6 Differentiaalrekening

Voorkennis Afgeleide en raaklijn

Bladzijde 52

1 **a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ geeft $f'(x) = 2x^3 - 6x + 6$

b $g(x) = (5x^2 - 2)^2 = 25x^4 - 20x^2 + 4$ geeft $g'(x) = 100x^3 - 40x$

c $h(x) = \dfrac{x-3}{x^2+4}$ geeft $h'(x) = \dfrac{(x^2+4) \cdot 1 - (x-3) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{x^2 + 4 - 2x^2 + 6x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-x^2 + 6x + 4}{(x^2+4)^2}$

d $k(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$ geeft $k'(p) = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{5}p$

e $l(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$ geeft $l'(q) = -10q + 27q^2$

f $m(x) = 2x^2 - \dfrac{6}{x+1}$ geeft $m'(x) = 4x - \dfrac{(x+1) \cdot 0 - 6 \cdot 1}{(x+1)^2} = 4x + \dfrac{6}{(x+1)^2}$

Bladzijde 53

2 **a** $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(0) = -4$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } A(0, 2) \end{array}\right\} b = 2$$

Dus k: $y = -4x + 2$.

b $f'(x) = 1$ geeft $3x^2 - 2x - 4 = 1$

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$

$x = \dfrac{2+8}{6} = 1\frac{2}{3} \vee x = \dfrac{2-8}{6} = -1$

$f(-1) = 4$ en $f(1\frac{2}{3}) = -2\frac{22}{27}$, dus $B(-1, 4)$ en $C(1\frac{2}{3}, -2\frac{22}{27})$.

3 **a** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x + 2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(2) = \dfrac{3}{(2+1)^2} = \frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ f(2) = 1, \text{ dus } A(2, 1) \end{array}\right\} \frac{1}{3} \cdot 2 + b = 1$$

$\frac{2}{3} + b = 1$

$b = \frac{1}{3}$

Dus k: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

b $f'(x) = \frac{3}{4}$ geeft $\dfrac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{4}$

$(x+1)^2 = 4$

$x + 1 = 2 \vee x + 1 = -2$

$x = 1 \vee x = -3$

$f(-3) = 3\frac{1}{2}$ en $f(1) = \frac{1}{2}$, dus $B(-3, 3\frac{1}{2})$ en $C(1, \frac{1}{2})$.

6.1 Toppen en buigpunten

Bladzijde 54

1 In toppen is de richtingscoëfficient van de raaklijn gelijk aan 0.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 18x + 50$ geeft $f'(x) = x^2 - 3x - 18$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 3x - 18 = 0$

$(x+3)(x-6) = 0$

$x = -3 \vee x = 6$

Dus $x_A = -3$ en $x_B = 6$.

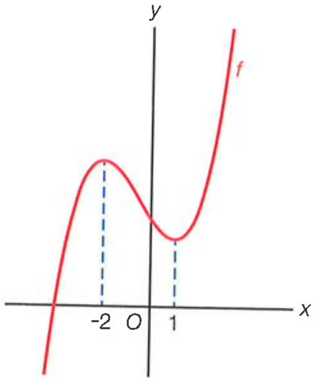
Bladzijde 55

2 **a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = x^2 + x - 2$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 + x - 2 = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = 1 \vee x = -2$



max. is $f(-2) = 8\frac{1}{3}$ en min. is $f(1) = 3\frac{5}{6}$.

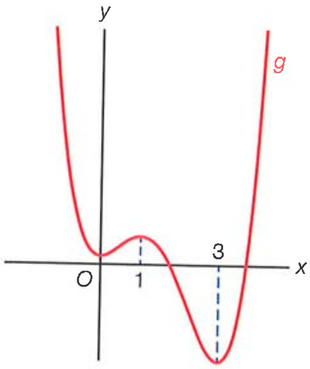
b $g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 2$ geeft $g'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$

$g'(x) = 0$ geeft $12x^3 - 48x^2 + 36x = 0$

$12x(x^2 - 4x + 3) = 0$

$12x(x - 1)(x - 3) = 0$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3$



min. is $g(0) = 2$, max. is $g(1) = 7$ en min. is $g(3) = -25$.

Het bereik is $B_g = [-25, \rightarrow\rangle$.

3 **a** $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 4}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 4) \cdot 5 - 5x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{5x^2 + 20 - 10x^2}{(x^2 + 4)^2} = \dfrac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2}$

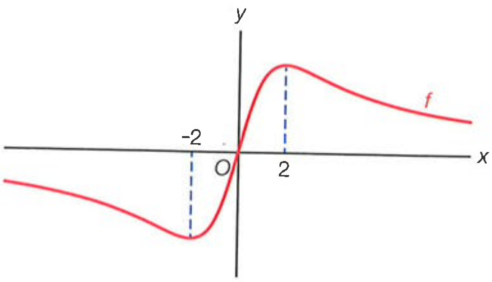
$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2} = 0$

$-5x^2 + 20 = 0$

$-5x^2 = -20$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$



min. is $f(-2) = -1\frac{1}{4}$ en max. is $f(2) = 1\frac{1}{4}$.

$f(x) = 0$ geeft $5x = 0$

$x = 0$

De grafiek snijdt de x-as alleen in $(0, 0)$, dus $B_f = [-1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}]$.

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(6) = \dfrac{-5 \cdot 6^2 + 20}{(6^2+4)^2} = -\frac{1}{10}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{10}x + b \\ f(6) = \frac{3}{4}\text{, dus } A(6, \frac{3}{4}) \end{array}\right\} -\frac{1}{10} \cdot 6 + b = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{5} + b = \frac{3}{4}$$

$$b = 1\frac{7}{20}$$

Dus k: $y = -\frac{1}{10}x + 1\frac{7}{20}$.

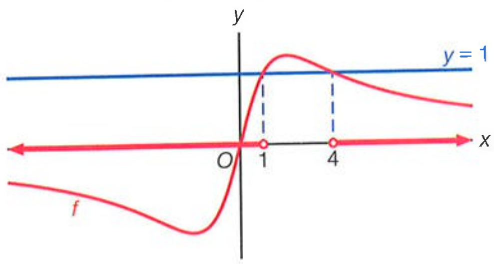
c $f(x) = 1$ geeft $\dfrac{5x}{x^2+4} = 1$

$5x = x^2 + 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1 \vee x = 4$



$f(x) < 1$ geeft $x < 1 \vee x > 4$

4 **a** $f_{-2}(x) = (x^2-2)(x^2-16) = x^4 - 18x^2 + 32$ geeft $f_{-2}'(x) = 4x^3 - 36x$

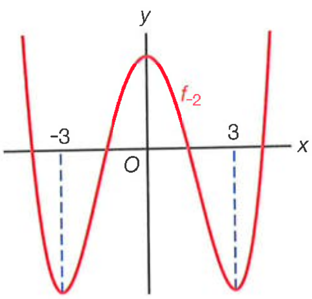
$f_{-2}'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 36x = 0$

$4x(x^2 - 9) = 0$

$4x = 0 \vee x^2 - 9 = 0$

$x = 0 \vee x^2 = 9$

$x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$



min. is $f_{-2}(-3) = -49$, max. is $f_{-2}(0) = 32$ en min. is $f_{-2}(3) = -49$.

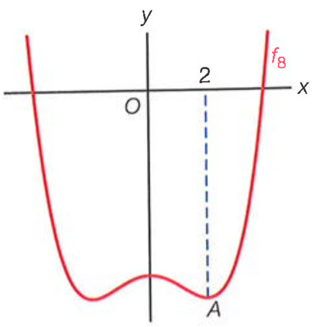
$B_f = [-49, \rightarrow\rangle$

b $f_p(x) = (x^2+p)(x^2-16) = x^4 - 16x^2 + px^2 - 16p$ geeft $f_p'(x) = 4x^3 - 32x + 2px$

$f_p'(2) = 0$ geeft $32 - 64 + 4p = 0$

$4p = 32$

$p = 8$



Dus voor $p = 8$.

5 $f_p(x) = (x^2 + p)(x^2 - 16) = x^4 - 16x^2 + px^2 - 16p$ geeft $f_p'(x) = 4x^3 - 32x + 2px$

Voor $x = x_B$ geldt $\left.\begin{array}{l} 4x^3 - 32x + 2px = 0 \\ p = 14x \end{array}\right\}$ $4x^3 - 32x + 2 \cdot 14x \cdot x = 0$

$4x^3 + 28x^2 - 32x = 0$

$4x(x^2 + 7x - 8) = 0$

$4x(x - 1)(x + 8) = 0$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = -8$

$x = 0$ geeft $p = 0$

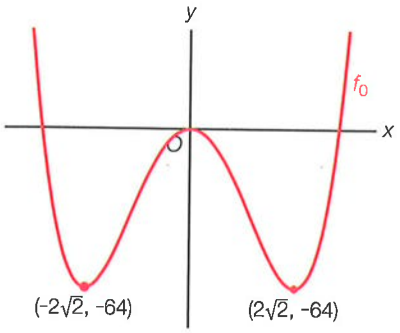
$f_0(x) = x^4 - 16x^2$ geeft $f_0'(x) = 4x^3 - 32x$

$f_0'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 32x = 0$

$4x(x^2 - 8) = 0$

$4x = 0 \vee x^2 = 8$

$x = 0 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$



$B_{f_0} = [-64, \rightarrow\rangle$

$x = 1$ geeft $p = 14$

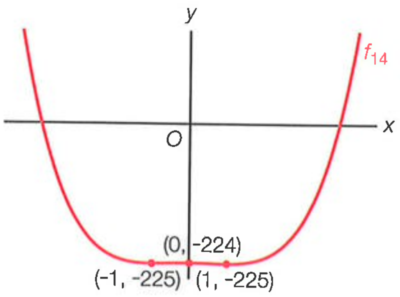
$f_{14}(x) = x^4 - 16x^2 + 14x^2 - 16 \cdot 14 = x^4 - 2x^2 - 224$ geeft $f_{14}'(x) = 4x^3 - 4x$

$f_{14}'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2 - 1) = 0$

$4x = 0 \vee x^2 = 1$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$



$B_{f_{14}} = [-225, \rightarrow\rangle$

$x = -8$ geeft $p = -112$

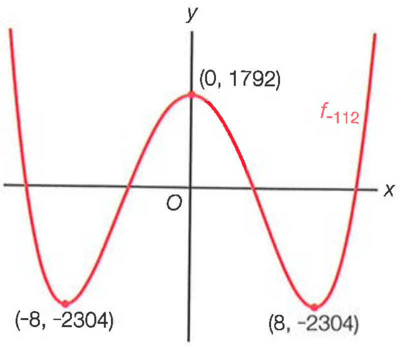
$f_{-112}(x) = x^4 - 16x^2 - 112x^2 - 16 \cdot -112 = x^4 - 128x^2 + 1792$ geeft $f_{-112}'(x) = 4x^3 - 256x$

$f_{-112}'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 256x = 0$

$4x(x^2 - 64) = 0$

$4x = 0 \vee x^2 = 64$

$x = 0 \vee x = 8 \vee x = -8$



$B_{f_{-112}} = [-2304, \rightarrow\rangle$

6 **a** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = x^3 - 2x - 4$

b $f'(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

c In de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$. Dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2$.

Bladzijde 57

7 **a** $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$

$f'(1) = 4 - 18 + 24 - 10 = 0$

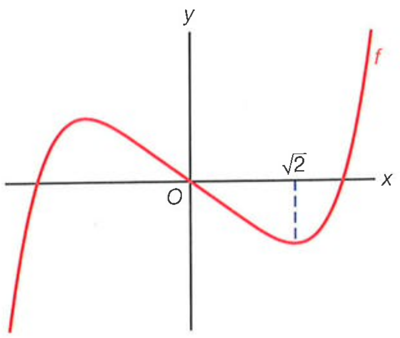
Uit de schets blijkt dat er geen extreme waarde is voor $x = 1$. Er is wel een horizontale raaklijn.

b $f(1) = 1 - 6 + 12 - 10 + 7 = 4$ en $f(2\frac{1}{2}) = 2\frac{5}{16}$.

Dus de horizontale raaklijnen zijn $y = 4$ en $y = 2\frac{5}{16}$.

8 **a** $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 1\frac{1}{2}x^2 - 7$

$f'(\sqrt{2}) = 2\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^4 - 1\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 - 7 = 2\frac{1}{2} \cdot 4 - 1\frac{1}{2} \cdot 2 - 7 = 10 - 3 - 7 = 0$

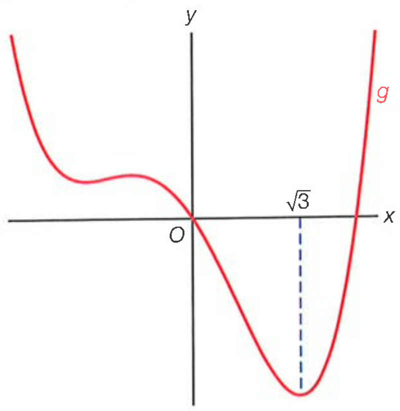


$f'(\sqrt{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

b $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$ geeft $g'(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

$g'(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} + 3 - 3\sqrt{3} - 3 = 0$

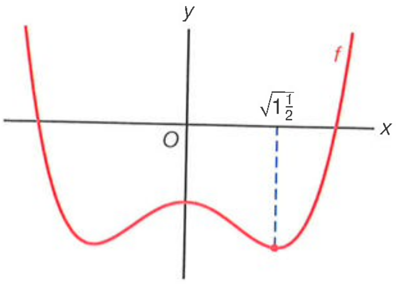


$g'(\sqrt{3}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{3}$.

Dus g heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{3}$.

9 **a** $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 6x$
$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = 4 - 6 = -2$
$f'(1)$ is niet gelijk aan 0, dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 1$.

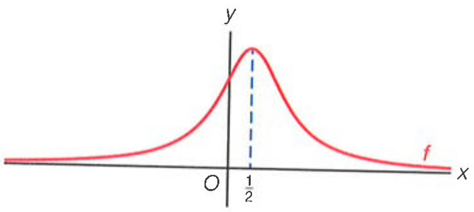
b $f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 4 \cdot (\sqrt{1\frac{1}{2}})^3 - 6 \cdot \sqrt{1\frac{1}{2}} = 4 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 6\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 0$



$f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

10 **a** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^3+1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{x^3 + 1 - 3x^3 - 3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-2x^3 - 3x^2 + 1}{(x^3+1)^2}$

$f'(\frac{1}{2}) = \dfrac{-2 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 1}{((\frac{1}{2})^3 + 1)^2} = \dfrac{-2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 1}{(\frac{1}{8} + 1)^2} = \dfrac{-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1}{(\frac{9}{8})^2} = \dfrac{0}{\frac{81}{64}} = 0$



$f'(\frac{1}{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}$.

b $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

c $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+1} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{1}{x^2-x+1}$ mits $x \neq -1$ geeft

$f'(x) = \dfrac{(x^2-x+1) \cdot 0 - 1 \cdot (2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2} = 0$
$-2x + 1 = 0$
$-2x = -1$
$x = \frac{1}{2}$
vold.

11 **a** dalend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$
stijgend op $\langle -1, 5 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle -1, 2 \rangle$
afnemend stijgend op $\langle 2, 5 \rangle$

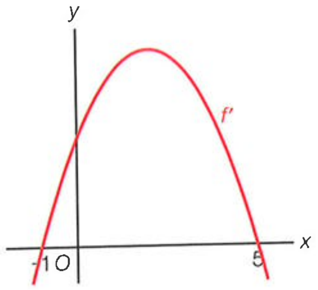
b $f'(x) = -3x^2 + 12x + 15$

$f'(x) = 0$ geeft $-3x^2 + 12x + 15 = 0$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x + 1)(x - 5) = 0$

$x = -1 \vee x = 5$



c $x_P = \dfrac{-1 + 5}{2} = 2$

d Bij $x = x_p$ gaat de grafiek over van toenemend stijgend in afnemend stijgend, want links van $x = x_p$ nemen de hellingen toe en rechts van $x = x_p$ nemen de hellingen af.

Bladzijde 59

12 **a** $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48x + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 48$

$f''(x) = 12x^2 - 72x + 60$

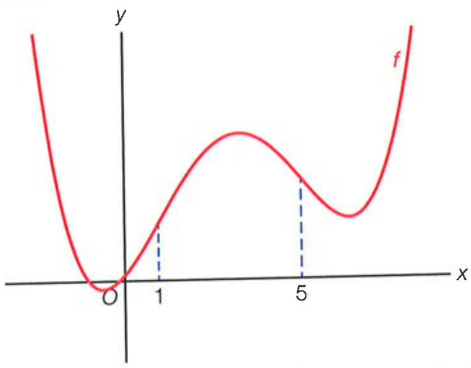
$f''(x) = 0$ geeft $12x^2 - 72x + 60 = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x - 1)(x - 5) = 0$

$x = 1 \vee x = 5$

$f(1) = 72$ en $f(5) = 120$.



Uit de schets volgt dat de buigpunten (1, 72) en (5, 120) zijn.

b $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x + 4$

$g'(x) = x^2 - 6x + 6$

$g''(x) = 2x - 6$

$g''(x) = 0$ geeft $2x - 6 = 0$

$2x = 6$

$x = 3$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = g'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ g(3) = 4, \text{ dus buigpunt } (3, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 4 \\ -9 + b = 4 \\ b = 13 \end{array}$$

Dus k: $y = -3x + 13$.

13 **a** $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$

$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$

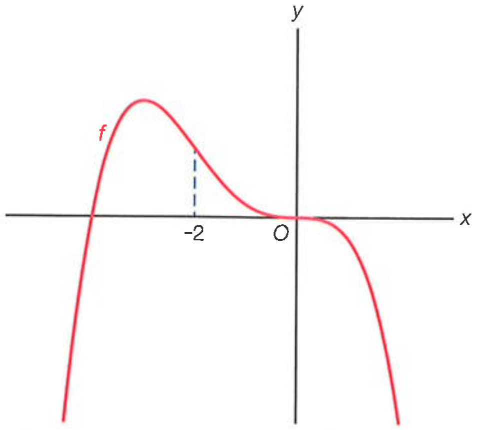
$f''(x) = -x^2 - 2x$

$f''(x) = 0$ geeft $-x^2 - 2x = 0$

$-x(x+2) = 0$

$x = 0 \vee x = -2$

$f(0) = 0$ en $f(-2) = 1\frac{1}{3}$.



Uit de schets volgt dat $(-2, 1\frac{1}{3})$ en $(0, 0)$ de buigpunten zijn.

b $f''(0) = 0$ en $f'(0) = 0$, dus in het punt $(0, 0)$ is er sprake van een horizontale buigraaklijn.

14 **a** $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5$

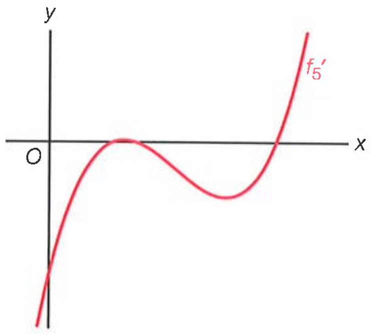
$f_5'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$

$f_5''(x) = 3x^2 - 12x + 10$

$f_5''(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 10 = 0$

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 24 > 0$, dus twee oplossingen

Dus f_5' heeft twee extremen.



De grafiek van f_5 heeft twee buigpunten, omdat f_5' twee extremen heeft.

b $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5$

$f_6'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

$f_6''(x) = 3x^2 - 12x + 12$

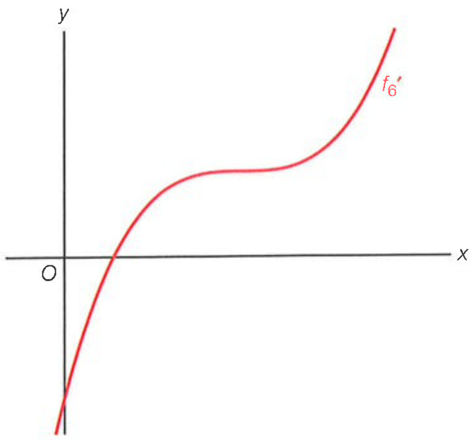
$f_6''(x) = 0$ geeft $3x^2 - 12x + 12 = 0$

$3(x^2 - 4x + 4) = 0$

$3(x-2)^2 = 0$

De vergelijking $f_6''(x) = 0$ heeft één oplossing.

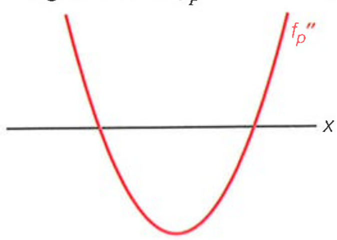
De grafiek van f_6' heeft dus één horizontale raaklijn.

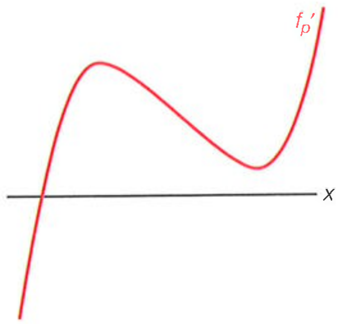


De grafiek van f_6 heeft geen buigpunten omdat f_6' geen extremen heeft.

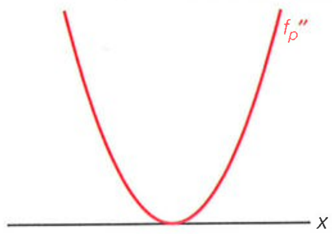
c $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5$
$f_p'(x) = x^3 - 6x^2 + 2px - 5$
$f_p''(x) = 3x^2 - 12x + 2p$
$f''(x) = 0$ mag geen of één oplossing hebben, oftewel $D \leq 0$.
$(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2p \leq 0$
$144 - 24p \leq 0$
$-24p \leq -144$
$p \geq 6$

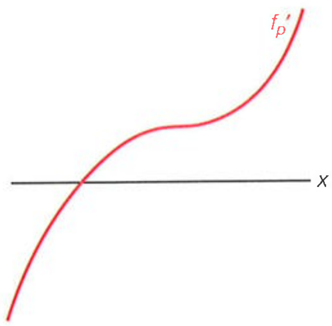
d $f_p''(x) = 3x^2 - 12x + 2p$
De grafiek van f_p'' is een dalparabool met twee, één of nul snijpunten met de x-as.



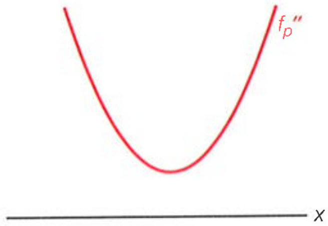


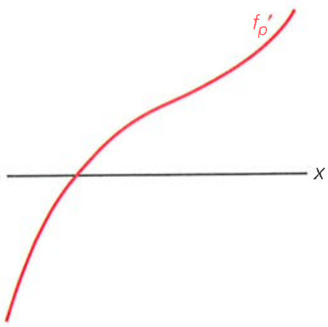
Heeft de grafiek van f_p'' twee snijpunten met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend-dalend-stijgend, dus f_p' heeft twee extremen, dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten.





Heeft de grafiek van f_p'' één raakpunt met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend-stijgend, dus f_p' heeft geen extremen, dus de grafiek van f_p heeft geen buigpunten.





Heeft de grafiek van f_p'' geen snijpunten met de x-as, dan is de grafiek van f_p' stijgend, dus f_p' heeft geen extremen, dus de grafiek van f_p heeft geen buigpunten.

Dus de grafiek van f_p heeft óf twee óf geen buigpunten.

Bladzijde 60

15 **a** $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 16 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 11$ geeft

$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^5 - 12x^2$

$f'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x^5 - 12x^2 = 0$

$3x^5 - 24x^2 = 0$

$3x^2(x^3 - 8) = 0$

$3x^2 = 0 \vee x^3 = 8$

$x = 0 \vee x = 2$

In de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$.

$f(2) = -5$, dus top $(2, -5)$.

b $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^5 - 12x^2$ geeft $f''(x) = 7\frac{1}{2}x^4 - 24x$

$f''(0) = 0$, in de figuur in het leerboek is te zien dat A een buigpunt is.

c $f''(x) = 0$ geeft $7\frac{1}{2}x^4 - 24x = 0$

$x(7\frac{1}{2}x^3 - 24) = 0$

$x = 0 \vee 7\frac{1}{2}x^3 = 24$

$x = 0 \vee x^3 = 3\frac{1}{5}$

$x = 0 \vee x = \sqrt[3]{3\frac{1}{5}}$

$f(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}) = (\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} - 4)^2 - 5 = \frac{19}{25}$

Dus $B(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}, \frac{19}{25})$.

16 $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$

$f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + 1\frac{1}{2}x$

$f_p''(x) = 12x^2 + 6px + 1\frac{1}{2}$

De grafiek van f_p heeft twee buigpunten als f_p' twee extremen heeft,
dus als $f_p''(x) = 0$ twee oplossingen heeft.

$$\left.\begin{array}{l}\text{twee oplossingen, dus } D > 0 \\ D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1\frac{1}{2} = 36p^2 - 72\end{array}\right\} \begin{array}{l} 36p^2 - 72 > 0 \\ 36p^2 > 72 \\ p^2 > 2 \\ p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}.\end{array}$$

Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}$.

17 **a** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Gegeven is dat f een derdegraadsfunctie is, dus $a \neq 0$.
Hieruit volgt dat de grafiek van f' een parabool is, dus f' heeft één extreem.
Dus de grafiek van elke derdegraadsfunctie heeft één buigpunt.

b Omdat de grafiek van f twee toppen heeft, heeft de grafiek van f' twee snijpunten met de x-as.

$f'(x) = 0$ geeft $3ax^2 + 2bx + c = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{twee oplossingen, dus } D > 0 \\ D = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 12ac\end{array}\right\} \begin{array}{l} 4b^2 - 12ac > 0 \\ 4b^2 > 12ac \\ b^2 > 3ac\end{array}$$

c $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ geeft $f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0$ geeft $6ax + 2b = 0$

$6ax = -2b$

$x = -\dfrac{b}{3a}$

Dus $x_R = -\dfrac{b}{3a}$.

Voor een derdegraadsfunctie geldt dat $a \neq 0$, dus er is precies één buigpunt.
De x-coördinaten van de toppen zijn de oplossingen van $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 0$ geeft $3ax^2 + 2bx + c = 0$

$$D = 4b^2 - 12ac$$

$$x = \frac{-2b + \sqrt{D}}{6a} \vee x = \frac{-2b - \sqrt{D}}{6a}$$

$$x_P + x_Q = \frac{-2b + \sqrt{D}}{6a} + \frac{-2b - \sqrt{D}}{6a} = \frac{-2b + \sqrt{D} - 2b - \sqrt{D}}{6a} = \frac{-4b}{6a} = \frac{-2b}{3a} = 2 \cdot -\frac{b}{3a} = 2x_R$$

Dus $2x_R = x_P + x_Q$ oftewel $x_R = \dfrac{x_P + x_Q}{2}$.

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

Bladzijde 62

18 **a** $\frac{4}{x^2} = 4x^{-2}$ $\quad \frac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ $\quad \frac{5}{x^4} = 5x^{-4}$ $\quad \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}$

b $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ $\quad 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$ $\quad -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ $\quad \frac{1}{7}x^{-6} = \frac{1}{7x^6}$

c $\frac{x^3 + 5x^2}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} = x^2 + 5x$

$\frac{4x^2 + 7x}{x^3} = \frac{4x^2}{x^3} + \frac{7x}{x^3} = 4x^{-1} + 7x^{-2}$

$\frac{2x^5 + 5x^2}{3x^4} = \frac{2x^5}{3x^4} + \frac{5x^2}{3x^4} = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}x^{-2}$

d $\frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x}{2x^2} + \frac{4}{2x^2} = \frac{x + 4}{2x^2}$

$\frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^3}{2x^2} + \frac{6}{2x^2} = \frac{x^3 + 6}{2x^2}$

$\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4x} = \frac{2x^2}{3} - \frac{3}{4x} = \frac{8x^3}{12x} - \frac{9}{12x} = \frac{8x^3 - 9}{12x}$

19 **a** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{x^2 \cdot [1]' - 1 \cdot [x^2]'}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

b $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ geeft $f'(x) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}$

c $g(x) = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ geeft $g'(x) = \frac{x^5 \cdot [1]' - 1 \cdot [x^5]'}{(x^5)^2} = \frac{x^5 \cdot 0 - 1 \cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{-5x^4}{x^{10}} = -5x^{-6}$

Bladzijde 63

20 **a** $n = 0$ geeft $f(x) = x^0 = 1$ en hieruit volgt $f'(x) = 0$.
$n = 0$ geeft $f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0$
Dus $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ klopt voor $n = 0$.
$n = 1$ geeft $f(x) = x^1 = x$ en hieruit volgt $f'(x) = 1$.
$n = 1$ geeft $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$
Dus $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ klopt voor $n = 1$.

b Dat lukte omdat de noemers uit slechts één term bestaan.
De functies g en h zijn te differentiëren door uit te delen.

21 **a** $f(x)=\dfrac{1}{x^6}=x^{-6}$ geeft $f'(x)=-6x^{-7}=\dfrac{-6}{x^7}$

b $g(x)=5-\dfrac{3}{x^2}=5-3x^{-2}$ geeft $g'(x)=6x^{-3}=\dfrac{6}{x^3}$

c $h(x)=ax^4-\dfrac{b}{x^4}=ax^4-bx^{-4}$ geeft $h'(x)=4ax^3+4bx^{-5}=4ax^3+\dfrac{4b}{x^5}$

22 **a** $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x^2}=\dfrac{2x}{3x^2}-\dfrac{1}{3x^2}=\frac{2}{3}x^{-1}-\frac{1}{3}x^{-2}$ geeft $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-2}+\frac{2}{3}x^{-3}=-\dfrac{2}{3x^2}+\dfrac{2}{3x^3}=-\dfrac{2x}{3x^3}+\dfrac{2}{3x^3}=\dfrac{2-2x}{3x^3}$

b $g(x)=\dfrac{3x^2}{2x-1}$ geeft $g'(x)=\dfrac{(2x-1)\cdot 6x-3x^2\cdot 2}{(2x-1)^2}=\dfrac{12x^2-6x-6x^2}{(2x-1)^2}=\dfrac{6x^2-6x}{(2x-1)^2}$

c $h(x)=\dfrac{3x^6-3}{x^3}=\dfrac{3x^6}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}=3x^3-3x^{-3}$ geeft $h'(x)=9x^2+9x^{-4}=9x^2+\dfrac{9}{x^4}=\dfrac{9x^6}{x^4}+\dfrac{9}{x^4}=\dfrac{9x^6+9}{x^4}$

23 **a** $f(x)=5x^2-\dfrac{5}{x^2}=5x^2-5x^{-2}$ geeft $f'(x)=10x+10x^{-3}=10x+\dfrac{10}{x^3}$

b $g(x)=\dfrac{5}{2x^2}-\dfrac{2x^2}{5}=\frac{5}{2}x^{-2}-\frac{2}{5}x^2$ geeft $g'(x)=-5x^{-3}-\frac{4}{5}x=-\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{4x}{5}$

c $h(x)=6-\dfrac{x^2-1}{x}=6-\left(\dfrac{x^2}{x}-\dfrac{1}{x}\right)=6-x+x^{-1}$ geeft $h'(x)=-1-x^{-2}=-1-\dfrac{1}{x^2}$

Bladzijde 64

24 **a** $f(x)=0$ geeft $\dfrac{3x+3}{x}=0$

$3x+3=0$

$3x=-3$

$x=-1$

Dus $A(-1, 0)$.

$f(x)=\dfrac{3x+3}{x}=\dfrac{3x}{x}+\dfrac{3}{x}=3+3x^{-1}$ geeft $f'(x)=-3x^{-2}=-\dfrac{3}{x^2}$

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(-1)=-\dfrac{3}{(-1)^2}=-3$.

$$\left.\begin{array}{l} y=-3x+b \\ \text{door } A(-1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3\cdot -1+b=0 \\ 3+b=0 \\ b=-3 \end{array}$$

Dus k: $y=-3x-3$.

b $rc_{\text{raaklijn}}=-\frac{3}{4}$, dus $f'(x)=-\frac{3}{4}$

$-\dfrac{3}{x^2}=-\frac{3}{4}$

$x^2=4$

$x=2 \vee x=-2$

$f(2)=4\frac{1}{2}$ en $f(-2)=1\frac{1}{2}$, dus de raakpunten zijn $(2, 4\frac{1}{2})$ en $(-2, 1\frac{1}{2})$.

25 **a** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ geeft $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)\cdot 1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(2)=\dfrac{-4-1}{(4-1)^2}=-\frac{5}{9}$.

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{5}{9}x+b \\ f(2)=\frac{2}{3}\text{, dus } A(2, \frac{2}{3}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{5}{9}\cdot 2+b=\frac{2}{3} \\ -1\frac{1}{9}+b=\frac{2}{3} \\ b=1\frac{7}{9} \end{array}$$

Dus k: $y=-\frac{5}{9}x+1\frac{7}{9}$.

b $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{1}{x} = x - x^{-1}$ geeft $g'(x) = 1 + x^{-2} = 1 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

Stel l: $y = ax + b$ met $a = g'(2) = \dfrac{4+1}{4} = 1\frac{1}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{4}x + b \\ g(2) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } B(2,\ 1\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{4} \cdot 2 + b = 1\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} + b = 1\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{array}$$

Dus l: $y = 1\frac{1}{4}x - 1$.

c $g'(x) = 1 + x^{-2}$ geeft $g''(x) = -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$

$g''(x) = 0$ geeft $\dfrac{-2}{x^3} = 0$ en deze vergelijking heeft geen oplossingen.

g' heeft geen extreme waarden, dus de grafiek van g heeft geen buigpunten.

26 **a** $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{4}{x} = x + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{x^2-4}{x^2} = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

Zie de figuur in het leerboek.

max. is $f(-2) = -4$ en min. is $f(2) = 4$.

b $rc_{raaklijn} = -3$ geeft $f'(x) = -3$

$\dfrac{x^2-4}{x^2} = -3$

$x^2 - 4 = -3x^2$

$4x^2 = 4$

$x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

$f(1) = 5$ en $f(-1) = -5$, dus de raakpunten zijn $(1, 5)$ en $(-1, -5)$.

c $f'(x) = 2$ geeft $\dfrac{x^2-4}{x^2} = 2$

$x^2 - 4 = 2x^2$

$x^2 = -4$

geen opl.

Dus er is geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 2.

d $f'(x) = \frac{5}{9}$ geeft $\dfrac{x^2-4}{x^2} = \dfrac{5}{9}$

$9x^2 - 36 = 5x^2$

$4x^2 = 36$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{9}x + b \\ f(3) = 4\frac{1}{3}, \text{ dus door } (3,\ 4\frac{1}{3}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{5}{9} \cdot 3 + b = 4\frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} + b = 4\frac{1}{3} \\ b = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus de lijn k: $y = \frac{5}{9}x + 2\frac{2}{3}$ raakt de grafiek van f.

27 $f_a(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2} = \frac{1}{a} \cdot x^2 + a \cdot x^{-2}$ geeft $f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot 2x + a \cdot -2x^{-3} = \frac{2x}{a} - \frac{2a}{x^3}$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{2x}{a} = \frac{2a}{x^3}$

$2x^4 = 2a^2$

$x^4 = a^2$

$x^2 = a \vee x^2 = -a$

vold. vold. niet

$y_{\text{toppen}} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$ en dus liggen de toppen op de lijn $y = 2$.

28 **a** $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

b $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

29 **a** $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

c $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

Bladzijde 65

30 **a** $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

$[x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}]' = [x]'$

$[x^{\frac{1}{2}}]' \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

$2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

b $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

$x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}$

$[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{\frac{1}{2}}{x^{\frac{1}{2}}}$

$[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Bladzijde 66

31 **a** $f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1\frac{1}{3}}$ geeft $g'(x) = 1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3} = x^3 \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{3\frac{3}{5}}$ geeft $k'(x) = 3\frac{3}{5}x^{2\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

32 **a** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{4}x^{1\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot \sqrt[4]{x}$

b $g(x) = \frac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x^2}{x^{1\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = 4x^{\frac{1}{2}} + x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft

$g'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{4x^2 - 3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

c $h(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x}) = x^2 + x^2 \cdot \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = x^2 + x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}} = x^2 + x^{2\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$h'(x) = 2x + 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2x + 2\frac{1}{2}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x + 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d $k(x) = \frac{x - 4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{3}}$ geeft

$k'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-1\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{2x + 4}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$

33 **a** $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -1\frac{1}{2} \cdot x^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{x^{1\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft

$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2 + 6}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3) = x^3 \cdot \sqrt{x} - 3x^2 = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x^2 = x^{3\frac{1}{2}} - 3x^2$ geeft

$k'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} - 6x$

34 **a** $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2 = x^3 - 6x\sqrt{x} + 9 = x^3 - 6x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 9 = x^3 - 6x^{1\frac{1}{2}} + 9$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 9x^{\frac{1}{2}} = 3x^2 - 9\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{2x - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2x}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{x^{2\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^{2\frac{1}{2}}} = 2x^{-1\frac{1}{2}} - 3x^{-2\frac{1}{2}}$ geeft

$g'(x) = -3x^{-2\frac{1}{2}} + 7\frac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}} = -\frac{3}{x^{2\frac{1}{2}}} + \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^{3\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{15}{2x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}} = \frac{-6x + 15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2 = (x - x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} + (x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2x^{1\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ geeft

$h'(x) = 2x - 2\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2x - 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x - 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

d $k(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{1\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ geeft

$k'(x) = 1\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} - x^{-1\frac{1}{4}} = 1\frac{3}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x^{1\frac{1}{4}}} = 1\frac{3}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{4}}} = 1\frac{3}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{1\frac{3}{4}x^2 - 1}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{7x^2 - 4}{4x \cdot \sqrt[4]{x}}$

35 $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 3x^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{8}) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}, \text{ dus } A(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{1}{8} + b = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + b = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dus k: $y = 4x + \frac{1}{4}$.

Stel l: $y = ax + b$ met $a = f'(8) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{2}{2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ f(8) = 12, \text{ dus } B(8, 12) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 8 + b = 12 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus l: $y = x + 4$.

Snijden van k en l geeft $4x + \frac{1}{4} = x + 4$

$$3x = 3\tfrac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1\frac{1}{4} \\ y = x + 4 \end{array}\right\} y = 1\tfrac{1}{4} + 4 = 5\tfrac{1}{4}$$

Dus $C(1\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$.

36 **a** $f(x) = x\sqrt{x} - 3x = x^{1\frac{1}{2}} - 3x$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3$

$f'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$

$$1\tfrac{1}{2}\sqrt{x} = 3$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$f(4) = 4\sqrt{4} - 3 \cdot 4 = -4$

min. is $f(4) = -4$.

b Stel k: $y = ax$ met $a = f'(0) = 1\frac{1}{2}\sqrt{0} - 3 = -3$.

Dus k: $y = -3x$.

c $rc_l = 3$, dus $f'(x) = 3$

$$1\tfrac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 3$$

$$1\tfrac{1}{2}\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 4$$

$$x = 16$$

$$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = 3x + b \\ f(16) = 16, \text{ dus } A(16, 16) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 16 + b = 16 \\ 48 + b = 16 \\ b = -32 \end{array}$$

Dus $A(16, 16)$ en l: $y = 3x - 32$.

Bladzijde 67

37 **a** $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = 2\tfrac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - x^{-1\frac{1}{2}} = 2\tfrac{1}{2}x \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = 2\tfrac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = 2\tfrac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}}$$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = \dfrac{2\frac{1}{2} \cdot 1^3 - 1}{1\sqrt{1}} = 1\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\tfrac{1}{2}x + b \\ f(1) = 3\text{, dus } A(1, 3) \end{array}\right\} 1\tfrac{1}{2} \cdot 1 + b = 3$$

$$1\tfrac{1}{2} + b = 3$$

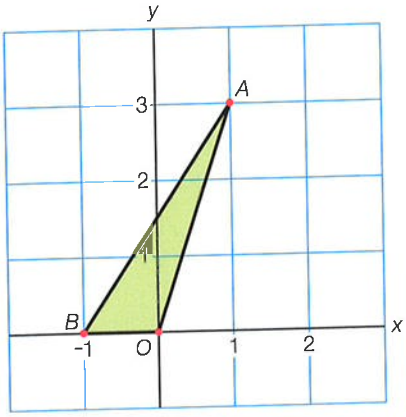
$$b = 1\tfrac{1}{2}$$

Dus k: $y = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

Snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$

$$1\tfrac{1}{2}x = -1\tfrac{1}{2}$$

$x = -1$, dus $B(-1, 0)$



$O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$

b $f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}} = 0$

$$2\tfrac{1}{2}x^3 - 1 = 0$$

$$2\tfrac{1}{2}x^3 = 1$$

$$x^3 = \tfrac{2}{5}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{2}{5}}$$

Dus $p = \frac{2}{5}$.

38 **a** $s(t) = 10t\sqrt{t} = 10t^{1\frac{1}{2}}$ geeft $s'(t) = 15t^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt{t}$

$s'(8) = 15\sqrt{8} = 15 \cdot 2\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

Dus de snelheid na 8 seconden is $30\sqrt{2}$ m/s.

b 108 km/uur $= \dfrac{108}{3{,}6} = 30$ m/s

$s'(t) = 30$ geeft $15\sqrt{t} = 30$

$$\sqrt{t} = 2$$

$$t = 4$$

Dus na 4 seconden is de snelheid 108 km/uur.

c $s(9) = 10 \cdot 9\sqrt{9} = 270$ en $s'(9) = 15 \cdot \sqrt{9} = 45$

Dus in de eerste 9 seconden legt de trein 270 meter af en in de volgende 51 seconden $51 \cdot 45 = 2295$ meter.

Dus in de eerste minuut legt de trein $270 + 2295 = 2565$ meter af.

39 $f_p(x) = (2x - p\sqrt{x})^2 = 4x^2 - 4px\sqrt{x} + p^2x = 4x^2 - 4px^{1\frac{1}{2}} + p^2x$ geeft

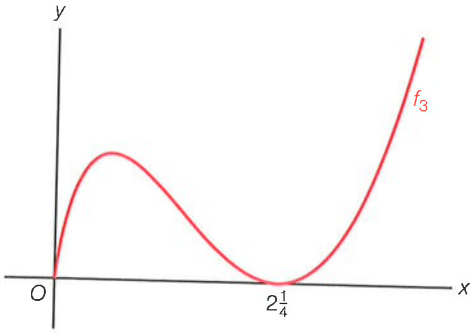
$f_p'(x) = 8x - 6px^{\frac{1}{2}} + p^2 = 8x - 6p\sqrt{x} + p^2$

$f_p'(2\frac{1}{4}) = 0$ geeft $18 - 6p \cdot 1\frac{1}{2} + p^2 = 0$

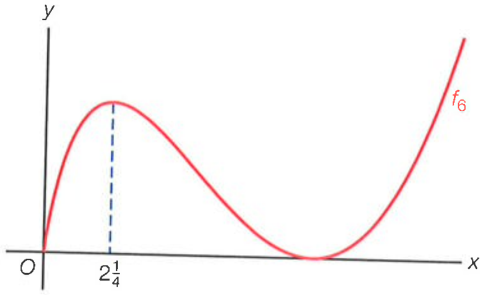
$p^2 - 9p + 18 = 0$

$(p-3)(p-6) = 0$

$p = 3 \vee p = 6$



$p = 3$ geeft min. is $f_3(2\frac{1}{4}) = 0$. Dus $p = 3$ voldoet niet.



$p = 6$ geeft max. is $f_6(2\frac{1}{4}) = 20\frac{1}{4}$.

6.3 De kettingregel

Bladzijde 69

40 **a** $v(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 = 9 - 15 = -6$

$u(v(3)) = u(-6) = (-6)^4 = 1296$

b $v(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4$

$u(v(4)) = u(-4) = (-4)^4 = 256$

41 **a** $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = v^6$ en $v(x) = 3 - x^5$.

b $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \sqrt{v}$ en $v(x) = x^2 + 1$.

c $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \dfrac{2}{v^3}$ en $v(x) = x + 8$.

Bladzijde 71

42 **a** $f(x) = (4x+3)^3$ geeft $f'(x) = 3(4x+3)^2 \cdot 4 = 12(4x+3)^2$

b $g(x) = 6(\frac{1}{2}x - 4)^5$ geeft $g'(x) = 30(\frac{1}{2}x - 4)^4 \cdot \frac{1}{2} = 15(\frac{1}{2}x - 4)^4$

c $h(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$ geeft $h'(x) = 6x - 3(\frac{1}{4}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{4} = 6x - \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 2)^2$

d $j(x) = (4x^2 - 3)^4$ geeft $j'(x) = 4(4x^2 - 3)^3 \cdot 8x = 32x(4x^2 - 3)^3$

e $k(x) = 5x - \dfrac{4}{(3x+2)^3} = 5x - 4(3x+2)^{-3}$ geeft

$k'(x) = 5 + 12(3x+2)^{-4} \cdot 3 = 5 + 36(3x+2)^{-4} = 5 + \dfrac{36}{(3x+2)^4}$

f $l(x) = \sqrt{4x+1}$ geeft $l'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$

43 **a** $f(x) = -2(2x+1)^4$ geeft $f'(x) = -8(2x+1)^3 \cdot 2 = -16(2x+1)^3$

b $g(x) = \dfrac{1}{(3x-2)^2} = (3x-2)^{-2}$ geeft $g'(x) = -2(3x-2)^{-3} \cdot 3 = \dfrac{-6}{(3x-2)^3}$

c $h(x) = \sqrt{2x^2+4x}$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+4x}} \cdot (4x+4) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x}}$

d $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-1}} = (4x-1)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $j'(x) = -\frac{1}{2}(4x-1)^{-1\frac{1}{2}} \cdot 4 = \dfrac{-2}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$

e $k(x) = (x^2+3)\sqrt{x^2+3} = (x^2+3)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $k'(x) = 1\frac{1}{2}(x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+3}$

f $l(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = (x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$l'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-1\frac{1}{2}} \cdot (2x+2) = \dfrac{-x-1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$

44 **a** $f(x) = 4(x^3+7x-2)^2$ geeft $f'(x) = 8(x^3+7x-2) \cdot (3x^2+7) = 8(3x^2+7)(x^3+7x-2)$

b $g(x) = -\dfrac{6}{(x^2+3x)^3} = -6(x^2+3x)^{-3}$ geeft $g'(x) = 18(x^2+3x)^{-4} \cdot (2x+3) = \dfrac{18(2x+3)}{(x^2+3x)^4}$

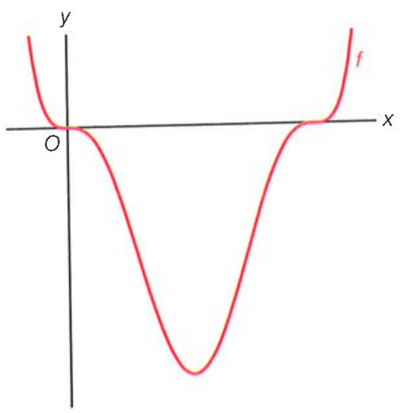
c $h(x) = \sqrt[3]{x^3+3x} = (x^3+3x)^{\frac{1}{3}}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{3}(x^3+3x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2+3) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x)^2}}$

d $j(x) = \dfrac{1}{(4-x)\sqrt{4-x}} = (4-x)^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $j'(x) = -1\frac{1}{2}(4-x)^{-2\frac{1}{2}} \cdot -1 = \dfrac{3}{2(4-x)^2 \cdot \sqrt{4-x}}$

e $k(x) = 5\sqrt{2x^4+x^2} + 4x^2$ geeft $k'(x) = 5 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x^4+x^2}} \cdot (8x^3+2x) + 8x = \dfrac{5(4x^3+x)}{\sqrt{2x^4+x^2}} + 8x$

f $l(x) = \dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4}$ geeft $l'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

45 **a**



b Raaklijn horizontaal dus $f'(x) = 0$.

$f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 2x)^3$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x-2)$

$f'(x) = 0$ geeft $3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x-2) = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \vee x - 2 = 0$

$x^2 - 4x = 0 \vee x = 2$

$x(x-4) = 0 \vee x = 2$

$x = 0 \vee x = 4 \vee x = 2$

c Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(3) = 3(\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3)^2 \cdot (3-2) = 6\frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} y = 6\frac{3}{4}x + b \\ f(3) = -3\frac{3}{8}, \text{ dus } A(3, -3\frac{3}{8}) \end{array}\right\} 6\frac{3}{4} \cdot 3 + b = -3\frac{3}{8}$$

$20\frac{1}{4} + b = -3\frac{3}{8}$

$b = -23\frac{5}{8}$

Dus k: $y = 6\frac{3}{4}x - 23\frac{5}{8}$ en $y_B = -23\frac{5}{8}$.

46 **a** $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ geeft $f'(x) = 4(\frac{1}{4}x - 1)^3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1$

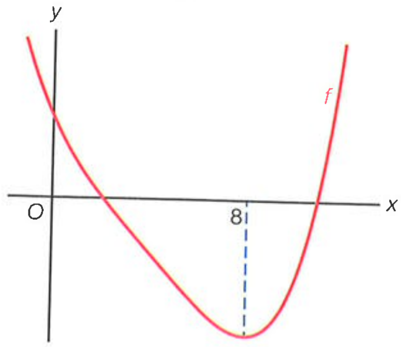
$f'(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = 0$

$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 1$

$\frac{1}{4}x - 1 = 1$

$\frac{1}{4}x = 2$

$x = 8$



min. is $f(8) = -5$ en $B_f = [-5, \rightarrow\rangle$.

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = rc_k = rc_l = -2$.

$f'(x) = -2$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = -2$

$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = -1$

$\frac{1}{4}x - 1 = -1$

$\frac{1}{4}x = 0$

$x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(0) = 3, \text{ dus door } (0, 3) \end{array}\right\} b = 3$$

Dus k: $y = -2x + 3$.

47 **a** $g(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^2 + ax + b = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + ax + b = \frac{1}{16}x^2 + (a - \frac{1}{2})x + b + 1$

Ook geldt $g(x) = \frac{1}{16}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 15$.

Dus $a - \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$ oftewel $a = -1$ en $b + 1 = 15$ oftewel $b = 14$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2 = (\frac{1}{4}x - 1)^2 - x + 14$

$(\frac{1}{4}x - 1)^4 - (\frac{1}{4}x - 1)^2 - 12 = 0$

Stel $(\frac{1}{4}x - 1)^2 = u$.

$u^2 - u - 12 = 0$

$(u + 3)(u - 4) = 0$

$u = -3 \vee x = 4$

$(\frac{1}{4}x - 1)^2 = -3 \vee (\frac{1}{4}x - 1)^2 = 4$

geen oplossing $\frac{1}{4}x - 1 = 2 \vee \frac{1}{4}x - 1 = -2$

$\frac{1}{4}x = 3 \vee \frac{1}{4}x = -1$

$x = 12 \vee x = -4$

Bladzijde 72

48 **a** $f(3) = \frac{1}{4}(2 \cdot 3 - 5)^3 + 2 = \frac{1}{4} \cdot 1^3 + 2 = 2\frac{1}{4}$

$g(3) = -\frac{1}{4}(3 \cdot 3 - 10)^4 + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 1 + 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$

$f(3) = g(3)$, dus A ligt zowel op de grafiek van f als op die van g.

b $f(x)=\frac{1}{4}(2x-5)^3+2$ geeft $f'(x)=\frac{3}{4}(2x-5)^2\cdot 2=1\frac{1}{2}(2x-5)^2$

$f'(3)=1\frac{1}{2}(2\cdot 3-5)^2=1\frac{1}{2}$

$g(x)=-\frac{1}{4}(3x-10)^4+2\frac{1}{2}$ geeft $g'(x)=-(3x-10)^3\cdot 3=-3(3x-10)^3$

$g'(3)=-3(3\cdot 3-10)^3=3$

$f'(3)\neq g'(3)$, dus de raaklijnen in A hebben niet dezelfde richting.
Emma heeft dus geen gelijk.

c $rc_{raaklijn}=13\frac{1}{2}$, dus $f'(x)=13\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2}(2x-5)^2=13\frac{1}{2}$

$(2x-5)^2=9$

$2x-5=3 \vee 2x-5=-3$

$2x=8 \vee 2x=2$

$x=4 \vee x=1$

$f(4)=8\frac{3}{4}$ en $f(1)=-4\frac{3}{4}$

Dus de punten zijn $(4, 8\frac{3}{4})$ en $(1, -4\frac{3}{4})$.

49 **a** $f(x)=\sqrt{x^2+9}-x^2+5x$ geeft $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot 2x-2x+5=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}-2x+5$

$f'(\sqrt{7})=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7+9}}-2\cdot\sqrt{7}+5=\frac{1}{4}\sqrt{7}-2\sqrt{7}+5=5-1\frac{3}{4}\sqrt{7}\neq 0$

Dus f heeft geen extreme waarde voor $x=\sqrt{7}$.

b Stel k: $y=ax+b$ met $a=rc_k=rc_l=5$.

$f'(x)=5$ geeft $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}-2x+5=5$

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=2x$

kwadrateren geeft

$\dfrac{x^2}{x^2+9}=4x^2$

$4x^2(x^2+9)=x^2$

$4x^4+36x^2=x^2$

$4x^4+35x^2=0$

$x^2(4x^2+35)=0$

$x^2=0 \vee 4x^2=-35$

$x=0$ geen opl.

$$\left.\begin{array}{l} y=5x+b \\ f(0)=3\text{, dus door }(0,3) \end{array}\right\} b=3$$

Dus k: $y=5x+3$.

c $f(0)=3$, dus $A(0, 3)$.

Stel m: $y=ax+b$ met $a=f'(4)=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+9}}-8+5=\dfrac{4}{\sqrt{25}}-3=\frac{4}{5}-3=-2\frac{1}{5}$.

$$\left.\begin{array}{l} y=-2\frac{1}{5}x+b \\ f(4)=9\text{, dus }B(4,9) \end{array}\right\} -2\tfrac{1}{5}\cdot 4+b=9$$

$-8\frac{4}{5}+b=9$

$b=17\frac{4}{5}$

Dus m: $y=-2\frac{1}{5}x+17\frac{4}{5}$ en $C(0, 17\frac{4}{5})$.

$AC=17\frac{4}{5}-3=14\frac{4}{5}$

50 **a** $f(x) = \dfrac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} = 5x^{2\frac{1}{2}} + 10x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 12\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 5x^{-1\frac{1}{2}} = 12\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \dfrac{5}{x\sqrt{x}} = \dfrac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}} = 0$

$12\frac{1}{2}x^3 - 5 = 0$

$12\frac{1}{2}x^3 = 5$

$x^3 = \dfrac{5}{12\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$

$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

$f(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}) = \dfrac{5 \cdot \frac{2}{5} + 10}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}} = \dfrac{12}{((\frac{2}{5})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{12}{(\frac{2}{5})^{\frac{1}{6}}} = \dfrac{12}{\sqrt[6]{\frac{2}{5}}}$

Dus $a = 12$, $b = 6$ en $c = \frac{2}{5}$.

b k raakt de grafiek van $g(x) = \dfrac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} + d$.

$g(x) = \dfrac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} + d$ geeft $g'(x) = \dfrac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = g'(1) = \dfrac{12\frac{1}{2} - 5}{1} = 7\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 7\frac{1}{2}x + b \\ g(1) = 15 + d, \text{ dus } A(1,\ 15 + d) \end{array}\right\} 7\tfrac{1}{2} \cdot 1 + b = 15 + d$$

$b = 7\frac{1}{2} + d$

k door de oorsprong, dus $7\frac{1}{2} + d = 0$

$d = -7\frac{1}{2}$

Bladzijde 73

51 **a** De tijd nodig van A naar B via C is $\frac{2}{80} + \frac{10}{100} = \frac{1}{8}$ uur $= 450$ seconden.

De afstand AB is $\sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104}$ km.

De tijd nodig van A direct naar B is $\dfrac{\sqrt{104}}{80}$ uur $= 458{,}9...$ seconden.

Het verschil is $458{,}9... - 450 \approx 9$ seconden.

b $t = \dfrac{AD}{80} + \dfrac{BD}{100} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2^2}}{80} + \dfrac{10 - x}{100} = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + \dfrac{10}{100} - \dfrac{x}{100} = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0{,}1 - 0{,}01x$

Dus $t = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0{,}1 - 0{,}01x$.

c $t(x) = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0{,}1 - 0{,}01x$ geeft $t'(x) = \frac{1}{80} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x - 0{,}01 = \dfrac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} - 0{,}01$

$t'(x) = 0$ geeft $\dfrac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} - 0{,}01 = 0$

$\dfrac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} = 0{,}01$

$x = 0{,}8\sqrt{x^2 + 4}$

kwadrateren geeft

$x^2 = 0{,}64(x^2 + 4)$

$x^2 = 0{,}64x^2 + 2{,}56$

$0{,}36x^2 = 2{,}56$

$x^2 = \frac{64}{9}$

$x = 2\frac{2}{3}$

$t(2\frac{2}{3}) = \frac{1}{80}\sqrt{(2\frac{2}{3})^2 + 4} + 0{,}1 - 0{,}01 \cdot 2\frac{2}{3} = 0{,}115$ uur $= 414$ seconden

De snelste route is $450 - 414 = 36$ seconden sneller dan via C naar B.

52 $f(x) = (ax-2)^4 + \frac{1}{2}ax$ geeft $f'(x) = 4(ax-2)^3 \cdot a + \frac{1}{2}a = 4a(ax-2)^3 + \frac{1}{2}a$

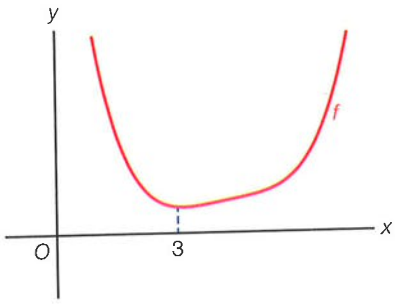
Een extreme waarde voor $x = 3$, dus $f'(3) = 0$.

Dit geeft $4a(a \cdot 3 - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$

$$4a(3a-2)^3 + \tfrac{1}{2}a = 0$$
$$a(4(3a-2)^3 + \tfrac{1}{2}) = 0$$
$$a = 0 \vee 4(3a-2)^3 + \tfrac{1}{2} = 0$$
$$a = 0 \vee 4(3a-2)^3 = -\tfrac{1}{2}$$
$$a = 0 \vee (3a-2)^3 = -\tfrac{1}{8}$$
$$a = 0 \vee 3a - 2 = -\tfrac{1}{2}$$
$$a = 0 \vee 3a = 1\tfrac{1}{2}$$
$$a = 0 \vee a = \tfrac{1}{2}$$

$a = 0$ geeft $f(x) = (-2)^4 + 0 = 16$ en deze functie heeft geen extreme waarde voor $x = 3$.

$a = \frac{1}{2}$ geeft $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^4 + \frac{1}{4}x$



f heeft een extreme waarde voor $x = 3$ als $a = \frac{1}{2}$.

53 $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ is het product van de factoren x en $\sqrt{2x+1}$.
Dus volgens de productregel is $f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]'$.
De afgeleide van $\sqrt{2x+1}$ bereken je met de kettingregel.

Bladzijde 74

54 **a** $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

b $g(x) = \dfrac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$ geeft

$$g'(x) = \frac{\sqrt{8x+9} \cdot 1 - (x+6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{8x+9}} \cdot 8}{(\sqrt{8x+9})^2} = \frac{\sqrt{8x+9} - \frac{4(x+6)}{\sqrt{8x+9}}}{8x+9} \cdot \frac{\sqrt{8x+9}}{\sqrt{8x+9}} = \frac{8x+9-4x-24}{(8x+9)\sqrt{8x+9}} = \frac{4x-15}{(8x+9)\sqrt{8x+9}}$$

55 **a** $f(x) = x\sqrt{3x+4}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{3x+4} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \cdot 3 = \sqrt{3x+4} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{2(3x+4)}{2\sqrt{3x+4}} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+4}}$$
$$= \frac{6x+8+3x}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}$$

b $g(x) = x(3x+1)^3$ geeft

$g'(x) = 1 \cdot (3x+1)^3 + x \cdot 3(3x+1)^2 \cdot 3 = (3x+1)^3 + 9x(3x+1)^2$
$= (3x+1)^2(3x+1+9x) = (3x+1)^2(12x+1)$

c $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ geeft

$$h'(x) = \frac{(2x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x - \sqrt{x^2+1}\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{(2x+1)\cdot x}{\sqrt{x^2+1}} - 2\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{(2x+1)\cdot x - 2(x^2+1)}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+x-2x^2-2}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{x-2}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

56 Voor $-\frac{4}{3} < x < 0$ is $x\sqrt{3x+4} < 0$ en $\sqrt{3x^3+4x^2} > 0$, dus $x\sqrt{3x+4} \neq \sqrt{3x^3+4x^2}$. Dit is de eerste fout.
$2\sqrt{3x^3+4x^2} = 2\cdot|x|\cdot\sqrt{3x+4} \neq 2x\sqrt{3x+4}$, dus $\dfrac{1}{2\sqrt{3x^3+4x^2}}\cdot(9x^2+8x) \neq \dfrac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}}$.
Dit is de tweede fout.
$\dfrac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}}$ is niet gedefinieerd voor $x = 0$ en $\dfrac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}$ wel, dus $\dfrac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}} \neq \dfrac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}$.
Dit is de derde fout.

57 **a** $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{3x+1}$ geeft

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3x+1} + \tfrac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot 3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3x+1} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{2(3x+1)}{4\sqrt{3x+1}} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}}$$

$$= \frac{6x+2+3x}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{9x+2}{4\sqrt{3x+1}}$$

b Het randpunt is $(-\frac{1}{3}, 0)$.

Stel k: $y = ax + b$ met $a = rc_l = f'(0) = \dfrac{0+2}{4\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (-\frac{1}{3}, 0) \end{array}\right\} \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{3} + b = 0$

$b = \frac{1}{6}$

Dus k: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$.

c $f'(x) = 1\frac{3}{8}$ geeft

$\dfrac{9x+2}{4\sqrt{3x+1}} = \dfrac{11}{8}$

$72x + 16 = 44\sqrt{3x+1}$

$18x + 4 = 11\sqrt{3x+1}$

kwadrateren geeft

$324x^2 + 144x + 16 = 121(3x+1)$

$324x^2 + 144x + 16 = 363x + 121$

$324x^2 - 219x - 105 = 0$

$D = (-219)^2 - 4\cdot 324\cdot -105 = 184\,041$

$x = \dfrac{219+429}{648} = 1 \vee x = \dfrac{219-429}{648} = -0{,}324...$

vold. vold. niet

$f(1) = 1$, dus $A(1, 1)$.

Bladzijde 75

58 **a** $8 - 2x \geq 0$

$-2x \geq -8$

$x \leq 4$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 4]$.

b $f(x) = x\sqrt{8-2x}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{8-2x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-2x}} \cdot -2 = \sqrt{8-2x} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-2x}{\sqrt{8-2x}} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}$$

c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 0$

$8 - 3x = 0$

$3x = 8$

$x = \frac{8}{3}$

$$f(\tfrac{8}{3}) = \tfrac{8}{3}\sqrt{\tfrac{8}{3}} = \tfrac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \tfrac{8}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \tfrac{8}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \tfrac{16}{9}\sqrt{6} = 1\tfrac{7}{9}\sqrt{6}$$

Dus de top is $(2\frac{2}{3}, 1\frac{7}{9}\sqrt{6})$ en $B_f = \langle \leftarrow, 1\frac{7}{9}\sqrt{6}]$.

d $f'(x) = 1$ geeft $\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 1$

$8 - 3x = \sqrt{8-2x}$

kwadrateren geeft

$64 - 48x + 9x^2 = 8 - 2x$

$9x^2 - 46x + 56 = 0$

$D = (-46)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 56 = 100$

$x = \frac{46+10}{18} = 3\frac{1}{9} \vee x = \frac{46-10}{18} = 2$

vold. niet vold.

$f(2) = 4$, dus $A(2, 4)$.

59 **a** $f(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{x^2+4}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot 4 - (4x+4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x}{x^2+4} = \frac{4\sqrt{x^2+4} - \frac{x(4x+4)}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4(x^2+4) - x(4x+4)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{4x^2+16-4x^2-4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{16-4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{16-4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = 0$

$16 - 4x = 0$

$-4x = -16$

$x = 4$

$$f(4) = \frac{16+4}{\sqrt{4^2+4}} = \frac{20}{\sqrt{20}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

De coördinaten van de top zijn $(4, 2\sqrt{5})$.

b $f(x) = 0$ geeft $4x + 4 = 0$

$4x = -4$

$x = -1$

Dus $A(-1, 0)$.

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(-1) = \dfrac{16+4}{((-1)^2+4)\sqrt{(-1)^2+4}} = \dfrac{20}{5\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot x + b \\ \text{door } A(-1, 0) \end{array}\right\} \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot -1 + b = 0$$

$b = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

Dus k: $y = \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot x + \frac{4}{5}\sqrt{5}$ en het snijpunt met de y-as is $(0, \frac{4}{5}\sqrt{5})$.

$f(0) = \dfrac{0+4}{\sqrt{0^2+4}} = 2$, dus $B(0, 2)$.

Dus bewering I is niet waar, de lijn k gaat niet door B.

Stel l: $y = ax + b$ met $a = f'(0) = \dfrac{16-0}{(0^2+4)\sqrt{0^2+4}} = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(0, 2) \end{array}\right\} b = 2$$

Dus l: $y = 2x + 2$.

l snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $2x + 2 = 0$

$2x = -2$

$x = -1$

Dus het snijpunt met de x-as is $(-1, 0)$.

Dus bewering II is waar, de lijn l gaat door A.

60 **a** $f(x) = 2x\sqrt{9-2x} - 3$ geeft

$$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{9-2x} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-2x}} \cdot -2 = 2\sqrt{9-2x} - \frac{2x}{\sqrt{9-2x}} = \frac{2(9-2x)}{\sqrt{9-2x}} - \frac{2x}{\sqrt{9-2x}}$$

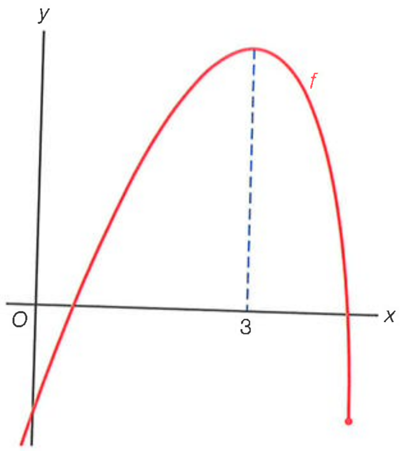
$$= \frac{18-4x-2x}{\sqrt{9-2x}} = \frac{18-6x}{\sqrt{9-2x}}$$

$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{18-6x}{\sqrt{9-2x}} = 0$

$18 - 6x = 0$

$-6x = -18$

$x = 3$



max. is $f(3) = 6\sqrt{3} - 3$.

b $9 - 2x \geq 0$
$-2x \geq -9$
$x \leq 4\frac{1}{2}$
Dus $D_f = \langle \leftarrow, 4\frac{1}{2}]$ en $B_f = \langle \leftarrow, 6\sqrt{3} - 3]$.

c Raaklijn evenwijdig met $y = 1\frac{1}{2}x$, dus $f'(x) = 1\frac{1}{2}$.

$f'(x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{18 - 6x}{\sqrt{9 - 2x}} = \dfrac{3}{2}$
$36 - 12x = 3\sqrt{9 - 2x}$
$12 - 4x = \sqrt{9 - 2x}$
kwadrateren geeft
$144 - 96x + 16x^2 = 9 - 2x$
$16x^2 - 94x + 135 = 0$
$D = (-94)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 135 = 196$
$x = \dfrac{94 + 14}{32} = 3\frac{3}{8} \vee x = \dfrac{94 - 14}{32} = 2\frac{1}{2}$
vold. niet vold.

$f(2\frac{1}{2}) = 7$, dus $A(2\frac{1}{2}, 7)$.

61 $f_p(x) = \dfrac{px}{\sqrt{x^2 + 9}}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} \cdot p - px \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x}{x^2 + 9} = \dfrac{p(x^2 + 9) - px^2}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}} = \dfrac{9p}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$

$f_p'(0) = \dfrac{9p}{9\sqrt{9}} = \frac{1}{3}p$

$f_p'(0) = 1$ geeft $\frac{1}{3}p = 1$
$p = 3$

$f_3(0) = 0$, dus voor $p = 3$ raakt de lijn $y = x$ de grafiek van f_p in de oorsprong.

6.4 Functies met parameters

Bladzijde 77

62 Raaklijn k heeft richtingscoëfficiënt $2\frac{1}{2}$, dus $f_p'(x) = 2\frac{1}{2}$.

Raken in het punt A met $x_A = 3$, dus $f_p'(3) = 2\frac{1}{2}$.

$f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px + 2$ geeft $f_p'(x) = \frac{1}{2}x + p$

$f_p'(3) = 2\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2} \cdot 3 + p = 2\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2} + p = 2\frac{1}{2}$
$p = 1$

63 **a** $f_p(x) = (x^2 + p) \cdot \sqrt{x} = x^{2\frac{1}{2}} + p\sqrt{x}$ geeft $f_p'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \dfrac{p}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x\sqrt{x}}{2} + \dfrac{p}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}} + \dfrac{p}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 + p}{2\sqrt{x}}$

b $f_p'(4) = \text{rc}_k$
$\dfrac{5 \cdot 4^2 + p}{2\sqrt{4}} = 18$
$\dfrac{80 + p}{4} = 18$
$80 + p = 72$
$p = -8$

c $f_{-8}(4) = (16 - 8) \cdot \sqrt{4} = 16$, dus $A(4, 16)$.

$\left.\begin{array}{l} y = 18x + q \\ \text{door } A(4, 16) \end{array}\right\}$ $18 \cdot 4 + q = 16$
$72 + q = 16$
$q = -56$

64 $f_p(x) = \sqrt{2x^2 + p}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+p}} \cdot 4x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+p}}$

$f_p'(1) = \frac{2}{3}$ geeft $\dfrac{2}{\sqrt{2+p}} = \frac{2}{3}$

$\sqrt{2+p} = 3$

$2 + p = 9$

$p = 7$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + q \\ f_7(1) = 3\text{, dus } A(1, 3) \end{array}\right\} \frac{2}{3} + q = 3$$

$q = 2\frac{1}{3}$

Dus $p = 7$ en $q = 2\frac{1}{3}$.

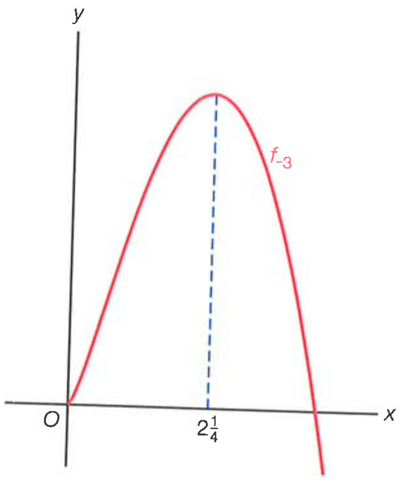
65 **a** $f_p(x) = 6x\sqrt{x} + px^2 = 6x^{1\frac{1}{2}} + px^2$ geeft $f_p'(x) = 9x^{\frac{1}{2}} + 2px = 9\sqrt{x} + 2px$

$f_p'(2\frac{1}{4}) = 0$ geeft $9 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + 2p \cdot 2\frac{1}{4} = 0$

$9 \cdot 1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}p = 0$

$4\frac{1}{2}p = -13\frac{1}{2}$

$p = -3$



Dus f_p heeft een maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$ als $p = -3$.

b k: $y = 5x + q$ raakt de grafiek van f_p in A met $x_A = 1$ geeft $f_p'(1) = \text{rc}_k$

$9 \cdot \sqrt{1} + 2p \cdot 1 = 5$

$9 + 2p = 5$

$2p = -4$

$p = -2$

$f_{-2}(x) = 6x\sqrt{x} - 2x^2$

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = 5x + q \\ f_{-2}(1) = 4\text{, dus } A(1, 4) \end{array}\right\} 5 \cdot 1 + q = 4$$

$q = -1$

Dus $p = -2$ en $q = -1$.

66 **a** $f_p(x) = \dfrac{4x+p}{x^2+1}$ geeft

$f_p'(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot 4 - (4x+p)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^2+4-8x^2-2px}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4x^2-2px+4}{(x^2+1)^2}$

$a = f_p'(0) = \dfrac{-4\cdot 0^2 - 2p\cdot 0 + 4}{(0^2+1)^2} = \dfrac{4}{1} = 4$

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = 4x+4 \text{ snijdt de } y\text{-as in } (0, 4) \\ f_p(0) = p\text{, dus door } (0, p) \end{array}\right\} p = 4$

Dus $a = 4$ en $p = 4$.

b l: $y = -x + b$ raakt de grafiek in A met $x_A = -1$, dus $f_p'(-1) = rc_l$.

$f_p'(-1) = -1$ geeft $\dfrac{-4\cdot(-1)^2 - 2p\cdot -1 + 4}{((-1)^2+1)^2} = -1$

$\dfrac{-4+2p+4}{(1+1)^2} = -1$

$\dfrac{2p}{4} = -1$

$2p = -4$

$p = -2$

$f_{-2}(x) = \dfrac{4x-2}{x^2+1}$

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = -x+b \\ f_{-2}(-1) = \dfrac{4\cdot -1 - 2}{(-1)^2+1} = -3\text{, dus } A(-1, -3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 + b = -3 \\ b = -4 \end{array}$

Dus l: $y = -x - 4$.

c Een extreme waarde voor $x = 2$ geeft $f_p'(2) = 0$

$\dfrac{-4\cdot 2^2 - 2p\cdot 2 + 4}{(2^2+1)^2} = 0$

$-12 - 4p = 0$

$-4p = 12$

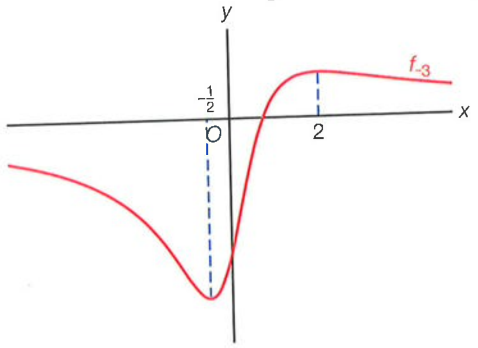
$p = -3$

$f_{-3}'(x) = \dfrac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$

$f_{-3}'(x) = 0$ geeft $-4x^2 + 6x + 4 = 0$

$D = 6^2 - 4\cdot -4\cdot 4 = 100$

$x = \dfrac{-6+10}{-8} = -\frac{1}{2} \vee x = \dfrac{-6-10}{-8} = 2$



min. is $f_{-3}(-\frac{1}{2}) = -4$.

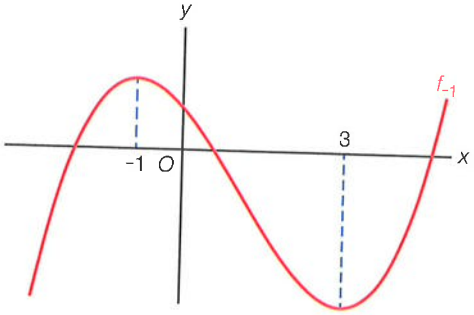
67 **a** $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p$ geeft $f_p'(x) = x^2 + 2px - 3$
f_p heeft twee extremen als $f_p'(x) = 0$ twee oplossingen heeft.
$D = (2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot {-3} = 4p^2 + 12$
$4p^2 + 12$ is voor elke p groter dan nul, dus $f_p'(x) = 0$ heeft voor elke p twee oplossingen.

b f_p heeft een extreme waarde voor $x = 3$, dus $f_p'(3) = 0$

$$\begin{aligned} 3^2 + 2p \cdot 3 - 3 &= 0 \\ 9 + 6p - 3 &= 0 \\ 6p &= -6 \\ p &= -1 \end{aligned}$$

$f_{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ en $f_{-1}'(x) = x^2 - 2x - 3$
$f_{-1}'(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\begin{aligned} (x+1)(x-3) &= 0 \\ x = -1 &\vee x = 3 \end{aligned}$$



max. is $f_{-1}(-1) = 2\frac{2}{3}$.

c $l\colon y = -x + q$ raakt de grafiek van f_p in B met $x_B = -2$, dus $f_p'(-2) = \text{rc}_l$

$$\begin{aligned} (-2)^2 + 2p \cdot {-2} - 3 &= -1 \\ -4p &= -2 \\ p &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &l\colon y = -x + q \\ &f_{\frac{1}{2}}(-2) = 4\tfrac{5}{6}, \text{ dus } B(-2, 4\tfrac{5}{6}) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 2 + q &= 4\tfrac{5}{6} \\ q &= 2\tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

Dus $p = \frac{1}{2}$ en $q = 2\frac{5}{6}$.

68 $f_{p,q}(2) = 2$ geeft $\dfrac{2+p}{\sqrt{4+q}} = 2$

$$\begin{aligned} 2 + p &= 2\sqrt{4+q} \\ p &= -2 + 2\sqrt{4+q} \end{aligned}$$

$f_{p,q}(x) = \dfrac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ geeft

$$f_{p,q}'(x) = \frac{\sqrt{x^2+q} \cdot 1 - (x+p) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+q}} \cdot 2x}{x^2+q} = \frac{\sqrt{x^2+q} - \dfrac{x(x+p)}{\sqrt{x^2+q}}}{x^2+q} = \frac{x^2+q-x(x+p)}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}} = \frac{q-px}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}}$$

$f_{p,q}'(2) = -\frac{1}{9}$ geeft $\dfrac{q-2p}{(4+q)\sqrt{4+q}} = -\dfrac{1}{9}$

$$\begin{aligned} q - 2p &= -\tfrac{1}{9}(4+q)\sqrt{4+q} \\ -2p &= -q - \tfrac{1}{9}(4+q)\sqrt{4+q} \\ p &= \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{18}(4+q)\sqrt{4+q} \end{aligned}$$

Voer in $y_1 = -2 + 2\sqrt{4+x}$ en $y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{18}(4+x)\sqrt{4+x}$.
De optie snijpunt geeft $x = -4$ en $y = -2$ en ook $x = 5$ en $y = 4$.
$p = -2$ en $q = -4$ voldoet niet, want $A(2, 2)$ ligt niet op de grafiek van $f_{-2,-4}(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$.
Dus $p = 4$ en $q = 5$.

69 $f_p'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + px + 3$ geeft $f_p'(x) = -\frac{1}{2}x + p$

$f_p'(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x + p = 0$

$p = \frac{1}{2}x$

Bladzijde 80

70 **a** Je hoeft alleen de formule op te stellen van de kromme waarop alle toppen liggen. Je hoeft niet aan te tonen dat alle punten van die kromme een top zijn.

b $f_p'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2p \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$, dus voor elke waarde van p geldt dat $f_p'(0) \neq 0$, dus $(0, 3)$ is geen top van een van de grafieken van f_p.

c De formule van de kromme waarop alle toppen liggen, wil niet zeggen dat elk punt op de kromme per se een top is. Het punt $(0, 3)$ ligt dus wel op de kromme, maar hoeft dus geen top te zijn.

Bladzijde 81

71 $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5$ geeft $f_p'(x) = x^2 + 2px + 3$

$f_p'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2px + 3 = 0$

$2px = -x^2 - 3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \dfrac{-x^2-3}{2x} \\ y = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x^3 + \dfrac{-x^2-3}{2x} \cdot x^2 + 3x + 5 \\ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x + 3x + 5 \\ y = -\frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x + 5 \end{array}$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -\frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x + 5$.

72 **a** Extreme waarde voor $x = 1$, dus $f_p'(1) = 0$.

$$f_p(x) = \frac{x+p}{x^2+4} \text{ geeft } f_p'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot 1 - (x+p) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2 + 4 - 2x^2 - 2px}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2 - 2px + 4}{(x^2+4)^2}$$

$$f_p'(1) = 0 \text{ geeft } \frac{-1^2 - 2p \cdot 1 + 4}{(1^2+4)^2} = 0$$

$-1 - 2p + 4 = 0$

$-2p = -3$

$p = 1\frac{1}{2}$

$$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = \frac{-x^2 - 3x + 4}{(x^2+4)^2}$$

$$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-x^2 - 3x + 4}{(x^2+4)^2} = 0$$

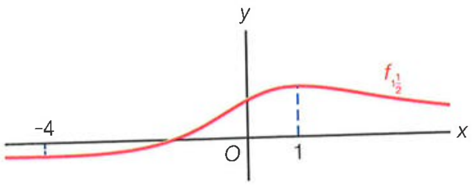
$-x^2 - 3x + 4 = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x - 1)(x + 4) = 0$

$x = 1 \vee x = -4$

$$f_{1\frac{1}{2}}(-4) = \frac{-4 + 1\frac{1}{2}}{(-4)^2 + 4} = \frac{-2\frac{1}{2}}{20} = -\frac{1}{8}$$



Dus $p = 1\frac{1}{2}$ en min. is $f_{1\frac{1}{2}}(-4) = -\frac{1}{8}$.

b $f_p'(x) = 0$ geeft $\dfrac{-x^2 - 2px + 4}{(x^2+4)^2} = 0$

$-x^2 - 2px + 4 = 0$

$-2px = x^2 - 4$

$$\left.\begin{array}{l} \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \dfrac{-x^2+4}{2x} \\ y = \dfrac{x+p}{x^2+4} \end{array}\right\} y = \dfrac{x + \dfrac{-x^2+4}{2x}}{x^2+4}$$

$y = \dfrac{2x^2 - x^2 + 4}{2x(x^2+4)}$

$y = \dfrac{x^2+4}{2x(x^2+4)}$

$y = \dfrac{1}{2x}$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = \dfrac{1}{2x}$.

73 **a** $f_p(x) = (p - x^2) \cdot \sqrt{x} = p\sqrt{x} - x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{p}{2\sqrt{x}} - 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = \dfrac{p}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5x\sqrt{x}}{2} = \dfrac{p - 5x^2}{2\sqrt{x}}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $\dfrac{p - 5x^2}{2\sqrt{x}} = 0$

$p - 5x^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} p = 5x^2 \\ y = (p - x^2) \cdot \sqrt{x} \end{array}\right\} y = (5x^2 - x^2) \cdot \sqrt{x}$$

$y = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$.

b $y = 8$

$4x^2 \cdot \sqrt{x} = 8$

$x^2\sqrt{x} = 2$

$x^5 = 4$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4^{\frac{1}{5}} \\ p = 5x^2 \end{array}\right\} p = 5 \cdot (4^{\frac{1}{5}})^2 = 5 \cdot 4^{\frac{2}{5}} = 5 \cdot \sqrt[5]{16}$$

74 **a** $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + 1\frac{1}{2} = 3$ en $g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3$

Dus $A(1, 3)$ ligt op de grafiek van f en op de grafiek van g.

b $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = x + 1$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = 2x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array}\right\} 2 + b = 3$$

$b = 1$

Dus k: $y = 2x + 1$.

$g(x) = -x^2 + 4x$ geeft $g'(x) = -2x + 4$

Stel l: $y = ax + b$ met $a = g'(1) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = 2x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array}\right\} 2 + b = 3$$

$b = 1$

Dus l: $y = 2x + 1$.

c A is het punt waar de raaklijnen van de grafieken van f en g samenvallen.

Bladzijde 82

75 De grafieken hebben voor $x = -3$ geen punt gemeenschappelijk, dus ze raken elkaar niet. Wel geldt dat voor $x = -3$ de raaklijn van de grafiek van f en de raaklijn van de grafiek van g evenwijdig zijn.

76 **a** $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$
$g(x) = x^2 + 11x + 28$ geeft $g'(x) = 2x + 11$
$f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$
$x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = x^2 + 11x + 28 \wedge 3x^2 + 8x + 2 = 2x + 11$
$x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0 \wedge 3x^2 + 6x - 9 = 0$
$3x^2 + 6x - 9 = 0$ geeft $x^2 + 2x - 3 = 0$
$(x - 1)(x + 3) = 0$
$x = 1 \vee x = -3$
Substitutie van $x = 1$ in $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ geeft
$1 + 3 - 9 - 27 = 0$ klopt niet.
Substitutie van $x = -3$ in $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ geeft
$-27 + 27 + 27 - 27 = 0$ klopt, dus de grafieken raken elkaar voor $x = -3$.
$f(-3) = 4$, dus het raakpunt is $(-3, 4)$.

b $g'(-3) = -6 + 11 = 5$
$$\left.\begin{array}{l} y = 5x + b \\ \text{door } (-3, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 \cdot -3 + b = 4 \\ b = 19 \end{array}$$
Dus de gemeenschappelijke raaklijn is $y = 5x + 19$.

77 **a** $f(x) = \sqrt{2x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

$g_1(x) = x^2 + 1$ geeft $g_1'(x) = 2x$
$f(x) = g_1(x) \wedge f'(x) = g_1'(x)$
$\sqrt{2x} = x^2 + 1 \wedge \dfrac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$
$\sqrt{2x} = x^2 + 1 \wedge 2x\sqrt{2x} = 1$
$2x\sqrt{2x} = 1$ kwadrateren geeft $(2x)^3 = 1$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$
Substitutie van $x = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2x} = x^2 + 1$ geeft
$\sqrt{1} = \frac{1}{4} + 1$ klopt niet.
Dus de grafieken van f en g_1 raken elkaar niet.

b $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g_p'(x)$
$\sqrt{2x} = x^2 + p \wedge \dfrac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$
$x = \frac{1}{2}$
Substitutie van $x = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2x} = x^2 + p$ geeft $\sqrt{1} = \frac{1}{4} + p$
$p = \frac{3}{4}$
Dus de grafieken raken elkaar voor $p = \frac{3}{4}$.

Bladzijde 83

78 **a** De grafieken van $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3}$ raken elkaar als

$f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$

$x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3} \wedge 3x^2 - 4x = x^2$

$3x^2 - 4x = x^2$ geeft $2x^2 - 4x = 0$

$2x(x-2) = 0$

$x = 0 \vee x = 2$

$x = 0 \wedge x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3}$ geeft $0 = -2\frac{2}{3}$, dus voldoet niet.

$x = 2 \wedge x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3}$ geeft $8 - 8 = \frac{1}{3} \cdot 8 - 2\frac{2}{3}$ klopt.

Dus de grafieken raken elkaar voor $x = 2$.

$f(2) = 0$, dus het raakpunt is $(2, 0)$.

b $h(x) = -x^2 + 8x - 12$ geeft $h'(x) = -2x + 8$

$k_p(x) = x^2 + px$ geeft $k_p{}'(x) = 2x + p$

$h(x) = k_p(x) \wedge h'(x) = k_p{}'(x)$

$-x^2 + 8x - 12 = x^2 + px \wedge -2x + 8 = 2x + p$

$-2x^2 + (8-p)x - 12 = 0 \wedge -4x + 8 = p$

Substitutie van $p = -4x + 8$ in $-2x^2 + (8-p)x - 12 = 0$ geeft $-2x^2 + (8 - (-4x+8))x - 12 = 0$

$-2x^2 + (8 + 4x - 8)x - 12 = 0$

$-2x^2 + 4x^2 - 12 = 0$

$2x^2 = 12$

$x^2 = 6$

$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{6} \\ p = -4x + 8 \end{array}\right\} p = -4\sqrt{6} + 8$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\sqrt{6} \\ p = -4x + 8 \end{array}\right\} p = 4\sqrt{6} + 8$$

Dus $p = -4\sqrt{6} + 8 \vee p = 4\sqrt{6} + 8$.

79 $f_{p,q}(x) = \dfrac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ geeft

$$f_{p,q}{}'(x) = \frac{\sqrt{x^2+q} \cdot 1 - (x+p) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+q}} \cdot 2x}{x^2+q} = \frac{\sqrt{x^2+q} - \dfrac{x(x+p)}{\sqrt{x^2+q}}}{x^2+q} = \frac{x^2+q-x(x+p)}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}} = \frac{q-px}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}}$$

$g(x) = -1\frac{3}{8}x^2 + 2\frac{7}{8}x$ geeft $g'(x) = -2\frac{3}{4}x + 2\frac{7}{8}$

De grafieken van $f_{p,q}$ en g raken elkaar voor $x = 1$, dus

$f_{p,q}(1) = g(1) \wedge f_{p,q}{}'(1) = g'(1)$

$\dfrac{1+p}{\sqrt{1+q}} = -1\frac{3}{8} + 2\frac{7}{8} \wedge \dfrac{q-p}{(1+q)\sqrt{1+q}} = -2\frac{3}{4} + 2\frac{7}{8}$

$\dfrac{1+p}{\sqrt{1+q}} = \frac{3}{2} \wedge \dfrac{q-p}{(1+q)\sqrt{1+q}} = \frac{1}{8}$

$2 + 2p = 3\sqrt{1+q} \wedge 8q - 8p = (1+q)\sqrt{1+q}$

$2p = -2 + 3\sqrt{1+q} \wedge -8p = -8q + (1+q)\sqrt{1+q}$

$p = -1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{1+q} \wedge p = q - \frac{1}{8}(1+q)\sqrt{1+q}$

Hieruit volgt $-1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{1+q} = q - \frac{1}{8}(1+q)\sqrt{1+q}$.

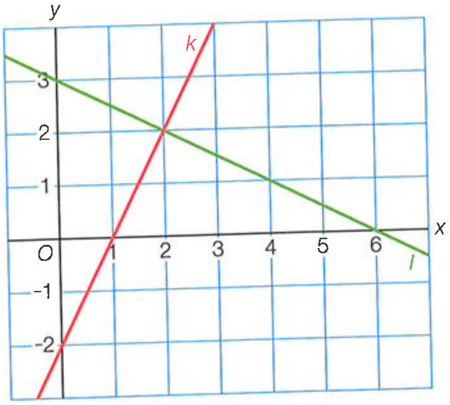
Voer in $y_1 = -1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{1+x}$ en $y_2 = x - \frac{1}{8}(1+x)\sqrt{1+x}$.

De optie snijpunt geeft $x = -1$ en $y = -1$, $x = 3$ en $y = 2$, en $x = 35$ en $y = 8$.

$p = -1$ en $q = -1$ voldoet niet, want het punt A met $x_A = 1$ ligt niet op de grafiek van $f_{-1,-1}(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Dus $p = 2$ en $q = 3$ of $p = 8$ en $q = 35$.

80 **a**



b Ja, bij de lijn k ga je 1 naar rechts en 2 omhoog, bij de lijn l ga je 2 naar rechts en 1 omlaag.

c m loodrecht op k, oftewel m evenwijdig met l.

Stel m: $y = ax + b$ met $a = rc_m = rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(4, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus m: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

d $rc_p = \frac{1}{4}$, dus bij p ga je 4 naar rechts en 1 omhoog.
Dus bij n ga je 1 naar rechts en 4 omlaag.
Stel n: $y = ax + b$ met $a = rc_n = -4$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ \text{door } B(1, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 7 \end{array}$$

Dus n: $y = -4x + 7$.

Bladzijde 84

81 **a** $f(x) = \sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10$ geeft $g'(x) = -x$.

$f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$

$\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x^2 + 10 \wedge \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1$ geeft $\dfrac{x}{2\sqrt{x}} = 1$

$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 1$

$\sqrt{x} = 2$

$x = 4$

Substitutie van $x = 4$ in $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x^2 + 10$ geeft $\sqrt{4} = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 10$

$2 = -8 + 10$

$2 = 2$

Dit klopt, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

b $h_p(x) = p\sqrt{x}$ geeft $h_p'(x) = \dfrac{p}{2\sqrt{x}}$ en $k(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3}$ geeft $k'(x) = -\frac{1}{3}x$.

$h_p(x) = k(x) \wedge h_p'(x) \cdot k'(x) = -1$

$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge \dfrac{p}{2\sqrt{x}} \cdot -\frac{1}{3}x = -1$

$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge -\frac{1}{6}p\sqrt{x} = -1$

$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge p\sqrt{x} = 6$

Hieruit volgt $6 = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3}$

$\frac{1}{6}x^2 = 2\frac{2}{3}$

$x^2 = 16$

$x = 4 \vee x = -4$

$x = 4$ geeft $p\sqrt{4} = 6$

$2p = 6$

$p = 3$

$x = -4$ voldoet niet.

$k(4) = 6$

Dus $p = 3$ en het snijpunt is $(4, 6)$.

Bladzijde 85

82 **a** $f(x) = x^2 - 4x$ geeft $f'(x) = 2x - 4$

$f'(5) = 10 - 4 = 6$

$rc_k \cdot 6 = -1$, dus $rc_k = -\frac{1}{6}$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = -\frac{1}{6}x + b \\ \text{door } A(5, 5) \end{array}\right\} -\frac{5}{6} + b = 5$$

$b = 5\frac{5}{6}$

Dus $k\colon y = -\frac{1}{6}x + 5\frac{5}{6}$.

b $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ geeft $g'(x) = \dfrac{(x+2)\cdot 2 - (2x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

$g(x) = -5x + p \wedge g'(x) \cdot rc_l = -1$

$\dfrac{2x-1}{x+2} = -5x + p \wedge \dfrac{5}{(x+2)^2} \cdot -5 = -1$

$p = 5x + \dfrac{2x-1}{x+2} \wedge \dfrac{25}{(x+2)^2} = 1$

$\dfrac{25}{(x+2)^2} = 1$ geeft $(x+2)^2 = 25$

$x + 2 = 5 \vee x + 2 = -5$

$x = 3 \vee x = -7$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ p = 5x + \dfrac{2x-1}{x+2} \end{array}\right\} p = 15 + \frac{5}{5} = 16$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -7 \\ p = 5x + \dfrac{2x-1}{x+2} \end{array}\right\} p = -35 + \frac{-15}{-5} = -32$$

Dus $p = 16 \vee p = -32$.

83 **a** $f(x) = x^2 - x$ geeft $f'(x) = 2x - 1$ en $g_p(x) = \frac{p}{x} = px^{-1}$ geeft $g_p'(x) = -px^{-2} = \frac{-p}{x^2}$.

$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g_p'(x)$

$x^2 - x = \frac{p}{x} \wedge (2x - 1) = \frac{-p}{x^2}$

$x^3 - x^2 = p \wedge 2x^3 - x^2 = -p$

$p = x^3 - x^2 \wedge p = -2x^3 + x^2$

$x^3 - x^2 = -2x^3 + x^2$

$3x^3 - 2x^2 = 0$

$x^2(3x - 2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}$

vold. niet vold.

$\left.\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ p = x^3 - x^2 \end{array}\right\} p = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$

$f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}$

Dus $p = -\frac{4}{27}$ en $A(\frac{2}{3}, -\frac{2}{9})$.

b $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$x^2 - x = \frac{p}{x} \wedge (2x - 1) \cdot \frac{-p}{x^2} = -1$

$x^3 - x^2 = p \wedge p(2x - 1) = x^2$

$(x^3 - x^2)(2x - 1) = x^2$

$x^2(x - 1)(2x - 1) = x^2$

$x \neq 0$, dus $(x - 1)(2x - 1) = 1$

$2x^2 - 3x + 1 = 1$

$2x^2 - 3x = 0$

$x(2x - 3) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$

vold. niet vold.

$\left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ p = x^3 - x^2 \end{array}\right\} p = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

Dus $p = 1\frac{1}{8}$ en $B(1\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

84 $f_{p,q}(x) = \frac{x + p}{\sqrt{x^2 + q}}$ geeft $f_{p,q}'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + q} \cdot 1 - (x + p) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + q}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2 + q})^2} = \frac{x^2 + q - x(x + p)}{(x^2 + q)\sqrt{x^2 + q}} = \frac{q - px}{(x^2 + q)\sqrt{x^2 + q}}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1\frac{1}{2}$ geeft $g'(x) = 2x - 3$

De grafieken van $f_{p,q}$ en g snijden elkaar loodrecht voor $x = 4$, dus

$f_{p,q}(4) = g(4) \wedge f_{p,q}'(4) \cdot g'(4) = -1$

$\frac{4 + p}{\sqrt{16 + q}} = 2\frac{1}{2} \wedge \frac{q - 4p}{(16 + q)\sqrt{16 + q}} \cdot 5 = -1$

$4 + p = 2\frac{1}{2}\sqrt{16 + q} \wedge 5q - 20p = -(16 + q)\sqrt{16 + q}$

$p = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16 + q} \wedge -20p = -5q - (16 + q)\sqrt{16 + q}$

$p = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16 + q} \wedge p = \frac{1}{4}q + \frac{1}{20}(16 + q)\sqrt{16 + q}$

Hieruit volgt $-4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16 + q} = \frac{1}{4}q + \frac{1}{20}(16 + q)\sqrt{16 + q}$.

Voer in $y_1 = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16 + x}$ en $y_2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}(16 + x)\sqrt{16 + x}$.

De optie snijpunt geeft $x = -16$ en $y = -4$, en $x = 9$ en $y = 8\frac{1}{2}$.

$p = -4$ en $q = -16$ voldoet niet, want het punt A met $x_A = 4$ ligt niet op de grafiek van $f_{-4,-16}(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 16}}$.

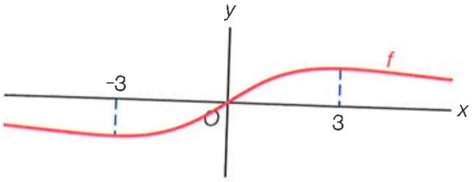
Dus $p = 8\frac{1}{2}$ en $q = 9$.

Diagnostische toets

Bladzijde 88

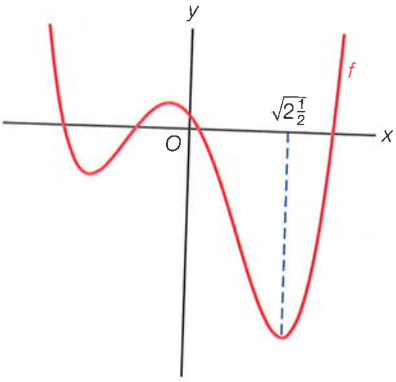
1 $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+9}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2+9)\cdot 6 - 6x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{6x^2+54-12x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-6x^2+54}{(x^2+9)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $-6x^2 + 54 = 0$
$-6x^2 = -54$
$x^2 = 9$
$x = 3 \vee x = -3$



min. is $f(-3) = -1$ en max. is $f(3) = 1$.
$f(x) = 0$ geeft $6x = 0$, dus $x = 0$.
De grafiek snijdt de x-as alleen in $(0, 0)$, dus $B_f = [-1, 1]$.

2 $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$ geeft $f'(x) = 36x^3 + 12x^2 - 90x - 30$
$f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 36 \cdot 2\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{1}{2}} + 12 \cdot 2\frac{1}{2} - 90\sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 90\sqrt{2\frac{1}{2}} + 30 - 90\sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 0$



$f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.
Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

3 **a** $f(x) = 4 - (x^3+1)^2 = 4 - (x^6 + 2x^3 + 1) = -x^6 - 2x^3 + 3$ geeft $f'(x) = -6x^5 - 6x^2$
$f'(x) = 0$ geeft $-6x^5 - 6x^2 = 0$
$-6x^2(x^3+1) = 0$
$-6x^2 = 0 \vee x^3 = -1$
$x = 0 \vee x = -1$
$f(-1) = 4$, dus de top is $(-1, 4)$.

b $f'(x) = -6x^5 - 6x^2$ geeft $f''(x) = -30x^4 - 12x$
$f''(x) = 0$ geeft $-30x^4 - 12x = 0$
$-6x(5x^3 + 2) = 0$
$-6x = 0 \vee 5x^3 = -2$
$x = 0 \vee x^3 = -\frac{2}{5}$
$x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-\frac{2}{5}}$
$f(0) = 3$ en $f(\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}) = 4 - (-\frac{2}{5} + 1)^2 = 4 - \frac{9}{25} = 3\frac{16}{25}$
Dus de buigpunten zijn $(0, 3)$ en $(\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}, 3\frac{16}{25})$.

4 **a** $f(x) = \frac{5}{x^6} = 5x^{-6}$ geeft $f'(x) = -30x^{-7} = -\frac{30}{x^7}$

b $g(x) = \frac{x^6 - 2x^4}{x^5} = x - 2x^{-1}$ geeft $g'(x) = 1 + 2x^{-2} = 1 + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}$

c $h(x) = 4x^3 - \frac{3x - 2}{x^3} = 4x^3 - 3x^{-2} + 2x^{-3}$ geeft

$h'(x) = 12x^2 + 6x^{-3} - 6x^{-4} = 12x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} = 12x^2 + \frac{6x - 6}{x^4}$

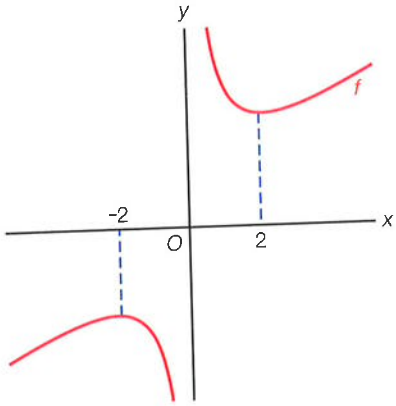
5 **a** $f(x) = 2x + \frac{8}{x} + 1 = 2x + 8x^{-1} + 1$ geeft $f'(x) = 2 - 8x^{-2} = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$



max. is $f(-2) = -7$ en min. is $f(2) = 9$.

b $f'(x) = -6$ geeft $\frac{2x^2 - 8}{x^2} = -6$

$2x^2 - 8 = -6x^2$

$8x^2 = 8$

$x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

$f(1) = 11$ en $f(-1) = -9$

Dus de raakpunten zijn $(1, 11)$ en $(-1, -9)$.

c $f'(x) = 3$ geeft $\frac{2x^2 - 8}{x^2} = 3$

$2x^2 - 8 = 3x^2$

$-x^2 = 8$

$x^2 = -8$

geen oplossingen

Er is dus geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 3.

6 **a** $f(x) = \frac{8x^6 - x^4}{x\sqrt{x}} = \frac{8x^6 - x^4}{x^{1\frac{1}{2}}} = 8x^{4\frac{1}{2}} - x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 36x^{3\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 36x^3 \cdot \sqrt{x} - 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{6x - x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^3} = \frac{6x - x^{2\frac{1}{3}}}{x^3} = 6x^{-2} - x^{-\frac{2}{3}}$ geeft $g'(x) = -12x^{-3} + \frac{2}{3}x^{-1\frac{2}{3}} = \frac{-12}{x^3} + \frac{2x^{1\frac{1}{3}}}{3x^3} = \frac{-36 + 2x \cdot \sqrt[3]{x}}{3x^3}$

c $h(x) = (x^2 + 2\sqrt{x})^2 = x^4 + 4x^2 \cdot \sqrt{x} + 4x = x^4 + 4x^{2\frac{1}{2}} + 4x$ geeft

$h'(x) = 4x^3 + 10x^{1\frac{1}{2}} + 4 = 4x^3 + 10x\sqrt{x} + 4$

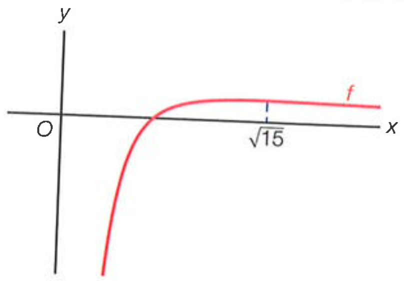
7 $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2\cdot\sqrt{x}}=\frac{x^2-3}{x^{2\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}+7\frac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}}=\frac{-x^2}{2x^{3\frac{1}{2}}}+\frac{15}{2x^{3\frac{1}{2}}}=\frac{-x^2+15}{2x^3\cdot\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$ geeft $-x^2+15=0$

$x^2=15$

$x=\sqrt{15}\vee x=-\sqrt{15}$

vold. vold. niet



$y_{top}=f(\sqrt{15})=\frac{15-3}{15\cdot\sqrt{\sqrt{15}}}=\frac{12}{15\cdot\sqrt[4]{15}}=\frac{4}{5\cdot\sqrt[4]{15}}$

Dus $a=4$, $b=5$ en $c=15$ zijn mogelijke waarden.

Bladzijde 89

8 **a** $f(x)=x^3-\frac{5}{(2x^2-x)^4}=x^3-5(2x^2-x)^{-4}$ geeft $f'(x)=3x^2+20(2x^2-x)^{-5}\cdot(4x-1)=3x^2+\frac{80x-20}{(2x^2-x)^5}$

b $g(x)=\sqrt{x^2-6x+15}$ geeft $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-6x+15}}\cdot(2x-6)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+15}}$

c $h(x)=(x^2+2)\sqrt{x^2+2}=(x^2+2)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x)=1\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=3x\sqrt{x^2+2}$

9 **a** $f(x)=\frac{1}{3}(x^2-2)^3-x^2$ geeft $f'(x)=(x^2-2)^2\cdot 2x-2x=2x(x^2-2)^2-2x$

$f'(x)=0$ geeft $2x(x^2-2)^2-2x=0$

$2x((x^2-2)^2-1)=0$

$2x=0\vee(x^2-2)^2=1$

$x=0\vee x^2-2=1\vee x^2-2=-1$

$x=0\vee x^2=3\vee x^2=1$

$x=0\vee x=\sqrt{3}\vee x=-\sqrt{3}\vee x=1\vee x=-1$

b Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(2)=4\cdot 2^2-4=12$.

$$\left.\begin{array}{l} y=12x+b \\ f(2)=-1\frac{1}{3}\text{, dus } A(2,-1\frac{1}{3})\end{array}\right\}\begin{array}{l}12\cdot 2+b=-1\frac{1}{3}\\ 24+b=-1\frac{1}{3}\\ b=-25\frac{1}{3}\end{array}$$

Dus k: $y=12x-25\frac{1}{3}$.

$y=0$ geeft $12x-25\frac{1}{3}=0$

$12x=\frac{76}{3}$

$x=\frac{76}{36}=2\frac{1}{9}$

Dus $x_B=2\frac{1}{9}$.

10 **a** $f(x) = x\sqrt{50 - x^2}$ geeft

$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{50 - x^2} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{50 - x^2}} \cdot -2x = \sqrt{50 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{50 - x^2}} = \dfrac{50 - x^2 - x^2}{\sqrt{50 - x^2}} = \dfrac{50 - 2x^2}{\sqrt{50 - x^2}}$

$f'(x) = 0$ geeft $50 - 2x^2 = 0$
$x^2 = 25$
$x = 5 \vee x = -5$

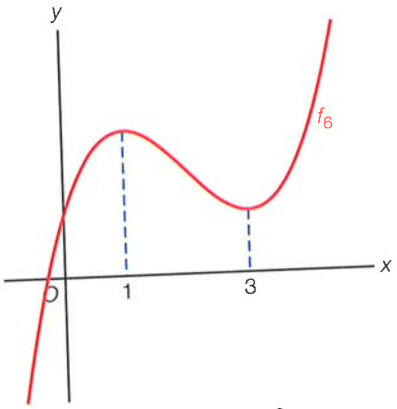
min. is $f(-5) = -25$ en max. is $f(5) = 25$.
Dus $B_f = [-25, 25]$.

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = \dfrac{50 - 2}{\sqrt{50 - 1}} = \dfrac{48}{\sqrt{49}} = 6\frac{6}{7}$.

$\left.\begin{array}{l} y = 6\frac{6}{7}x + b \\ f(1) = 7\text{, dus } A(1, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6\frac{6}{7} \cdot 1 + b = 7 \\ b = \frac{1}{7} \end{array}$

Dus k: $y = 6\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}$.

11 **a** $f_p(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + px + 2$ geeft $f_p'(x) = 2x^2 - 8x + p$
$f_p'(3) = 0$ geeft $18 - 24 + p = 0$
$p = 6$
$f_6(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2$ en $f_6'(x) = 2x^2 - 8x + 6$
$f_6'(x) = 0$ geeft $2x^2 - 8x + 6 = 0$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$(x - 1)(x - 3) = 0$
$x = 1 \vee x = 3$



$f_6(1) = \frac{2}{3} - 4 + 6 + 2 = 4\frac{2}{3}$
Dus max. is $f_6(1) = 4\frac{2}{3}$.

b Voor raken geldt $f_p(-1) = 12 + q \wedge f_p'(-1) = 12$
$f_p'(-1) = 12$ geeft $2 + 8 + p = 12$
$p = 2$
$f_2(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 2x + 2$
$f_2(-1) = -12 + q$ geeft $-\frac{2}{3} - 4 - 2 + 2 = -12 + q$
$q = 7\frac{1}{3}$

Dus $p = 2$ en $q = 7\frac{1}{3}$.

12 $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4$ geeft $f_p'(x) = -x^2 + 2px + 3$
$f_p'(x) = 0$ geeft $-x^2 + 2px + 3 = 0$

$$2px = x^2 - 3$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \dfrac{x^2-3}{2x} \\ y = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4\end{array}\right\} y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2-3}{2x} \cdot x^2 + 3x - 4$$

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x + 3x - 4$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 4$$

De formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 4$.

13 **a** $f(x) = x^3 - 3x$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 3$
$g_p(x) = px + 16$ geeft $g_p'(x) = p$
$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g_p'(x)$
$x^3 - 3x = px + 16 \wedge 3x^2 - 3 = p$
Substitutie van $p = 3x^2 - 3$ in $x^3 - 3x = px + 16$ geeft $x^3 - 3x = (3x^2 - 3)x + 16$

$$x^3 - 3x = 3x^3 - 3x + 16$$

$$-2x^3 = 16$$

$$x^3 = -8$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ p = 3x^2 - 3 \end{array}\right\} p = 12 - 3 = 9$$

Dus voor $p = 9$ raken de grafieken elkaar.

b $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$g_p(x) = px + 4$ geeft $g_p'(x) = p$
$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$$\sqrt{x^2+1} = px + 4 \wedge \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot p = -1$$

$$\sqrt{x^2+1} = px + 4 \wedge p = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Dit geeft $\sqrt{x^2+1} = \dfrac{-\sqrt{x^2+1}}{x} \cdot x + 4$

$$\sqrt{x^2+1} = -\sqrt{x^2+1} + 4$$

$$2\sqrt{x^2+1} = 4$$

$$\sqrt{x^2+1} = 2$$

$$x^2 + 1 = 4$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

$x = \sqrt{3}$ geeft $p = -\dfrac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3}$ geeft $p = -\dfrac{\sqrt{3+1}}{-\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Dus voor $p = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ en voor $p = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ snijden de grafieken elkaar loodrecht.