7 Meetkunde met coördinaten

Voorkennis Stelsels vergelijkingen

Bladzijde 93

1 **a** $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ 20x - 15y = 30 \end{cases}$ $-$

$-13y = -26$

$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 5x - 7y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5x - 7 \cdot 2 = 1 \\ 5x - 14 = 1 \\ 5x = 15 \\ x = 3 \end{array}$

De oplossing is $(x, y) = (3, 2)$.

b $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases}$ $+$

$16x = 40$

$\left.\begin{array}{l} x = 2\frac{1}{2} \\ 2x + 3y = 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2\frac{1}{2} + 3y = 15 \\ 5 + 3y = 15 \\ 3y = 10 \\ y = 3\frac{1}{3} \end{array}$

De oplossing is $(x, y) = (2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3})$.

c $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 15y = 48 \\ 6x + 8y = 20 \end{cases}$ $-$

$-23y = 28$

$\left.\begin{array}{l} y = -1\frac{5}{23} \\ 2x - 5y = 16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x - 5 \cdot -1\frac{5}{23} = 16 \\ 2x + 6\frac{2}{23} = 16 \\ 2x = 9\frac{21}{23} \\ x = 4\frac{22}{23} \end{array}$

De oplossing is $(x, y) = (4\frac{22}{23}, -1\frac{5}{23})$.

2 **a** $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 4y = 11 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ x - 4y = 11 \end{cases}$ $+$

$7x = 21$

$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 + 2y = 5 \\ 2y = -4 \\ y = -2 \end{array}$

Dus $P(3, -2)$.

b $\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 12x - 15y = 18 \\ 12x - 8y = 4 \end{cases}$ $-$

$-7y = 14$

$\left.\begin{array}{l} y = -2 \\ 4x - 5y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4x + 10 = 6 \\ 4x = -4 \\ x = -1 \end{array}$

Dus $Q(-1, -2)$.

7.1 Lijnen en hoeken

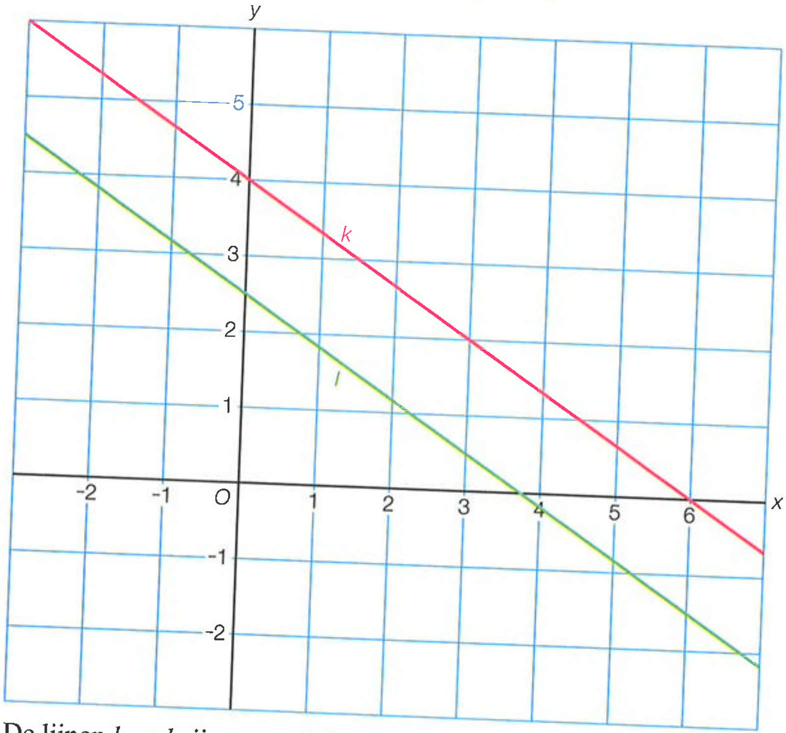
Bladzijde 94

1 **a** k:

x	0	6
y	4	0

l:

x	0	$3\frac{3}{4}$
y	$2\frac{1}{2}$	0



b De lijnen k en l zijn evenwijdig en vallen niet samen, dus hebben geen punt gemeenschappelijk.
Dus het stelsel heeft geen oplossing.

c k: $2x + 3y = 12$
$3y = -2x + 12$
$y = -\frac{2}{3}x + 4$

l: $4x + 6y = 15$
$6y = -4x + 15$
$y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{2}$

Je ziet $rc_k = rc_l$, dus $k \,//\, l$.

Bladzijde 95

2 **a** Voor $p = \frac{1}{3}$ en $q \neq -10$ zijn de lijnen evenwijdig.

b Voor $p \neq \frac{1}{3}$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ hebben de lijnen een snijpunt.

c $(2, -3)$ op k_p geeft $2p - 3(p + 1) = 5$
$2p - 3p - 3 = 5$
$-p = 8$
$p = -8$

$p = -8$ geeft l_q: $-9x - 11y = q$
$(2, -3)$ op l_q geeft $q = -9 \cdot 2 - 11 \cdot -3 = 15$.
Dus voor $p = -8$ en $q = 15$ snijden de lijnen elkaar in het punt $(2, -3)$.

3 **a** Samenvallen, dus $\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4} = \frac{5}{q}$.

$\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4}$ geeft $p(p-1) = 3(p+4)$

$p^2 - p = 3p + 12$

$p^2 - 4p - 12 = 0$

$(p+2)(p-6) = 0$

$p = -2 \vee p = 6$

$p = -2$ geeft $\frac{3}{-3} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{q}$ oftewel $-1 = \frac{5}{q}$, dus $q = -5$.

$p = 6$ geeft $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5}{q}$ oftewel $3q = 25$, dus $q = 8\frac{1}{3}$.

Dus voor $p = -2$ en $q = -5$ en voor $p = 6$ en $q = 8\frac{1}{3}$ vallen de lijnen samen.

b Voor $p = -2$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ en voor $p = 6$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ zijn de lijnen evenwijdig.

4 Samenvallen, dus $\frac{p}{q+3} = \frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$.

Uit $\frac{p}{q+3} = \frac{4}{1}$ volgt $p = 4(q+3)$ oftewel $p = 4q + 12$.

Uit $\frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$ volgt $q = 4(p-1)$ oftewel $q = 4p - 4$.

Substitutie van $p = 4q + 12$ in $q = 4p - 4$ geeft $q = 4(4q + 12) - 4$

$q = 16q + 48 - 4$

$-15q = 44$

$q = -2\frac{14}{15}$

$q = -2\frac{14}{15}$ geeft $p = 4 \cdot -2\frac{14}{15} + 12 = \frac{4}{15}$

Dus voor $p = \frac{4}{15}$ en $q = -2\frac{14}{15}$ vallen de lijnen samen.

5 **a** $y = 0$ geeft $2x = 18$

$x = 9$

Dus het snijpunt met de x-as is $(9, 0)$.

$x = 0$ geeft $3y = 18$

$y = 6$

Dus het snijpunt met de y-as is $(0, 6)$.

b Bij $2x + 3y = 18$ het linker- en rechterlid delen door 18 geeft $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$.

c In de noemer van de breuk $\frac{x}{9}$ staat de x-coördinaat van het snijpunt met de x-as.

In de noemer van de breuk $\frac{y}{6}$ staat de y-coördinaat van het snijpunt met de y-as.

6 **a** $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ y = 0\end{array}\right\}$ $\frac{x}{a} + 0 = 1$

$\frac{x}{a} = 1$

$x = a$

Dus het snijpunt met de x-as is $(a, 0)$.

b $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ x = 0\end{array}\right\}$ $0 + \frac{y}{b} = 1$

$\frac{y}{b} = 1$

$y = b$

Dus het snijpunt met de y-as is $(0, b)$.

Bladzijde 96

7 **a** l: $\frac{x}{p} + \frac{y}{5} = 1$

l: $5x + py = 5p$

b m: $\frac{x}{4} + \frac{y}{q} = 1$

m: $qx + 4y = 4q$

c n: $\frac{x}{3r} + \frac{y}{r} = 1$

n: $x + 3y = 3r$

8 **a** $k: \frac{x}{p} + \frac{y}{8} = 1$

$k: 8x + py = 8p$

b $\left.\begin{array}{l} k: 8x + py = 8p \\ \text{door } (1, 2) \end{array}\right\} 8 \cdot 1 + p \cdot 2 = 8p$

$8 + 2p = 8p$

$-6p = -8$

$p = 1\frac{1}{3}$

c $k: 8x + py = 8p$ en $l: 2x - y = -3$

$k \parallel l$ geeft $\frac{8}{2} = \frac{p}{-1} \neq \frac{8p}{-3}$

$\frac{8}{2} = \frac{p}{-1}$ geeft $p = -4$ en $p = -4$ geeft $\frac{8}{2} = \frac{-4}{-1} \neq \frac{-32}{-3}$.

Dus voor $p = -4$ is $k \parallel l$.

Bladzijde 97

9 **a** $k: \frac{x}{3} + \frac{y}{p} = 1$

$k: px + 3y = 3p$

$l: \frac{x}{2p} + \frac{y}{5} = 1$

$l: 5x + 2py = 10p$

b $\left.\begin{array}{l} k: px + 3y = 3p \\ \text{door } A(1, 2) \end{array}\right\} p \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3p$

$p + 6 = 3p$

$-2p = -6$

$p = 3$

$\left.\begin{array}{l} l: 5x + 2py = 10p \\ \text{door } A(1, 2) \end{array}\right\} 5 \cdot 1 + 2p \cdot 2 = 10p$

$5 + 4p = 10p$

$-6p = -5$

$p = \frac{5}{6}$

c $k: px + 3y = 3p$ en $m: 4x - y = -5$

$k \parallel m$ geeft $\frac{p}{4} = \frac{3}{-1} \neq \frac{3p}{-5}$

$\frac{p}{4} = \frac{3}{-1}$ geeft $p = -12$ en $p = -12$ geeft $\frac{-12}{4} = \frac{3}{-1} \neq \frac{-36}{-5}$.

Dus voor $p = -12$ is $k \parallel m$.

d $l: 5x + 2py = 10p$ en $n: 2x + 3y = 10$

$l \parallel n$ geeft $\frac{5}{2} = \frac{2p}{3} \neq \frac{10p}{10}$

$\frac{5}{4} = \frac{2p}{3}$ geeft $4p = 15$ oftewel $p = 3\frac{3}{4}$ en $p = 3\frac{3}{4}$ geeft $\frac{5}{2} = \frac{7\frac{1}{2}}{3} \neq \frac{37\frac{1}{2}}{10}$.

Dus voor $p = 3\frac{3}{4}$ is $l \parallel n$.

10 **a** $\left.\begin{array}{l} l_p: \frac{x}{p} + \frac{y}{p+2} = 1 \\ \text{door } (3, 4) \end{array}\right\} \frac{3}{p} + \frac{4}{p+2} = 1$

$3(p + 2) + 4p = p(p + 2)$

$3p + 6 + 4p = p^2 + 2p$

$p^2 - 5p - 6 = 0$

$(p + 1)(p - 6) = 0$

$p = -1 \vee p = 6$

vold. vold.

b $\frac{x}{p}+\frac{y}{p+2}=1$
$(p+2)x+py=p(p+2)$
$py=-(p+2)x+p(p+2)$
$y=-\frac{p+2}{p}\cdot x+p+2$
rc = 2 geeft $-\frac{p+2}{p}=2$
$p+2=-2p$
$3p=-2$
$p=-\frac{2}{3}$ vold.

11 **a** $\tan(\angle CAB)=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{1}=2$
$\angle CAB=63{,}4349...°$
Dus $\angle CAB\approx 63{,}435°$.
b De tangens van de hoek tussen l en de x-as is $\frac{1}{4}$.
Dit geeft dat de hoek gelijk is aan 14,0362...°.
c Dus de hoek tussen k en l is 63,4349...° + 14,0362...° ≈ 77,5°.

Bladzijde 99

12 Als de eenheden langs de assen verschillend zijn, dan maakt bijvoorbeeld de lijn $y=x$ geen hoek van 45° met de x-as, maar is elke hoek mogelijk.

13 **a** k: $y=3x+4$
$\tan(\alpha)=\text{rc}_k=3$ geeft $\alpha=71{,}56...°$
l: $y=2x-1$
$\tan(\beta)=\text{rc}_l=2$ geeft $\beta=63{,}43...°$
$\alpha-\beta=71{,}56...°-63{,}43...°\approx 8°$
Dus $\angle(k,l)\approx 8°$.
b m: $y=1\frac{1}{2}x+2$
$\tan(\alpha)=\text{rc}_m=1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha=56{,}30...°$
n: $y=-\frac{1}{2}x+3$
$\tan(\beta)=\text{rc}_n=-\frac{1}{2}$ geeft $\beta=-26{,}56...°$
$\alpha-\beta=56{,}30...°--26{,}56...°\approx 83°$
Dus $\angle(m,n)\approx 83°$.
c p: $y=3\frac{1}{2}x-1$
$\tan(\alpha)=\text{rc}_p=3\frac{1}{2}$ geeft $\alpha=74{,}05...°$
q: $y=-1\frac{1}{4}x+5$
$\tan(\beta)=\text{rc}_q=-1\frac{1}{4}$ geeft $\beta=-51{,}34...°$
$\alpha-\beta=74{,}05...°--51{,}34...°\approx 125°$
Dus $\angle(p,q)\approx 180°-125°=55°$.

14 **a** k: $3x-2y=5$
$-2y=-3x+5$
$y=1\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)=\text{rc}_k=1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha=56{,}30...°$
l: $4x-3y=6$
$-3y=-4x+6$
$y=1\frac{1}{3}x-2$
$\tan(\beta)=\text{rc}_l=1\frac{1}{3}$ geeft $\beta=53{,}13...°$
$\alpha-\beta=56{,}30...°-53{,}13...°\approx 3{,}2°$
Dus $\angle(k,l)\approx 3{,}2°$.

b m: $4x + y = 1$

$y = -4x + 1$

$\tan(\alpha) = rc_m = -4$ geeft $\alpha = -75{,}96...°$

n: $3x + 4y = 2$

$4y = -3x + 2$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

$\tan(\beta) = rc_n = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36{,}86...°$

$\beta - \alpha = -36{,}86...° - -75{,}96...° \approx 39{,}1°$

Dus $\angle(m, n) \approx 39{,}1°$.

c p: $5x + 3y = 4$

$3y = -5x + 4$

$y = -1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = rc_p = -1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -59{,}03...°$

q: $6x - 5y = 1$

$-5y = -6x + 1$

$y = 1\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$

$\tan(\beta) = rc_q = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50{,}19...°$

$\beta - \alpha = 50{,}19...° - -59{,}03...° \approx 109{,}2°$

Dus $\angle(p, q) \approx 180° - 109{,}2° = 70{,}8°$.

15 **a** k: $y = \frac{2}{3}x + 4$

$\tan(\alpha) = rc_k = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}69...°$

l: $6x - 5y = 3$

$-5y = -6x + 3$

$y = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

$\tan(\beta) = rc_l = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50{,}19...°$

$\beta - \alpha = 50{,}19...° - 33{,}69...° \approx 16{,}5°$

Dus $\angle(k, l) \approx 16{,}5°$.

b $rc_m = \frac{0 - 5}{4 - 0} = -1\frac{1}{4}$

$\tan(\alpha) = -1\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = -51{,}34...°$

$rc_n = \frac{1 - 0}{0 - -2} = \frac{1}{2}$

$\tan(\beta) = \frac{1}{2}$ geeft $\beta = 26{,}56...°$

$\beta - \alpha = 26{,}56...° - -51{,}34...° \approx 77{,}9°$

Dus $\angle(m, n) \approx 77{,}9°$.

c $rc_p = \frac{6 - 1}{5 - 2} = 1\frac{2}{3}$

$\tan(\alpha) = 1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 59{,}03...°$

$rc_q = \frac{-6 - 1}{2 - -3} = -1\frac{2}{5}$

$\tan(\beta) = -1\frac{2}{5}$ geeft $\beta = -54{,}46...°$

$\alpha - \beta = 59{,}03...° - -54{,}46...° \approx 113{,}5°$

Dus $\angle(p, q) \approx 180° - 113{,}5° = 66{,}5°$.

16 De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β.

$\tan(\alpha) = rc_k = 2$ geeft $\alpha = 63{,}43...°$

$\beta = \alpha + 20° = 63{,}43...° + 20° = 83{,}43...°$ en dit geeft $rc_l = \tan(83{,}43...°) \approx 8{,}69$.

$\beta = \alpha - 20° = 63{,}43...° - 20° = 43{,}43...°$ en dit geeft $rc_l = \tan(43{,}43...°) \approx 0{,}95$.

17 De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β.
k: $2x - 5y = 9$
$-5y = -2x + 9$
$y = \frac{2}{5}x - 1\frac{4}{5}$
$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{2}{5}$ geeft $\alpha = 21{,}80...°$
$\beta = 21{,}80...° + 60° = 81{,}80...°$ geeft $\text{rc}_l = \tan(81{,}80...°) = 6{,}94...$
$\beta = 21{,}80...° - 60° = -38{,}19...°$ geeft $\text{rc}_l = \tan(-38{,}19...°) = -0{,}78...$
$S(2, -1)$ op l geeft $2a - b = 3$, dus $b = 2a - 3$.
l: $ax + (2a - 3)y = 3$
$(2a - 3)y = -ax + 3$
$y = \frac{-a}{2a - 3}x + \frac{3}{2a - 3}$, dus $\text{rc}_l = \frac{-a}{2a - 3}$.

$\frac{-a}{2a - 3} = 6{,}94...$
$6{,}94...(2a - 3) = -a$
$13{,}88...a - 20{,}82... = -a$
$14{,}88...a = 20{,}82...$
$a = 1{,}39...$

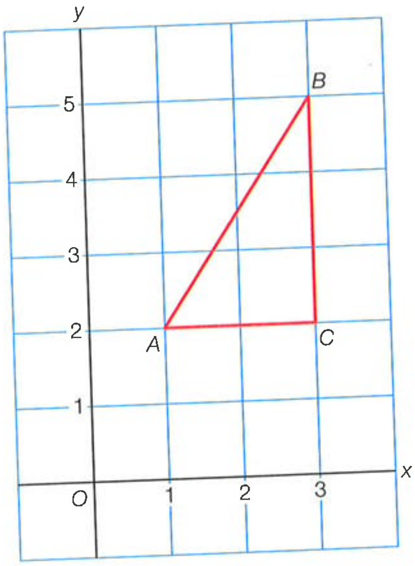
$\frac{-a}{2a - 3} = -0{,}78...$
$-0{,}78(2a - 3) = -a$
$-1{,}57...a + 2{,}36... = -a$
$-0{,}57...a = -2{,}36...$
$a = 4{,}11...$

$a = 1{,}39...$ geeft $b = 2 \cdot 1{,}39... - 3 \approx -0{,}20$
$a = 4{,}11...$ geeft $b = 2 \cdot 4{,}11... - 3 \approx 5{,}23$
Dus $a \approx 1{,}40$ en $b \approx -0{,}20$ of $a \approx 4{,}11$ en $b \approx 5{,}23$.

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

Bladzijde 101

18 **a** In $\triangle ABC$ geeft de stelling van Pythagoras
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB^2 = 2^2 + 3^2$
$AB^2 = 13$
$AB = \sqrt{13}$



b $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$
$M(2, 3\frac{1}{2})$

c $x_N = \frac{1}{2}(83 + 89) = 86$ en $y_N = \frac{1}{2}(61 + 69) = 65$, dus $N(86, 65)$.

Bladzijde 102

19 **a** $d(A, B) = \sqrt{(12 - 0)^2 + (7 - 12)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

b $M_1(\frac{1}{2}(0 + -2), \frac{1}{2}(-2 + 7)) = M_1(-1, 2\frac{1}{2})$

c $d(A, B) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
$d(A, M_2) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$

d $M_3(\frac{1}{2}(0 + p), \frac{1}{2}(p + 7)) = M_3(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$

e $d(A, B) = \sqrt{(p - 0)^2 + (7 - p)^2} = \sqrt{p^2 + 49 - 14p + p^2} = \sqrt{2p^2 - 14p + 49}$

20 **a** $M(\frac{1}{2}(p + p + 2), \frac{1}{2}(3 + 2p)) = M(p + 1, p + 1\frac{1}{2})$

b $d(A, B) = \sqrt{(p + 2 - p)^2 + (2p - 3)^2} = \sqrt{2^2 + 4p^2 - 12p + 9} = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$

c Voer in $y_1 = \sqrt{4x^2 - 12x + 13}$ en $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 3{,}79$
Dus $p \approx 3{,}79$.

21 **a** $x_M = 10$
$\frac{1}{2}(3 + p + 5) = 10$
$\frac{1}{2}p + 4 = 10$
$\frac{1}{2}p = 6$
$p = 12$
$y_M = \frac{1}{2}(4 + 14) = 9$

b $M(\frac{1}{2}(3 + p + 5), \frac{1}{2}(4 + p + 2))$
$\left.\begin{array}{l} M(\frac{1}{2}p + 4, \frac{1}{2}p + 3) \\ M \text{ op } k\text{: } y = 2x - 3 \end{array}\right\} 2(\frac{1}{2}p + 4) - 3 = \frac{1}{2}p + 3$
$p + 8 - 3 = \frac{1}{2}p + 3$
$\frac{1}{2}p = -2$
$p = -4$

c $d = \sqrt{(p + 5 - 3)^2 + (p + 2 - 4)^2} = \sqrt{(p + 2)^2 + (p - 2)^2} = \sqrt{p^2 + 4p + 4 + p^2 - 4p + 4} = \sqrt{2p^2 + 8}$
Dus $a = 2$ en $b = 8$.

22 **a** k: $2x - y = 2$
$-y = -2x + 2$
$y = 2x - 2$
$\text{rc}_k = 2$
l: $x + 2y = 3$
$2y = -x + 3$
$y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
$\text{rc}_l = -\frac{1}{2}$

b Er geldt $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$, dus $k \perp l$.

Bladzijde 104

23 In de theorie gaat het over de breuken $-\frac{a}{b}$ en $\frac{b}{a}$, dus $b \neq 0$ en $a \neq 0$.
Als in de kernzin
- $b = 0$, dan is k een verticale lijn en l een horizontale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar;
- $a = 0$, dan is k een horizontale lijn en l een verticale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar.

Dus in de kernzin zijn de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$ niet nodig.

24 **a** $\left.\begin{array}{l} k \perp l \text{, dus } k\text{: } 3x + 2y = c \\ \text{door } A(4, 1) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14$
Dus k: $3x + 2y = 14$.

b $\left.\begin{array}{l} m \perp n \text{, dus } m\text{: } 5x - 4y = c \\ \text{door } B(3, -1) \end{array}\right\} c = 5 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 19$
Dus m: $5x - 4y = 19$.

c $\left.\begin{array}{l} p \perp q \text{, dus } p\text{: } x + 2y = c \\ \text{door } C(-4, 3) \end{array}\right\} c = -4 + 2 \cdot 3 = 2$
$x + 2y = 2$
$2y = -x + 2$
$y = -\frac{1}{2}x + 1$
Dus p: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

25 **a** $\text{rc}_k = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$l \perp k$, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$

$\frac{1}{2} \cdot \text{rc}_l = -1$

$\text{rc}_l = -2$

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = -2x + b \\ \text{door } C(4, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 6 \\ -8 + b = 6 \\ b = 14 \end{array}$

Dus l: $y = -2x + 14$.

b $\text{rc}_m = \frac{-6-4}{2--3} = \frac{-10}{5} = -2$

$n \perp m$, dus $\text{rc}_m \cdot \text{rc}_n = -1$.

$-2 \cdot \text{rc}_n = -1$

$\text{rc}_n = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} n\text{: } y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } F(3, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 3 + b = 7 \\ 1\frac{1}{2} + b = 7 \\ b = 5\frac{1}{2} \end{array}$

$y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$

$2y = x + 11$

$-x + 2y = 11$

Dus n: $x - 2y = -11$.

26 **a** De lijn p gaat door A en staat loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} p\text{: } x - 2y = c \\ \text{door } A(6, 0) \end{array}\right\} c = 6 - 2 \cdot 0 = 6$

Dus p: $x - 2y = 6$.

k en p snijden geeft het punt A'.

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ +

$5x = 10$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ 2x + y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + y = 2 \\ 4 + y = 2 \\ y = -2 \end{array}$

Dus $A'(2, -2)$.

$d(A, k) = d(A, A') = \sqrt{(2-6)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b De lijn q gaat door B en staat loodrecht op l.

$\text{rc}_l \cdot \text{rc}_q = -1$ geeft $\frac{1}{2} \cdot \text{rc}_q = -1$, dus $\text{rc}_q = -2$.

$\left.\begin{array}{l} q\text{: } y = -2x + b \\ \text{door } B(3, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 0 \\ -6 + b = 0 \\ b = 6 \end{array}$

Dus q: $y = -2x + 6$.

l en q snijden geeft het punt B'.

$\frac{1}{2}x + 1 = -2x + 6$

$2\frac{1}{2}x = 5$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right\} y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$

Dus $B'(2, 2)$.

$d(B, l) = d(B, B') = \sqrt{(2-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

c De lijn r gaat door O en staat loodrecht op m.

$$\left.\begin{array}{l} r\colon x - 3y = c \\ \text{door } O(0, 0) \end{array}\right\} c = 0$$

Dus $r\colon x - 3y = 0$ oftewel $r\colon x = 3y$.

m en r snijden geeft het punt C.

Substitutie van $x = 3y$ in $3x + y = 10$ geeft $3 \cdot 3y + y = 10$

$$10y = 10$$

$$y = 1$$

$y = 1$ geeft $x = 3$

Dus $C(3, 1)$.

$d(O, m) = d(O, C) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Bladzijde 105

27 De lijn k door de punten $A(-5, -3)$ en $B(-2, 6)$ heeft richtingscoëfficiënt $\dfrac{6 - -3}{-2 - -5} = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 3x + b \\ \text{door } B(-2, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot -2 + b = 6 \\ -6 + b = 6 \\ b = 12 \end{array}$$

Dus $k\colon y = 3x + 12$.

De lijn l gaat door C en staat loodrecht op k.

$\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$ geeft $3 \cdot \text{rc}_l = -1$ dus $\text{rc}_l = -\frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } C(2, -12) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 2 + b = -12 \\ -\frac{2}{3} + b = -12 \\ b = -11\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $l\colon y = -\frac{1}{3}x - 11\frac{1}{3}$.

k en l snijden geeft het punt D.

$3x + 12 = -\frac{1}{3}x - 11\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{3}x = -23\frac{1}{3}$

$10x = -70$

$$\left.\begin{array}{l} x = -7 \\ y = 3x + 12 \end{array}\right\} y = 3 \cdot -7 + 12 = -9$$

Dus $D(-7, -9)$.

$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(-7-2)^2 + (-9 - -12)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

28 **a** De lijn k door $A(1, 0)$ en $B(7, 4)$ heeft richtingscoëfficiënt $\dfrac{4-0}{7-1} = \frac{2}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $k\colon y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

De lijn l gaat door C en staat loodrecht op k.

$\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$ geeft $\frac{2}{3} \cdot \text{rc}_l = -1$, dus $\text{rc}_l = -\frac{3}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -\frac{3}{2}x + b \\ \text{door } C(3\frac{1}{2}, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + b = 6 \\ -\frac{21}{4} + b = 6 \\ b = 11\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $l\colon y = -\frac{3}{2}x + 11\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft het punt D.
$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = -\frac{3}{2}x + 11\frac{1}{4}$
$8x - 8 = -18x + 135$
$26x = 143$

$\left.\begin{array}{l} x = 5\frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{array}\right\} y = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{2} - \frac{2}{3} = 3$

Dus $D(5\frac{1}{2}, 3)$.
$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

b $d(A, B) = \sqrt{(7-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot d(A, B) \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$

29 De lijnen k en l zijn evenwijdig, dus de afstand tussen k en l is gelijk aan de afstand van een punt van k tot l.
Neem het punt $A(1, 0)$ op k.
De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} m \perp k, \text{ dus } m\text{: } 3x + y = c \\ \text{door } A(1, 0) \end{array}\right\} c = 3 + 0 = 3$

Dus m: $3x + y = 3$.
l en m snijden geeft het punt B.

$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 9x + 3y = 9 \end{cases}$ +

$10x = 15$

$\left.\begin{array}{l} x = 1\frac{1}{2} \\ 3x + y = 3 \end{array}\right\} 3 \cdot 1\frac{1}{2} + y = 3$
$4\frac{1}{2} + y = 3$
$y = -1\frac{1}{2}$

Dus $B(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.
$d(k, l) = d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 1)^2 + (-1\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

30 **a** $m \perp k$: $ax + by = c$, dus m: $bx - ay = c$.

$\left.\begin{array}{l} m\text{: } bx - ay = c \\ \text{door } O(0, 0) \end{array}\right\} c = 0$

Dus m: $bx - ay = 0$
$-ay = -bx$
$y = \frac{b}{a}x$

b k: $ax + by = c$
$by = -ax + c$
$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$

m snijden met k geeft $\frac{b}{a}x = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$
$b^2x = -a^2x + ac$
$(a^2 + b^2)x = ac$
$x = \frac{ac}{a^2 + b^2}$

$x = \frac{ac}{a^2 + b^2}$ geeft $y = \frac{b}{a} \cdot \frac{ac}{a^2 + b^2} = \frac{bc}{a^2 + b^2}$
Dus $R\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}\right)$.
In l: $ax + by = ax_P + by_P$ is $c = ax_P + by_P$.
Gebruik het resultaat hierboven.
Zo krijg je $S\left(\frac{a(ax_P + by_P)}{a^2 + b^2}, \frac{b(ax_P + by_P)}{a^2 + b^2}\right) = S\left(\frac{a^2x_P + aby_P}{a^2 + b^2}, \frac{abx_P + b^2y_P}{a^2 + b^2}\right)$.

c $d(S, R) = \sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2}$ en dit geeft

$$d(S, R) = \sqrt{\left(\frac{a^2x_P + aby_P - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{abx_P + b^2y_P - bc}{a^2 + b^2}\right)^2}.$$

Herleiden geeft $d(S, R) = \sqrt{\dfrac{(a^2x_P + aby_P - ac)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \dfrac{(abx_P + b^2y_P - bc)^2}{(a^2 + b^2)^2}}$

$$= \frac{\sqrt{(a^2x_P + aby_P - ac)^2 + (abx_P + b^2y_P - bc)^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a(ax_P + by_P - c))^2 + (b(ax_P + by_P - c))^2}}{a^2 + b^2}$$

d $d(S, R) = \dfrac{\sqrt{(aE)^2 + (bE)^2}}{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{a^2E^2 + b^2E^2}}{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{(a^2 + b^2)E^2}}{a^2 + b^2}$

e $d(S, R) = \dfrac{\sqrt{(a^2 + b^2)E^2}}{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{E^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{\sqrt{E^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|E|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} d(P, k) = d(S, R) \\ d(S, R) = \dfrac{|E|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ E = ax_P + by_P - c \end{array}\right\} d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bladzijde 107

31 **a** k: $ax + by = c$ door $B(5, 0)$ geeft $5a = c$, dus k: $ax + by = 5a$ oftewel k: $ax + by - 5a = 0$.
Je krijgt één vergelijking met twee onbekenden.

b k: $x + by = c$ door $B(5, 0)$ geeft $5 = c$, dus k: $x + by = 5$ oftewel k: $x + by - 5 = 0$.
Je had dus ook uit kunnen gaan van k: $x + by = c$.
k: $ax + by = 1$ door $B(5, 0)$ geeft $5a = 1$ oftewel $a = \frac{1}{5}$, dus k: $\frac{1}{5}x + by = 1$ oftewel k: $\frac{1}{5}x + by - 1 = 0$.
Je had dus ook uit kunnen gaan van k: $ax + by = 1$.

32 $d(A, k) = \dfrac{|1 - 4 \cdot -1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|9|}{\sqrt{17}} = \dfrac{9}{\sqrt{17}} = \frac{9}{17}\sqrt{17}$

$d(B, k) = \dfrac{|2 - 4 \cdot 3\frac{1}{2} + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|-8|}{\sqrt{17}} = \dfrac{8}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}\sqrt{17}$

$d(C, k) = \dfrac{|6 - 4 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|-10|}{\sqrt{17}} = \dfrac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{17}\sqrt{17}$

Het punt B ligt het dichtst bij de lijn k.

33 **a** $d(A, k) = \dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|16|}{5} = \dfrac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

b l: $y = -2x + 5$ oftewel l: $2x + y - 5 = 0$ geeft $d(B, l) = \dfrac{|2 \cdot 4 + -1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{|2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

c m: $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{2} = 1$ oftewel m: $x + 3y - 6 = 0$ geeft $d(C, m) = \dfrac{|5 + 3 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \dfrac{|8|}{\sqrt{10}} = \dfrac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8}{10}\sqrt{10} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$.

34 **a** Stel k: $y = ax + b$.
k door $(0, 4)$ geeft $b = 4$, dus k: $y = ax + 4$ oftewel k: $ax - y + 4 = 0$.

$d(B, k) = 5$ geeft $\dfrac{|5\frac{1}{2}a - 5 + 4|}{\sqrt{a^2+1}} = 5$

$|5\frac{1}{2}a - 1| = 5\sqrt{a^2+1}$

$30\frac{1}{4}a^2 - 11a + 1 = 25(a^2 + 1)$

$30\frac{1}{4}a^2 - 11a + 1 = 25a^2 + 25$

$5\frac{1}{4}a^2 - 11a - 24 = 0$

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 5\frac{1}{4} \cdot -24 = 625$

$a = \dfrac{11 + 25}{10\frac{1}{2}} = 3\frac{3}{7} \vee a = \dfrac{11 - 25}{10\frac{1}{2}} = -1\frac{1}{3}$

Dus k_1: $y = 3\frac{3}{7}x + 4$ en k_2: $y = -1\frac{1}{3}x + 4$.

b Stel l: $y = ax + b$.
$(3, 0)$ op l geeft $3a + b = 0$, dus $b = -3a$.
k: $y = ax - 3a$ oftewel $ax - y - 3a = 0$

$d(D, l) = \sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|6a - 4 - 3a|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$

$|3a - 4| = \sqrt{5a^2 + 5}$

$9a^2 - 24a + 16 = 5a^2 + 5$

$4a^2 - 24a + 11 = 0$

$D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 400$

$a = \dfrac{24 + 20}{8} = 5\frac{1}{2} \vee a = \dfrac{24 - 20}{8} = \frac{1}{2}$

$a = 5\frac{1}{2}$ geeft $b = -16\frac{1}{2}$, dus l_1: $y = 5\frac{1}{2}x - 16\frac{1}{2}$.

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = -1\frac{1}{2}$, dus l_2: $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

35 $P(-2, 3)$ is een punt op k.

$d(P, l) = 3$ geeft $\dfrac{|5 \cdot -2 + 12 \cdot 3 - c|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 3$

$\dfrac{|26 - c|}{\sqrt{169}} = 3$

$\dfrac{|26 - c|}{13} = 3$

$|26 - c| = 39$

$26 - c = 39 \vee 26 - c = -39$

$c = -13 \vee c = 65$

Dus l_1: $5x + 12y = -13$ en l_2: $5x + 12y = 65$.

36 **a** Stel l: $3x + 4y = c$.
$P(4, 0)$ is een punt op k.

$d(P, l) = 2$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$

$\dfrac{|12 - c|}{\sqrt{25}} = 2$

$\dfrac{|12 - c|}{5} = 2$

$|12 - c| = 10$

$12 - c = 10 \vee 12 - c = -10$

$c = 2 \vee c = 22$

Dus l_1: $3x + 4y = 2$ en l_2: $3x + 4y = 22$.

b Stel $P(p, 0)$.

$d(P, k) = 3$ geeft $\dfrac{|3 \cdot p + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$

$\dfrac{|3p - 12|}{\sqrt{25}} = 3$

$\dfrac{|3p - 12|}{5} = 3$

$|3p - 12| = 15$

$3p - 12 = 15 \vee 3p - 12 = -15$

$3p = 27 \vee 3p = -3$

$p = 9 \vee p = -1$

Dus $P_1(9, 0)$ en $P_2(-1, 0)$.

37 Stel een punt op de parabool is $P(p, 2p^2)$.

$d(P, k) = \sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|p - 2 \cdot 2p^2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$

$\dfrac{|p - 4p^2 - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$|-4p^2 + p - 2| = 5$

$-4p^2 + p - 2 = 5 \quad \vee -4p^2 + p - 2 = -5$

$-4p^2 + p - 7 = 0 \quad \vee -4p^2 + p + 3 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot -7 = -111 \quad D = 1^2 - 4 \cdot -4 \cdot 3 = 49$

geen opl. $\quad p = \dfrac{-1 + 7}{-8} = -\frac{3}{4} \vee p = \dfrac{-1 - 7}{-8} = 1$

Dus $P_1(-\frac{3}{4}, 1\frac{1}{8})$ en $P_2(1, 2)$.

38 Stel k: $ax + by = 1$.

$d(A, k) = \sqrt{2} \wedge d(B, k) = 2\sqrt{2}$ geeft $\dfrac{|4a + 0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} \wedge \dfrac{|6a + 0 - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2}$

$|4a - 1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \wedge |6a - 1| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

Substitutie van $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ in $|6a - 1| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ geeft

$|6a - 1| = 2 \cdot |4a - 1|$

$|6a - 1| = |8a - 2|$

$6a - 1 = 8a - 2 \vee 6a - 1 = -8a + 2$

$-2a = -1 \vee 14a = 3$

$a = \frac{1}{2} \vee a = \frac{3}{14}$

Substitutie van $a = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ geeft $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} = |2 - 1|$

$\sqrt{\frac{1}{2} + 2b^2} = 1$

$\frac{1}{2} + 2b^2 = 1$

$2b^2 = \frac{1}{2}$

$b^2 = \frac{1}{4}$

$b = \frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$

Substitutie van $a = \frac{3}{14}$ in $\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |4a - 1|$ geeft $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{196} + b^2} = |\frac{6}{7} - 1|$

$\sqrt{\frac{9}{98} + 2b^2} = \frac{1}{7}$

$\frac{9}{98} + 2b^2 = \frac{1}{49}$

$2b^2 = -\frac{7}{98}$

$b^2 = -\frac{7}{196}$

geen opl.

Dus k_1: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1$ en k_2: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$ oftewel k_1: $x + y = 2$ en k_2: $x - y = 2$.

7.3 Cirkelvergelijkingen

Bladzijde 109

39 **a** Dit volgt rechtstreeks uit de formule van de afstand tussen twee punten.

b Als de afstand van $P(x, y)$ tot $M(1, 4)$ gelijk is aan 5, dan ligt P op de cirkel met middelpunt M en straal 5.

c Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10 is $(x-1)^2+(y-4)^2=10^2$, oftewel $(x-1)^2+(y-4)^2=100$.

d Middelpunt $(-2, 3)$ en straal $\sqrt{16}=4$.

Bladzijde 110

40 **a** c_1: $(x-2)^2+(y+5)^2=9$

b $\left.\begin{array}{l} c_2\text{: } (x-3)^2+(y-4)^2=r^2 \\ \text{door } O(0, 0) \end{array}\right\} r^2=(0-3)^2+(0-4)^2=9+16=25$

Dus c_2: $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

c $\left.\begin{array}{l} c_3\text{: } (x+3)^2+(y-5)^2=r^2 \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array}\right\} r^2=(-1+3)^2+(2-5)^2=4+9=13$

Dus c_3: $(x+3)^2+(y-5)^2=13$.

d c_4 raakt de x-as, dus $r=d(M_4, x\text{-as})=1$.

c_4: $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

e c_5 raakt de y-as, dus $r=d(M_5, y\text{-as})=4$.

c_5: $(x+4)^2+(y-2)^2=16$

41 De cirkels raken de x-as en de straal is 2, dus $y_M=-2$ of $y_M=2$.

M op k, dus $M_1(-6, -2)$ en $M_2(6, 2)$.

c_1: $(x+6)^2+(y+2)^2=4$ en c_2: $(x-6)^2+(y-2)^2=4$

Bladzijde 111

42 De cirkels raken de y-as en de straal is 10, dus $x_M=-10$ of $x_M=10$.

M op k, dus $M_1(-10, 6)$ en $M_2(10, -6)$.

c_1: $(x+10)^2+(y-6)^2=100$ en c_2: $(x-10)^2+(y+6)^2=100$

43 **a** Middelpunt A en c_1 raakt de x-as, dus $r=d(A, x\text{-as})=7$.

c_1: $(x-3)^2+(y-7)^2=49$

b Middelpunt B en c_2 door A, dus straal is $d(A, B)=\sqrt{(9-3)^2+(1-7)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$.

c_2: $(x-9)^2+(y-1)^2=72$

c Middellijn AB, dus middelpunt is het midden van AB, dus $M_3(6, 4)$.

De straal is $d(A, M_3)=\sqrt{(6-3)^2+(4-7)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$.

c_3: $(x-6)^2+(y-4)^2=18$

d De cirkels raken de y-as en de straal is 2, dus $x_M=-2$ of $x_M=2$.

$x_M=-2$ en M op k geeft $5\cdot -2+2y_M=12$

$$-10+2y_M=12$$
$$2y_M=22$$
$$y_M=11$$

Dus $M_4(-2, 11)$ en c_4: $(x+2)^2+(y-11)^2=4$.

$x_M=2$ en M op k geeft $5\cdot 2+2y_M=12$

$$10+2y_M=12$$
$$2y_M=2$$
$$y_M=1$$

Dus $M_5(2, 1)$ en c_5: $(x-2)^2+(y-1)^2=4$.

44 **a** Middellijn QR, dus middelpunt is het midden van QR, dus $M(1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$.
De straal is $d(Q, M) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - -2)^2 + (6\frac{1}{2} - 6)^2} = \sqrt{12\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{12\frac{1}{2}}$.
Dus c: $(x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 6\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$.
c door $P(-1, p)$ geeft $(-2\frac{1}{2})^2 + (p - 6\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$

$$6\tfrac{1}{4} + (p - 6\tfrac{1}{2})^2 = 12\tfrac{1}{2}$$
$$(p - 6\tfrac{1}{2})^2 = 6\tfrac{1}{4}$$
$$p - 6\tfrac{1}{2} = 2\tfrac{1}{2} \vee p - 6\tfrac{1}{2} = -2\tfrac{1}{2}$$
$$p = 9 \vee p = 4$$

b Middellijn PR, dus middelpunt is het midden van PR, dus $M(2, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$.
De straal is
$d(R, M) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (\frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2} - 7)^2} = \sqrt{9 + (\frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 12\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}}$.
Dus c: $(x - 2)^2 + (y - \frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$.
c door $Q(-2, 6)$ geeft $(-4)^2 + (2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$

$$16 + 6\tfrac{1}{4} - 2\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - 3\tfrac{1}{2}p + 21\tfrac{1}{4}$$
$$p = -1$$

45 c: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = 13$
$A(4, -1)$ op c geeft $(4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = 13$.
$B(-1, -2)$ op c geeft $(-1 - p)^2 + (-2 - q)^2 = 13$.
Hieruit volgt $(4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = (-1 - p)^2 + (-2 - q)^2$

$$16 - 8p + p^2 + 1 + 2q + q^2 = 1 + 2p + p^2 + 4 + 4q + q^2$$
$$-2q = 10p - 12$$
$$q = -5p + 6$$

$q = -5p + 6$ substitueren in $(4 - p)^2 + (-1 - q)^2 = 13$ geeft $(4 - p)^2 + (5p - 7)^2 = 13$

$$16 - 8p + p^2 + 25p^2 - 70p + 49 - 13 = 0$$
$$26p^2 - 78p + 52 = 0$$
$$p^2 - 3p + 2 = 0$$
$$(p - 1)(p - 2) = 0$$
$$p = 1 \vee p = 2$$

$p = 1$ geeft $q = -5 \cdot 1 + 6 = 1$ en $p = 2$ geeft $q = -5 \cdot 2 + 6 = -4$.
Dus $(p = 1 \wedge q = 1) \vee (p = 2 \wedge q = -4)$.

46 **a** Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k, dus $r = d(M, k)$.

b $d(M, k) = \dfrac{|3 - 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Dus c: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

47 **a** k: $y = x$ oftewel k: $x - y = 0$

$r = d(M_1, k) = \dfrac{|5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Dus c_1: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

b $r = d(M_2, m) = \dfrac{|-1 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{|5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Dus c_2: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

48 **a** $r = d(M_1, k) = \dfrac{|2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \dfrac{|13|}{\sqrt{13}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

Dus c_1: $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

b De cirkels raken de x-as en straal = 8, dus $y_M = -8$ of $y_M = 8$.

$y_M = -8$ en M op k geeft $2x_M + 3 \cdot -8 = 12$

$$\begin{aligned} 2x_M - 24 &= 12 \\ 2x_M &= 36 \\ x_M &= 18 \end{aligned}$$

Dus $M_2(18, -8)$ en c_2: $(x - 18)^2 + (y + 8)^2 = 64$.

$y_M = 8$ en M op k geeft $2x_M + 3 \cdot 8 = 12$

$$\begin{aligned} 2x_M + 24 &= 12 \\ 2x_M &= -12 \\ x_M &= -6 \end{aligned}$$

Dus $M_3(-6, 8)$ en c_3: $(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 64$.

c k snijden met de x-as geeft $A(6, 0)$.

k snijden met de y-as geeft $B(0, 4)$.

M_4 is het midden van AB, dus $M_4(3, 2)$.

$r = d(A, M_4) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

Dus c_4: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$.

49 **a** $r_1 = d(M, k) = \dfrac{|-1 - 2 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|-15|}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

Dus c_1: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (3\sqrt{5})^2$ oftewel c_1: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 45$.

k snijden met de x-as geeft $A(10, 0)$.

k raakt c_1, dus $MB \perp k$.

$$\left.\begin{array}{l} MB\text{: } 2x + y = c \\ \text{door } M(-1, 2) \end{array}\right\} c = 2 \cdot -1 + 2 = 0$$

Dus MB: $2x + y = 0$ oftewel MB: $y = -2x$.

MB snijden met k geeft $x - 2 \cdot -2x = 10$

$$\begin{aligned} x + 4x &= 10 \\ 5x &= 10 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -2x \end{array}\right\} y = -4$$

Dus $B(2, -4)$.

$r_2 = d(A, B) = \sqrt{(2 - 10)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$

Dus c_2: $(x - 10)^2 + y^2 = 80$.

b Het midden van AM is $M_3(4\frac{1}{2}, 1)$.

$r_3 = d(A, M_3) = \sqrt{(4\frac{1}{2} - 10)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{30\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$

Dus c_3: $(x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = 31\frac{1}{4}$.

$x = 2$ en $y = -4$ invullen in de vergelijking van c_3 geeft $(-2\frac{1}{2})^2 + (-5)^2 = 31\frac{1}{4}$

$$6\tfrac{1}{4} + 25 = 31\tfrac{1}{4}$$

Dit klopt, dus c_3 gaat door B.

50 Lijnen l evenwijdig met k op afstand 5 van k.
Stel l: $3x - 4y = c$.
$P(0, -2\frac{1}{2})$ is een punt op k.

$d(P, l) = 5$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot -2\frac{1}{2} - c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$

$$\frac{|10 - c|}{\sqrt{25}} = 5$$

$$\frac{|10 - c|}{5} = 5$$

$$|10 - c| = 25$$

$$10 - c = 25 \vee 10 - c = -25$$

$$c = -15 \vee c = 35$$

Dus l_1: $3x - 4y = -15$ en l_2: $3x - 4y = 35$.
De middelpunten van de cirkels zijn de snijpunten van l_1 en l_2 met de lijn m door A die loodrecht staat op k.

$\left.\begin{array}{l} m \perp k \text{, dus } m\text{: } 4x + 3y = c \\ \text{door } A(2, -1) \end{array}\right\} c = 4 \cdot 2 + 3 \cdot -1 = 5$

Dus m: $4x + 3y = 5$.

l_1 en m snijden geeft $\begin{cases} 3x - 4y = -15 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 9x - 12y = -45 \\ 16x + 12y = 20 \end{cases}$ +

$$25x = -25$$

$\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ 4x + 3y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot -1 + 3y = 5 \\ y = 3 \end{array}$

Dus snijpunt $(-1, 3)$.

l_2 en m snijden geeft $\begin{cases} 3x - 4y = 35 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 9x - 12y = 105 \\ 16x + 12y = 20 \end{cases}$ +

$$25x = 125$$

$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 5 + 3y = 5 \\ y = -5 \end{array}$

Dus snijpunt $(5, -5)$.
Dus de vergelijkingen van deze cirkels zijn $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

51 $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$
$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 36$
$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$

Bladzijde 113

52 **a** $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 4y + 4 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 4 = 0$
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
Dus van c_1 is het middelpunt $(-3, 2)$ en de straal 3.

b $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 + 10y + 31 = 0$
$(x - 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 + 31 = 0$
$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$
Dus van c_2 is het middelpunt $(4, -5)$ en de straal $\sqrt{10}$.

c $x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
$x^2 + 5x + y^2 + 3y + 3 = 0$
$(x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 3 = 0$
$(x + 2\frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 = 5\frac{1}{2}$
Dus van c_3 is het middelpunt $(-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$ en de straal $\sqrt{5\frac{1}{2}}$.

d $x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$
$x^2 - 7x + y^2 + 8y = 0$
$(x - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} + (y + 4)^2 - 16 = 0$
$(x - 3\frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 28\frac{1}{4}$
Dus van c_4 is het middelpunt $(3\frac{1}{2}, -4)$ en de straal $\sqrt{28\frac{1}{4}}$.

53 **a** $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 8y + 15 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 15 = 0$
$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(-3, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.

b $d(A, M) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$
A ligt binnen c want $d(A, M) < r$.

c $d(B, M) = \sqrt{(-3 - -3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4$
B ligt buiten c want $d(B, M) > r$.

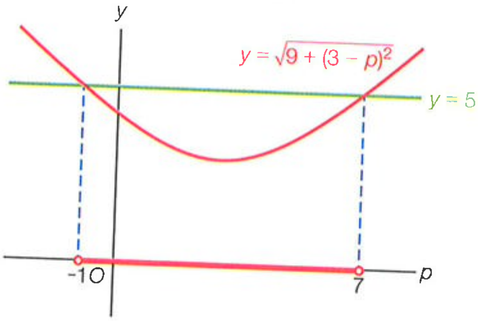
d $d(C, M) = \sqrt{(-3 - -2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$
C ligt op c want $d(C, M) = r$.

54 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(3, 4)$.
$d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
$d(A, M) < r$, dus A ligt binnen c_1.

b $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 2 = 0$
$(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 2 = 0$
$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 18$
Dus $r = \sqrt{18}$ en $M(4, 2)$.
$d(O, M) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
$d(O, M) > r$, dus O ligt buiten c_2.

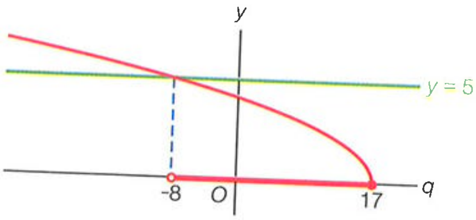
c $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$
$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 3 = 0$
$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$
Dus $r = \sqrt{10}$ en $M(-2, 3)$.
$d(B, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$
$d(B, M) = r$, dus B ligt op c_3.

55 **a** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$
$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 12 = 0$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(-2, 3)$.
$d(P, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - p)^2} = \sqrt{9 + (p - 3)^2}$
$d(P, M) = r$ geeft $\sqrt{9 + (3 - p)^2} = 5$
$\sqrt{9 + 9 - 6p + p^2} = 5$
$\sqrt{p^2 - 6p + 18} = 5$
$p^2 - 6p + 18 = 25$
$p^2 - 6p - 7 = 0$
$(p + 1)(p - 7) = 0$
$p = -1 \vee p = 7$



$d(P, M) < 5$ geeft $-1 < p < 7$
Dus voor $-1 < p < 7$ ligt P binnen c_1.

b $x^2 + y^2 - 8x - 2y + q = 0$
$x^2 - 8x + y^2 - 2y + q = 0$
$(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + q = 0$
$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 17 - q$
Dus $r = \sqrt{17 - q}$ en $M(4, 1)$.
$d(Q, M) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
$d(Q, M) = r$ geeft $5 = \sqrt{17 - q}$
$25 = 17 - q$
$q = -8$



$d(Q, M) > r$ oftewel $5 > \sqrt{17 - q}$ geeft $-8 < q \leq 17$.
Dus voor $-8 < q \leq 17$ ligt Q buiten c_2.

56 $x^2 + y^2 + ax + by = 71$
$x^2 + ax + y^2 + by = 71$
$(x + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2 = 71$
$(x + \frac{1}{2}a)^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71$

Van c is het middelpunt $M(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ en de straal $r = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71}$.

$M(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$ op k: $x + 2y = 1$ geeft $-\frac{1}{2}a - b = 1$ oftewel $b = -\frac{1}{2}a - 1$.

De straal is 10 geeft $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71} = 10$ oftewel $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71 = 100$.

$b = -\frac{1}{2}a - 1$ substitueren in $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 71 = 100$ geeft $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}a - 1)^2 + 71 = 100$

$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}a^2 + a + 1) + 71 = 100$
$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4} + 71 = 100$
$\frac{5}{16}a^2 + \frac{1}{4}a - 28\frac{3}{4} = 0$
$5a^2 + 4a - 460 = 0$
$D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot -460 = 9216$
$a = \frac{-4 + 96}{10} = 9\frac{1}{5} \vee a = \frac{-4 - 96}{10} = -10$

$a = 9\frac{1}{5}$ geeft $b = -\frac{1}{2} \cdot 9\frac{1}{5} - 1 = -5\frac{3}{5}$ en $a = -10$ geeft $b = -\frac{1}{2} \cdot -10 - 1 = 4$.
Dus $(a = 9\frac{1}{5} \wedge b = -5\frac{3}{5}) \vee (a = -10 \wedge b = 4)$.

7.4 Afstanden en raaklijnen bij cirkels

Bladzijde 115

57 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 18 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 18 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$
Dus $M(5, 3)$ en $r = \sqrt{16} = 4$.

b $d(P, M) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
$d(P, M) > r$, dus P ligt buiten c.
$d(Q, M) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (3 - -2)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$
$d(Q, M) > r$, dus Q ligt buiten c.

c $5 < \sqrt{26}$, dus P ligt dichter bij het middelpunt M dan Q.
Dus $d(P, c) < d(Q, c)$.

Bladzijde 116

58 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 3 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$
Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.
$d(A, M) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
$d(A, c) = r - d(A, M) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$

b $d(B, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
$d(B, c) = d(B, M) - r = 5 - \sqrt{10}$

c $d(C, M) = \sqrt{(3 - 9)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$d(C, c) = d(C, M) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

59 M op k, dus $2 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 3\frac{1}{2}$.
Dus de straal r_1 van c_1 is $3\frac{1}{2}$ en $M(2, 3\frac{1}{2})$.
N op k, dus $8 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 2$.
Dus de straal r_2 van c_2 is 2 en $N(8, 2)$.
$d(M, N) = \sqrt{(8-2)^2 + (2 - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{36 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{38\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{17}$
Dus $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 1\frac{1}{2}\sqrt{17} - 3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}\sqrt{17} - 5\frac{1}{2}$.

Bladzijde 117

60 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
Dus $M(3, 1)$ en $r_1 = 1$.
$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$
$x^2 - 12x + y^2 - 4y + 36 = 0$
$(x-6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 36 = 0$
$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$
Dus $N(6, 2)$ en $r_2 = 2$.
$d(M, N) = \sqrt{(6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
Dus $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{10} - 1 - 2 = \sqrt{10} - 3$.

b $d(M, l) = \dfrac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|5|}{\sqrt{25}} = \dfrac{5}{5} = 1$, dus $d(M, l) = r_1$, dus l raakt c_1.
$d(N, l) = \dfrac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|10|}{\sqrt{25}} = \dfrac{10}{5} = 2$, dus $d(N, l) = r_2$, dus l raakt c_2.

c $r_3 = d(P, l) = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|-14|}{\sqrt{25}} = \dfrac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$
Dus c_3: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = (2\frac{4}{5})^2$ oftewel c_3: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 7\frac{21}{25}$.

61 $d(M, N) = \sqrt{(9-4)^2 + (-10-2)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$
De straal van c_1 heeft lengte $d(M, k) = \dfrac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{|10|}{\sqrt{25}} = \dfrac{10}{5} = 2$.
Er geldt $d(M, N) = 2 + 2r + r$, dus $2 + 2r + r = 13$
$3r = 11$
$r = 3\frac{2}{3}$
Dus c_2: $(x-9)^2 + (y+10)^2 = (3\frac{2}{3})^2$ oftewel c_2: $(x-9)^2 + (y+10)^2 = 13\frac{4}{9}$.

62 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$
$x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$
$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$
$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$
Dus $r = 3$ en $M(-2, 1)$.
$d(M, k) = \dfrac{|2 \cdot -2 + 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{|-10|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$
Dus $d(k, c) = d(M, k) - r = 2\sqrt{5} - 3$.

63 $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$
$x^2 + 8x + y^2 + 2y - 8 = 0$
$(x + 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 - 8 = 0$
$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(-4, -1)$.
l: $y = -3x + 17$ oftewel l: $3x + y - 17 = 0$

$$d(M, l) = \frac{|3 \cdot -4 - 1 - 17|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-30|}{\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$$

$d(l, c) = d(M, l) - r = 3\sqrt{10} - 5$
Is $3\sqrt{10} - 5 < 5$ oftewel $\sqrt{90} < 10$?
Ja, dit klopt, dus $d(l, c) < r$.

Bladzijde 118

64 Stel $r_1 = x$, dan is $r_2 = 2x$, $r_3 = 3\frac{1}{2}x$ en $d(c_1, c_2) = 2r_3 - 2r_1 - 2r_2 = 7x - 2x - 4x = x$.
opp $c_1 = \pi x^2$
opp $c_2 = \pi(2x)^2 = 4\pi x^2$
opp $c_3 = \pi(3\frac{1}{2}x)^2 = 12\frac{1}{4}\pi x^2$
opp gekleurde gebied = opp c_3 − opp c_1 − opp c_2 = $12\frac{1}{4}\pi x^2 - \pi x^2 - 4\pi x^2 = 7\frac{1}{4}\pi x^2$
opp gekleurde gebied = π geeft $7\frac{1}{4}\pi x^2 = \pi$

$$x^2 = \frac{1}{7\frac{1}{4}} = \frac{4}{29}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{29}} = \frac{2}{29}\sqrt{29}$$

Dus $d(c_1, c_2) = \frac{2}{29}\sqrt{29}$.

65 **a** $\left.\begin{array}{l}(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10\\ A(5, 2)\end{array}\right\}$ $(5 - 2)^2 + (2 - 1)^2 = 10$
$3^2 + 1^2 = 10$
$10 = 10$
klopt

Dus A op c.

b $M(2, 1)$ en $A(5, 2)$, dus $\text{rc}_l = \frac{2 - 1}{5 - 2} = \frac{1}{3}$.

c k staat loodrecht op l geeft $\frac{1}{3} \cdot \text{rc}_k = -1$, dus $\text{rc}_k = -3$.
$\left.\begin{array}{l}k\text{: } y = -3x + b\\ \text{door } A(5, 2)\end{array}\right\}$ $-3 \cdot 5 + b = 2$
$-15 + b = 2$
$b = 17$

Dus k: $y = -3x + 17$.

Bladzijde 119

66 **a** Stel l: $y = ax + b$.
Lijn m door M en B heeft $\text{rc}_m = \frac{1 - -1}{3 - 2} = 2$, dus $a = \text{rc}_l = -\frac{1}{2}$.
$\left.\begin{array}{l}l\text{: } y = -\frac{1}{2}x + b\\ \text{door } B(2, -1)\end{array}\right\}$ $-\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1$
$-1 + b = -1$
$b = 0$

Dus l: $y = -\frac{1}{2}x$.

b De straal van c is $r = \sqrt{5}$.
n: $y = 2x$ oftewel n: $2x - y = 0$

$$d(M, n) = \frac{|2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$d(M, n) = r$, dus n: $y = 2x$ raakt aan c.

c De x-as snijden, dus $y = 0$ geeft $(x-3)^2 + (-1)^2 = 5$

$$(x-3)^2 + 1 = 5$$
$$(x-3)^2 = 4$$
$$x - 3 = 2 \vee x - 3 = -2$$
$$x = 5 \vee x = 1$$

Dus $x_C = 1$.

Stel p: $y = ax + b$.

Lijn m door M en C heeft $\text{rc}_m = \dfrac{1-0}{3-1} = \frac{1}{2}$, dus $a = \text{rc}_p = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} p\text{: } y = -2x + b \\ \text{door } C(1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus p: $y = -2x + 2$.

Bladzijde 120

67 **a** Substitutie van $x = 3$ in de vergelijking van c geeft $9 + y^2 - 36 + 11 = 0$

$$y^2 = 16$$
$$y = 4 \vee y = -4$$

$y_A > y_B$, dus $A(3, 4)$ en $B(3, -4)$.

$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

$x^2 - 12x + y^2 + 11 = 0$

$(x-6)^2 - 36 + y^2 + 11 = 0$

$(x-6)^2 + y^2 = 25$

Dus $M(6, 0)$ en $r = 5$.

Lijn m door M en A heeft $\text{rc}_m = \dfrac{0-4}{6-3} = -\frac{4}{3}$, dus $\text{rc}_k = \frac{3}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(3, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 3 + b = 4 \\ 2\frac{1}{4} + b = 4 \\ b = 1\frac{3}{4} \end{array}$$

Dus k: $y = \frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$.

Lijn n door M en B heeft $\text{rc}_n = \dfrac{0 - -4}{6-3} = \frac{4}{3}$, dus $\text{rc}_l = -\frac{3}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } B(3, -4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b = -4 \\ -2\frac{1}{4} + b = -4 \\ b = -1\frac{3}{4} \end{array}$$

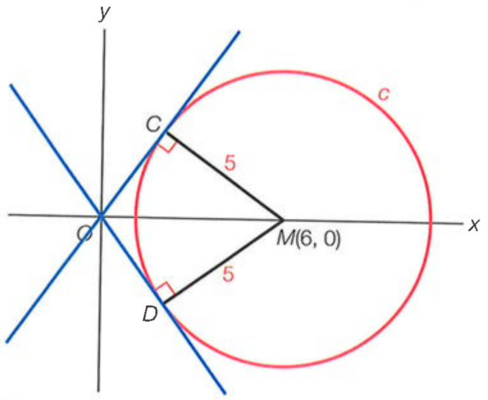
Dus l: $y = -\frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$.

b $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{3}{4}$ geeft $\alpha = 36{,}86...°$

$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36{,}86...°$

Dus $\angle(k, l) = 36{,}86...° - -36{,}86...° \approx 74°$.

c De raaklijnen door O raken c in de punten C en D.



In $\triangle OMC$ is $\angle C = 90°$, $OM = 6$ en $CM = 5$.

$\sin(\angle MOC) = \frac{5}{6}$ geeft $\angle MOC = 56{,}4...°$

$\angle DOC = 2 \cdot \angle MOC = 2 \cdot 56{,}4...° \approx 113°$

De hoek tussen de raaklijnen door O is ongeveer $180° - 113° = 67°$.

68 **a** $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 6y - 7 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + (y - 3)^2 - 9 - 7 = 0$
$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$
Dus $M(-3, 3)$ en $r = 5$.
$y = 0$ geeft $x^2 + 6x - 7 = 0$
$(x - 1)(x + 7) = 0$
$x = 1 \vee x = -7$
Dus $A(-7, 0)$ en $B(1, 0)$.
$\text{rc}_{MA} = \dfrac{3 - 0}{-3 - -7} = \frac{3}{4}$
$k \perp MA$, dus $\text{rc}_k = -\frac{4}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} k\colon y = -\frac{4}{3}x + b \\ \text{door } A(-7, 0) \end{array}\right\} -\frac{4}{3} \cdot -7 + b = 0$
$\frac{28}{3} + b = 0$
$b = -9\frac{1}{3}$
Dus $k\colon y = -1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3}$.
$\text{rc}_{MB} = \dfrac{0 - 3}{1 - -3} = -\frac{3}{4}$
$l \perp MB$, dus $\text{rc}_l = \frac{4}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} l\colon y = \frac{4}{3}x + b \\ \text{door } B(1, 0) \end{array}\right\} \frac{4}{3} \cdot 1 + b = 0$
$b = -1\frac{1}{3}$
Dus $l\colon y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

b $x = 0$ geeft $y^2 - 6y - 7 = 0$
$(y + 1)(y - 7) = 0$
$y = -1 \vee y = 7$
Dus $C(0, -1)$ en $D(0, 7)$.
$\text{rc}_{MC} = \dfrac{-1 - 3}{0 - -3} = -\frac{4}{3}$
$p \perp MC$, dus $\text{rc}_p = \frac{3}{4}$.
$p\colon y = \frac{3}{4}x + b$ door $C(0, -1)$, dus $p\colon y = \frac{3}{4}x - 1$.
$\text{rc}_{MD} = \dfrac{7 - 3}{0 - -3} = \frac{4}{3}$
$q \perp MD$, dus $\text{rc}_q = -\frac{3}{4}$.
$q\colon y = -\frac{3}{4}x + b$ door $D(0, 7)$, dus $q\colon y = -\frac{3}{4}x + 7$.

c $\text{rc}_k = -1\frac{1}{3}$ geeft richtingshoek $\alpha_k = -53{,}13...^\circ$
$\text{rc}_l = 1\frac{1}{3}$ geeft richtingshoek $\alpha_l = 53{,}13...^\circ$
$\alpha_l - \alpha_k = 53{,}13...^\circ - -53{,}13...^\circ = 106{,}26...^\circ$
$\angle(k, l) = 180^\circ - 106{,}26...^\circ = 73{,}73...^\circ$
$\text{rc}_p = \frac{3}{4}$ geeft richtingshoek $\alpha_p = 36{,}86...^\circ$
$\text{rc}_q = -\frac{3}{4}$ geeft richtingshoek $\alpha_q = -36{,}86...^\circ$
$\alpha_p - \alpha_q = 36{,}86...^\circ - -36{,}86...^\circ = 73{,}73...^\circ$
$\angle(p, q) = 73{,}73...^\circ$
Dus de hoek tussen k en l is gelijk aan de hoek tussen p en q.

69 **a** $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 12 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 12 = 0$
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 17$
Dus $M(2, -1)$ en $r = \sqrt{17}$.
$y = 0$ geeft $x^2 - 4x - 12 = 0$
$(x+2)(x-6) = 0$
$x = -2 \vee x = 6$
Dus $A(-2, 0)$ en $B(6, 0)$.
$rc_{MA} = \frac{-1-0}{2--2} = -\frac{1}{4}$
$k \perp MA$, dus $rc_k = 4$ en dit geeft richtingshoek $\alpha = 75{,}96...°$
$rc_{MC} = \frac{-1-3}{2-1} = -4$
$m \perp MC$, dus $rc_m = \frac{1}{4}$ en dit geeft richtingshoek $\beta = 14{,}03...°$
$\alpha - \beta = 75{,}96...° - 14{,}03...° \approx 62°$
Dus $\angle(k, m) \approx 62°$.

b $rc_{MA} = -\frac{1}{4}$ geeft $\angle BAM = 14{,}03...°$
Ook $\angle ABM = 14{,}03...°$.
Dus $\angle AMB = 180° - 2 \cdot 14{,}03...° \approx 152°$.

c $\left.\begin{array}{l} m\colon y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } C(1, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{3}{4} \end{array}$
Dus $m\colon y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$.
$rc_{MB} = \frac{0--1}{6-2} = \frac{1}{4}$
$l \perp MB$, dus $rc_l = -4$.
$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -4x + b \\ \text{door } B(6, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 6 + b = 0 \\ b = 24 \end{array}$
Dus $l\colon y = -4x + 24$.
l en m snijden geeft $-4x + 24 = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$
$-4\frac{1}{4}x = -21\frac{1}{4}$
$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = -4x + 24 \end{array}\right\} y = -4 \cdot 5 + 24 = 4$
Dus $D(5, 4)$.
$d(D, M) = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$
$d(D, c) = d(D, M) - r = \sqrt{34} - \sqrt{17}$

70 **a** De straal van c is $r = \sqrt{5}$.
k raakt c, dus geldt $d(M, k) = r = \sqrt{5}$.

b $k\colon y = \frac{1}{2}x + b$
$-\frac{1}{2}x + y - b = 0$
$x - 2y + 2b = 0$

c Het middelpunt van c is $M(2, 3)$.
$d(M, k) = \frac{|2 - 2 \cdot 3 + 2b|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2b - 4|}{\sqrt{5}}$
$d(M, k) = \sqrt{5}$ geeft $\frac{|2b-4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ en hieruit volgt $|2b - 4| = 5$.

d $|2b - 4| = 5$ geeft $2b - 4 = 5 \vee 2b - 4 = -5$
$2b = 9 \vee 2b = -1$
$b = 4\frac{1}{2} \vee b = -\frac{1}{2}$
Dus $k_1\colon y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ en $k_2\colon y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Bladzijde 122

71 **a** Van c is $M(0, 0)$ en $r = \sqrt{10}$.
Stel l: $y = 3x + b$ oftewel l: $3x - y + b = 0$.

$d(M, l) = r$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$|b| = 10$

$b = 10 \vee b = -10$

Dus l_1: $y = 3x + 10$ en l_2: $y = 3x - 10$.

b Stel m: $y = ax + b$.
$A(10, 0)$ op m geeft $10a + b = 0$, dus $b = -10a$.
m: $y = ax - 10a$ oftewel m: $ax - y - 10a = 0$

$d(M, m) = r$ geeft $\dfrac{|a \cdot 0 - 0 - 10a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|-10a| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$100a^2 = 10a^2 + 10$

$90a^2 = 10$

$a^2 = \frac{1}{9}$

$a = \frac{1}{3} \vee a = -\frac{1}{3}$

$a = \frac{1}{3}$ geeft $b = -10 \cdot \frac{1}{3} = -3\frac{1}{3}$, dus m_1: $y = \frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$.
$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -10 \cdot -\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$, dus m_2: $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

72 **a** Stel k: $y = ax + b$.
$O(0, 0)$ is het middelpunt van c.
Lijn p door O en A heeft $rc_p = \dfrac{0 - -1}{0 - -4} = \frac{1}{4}$, dus $a = rc_k = -4$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -4x + b \\ \text{door } A(-4, -1) \end{array}\right\}$ $-4 \cdot -4 + b = -1$

$16 + b = -1$

$b = -17$

Dus k: $y = -4x - 17$.

b Loodrecht op l: $4x - y = 3$, dus m: $x + 4y = c$.

$d(O, m) = r$ geeft $\dfrac{|0 + 4 \cdot 0 - c|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \sqrt{17}$

$\dfrac{|-c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$

$|-c| = 17$

$-c = 17 \vee -c = -17$

$c = -17 \vee c = 17$

Dus m_1: $x + 4y = -17$ en m_2: $x + 4y = 17$.

c Door $(0, 17)$, dus n: $y = ax + 17$ oftewel n: $ax - y + 17 = 0$.

$d(M, n) = r$ geeft $\dfrac{|a \cdot 0 - 0 + 17|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$

$\dfrac{17}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$

$\sqrt{17a^2 + 17} = 17$

$17a^2 + 17 = 289$

$17a^2 = 272$

$a^2 = 16$

$a = 4 \vee a = -4$

Dus n_1: $y = 4x + 17$ en n_2: $y = -4x + 17$.

73 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 19 = 0$
$(x-5)^2 - 25 + (y-2)^2 - 4 + 19 = 0$
$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 10$
$M(5, 2)$ is het middelpunt van c.
Stel k: $y = ax + b$.

Lijn n door M en A heeft $\text{rc}_n = \dfrac{2-5}{5-4} = -3$, dus $a = \text{rc}_k = \frac{1}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} k: y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 5) \end{array}\right\} \frac{1}{3} \cdot 4 + b = 5$
$1\frac{1}{3} + b = 5$
$b = 3\frac{2}{3}$

Dus k: $y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.

b Stel l: $y = 3x + b$ oftewel l: $3x - y + b = 0$.

$d(M, l) = r$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 5 - 2 + b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$
$|13 + b| = 10$
$13 + b = 10 \vee 13 + b = -10$
$b = -3 \vee b = -23$

Dus l_1: $y = 3x - 3$ en l_2: $y = 3x - 23$.

c Stel m: $y = ax + b$.
$B(9, 0)$ op m geeft $9a + b = 0$, dus $b = -9a$.
m: $y = ax - 9a$ oftewel m: $ax - y - 9a = 0$

$d(M, m) = r$ geeft $\dfrac{|5a - 2 - 9a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$
$|-4a - 2| = \sqrt{10a^2 + 10}$
$16a^2 + 16a + 4 = 10a^2 + 10$
$6a^2 + 16a - 6 = 0$
$3a^2 + 8a - 3 = 0$
$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$
$a = \dfrac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3} \vee a = \dfrac{-8 - 10}{6} = -3$

$a = \frac{1}{3}$ geeft $b = -9 \cdot \frac{1}{3} = -3$, dus m_1: $y = \frac{1}{3}x - 3$.
$a = -3$ geeft $b = -9 \cdot -3 = 27$, dus m_2: $y = -3x + 27$.

74 **a** $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$
$x^2 - 2x + y^2 - 4y - 12 = 0$
$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 12 = 0$
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$
$M(1, 2)$ is het middelpunt van c.
Stel k: $y = ax + b$.

Lijn p door M en A heeft $\text{rc}_p = \dfrac{2-1}{1--3} = \frac{1}{4}$, dus $a = \text{rc}_k = -4$.

$\left.\begin{array}{l} k: y = -4x + b \\ \text{door } A(-3, 1) \end{array}\right\} -4 \cdot -3 + b = 1$
$12 + b = 1$
$b = -11$

Dus k: $y = -4x - 11$.

b Loodrecht op m: $4x - y = 1$, dus l: $x + 4y = c$.

$d(M, l) = r$ geeft $\dfrac{|1 + 4 \cdot 2 - c|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$
$|9 - c| = 17$
$9 - c = 17 \vee 9 - c = -17$
$-c = 8 \vee -c = -26$
$c = -8 \vee c = 26$

Dus l_1: $x + 4y = -8$ en l_2: $x + 4y = 26$.

c Stel n: $y = ax + b$.
$B(6, -1)$ op n geeft $6a + b = -1$, dus $b = -6a - 1$.
n: $y = ax - 6a - 1$ oftewel n: $ax - y - 6a - 1 = 0$

$d(M, n) = r$ geeft $\dfrac{|a - 2 - 6a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{17}$

$|-5a - 3| = \sqrt{17a^2 + 17}$
$25a^2 + 30a + 9 = 17a^2 + 17$
$8a^2 + 30a - 8 = 0$
$4a^2 + 15a - 4 = 0$
$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot -4 = 289$
$a = \dfrac{-15 + 17}{8} = \frac{1}{4} \vee a = \dfrac{-15 - 17}{8} = -4$

$a = \frac{1}{4}$ geeft $b = -6 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -2\frac{1}{2}$, dus n_1: $y = \frac{1}{4}x - 2\frac{1}{2}$.
$a = -4$ geeft $b = -6 \cdot -4 - 1 = 23$, dus n_2: $y = -4x + 23$.

75 $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 9 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 + 4y + 9 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y + 2)^2 - 4 + 9 = 0$
$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 20$
Dus $M(5, -2)$ en $r = \sqrt{20}$.
Stel k: $y = ax + b$.
$P(-1, -4)$ op k geeft $-a + b = -4$, dus $b = a - 4$.
k: $y = ax + a - 4$ oftewel k: $ax - y + a - 4 = 0$

$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|5a + 2 + a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{20}$

$|6a - 2| = \sqrt{20a^2 + 20}$
$36a^2 - 24a + 4 = 20a^2 + 20$
$16a^2 - 24a - 16 = 0$
$2a^2 - 3a - 2 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$
$a = \dfrac{3 + 5}{4} = 2 \vee a = \dfrac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$

Dus $\text{rc}_{k_1} = -\frac{1}{2}$ en $\text{rc}_{k_2} = 2$.
$\text{rc}_{k_1} \cdot \text{rc}_{k_2} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, dus $k_1 \perp k_2$, dus $\angle APB = 90°$.
k_1 raakt c in A, dus $\angle PAM = 90°$ en $d(A, M) = d(M, k_1) = r = \sqrt{20}$.
k_2 raakt c in B, dus $\angle PBM = 90°$ en $d(B, M) = d(M, k_2) = r = \sqrt{20}$.

$$\left.\begin{array}{l} \angle APB = 90° \\ \angle PAM = 90° \\ \angle PBM = 90° \\ d(A, M) = d(B, M) \end{array}\right\} AMBP \text{ is een vierkant.}$$

Bladzijde 123

76 $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 55 = 0$
$x^2 - 14x + y^2 - 8y + 55 = 0$
$(x - 7)^2 - 49 + (y - 4)^2 - 16 + 55 = 0$
$(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(7, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.
Stel k: $y = ax + b$.
$P(2, -1)$ op k geeft $2a + b = -1$, dus $b = -2a - 1$.
k: $y = ax - 2a - 1$ oftewel k: $ax - y - 2a - 1 = 0$

$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|7a - 4 - 2a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|5a - 5| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$25a^2 - 50a + 25 = 10a^2 + 10$

$15a^2 - 50a + 15 = 0$

$3a^2 - 10a + 3 = 0$

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$

$a = \dfrac{10 + 8}{6} = 3 \vee a = \dfrac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$

$a = 3$ geeft $b = -2 \cdot 3 - 1 = -7$, dus $k_1: y = 3x - 7$.

$a = \frac{1}{3}$ geeft $b = -2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -1\frac{2}{3}$, dus $k_2: y = \frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$.

$AM \perp k_1$, dus $rc_{AM} = -\frac{1}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} AM: y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } M(7, 4) \end{array}\right\}$ $-\frac{1}{3} \cdot 7 + b = 4$

$-2\frac{1}{3} + b = 4$

$b = 6\frac{1}{3}$

Dus $AM: y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$.

k_1 snijden met AM geeft

$3x - 7 = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{3}x = 13\frac{1}{3}$

$x = 4$

$x = 4$ geeft $y = 3 \cdot 4 - 7 = 5$

Dus $A(4, 5)$.

$BM \perp k_2$, dus $rc_{BM} = -3$.

$\left.\begin{array}{l} BM: y = -3x + b \\ \text{door } M(7, 4) \end{array}\right\}$ $-3 \cdot 7 + b = 4$

$-21 + b = 4$

$b = 25$

Dus $BM: y = -3x + 25$.

k_2 snijden met BM geeft

$\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} = -3x + 25$

$3\frac{1}{3}x = 26\frac{2}{3}$

$x = 8$

$x = 8$ geeft $y = -3 \cdot 8 + 25 = 1$

Dus $B(8, 1)$.

N is het midden van AB, dus $N(6, 3)$.

De straal van c_2 is $r_2 = d(A, N) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Dus $d(S, N) = 2\sqrt{2}$.

$d(P, N) = \sqrt{(6 - 2)^2 + (3 - -1)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

$d(P, N) = 2 \cdot d(S, N)$, dus S is het midden van NP.

Diagnostische toets

Bladzijde 126

1 **a** Snijden, dus $\dfrac{p}{-4} \neq \dfrac{-3}{p}$

$p^2 \neq 12$

$p \neq \sqrt{12} \wedge p \neq -\sqrt{12}$

$p \neq 2\sqrt{3} \wedge p \neq -2\sqrt{3}$

Dus voor $p \neq 2\sqrt{3} \wedge p \neq -2\sqrt{3}$ en q elk getal van $\mathbb{R}$ hebben de lijnen een snijpunt.

b Evenwijdig, dus $\dfrac{p}{-4} = \dfrac{-3}{p} \neq \dfrac{q}{8}$.

Uit $\dfrac{p}{-4} = \dfrac{-3}{p}$ volgt $p = 2\sqrt{3} \vee p = -2\sqrt{3}$.

$p = 2\sqrt{3}$ geeft $\dfrac{2\sqrt{3}}{-4} = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} \neq \dfrac{q}{8}$ oftewel $\dfrac{\sqrt{3}}{-2} \neq \dfrac{q}{8}$, dus $q \neq \dfrac{8\sqrt{3}}{-2} = -4\sqrt{3}$.

$p = -2\sqrt{3}$ geeft $\dfrac{-2\sqrt{3}}{-4} = \dfrac{-3}{-2\sqrt{3}} \neq \dfrac{q}{8}$ oftewel $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq \dfrac{q}{8}$, dus $q \neq \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Dus voor $p = 2\sqrt{3} \wedge q \neq -4\sqrt{3}$ en voor $p = -2\sqrt{3} \wedge q \neq 4\sqrt{3}$ zijn de lijnen evenwijdig.

c $(2, 8)$ op $k_{p,q}$ geeft $2p - 3 \cdot 8 = q$ oftewel $q = 2p - 24$.
$(2, 8)$ op l_p geeft $-4 \cdot 2 + 8p = 8$
$$-8 + 8p = 8$$
$$8p = 16$$
$$p = 2$$
$p = 2$ geeft $q = 2 \cdot 2 - 24 = -20$
Dus voor $p = 2$ en $q = -20$ snijden de lijnen elkaar in het punt $(2, 8)$.

2 **a** $\left.\begin{array}{l} k\colon \frac{x}{2p} + \frac{y}{p+1} = 1 \\ A(8, -3) \text{ op } k \end{array}\right\} \frac{8}{2p} + \frac{-3}{p+1} = 1$
$$8(p + 1) - 3 \cdot 2p = 2p(p + 1)$$
$$8p + 8 - 6p = 2p^2 + 2p$$
$$2p^2 = 8$$
$$p^2 = 4$$
$$p = 2 \vee p = -2$$
vold. vold.

b $\text{rc}_l = \frac{2p + 3 - 0}{0 - 5} = \frac{2p + 3}{-5}$

Van de lijn door $(2, 0)$ en $(0, 3)$ is $\text{rc} = \frac{3 - 0}{0 - 2} = \frac{3}{-2} = -1\frac{1}{2}$.

De lijnen zijn evenwijdig, dus $\frac{2p + 3}{-5} = -1\frac{1}{2}$
$$2p + 3 = 7\tfrac{1}{2}$$
$$2p = 4\tfrac{1}{2}$$
$$p = 2\tfrac{1}{4}$$

c $\text{rc}_k = \frac{p + 1 - 0}{0 - 2p} = \frac{p + 1}{-2p}$

k en l zijn evenwijdig, dus $\frac{p + 1}{-2p} = \frac{2p + 3}{-5}$
$$-2p(2p + 3) = -5(p + 1)$$
$$-4p^2 - 6p = -5p - 5$$
$$4p^2 + p - 5 = 0$$
$$D = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5 = 81$$
$$p = \frac{-1 + 9}{8} = 1 \vee p = \frac{-1 - 9}{8} = -1\tfrac{1}{4}$$
vold. vold.

3 **a** $k\colon y = 4x + 2$
$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 4$ geeft $\alpha = 75{,}96...°$
$l\colon y = -\frac{1}{2}x + 6$
$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26{,}56...°$
$\alpha - \beta = 75{,}96...° - -26{,}56...° \approx 102{,}5°$
Dus $\angle(k, l) \approx 180° - 102{,}5° = 77{,}5°$.

b $\text{rc}_m = \frac{0 - -2}{3 - 0} = \frac{2}{3}$
$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}69...°$
$\text{rc}_n = \frac{0 - 5}{2 - 0} = -2\frac{1}{2}$
$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -68{,}19...°$
$\alpha - \beta = 33{,}69...° - -68{,}19...° \approx 101{,}9°$
Dus $\angle(m, n) \approx 180° - 101{,}9° = 78{,}1°$.

c $p\colon 2x + 3y = 6$ geeft $3y = -2x + 6$
$$y = -\tfrac{2}{3}x + 2$$
$\tan(\alpha) = \text{rc}_p = -\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -33{,}69...°$
$q\colon y = 8x - 6$
$\tan(\beta) = \text{rc}_q = 8$ geeft $\beta = 82{,}87...°$
$\beta - \alpha = 82{,}87...° - -33{,}69...° \approx 116{,}6°$
Dus $\angle(p, q) \approx 180° - 116{,}6° = 63{,}4°$.

4 **a** $d(A, B) = \sqrt{(3-2p)^2 + (p+1-0)^2} = \sqrt{9 - 12p + 4p^2 + p^2 + 2p + 1} = \sqrt{5p^2 - 10p + 10}$

b $d(A, B) = 5$ geeft $\sqrt{5p^2 - 10p + 10} = 5$

$$5p^2 - 10p + 10 = 25$$
$$5p^2 - 10p - 15 = 0$$
$$p^2 - 2p - 3 = 0$$
$$(p+1)(p-3) = 0$$
$$p = -1 \vee p = 3$$

c Het midden van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(2p+3), \frac{1}{2}(0+p+1)) = M(p+1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+\frac{1}{2})$.

M op $x + y = 6$ geeft $p + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} = 6$

$$1\tfrac{1}{2}p = 4$$
$$p = 2\tfrac{2}{3}$$

5 **a** $\left.\begin{array}{l} k \perp l, \text{ dus } 2x - 3y = c \\ \text{door } A(2, -4) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 2 - 3 \cdot -4 = 16$

Dus k: $2x - 3y = 16$.

b $m \perp n$, dus $\text{rc}_m = 3$.

$\left.\begin{array}{l} m: y = 3x + b \\ \text{door } B(2, 3) \end{array}\right\} 3 \cdot 2 + b = 3$

$$6 + b = 3$$
$$b = -3$$

Dus m: $y = 3x - 3$ oftewel m: $3x - y = 3$.

6 **a** k: $y = \frac{1}{3}x + 10$ oftewel k: $\frac{1}{3}x - y + 10 = 0$ oftewel k: $x - 3y + 30 = 0$

$$d(A, k) = \frac{|2 - 3 \cdot -6 + 30|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{50}{\sqrt{10}} = 5\sqrt{10}$$

b Stel l: $y = ax + b$.

l door $B(4, 0)$ geeft $4a + b = 0$, dus $b = -4a$.

l: $y = ax - 4a$ oftewel l: $ax - y - 4a = 0$

$d(C, l) = \sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|a - 1 - 4a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$$|-3a - 1| = \sqrt{5a^2 + 5}$$
$$9a^2 + 6a + 1 = 5a^2 + 5$$
$$4a^2 + 6a - 4 = 0$$
$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$
$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$
$$a = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \vee a = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$, dus l_1: $y = \frac{1}{2}x - 2$.

$a = -2$ geeft $b = -4 \cdot -2 = 8$, dus l_2: $y = -2x + 8$.

7 **a** Stel l: $x + 2y = c$.

$A(6, 0)$ is een punt op k.

$d(A, l) = 2\sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|6 + 2 \cdot 0 - c|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2\sqrt{5}$

$$\frac{|6 - c|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$
$$|6 - c| = 10$$
$$6 - c = 10 \vee 6 - c = -10$$
$$c = -4 \vee c = 16$$

Dus l_1: $x + 2y = -4$ en l_2: $x + 2y = 16$.

b Stel $P(p, p)$.

$d(P, k) = \sqrt{5}$ geeft $\frac{|p + 2 \cdot p - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$

$\frac{|3p - 6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$|3p - 6| = 5$

$3p - 6 = 5 \vee 3p - 6 = -5$

$3p = 11 \vee 3p = 1$

$p = 3\frac{2}{3} \vee p = \frac{1}{3}$

Dus $P_1(3\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3})$ en $P_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Bladzijde 127

8 **a** De straal is gelijk aan $d(A, B)$, dus $r = \sqrt{(8-2)^2 + (2 - -3)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$

Dus c_1: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 61$.

b De cirkel heeft middelpunt B en raakt de y-as, dus $r = d(B, y\text{-as}) = 8$.

Dus c_2: $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 64$.

c Het middelpunt M van c_3 is het midden van het lijnstuk AB, dus

$M(\frac{1}{2}(2 + 8), \frac{1}{2}(-3 + 2)) = M(5, -\frac{1}{2})$.

De straal van c_3 is de helft van $d(A, B)$, dus $r = \frac{1}{2}\sqrt{61}$. Dit geeft $r^2 = \frac{1}{4} \cdot 61 = 15\frac{1}{4}$.

Dus c_3: $(x - 5)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 15\frac{1}{4}$.

d De cirkel raakt de x-as in $C(5, 0)$, dus $x_M = 5$ en $M(5, r)$.

$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 6 \\ \text{door } M(5, r) \end{array}\right\} r = 3 \cdot 5 - 6 = 9$

Dus c_4: $(x - 5)^2 + (y - 9)^2 = 81$.

9 $M(7, 8)$ geeft c_1: $(x - 7)^2 + (y - 8)^2 = r_1^2$

$r_1 = d(M, k) = \frac{|2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{13}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$

Dus c_1: $(x - 7)^2 + (y - 8)^2 = (2\sqrt{13})^2$ oftewel c_1: $(x - 7)^2 + (y - 8)^2 = 52$.

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 3x - 2y = c \\ \text{door } M(7, 8) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5$

Dus l: $3x - 2y = 5$.

k en l snijden geeft het punt A.

$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 6y = 24 \\ 9x - 6y = 15 \end{cases}$ +

$13x = 39$

$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ 2x + 3y = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + 3y = 12 \\ 6 + 3y = 12 \\ 3y = 6 \\ y = 2 \end{array}$

Dus $A(3, 2)$.

Het midden van het lijnstuk AM is $N(5, 5)$ geeft c_2: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = r_2^2$.

$r_2 = d(A, N) = \sqrt{(5-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

Dus c_2: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 13$.

10 $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$
$x^2 - 16x + y^2 + 8y - 1 = 0$
$(x - 8)^2 - 64 + (y + 4)^2 - 16 - 1 = 0$
$(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 81$
Dus $M(8, -4)$ en $r = 9$.
$d(A, M) = \sqrt{(8 - 3)^2 + (-4 - -4)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5 < r$
Dus A ligt binnen c.
$d(B, M) = \sqrt{(8 - 2)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} > r$
Dus B ligt buiten c.
$d(C, M) = \sqrt{(8 - 8)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{0 + 81} = 9 = r$
Dus C ligt op c.

11 $d(M, k) = \dfrac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 - 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|25|}{\sqrt{25}} = \dfrac{25}{5} = 5$
Uit $d(k, c_2) = d(k, M) - r_2$, $d(k, c_2) = 3$ en $d(k, M) = 5$ volgt $r_2 = 2$.
Dus c_2: $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 4$.
$x^2 + y^2 + 10y = 0$
$x^2 + (y + 5)^2 - 25 = 0$
$x^2 + (y + 5)^2 = 25$
Van c_1 is het middelpunt $N(0, -5)$ en de straal $r_1 = 5$.
$d(M, N) = \sqrt{(0 - 5)^2 + (-5 - 7)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$
$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 13 - 5 - 2 = 6$

12 **a** $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0 \\ x = 4 \end{array}\right\}$ $4^2 + y^2 - 4 \cdot 4 + 6y = 0$
$16 + y^2 - 16 + 6y = 0$
$y^2 + 6y = 0$
$y(y + 6) = 0$
$y = 0 \vee y = -6$
$y_A > y_B$, dus $A(4, 0)$ en $B(4, -6)$.
$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$
$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 = 0$
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$
Dus $M(2, -3)$ en $r = \sqrt{13}$.
$\text{rc}_{MA} = \dfrac{0 - -3}{4 - 2} = \frac{3}{2}$, dus $\text{rc}_k = -\frac{2}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 0) \end{array}\right\}$ $-\frac{2}{3} \cdot 4 + b = 0$
$-2\frac{2}{3} + b = 0$
$b = 2\frac{2}{3}$
Dus k: $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$.
$\text{rc}_{MB} = \dfrac{-6 - -3}{4 - 2} = -\frac{3}{2}$, dus $\text{rc}_l = \frac{2}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } B(4, -6) \end{array}\right\}$ $\frac{2}{3} \cdot 4 + b = -6$
$2\frac{2}{3} + b = -6$
$b = -8\frac{2}{3}$
Dus l: $y = \frac{2}{3}x - 8\frac{2}{3}$.