - 7\right)(6 - x)$

b $(5p + 10)(p - 3) = 18(p - 3)$ **g** $15 - (3 - a)^2 = 6$

c $(8a + 1)^2 = 81$ **h** $x^2 = 11x$

d $2x^2 + 5x + 2 = 0$ **i** $(2x - 3)^2 = x$

e $3x^2 + 3x = 5x + 4$ **j** $(7 - s)^2 = 9s^2$

Theorie

Je kunt een exponentiële vergelijking exact oplossen door, na vereenvoudiging, het linker- en rechterlid van de vergelijking te schrijven als macht met hetzelfde grondtal. In andere gevallen gebruik je logaritmen.

Voorbeeld

Los op $\frac{1}{9} \cdot 3^{x-5} = 81 \cdot (\sqrt{3})^x$.

Oplossing

$$3^{-2} \cdot 3^{x-5} = 3^4 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x$$

$$3^{x-7} = 3^4 \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$$

$$3^{x-7} = 3^{4 + \frac{1}{2}x}$$

$$x - 7 = 4 + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{2}x = 11 \text{ dus } x = 22$$

7 Los exact op.

a $2^x = 8\sqrt{2}$ **e** $7^{x+2} = 500$

b $\frac{1}{4} \cdot 3^x = 25$ **f** $10 \cdot 0,1^{x+10} = 0,1 \cdot (\sqrt[5]{100})^x$

c $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \cdot 2^x$ **g** $15 \cdot 3^{7x+9} = 5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{8-x}$

d $25 \cdot 5^{4x-1} = 5\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ **h** $21 \cdot 9^{6-x} = 63 \cdot 27^{\frac{1}{2}x+4}$

Theorie

De machtsvergelijking $x^a = c$ kan twee, één of geen oplossingen hebben. Bij het oplossen van de vergelijking $x^a = c$ verhef je linker- en rechterlid tot dezelfde macht zodat $x = c^{\frac{1}{a}}$ ontstaat.

Voorbeeld

Los op $x^{\frac{3}{4}} = 7$.

Oplossing

$$\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = (7)^{\frac{4}{3}}$$

$$x = 7^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{7^4} \approx 13,39$$

8 Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

a $a^3 = 100$

e $1,5a^4 = -10$

b $-2a^2 = -34$

f $0,2a^5 = -10$

c $a^4 - 12 = 9$

g $15 - 3p^{\frac{2}{3}} = 9$

d $8 + 3a^{\frac{1}{3}} = 14$

h $8 + 0,5x^{0,25} = 9$

Theorie

Bij het oplossen van wortelvergelijkingen maak je, na het isoleren van de wortel, gebruik van de regel: als $\sqrt{A} = B$ dan is $A = B^2$.

Controleer altijd een mogelijke oplossing door deze in te vullen in de oorspronkelijke vergelijking.

9 Los de vergelijking op het blaadje verder op en controleer of alle oplossingen voldoen.

10 Los exact op.

a $\sqrt{x-8} = 5$

e $2 + \sqrt{q-2} = 6$

b $\sqrt{2a+3} = 5$

f $\sqrt{6a-5} = a$

c $3 + \sqrt{2p+4} = 10$

g $\sqrt{3d+1} = 2 + d$

d $3 + \sqrt{x} = x - 3$

h $6x + \sqrt{x} = 7x - 20$

Theorie

Bij het oplossen van gebroken vergelijkingen maak je gebruik van de regels:

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$.

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

11 Los de gebroken vergelijking op het blaadje verder op.

12 Los exact op.

a $\frac{1}{h+4} + 8 = 8\frac{1}{2}$

c $\frac{3x^2}{x+1} = x$

b $\frac{7}{2a-3} = 2a+3$

d $\frac{p}{p+3} = \frac{1}{2p}$

•	$1 + \sqrt{x+4} = 2x - 1$
•	$\sqrt{x+4} = 2x - 2$
•	$(\sqrt{x+4})^2 = (2x-2)^2$
•	$x+4 = \dots$
•	$\dots$

•	$\frac{4}{2q-1} + 3 = 11 - 4q$
•	$\frac{4}{2q-1} = 8 - 4q$
•	$4 = (8-4q)(2q-1)$
•	$4 = 16q - 8 - 8q^2 + 4q$
•	$\dots$

- 13** Los exact op het interval $[0, 3\pi]$ op.
- a** $\sin(2x) = 1$ **c** $2\cos(3x) = 1$
- b** $\cos(3x) = 1$ **d** $2\sin(\pi \cdot x) = \sqrt{2}$

Oplossen van stelsels vergelijkingen

Theorie

Je kunt stelsels vergelijkingen oplossen door de vergelijkingen zo te herleiden dat je ze aan elkaar gelijk kunt stellen. Stelsels vergelijkingen zijn ook op te lossen door gebruik te maken van substitutie of van eliminatie.

- 14** Los het stelsel $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ op met behulp van elimineren.

- 15** Los de stelsels vergelijkingen op. Kies een geschikte methode.

a $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$	d $\begin{cases} 8a - 12 = 3b \\ 6b - 7a + 2 = 0 \end{cases}$
b $\begin{cases} y + 3x = 0 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$	e $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$
c $\begin{cases} 4p - q = 10 \\ 13q - 7p = 5 \end{cases}$	f $\begin{cases} 3b + 7a = 18 \\ a - 4b = 7 \end{cases}$

Differentiëren

- 16** Differentieer de functies.

a $f(x) = 4x^2 - 6x + 13$	c $h(x) = (2x + 7)^2$
b $g(x) = (3x + 7)(8 - x)$	d $k(x) = 4x^3(x^2 + 7)$

- 17** Bereken de helling van de grafiek in het gegeven punt.

a $f(x) = 3x^2 + 6$ en het punt $(1, 9)$

b $g(x) = 2x^3$ en het punt $(-2, -16)$

c $h(x) = 5x(x^2 - x^4)$ en het punt $(1, 0)$

- 18** De grafiek van de functie $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ heeft helling -1 in het punt waarvoor $x = 2$.
Bereken de waarde van a .

SE	CE	K
Arrivals		
Flt No.	Remarks	
	Gate Opens 16:50	
	Gate Opens 16:40	
	Gate Opens 16:50	
	Gate Opens 16:55	
	Gate Opens 16:55	
	Gate Opens 17:00	
	Gate Opens 17:00	
	Gate Opens 17:10	
	Gate Opens 17:15	
	Gate Opens 17:15	
	Gate Opens 17:15	
	Gate Opens 17:15	

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Kwadratische formules
- Formules herleiden
- Meetkunde in driehoeken
- Goniometrie
- Exponenten en logaritmen
- Redeneren met functies

Departures			
Time	Destination	Flt No.	Remarks
20:05	Vienna		
20:05	an Bergamo		Gate Open
20:05	Barcelona		Gate Open
20:10	Cologne		Gate Open
20:10	Bologna		Gate Open
20:20	Hanover		Gate Open
20:25	Stuttgart		Gate Open
20:25	Wroclaw		Gate Open

Vaardigheden 5

Kwadratische formules

1 Vul in.

- a** $(x + 6)^2 = x^2 + \dots$ **c** $x^2 + 16x + \dots = (x + \dots)^2$
b $(x - \dots)^2 = x^2 - \dots x + 25$ **d** $x^2 - x + \dots = (x - \dots)^2$

2 Je kunt de formule $y = x^2 + 6x + 5$ schrijven als $y = (x + 3)^2 - 9 + 5$ en dus als $y = (x + 3)^2 - 4$.
Schrijf in de vorm $y = (x + p)^2 + q$.

- a** $y = x^2 + 4x + 7$ **c** $y = x^2 - 1,2x - 1$
b $y = x^2 - 7x - 8$ **d** $y = x^2 + 5x + 4$

3 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

- a** Breng een factor $\frac{1}{2}$ buiten haakjes.
b Schrijf de uitdrukking binnen de haakjes als $(x + p)^2 + q$ zodat de formule in de vorm $y = \frac{1}{2}((x + p)^2 + q)$ kan worden geschreven.
c Schrijf de gegeven formule in de vorm $y = \frac{1}{2}(x + \dots)^2 + \dots$

Theorie

Om een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$ te schrijven, haal je eerst a buiten haakjes.

4 Schrijf in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

- a** $y = 2x^2 + 5x + 3$ **c** $y = 3x^2 - x$
b $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x - 1$ **d** $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

5 Gegeven is de functie $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$.

- a** Toon aan dat het functievoorschrift van f ook te schrijven is als $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ en $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$.
b Met welk functievoorschrift bereken je handig de coördinaten van de top?
c Met welk functievoorschrift bereken je handig de coördinaten van de snijpunten met de x -as?
d Van welk punt kun je met het overblijvende functievoorschrift de coördinaten handig berekenen?

- 6** Bereken de coördinaten van de snijpunten met de x -as en de coördinaten van de top.

a $f(x) = -6(x - 6)(x + 12)$ **c** $h(x) = x^2 + 4x - 12$
b $g(x) = 2(x + 1)^2 - 18$ **d** $k(x) = -2x^2 + 16x + 18$

Formules herleiden

- 7** Druk x uit in y .

a $10x + 5y = 12$ **c** $y = 2\sqrt{x - 10}$
b $y = \frac{8}{x - 1}$ **d** $y = {}^2\log(x + 6)$

- 8** Druk p uit in q .

a $pq + 2q = 4$ **c** $q = \frac{4}{\sqrt{p} + 2}$
b $q = \frac{4}{2p + 5}$ **d** $q = 3^{p+3} + 3$

- 9** Substitueer x en druk y uit in t .

a $y = 2x^2 - 3x + 1$ en $x = t + 1$
b $y = x \cdot 2^{9-2x}$ en $x = t - 3$
c $y = \log(x^2 - 4)$ en $x = 3t - 2$
d $y = \frac{\sqrt{2x - 4}}{2x}$ en $x = 0,5t^2 + 2$

Meetkunde in driehoeken

- 10** Van driehoek ABC zijn enkele hoeken en zijden gegeven. Bereken de gevraagde zijden of hoeken. Rond de lengten af op één decimaal en de hoeken op hele graden.

- a** Bereken AC en BC als $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 47^\circ$ en $AB = 9$.
b Bereken AB en BC als $\angle A = 22^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ en $AC = 11$.
c Bereken AC , $\angle B$ en $\angle C$ als $\angle A = 90^\circ$, $AB = 9$ en $BC = 14$.
d Bereken AC en BC als $\angle A = 23^\circ$, $\angle C = 67^\circ$ en $AB = 20$.

- 11** **a** Van rechthoek $ABCD$ is gegeven dat $AB = 12$ en $AC = 15$. Bereken de lengte van zijde BC .
b De lengte van de diagonalen van vierkant $KLMN$ is 10. Bereken de oppervlakte van het vierkant.
c Van een ruit $PQRS$ is gegeven dat $PR = 12$ en $QS = 9$. Bereken de lengte van de zijden van deze ruit.

Goniometrie

- 12**
- a** Vul in de tabel de exacte waarden in.
 - b** Teken de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
 - c** Geef met behulp van een redenering, dus zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van $\sin\left(137\frac{1}{2}\pi\right)$, $\sin\left(-1\frac{1}{4}\pi\right)$, $\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right)$ en $\sin\left(-3\frac{2}{3}\pi\right)$.
 - d** Teken de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$.
 - e** Geef met behulp van een redenering, dus zonder je rekenmachine te gebruiken, de exacte waarden van $\cos\left(-137\frac{1}{2}\pi\right)$, $\cos\left(3\frac{3}{4}\pi\right)$, $\cos\left(2\frac{2}{3}\pi\right)$ en $\cos\left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	...	...	...	...	...
$\cos(x)$	...	...	...	...	...

- 13** Los de vergelijkingen op het gegeven interval exact op.
- a** $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$ op $[0, 16\pi]$
 - c** $3\cos(2x) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op $[0, 2\pi]$
 - b** $2\sin(x) = -\sqrt{3}$ op $[-6\pi, 0]$
 - d** $\sin(6x) = -1$ op $[-\pi, \pi]$

Exponenten en logaritmen

- 14** Los exact op.
- a** $8 \cdot 2^{3x+7} = 64$
 - d** $\frac{1}{9} \cdot 3^{x-4} = 27 \cdot 3^{2x+1}$
 - b** $5^{4-x} = 5\sqrt{5}$
 - e** $3 \cdot 4^{6-x} = 12 \cdot 8^x$
 - c** $5 - 4^{2x+7} = -27$
 - f** $\frac{1}{2} \cdot 16^{2-3x} = 2 \cdot 4^{2x-9}$
- 15** ${}^3\log(81) = 4$ want $81 = 3^4$.
 Vul in.
- a** ${}^5\log\left(\frac{1}{25}\right) = \dots$, want $\frac{1}{25} = 5^{\dots}$
 - b** ${}^3\log(9\sqrt{3}) = \dots$, want $\dots$
 - c** ${}^8\log(2) = \dots$, want $\dots$
- 16** Los exact op.
- a** ${}^4\log(x) = \frac{1}{2}$
 - d** ${}^2\log(x^2 - 4) = 5$
 - b** ${}^4\log(3x) + 7 = 9$
 - e** ${}^5\log(6 - 4x) = 1$
 - c** ${}^{0,1}\log(x) = 0$
 - f** ${}^2\log(4x + 1) = -2$

Redeneren met functies

- 17** Schrijf op of de functie stijgend of dalend is, op het gehele domein van de functie.

- | | |
|----------------------------|-----------------------------------|
| a $f(x) = 2^x$ | e $l(x) = 0,75^x$ |
| b $g(x) = \sqrt{x}$ | f $m(x) = x^{-1}, x > 0$ |
| c $h(x) = -8x + 19$ | g $n(x) = x^3$ |
| d $k(x) = 0,5x$ | h $p(x) = 200 \cdot 0,1^x$ |

Theorie

Van eenvoudige functies weet je of ze stijgend of dalend zijn. Van een functie waarvan de grafiek door transformaties te herleiden is uit de grafiek van een eenvoudige functie is dat soms met redeneren vast te stellen.

Voorbeeld

Beredeneer of de functie $h(x) = (1 - 2x)^3$ stijgend of dalend is op het gehele domein.

Oplossing

De functie $f(x) = x^3$ is stijgend, dus als x toeneemt, neemt x^3 ook toe, en als x afneemt, neemt x^3 ook af.

Als x toeneemt, neemt $1 - 2x$ af, dus neemt $(1 - 2x)^3$ ook af.

De functie $h(x) = (1 - 2x)^3$ is dalend op het gehele domein.

- 18** Beredeneer, zonder gebruik te maken van een plot, of de functies stijgend of dalend zijn op het gehele domein.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| a $g(x) = x^3 - 7$ | d $m(x) = (-x)^3$ |
| b $h(x) = 5x^3$ | e $n(x) = (2 - x)^3$ |
| c $k(x) = -2x^3$ | f $p(x) = -6(x - 4)^3$ |

- 19** Beredeneer of de functies stijgend of dalend zijn.

- | | |
|---------------------------------|--|
| a $f(x) = 0,3 \cdot 2^x$ | d $k(x) = \frac{1}{2} \log(-x)$ |
| b $g(x) = 2 \cdot 0,3^x$ | e $m(x) = \sqrt{8 - x}$ |
| c $h(x) = 100 - 2^x$ | f $n(x) = 3 - {}^2\log(x)$ |

- 20** Gegeven zijn de functies $f, g, s = f + g, v = f - g$ en $p = f \cdot g$. Onderzoek of de volgende uitspraken juist zijn. Indien een uitspraak niet juist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- | |
|---|
| a Als f en g stijgen op een interval, stijgt s daar ook. |
| b Als f en g stijgen op een interval, stijgt v daar ook. |
| c Als f en g stijgen op een interval, stijgt p daar ook. |

Vaardigheden

6

SE

CE

K

Departures

Flt No.	Remarks
	Gate Opens 16:50
	Gate Opens 16:40
	Gate Opens 16:50
	Gate Opens 16:55
	Gate Opens 16:55
	Gate Opens 17:00
	Gate Opens 17:00
	Gate Opens 17:10
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15
	Gate Opens 17:15

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Lijnen
- Vergelijkingen oplossen
- Rekenen met breuken
- Differentiëren

Departures

Time	Destination	Flt No.	Remarks
20:05	Vienna		Gate Open
20:05	an Bergamo		Gate Open
20:05	Barcelona		Gate Open
20:10	Cologne		Gate Open
20:10	Bologna		Gate Open
20:20	Hanover		Gate Open
20:25	Stuttgart		Gate Open
20:25	Wroclaw		Gate Open

Vaardigheden 6

Lijnen

Theorie

Een vergelijking van een lijn kun je op verschillende manieren weergeven.

- Een vergelijking van een lijn kun je schrijven als $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$.
- Als een lijn de assen snijdt in $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ én $q \neq 0$, dan kun je de vergelijking schrijven als $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Voorbeeld

Lijn l snijdt de assen in $(-4, 0)$ en $(0, 8)$. Geef een vergelijking van l in de vorm $y = mx + n$.

Oplossing

Er geldt $l: \frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$.

Links en rechts vermenigvuldigen met 8 geeft $-2x + y = 8$, dus $y = 2x + 8$.

- Schrijf $y = \frac{3}{4}x - 5$ in de vorm $ax + by = c$.
 - Schrijf $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
 - Schrijf $\frac{x}{-5} + \frac{y}{4} = 1$ in de vorm $y = mx + n$.
- Geef de drie vormen van een vergelijking van een lijn door elk van de tweetallen punten.
 - $(5, 0)$ en $(0, 20)$
 - $(-1, 8)$ en $(1, 4)$
 - $(-3, 0)$ en $(2, 25)$
 - $(-2, -6)$ en $(5, -27)$
- Gegeven zijn de lijnen $m: y = 2x + 1$ en $n: 3y + x = -11$.
 - Schrijf een vergelijking van lijn n in de vorm $y = ax + b$.
 - Teken de lijnen m en n in één assenstelsel.
 - Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van m en n .
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de paren lijnen.
 - $2x - \frac{1}{3}y = 2\frac{2}{3}$ en $3y + 4\frac{1}{2}x = 9$
 - $\frac{y}{2} - \frac{x}{5} = 1$ en $6y + 10x = 3$

Theorie

Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$. Het omgekeerde geldt ook: als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l loodrecht op elkaar.

Voorbeeld

Bereken de richtingscoëfficiënt van de lijn die loodrecht staat op $l: 2x + 3y = 5$.

Oplossing

De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{2}{3}$ dus de gevraagde richtingscoëfficiënt is $\frac{3}{2}$, want $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$.

- 5** **a** Gegeven zijn lijn $l: x + y = 3$ en punt $P(-1, 2)$.
Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = x + 3$ door punt P gaat en loodrecht op l staat.
- b** Op lijn $m: 3x - \frac{1}{4}y = 1$ liggen de punten $Q(3, 32)$ en $R(-1, 16)$.
Stel een vergelijking op van de lijn door het midden van lijnstuk QR loodrecht op m .
- 6** **a** Gegeven zijn lijn $l: 4x - 2y = 3$ en punt $P(-3, 1)$.
Stel een vergelijking op van loodlijn n door punt P op lijn l .
- b** Gegeven zijn lijn $m: \frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ en punt $Q(5, 3)$.
Stel een vergelijking op van de lijn n door punt Q die loodrecht staat op lijn m .

Vergelijkingen oplossen

- 7** Los exact op.
- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a $\sqrt{x+2} = x$ | d $3\sqrt{x} - x = 2$ |
| b $\sqrt{x+2} = x - 4$ | e $3\sqrt{x+2} - 2 = -x$ |
| c $\frac{3\sqrt{x}}{2} = x$ | f $\frac{5}{2\sqrt{x}} = 3x$ |
- 8** Los exact op.
- | | |
|---|---|
| a $\frac{2x}{x+1} = \frac{1}{6x}$ | d $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 3$ |
| b $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 5$ | e $\frac{2^x-3}{2^x+1} = \frac{-1}{2^x}$ |
| c $\frac{2}{x-1} = \frac{4x}{x+2}$ | f $\frac{3-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 = 0$ |
- 9** Los exact op.
- | | |
|---|---|
| a $3x^4 - 6x^3 = 9x^2$ | e $3x^2 - 7x < 10$ |
| b $(2 \cdot {}^2\log(x) + 3)^2 = 25$ | f $x^2 \geq 20 - x^4$ |
| c $(3x+7)(2x-1) = -12$ | g $x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} \geq 0$ |
| d $3^{2x-1} = 81$ | h $2x - 28 \leq \sqrt{x}$ |

Rekenen met breuken

Theorie

Breuken kun je bij elkaar optellen en van elkaar aftrekken als ze gelijknamig zijn. Bij ongelijknamige breuken maak je eerst

$$\text{de noemers gelijk: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Breuken kun je met elkaar vermenigvuldigen door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te

$$\text{vermenigvuldigen: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Bij het vereenvoudigen van breuken kun je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen.

Voorbeeld

Herleid tot één breuk: $\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x-1}$

Oplossing

Als je de breuken gelijknamig maakt, wordt de noemer $(x+2)(x-1)$.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x-1} =$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x(x+2)}{(x+2)(x-1)} =$$

$$\frac{x(x-1) + 2x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3x^2 + 3x}{(x+2)(x-1)}$$

10 Herleid tot één breuk.

a $\frac{x+2}{x^2} + \frac{2}{x-1}$

c $\frac{1}{2x-1} + \frac{2x+1}{x+1}$

b $\frac{x-1}{x+4} - \frac{x+4}{x-1}$

d $\frac{-x^3}{2x-1} + \frac{2x^2+1}{4}$

11 Herleid tot één breuk.

a $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4}$

c $\frac{x}{x+1} - x$

b $\frac{-x}{x-2} + 3$

d $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

12 Schrijf als één breuk en vereenvoudig zoveel mogelijk.

a $\frac{-2x^2}{5} \cdot \frac{10}{3x}$

c $3x \cdot \frac{-2}{x} \cdot -\frac{3}{4}$

b $\frac{5}{3x} \cdot -\frac{1}{3}x$

d $-x^2 \cdot \frac{-1}{x^3}$

13 Schrijf zonder haakjes en vereenvoudig zoveel mogelijk.

a $y = \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2$

c $y = \frac{1}{3}x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)$

b $y = -2x^3 \left(\frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} - 1\right)$

d $y = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right)$

Differentiëren

Theorie

Regels voor het differentiëren van functies:

$$f(x) = x^a \quad f'(x) = a \cdot x^{a-1}$$

$$g(x) = f(x) + c \quad g'(x) = f'(x)$$

$$g(x) = c \cdot f(x) \quad g'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$s(x) = f(x) + g(x) \quad s'(x) = f'(x) + g'(x)$$

De kettingregel:

$$k(x) = g(f(x)) \quad k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = (4x^2 - 7)^3$ en $g(x) = \sqrt{8 - 4x}$.

Oplossing

$$f'(x) = 3(4x^2 - 7)^2 \cdot 8x \text{ ofwel}$$

$$f'(x) = 24x(4x^2 - 7)^2$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{8-4x}} \cdot -4 \text{ ofwel}$$

$$g'(x) = \frac{-2}{\sqrt{8-4x}}$$

14 Differentieer.

$$\text{a } f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - x + 8 \quad \text{e } l(s) = s^3(s^2 + 4)$$

$$\text{b } M(a) = 4 + a - \sqrt{6-a} \quad \text{f } w(p) = p^2\sqrt{p}$$

$$\text{c } f(x) = (5x^4 - 9x)^3 \quad \text{g } V(p) = 4\sqrt{6p+8}$$

$$\text{d } q(x) = \frac{1}{6+7x} \quad \text{h } B(u) = \frac{6}{u} - \frac{1}{u^6} - 6u$$

15 Bereken exact de helling van de grafiek in het gegeven punt.

$$\text{a } f(x) = 5\sqrt{4x-11} \text{ in } (5, 15) \quad \text{c } h(x) = x^2\sqrt{x} \text{ in } (4, 32)$$

$$\text{b } g(x) = \frac{36}{x^2} \text{ in } (-2, 9) \quad \text{d } k(x) = \frac{4}{3x+2} \text{ in } (-1, -4)$$

16 Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van de functie.

$$\text{a } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 7\frac{1}{2}x \text{ in het punt } (3, 9)$$

$$\text{b } g(x) = \frac{5x^3+1}{x^2} \text{ in het punt } \left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{c } h(x) = 3x - 1 + \sqrt{6x+3} \text{ in het punt } (1, 5)$$

17 Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = 8x^3 - 6x^2 + a$. Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van f_a de x -as raakt.18 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ en

$$g_a(x) = 3x + a.$$

Voor welke waarden van a raakt de grafiek van g_a de grafiek van f ? Geef voor die waarden van a ook de coördinaten van het raakpunt.

Vaardigheden

7

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Som- en verschilfuncties
- Goniometrische vergelijkingen
- Integreren
- Vergelijkingen oplossen



Vaardigheden 7

Som- en verschilfuncties

Theorie

Het functievoorschrift van de **somfunctie** $f + g$ krijg je door de functievoorschriften van f en g bij elkaar op te tellen.

Het functievoorschrift van de **verschilfunctie** $f - g$ krijg je door het functievoorschrift van g af te trekken van het functievoorschrift van f .

Vaak is het nodig haakjes te gebruiken.

Voorbeeld

Stel functievoorschriften op van

$s = k + m$ en $v = k - m$ als

$k(x) = -x^2 + 2x$ en $m(x) = -4x + 2$.

Oplossing

$$s(x) = (-x^2 + 2x) + (-4x + 2)$$

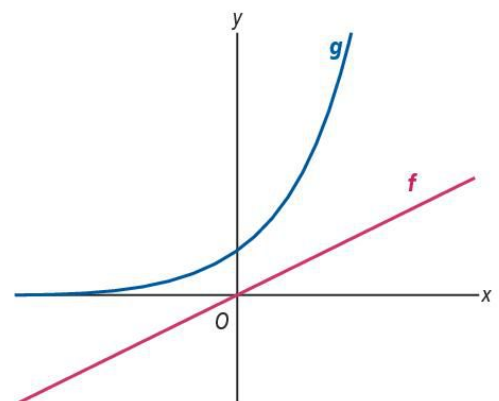
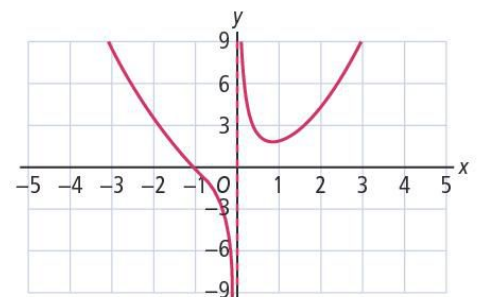
$$s(x) = -x^2 - 2x + 2$$

$$v(x) = (-x^2 + 2x) - (-4x + 2)$$

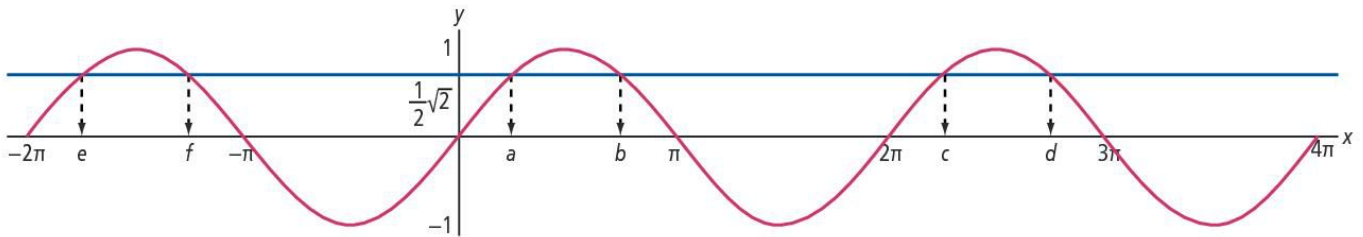
$$v(x) = -x^2 + 2x + 4x - 2$$

$$v(x) = -x^2 + 6x - 2$$

- 1 Gegeven zijn $f(x) = -2x^2 - 3$ en $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$.
 - a Stel functievoorschriften op van de somfunctie $s = f + g$ en van de verschilfuncties $v = f - g$ en $w = g - f$.
 - b Welke van de functies s , v en w is lineair?
- 2 Geef het functievoorschrift van $s = p + q$ en van $v = p - q$ en geef het domein van s en van v .
 - a $p(x) = \frac{1}{1+x}$ en $q(x) = \frac{1}{x}$, schrijf je antwoorden als één breuk.
 - b $p(x) = 2 \cdot \log(2x + 3)$ en $q(x) = 1 + \log(x)$, schrijf je antwoorden als één logaritme.
- 3 Gegeven is de grafiek van $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
 - a In welk deel van het domein heeft de functie $p(x) = x^2$ de meeste invloed op de functie f ? Waarom?
 - b En in welk deel heeft $q(x) = \frac{1}{x}$ de meeste invloed? Waarom?
- 4 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x$ en $g(x) = 2^x$.
 - a Schets in deze figuur ook de grafiek van de functie $h = f + g$.
 - b In welk deel van het domein heeft f de meeste invloed op het gedrag van h ? Waarom?
 - c De grafiek van de functie $k(x) = f(x) + g(-x)$ valt voor grote waarden van x praktisch samen met de grafiek van f . Verklaar dit.



Goniometrische vergelijkingen



- 5** Op het interval $[-2\pi, 4\pi]$ is de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ getekend met daarin de lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

a Het getal a is de oplossing van de vergelijking

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ op het interval } [0, \frac{1}{2}\pi].$$

Welk getal is a ?

b Schrijf alle oplossingen op van de vergelijking

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ op het gegeven interval.}$$

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

- 6** Los exact op voor $0 \leq t \leq 2\pi$.

a $\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **c** $2\cos(t) + 1 = 0$
b $\cos(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **d** $\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$

- 7** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(3x)$.

- a** Geef de oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$.
b Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van $f(x) = \frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$.
 Maak de berekening op het blaadje af.

☐	$\sin(3x) = \frac{1}{2}$				
☐	$3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$				
☐	$x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \dots + k \cdot \dots$				
☐	Op $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:				
☐	$x = \frac{1}{18}\pi$ of $x = \dots$ of $\dots$				
☐					

- 8** Los exact op voor $-\pi \leq t \leq 3\pi$.

a $\sin(2t) = -1$ **c** $2\sin(3t) = \sqrt{3}$
b $\cos(\frac{1}{4}t) - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$ **d** $-10\cos(4t) = 5$

- 9** Los exact op.

a $6\cos(\frac{1}{2}x) = 3\sqrt{2}$ op het interval $[0, 3\pi]$
b $5\sin(2x) = 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$ op het interval $[-\pi, 2\pi]$

- 10** Los op. Rond af op drie decimalen.

a $\cos(x) = 0,43$ op het interval $[0, 2\pi]$
b $2\cos(x) + 2,3 = 1,5$ op het interval $[0, 3\pi]$

Integreren

Theorie

De integraal van een functie f over het interval $[a, b]$ is gelijk aan $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, waarbij $F'(x) = f(x)$. $F(b) - F(a)$ wordt ook wel genoteerd als $[F(x)]_a^b$.

11 Bereken exact.

a $\int_1^{11} (x^3 - 6x) dx$

c $\int_1^{16} (2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}) dx$

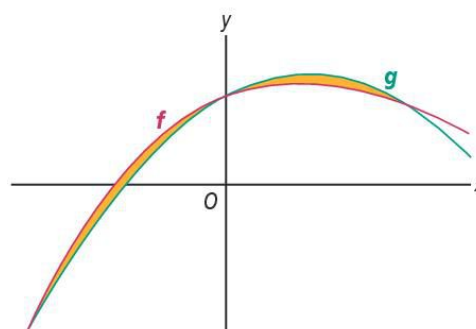
b $\int_1^4 \left(\frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2} \right) dx$

d $\int_0^1 (\sqrt[3]{x^2} + 3x^4) dx$

12 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 5x + 12$ en $g(x) = -4x^2 + 7x + 12$.

a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

b De grafieken van f en g sluiten twee gebieden in. Bereken exact de oppervlakte van elk van de twee gebieden.



13 Bereken exact.

a $\int_3^4 \left(\frac{5}{x-2} \right)^3 dx$

c $\int_{-2}^3 (2 - 3x)^2 dx$

b $\int_2^6 (5x + 9) dx$

d $\int_{-1}^3 \left(\frac{4}{\sqrt{2x+3}} \right) dx$

14 Bereken exact.

a $\int_{-3}^0 (x^4 - 3) dx + \int_0^2 (x^4 - 3) dx$

b $\int_1^{14} \left(\frac{1}{2x} - x \right) dx - \int_1^{14} \left(\frac{1}{2x} + x \right) dx$

c $\int_5^7 (-x^2 + 2x + 7) dx + \int_5^7 (3x + 7) dx$

Vergelijkingen oplossen**15** Los exact op.

a $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$

d $\sqrt{6 + \sqrt{x}} = 4$

b $\frac{3}{\sqrt{2x+4}} = 2$

e $\frac{2+x}{\sqrt{x}} = 3$

c $2\sqrt{x} = \sqrt{2x}$

f $\sqrt{x^2 + 2x} = x + 2$

16 Vergelijkingen kun je soms oplossen met behulp van een substitutie.**a** Los $2\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - 60 = 0$ op met behulp van de substitutie $\frac{1}{2}x + 3 = t$.**b** Los $5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 6 = 0$ op met behulp van de substitutie $5^x = t$.**17** Los exact op met behulp van een substitutie.

a $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

d $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{x} + 14 = 0$

b $\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{3}x\right) - 2 = 0$

e $-6^{-2x} + \frac{37}{6} \cdot 6^{-x} - 1 = 0$

c $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x} + 15 = 0$

f $\frac{25}{4a^2} + \frac{10}{a} + 4 = 0$

TheorieBij vergelijkingen van de vorm $A \cdot B = 0$, $A^2 = B^2$ of $A \cdot B = A \cdot C$ gebruik je de volgende regels:

- Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.
- Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$.
- Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$.

18 Los exact op.

a $6(x - 21)(x + 13) = 0$

d $(x^6 - 5)(3x^5 - 21)(4 - x) = 0$

b $x^2(x - 9) = 3x^2$

e $(x - 9)^2 = (2x + 3)^2$

c $3(5x - 2)^2 = 48$

f $3(x^4 - 9) = (x^4 - 9)^2$

19 Los exact op.

a $\frac{1}{|x+1|} = \frac{2}{3}$

c $|x^2 - 5x| = 6$

b $|-x^3 + 1| = 12$

d $|4x - x\sqrt{x}| = x$

Vaardigheden 8

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Rekenen met machten, exponenten en wortels
- Lijnen en cirkels
- Inverse functies
- Lijn- en puntsymmetrie



Vaardigheden 8

Rekenen met machten, exponenten en wortels

- 1** Schrijf de formules in de vorm $y = b \cdot g^x$.
- a** $y = 12 \cdot 3^{2-x}$ **c** $y = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x+5}$
b $y = 6^{1-2x}$ **d** $y = 4 \cdot 9^{\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}$
- 2** Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.
- a** $y = (3^t - 2)^2$ **c** $y = 5^{3p}(5^{\frac{1}{2}p} - 5^{-p})$
b $y = (4^x + 3)(4^{-x} - 2)$ **d** $y = (8^{3p} + 3)(8^p - p)$
- 3** Herleid en schrijf in de vorm $y = b \cdot x^a$.
- a** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot 2\sqrt{x}$ **d** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$
b $y = \left(-\frac{1}{2}x\right)^3 \cdot (\sqrt[5]{x^3})^2$ **e** $y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2 \cdot (2x)^2}}\right)^3$
c $y = \frac{(3x)^2}{2\sqrt[4]{x}}$ **f** $y = (\sqrt{3x})^3 \cdot (-2)^{-3}$
- 4** Op het blaadje wordt $\sqrt[4]{3}$ geschreven in de vorm $b\sqrt[a]{a}$, met a een zo klein mogelijk geheel getal.
- a** Van welke rekenregel voor wortels is gebruikt gemaakt in stap 1?
b Waarom is het handig om in stap 2 teller en noemer te vermenigvuldigen met $\sqrt{3}$?
c Laat zien dat $\sqrt[8]{3}$ te schrijven is als $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.
- 5** Herleid en schrijf in de vorm $b\sqrt[a]{a}$, met a een zo klein mogelijk positief geheel getal.
- a** $\frac{3}{\sqrt{2}}$ **d** $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
b $\sqrt{1875}$ **e** $\sqrt{2048}$
c $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^4$ **f** $\frac{6}{\sqrt{3}}$
- 6** Schrijf zo eenvoudig mogelijk.
- a** $y = \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}$
b $y = x^2\sqrt{x} \cdot \frac{4}{(\sqrt{3x})^2}$

•	$\sqrt[4]{4} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$		1	
•	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$		2	
•	Dus $\sqrt[4]{4} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$			

Lijnen en cirkels

- 7** Gegeven is lijn l door de punten $A(2, -5)$ en $B(-3, 2)$.
- Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn l .
 - Stel een vergelijking op van lijn l in de vorm $y = mx + n$.
 - Geef ook een vergelijking van lijn l in de vorm $ax + by = c$, waarbij a , b en c gehele getallen zijn.

Theorie

Een vergelijking van een lijn kan worden gegeven in de vorm $y = mx + n$ of in de vorm $ax + by = c$.

Een vergelijking van een cirkel met middelpunt (p, q) en straal r is $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Twee lijnen met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 staan loodrecht op elkaar als $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- 8** Stel vergelijkingen op van de lijnen in de vorm $ax + by = c$, met a , b en c geheel.
- Lijn l door $(2, 5)$ en evenwijdig aan de lijn $y = 1\frac{1}{2}x$.
 - Lijn m door $(4, -3)$ en loodrecht op de lijn $y = 4\frac{1}{2}x$.
 - Lijn p door $(0, 5)$ en $(-8, 1)$.
- 9** Bereken van elke cirkel de coördinaten van het middelpunt en de straal.
- $x^2 + 12x + y^2 + 5y = 0$
 - $x^2 + y^2 - x + 3y + 2\frac{1}{4} = 0$
 - $x^2 - 4y = 8x - y^2$
- 10** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn en de cirkel.
- Lijn l : $y = 2x - 1$ en cirkel c : $x^2 + y^2 - 3y - 19 = 0$
 - Lijn l : $x + 7y = 3$ en cirkel c : $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$
 - Lijn l : $y = x + 2$ en cirkel c : $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 74 = 0$
- 11** Gegeven zijn cirkel c : $x^2 + 7x + y^2 + 5y = 0$ en punt $P(1, 8)$. Bereken $d(P, c)$.
- 12** Lijn q raakt cirkel c : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ in het snijpunt van c met de positieve y -as. Stel een vergelijking van q op.

Inverse functies

- 13** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{12}{4x-1}$ en $g(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{4}$
- Toon aan dat $f(4) = \frac{4}{3}$ en $g(\frac{4}{3}) = 4$.
 - Toon aan dat $f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$ als $x \neq 0$.
 - Welk verband bestaat er tussen de functies f en g ?

Aanpak

Hoe stel je het functievoorschrift op van de inverse van een gegeven functie f ?

- Vervang het functievoorschrift $f(x)$ door y .
- Vervang in de formule x door y en y door x .
- Druk in de nieuwe formule y uit in x .
- Schrijf het resultaat als functievoorschrift door y te vervangen door $f^{inv}(x)$.

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift op van de inverse van $f(x) = {}^3\log(2x-7)$.

Oplossing

- $y = {}^3\log(2x-7)$
- $x = {}^3\log(2y-7)$
- $2y-7 = 3^x$
 $2y = 7 + 3^x$ dus $y = \frac{1}{2}(7 + 3^x)$
- $f^{inv}(x) = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^x$

- 14** Stel het functievoorschrift op van de inverse functie.

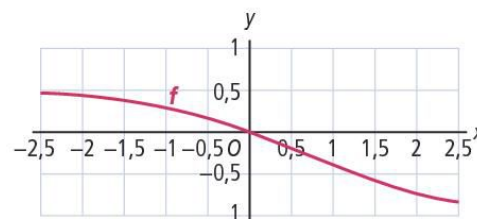
- | | |
|----------------------------------|---|
| a $f(x) = 12 - 5x$ | d $k(x) = 8 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ |
| b $g(x) = 1 + (2x-7)^3$ | e $p(x) = \frac{1}{5} \cdot 2^{3x-1}$ |
| c $h(x) = \frac{20}{x-4}$ | f $q(x) = \ln(5x-10)$ |

- 15** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{12-x}$.

- Geef het domein en het bereik van f .
- Bereken het functievoorschrift van f^{inv} en geef het domein en bereik van f^{inv} .
- Voer de opdrachten a en b ook uit voor de functie $g(x) = 1 + \sqrt[4]{2x-6}$.
- Doe hetzelfde voor de functie $h(x) = \frac{3}{2\sqrt{1-x}}$

- 16** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1-3^x}{2+3^x}$

- Geef het domein van f .
- Waarom kun je uit de grafiek van f concluderen dat f een inverse functie moet hebben?
- Stel een functievoorschrift op van f^{inv} .
- Geef het domein van de inverse functie van f .



Lijn- en puntsymmetrie

17 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$

- a Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
- b Hoe liggen de toppen ten opzichte van de oorsprong?

Theorie

De grafiek van een functie f is lijnsymmetrisch in de y -as als geldt: $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f .

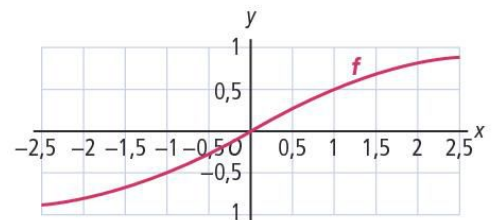
Als voor een functie f geldt: $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f , dan is de grafiek van f puntsymmetrisch in de oorsprong $(0, 0)$.

18 Geef bij elk van de functies aan of de bijbehorende grafiek lijnsymmetrisch is in de y -as, puntsymmetrisch in de oorsprong of geen van beide. Verklaar je antwoord met een berekening of een redenering.

- a $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$
- b $h(x) = 2\log(1+x^2)$
- c $k(x) = \frac{2x^2+1}{3x}$
- d $p(x) = \cos^2(x) + 2\cos(x)$
- e $r(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$
- f $s(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$

19 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1-3^{-x}}{1+3^{-x}}$

De grafiek lijkt puntsymmetrisch te zijn in de oorsprong. Toon aan dat dit inderdaad het geval is.



20 Er zijn ook functies waarvan de grafiek symmetrisch is in de lijn $y = x$. Daarover gaat deze opdracht.

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \frac{3x+p}{x-3}$

- a Plot en schets de grafiek van de functie f_{-8} .
- b De grafiek van f_{-8} lijkt symmetrisch te zijn in de lijn $y = x$. Welke conclusie zou je dan kunnen trekken over de inverse functie van f_{-8} ?
- c Bewijs dat deze conclusie juist is.
- d Toon aan dat deze eigenschap geldt voor alle functies f_p , mits $p \neq -9$.

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Lijnen
- Machtsverbanden
- Sinus- en cosinusregel
- Differentiëren



Vaardigheden 9

Lijnen

- 1 Bij lijn l hoort de vergelijking $2x - 5y = 24$ en bij lijn m hoort de vergelijking $y = -3x + 2$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .

- 2 Los exact op met elimineren.

a
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4y - x = 5\frac{1}{3} \end{cases}$$

Theorie

Je kunt bij het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen uitkomen op een vergelijking van de vorm $0 \cdot x = a$.

Als $a = 0$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en vallen de bijbehorende lijnen samen. Het stelsel heet dan afhankelijk.

Als $a \neq 0$ dan heeft het stelsel géén oplossing en zijn de bijbehorende lijnen evenwijdig. Het stelsel heet dan strijdig.

$0 \cdot x = 0$
oneindig veel
oplossingen



$0 \cdot x = a$ met $a \neq 0$
géén oplossingen



- 3 Onderzoek voor welke waarden van p , q en r de stelsels strijdig of afhankelijk zijn.

a
$$\begin{cases} x - py = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} qx + 3y = 4 \\ 3y = 3x + 7 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} rx + 3y = 1\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} - y \end{cases}$$

- 4 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen l en m .

a $l: 6x - y = 8$ en $m: 4y + 6x = 12$

b $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m: 2y + 5x = 1$

c $l: \frac{x}{-1} - \frac{y}{2\frac{1}{2}} = 1$ en $m: \frac{x}{-6} - \frac{y}{3} = 1$

- 5 a Gegeven zijn lijn $l: 4x - 10y = 5$ en punt $P(1, 2)$.
Stel een vergelijking op van loodlijn m door P op lijn l .

b Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $m: 4x + 7y = 14$.

Toon aan dat de lijnen l en m loodrecht op elkaar staan.

- c Op lijn $n: 2x - \frac{1}{3}y = 3$ liggen de punten $P(2, 3)$ en $Q(-2, -21)$.
Stel een vectorvoorstelling op van de lijn die door het midden van lijnstuk PQ gaat en loodrecht op n staat.

Machtsverbanden

- 6 In de tabel is een aantal meetresultaten gegeven. Neem aan dat de bijbehorende formule de vorm $N = c \cdot t^a$ heeft.

t	1	4	7	16
N	36	203,65	409,9	1152

- Met welke waarden voor t en N kun je c berekenen?
- Bereken exact de waarde van c en van a .
- Welke waarde heeft N bij $t = 17$? Rond je antwoord af op een geheel getal.

- 7 Als l recht evenredig is met k , dan geldt $l = a \cdot k$.

- De bijbehorende grafiek gaat door het punt $(k, l) = (10, 25)$. Bereken a .
- Als k vier keer zo groot wordt, wat weet je dan over l ?

Als p recht evenredig is met q^2 , dan geldt $p = b \cdot q^2$.

- De grafiek gaat door $(q, p) = (5, 100)$. Bereken b .
- Als q vier keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met p ?

Theorie

Als voor twee variabelen P en Q geldt dat Q evenredig is met P^a , dan is er een machtsverband tussen P en Q van de vorm $Q = c \cdot P^a$. Er geldt: als de variabele P een factor k keer zo groot wordt, dan wordt de variabele Q een factor k^a keer zo groot. Bij gegeven waarden van P en Q kun je de waarde van a en van de evenredigheidsconstante c berekenen.

- 8
 - p is evenredig met k^3 . Bij $k = 2$ is $p = 12$.
Stel een formule op voor het verband tussen p en k .
 - De grafiek van een machtsverband $y = c \cdot x^a$ gaat door de punten $(2, 48)$ en $(4, 768)$.
Bereken a en c .

- 9 Bij experimenten met het opwekken van elektriciteit door middel van windmolens is onderzocht hoe het door de windmolens geleverde vermogen P afhangt van de lengte L van de wieken en van de windsnelheid v (bij gelijke luchtdichtheid).
Bij een bepaald type windmolens bleek het opgewekte vermogen P (in W) evenredig te zijn met het kwadraat van de lengte van de wieken L (in m) en met de derdemacht van de windsnelheid v (in m/s).
- Stel voor een windmolen die $P = 6 \cdot 10^5$ W levert bij $L = 20$ m en $v = 12$ m/s een formule op.
 - Bereken met hoeveel procent het geleverde vermogen van een windmolen afneemt als de windsnelheid afneemt met 20%.

Voorbeeld

De grafiek van een machtsverband $y = c \cdot x^a$ gaat door de punten $(2, 40)$ en $(3, 135)$. Bereken a en c .

Oplossing

$x = 2$ en $y = 40$ geeft $40 = c \cdot 2^a$.

$x = 3$ en $y = 135$ geeft $135 = c \cdot 3^a$.

Delen geeft $\frac{40}{135} = \frac{c \cdot 2^a}{c \cdot 3^a}$ en uit

$$\frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^a \text{ volgt } a = 3.$$

Punt $(2, 40)$ invullen in $y = c \cdot x^3$ geeft $40 = c \cdot 2^3$ en dus $c = 5$.

Sinus- en cosinusregel

Theorie

In een driehoek ABC met zijden a , b , en c en hoeken α , β en γ

gelden de sinusregel: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

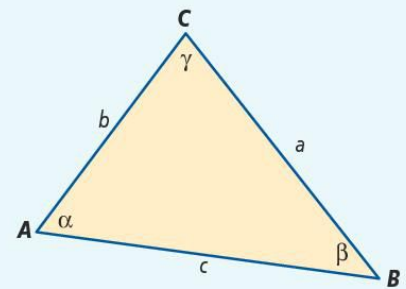
en de cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

of

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

of

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$


Voorbeeld

In $\triangle ABC$ geldt $a=15$, $c=13$ en $\gamma=58^\circ$.
 Bereken de overige zijde en hoeken in deze driehoek.

Oplossing

$\frac{15}{\sin(\alpha)} = \frac{13}{\sin(58^\circ)}$ geeft $\sin(\alpha) \approx 0,9785$ dus $\alpha \approx 78^\circ$ en $\beta \approx 180 - 58 - 78 = 44^\circ$.

$b^2 \approx 15^2 + 13^2 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \cos(44^\circ) \approx 113,46$ dus $b \approx 10,7$.

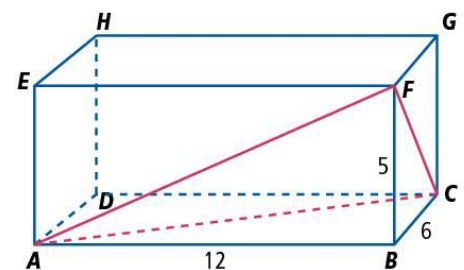
10 Bereken in één decimaal de lengte van de onbekende zijde(n).

- a $\triangle ABC$ met $a=5$, $b=6$ en $\gamma=67^\circ$
- b $\triangle ABC$ met $b=10$, $c=13$ en $\alpha=22^\circ$
- c $\triangle ABC$ met $a=8$, $b=11$ en $\beta=56^\circ$
- d $\triangle ABC$ met $\beta=55^\circ$, $\gamma=61^\circ$ en $c=23$

11 Bereken van elke driehoek de hoeken in hele graden.

- a $\triangle ABC$ met $a=10$, $b=13$ en $c=17$
- b $\triangle ABC$ met $a=33$, $b=65$ en $c=56$
- c $\triangle ABC$ met $a=7$, $b=9$ en $c=14$

12 Van de balk $ABCD.EFGH$ is gegeven: $AB=12$, $BC=6$ en $BF=5$.
 Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle ACF$.



13 Een vlieger $ABCD$ heeft twee zijden met lengte 13 en twee zijden met lengte 15. De lengte van één van de diagonalen is 24. De vlieger kan twee verschillende vormen hebben.
 Bereken voor beide vormen de lengte van de andere diagonaal.

Differentiëren**14** Differentieer.

a $f(x) = 5x^4 - 4x^5 + 20$

e $m(x) = 3x + e^{4x-x^2}$

b $g(x) = \frac{3}{x^2} + 4x\sqrt{x}$

f $n(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

c $h(x) = (2 - 2x) \cdot \ln(2x)$

g $p(x) = \frac{1 - \sin(2x)}{1 + \sin(2x)}$

d $k(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\frac{1}{2}x - 1}$

h $q(x) = \frac{2}{\cos(5x)}$

15 Bereken exact de extreme waarden. Vermeld ook eventuele randextremen.

a $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 1$

b $g(x) = \frac{1-x}{3+x^2}$

c $h(x) = \sqrt{-x^4 + 4x^2 + 5}$

d $k(x) = 2\cos^3(x) - 3\cos(x)$ op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.

16 Geef de extreme waarden.

a $f(x) = |-x^3 + 6x^2 - 9x|$

b $g(x) = |-6x + 2x\sqrt{x}|$

17 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2\ln(x) - 2}{x}$ **a** Plot en schets de grafiek van f .**b** Bereken exact de x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as.**c** Bereken exact de extreme waarde van f .**d** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .**18** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 9x$ en $g(x) = x^2 + 9x + p$.**a** Neem $p = -5$ en stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van g in het punt met x -coördinaat -1 .**b** Voor welke waarden van x geldt $f'(x) = g'(x)$?**c** Voor welke waarden van p raken de grafieken van f en g elkaar?

Vaardigheden 10

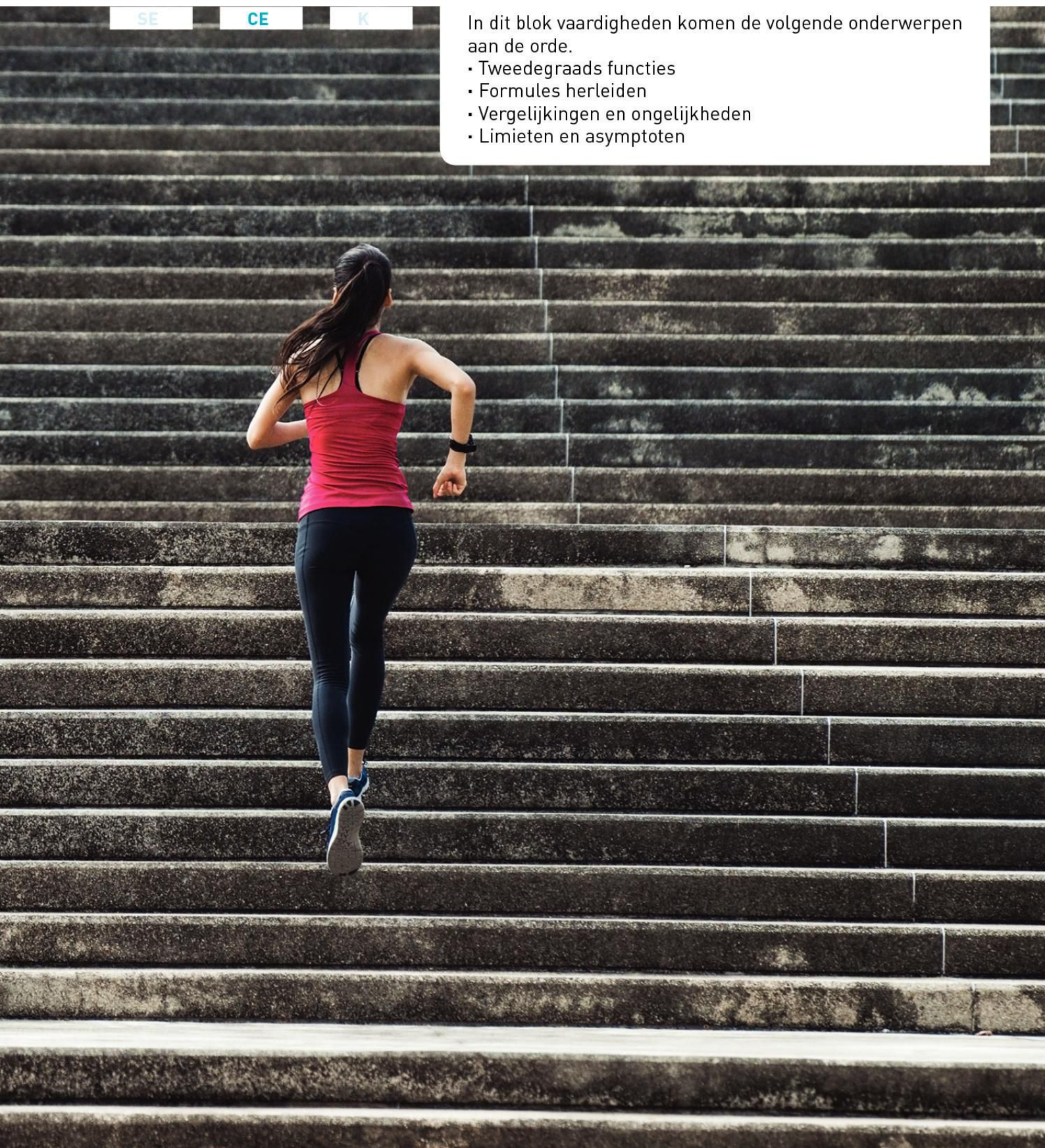
SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Tweedegraads functies
- Formules herleiden
- Vergelijkingen en ongelijkheden
- Limieten en asymptoten



Tweedegraads functies

- 1 Om een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$ te schrijven, haal je eerst a buiten haakjes. Herschrijf in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.
- a $y = x^2 - 12x - 4$
 - b $y = 2x^2 + 4x + 3$
 - c $y = 3x^2 - 6x$
 - d $y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$
- 2 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$.
- a Toon aan dat het functievoorschrift van f ook te schrijven is als $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$ en als $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$.
 - b Met welk voorschrift bereken je handig de coördinaten van de top?
 - c Met welk voorschrift bereken je handig de coördinaten van de snijpunten met de x -as?
 - d Van welk punt kun je met het overblijvende voorschrift de coördinaten handig berekenen?

Theorie

Het functievoorschrift van een tweedegraads functie kan in drie vormen worden gegeven:

- $f(x) = ax^2 + bx + c$. Het snijpunt met de y -as is $(0, c)$.
- $f(x) = a(x - s)(x - t)$. De grafiek snijdt de x -as in de punten $(s, 0)$ en $(t, 0)$. Met deze punten kun je de symmetrieas vinden en daarmee de coördinaten van de top.
- $f(x) = a(x - p)^2 + q$. De coördinaten van de top zijn (p, q) .

- 3 Bereken voor de grafieken van de functies de coördinaten van de snijpunten met de x -as en de coördinaten van de top.
- a $f(x) = -6(x - 6)(x + 12)$
 - b $g(x) = 2(x + 1)^2 - 18$
 - c $h(x) = x^2 + 4x - 12$
- 4 De grafiek van een tweedegraads functie f heeft als top $(2, -3)$ en gaat door het punt $(5, 6)$. Bereken exact $f(0)$.

Formules herleiden**5** Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk.

a $y = (2^t + 1)^2$

c $y = 4^{2p} (4^{\frac{1}{3}p} - 4^{-3p})$

b $y = (3^{2x} - 4)(3^{-2x} + 2)$

d $y = (7^{2p} + p)(7^{3p} - 6)$

6 Herleid en schrijf in de vorm $y = b \cdot x^a$.

a $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot 3\sqrt{x}$

d $y = \frac{4}{\sqrt[5]{x}} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

b $y = (-2x)^3 \cdot (\sqrt[3]{x^4})^3$

e $y = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{2x}}\right)^3$

c $y = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{4\sqrt[3]{x}}$

f $y = (\sqrt{5x})^4 \cdot (-2x)^{-3}$

7 Schrijf als één logaritme.

a $f(x) = 2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(3x)$

b $f(x) = {}^7\log(x-3) + 2 \cdot {}^7\log(x) - 2$

c $f(x) = 5 \cdot \log(x) + 2 \cdot \log(3x) - \frac{1}{2} \cdot \log(x^4)$

d $f(x) = 3 \cdot \log(2x) + 2 \cdot \log(4+x) - 1$

$${}^a\log(a) + {}^a\log(b) = {}^a\log(a \cdot b)$$

$${}^a\log(a) - {}^a\log(b) = {}^a\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^a\log(a) = {}^a\log(a^p)$$

$$a^{{}^a\log(a)} = a$$

8 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x}$ Toon aan dat je het functievoorschrift van f kunt schrijven

als $f(x) = \frac{5x-3}{x(x-1)}$

9 Schrijf het functievoorschrift als één breuk.

a $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+3}$

b $g(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{x+3}$

c $h(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \frac{2x}{\cos(x)}$

d $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x\sqrt{x}}$

10 Herleid en schrijf in de vorm $y = a \cdot \sqrt{bx}$.

a $y = \sqrt{\frac{1}{9}x} + \sqrt{121x}$

b $y = \sqrt{27x} - \sqrt{75x}$

c $y = 2\sqrt{18x} + \frac{1}{2}\sqrt{288x}$

11 Druk p uit in q .

a $2pq = p + q$

c $4p^3 = q - 6$

b $\sqrt{p} + q = 4$

d $e^p = \sqrt{q}$

12 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 2x$.

De grafiek van f wordt gespiegeld in de lijn $y = x$.

a Laat zien dat bij de beeldgrafiek de formule $x = (y - 1)^2 - 1$ hoort.

b Waarom is de beeldgrafiek niet de grafiek van een functie?

Als y een functie is van x , dan hoort bij elke waarde van x uit het domein van f precies één waarde van y . Deze waarde wordt genoteerd als $f(x)$.

13 **a** Bij welke van deze verbanden is y niet te schrijven als functie van x ?

A $\sqrt{xy} = x$

B $x + 1 = \frac{2}{y(x - 1)}$

C $x - 3 = y^2 - 4y + 4$

D $x = {}^3\log\left(\frac{y - 2}{7}\right)$

b Druk bij de overige verbanden y uit in x .

14 Gegeven zijn de formules $p = \frac{t + 4}{t + 3}$ en $t = 2 - \frac{1}{2}s$.

a Laat zien dat uit $p = \frac{t + 4}{t + 3}$ volgt dat $p - 1 = \frac{1}{t + 3}$

b Druk s uit in p .

c Voor welke waarde van p geldt $s = 3$?

Vergelijkingen en ongelijkheden**15** Los exact op.

a $12 - 2(3q - 4) = 4$

b $4 - 3(k - 2) = 3 - 5k$

c $3p + 5(6 - 1,2p) = 0$

d $2,3y - 5(5,3 - 2y) = 1,7y$

16 Los de stelsels vergelijkingen exact op.

a
$$\begin{cases} 3a + 2b = 14 \\ -2a + b = 5 \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ 5x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 0,1p - 1,3q = 2,4 \\ 0,4p + 2q = 2,4 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} x^2 + 5y + 4 = 0 \\ 3x^2 + 2y^2 = 80 \end{cases}$$

Bij het oplossen van vergelijkingen met machten let je op het type vergelijking.

- Als de onbekende in het grondtal staat, dan heb je te maken met een machtsvergelijking.
- Als de onbekende in de exponent staat, dan heb je te maken met een exponentiële vergelijking.

17 Los exact op.

a $4 \cdot 3^{2x} = 24$

d $3x^{-5} = 96$

b $12 \cdot 2^{3-5x} + 8 = 32$

e $10 - \left(\frac{1}{2}x\right)^5 = -34$

c $5 \cdot 4^{-x+1} - 35 = 0$

f $\frac{1}{2}x^8 + 12 = 15$

18 Los exact op.

a ${}^3\log(x) + {}^3\log(7) = 2$

b $\frac{1}{2}\log(x+4) - \frac{1}{2}\log(2x) = -1$

c $6 - {}^3\log(x+5) = 4$

d ${}^4\log(2x+1) + 2 \cdot {}^4\log(3) = 1\frac{1}{2} + {}^4\log(9x)$

Uit ${}^a\log(a) = b$ volgt $g^b = a$ en omgekeerd.

19 Los exact op.

a $x^2(2^x - 1) = 36(2^x - 1)$

b $({}^3\log(4x-1) + 2)^2 = 16$

c $(x^3 + 2)^2 = (3 - 2x^3)^2$

d $(\ln(x) + 5)^2(x - 1) = 16(x - 1)$

Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$
 Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$
 Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$

20 Los exact op.

a $5 + \sqrt{3x - 10} = 8$

b $4x + \sqrt{x} = 2x + 6$

c $\sqrt{8 - 4x} = 4x + 4$

d $4x - 3\sqrt{6 + x} = 2x - 7$

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$ mits $B \geq 0$.

21 Los exact op.

a $\frac{-27}{x-4} = 9x$

c $1 + \frac{3}{x^4 + 1} = x^4$

b $\frac{5}{2 - 3^x} = \frac{6}{3^x}$

d $\frac{x}{x+5} = \frac{4}{x} - 3$

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$

mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

22 Gegeven is de vergelijking $4^x - 2^x - 12 = 0$.

a Leg uit waarom met de substitutie $2^x = t$ de vergelijking te herschrijven is tot de vergelijking $t^2 - t - 12 = 0$.

b Los de vergelijking $t^2 - t - 12 = 0$ op.

c Geef de oplossing van de vergelijking $4^x - 2^x - 12 = 0$.

d Los op dezelfde manier op $9^x - 3^{x+1} = 18$.

23 Los exact op door een substitutie te gebruiken.

a $\frac{2}{{}^3\log(x)} + 1 = {}^3\log(x)$

c $4(4^x + 1)^2 + 25 = 25(4^x + 1)$

b $\left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{2a-1}{a+1} + 2$

d $2 \cdot \frac{e^x - 1}{e^x - e} = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - e}\right)^2$

24 Gegeven is de functie $f(x) = 4^{2x} + 4^{x+2} + 4$.

a Los exact op $f(x) = 516$.

b Geef het bereik van f .

25 Los de ongelijkheden exact op.

a $\frac{x+1}{x-3} < 2$

b ${}^4\log(x^2 - 1) < 1\frac{1}{2}$

c $\frac{3}{\sqrt{2x+4}} > 1$

d ${}^2\log(x) + {}^2\log(x+2) \leq 3$

Limieten en asymptoten

Theorie

Grafieken van gebroken functies of quotiëntfuncties kunnen asymptoten hebben. Dat zijn lijnen waar de grafiek willekeurig dicht naar nadert.

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heeft een verticale asymptoot $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot $y = c$ als

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \text{ of } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c. \text{ Bij het berekenen van deze}$$

limieten kun je gebruikmaken van de standaardlimieten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad (n > 0).$$

Voorbeeld

Bereken exact $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 12x^2}{5x^2 + 4}$

Oplossing

Deel elke term in de teller en noemer door x^2 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 12x^2}{5x^2 + 4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x} - 12}{5 + \frac{4}{x^2}} = \\ &= \frac{0 - 12}{5 + 0} = \frac{-12}{5} = -2\frac{2}{5} \end{aligned}$$

26 Bereken exact.

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 3}{1 - x}$

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 6)(x^2 - 3)}{x^2(8 - 5x^2)}$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 1}{2x^3 + x^4}$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(3x^2 - 4x + 1)}{8x^3 + x\sqrt{x}}$

f $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2(8 - 2x)^2}{9x - 2x^4}$

27 Geplot is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2 - 81}{x^2 - 16}$

a Bereken exact de nulpunten van f .

b De grafiek heeft twee verticale asymptoten.

Stel van beide asymptoten een vergelijking op.

c Bereken exact $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot.

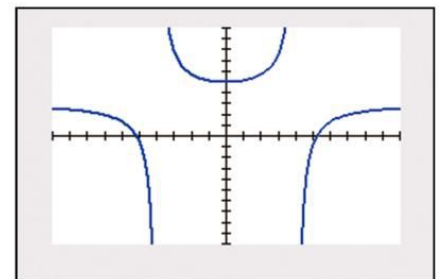
28 Gegeven is de functie $g(x) = \frac{2e^x - e^{-x}}{e^x - 1}$

a Bereken exact het nulpunt van g .

b Stel een vergelijking op van de verticale asymptoot.

c Bereken exact $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

d Welke conclusie kun je uit opdracht c trekken over de horizontale asymptoot van de grafiek?



Vaardigheden 11

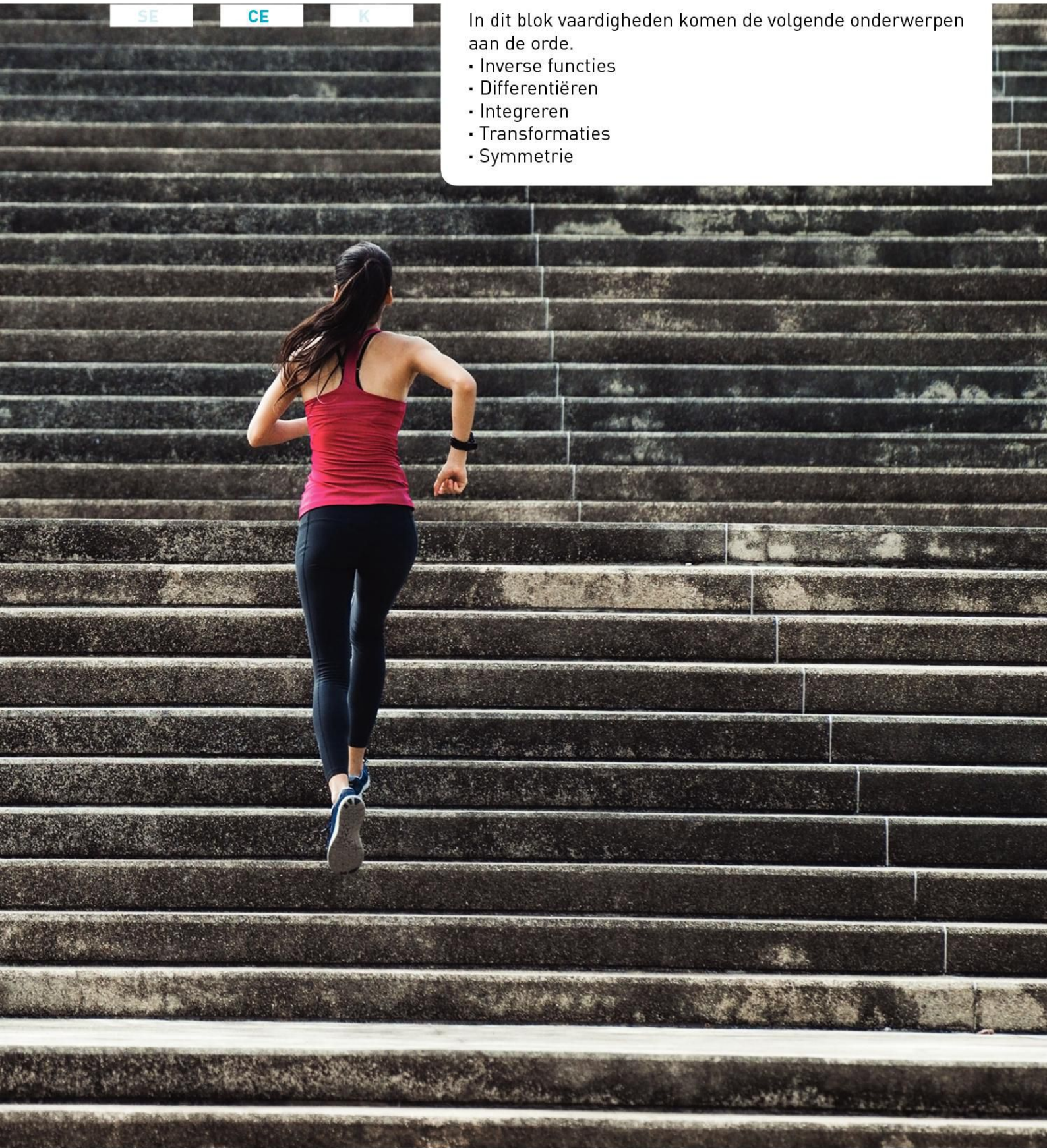
SE

CE

K

In dit blok vaardigheden komen de volgende onderwerpen aan de orde.

- Inverse functies
- Differentiëren
- Integreren
- Transformaties
- Symmetrie



Inverse functies

Theorie

Een functie f heeft een inverse functie f^{inv} als voor elke waarde a uit het domein van f en elke waarde b uit het domein van f^{inv} geldt: als $f(a) = b$ dan $f^{inv}(b) = a$.
 De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars beeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \sqrt[5]{3 - 2x}$.
 Stel het functievoorschrift $f^{inv}(x)$ op.

Oplossing

$$1 \quad f: y = \sqrt[5]{3 - 2x}$$

$$2 \quad f^{inv}: x = \sqrt[5]{3 - 2y}$$

$$3 \quad x = \sqrt[5]{3 - 2y}$$

$$x^5 = 3 - 2y$$

$$2y = 3 - x^5$$

$$y = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^5$$

$$4 \quad f^{inv}(x) = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^5$$

1 Stel het functievoorschrift op van de inverse functie.

a $f(x) = \frac{2}{3x - 6}$

d $f(x) = \frac{4}{\ln(2x + 4)} + 3$

b $f(x) = 2^{3x+2}$

e $f(x) = e^{2x+4}$

c $f(x) = {}^2\log(2 + 3x^3)$

f $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$

2 a Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

Waarom heeft deze functie geen inverse functie?

b Gegeven is de functie $g(x) = x^3 - x$.

Deze functie heeft extreme waarden bij $x = 1$ en $x = -1$.

Leg uit dat hieruit volgt dat de functie g geen inverse heeft.

Differentiëren

Theorie

Afgeleiden:

machtsfunctie	$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
---------------	--------------	---------------------------

sinusfunctie	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
--------------	------------------	-------------------

cosinusfunctie	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
----------------	------------------	--------------------

tangensfunctie	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
----------------	------------------	-------------------------------

exponentiële functie	$f(x) = g^x$	$f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$
----------------------	--------------	----------------------------

als $g = e$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
-------------	--------------	---------------

logaritmische functie	$f(x) = {}^g\log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$
-----------------------	----------------------	------------------------------------

als $g = e$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
-------------	-----------------	-----------------------

3 Differentieer.

a $f(x) = 8x^2 \cdot \sqrt[5]{x}$

d $f(x) = 8e^x + e$

b $f(x) = \frac{6}{x^3} + 5$

e $f(x) = 4 \cdot {}^2\log(x)$

c $f(x) = 5 - 3\cos(x)$

f $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0,3^x$

Theorie

Bij differentiëren maak je gebruik van de volgende regels.

somregel $s(x) = f(x) + g(x)$ $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

productregel $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$

quotiëntregel $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

kettingregel $k(x) = g(f(x))$ $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

4 Differentieer.

a $g(x) = x^2 \cdot \tan(3x)$

d $g(x) = x^2 \cdot {}^4\log(3x + 6)$

b $g(x) = x \ln(5x) + x$

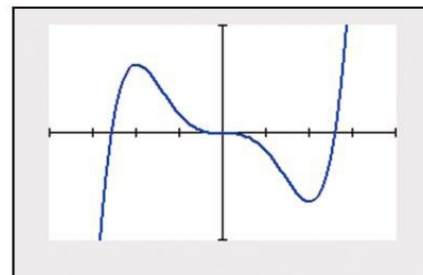
e $g(x) = \sqrt[3]{10x^2 + 7} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$

c $g(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 4}$

f $g(x) = \frac{\sin(4x)}{1 + \cos(4x)}$

5 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

- a** Bereken exact de nulpunten van f .
- b** Bereken exact de coördinaten van elk van de toppen.
- c** De grafiek heeft drie buigpunten. Een van de buigpunten heeft coördinaten $(\sqrt{2}, -28\sqrt{2})$. Toon dit op algebraïsche wijze aan.
- d** Bereken exact de coördinaten van de andere buigpunten.

**6** Gegeven is de functie $h(x) = (3x - 2x^2) \cdot e^{-x}$.

- a** Bereken exact de nulpunten van h .
- b** Bereken exact de extreme waarden van h .
- c** Bereken algebraïsch, in twee decimalen, de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van h .
- d** De raaklijn aan de grafiek van h in het punt $(0, 0)$ snijdt de horizontale as onder een hoek van α graden. Bereken α . Rond af op hele graden.

- 7** Op het interval $[-\pi, 3\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$.
- Bereken exact de nulpunten van f .
 - Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f met een horizontale raaklijn.
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(\pi, 0)$.

Integreren

Theorie

Primitieven:

machtsfunctie	$f(x) = x^a$ met $a \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c$
als $a = -1$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
sinusfunctie	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
cosinusfunctie	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$
exponentiële functie	$f(x) = g^x$	$F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$
als $g = e$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$

Voorbeeld

Geef een primitieve van $f(x) = 12(3x - 7)^5$.

Oplossing

Een primitieve is $F(x) = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} (3x - 7)^6$ ofwel $F(x) = \frac{2}{3} (3x - 7)^6$.

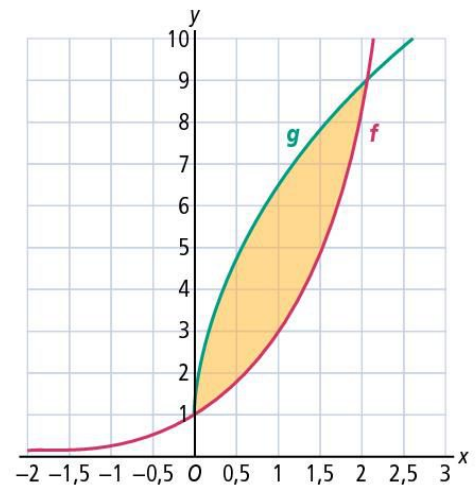
- 8** Geef een primitieve functie.

- $f(x) = \frac{-15}{5x+7}$
- $f(x) = 6e - 2e^{2x-13}$
- $f(x) = 5\sin\left(3\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$
- $f(x) = \frac{28}{(4x-8)^3}$
- $f(x) = 25 \cdot 2^{3x-1}$
- $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 3}{2x^2}$

- 9** Bereken exact.

- $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} 2\sin(3x) dx$
- $\int_1^e \left(\frac{4}{x} + x\right) dx$
- $\int_0^2 \sqrt[3]{13x+1} dx$
- $\int_1^e \left(\frac{6x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{x^2}\right) dx$

- 10** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = 4\sqrt{2x} + 1$.
 V is het vlakdeel ingesloten door de grafieken van f en g .
- Ga na dat de grafieken van f en g elkaar snijden in de punten $(0, 1)$ en $(2, 9)$.
 - Bereken exact de oppervlakte van V .
 - V wordt gewenteld om de x -as.
 Bereken algebraïsch de inhoud van het omwentelingslichaam. Rond af op twee decimalen.



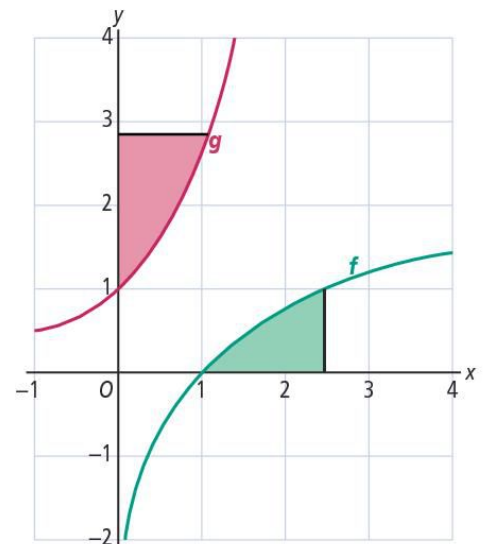
- 11** Bereken met je rekenmachine. Rond af op twee decimalen.

a $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \tan^3(x) dx$ **b** $\int_1^e \ln(x^2 + 3) dx$

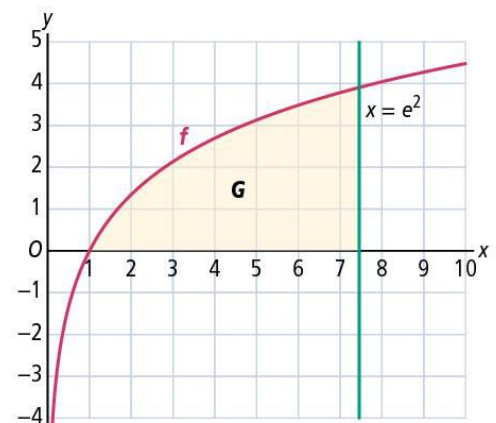
- 12** Van de functie $f(x) = \ln(x)$ heb je niet geleerd wat een primitieve is. Toch kun je de integraal $\int_1^e \ln(x) dx$ exact berekenen. Daar gaat deze opdracht over.

De integraal $\int_1^e \ln(x) dx$ is gelijk aan de oppervlakte van het groene vlakdeel in de figuur.

- Spiegel de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ in de lijn $y = x$. Geef het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.
- Het rode vlakdeel is het spiegelbeeld van het groene vlakdeel bij spiegelen in de lijn $y = x$. Schrijf de integraal op waarmee je de oppervlakte van het rode vlakdeel kunt berekenen.
- Bereken exact de oppervlakte van het rode vlakdeel.
- Hoe groot is dus de exacte waarde van $\int_1^e \ln(x) dx$?



- 13** Gegeven is de grafiek van $f(x) = 2 \ln(x)$. Het gebied G wordt begrensd door de x -as, de grafiek van f en de lijn $x = e^2$.
- Toon aan dat $F(x) = 2x \ln(x) - 2x$ een primitieve is van f .
 - Bereken exact de oppervlakte van G .
 - G wordt gewenteld om de y -as.
 Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.
 - De functie h wordt gedefinieerd door $h(p) = \int_1^p 2 \ln(x) dx$
 Bereken in twee decimalen de waarde van p waarvoor $h(p) = 100$.



Transformaties

Theorie

Bij een transformatie van de grafiek van een functie f is de beeldgrafiek de grafiek van een functie g . Je krijgt het functievoorschrift van g als volgt:

- bij een translatie van p naar rechts: $g(x) = f(x - p)$
- bij een translatie van p omhoog: $g(x) = f(x) + p$
- bij een spiegeling in de x -as: $g(x) = -f(x)$
- bij een spiegeling in de y -as: $g(x) = f(-x)$
- bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor a : $g(x) = a \cdot f(x)$
- bij een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor b : $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$

- 14** **a** Op de grafiek van $f(x) = x^3 - 2x$ worden enkele transformaties toegepast.
 Stel een functievoorschrift $g(x)$ op bij de beeldgrafiek.
 Translatie 3 naar links, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 2, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 4.
- b** Stel een functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek van de functie $f(x) = {}^2\log(x)$ na de volgende transformaties.
 Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 4, gevolgd door een translatie 3 naar links, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 2.
- 15** Op de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ worden de translaties 3 naar rechts en 2 omlaag toegepast. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g .
 Leg uit dat de grafiek van g puntsymmetrisch is in het punt $(3, -2)$.
- 16** Geef aan door welke transformaties de grafiek van de functie g kan ontstaan uit de grafiek van de functie f . Geef duidelijk aan in welke volgorde de transformaties moeten worden toegepast.
- a** $g(x) = 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$ en $f(x) = 3^x$
- b** $g(x) = 6 + {}^4\log(4 - x)$ en $f(x) = {}^4\log(x)$
- c** $g(x) = \frac{3}{12 + 4x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$
- d** $g(x) = -\sqrt{5x - 20} + 6$ en $f(x) = \sqrt{x}$

Symmetrie

- 17** Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \frac{3}{x^2 - 8x + 16}$
- De grafiek van f heeft één verticale asymptoot: de lijn $x = 4$.
Toon dat aan.
 - De grafiek van f wordt zo verschoven dat de asymptoot van de beeldgrafiek samenvalt met de y -as.
Stel het functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek.
 - Bewijs dat de grafiek van g symmetrisch is in de y -as.
 - Wat volgt hieruit voor de symmetrie van de grafiek van f ?

Theorie

De grafiek van een functie f is symmetrisch in de y -as als $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f .
Om te bewijzen dat de grafiek van een functie g symmetrisch is in de verticale lijn $x = p$ stel je het functievoorschrift op van de functie $f(x) = g(x + p)$ en toon je aan dat de grafiek van f symmetrisch is in de y -as.

De grafiek van een functie f is (punt)symmetrisch in $(0, 0)$ als $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f .

Om te bewijzen dat de grafiek van een functie g symmetrisch is in het punt (p, q) stel je het functievoorschrift op van de functie $f(x) = g(x + p) - q$ en toon je aan dat de grafiek van f (punt)symmetrisch is in $(0, 0)$.

Voorbeeld

Bewijs dat de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$ symmetrisch is in het punt $(1, 2)$.

Oplossing

$g(x) = f(x + 1) - 2$ geeft $g(x) = (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 - (x + 1) + 5 - 2$
ofwel $g(x) = x^3 - 4x$.

$$\begin{aligned} g(a) &= a^3 - 4a \\ g(-a) &= (-a)^3 - 4 \cdot -a = -a^3 + 4a \\ &= -(a^3 - 4a) = -g(a) \end{aligned}$$

De grafiek van g is symmetrisch in $(0, 0)$, dus de grafiek van f is symmetrisch in $(1, 2)$.

- 18** Gegeven is de functie $f(x) = (x + 2)^4 - (x + 2)^2 + 6$.
Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = -2$.

- 19** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6x - 3}{2x + 8}$
- Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f .
 - Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in het snijpunt van de asymptoten.

- 20** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 1}{x - 3}$
- Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f .
 - Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in het snijpunt van de asymptoten.