

19 Bewegingsvergelijkingen

Voorkennis

V1 a $f(x) = (3x^2 - 6) \cdot \sin(x)$
 $f'(x) = 6x \cdot \sin(x) + (3x^2 - 6) \cdot \cos(x)$

b $g(x) = \sqrt{3x^2 + x}$
 $g'(x) = \frac{1}{2} (3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x + 1)$
 $g'(x) = \frac{6x + 1}{2\sqrt{3x^2 + x}}$

c $h(x) = \frac{1}{4} (2x - 1)^4$
 $h'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4(2x - 1)^3 \cdot 2$
 $h'(x) = 2(2x - 1)^3$

d $k(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$
 $k'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$
 $k'(x) = \frac{x^2 + 1 - (2x^2 + 2x)}{(x^2 + 1)^2}$
 $k'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$

V2 a $f(x) = (4x - 3) \cdot \ln(x)$
 $f'(x) = 4 \cdot \ln(x) + (4x - 3) \cdot \frac{1}{x}$
 $f'(x) = 4 \ln(x) + 4 - \frac{3}{x}$

b $g(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$
 $g'(x) = \frac{1}{2} (4x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8x + 1)$
 $g'(x) = \frac{8x + 1}{2\sqrt{4x^2 + x + 1}}$

c $h(x) = \frac{\ln(x)}{2x}$
 $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot 2x - \ln(x) \cdot 2}{4x^2}$
 $h'(x) = \frac{2 - 2 \ln(x)}{4x^2}$
 $h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{2x^2}$

d $k(x) = x^2 \cdot e^{2x}$
 $k'(x) = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2$
 $k'(x) = 2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}$
 $k'(x) = (2x^2 + 2x) \cdot e^{2x}$

$$\text{e } m(x) = \sqrt{4\cos^2(x) + 3}$$

$$m'(x) = \frac{1}{2} (4\cos^2(x) + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8\cos(x) \cdot -\sin(x)$$

$$m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4\cos^2(x) + 3}} \cdot 8\cos(x) \cdot -\sin(x)$$

$$m'(x) = \frac{-4\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{4\cos^2(x) + 3}}$$

$$\text{f } n(x) = (4x - 5)\sqrt{4x - 5}$$

$$n(x) = (4x - 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$n'(x) = \frac{1}{2} (4x - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4$$

$$n'(x) = 6\sqrt{4x - 5}$$

$$\text{V3 a } f(x) = -4 + \sqrt{-x^2 + 6x + 8}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (-x^2 + 6x + 8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x + 6)$$

$$f'(x) = \frac{-x + 3}{\sqrt{-x^2 + 6x + 8}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-x + 3}{\sqrt{-x^2 + 6x + 8}} = 0$$

$$-x + 3 = 0 \text{ en } \sqrt{-x^2 + 6x + 8} \neq 0$$

$$x = 3$$

Uit de plot blijkt dat f een maximum heeft

$$f(3) = -4 + \sqrt{-9 + 18 + 8} = -4 + \sqrt{17}$$

$$\text{b In de snijpunten met de } x\text{-as geldt } -4 + \sqrt{-x^2 + 6x + 8} = 0$$

$$\sqrt{-x^2 + 6x + 8} = 4$$

$$-x^2 + 6x + 8 = 16$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 4)(x - 2) = 0$$

$x = 4$ of $x = 2$ (beide oplossingen voldoen)

De snijpunten met de x -as zijn $(4, 0)$ en $(2, 0)$.

$$f'(4) = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + b$$

Door $(4, 0)$ geeft $0 = -1 + b$ ofwel $b = 1$.

De raaklijn in $(4, 0)$ heeft als vergelijking $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

$$f'(2) = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}x + b$$

Door $(2, 0)$ geeft $0 = \frac{1}{2} + b$ ofwel $b = -\frac{1}{2}$.

De raaklijn in $(2, 0)$ heeft als vergelijking $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

$$\text{V4 a } \lambda = 0 \text{ geeft } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dus punt } (5, 1).$$

$$\lambda = 1 \text{ geeft } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dus punt } (7, 0).$$

$$\lambda = -2 \text{ geeft } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + -2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ dus punt } (1, 3).$$

19 Bewegingsvergelijkingen

- b** Een normaalvector van de lijn is $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de lijn is $x + 2y = c$.

$(5, 1)$ invullen geeft $5 + 2 \cdot 1 = c$ dus $c = 7$.

Een vergelijking van deze lijn is $x + 2y = 7$ (of $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$).

V5 a $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ ofwel $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b $4 - 3\lambda = 100$

$-3\lambda = 96$

$\lambda = -32$

$x = -3 + 4\lambda = -3 + 4 \cdot -32 = -131$

De x -coördinaat van P is -131 .

c $x = y$ geeft $-3 + 4\lambda = 4 - 3\lambda$

$7\lambda = 7$

$\lambda = 1$

Dan is $x = -3 + 4 \cdot 1 = 1$ en dus ook $y = 1$.

De coördinaten van Q zijn $(1, 1)$.

d De y -coördinaat is 70 groter dan de x -coördinaat dus $y = x + 70$.

$4 - 3\lambda = -3 + 4\lambda + 70$

$-7\lambda = 63$

$\lambda = -9$

$x = -3 + 4 \cdot -9 = -39$ en $y = -39 + 70 = 31$.

De coördinaten van R zijn $(-39, 31)$.

V6 a Het inproduct van de richtingsvectoren is $-1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 7$.

$\cos(\alpha) = \frac{7}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{34}} = 0,2911\dots$

$\alpha = 73,072\dots^\circ$, dus $\angle(l, m) \approx 73^\circ$.

b Het inproduct van de richtingsvectoren is $-2 \cdot 3 + 3 \cdot -5 = -21$.

$\cos(\alpha) = \frac{-21}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} = -0,9988\dots$

$\alpha = 177,273\dots^\circ$, dus $\angle(l, m) = 180 - 177,273\dots \approx 3^\circ$.

V7 a Een richtingsvector van l is $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dus $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van l is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b Een richtingsvector van een lijn loodrecht op l is $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ immers

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot -2 + 2 \cdot 3 = 0$.

Een vectorvoorstelling van m is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$, loodrecht daar op staat de vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Het midden van AC is $\left(\frac{4 + (-3)}{2}, \frac{0 + 4}{2}\right)$ dus $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn van lijnstuk AC is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

19.1 Bewegen langs een lijn of een cirkel

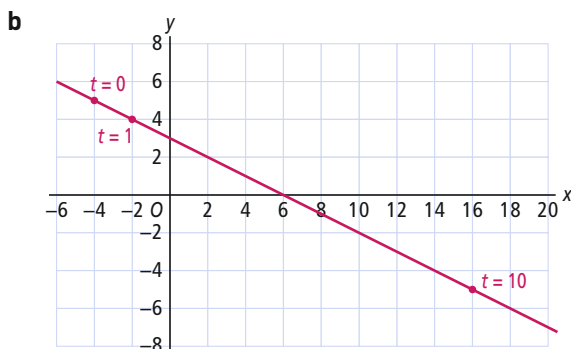
intro De boot drijft per uur 2 km naar het oosten af dus $x = 2t$.

De snelheid in noordelijke richting is 5 km/uur dus $y = 5t$.

Uit $x = 2t$ volgt $t = \frac{1}{2}x$.

Dit substitueren in $y = 5t$ geeft $y = 5 \cdot \frac{1}{2}x$ dus $y = 2\frac{1}{2}x$.

- 1 a** $t = 0$ invullen geeft $x(0) = -4 + 2 \cdot 0 = -4$ en $y(0) = 5 - 0 = 5$.
 $t = 1$ invullen geeft $x(1) = -4 + 2 \cdot 1 = -2$ en $y(1) = 5 - 1 = 4$.
 $t = 10$ invullen geeft $x(10) = -4 + 2 \cdot 10 = 16$ en $y(10) = 5 - 10 = -5$.
 Dus $t = 0$ geeft $(-4, 5)$, $t = 1$ geeft $(-2, 4)$ en $t = 10$ geeft $(16, -5)$.



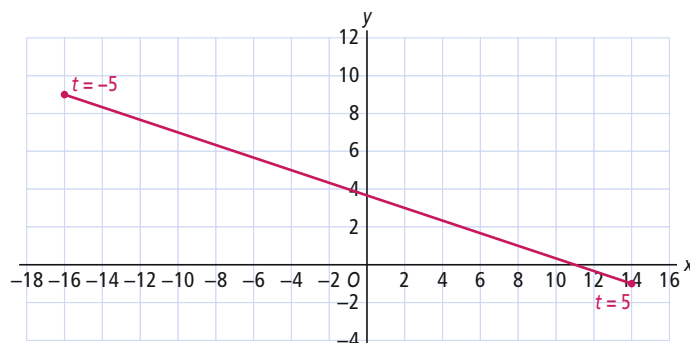
c De richtingscoëfficiënt is $\frac{4 - 5}{-2 - (-4)} = -\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van de lijn is $y = -\frac{1}{2}x + b$.

$(-4, 5)$ invullen geeft $5 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + b$ ofwel $b = 3$.

Een vergelijking voor de baan van P is $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

- 2 a** $t = -5$ invullen geeft $x(-5) = -1 + 3 \cdot (-5) = -16$ en $y(-5) = 4 - (-5) = 9$.
 $t = 0$ invullen geeft $x(0) = -1 + 3 \cdot 0 = -1$ en $y(0) = 4 - 0 = 4$.
 $t = 5$ invullen geeft $x(5) = -1 + 3 \cdot 5 = 14$ en $y(5) = 4 - 5 = -1$.
 De lijn heeft eindpunten $(-16, 9)$ en $(14, -1)$ en gaat door $(-1, 4)$



19 Bewegingsvergelijkingen

- b** Uit $y = 4 - t$ volgt $t = 4 - y$.

Substitueren van $t = 4 - y$ in $x = -1 + 3t$ geeft.

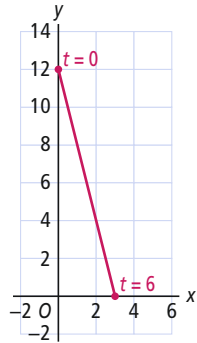
$$x = -1 + 3(4 - y)$$

$$x = -1 + 12 - 3y$$

$$x + 3y = 11$$

Een vergelijking van de baan van P is $x + 3y = 11$ of $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$.

- c** $t = 0$ geeft $(0, 12)$, $t = 3$ geeft $(1\frac{1}{2}, 6)$ en $t = 6$ geeft $(3, 0)$.



Uit $x = \frac{1}{2}t$ volgt $t = 2x$.

Substitueren van $t = 2x$ in $y = 12 - 2t$ geeft

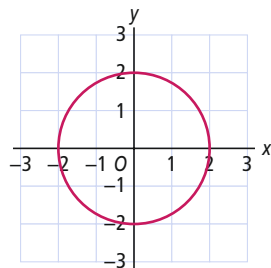
$$y = 12 - 2 \cdot 2x$$

$$y = 12 - 4x$$

Een vergelijking van de baan van P is $y = -4x + 12$ of $4x + y = 12$.

- 3 a** De steunvector is bij P en Q hetzelfde. De richtingsvector van Q wijst in dezelfde richting als die van P maar is twee keer zo lang.
- b** De snelheid van Q is twee keer zo groot als die van P omdat de richtingsvector twee keer zo lang is.
De verhouding van de snelheden van P en Q is dus $1 : 2$.
- c** Als de kentallen van de richtingsvector twee keer zo groot worden gaat Q twee keer zo snel. De baan van Q blijft hetzelfde.

4 a



- b** $(x(t))^2 + (y(t))^2 =$
 $(2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2 =$
 $4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) =$
 $4(\cos^2(t) + \sin^2(t)) =$
 $4 \cdot 1 = 4$
- c** De bewegingsvergelijkingen worden dan $\begin{cases} x(t) = 10\cos(t) \\ y(t) = 10\sin(t) \end{cases}$
- d** Dan worden de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -2 + 7\cos(t) \\ y(t) = 5 + 7\sin(t) \end{cases}$

5 P en Q doorlopen beide een cirkel met middelpunt $(5, 3)$ en straal 3, alleen is de beweging van Q twee keer zo snel als de beweging van P .

6 a De baan is een cirkel met middelpunt $(4, -3)$ en straal 2.
Een vergelijking van de baan is $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

b De baan is een cirkel met middelpunt $(0, 6)$ en straal 6.
Een vergelijking van de baan is $x^2 + (y - 6)^2 = 36$.

7 a
$$\begin{cases} x(t) = 4 + \cos(t) \\ y(t) = -1 + \sin(t) \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} x(t) = -2 + 5 \cos(t) \\ y(t) = -4 + 5 \sin(t) \end{cases}$$

8 a De ellips en de cirkel met middelpunt $(3, 3)$ en straal 4 hebben hetzelfde middelpunt en de cirkel raakt de ellips in de uiteinden van de lange as.

b Dan worden de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = 3 + 2 \cos(t) \\ y(t) = 3 + 4 \sin(t) \end{cases}$$

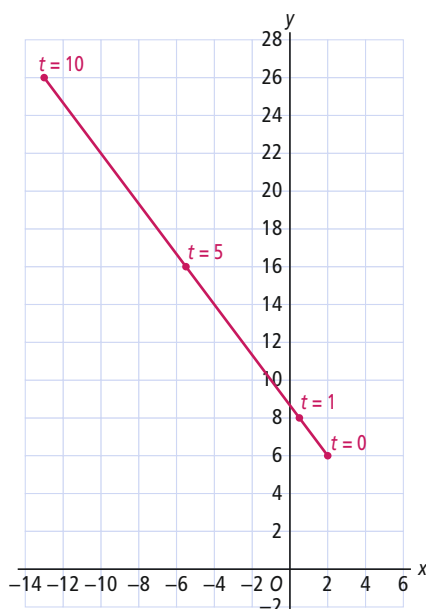
02 a $t = 0$ invullen geeft $x(0) = 2 - 1\frac{1}{2} \cdot 0 = 2$ en $y(0) = 6 + 2 \cdot 0 = 6$.

$t = 1$ invullen geeft $x(1) = 2 - 1\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ en $y(1) = 6 + 2 \cdot 1 = 8$.

$t = 5$ invullen geeft $x(5) = 2 - 1\frac{1}{2} \cdot 5 = -5\frac{1}{2}$ en $y(5) = 6 + 2 \cdot 5 = 16$.

$t = 10$ invullen geeft $x(10) = 2 - 1\frac{1}{2} \cdot 10 = -13$ en $y(10) = 6 + 2 \cdot 10 = 26$.

Dus $t = 0$ geeft $(2, 6)$, $t = 1$ geeft $(\frac{1}{2}, 8)$, $t = 5$ geeft $(-5\frac{1}{2}, 16)$ en $t = 10$ geeft $(-13, 26)$.



b $2t = y - 6$

$$t = \frac{1}{2}y - 3$$

$$x = 2 - 1\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}y - 3 \right)$$

$$x = 2 - \frac{3}{4}y + 4\frac{1}{2}$$

19 Bewegingsvergelijkingen

- c $x + \frac{3}{4}y = 6\frac{1}{2}$
 $4x + 3y = 26$
- d Uit $y = -3 + \frac{1}{2}t$ volgt $\frac{1}{2}t = y + 3$ ofwel $t = 2y + 6$.
 Dit substitueren in $x = 3 - 2t$ geeft
 $x = 3 - 2(2y + 6)$
 $x = 3 - 4y - 12$
 $x + 4y = -9$

U1 $x(0) = 0$ en $x(12) = 24$ dus $x(t) = \frac{24}{12}t$.
 $y(0) = 2$ en $y(12) = 20$ dus $y(t) = 2 + \frac{18}{12}t$.
 Dus een parametervoorstelling is $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 2 + 1\frac{1}{2}t \end{cases}$

- U2 a Voor P geldt: $x = 10 - 2t$ ofwel $2t = -x + 10$ dus $t = -\frac{1}{2}x + 5$.
 Dit substitueren in $y = 8 + t$ geeft

$$y = 8 + -\frac{1}{2}x + 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 13$$

Voor Q geldt: $x = -30 + 8t$ ofwel $8t = x + 30$ dus $t = \frac{1}{8}x + \frac{15}{4}$.

Dit substitueren in $y = 28 - 4t$ geeft

$$y = 28 - 4\left(\frac{1}{8}x + \frac{15}{4}\right)$$

$$y = 28 - \frac{1}{2}x - 15$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 13$$

P en Q doorlopen beide de lijn $y = -\frac{1}{2}x + 13$.

Of:

$t = 0$ geeft $P(10, 8)$ en $t = 5$ geeft $Q(10, 8)$.

$t = 2$ geeft $P(6, 10)$ en $t = 4\frac{1}{2}$ geeft $Q(6, 10)$.

De baan van zowel P als Q is een rechte lijn door de punten $(10, 8)$ en $(6, 10)$. P en Q doorlopen dus dezelfde rechte lijn.

- b $10 - 2t = -30 + 8t$ en $8 + t = 28 - 4t$
 $-10t = -40$ $5t = 20$
 $t = 4$ $t = 4$

Voor $t = 4$ bevinden P en Q zich in hetzelfde punt.

De bijbehorende coördinaten zijn $(2, 12)$.

19.2 Werken met bewegingsvergelijkingen

intro Het plaatje is hetzelfde, maar bij Kevin start de beweging op $t = 0$ rechts boven in het punt $(6, 4)$ en gaat daarna via de punten $(0, 0)$, $(-6, -4)$ en $(0, 0)$ weer terug naar $(6, 4)$.

Bij Joost start de beweging in $(0, 0)$ en gaat daarna via de punten $(6, 4)$, $(0, 0)$ en $(-6, -4)$ weer terug naar $(0, 0)$.

Het plaatje is dus hetzelfde, alleen wordt de lijn verschillend doorlopen.

Dit komt omdat $\cos(0) = 1$ en $\sin(0) = 0$.

9 a $x(t) = 0$ geeft $y(t) = 0$ geeft

$$\begin{array}{ll} -t^2 + 6t = 0 & -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 = 0 \\ -t(t - 6) = 0 & t^2(t - 6) = 0 \\ t = 0 \text{ of } t = 6 & t = 0 \text{ of } t = 6 \end{array}$$

Voor $t = 0$ en $t = 6$ bevindt P zich in de oorsprong.

b x heeft een maximum als $x'(t) = 0$.

$$x'(t) = -2t + 6$$

$$x'(t) = 0 \text{ als } -2t + 6 = 0 \text{ dus als } t = 3.$$

$$x(3) = 9 \text{ en } y(3) = 9 \text{ dus } P \text{ bevindt zich dan in } (9, 9).$$

c $y'(t) = -t^2 + 4t$

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } -t^2 + 4t = 0$$

$$-t(t - 4) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 4$$

Daarbij horen de punten $(0, 0)$ en $(8, 10\frac{2}{3})$.

d De afstand tot de assen is gelijk als $y = x$ of als $y = -x$.

$$y = x \text{ geeft } -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 = -t^2 + 6t$$

$$-\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 6t = 0$$

$$t^3 - 9t^2 + 18t = 0$$

$$t(t^2 - 9t + 18) = 0$$

$$t(t - 6)(t - 3) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 6 \text{ of } t = 3$$

$$t = 0 \text{ en } t = 6 \text{ horen bij de oorsprong, } t = 3 \text{ geeft het punt } (9, 9).$$

$$y = -x \text{ geeft } -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 = t^2 - 6t$$

$$-\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 6t = 0$$

$$t^3 - 3t^2 - 18t = 0$$

$$t(t - 6)(t + 3) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 6 \text{ of } t = -3$$

$$t = 0 \text{ en } t = 6 \text{ horen bij de oorsprong, } t = -3 \text{ geeft het punt } (-27, 27).$$

In de punten $(9, 9)$ en $(-27, 27)$ kan P zich dan bevinden.

10 a A ligt op de y -as, dus $x(t) = 0$.

$$5t - \frac{1}{3}t^2 = 0$$

$$\frac{1}{3}t(15 - t) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 15$$

$$y(0) = 12 \text{ en } y(15) = -123$$

Omdat A op de positieve y -as ligt volgt hieruit dat A het punt $(0, 12)$ is.

b B ligt op de x -as, dus $y(t) = 0$.

$$6t + 12 - t^2 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot -1 \cdot 12 = 84$$

$$t = \frac{-6 + \sqrt{84}}{-2} \text{ of } t = \frac{-6 - \sqrt{84}}{-2}$$

$$t = 3 - \sqrt{21} = -1,58... \text{ of } t = 3 + \sqrt{21} = 7,58...$$

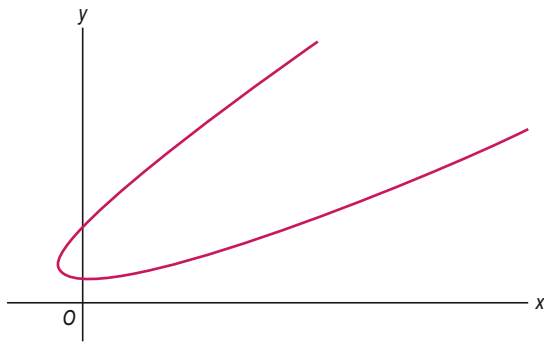
$$x(-1,58...) \approx -8,7 \text{ en } x(7,58...) \approx 18,7$$

Hieruit volgt dat de x -coördinaat van B ongeveer 18,7 is.

19 Bewegingsvergelijkingen

- c** $x'(t) = 5 - \frac{2}{3}t$
 $x'(t) = 0$ als $5 - \frac{2}{3}t = 0$ ofwel $\frac{2}{3}t = 5$ dus als $t = 7\frac{1}{2}$.
 $y'(t) = 6 - 2t$
 $y'(t) = 0$ als $6 - 2t = 0$ ofwel $2t = 6$ dus als $t = 3$.
 De baan heeft een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$.
 $x(3) = 12$ en $y(3) = 21$, dus in $(12, 21)$ is de raaklijn horizontaal.
 De baan heeft een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 7\frac{1}{2}$.
 $x(7\frac{1}{2}) = 18\frac{3}{4}$ en $y(7\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, dus in $(18\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ is de raaklijn verticaal.

11 a



- b** $x'(t) = 3 + 4t$ en $y'(t) = 2t$
 $t = 2$ geeft $\frac{dx}{dt} = 3 + 4 \cdot 2 = 11$ en $\frac{dy}{dt} = 2 \cdot 2 = 4$.
- c** P beweegt zich in de positieve x -richting en in de positieve y -richting, dus naar rechts en omhoog.
- d** $(x - 2y)^2 + 4x - 17y = -13$
 $(3t + 2t^2 - 2(1 + t^2))^2 + 4(3t + 2t^2) - 17(1 + t^2) = -13$
 $(3t + 2t^2 - 2 - 2t^2)^2 + 12t + 8t^2 - 17 - 17t^2 = -13$
 $(3t - 2)^2 + 12t - 9t^2 - 17 = -13$
 $9t^2 - 12t + 4 + 12t - 9t^2 - 17 = -13$
 $-13 = -13$
 Dit klopt voor elke waarde van t , dus de punten van de baan van P voldoen aan de vergelijking $(x - 2y)^2 + 4x - 17y = -13$.

12 a $x'(t) = \frac{1}{2}(1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t$

$$x'(t) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$x'(t) = 0 \text{ geeft } t = 0.$$

$$y'(t) = \frac{1}{2} \text{ dus } y'(t) \neq 0$$

$$x(0) = \sqrt{1} = 1 \text{ en } y(0) = -1$$

De raaklijn aan de kromme is verticaal in het punt $(1, -1)$.

b $\frac{1}{2}t - 1 = -\sqrt{1 + t^2}$

$$\frac{1}{4}t^2 - t + 1 = 1 + t^2$$

$$-\frac{3}{4}t^2 - t = 0$$

$$-\frac{3}{4}t\left(t + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = -\frac{4}{3} \text{ beide voldoen}$$

Daarbij horen de snijpunten $(1, -1)$ en $(1\frac{2}{3}, -1\frac{2}{3})$.

- c $x = \sqrt{1+t^2}$ en $y = \frac{1}{2}t - 1$ invullen in $x^2 - 4y^2 - 8y = 5$ geeft

$$\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}t - 1\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}t - 1\right) = 5$$

$$1 + t^2 - 4\left(\frac{1}{4}t^2 - t + 1\right) - 4t + 8 = 5$$

$$1 + t^2 - t^2 + 4t - 4 - 4t + 8 = 5$$

$$5 = 5$$

Dit klopt voor elke waarde van t dus de punten van de kromme voldoen aan de vergelijking $x^2 - 4y^2 - 8y = 5$.

13 $x'(t) = t^3 - t^2 - 2t$

$$x'(t) = 0 \text{ geeft } t^3 - t^2 - 2t = 0$$

$$t(t^2 - t - 2) = 0$$

$$t(t-2)(t+1) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 2 \text{ of } t = -1$$

$$y'(t) = t^2 - 9$$

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } t^2 - 9 = 0 \text{ ofwel } t^2 = 9$$

$$t = 3 \text{ of } t = -3$$

Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$.

Hieruit volgt $t = 3$ of $t = -3$.

Hierbij horen de punten $(2\frac{1}{4}, -18)$ en $(20\frac{1}{4}, 18)$.

Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

Hieruit volgt $t = 0$ of $t = 2$ of $t = -1$.

Hierbij horen de punten $(0, 0)$, $(-2\frac{2}{3}, -15\frac{1}{3})$ en $(-\frac{5}{12}, 8\frac{2}{3})$.

14 a De coördinaten van A zijn $(\frac{1}{2}a^2 - 6a, \frac{1}{2}a^2 - 18)$.

$$x(6-a) = \frac{1}{2}(6-a)^2 - 6(6-a) = \frac{1}{2}(36 - 12a + a^2) - 36 + 6a = \frac{1}{2}a^2 - 18$$

$$y(6-a) = \frac{1}{2}(6-a)^2 - 18 = \frac{1}{2}(36 - 12a + a^2) - 18 = \frac{1}{2}a^2 - 6a$$

De coördinaten van B zijn $(\frac{1}{2}a^2 - 18, \frac{1}{2}a^2 - 6a)$.

- b** De x -coördinaat van A is de y -coördinaat van B en omgekeerd. Hieruit volgt dat A en B elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$.

15 $t = a$ geeft het punt $A(\sqrt{a^2 + 1}, 4a - \frac{1}{6}a^3)$.

$$t = -a \text{ geeft het punt } B(\sqrt{(-a)^2 + 1}, 4(-a) - \frac{1}{6}(-a)^3) \text{ ofwel}$$

$$B(\sqrt{a^2 + 1}, -4a + \frac{1}{6}a^3).$$

$x_B = x_A$ en $y_B = -y_A$ dus de punten A en B zijn elkaars spiegelbeeld in de x -as. Hieruit volgt dat de baan van P symmetrisch is in de x -as.

16 a $P(q^2, (q-1)^2)$

b $x(1-q) = (1-q)^2 = (q-1)^2$

$$y(1-q) = (1-q-1)^2 = (-q)^2 = q^2$$

De coördinaten van P zijn nu $((q-1)^2, q^2)$.

- c** De x - en y -coördinaten zijn verwisseld en hieruit volgt dat voor elk punt P het spiegelbeeld van P in de lijn $y = x$ ook op de baan ligt. De baan is dus symmetrisch in de lijn $y = x$.

19 Bewegingsvergelijkingen

- 010 a** $10 - 3t - t^2 = 0$
 $t^2 + 3t - 10 = 0$
 $(t + 5)(t - 2) = 0$
 $t = -5$ of $t = 2$
- b** $t = -5$ geeft $y(-5) = \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 3 \cdot -5 = 27\frac{1}{2}$ en $(0, 27\frac{1}{2})$ hoort bij punt D .
 $t = 2$ geeft $y(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -4$ en $(0, -4)$ hoort bij punt B .
- c** $\frac{1}{2}t^2 - 3t = 0$
 $\frac{1}{2}t(t - 6) = 0$
 $t = 0$ of $t = 6$
 $t = 0$ geeft $x(0) = 10$ en $(10, 0)$ hoort bij punt C .
 $t = 6$ geeft $x(6) = 10 - 3 \cdot 6 - 6^2 = -44$ en $(-44, 0)$ hoort bij punt A .
- d** $x'(t) = -3 - 2t$
 $y'(t) = t - 3$
- e** $x'(t) = 0$ $y'(t) = 0$
 $-3 - 2t = 0$ $t - 3 = 0$
 $-2t = 3$ $t = 3$
 $t = -1\frac{1}{2}$
- f** De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$.
 $x(3) = -8$ en $y(3) = -4\frac{1}{2}$
De baan heeft een horizontale raaklijn in het punt $(-8, -4\frac{1}{2})$.
De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = -1\frac{1}{2}$.
 $x(-1\frac{1}{2}) = 12\frac{1}{4}$ en $y(-1\frac{1}{2}) = 5\frac{5}{8}$
De baan heeft een verticale raaklijn in het punt $(12\frac{1}{4}, 5\frac{5}{8})$.
- 015 a** $x(a) = a^3 - 3a$
 $y(a) = 2a$
dus $A(a^3 - 3a, 2a)$
- b** $x(-a) = (-a)^3 - 3 \cdot -a = -a^3 + 3a$
 $y(-a) = 2 \cdot -a = -2a$
dus $B(-a^3 + 3a, -2a)$
- c** Omdat $B(-a^3 + 3a, -2a)$ ofwel $B(-(a^3 - 3a), -2a)$ geldt
 $x_B = -x_A$ en $y_B = -y_A$
- d** Uit opdracht c volgt dat A en B elkaars spiegelbeeld zijn in de oorsprong.
Voor elk punt op de baan geldt dat het spiegelbeeld van dat punt in de oorsprong ook op de baan ligt. Hieruit volgt dat de baan symmetrisch is in de oorsprong.

- U3 a** $y(a) = y(b)$ geeft $1 - a^2 = 1 - b^2$
 $a^2 = b^2$
 $a = b$ of $a = -b$
Je zoekt twee verschillende tijdstippen, dus alleen $a = -b$ voldoet.
 $x(a) = x(b)$ geeft $\frac{1}{3}a^3 - a^2 - 3a = \frac{1}{3}b^3 - b^2 - 3b$
Substitueren van $a = -b$ geeft
 $\frac{1}{3}(-b)^3 - (-b)^2 - 3 \cdot -b = \frac{1}{3}b^3 - b^2 - 3b$

$$-\frac{1}{3}b^3 - b^2 + 3b = \frac{1}{3}b^3 - b^2 - 3b$$

$$-\frac{2}{3}b^3 + 6b = 0$$

$$-\frac{2}{3}b(b^2 - 9) = 0$$

$$b = 0 \text{ of } b = 3 \text{ of } b = -3$$

$b = 0$ geeft $a = 0$, de tijdstippen zijn gelijk en dat kan niet.

$b = 3$ geeft $a = -3$

$b = -3$ geeft $a = 3$

De tijdstippen waarop de kromme zichzelf snijdt zijn $t = 3$ en $t = -3$.

Voor zowel $t = 3$ als $t = -3$ gaat de kromme door $(-9, -8)$.

b $x(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t^2$ is symmetrisch in de y -as.

Hieruit volgt dat $x(a) = x(b)$ als $a = b$ of $a = -b$.

De tijdstippen moeten verschillend zijn dus $a = b$ vervalt.

$$y(a) = y(b)$$

$$a^3 - 3a^2 + 4a = b^3 - 3b^2 + 4b$$

Substitueren van $a = -b$ geeft

$$(-b)^3 - 3(-b)^2 + 4 \cdot -b = b^3 - 3b^2 + 4b$$

$$-b^3 - 4b = b^3 + 4b$$

$$-2b^3 - 8b = 0$$

$$-2b(b^2 + 4) = 0$$

$$b = 0 \text{ (} b^2 + 4 = 0 \text{ heeft geen oplossing)}$$

Uit $b = 0$ volgt $a = -b = 0$.

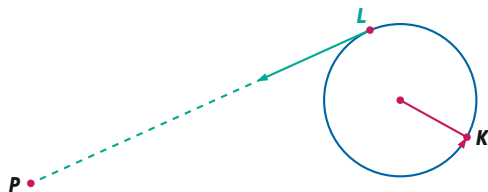
Er zijn geen verschillende getallen a en b waarvoor geldt $x(a) = x(b)$ en

$y(a) = y(b)$ dus deze kromme snijdt zichzelf niet.

Er kan ook worden aangetoond $y(t)$ stijgend is omdat de afgeleide hiervan altijd positief is. Hierdoor zijn er dus geen twee getallen a en b met $y(a) = y(b)$.

19.3 Snelheid en raaklijn

intro De kogel moet worden losgelaten in punt L .



$$17 \text{ a } \begin{pmatrix} 60 - 30 \\ 20 - 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$\text{b } \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \end{pmatrix}$$

c Op $t = 3$ is de bal in $(45, 55)$.

De gemiddelde verplaatsing per seconde op het interval $[2, 3]$ is $\begin{pmatrix} 15 \\ -25 \end{pmatrix}$.

Op $t = 2,1$ is de bal in $(31,5; 77,95)$.

19 Bewegingsvergelijkingen

De gemiddelde verplaatsing per seconde op het interval $[2; 2,1]$ is

$$\frac{1}{0,1} \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -20,5 \end{pmatrix}.$$

Op $t = 2,01$ is de bal in $(30,15; 79,7995)$.

De gemiddelde verplaatsing per seconde op het interval $[2; 2,01]$ is

$$\frac{1}{0,01} \cdot \begin{pmatrix} 0,15 \\ -0,2005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -20,05 \end{pmatrix}.$$

d Deze kentallen zullen dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ -20 \end{pmatrix}$ zijn.

e $|\vec{v}| = \sqrt{15^2 + (-20)^2} = \sqrt{625} = 25$

f De richtingscoëfficiënt is $\frac{-20}{15} = -\frac{4}{3}$.

18 a De verplaatsingsvector van P is $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$.

b De gemiddelde verplaatsing per tijdseenheid is $\begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix}$.

c Als $\Delta t \rightarrow 0$ dan nadert $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ naar $x'(t)$ en $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ naar $y'(t)$.

d $|\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

19 a $y(t) = 0$ geeft $t^3 - 3t = 0$

$$t(t^2 - 3) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t^2 = 3$$

$$t = 0 \text{ of } t = \sqrt{3} \text{ of } t = -\sqrt{3}$$

b $x(0) = -1$ dus A is het punt $(-1, 0)$.

$$x(\sqrt{3}) = x(-\sqrt{3}) = 3 - 1 = 2 \text{ dus } B \text{ is het punt } (2, 0).$$

c De snelheidsvector in A is $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\text{De snelheidsvectoren in } B \text{ zijn } \begin{pmatrix} x'(\sqrt{3}) \\ y'(\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x'(-\sqrt{3}) \\ y'(-\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}.$$

d De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan op $t = \sqrt{3}$ is $\frac{6}{2\sqrt{3}}$

$$\text{Uit } \tan(\alpha) = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ volgt } \alpha = 60^\circ.$$

De hoek tussen de snelheidsvector op $t = \sqrt{3}$ en de x -as is 60° .

$$\text{Op } t = -\sqrt{3} \text{ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan } -\frac{6}{2\sqrt{3}}.$$

Ook op $t = -\sqrt{3}$ is de hoek tussen de snelheidsvector en de x -as 60° .

e In de snijpunten met de y -as geldt $x(t) = 0$.

$$t^2 - 1 = 0$$

$$t^2 = 1$$

$$t = 1 \text{ of } t = -1$$

$$\text{Op } t = 1 \text{ is } x'(1) = 2 \text{ en } y'(1) = 0 \text{ dus } v(1) = 2.$$

$$\text{Op } t = -1 \text{ is } x'(-1) = -2 \text{ en } y'(-1) = 0 \text{ dus } v(-1) = -2.$$

- 20** $x'(t) = 4t - 3$
 $y'(t) = 2t$
 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -1 .

$$\text{Hieruit volgt } \frac{2t}{4t-3} = -1.$$

$$4t - 3 = -2t$$

$$6t = 3$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$$

De coördinaten van A zijn $(-1, 1\frac{1}{4})$.

De raaklijn in A is van de vorm $y = -x + b$.

Invullen van $(-1, 1\frac{1}{4})$ geeft $1\frac{1}{4} = -(-1) + b$ dus $b = \frac{1}{4}$.

De raaklijn in A aan de baan van P is de lijn $y = -x + \frac{1}{4}$.

- 21 a** De baan van P is een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 4 .

De baan van Q is een ellips.

- b** Voor punt P geldt:

$$x'(t) = -4\sin(t)$$

$$y'(t) = 4\cos(t)$$

De snelheid is $v(t) = \sqrt{16\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}$.

$$v(t) = \sqrt{16(\sin^2(t) + \cos^2(t))}$$

$$v(t) = \sqrt{16 \cdot 1}$$

$$v(t) = 4$$

Hieruit volgt dat de snelheid van P constant is.

- c** Voor punt Q geldt:

$$x'(t) = -4\sin(t)$$

$$y'(t) = 6\cos(t)$$

De snelheid is $v(t) = \sqrt{(-4\sin(t))^2 + (6\cos(t))^2}$.

$$v(t) = \sqrt{16\sin^2(t) + 36\cos^2(t)}$$

$$v(t) = \sqrt{16\sin^2(t) + 16\cos^2(t) + 20\cos^2(t)}$$

$$v(t) = \sqrt{16(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 20\cos^2(t)}$$

$$v(t) = \sqrt{16 \cdot 1 + 20\cos^2(t)}$$

$$v(t) = \sqrt{16 + 20\cos^2(t)}$$

$\cos^2(t)$ is minimaal 0 , dus de minimale snelheid is $v = \sqrt{16 + 0} = 4$.

$\cos^2(t)$ is maximaal 1 , dus de maximale snelheid is $v = \sqrt{16 + 20} = 6$.

- 22** Voor de eerste kromme geldt:

$$x(t) = 3 \text{ geeft } t^2 - 6t + 8 = 3$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$(t - 5)(t - 1) = 0$$

$$t = 5 \text{ of } t = 1$$

$$y(5) = 20 - 25 = -5$$

$$y(1) = 4 - 1 = 3$$

19 Bewegingsvergelijkingen

Bij het punt $(3, 3)$ hoort $t = 1$.

$$x'(t) = 2t - 6, \text{ dus } x'(1) = -4.$$

$$y'(t) = 4 - 2t, \text{ dus } y'(1) = 2.$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan in $(3, 3)$ is $\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

Voor de tweede kromme geldt:

$$x(t) = 3 \text{ geeft } -t^2 + 8t - 12 = 3$$

$$-t^2 + 8t - 15 = 0$$

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$(t - 5)(t - 3) = 0$$

$$t = 5 \text{ of } t = 3$$

$$y(5) = 25 - 10 = 15$$

$$y(3) = 9 - 6 = 3$$

Bij het punt $(3, 3)$ hoort $t = 3$.

$$x'(t) = -2t + 8, \text{ dus } x'(3) = 2.$$

$$y'(t) = 2t - 2, \text{ dus } y'(3) = 4.$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan in $(3, 3)$ is $\frac{4}{2} = 2$.

Het product van de richtingscoëfficiënten is $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, dus de raaklijnen staan loodrecht op elkaar.

Hieruit volgt dat de krommen elkaar loodrecht snijden in $(3, 3)$.

23 a $t = a$ geeft het punt $A(10 \ln(a^2 + 1), a^3 - 3a)$.

$$t = -a \text{ geeft } x(-a) = 10 \ln((-a)^2 + 1) \text{ ofwel } x(-a) = 10 \ln(a^2 + 1) \text{ en}$$

$$y(-a) = (-a)^3 - 3 \cdot -a \text{ ofwel } y(-a) = -a^3 + 3a.$$

Op de baan ligt het punt $B(10 \ln(a^2 + 1), -a^3 + 3a)$.

$x_B = x_A$ en $y_B = -y_A$ dus de punten A en B zijn elkaars spiegelbeeld in de x -as en de kromme is daarom symmetrisch in de x -as.

b $x(t) = 0$ geeft $10 \ln(t^2 + 1) = 0$

$$\ln(t^2 + 1) = 0$$

$$t^2 + 1 = 1$$

$$t = 0$$

$y(0) = 0$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, 0)$.

$$y(t) = 0 \text{ geeft } t^3 - 3t = 0$$

$$t(t^2 - 3) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t^2 = 3$$

$$t = 0 \text{ of } t = \sqrt{3} \text{ of } t = -\sqrt{3}$$

$$x(\sqrt{3}) = x(-\sqrt{3}) = 10 \ln(4)$$

De snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(10 \ln(4), 0)$.

c
$$x'(t) = \frac{10}{t^2 + 1} \cdot 2t = \frac{20t}{t^2 + 1}$$

$$x'(t) = 0 \text{ als } t = 0.$$

$$y'(t) = 3t^2 - 3$$

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } 3t^2 - 3 = 0$$

$$t^2 = 1$$

$$t = 1 \text{ of } t = -1$$

De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 0$.

Bij $t = 0$ hoort het punt $(0, 0)$.

De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 1$ of $t = -1$.

Bij $t = 1$ hoort het punt $(10 \ln(2), -2)$.

Bij $t = -1$ hoort het punt $(10 \ln(2), 2)$.

- 019 a** A en B zijn de snijpunten met de x -as, dus $y(t) = 0$.

$$9 - t^2 = 0$$

$$t^2 = 9$$

$$t = 3 \text{ of } t = -3$$

$$x(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 = 15 \text{ en } x(-3) = (-3)^3 - 4 \cdot (-3) = -15$$

Hieruit volgt dat $t = 3$ bij B hoort en $t = -3$ bij A .

- b** C en D zijn de snijpunten met de y -as, dus $x(t) = 0$.

$$t^3 - 4t = 0$$

$$t(t^2 - 4) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t^2 = 4$$

$$t = 0 \text{ of } t = 2 \text{ of } t = -2$$

$$y(0) = 9, y(2) = 9 - 2^2 = 5 \text{ en } y(-2) = 9 - (-2)^2 = 5$$

Hieruit volgt dat $t = 0$ bij D hoort en $t = 2$ en $t = -2$ bij C hoort.

- c** $x'(t) = 3t^2 - 4$

$$y'(t) = -2t$$

- d** $t = -3$ geeft $x'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 4 = 23$ en $y'(-3) = -2 \cdot (-3) = 6$

De snelheidsvector in punt A is $\vec{v} = \begin{pmatrix} 23 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- e** $x'(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 = 23$ en $y'(3) = -2 \cdot 3 = -6$

De snelheidsvector in punt B is $\vec{v} = \begin{pmatrix} 23 \\ -6 \end{pmatrix}$.

- f** De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan in A is $\frac{6}{23}$.

Uit $\tan(\alpha) = \frac{6}{23}$ volgt $\alpha \approx 15^\circ$. De raaklijn, en dus ook de snelheidsvector in punt A , maakt een hoek van 15° met de x -as.

- g** $x'(t) = 3t^2 - 4$

$$y'(t) = -2t$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 4 \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3t^2 - 4)^2 + (-2t)^2} = \sqrt{9t^4 - 24t^2 + 16 + 4t^2} = \sqrt{9t^4 - 20t^2 + 16}$$

- h** In punt A is de snelheid $v(-3) = \sqrt{9 \cdot (-3)^4 - 20 \cdot (-3)^2 + 16} = \sqrt{565}$.

$$\text{In punt } B \text{ is de snelheid } v(3) = \sqrt{9 \cdot 3^4 - 20 \cdot 3^2 + 16} = \sqrt{565}.$$

- i** De snelheidsvector is evenwijdig met de y -as als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$$3t^2 - 4 = 0.$$

$$3t^2 = 4$$

$$t^2 = \frac{4}{3}$$

$$t = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ of } t = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

- U4 a** $x'(t) = \frac{5}{t^2 + 1} \cdot 2t$ ofwel $x'(t) = \frac{10t}{t^2 + 1}$

$$y'(t) = 3t^2 - 6t$$

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } 3t^2 - 6t = 0$$

$$3t(t - 2) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 2$$

$$x'(0) = 0 \text{ en } x'(2) = 4 \neq 0, \text{ dus de raaklijn is horizontaal als } t = 2.$$

Bij $t = 2$ hoort het punt $(5 \ln(5), 0)$.

19 Bewegingsvergelijkingen

- b** $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$ als $t = 0$, zie opdracht a.

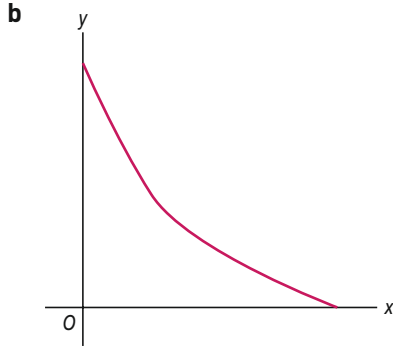
Bij $t = 0$ hoort het punt $(0, 4)$.

De bijzonderheid is dat in $(0, 4)$ zowel x als y een extreme waarde heeft en dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn hier onbepaald is.

U5 a Uit $x(t) = \frac{1}{3}(2t - 1)\sqrt{2t - 1}$ volgt $t \geq \frac{1}{2}$.

Uit $y(t) = \frac{1}{3}(9 - 2t)\sqrt{9 - 2t}$ volgt $t \leq 4\frac{1}{2}$.

Voor $\frac{1}{2} \leq t \leq 4\frac{1}{2}$ zijn er punten van de baan gedefinieerd.



c $x(t) = \frac{1}{3}(2t - 1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $x'(t) = \frac{1}{2}(2t - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \sqrt{2t - 1}$
 $y(t) = \frac{1}{3}(9 - 2t)^{\frac{1}{2}}$ geeft $y'(t) = \frac{1}{2}(9 - 2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = -\sqrt{9 - 2t}$
 $v(t) = \sqrt{(\sqrt{2t - 1})^2 + (-\sqrt{9 - 2t})^2} = \sqrt{2t - 1 + 9 - 2t} = \sqrt{8}$.
 Hieruit volgt dat de snelheid constant is.

d $\sqrt[3]{9x^2} + \sqrt[3]{9y^2} =$
 $\sqrt[3]{9 \cdot \left(\frac{1}{3}(2t - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^2} + \sqrt[3]{9 \cdot \left(\frac{1}{3}(9 - 2t)^{\frac{1}{2}}\right)^2} =$
 $\sqrt[3]{9 \cdot \frac{1}{9}(2t - 1)^3} + \sqrt[3]{9 \cdot \frac{1}{9}(9 - 2t)^3} =$
 $\sqrt[3]{(2t - 1)^3} + \sqrt[3]{(9 - 2t)^3} =$
 $2t - 1 + 9 - 2t = 8$
 Dit klopt dus voor alle punten op de baan.

19.4 Versnelling

intro De snelheid is het grootst in het laagste punt boven de aarde, het perigeum en het kleinst in het hoogste punt boven de aarde, het apogeum.

24 a $x'(t) = 25$
 $y'(t) = 15 - 10t$
 $v(t) = \sqrt{25^2 + (15 - 10t)^2}$
 $v(t) = \sqrt{625 + 225 - 300t + 100t^2}$
 $v(t) = \sqrt{850 - 300t + 100t^2}$

- b** Het projectiel komt op de grond als $y(t) = 0$.

$$30 + 15t - 5t^2 = 0$$

$$t^2 - 3t - 6 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 33$$

$$t = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} = 4,37... \text{ of } t = \frac{3 - \sqrt{33}}{2} = -1,37...$$

Op $t = 4,37...$ is de snelheid

$$v\left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right) = \sqrt{850 - 300 \cdot \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right) + 100 \cdot \left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)^2} = \sqrt{1450} \approx 38 \text{ m/s.}$$

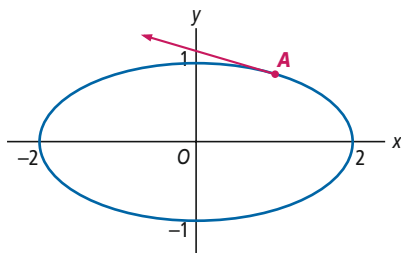
c $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{850 - 300t + 100t^2}} \cdot (-300 + 200t)$ ofwel

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-150 + 100t}{\sqrt{850 - 300t + 100t^2}}$$

$$t = 2 \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{-150 + 100 \cdot 2}{\sqrt{850 - 300 \cdot 2 + 100 \cdot 2^2}} \approx 1,96 \text{ m/s}^2$$

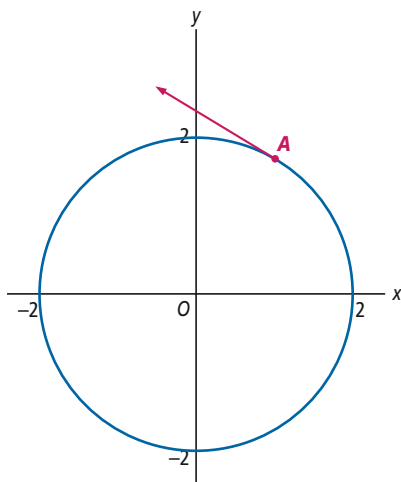
$$t = 4 \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{-150 + 100 \cdot 4}{\sqrt{850 - 300 \cdot 4 + 100 \cdot 4^2}} \approx 7,07 \text{ m/s}^2$$

- 25 a** De snelheidsvector op $t = \frac{1}{3}\pi$ is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.



b $t = \frac{1}{3}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{3\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{\sqrt{4\sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \cos^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)}} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{3}}{\sqrt{3\frac{1}{4}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{26}\sqrt{39}$

c



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

De snelheidsvector op $t = \frac{1}{3}\pi$ is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

19 Bewegingsvergelijkingen

De snelheid is $v = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$.

$$v = \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t))}$$

$$v = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$$

De snelheid is constant, dus de baanversnelling $\frac{dv}{dt} = 0$.

26 a $y = x$ geeft $t^2 + 4t = 6 + 5t - t^2$

$$2t^2 - t - 6 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot -6 = 49$$

$$t = \frac{1+7}{4} = 2 \text{ of } t = \frac{1-7}{4} = -1\frac{1}{2}$$

$t = 2$ geeft $x(2) = 6 + 10 - 4 = 12$ en dus $A(12, 12)$.

$t = -1\frac{1}{2}$ geeft $x(-1\frac{1}{2}) = 6 - 7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = -3\frac{3}{4}$ en dus $B(-3\frac{3}{4}, -3\frac{3}{4})$.

b $x(t) = 0$ geeft $6 + 5t - t^2 = 0$ ofwel $t^2 - 5t - 6 = 0$

$$(t-6)(t+1) = 0$$

$$t = 6 \text{ of } t = -1$$

$y(6) = 60$ en $y(-1) = -3$, hieruit volgt dat $t = -1$ hoort bij het snijpunt met de negatieve y -as.

$$x'(t) = 5 - 2t$$

$$y'(t) = 2t + 4$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{y'(-1)}{x'(-1)} = \frac{2 \cdot -1 + 4}{-2 \cdot -1 + 5} = \frac{2}{7}$

Hieruit volgt $y = \frac{2}{7}x + b$.

De raaklijn gaat door $(0, -3)$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{2}{7}x - 3$.

c $v = \sqrt{(5-2t)^2 + (2t+4)^2}$

$$v = \sqrt{25 - 20t + 4t^2 + 4t^2 + 16t + 16}$$

$$v = \sqrt{8t^2 - 4t + 41}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 4t + 41}} \cdot (16t - 4) \text{ ofwel } \frac{dv}{dt} = \frac{8t - 2}{\sqrt{8t^2 - 4t + 41}}$$

d De baansnelheid heeft een extreme waarde als $\frac{dv}{dt} = 0$, dus als $8t - 2 = 0$.

Dit geeft $t = \frac{1}{4}$.

$$x\left(\frac{1}{4}\right) = 7\frac{3}{16} \text{ en } y\left(\frac{1}{4}\right) = 1\frac{1}{16}$$

De baansnelheid heeft een extreme waarde in het punt $\left(7\frac{3}{16}, 1\frac{1}{16}\right)$.

27 a $y = x$ geeft $-\frac{1}{2}t^2 + 2 = -\frac{1}{2}t^2 + 2t$

$$2 = 2t$$

$$t = 1$$

$x(1) = 1\frac{1}{2}$ dus A is het punt $\left(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$.

b $x'(t) = -t + 2$

$$y'(t) = -t$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A is $\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{-1}{-1+2} = \frac{-1}{1} = -1$.

Een lijn met richtingscoëfficiënt -1 staat inderdaad loodrecht op de lijn $y = x$.

$$\begin{aligned}
 \text{c} \quad v &= \sqrt{(-t+2)^2 + (-t)^2} \\
 v &= \sqrt{t^2 - 4t + 4 + t^2} \\
 v &= \sqrt{2t^2 - 4t + 4} \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{2t^2 - 4t + 4}} \cdot (4t - 4) \text{ ofwel } \frac{dv}{dt} = \frac{2t - 2}{\sqrt{2t^2 - 4t + 4}} \\
 t = 1 \text{ geeft } \frac{dv}{dt} &= \frac{2 \cdot 1 - 2}{\sqrt{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.
 \end{aligned}$$

De baanversnelling in A is 0, en in dit geval is de snelheid in A minimaal.

28 a $y = x$ geeft $t + 1 = t - 2 \sin(t)$

$$1 = -2 \sin(t)$$

$$\sin(t) = -\frac{1}{2}$$

$$t = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Op het interval $[-\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn de oplossingen $t = -\frac{5}{6}\pi$, $t = -\frac{1}{6}\pi$ en $t = 1\frac{1}{6}\pi$

$$y(-\frac{5}{6}\pi) = 1 - \frac{5}{6}\pi, y(-\frac{1}{6}\pi) = 1 - \frac{1}{6}\pi \text{ en } y(1\frac{1}{6}\pi) = 1 + 1\frac{1}{6}\pi.$$

De snijpunten met m zijn $P(1 - \frac{5}{6}\pi, 1 - \frac{5}{6}\pi)$, $Q(1 - \frac{1}{6}\pi, 1 - \frac{1}{6}\pi)$ en

$$R(1 + 1\frac{1}{6}\pi, 1 + 1\frac{1}{6}\pi).$$

b $x'(t) = 1 - 2 \cos(t)$

$$y'(t) = 1$$

De raaklijn aan de baan is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$$1 - 2 \cos(t) = 0$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

Op het interval $[-\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn de oplossingen $t = -\frac{1}{3}\pi$ en $t = \frac{1}{3}\pi$.

$$t = -\frac{1}{3}\pi \text{ geeft } B(-\frac{1}{3}\pi + \sqrt{3}, -\frac{1}{3}\pi + 1)$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ geeft } A(\frac{1}{3}\pi - \sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi + 1)$$

c $v = \sqrt{(1 - 2 \cos(t))^2 + 1^2}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{(1 - 2 \cos(t))^2 + 1}} \cdot 2(1 - 2 \cos(t)) \cdot 2 \sin(t)$$

$$t = -\frac{1}{3}\pi \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

29 a $x'(t) = -5 \sin(t)$

$$y'(t) = 2 \cos(t)$$

$$v = \sqrt{25 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t)}$$

$$v = \sqrt{4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) + 21 \sin^2(t)}$$

$$v = \sqrt{4(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 21 \sin^2(t)}$$

$$v = \sqrt{4 + 21 \sin^2(t)}$$

19 Bewegingsvergelijkingen

b De baanversnelling is $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{4+21\sin^2(t)}} \cdot 42\sin(t)\cos(t)$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{21\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{4+21\sin^2(t)}}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ geeft } 21\sin(t)\cos(t) = 0 \text{ (en } \sqrt{4+21\sin^2(t)} \neq 0)$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \cos(t) = 0$$

$$t = k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Bij $t = k \cdot \pi$ horen de punten $(5, 0)$ en $(-5, 0)$.

Bij $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ horen de punten $(0, 2)$ en $(0, -2)$.

c De snelheid $v = \sqrt{4+21\sin^2(t)}$ is maximaal als $\sin^2(t) = 1$.

$$\sin(t) = 1 \text{ of } \sin(t) = -1$$

$$\text{Hieruit volgt } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi.$$

De snelheid is maximaal in de punten $(0, 2)$ en $(0, -2)$.

30 a $y(t) = 0$ geeft $2\sin(t) = 0$ dus $\sin(t) = 0$.

$$t = k \cdot \pi$$

Op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi]$ zijn de oplossingen $t = 0$ of $t = \pi$ of $t = 2\pi$ of $t = 3\pi$.

Daarbij horen de punten $(2, 0)$, $(\pi - 2, 0)$, $(2\pi + 2, 0)$ en $(3\pi - 2, 0)$.

b $x'(t) = 1 - 2\sin(t)$

$$y'(t) = 2\cos(t)$$

De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$$1 - 2\sin(t) = 0$$

$$\sin(t) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi]$ zijn de oplossingen $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ of

$$t = 2\frac{1}{6}\pi \text{ of } t = 2\frac{5}{6}\pi.$$

De raaklijn is verticaal in de punten $(\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}, 1)$, $(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}, 1)$,

$(2\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}, 1)$ en $(2\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}, 1)$.

c $v = \sqrt{(1 - 2\sin(t))^2 + (2\cos(t))^2}$

$$v = \sqrt{1 - 4\sin(t) + 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$$

$$v = \sqrt{1 - 4\sin(t) + 4}$$

$$v = \sqrt{5 - 4\sin(t)}$$

d De snelheid is maximaal $\sqrt{5+4} = 3$ als $\sin(t) = -1$.

$$\text{Hieruit volgt } t = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$\text{Op het interval } [-\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi] \text{ gaat het om } t = -\frac{1}{2}\pi, t = \frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 3\frac{1}{2}\pi.$$

De punten waarin de snelheid maximaal is zijn $(-\frac{1}{2}\pi, -2)$, $(\frac{1}{2}\pi, -2)$ en

$(3\frac{1}{2}\pi, -2)$.

De snelheid is minimaal $\sqrt{5-4} = 1$ als $\sin(t) = 1$.

$$\text{Hieruit volgt } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi.$$

$$\text{Op het interval } [-\frac{1}{2}\pi, 3\frac{1}{2}\pi] \text{ gaat het om } t = \frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 2\frac{1}{2}\pi.$$

De punten waarin de snelheid minimaal is zijn $(\frac{1}{2}\pi, 2)$ en $(2\frac{1}{2}\pi, 2)$.

$$\text{e } \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{5-4\sin(t)}} \cdot -4\cos(t) \text{ ofwel } \frac{dv}{dt} = \frac{-2\cos(t)}{\sqrt{5-4\sin(t)}}$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{5-4 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1.$$

026 a $x'(t) = 2t$

$$y'(t) = 2t - 6$$

$$v = \sqrt{(2t)^2 + (2t - 6)^2}$$

$$v = \sqrt{4t^2 + 4t^2 - 24t + 36}$$

$$v = \sqrt{8t^2 - 24t + 36}$$

$$\text{b } \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 24t + 36}} \cdot (16t - 24) \text{ ofwel } \frac{dv}{dt} = \frac{8t - 12}{\sqrt{8t^2 - 24t + 36}}$$

$$\text{c } 8t - 12 = 0 \text{ en } \sqrt{8t^2 - 24t + 36} \neq 0$$

$$8t = 12$$

$$t = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{d } x\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 9 = 2\frac{1}{4} - 9 = -6\frac{3}{4}$$

$$y\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} - 9 = -6\frac{3}{4}$$

Bij $t = 1\frac{1}{2}$ hoort het punt $(-6\frac{3}{4}, -6\frac{3}{4})$.

e Onder het wortelteken staat een kwadratische functie waarvan de grafiek een dalparabool is. Deze functie heeft dus een minimum. Daaruit volgt dat v ook een minimum heeft. Dus op $t = 1\frac{1}{2}$ is de snelheid minimaal.

U6 a $x'(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$ geeft $x'(1) = \frac{3}{\sqrt{1}} = 3$

$$y'(t) = 1 - \frac{3}{\sqrt{t}} \text{ geeft } y'(1) = 1 - \frac{3}{\sqrt{1}} = -2$$

De baansnelheid van P op $t = 1$ is $v = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

b Als $x \rightarrow 0$ dan wordt $\frac{3}{\sqrt{t}}$ heel groot, dus ook de baansnelheid

$$v = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{t}}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{t}}\right)^2} \text{ wordt dan heel groot.}$$

$$\text{c } y(t) = 0 \text{ geeft } t - 6\sqrt{t} = 0$$

$$t = 6\sqrt{t}$$

$$t^2 = 36t$$

$$t = 0 \text{ of } t = 36$$

De baan snijdt de x -as op $t = 36$.

$$v = \sqrt{\frac{9}{t} + 1 - \frac{6}{\sqrt{t}} + \frac{9}{t}}$$

$$v = \sqrt{\frac{18}{t} + 1 - \frac{6}{\sqrt{t}}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{18}{t} + 1 - \frac{6}{\sqrt{t}}}} \cdot (-18t^{-2} + 3t^{-1\frac{1}{2}})$$

$$t = 36 \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + 1 - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{72} + \frac{1}{72}\right) = 0$$

Hieruit volgt dat de snelheid minimaal is als de baan de x -as snijdt.

19 Bewegingsvergelijkingen

U7 a $x(t) = 0$ geeft $a(3t^2 - 1) = 0$

$$3t^2 = 1$$

$$t^2 = \frac{1}{3}$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ of } t = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$y\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right) \neq 0 \text{ en ook } y\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = a \cdot -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3} - 3\right) \neq 0$$

Voor elke waarde van $a \neq 0$ geldt dat er geen t -waarde is waarvoor zowel $x(t) = 0$ als $y(t) = 0$. Hieruit volgt dat de baan niet door de oorsprong gaat.

b $y(t) = 0$ als $t = 0$ of $t = \sqrt{3}$ of $t = -\sqrt{3}$.

$t = 0$ geeft het punt $A(-a, 0)$.

Bij $t = \sqrt{3}$ en $t = -\sqrt{3}$ hoort het punt $B(8a, 0)$.

De afstand van A tot de oorsprong is $|a|$, de afstand van B tot de oorsprong is $|8a|$. De verhouding van de afstanden is $1 : 8$.

c $y(t) = at^3 - 3at$

$$y'(t) = 3at^2 - 3a$$

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } 3at^2 - 3a = 0$$

$$3a(t^2 - 1) = 0$$

$$t^2 - 1 = 0$$

$$t^2 = 1 \text{ ofwel } t = 1 \text{ of } t = -1.$$

$$x'(t) = 6at$$

De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 1$ of $t = -1$.

$t = 1$ geeft het punt $(2a, -2a)$ dit punt ligt op de lijn $y = -x$.

$t = -1$ geeft het punt $(2a, 2a)$ dit punt ligt op de lijn $y = x$.

d $x'(\sqrt{3}) = 6a\sqrt{3}$

$$y'(\sqrt{3}) = 9a - 3a = 6a$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn op $t = \sqrt{3}$ is $\frac{6a}{6a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Uit $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ volgt $\alpha = 30^\circ$. Hieruit volgt dat de kromme de x -as snijdt onder een hoek van 30° .

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn op $t = -\sqrt{3}$ is $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus de kromme snijdt de x -as dan ook onder een hoek van 30° .

e $x'(t) = 6t$

$$y'(t) = 3t^2 - 3$$

$$v = \sqrt{36t^2 + (3t^2 - 3)^2}$$

$$v = \sqrt{36t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9}$$

$$v = \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}$$

$$v = \sqrt{(3t^2 + 3)^2}$$

$$v = 3t^2 + 3$$

$$\frac{dv}{dt} = 6t$$

19.5 Gemengde opdrachten

31 a $y(t) = 0$

$$4 - t^2 = 0$$

$$t = 2 \text{ of } t = -2$$

$$x(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

$$x(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot -2 = 4 + 8 = 12$$

De snijpunten met de x -as zijn $(-4, 0)$ en $(12, 0)$.

$$x(t) = 0$$

$$t^2 - 4t = 0$$

$$t(t - 4) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 4$$

$$y(0) = 4$$

$$y(4) = 4 - 4^2 = 4 - 16 = -12$$

De snijpunten met de y -as zijn $(0, 4)$ en $(0, -12)$.

b $x'(t) = 2t - 4$

$$x'(t) = 0 \text{ als } t = 2$$

$$y'(t) = -2t$$

$$y'(t) = 0 \text{ als } t = 0$$

De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 0$.

Daarbij hoort het punt $(0, 4)$.

De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 2$.

Daarbij hoort het punt $(-4, 0)$.

c De afstand d tussen $P(t^2 - 4t, 4 - t^2)$ en $A(0, -4)$ is

$$d = \sqrt{(t^2 - 4t)^2 + (4 - t^2 + 4)^2}$$

$$d = \sqrt{(t^2 - 4t)^2 + (8 - t^2)^2}$$

$$d = \sqrt{t^4 - 8t^3 + 16t^2 + 64 - 16t^2 + t^4}$$

$$d = \sqrt{2t^4 - 8t^3 + 64}$$

$$d' = \frac{1}{2\sqrt{2t^4 - 8t^3 + 64}} \cdot (8t^3 - 24t^2)$$

$$d' = 0 \text{ geeft } 8t^3 - 24t^2 = 0$$

$$8t^2(t - 3) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 3$$

In de plot zie je dat de afstand minimaal is als $t = 3$.

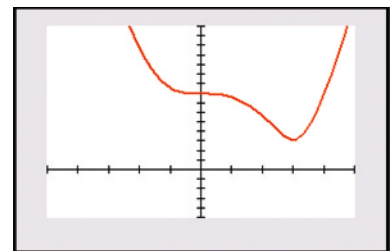
Daarbij hoort het punt $(-3, -5)$.

d $(t^2 - 4t + 4 - t^2)^2 - 8(t^2 - 4t) + 8(4 - t^2) =$

$$(-4t + 4)^2 - 8t^2 + 32t + 32 - 8t^2 =$$

$$16t^2 - 32t + 16 - 8t^2 + 32t + 32 - 8t^2 = 48$$

Dit geldt voor elke waarde van t , dus de coördinaten van de punten van de baan voldoen aan de vergelijking $(x + y)^2 - 8x + 8y = 48$.



32 a $y(t) = 0$ geeft $7 + 6t - t^2 = 0$

$$t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$(t - 7)(t + 1) = 0$$

$$t = 7 \text{ of } t = -1$$

$$x(7) = \sqrt{7^2 + 4 \cdot 7 + 15} = \sqrt{92}$$

$$x(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot -1 + 15} = \sqrt{12}$$

De snijpunten met de x -as zijn $(\sqrt{92}, 0)$ en $(\sqrt{12}, 0)$.

19 Bewegingsvergelijkingen

$$\text{b } x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 4t + 15}} \cdot (2t + 4) \text{ ofwel } x'(t) = \frac{t + 2}{\sqrt{t^2 + 4t + 15}}$$

$$y'(t) = 6 - 2t$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{y'(-7)}{x'(-7)} = \frac{20}{-\frac{5}{6}} = -24$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -24x + b$.

$t = -7$ geeft het raakpunt $(6, -84)$.

Dit substitueren geeft $-84 = -24 \cdot 6 + b$ ofwel $b = 60$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -24x + 60$.

$$\text{c } y'(t) = 0 \text{ en } x'(t) \neq 0 \text{ geeft } 6 - 2t = 0 \text{ dus } t = 3.$$

$$x(3) = 6 \text{ en } y(3) = 16$$

De raaklijn is evenwijdig met de x -as in het punt $(6, 16)$.

$$\text{d } y(t) = 12 \text{ geeft } 7 + 6t - t^2 = 12$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$(t - 5)(t - 1) = 0$$

$$t = 5 \text{ of } t = 1$$

$$x(5) = \sqrt{60} \text{ en } x(1) = \sqrt{20}$$

De snijpunten zijn $(\sqrt{60}, 12)$ en $(\sqrt{20}, 12)$.

33 a Is de raaklijn evenwijdig aan de y -as, dan geldt $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$$x'(t) = 5 \cos(t)$$

$$y'(t) = 2t$$

$$x'(t) = 0 \text{ geeft } 5 \cos(t) = 0 \text{ ofwel } \cos(t) = 0$$

Op het interval $[-\pi, \pi]$ is de oplossing $t = -\frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi$.

$$x\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -5 \text{ en } y\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi^2$$

$$x\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 5 \text{ en } y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi^2$$

In de punten $\left(-5, \frac{1}{4}\pi^2\right)$ en $\left(5, \frac{1}{4}\pi^2\right)$ is de raaklijn verticaal.

$$\text{b } t = a \text{ geeft het punt } B(5\sin(a), a^2)$$

$$t = -a \text{ geeft } x(-a) = 5 \sin(-a) = -5 \sin(a) \text{ en } y(-a) = (-a)^2 = a^2$$

Op de baan ligt het punt $C(-5 \sin(a), a^2)$.

$x_C = -x_B$ en $y_C = y_B$ dus C is het spiegelbeeld van B in de y -as.

$$\text{c } \text{Deze richtingscoëfficiënt is } \frac{y'(-\pi)}{x'(-\pi)} = \frac{-2\pi}{5 \cos(-\pi)} = \frac{-2\pi}{-5} = \frac{2}{5}\pi.$$

$$\text{d } \text{Deze richtingscoëfficiënt is } \frac{y'(\pi)}{x'(\pi)} = \frac{2\pi}{5 \cos(\pi)} = \frac{2\pi}{-5} = -\frac{2}{5}\pi.$$

Of: de baan is symmetrisch in de y -as. Hieruit volgt dat bij aankomst de richtingscoëfficiënt gelijk is aan $-\frac{2}{5}\pi$.

$$\text{e } \text{Bij } O \text{ hoort } t = 0.$$

$$\vec{v} = \sqrt{(x'(0))^2 + (y'(0))^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

De baansnelheid in O is 5.

$$\text{Een formule voor de snelheid is } v = \sqrt{25 \cos^2(t) + 4t^2}.$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{25 \cos^2(t) + 4t^2}} \cdot (50 \cos(t) \cdot -\sin(t) + 8t)$$

$$t = 0 \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 0 = 0.$$

De baanversnelling in O is 0.

Onderzoeksoopdrachten

34 a $y(t) = 0$ geeft $t \cdot \sin(t) = 0$

$$t = 0 \text{ of } \sin(t) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = k \cdot \pi$$

De snijpunten zijn $(0, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(-3\pi, 0)$, $(4\pi, 0)$ enz.

De opeenvolgende snijpunten met de positieve x -as zijn $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(4\pi, 0)$, $(6\pi, 0)$ enz.

De opeenvolgende snijpunten met de negatieve x -as zijn $(-\pi, 0)$, $(-3\pi, 0)$, $(-5\pi, 0)$ enz.

De opeenvolgende snijpunten met de x -as liggen met uitzondering van $(-\pi, 0)$ en $(0, 0)$ op afstand 2π van elkaar.

$$x(t) = 0 \text{ geeft } t \cdot \cos(t) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } \cos(t) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

De snijpunten zijn $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(0, -\frac{1}{2}\pi)$, $(0, 2\frac{1}{2}\pi)$, $(0, -3\frac{1}{2}\pi)$ enz.

Ook op de y -as liggen bijna alle opeenvolgende snijpunten op afstand 2π van elkaar.

- b** Je krijgt roosterpunten op de x -as als je x en y vermenigvuldigt met $\frac{1}{2\pi}$.

$$\text{Dit geeft } \begin{cases} x(t) = \frac{t}{2\pi} \cdot \cos(t) \\ y(t) = \frac{t}{2\pi} \cdot \sin(t) \end{cases}$$

c $x'(t) = \cos(t) + t \cdot -\sin(t)$

$$y'(t) = \sin(t) + t \cdot \cos(t)$$

$$v = \sqrt{(\cos(t) - t \sin(t))^2 + (\sin(t) + t \cos(t))^2}$$

$$v = \sqrt{\cos^2(t) - 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \cos^2(t)}$$

$$v = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))}$$

$$v = \sqrt{1 + t^2}$$

d $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

e $\vec{OP} = \begin{pmatrix} e^{0,1t} \cdot \cos(t) \\ e^{0,1t} \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1e^{0,1t}\cos(t) - e^{0,1t}\sin(t) \\ 0,1e^{0,1t}\sin(t) + e^{0,1t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

De hoek tussen $\vec{OP}$ en $\vec{v}$ is hetzelfde als de hoek α tussen $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ en

$$\begin{pmatrix} 0,1 \cos(t) - \sin(t) \\ 0,1 \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(t)(0,1 \cos(t) - \sin(t)) + \sin(t)(0,1 \sin(t) + \cos(t))}{1 \cdot \sqrt{(0,1 \cos(t) - \sin(t))^2 + (0,1 \sin(t) + \cos(t))^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{0,1 \cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + 0,1 \sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)}{\sqrt{0,01 \cos^2(t) - 0,2 \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + 0,01 \sin^2(t) + 0,2 \sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)}} = \frac{0,1}{\sqrt{1,01}}$$

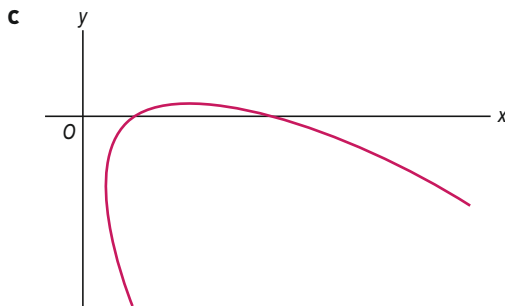
$\cos(\alpha)$ is constant dus ook α is constant.

19 Bewegingsvergelijkingen

- f** b bepaalt hoe ver de omwentelingen uit elkaar liggen.
 $b = 0$ levert een cirkel op met straal 1.
 $b > 0$ levert een spiraal naar buiten op.
 $b < 0$ levert een spiraal naar binnen op met als limietpunt $(0, 0)$.

Samenvatting

- S1 a** $t = 0$ geeft $P(4, 0)$
 $t = -2$ geeft $P(2, -8)$
 $t = 4$ geeft $P(32, -8)$
- b** Bij $x(t)$ hoort een dalparabool.
 $x'(t) = 2t + 3$ dus de x -coördinaat van de top is $-1\frac{1}{2}$.
 $x(-1\frac{1}{2}) = 1\frac{3}{4}$, hieruit volgt dat $x(t) \geq 1\frac{3}{4}$ voor alle waarden van t en dus ligt de baan van P rechts van de y -as.



- S2** A: geen van beide
 B: cirkel
 C: lijn
 D: geen van beide
- S3 a** De baan van P is een cirkel met middelpunt $(7, -5)$ en straal 3.
 Een vergelijking van de cirkel is $(x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 9$.
- b** Uit $x = -3 - t$ volgt $t = -3 - x$.
 Substitutie in $y = 2t + 4$ geeft
 $y = 2(-3 - x) + 4$ ofwel $y = -2x - 2$.
 Een vergelijking van de lijn is $y = -2x - 2$.
- S4** $t = a$ geeft het punt $A(a^3 - 2a, a^2 + \sqrt{a^2 + 9})$.
 $t = -a$ geeft het punt $B((-a)^3 - 2 \cdot -a, (-a)^2 + \sqrt{(-a)^2 + 9})$ ofwel
 $B(-a^3 + 2a, a^2 + \sqrt{a^2 + 9})$ ofwel $B(-(a^3 - 2a), a^2 + \sqrt{a^2 + 9})$.
 $x_B = -x_A$ en $y_B = y_A$ dus B is het spiegelbeeld van A in de y -as en de baan is daarom symmetrisch in de y -as.
- S5** $x'(t) = t^2 - 2t - 3$
 $x'(t) = 0$ geeft $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t - 3)(t + 1) = 0$
 $t = 3$ of $t = -1$
 $y'(t) = -2t$
 $y'(t) = 0$ geeft $t = 0$
 Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 0$.
 Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$ of $t = -1$.
 Er is een horizontale raaklijn in $(0, 9)$ en een verticale raaklijn in $(-9, 0)$ en $(1\frac{2}{3}, 8)$.

S6 $x'(t) = 1 + \frac{4}{2\sqrt{t}}$ ofwel $x'(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{t}}$
 $y'(t) = 1 - \frac{4}{2\sqrt{t}}$ ofwel $y'(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}}$
 $x'(9) = 1 + \frac{2}{\sqrt{9}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ en $y'(9) = 1 - \frac{2}{\sqrt{9}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
 $v = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{26}$

S7 a $x'(t) = -4\sin(t)$
 $y'(t) = 3\cos(t)$
 $|\vec{v}| = \sqrt{(-4\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2}$
 $|\vec{v}| = \sqrt{16\sin^2(t) + 9\cos^2(t)}$
 $|\vec{v}| = \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 7\sin^2(t)}$
 $|\vec{v}| = \sqrt{9 + 7\sin^2(t)}$

b $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{9 + 7\sin^2(t)}} \cdot 14\sin(t)\cos(t)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{7\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{9 + 7\sin^2(t)}}$
 $t = \frac{1}{4}\pi$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{7 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{9 + 7 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{3\frac{1}{2}}{\sqrt{12\frac{1}{2}}} = \frac{7}{2\sqrt{12\frac{1}{2}}}$

Test jezelf

T1 a $y(t) = 0$ geeft $6t - t^2 = 0$
 $t(6 - t) = 0$
 $t = 0$ of $t = 6$
De snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(18, 0)$.
 $x(t) = 0$ geeft $t^2 - 3t = 0$
 $t(t - 3) = 0$
 $t = 0$ of $t = 3$
De snijpunten met de y -as zijn $(0, 0)$ en $(0, 9)$.

b $x'(t) = 2t - 3$
 $y'(t) = 6 - 2t$
 $t = -2$ geeft $v = \sqrt{(x'(-2))^2 + (y'(-2))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 10^2} = \sqrt{149} \approx 12,2$.
 $v = \sqrt{(2t - 3)^2 + (6 - 2t)^2}$
 $v = \sqrt{4t^2 - 12t + 9 + 36 - 24t + 4t^2}$
 $v = \sqrt{8t^2 - 36t + 45}$
 $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 36t + 45}} \cdot (16t - 36)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{8t - 18}{\sqrt{8t^2 - 36t + 45}}$
 $t = -2$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{-34}{\sqrt{149}} \approx 2,8$

19 Bewegingsvergelijkingen

- c De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $\frac{y'(t)}{x'(t)} = 1$.

$$\frac{6-2t}{2t-3} = 1$$

$$6-2t = 2t-3$$

$$-4t = -9$$

$$t = 2\frac{1}{4}$$

Hierbij hoort het punt $(-1\frac{11}{16}, 8\frac{7}{16})$.

Een vergelijking van deze raaklijn is van de vorm $y = x + b$.

Invullen van $x = -1\frac{11}{16}$ en $y = 8\frac{7}{16}$ geeft $8\frac{7}{16} = -1\frac{11}{16} + b$ dus $b = 10\frac{1}{8}$.

Een vergelijking van deze raaklijn is $y = x + 10\frac{1}{8}$.

- d $x = t^2 - 3t$ en $y = 6t - t^2$ substitueren geeft

$$(t^2 - 3t + 6t - t^2)^2 = 18(t^2 - 3t) + 9(6t - t^2)$$

$$9t^2 = 18t^2 - 54t + 54t - 9t^2$$

$$9t^2 = 9t^2$$

Dit klopt voor elke waarde van t , dus de punten van de baan voldoen aan de gegeven vergelijking.

- T2 a Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Een normaalvector van de lijn is $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de lijn is van de vorm $2x + 3y = c$.

$(4, 6)$ invullen geeft $2x + 3y = 26$.

- b Uit $x = 4 + 3\sin(t)$ volgt $3\sin(t) = x - 4$ ofwel $\sin(t) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

Dit substitueren in $y = 6 - 2\sin(t)$ geeft $y = 6 - 2(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3})$.

$$y = 6 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{3}x + y = 8\frac{2}{3}$$

$$2x + 3y = 26$$

Hieruit volgt dat de baan van Q een deel van de baan van P is. Voor $x = 4 + 3\sin(t)$ geldt $1 \leq x \leq 7$, daarom is het een *deel* van de baan.

- c Voor de eindpunten geldt $x = 1$ als $\sin(t) = -1$ en $x = 7$ als $\sin(t) = 1$.

Hieruit volgen de punten $(1, 8)$ en $(7, 4)$.

- T3 a Bij $t = \frac{1}{6}\pi$ hoort het punt $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ en bij $t = 1\frac{1}{6}\pi$ hoort $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

De lengte van de korte as in de tekening is $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Bij $t = \frac{2}{3}\pi$ hoort $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ en bij $t = 1\frac{2}{3}\pi$ hoort $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

De lengte van de lange as in de tekening is $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.

b $x'(t) = \cos(t)$

$$y'(t) = \cos\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$v = \sqrt{\cos^2(t) + \cos^2\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\cos^2(t) + \cos^2\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)}} \cdot \left(2\cos(t) \cdot -\sin(t) + 2\cos\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) \cdot -\sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-\cos(t)\sin(t) - \cos\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)}{\sqrt{\cos^2(t) + \cos^2\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)}}$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot -\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}} = 0$$

$$t = 1\frac{1}{6}\pi \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}} = 0$$

$$t = \frac{2}{3}\pi \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = 0$$

$$t = 1\frac{2}{3}\pi \text{ geeft } \frac{dv}{dt} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = 0$$

c $t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } v = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2}$

$$t = \frac{2}{3}\pi \text{ geeft } v = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$t = 1\frac{1}{6}\pi \text{ geeft } v = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$t = 1\frac{2}{3}\pi \text{ geeft } v = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

d Voor de snijpunten met de x -as geldt $y(t) = 0$ dus $\sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) = 0$.

$$t - \frac{1}{3}\pi = k\pi$$

$$t = \frac{1}{3}\pi + k\pi$$

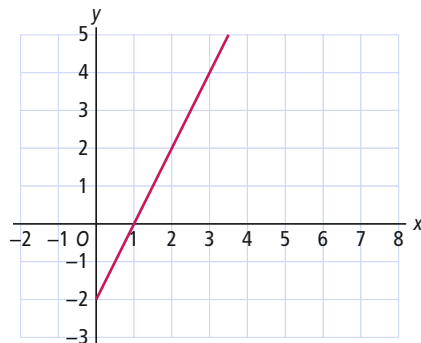
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan is

$$\frac{y'\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{x'\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Uit $\tan(\alpha) = 2$ volgt $\alpha = 63,434 \dots$

De hoek waaronder de ellips de x -as snijdt is ongeveer 63° .

T4 a



19 Bewegingsvergelijkingen

b $t = 0$ geeft het punt $(1, 0)$.

$t = 1$ geeft het punt $(0, -2)$.

De richtingscoëfficiënt is 2, dus een vergelijking van de lijn is $y = 2x - 2$.

Substitutie van $x(t) = (t - 1)^2$ en $y(t) = 2t^2 - 4t$ geeft

$$2t^2 - 4t = 2(t - 1)^2 - 2$$

$$2t^2 - 4t = 2(t^2 - 2t + 1) - 2$$

$$2t^2 - 4t = 2t^2 - 4t + 2 - 2$$

Dit klopt voor alle waarden van t dus de punten van de baan voldoen aan de vergelijking $y = 2x - 2$.

c $x'(t) = 2(t - 1) = 2t - 2$

$$y'(t) = 4t - 4$$

De snelheid is 0 als $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$, dus als $t = 1$.

T5 a $y(t) = 0$ geeft $\ln(t^2 + 4t + 5) = 0$

$$t^2 + 4t + 5 = 1$$

$$t^2 + 4t + 4 = 0$$

$$(t + 2)(t + 2) = 0$$

$$t = -2$$

Het gemeenschappelijke punt met de x -as is $(0, 0)$.

$$x(t) = 0 \text{ geeft } t^2 - 5t - 14 = 0$$

$$(t - 7)(t + 2) = 0$$

$$t = 7 \text{ of } t = -2$$

De gemeenschappelijke punten met de y -as zijn $(0, \ln(82))$ en $(0, 0)$.

b $x'(t) = 2t - 5$ en $y'(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 5} \cdot (2t + 4)$ ofwel $y'(t) = \frac{2t + 4}{t^2 + 4t + 5}$

Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 2\frac{1}{2}$.

Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = -2$.

In $(-20\frac{1}{4}, \ln(21\frac{1}{4}))$ is de raaklijn verticaal en in $(0, 0)$ horizontaal.

c $x'(-3) = -11$ en $y'(-3) = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1$

$$\text{De baansnelheid } v = \sqrt{(-11)^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}.$$

T6 a Uit $x = 12 - 3t$ volgt $3t = 12 - x$ ofwel $t = 4 - \frac{1}{3}x$.

Substitutie in $y = 7 + 4t$ geeft $y = 7 + 4(4 - \frac{1}{3}x)$ ofwel $y = 23 - \frac{4}{3}x$.

Hieruit volgt $\frac{4}{3}x + y = 23$ ofwel $4x + 3y = 69$.

b De baan van punt Q is een cirkel met middelpunt $(12, c)$ en straal 13.

Een vergelijking van de cirkel is $(x - 12)^2 + (y - c)^2 = 169$.

$(0, 0)$ ligt op de cirkel, dit substitueren geeft

$$(0 - 12)^2 + (0 - c)^2 = 169$$

$$144 + (-c)^2 = 169$$

$$c^2 = 25$$

$$c = 5 \text{ of } c = -5$$

Vergelijkingen van de twee mogelijke cirkels zijn $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$ en

$$(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 169.$$

$$\text{T7 a } \sqrt{t^2 + 6t + 21} = \sqrt{4t^2 + 4t + 16}$$

$$t^2 + 6t + 21 = 4t^2 + 4t + 16$$

$$3t^2 - 2t - 5 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$$

$$t = \frac{2+8}{6} = 1\frac{2}{3} \text{ of } t = \frac{2-8}{6} = -1 \text{ beide voldoen}$$

De snijpunten zijn $(\sqrt{33\frac{7}{9}}, \sqrt{33\frac{7}{9}})$ en $(4, 4)$.

$$\text{b } x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 6t + 21}} \cdot (2t + 6) \text{ ofwel } x'(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2 + 6t + 21}}$$

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + 4t + 16}} \cdot (8t + 4) \text{ ofwel } y'(t) = \frac{4t+2}{\sqrt{4t^2 + 4t + 16}}$$

Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = -\frac{1}{2}$.

Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = -3$.

In $(\sqrt{18\frac{1}{4}}, \sqrt{15})$ is de raaklijn horizontaal en in $(\sqrt{12}, \sqrt{40})$ verticaal.

$$\text{c } \sqrt{4t^2 + 4t + 16} = 2\sqrt{t^2 + 6t + 21}$$

$$4t^2 + 4t + 16 = 4(t^2 + 6t + 21)$$

$$4t^2 + 4t + 16 = 4t^2 + 24t + 84$$

$$-20t = 68$$

$$t = -\frac{68}{20} = -3\frac{2}{5}$$

$$\text{d } x'(-1) = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$

$$y'(-1) = \frac{-2}{\sqrt{16}} = -\frac{1}{2}$$

De richtingscoëfficiënt is $\frac{y'(-1)}{x'(-1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$.

Extra oefening

$$\text{E1 a } \text{ Uit } x = 13 - 4t \text{ volgt } 4t = 13 - x \text{ ofwel } t = \frac{13}{4} - \frac{1}{4}x.$$

Substitutie in $y = -1 + 5t$ geeft $y = -1 + 5(\frac{13}{4} - \frac{1}{4}x)$ ofwel $y = 15\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4}x$.

$$1\frac{1}{4}x + y = 15\frac{1}{4}$$

$$5x + 4y = 61$$

b De baan van Q is een cirkel met middelpunt $(-5, 3)$ en straal 7.

Een vergelijking is $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 49$.

$$\text{E2 } x'(t) = 4t^3 - 12t^2$$

$$x'(t) = 0 \text{ geeft } 4t^3 - 12t^2 = 0$$

$$4t^2(t - 3) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 3$$

$$y'(t) = 3t^2 + 6t - 9$$

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } 3t^2 + 6t - 9 = 0$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t + 3)(t - 1) = 0$$

$$t = -3 \text{ of } t = 1$$

19 Bewegingsvergelijkingen

Er zijn toppen als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 0$ en als $t = 3$.

Er zijn ook toppen als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = -3$ en als $t = 1$.

De toppen zijn $(3, 0)$, $(-24, 27)$, $(192, 27)$ en $(0, -5)$.

E3 $t = a$ geeft het punt $A\left(\frac{1}{2}a^4 - 2a^2 - 1, a^3 + 5a\right)$.

$t = -a$ geeft het punt $B\left(\frac{1}{2}(-a)^4 - 2(-a)^2 - 1, (-a)^3 + 5(-a)\right)$ ofwel

$B\left(\frac{1}{2}a^4 - 2a^2 - 1, -a^3 - 5a\right)$ ofwel $B\left(\frac{1}{2}a^4 - 2a^2 - 1, -(a^3 + 5a)\right)$

$x_B = x_A$ en $y_B = -y_A$ dus B is het spiegelbeeld van A in de x -as.

E4 a $y(t) = 3$ geeft $t^3 - 2t^2 + 3 = 3$

$$t^3 - 2t^2 = 0$$

$$t^2(t - 2) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 2$$

$x(0) = 0$ dus $t = 0$ hoort bij P .

$$x'(t) = 3t^2 + 6t - 9 \text{ geeft } x'(0) = -9$$

$$y'(t) = 3t^2 - 4t \text{ geeft } y'(0) = 0$$

De baansnelheid in dit punt is $v = \sqrt{(-9)^2 + 0^2} = 9$.

b $x'(2) = 15$

$$y'(2) = 4$$

De baansnelheid in dit punt is $v = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$.

E5 a $x'(t) = -2t + 3$

$$y'(t) = 2t - 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2t + 3)^2 + (2t - 2)^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4t^2 - 12t + 9 + 4t^2 - 8t + 4}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{8t^2 - 20t + 13}$$

b $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{8t^2 - 20t + 13}} \cdot (16t - 20)$ ofwel $\frac{dv}{dt} = \frac{8t - 10}{\sqrt{8t^2 - 20t + 13}}$

c $t = 2$ geeft $\frac{dv}{dt} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

d $\frac{dv}{dt} = 0$ geeft $8t - 10 = 0$ ofwel $t = \frac{5}{4}$

De minimale baansnelheid is $v = \sqrt{8 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 20 \cdot \frac{5}{4} + 13} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

E6 a $y(t) = 0$ geeft $-t^2 + 5t + 24 = 0$

$$t^2 - 5t - 24 = 0$$

$$(t - 8)(t + 3) = 0$$

$$t = 8 \text{ of } t = -3$$

De snijpunten met de x -as zijn $(8, 0)$ en $\left(13\frac{1}{2}, 0\right)$.

$$x(t) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2}t^2 - 3t = 0$$

$$\frac{1}{2}t(t - 6) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 6$$

De snijpunten met de y -as zijn $(0, 24)$ en $(0, 18)$.

b $x'(t) = t - 3$

$$x'(t) = 0 \text{ geeft } t = 3$$

$$y'(t) = -2t + 5$$

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } t = 2\frac{1}{2}$$

Er is een horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = 2\frac{1}{2}$.

Er is een verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$.

De raaklijn is horizontaal in het punt $(-4\frac{3}{8}, 30\frac{1}{4})$ en verticaal in $(-4\frac{1}{2}, 30)$.

c $v = \sqrt{(t-3)^2 + (-2t+5)^2}$

$$v = \sqrt{t^2 - 6t + 9 + 4t^2 - 20t + 25}$$

$$v = \sqrt{5t^2 - 26t + 34}$$

$$t = 1 \text{ geeft als de baansnelheid } v = \sqrt{5 - 26 + 34} = \sqrt{13}.$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{5t^2 - 26t + 34}} \cdot (10t - 26) \text{ ofwel } \frac{dv}{dt} = \frac{5t - 13}{\sqrt{5t^2 - 26t + 34}}$$

$$t = 1 \text{ geeft als de baanversnelling } \frac{dv}{dt} = \frac{-8}{\sqrt{13}} = -\frac{8}{13}\sqrt{13}.$$

d De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -3 dus $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -3$.

$$\frac{-2t + 5}{t - 3} = -3$$

$$-2t + 5 = -3t + 9$$

$$t = 4$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -3 in het punt $(-4, 28)$.

E7 a $y(t) = 0$ geeft $2t^2 - 2t = 0$

$$2t(t - 1) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 1$$

De snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(-6, 0)$.

$$x(t) = 0 \text{ geeft } t^3 - 3t^2 - 4t = 0$$

$$t(t^2 - 3t - 4) = 0$$

$$t(t - 4)(t + 1) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 4 \text{ of } t = -1$$

De snijpunten met de y -as zijn $(0, 0)$, $(0, 24)$ en $(0, 4)$.

b $x'(t) = 3t^2 - 6t - 4$

$$y'(t) = 4t - 2$$

$$y'(t) = 0 \text{ geeft } t = \frac{1}{2} \text{ en } x'(\frac{1}{2}) \neq 0$$

De raaklijn is evenwijdig met de x -as als $t = \frac{1}{2}$.

Daarbij hoort het punt $(-2\frac{5}{8}, -\frac{1}{2})$.

c $y(t) = 12$ geeft $2t^2 - 2t = 12$

$$2t^2 - 2t - 12 = 0$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t - 3)(t + 2) = 0$$

$$t = 3 \text{ of } t = -2$$

$$x(3) = x(-2) = -12$$

$$t = 3 \text{ geeft } \frac{y'(3)}{x'(3)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$t = -2 \text{ geeft } \frac{y'(-2)}{x'(-2)} = \frac{-10}{20} = -\frac{1}{2}$$

19 Bewegingsvergelijkingen

De richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in $(-12, 12)$ zijn 2 en $-\frac{1}{2}$.

$2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$ dus hieruit volgt dat de raaklijnen loodrecht op elkaar staan.

$$\begin{aligned} \text{d } \frac{y'(t)}{x'(t)} &= \frac{1}{2} \\ \frac{4t-2}{3t^2-6t-4} &= \frac{1}{2} \\ 3t^2-6t-4 &= 8t-4 \\ 3t^2-14t &= 0 \\ t(3t-14) &= 0 \\ t &= 0 \text{ of } t = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \end{aligned}$$

E8 a De grafiek van $y = t^2 - 6t + 10$ is een dalparabool.

$t^2 - 6t + 10 = 0$ geeft $D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4$ dus deze dalparabool heeft geen snijpunten met de horizontale as.

Voor elk waarde van t geldt dan dat $t^2 - 6t + 10$ positief is.

$x(t) = \sqrt{t^2 - 6t + 10}$ heeft dus voor elke waarde van t een uitkomst.

$t^2 + 6t + 10 = 0$ geeft $D = -4$ dus ook $t^2 + 6t + 10$ is voor elke waarde van t positief.

Hieruit volgt dat $x(t)$ en $y(t)$ voor elke waarde van t bestaan.

$$\text{b } x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2-6t+10}} \cdot (2t-6) \text{ ofwel } x'(t) = \frac{t-3}{\sqrt{t^2-6t+10}}$$

$x'(t) = 0$ geeft $t = 3$

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+6t+10}} \cdot (2t+6) \text{ ofwel } y'(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+6t+10}}$$

$y'(t) = 0$ geeft $t = -3$

De raaklijn is horizontaal als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dus als $t = -3$.

De raaklijn is verticaal als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 3$.

In $(\sqrt{37}, 1)$ is de raaklijn horizontaal en in $(1, \sqrt{37})$ verticaal.

$$\text{c } t = a \text{ geeft het punt } A(\sqrt{a^2-6a+10}, \sqrt{a^2+6a+10})$$

$t = -a$ geeft het punt $B(\sqrt{(-a)^2-6 \cdot -6a+10}, \sqrt{(-a)^2+6 \cdot -a+10})$ ofwel

$$B(\sqrt{a^2+6a+10}, \sqrt{a^2-6a+10})$$

$x_B = y_A$ en $y_B = x_A$ dus B is het spiegelbeeld van A in de lijn $y = x$.

$$\text{d } y = x \text{ geeft}$$

$$\sqrt{t^2-6t+10} = \sqrt{t^2+6t+10}$$

$$t^2-6t+10 = t^2+6t+10$$

$$-12t = 0$$

$t = 0$ geeft het punt $(\sqrt{10}, \sqrt{10})$.

De baan snijdt de lijn $y = x$ op $t = 0$.

$$x'(0) = \frac{-3}{\sqrt{10}} \text{ en } y'(0) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn op $t = 0$ is $\frac{y'(0)}{x'(0)} = -1$.

$$1 \cdot -1 = -1$$

Hieruit volgt dat de raaklijn loodrecht staat op de lijn $y = x$.

20 Goniometrische formules

Voorkennis

- V1 a** $f(x) = \sin(7\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- b** $g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(x)$
- c** $h(x) = \sin\left(x + 3\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(x)$
- d** $k(x) = \cos(-x - 23\pi) = \cos(-x - \pi) = \cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- V2 a** $\cos\left(\frac{1}{3}\pi + x\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi + x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right)$
- b** $\sin\left(x - 2\frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(x + 1\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(x + 1\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$
 ofwel $\cos\left(x + 1\frac{1}{4}\pi\right)$
- c** $-\sin\left(-\frac{1}{3}\pi + 2x\right) = \sin\left(-2x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(-2x + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(-2x - \frac{1}{6}\pi\right)$
 ofwel $\cos\left(-2x + 1\frac{5}{6}\pi\right)$
- V3 a** $\cos(2x) = \frac{1}{2}$
 $2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
- b** $\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$
 $x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
- c** $\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -\sqrt{3}$
 $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$
 $x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
- d** $2\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = -1$
 $\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$
 $3x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $3x = 0 + k \cdot 2\pi$ of $3x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
- V4 a** $\cos(\pi - x) = \cos(2x)$
 $\pi - x = 2x + k \cdot 2\pi$ of $\pi - x = -2x + k \cdot 2\pi$
 $-3x = -\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \pi + k \cdot 2\pi$
- b** $\sin(2x) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$
 $2x = \frac{3}{4}\pi - x + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pi - \left(\frac{3}{4}\pi - x\right) + k \cdot 2\pi$
 $3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 dus $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

20 Goniometrische formules

c $\cos(4x) = \cos\left(3\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)\right)$

$$4x = 3\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) + k \cdot 2\pi \text{ of } 4x = -3\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) + k \cdot 2\pi$$

$$4x = 1\frac{1}{2}\pi + 3x + k \cdot 2\pi \text{ of } 4x = -1\frac{1}{2}\pi - 3x + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 7x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{3}{14}\pi + k \cdot \frac{2}{7}\pi$$

$$\text{dus } x = \frac{1}{14}\pi + k \cdot \frac{2}{7}\pi$$

d $\tan(4x) = \tan\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$

$$4x = 2x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

V5 a $f(x) = \cos(x^2)$

$$f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$$

$$f'(x) = -2x \sin(x^2)$$

b $g(x) = 2 \cos^3(x)$

$$g'(x) = 2 \cdot 3 \cos^2(x) \cdot -\sin(x)$$

$$g'(x) = -6 \sin(x) \cdot \cos^2(x)$$

c $h(x) = \frac{\sin(x)}{2x}$

$$h'(x) = \frac{\cos(x) \cdot 2x - \sin(x) \cdot 2}{(2x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x \cos(x) - 2 \sin(x)}{4x^2}$$

$$h'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{2x^2}$$

d $k(x) = \sqrt{1 + \sin(4x)}$

$$k'(x) = \frac{4 \cos(4x)}{2\sqrt{1 + \sin(4x)}}$$

$$k'(x) = \frac{2 \cos(4x)}{\sqrt{1 + \sin(4x)}}$$

e $m(x) = \ln(\sin(x))$

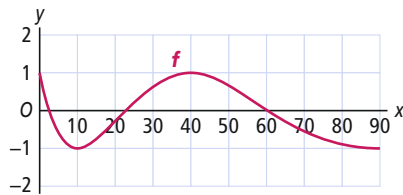
$$m'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

f $n(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)}$

$$n'(x) = \frac{2 \cos(2x)(1 + \cos(x)) - \sin(2x) \cdot -\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}$$

$$n'(x) = \frac{2 \cos(2x) + 2 \cos(2x) \cdot \cos(x) + \sin(2x) \cdot \sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}$$

V6 a

b Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$.

$$\cos(\sqrt{x}) = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi\right)^2$$

De oplossingen op $[0, 9\pi^2]$ zijn $x = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^2$, $x = \left(1\frac{1}{2}\pi\right)^2 = 2\frac{1}{4}\pi^2$ en

$$x = \left(2\frac{1}{2}\pi\right)^2 = 6\frac{1}{4}\pi^2.$$

c De extreme waarden zijn $\cos(\sqrt{x}) = 1$ en $\cos(\sqrt{x}) = -1$.Er is een maximum als $\sqrt{x} = 0 + k \cdot 2\pi$, dus $x = 0$ of $x = 4\pi^2$.Er is een minimum als $\sqrt{x} = \pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = \pi^2$ en $x = 9\pi^2$.De extreme waarden van f zijn:Randmaximum $f(0) = 1$, minimum $f(\pi^2) = -1$,maximum $f(4\pi^2) = 1$ en randminimum $f(9\pi^2) = -1$.

20.1 Somformules

intro Stel M is het midden van zijde CP , dan is $\triangle APM$ een rechthoekige driehoek en $\angle MAP = \frac{1}{2} \angle CAP = \alpha$.

$$BC^2 + 1^2 = 4^2, \text{ dus } BC^2 = 15 \text{ en } BC = \sqrt{15}.$$

$$CP^2 = 3^2 + (\sqrt{15})^2 = 24, \text{ dus } CP = \sqrt{24} \text{ en } CM = \frac{1}{2} \sqrt{24} = \sqrt{6}.$$

$$AM^2 + (\sqrt{6})^2 = 4^2, \text{ dus } AM^2 = 10 \text{ en } AM = \sqrt{10}.$$

$$\sin(\alpha) = \frac{CM}{AC} = \frac{1}{4} \sqrt{6} \text{ en } \cos(\alpha) = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{4} \sqrt{10}$$

Deze constructie kan alleen worden gebruikt als $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, dus als $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

1 a $A\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right), \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$ ofwel $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$B\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$ ofwel $B\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

b $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\text{Er geldt } \cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 \cdot 1} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

c $A(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ en $B(\cos(\beta), \sin(\beta))$

d $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{1 \cdot 1} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

20 Goniometrische formules

e $\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - (\beta + \frac{1}{2}\pi))$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta + \frac{1}{2}\pi) + \sin(\alpha)\sin(\beta + \frac{1}{2}\pi)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot -\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

2 a $\sin(\frac{5}{12}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi) =$

$$\sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) + \cos(\frac{1}{4}\pi) \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

b $\cos(\frac{11}{12}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi) =$

$$\cos(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \sin(\frac{2}{3}\pi) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} =$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

3 Als $\sin(t) = \frac{3}{5}$ dan is $\cos^2(t) = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$ en omdat $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ is $\cos(t) = \frac{4}{5}$.

Als $\sin(u) = \frac{7}{25}$ dan is $\cos^2(u) = 1 - (\frac{7}{25})^2 = \frac{576}{625}$ en omdat $\frac{1}{2}\pi < u < \pi$ is

$$\cos(u) = -\frac{24}{25}$$

$$\sin(t+u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$$

$$\sin(t+u) = \frac{3}{5} \cdot -\frac{24}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{25}$$

$$\sin(t+u) = \frac{-72}{125} + \frac{28}{125} = -\frac{44}{125}$$

$$\cos(t-u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$$

$$\cos(t-u) = \frac{4}{5} \cdot -\frac{24}{25} + \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{25}$$

$$\cos(t-u) = \frac{-96}{125} + \frac{21}{125} = -\frac{75}{125} = -\frac{3}{5}$$

4 a $\sin(2t) = \sin(t+t) = \sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t)$

$$\text{dus } \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

b $\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t)$

$$\text{dus } \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

5 $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ dus $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$.

Vervang $\sin^2(t)$ in de formule $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ door $1 - \cos^2(t)$.

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = \cos^2(t) - 1 + \cos^2(t)$$

$$\text{dus } \cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1.$$

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \text{ dus } \cos^2(t) = 1 - \sin^2(t).$$

Vervang $\cos^2(t)$ in de formule $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ door $1 - \sin^2(t)$.

$$\cos(2t) = 1 - \sin^2(t) - \sin^2(t)$$

$$\text{dus } \cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t).$$

6 a $\cos(\frac{1}{4}\pi) = 1 - 2\sin^2(\frac{1}{8}\pi)$

$$2\sin^2(\frac{1}{8}\pi) = 1 - \cos(\frac{1}{4}\pi)$$

$$2\sin^2(\frac{1}{8}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin^2(\frac{1}{8}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\sin(\frac{1}{8}\pi) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}} \text{ want } \sin(\frac{1}{8}\pi) \text{ is positief.}$$

b $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$

$$\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2\cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) - 1$$

$$2\cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) = 1 + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$2\cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}} \text{ want } \cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) \text{ is positief.}$$

7 a $\tan(t+u) = \frac{\sin(t+u)}{\cos(t+u)} = \frac{\sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)}{\cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)}$

De teller en de noemer delen door $\cos(t)\cos(u)$ geeft

$$\tan(t+u) = \frac{\frac{\sin(t)\cos(u)}{\cos(t)\cos(u)} + \frac{\cos(t)\sin(u)}{\cos(t)\cos(u)}}{\frac{\cos(t)\cos(u)}{\cos(t)\cos(u)} - \frac{\sin(t)\sin(u)}{\cos(t)\cos(u)}}$$

$$\tan(t+u) = \frac{\frac{\sin(t)}{\cos(t)} + \frac{\sin(u)}{\cos(u)}}{1 - \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \frac{\sin(u)}{\cos(u)}} \text{ dus } \tan(t+u) = \frac{\tan(t) + \tan(u)}{1 - \tan(t)\tan(u)}$$

b Vervang u door $-u$ in de formule van opdracht a en gebruik dat $\tan(-u) = -\tan(u)$.

Dit geeft:

$$\tan(t-u) = \frac{\tan(t) + \tan(-u)}{1 - \tan(t)\tan(-u)}$$

$$\tan(t-u) = \frac{\tan(t) - \tan(u)}{1 + \tan(t)\tan(u)}$$

c $\tan(2t) = \tan(t+t)$ en met de formule van opdracht a geeft dat

$$\tan(2t) = \tan(t+t) = \frac{\tan(t) + \tan(t)}{1 - \tan(t)\tan(t)} = \frac{2\tan(t)}{1 - \tan^2(t)}$$

8 a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

b Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ is $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

De oppervlakte van G is gelijk aan

$$\int_0^\pi f(x) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) \right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi - 0 - (0 - 0) = \frac{1}{2}\pi.$$

c $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$$2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

Een primitieve van $g(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$ is $G(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x \right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2(x) dx = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi - (0 + 0) = \frac{1}{4}\pi$$

20 Goniometrische formules

9 a $f'(x) = 6 \sin(x) \cos(x)$
 $f'(x) = 3 \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = 3 \cdot \sin(2x)$
 $f'(x) = 3 \cdot \sin(2x)$
 $F(x) = -1\frac{1}{2} \cos(2x)$

b $g(x) = \frac{1}{2} \cos^2(3x)$
 $g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos(6x) + \frac{1}{2} \right)$
 $g(x) = \frac{1}{4} \cos(6x) + \frac{1}{4}$
 $G(x) = \frac{1}{24} \sin(6x) + \frac{1}{4}x$

c $h(x) = 3 \sin^2(4x) - 3 \cos^2(4x)$
 $h(x) = -3(\cos^2(4x) - \sin^2(4x))$
 $h(x) = -3 \cos(8x)$
 $H(x) = -\frac{3}{8} \sin(8x)$

d $k(x) = 3 \sin^2(4x) + 3 \cos^2(4x)$
 $k(x) = 3(\sin^2(4x) + \cos^2(4x))$
 $k(x) = 3 \cdot 1 = 3$
 $K(x) = 3x$

10 a $\int_{-\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{8}\pi} (\cos^2(2x) - \sin^2(2x)) dx =$
 $\int_{-\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{8}\pi} \cos(4x) dx = \left[\frac{1}{4} \sin(4x) \right]_{-\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{8}\pi} =$
 $\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot -1 = \frac{1}{2}$

b $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx =$
 $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 2 \sin(x) dx = \left[-2 \cos(x) \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} =$
 $-2 \cdot -\frac{1}{2} \sqrt{2} - -2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

c $\int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{1}{3}x\right) dx =$
 $\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x\right) \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{2}{3}x\right) \right]_0^{\pi} =$
 $\frac{1}{2}\pi - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} - (0 - 0) = \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{8} \sqrt{3}$

11 a $\sin(t+u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$
 $\sin(t-u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
Dit beide invullen in $\sin(t+u) + \sin(t-u)$ geeft
 $\sin(t+u) + \sin(t-u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u) + \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
 $\sin(t+u) + \sin(t-u) = 2\sin(t) \cdot \cos(u)$

b Stel $t = 3x$ en $u = x$, dan geldt
 $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} 2 \sin(3x) \cos(x) dx = \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (\sin(3x+x) + \sin(3x-x)) dx =$
 $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} (\sin(4x) + \sin(2x)) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} =$
 $\left(-\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \right) =$
 $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = 1\frac{1}{8}$

- 09 a** $F(x) = -\cos(x)$ en $G(x) = \sin(x)$
b $H(x) = \frac{1}{4} \cos(4x)$
c Eén van de verdubbelingsformules is $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ dus $\sin(6x) = 2 \sin(3x) \cos(3x)$.
 Daarom is $k(x) = \sin(3x) \cos(3x)$ gelijk aan $k(x) = \frac{1}{2} \sin(6x)$.
d Een primitieve van $k(x) = \frac{1}{2} \sin(6x)$ is $K(x) = -\frac{1}{12} \cos(6x)$.
e Eén van de verdubbelingsformules is $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ dus $\cos(6x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x)$.
 $m(x) = 4 \cos^2(3x) - 4 \sin^2(3x)$
 $m(x) = 4(\cos^2(3x) - \sin^2(3x))$
 $m(x) = 4 \cos(6x)$
f Een primitieve van $m(x) = 4 \cos(6x)$ is $M(x) = \frac{4}{6} \sin(6x) = \frac{2}{3} \sin(6x)$.

- U1 a** $\sinh(x+y) = \frac{1}{2} (e^{x+y} - e^{-x-y})$
 $\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) =$
 $\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) =$
 $\frac{1}{4} e^{x+y} + \frac{1}{4} e^{x-y} - \frac{1}{4} e^{-x+y} - \frac{1}{4} e^{-x-y} + \frac{1}{4} e^{x+y} - \frac{1}{4} e^{x-y} + \frac{1}{4} e^{-x+y} - \frac{1}{4} e^{-x-y} =$
 $\frac{1}{2} e^{x+y} - \frac{1}{2} e^{-x-y} =$
 $\frac{1}{2} (e^{x+y} - e^{-x-y})$
 dus $\sinh(x+y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$
b $\cosh(x+y) = \frac{1}{2} (e^{x+y} + e^{-x-y})$
 $\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) =$
 $\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) =$
 $\frac{1}{4} e^{x+y} + \frac{1}{4} e^{x-y} + \frac{1}{4} e^{-x+y} + \frac{1}{4} e^{-x-y} + \frac{1}{4} e^{x+y} - \frac{1}{4} e^{x-y} - \frac{1}{4} e^{-x+y} + \frac{1}{4} e^{-x-y} =$
 $\frac{1}{2} e^{x+y} + \frac{1}{2} e^{-x-y} =$
 $\frac{1}{2} (e^{x+y} + e^{-x-y})$
 dus $\cosh(x+y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$
c $f(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$, dus $f'(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} = \sinh(x)$
 $g(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$, dus $g'(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \cosh(x)$
d Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ is $F(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} = \sinh(x)$
 Een primitieve van $g(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ is $G(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \cosh(x)$

20.2 Vergelijkingen

intro Van de eerste kolom zijn de eerste en laatste exact op te lossen.
 Van de tweede kolom zijn ze allemaal exact op te lossen.

- 12** Voor de snijpunten geldt $f(x) = g(x)$.
 $\cos\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$
 $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{4}x = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$
 $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{4}x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $-\frac{1}{4}x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{3}{4}x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi - k \cdot 8\pi$ of $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{8}{3}\pi$
 De oplossingen op $[-4\pi, 4\pi]$ zijn $x = -2\frac{4}{9}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{2}{9}\pi$ en $x = 2\frac{8}{9}\pi$.

20 Goniometrische formules

- 13** Voor de snijpunten geldt $f(x) = g(x)$.

$$\sin(2x) = \sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right)$$

$$2x = 3x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \pi - \left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$-x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi - k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{7}{30}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = \frac{1}{6}\pi, x = \frac{7}{30}\pi, x = \frac{19}{30}\pi, x = 1\frac{1}{30}\pi, x = 1\frac{13}{30}\pi \text{ en } x = 1\frac{5}{6}\pi.$$

- 14 a** $\sqrt{3} \sin(x) = \cos(x)$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

- b** $\sin(3x) = -\cos(3x)$

$$\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = -1$$

$$\tan(3x) = -1$$

$$3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

- c** $2 \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -2 \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$$\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$\frac{\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)}{\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)} = -1$$

$$\tan\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -1$$

$$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$$

- 15 a** Dat kan niet omdat $2x$ en $3x$ verschillend zijn.

- b** Omdat $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ geldt ook $\sin(2x) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$.

$$\sin(2x) = \cos(3x)$$

$$\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(3x)$$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = 3x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{2}\pi = -3x + k \cdot 2\pi$$

$$-x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{2}\pi - k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

- 16 a** $\sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) = \cos(2x)$

$$\cos\left(\frac{1}{4}\pi - x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2x)$$

$$\cos\left(-\frac{1}{4}\pi - x\right) = \cos(2x)$$

$$-\frac{1}{4}\pi - x = 2x + k \cdot 2\pi \text{ of } -\frac{1}{4}\pi - x = -2x + k \cdot 2\pi$$

$$-3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{12}\pi - k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

b $\cos(x + \pi) = -\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

$$\sin\left(x + \pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-2x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\sin\left(x + 1\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(-2x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$x + 1\frac{1}{2}\pi = -2x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x + 1\frac{1}{2}\pi = \pi - \left(-2x + \frac{1}{2}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$3x = -\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } -x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \pi - k \cdot 2\pi$$

c $3 - 2\cos^2(x) = -5\cos(x)$

$$2\cos^2(x) - 5\cos(x) - 3 = 0$$

Stel $\cos(x) = p$, dit geeft

$$2p^2 - 5p - 3 = 0$$

$$p = \frac{5 - \sqrt{49}}{4} = -\frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} = 3$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ of } \cos(x) = 3 \text{ (geen oplossingen)}$$

$$x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

d $2\sin^2(x) + 5\cos(x) = 4$

$$2(1 - \cos^2(x)) + 5\cos(x) = 4$$

$$2 - 2\cos^2(x) + 5\cos(x) - 4 = 0$$

$$2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$$

Stel $\cos(x) = p$, dit geeft

$$2p^2 - 5p + 2 = 0$$

$$p = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \cos(x) = 2 \text{ (geen oplossingen)}$$

$$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

17 a $2\sin(x) \cdot \cos(x) = -\frac{1}{2}$

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

b $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(x)$

$$\cos(2x) = \sin(x)$$

$$\cos(2x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$2x = x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

c $\cos(2x) - 2\cos(x) + 1 = 0$

$$2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x) + 1 = 0$$

$$2\cos^2(x) - 2\cos(x) = 0$$

$$\cos^2(x) - \cos(x) = 0$$

$$\cos(x)(\cos(x) - 1) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = 0 + k \cdot 2\pi$$

20 Goniometrische formules

d $2\cos^2(2x) = \cos(2x) + 1$

$$2\cos^2(2x) - \cos(2x) - 1 = 0$$

Stel $\cos(2x) = p$, dit geeft

$$2p^2 - p - 1 = 0$$

$$p = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1 \text{ of } p = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(2x) = 1 \text{ of } \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = 0 + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 0 + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

18 a $2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

$$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = \frac{1}{4}\pi, x = \frac{7}{12}\pi, x = 1\frac{1}{4}\pi \text{ en } x = 1\frac{7}{12}\pi.$$

b Zie de grafiek, de oplossing van $f(x) > 1$ is

$$\frac{1}{4}\pi < x < \frac{7}{12}\pi \text{ of } 1\frac{1}{4}\pi < x < 1\frac{7}{12}\pi.$$

c Eerst de vergelijking $2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{2}$ oplossen.

$$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{24}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{19}{24}\pi + k \cdot \pi$$

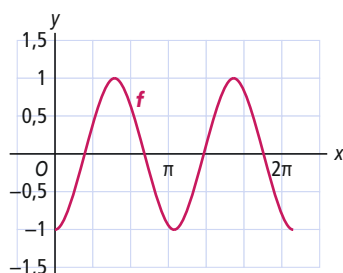
De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = \frac{1}{24}\pi, x = \frac{19}{24}\pi, x = 1\frac{1}{24}\pi \text{ en } x = 1\frac{19}{24}\pi.$$

Zie de grafiek, de oplossing van $f(x) \leq -\sqrt{2}$ is

$$0 \leq x \leq \frac{1}{24}\pi \text{ of } \frac{19}{24}\pi \leq x \leq 1\frac{1}{24}\pi \text{ of } 1\frac{19}{24}\pi \leq x \leq 2\pi.$$

19 a



b $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$

$$f(x) = -(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$f(x) = -\cos(2x)$$

$$f'(x) = - \cdot -2\sin(2x) = 2\sin(2x)$$

- c Als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $\sqrt{3}$ is, dan is $f'(x) = \sqrt{3}$.

$$2\sin(2x) = \sqrt{3}$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

De punten op het interval $[0, 2\pi]$ zijn

$$\left(\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right), \left(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2}\right) \text{ en } \left(1\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right).$$

- d De grafiek snijdt de x -as als $-\cos(2x) = 0$.

$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn de nulpunten $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$ en $x = \frac{7}{4}\pi$.

Op grond van symmetrie geldt dat de gevraagde oppervlakte gelijk is aan

$$-4 \cdot \int_0^{\frac{1}{4}\pi} f(x) dx.$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} -\cos(2x) dx = \left[-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - 0 = -\frac{1}{2}$$

De gevraagde oppervlakte is $-4 \cdot -\frac{1}{2} = 2$.

- 20 a Eerst oplossen $2\cos^2(x) - 2\sin(x) = \frac{1}{2}$

$$2(1 - \sin^2(x)) - 2\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$2 - 2\sin^2(x) - 2\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$-2\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1\frac{1}{2} = 0$$

Stel $\sin(x) = p$, dit geeft

$$-2p^2 - 2p + 1\frac{1}{2} = 0$$

$$p = \frac{2 - \sqrt{16}}{-4} = \frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{2 + \sqrt{16}}{-4} = -1\frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \sin(x) = -1\frac{1}{2} \text{ (geen oplossingen)}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi \text{ of } x = 2\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = 2\frac{5}{6}\pi$$

Zie de grafiek: de oplossing van $2\cos^2(x) - 2\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ is

$$0 \leq x \leq \frac{1}{6}\pi \text{ of } \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\frac{1}{6}\pi \text{ of } 2\frac{5}{6}\pi \leq x \leq 3\pi.$$

- b $\int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} \left(f(x) - \frac{1}{2}\right) dx = \int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} \left(2\cos^2(x) - 2\sin(x) - \frac{1}{2}\right) dx$

$$2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1 \text{ dus}$$

$$\int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} \left(2\cos^2(x) - 2\sin(x) - \frac{1}{2}\right) dx = \int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} \left(\cos(2x) + 1 - 2\sin(x) - \frac{1}{2}\right) dx$$

Een primitieve is $\frac{1}{2}\sin(2x) + x + 2\cos(x) - \frac{1}{2}x$.

$$\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + 2\cos(x)\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{2\frac{1}{6}\pi} =$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\frac{1}{12}\pi + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{12}\pi + 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 2\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi.$$

Op soortgelijke manier is aan te tonen dat

$$\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \left(f(x) - \frac{1}{2}\right) dx = \int_{2\frac{5}{6}\pi}^{3\pi} \left(f(x) - \frac{1}{2}\right) dx = 1\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi - 2.$$

De totale oppervlakte is $1\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi - 2 + 2\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi + 1\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi - 2$ ofwel

$$5\sqrt{3} + \frac{5}{6}\pi - 4.$$

20 Goniometrische formules

- c** $f(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin(x)$
 $f'(x) = 4\cos(x) \cdot -\sin(x) - 2\cos(x)$
 $f'(x) = -4\cos(x) \cdot \sin(x) - 2\cos(x)$
 $f'(x) = -2\cos(x) \cdot (2\sin(x) + 1)$
 Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$ dus $\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
 De oplossingen op $[0, 3\pi]$ zijn
 $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ of $x = 2\frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$.
 De toppen zijn $(\frac{1}{2}\pi, -2)$, $(1\frac{1}{6}\pi, 2\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{2}\pi, 2)$, $(1\frac{5}{6}\pi, 2\frac{1}{2})$ en $(2\frac{1}{2}\pi, -2)$.
- d** Het bereik is $[-2, 2\frac{1}{2}]$.

- 016 a** In stap 1 is gebruik gemaakt van $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.
- b** De formule $\sin(x) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$.
- c** $\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(x + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi)$
 $\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(x + \frac{1}{4}\pi)$
- d** $2x - \frac{1}{3}\pi = x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{3}\pi = -x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
- e** $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$
 $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(x + 1\frac{1}{2}\pi)$
 $x - \frac{1}{6}\pi = x + 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{6}\pi = -x - 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $-\frac{1}{6}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (geen oplossingen) of $2x = -1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$
- f** $\cos^2(x) + 3\sin(x) = 3$
 $1 - \sin^2(x) + 3\sin(x) = 3$
 $\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2 = 0$
 $(\sin(x) - 2)(\sin(x) - 1) = 0$
 $\sin(x) = 2$ (geen oplossingen) of $\sin(x) = 1$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- g** $\sin(2x + \frac{1}{4}) = \cos(3x + \frac{1}{2}\pi)$
 $\cos(2x + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(3x + \frac{1}{2}\pi)$
 $2x - \frac{1}{4}\pi = 3x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{4}\pi = -3x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $-x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{3}{4}\pi - k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{20}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$
- h** $6\sin^2(x) - 5\cos(x) = 2$
 $6(1 - \cos^2(x)) - 5\cos(x) = 2$
 $6 - 6\cos^2(x) - 5\cos(x) = 2$
 $-6\cos^2(x) - 5\cos(x) + 4 = 0$
 Stel $\cos(x) = p$, dit geeft
 $-6p^2 - 5p + 4 = 0$
 $p = \frac{5 + \sqrt{121}}{-12} = -1\frac{1}{3}$ of $p = \frac{5 - \sqrt{121}}{-12} = \frac{1}{2}$
 $\cos(x) = -1\frac{1}{3}$ (geen oplossingen) of $\cos(x) = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

- 017 a** De verdubbelingsformule $2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$
- b** $\sin(2x) = \frac{1}{2} \sqrt{3}$
 $2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
- c** Na het invullen van $1 - 2 \sin^2(x)$ komt alleen $\sin(x)$ voor in de vergelijking.
- d** $\cos(2x) = 5 \sin(x) - 2$
 $1 - 2 \sin^2(x) = 5 \sin(x) - 2$
 $-2 \sin^2(x) - 5 \sin(x) + 3 = 0$
 Stel $\sin(x) = p$, dit geeft
 $-2p^2 - 5p + 3 = 0$
 $p = \frac{5 + \sqrt{49}}{-4} = -3$ of $p = \frac{5 - \sqrt{49}}{-4} = \frac{1}{2}$
 $\sin(x) = -3$ (geen oplossingen) of $\sin(x) = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

- U2 a** $\sin(2x) = \tan(x)$
 $2 \sin(x) \cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
 $2 \sin(x) \cos^2(x) - \sin(x) = 0$
 $\sin(x) \cdot (2 \cos^2(x) - 1) = 0$
 $\sin(x) = 0$ of $2 \cos^2(x) = 1$
 $\sin(x) = 0$ of $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$
 $\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$
 De oplossingen op $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ zijn $x = 0$, $x = -\frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{1}{4}\pi$.
 De snijpunten zijn $(0, 0)$, $(-\frac{1}{4}\pi, -1)$ en $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.
- b** Op het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ is $\cos(x) > 0$, dus $G(x) = -\ln(\cos(x))$
 $G'(x) = -\frac{1}{\cos(x)} \cdot -\sin(x) = \tan(x)$
 dus G is een primitieve van g .
- c** $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\sin(2x) - \tan(x)) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) - \ln(\cos(x)) \right]_0^{\frac{1}{4}\pi} =$
 $0 + \ln\left(\frac{1}{2} \sqrt{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}$
- d** $\tan^2(x) + 1 - 1 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} - 1 =$
 $\tan^2(x) + 1 - 1 = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$
 Een primitieve van $h(x) = \tan^2(x)$ is $H(x) = \tan(x) - x$.
- e** De inhoud is gelijk aan $\pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2(2x) dx - \pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^2(x) dx$.
 $\cos(4x) = 1 - 2 \sin^2(2x)$ dus $\sin^2(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)$
 $\pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2(2x) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin(4x) \right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{8}\pi^2$
 $\pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^2(x) dx = \pi \left[\tan(x) - x \right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \pi - \frac{1}{4}\pi^2$
 De inhoud is $\frac{3}{8}\pi^2 - \pi$.

20 Goniometrische formules

20.3 Goniometrische functies onderzoeken

intro Met de rekenmachine vind je een maximum 1,41 voor $x \approx 0,785$ dus vermoedelijk is het maximum $\sqrt{2}$ bij $x = \frac{1}{4}\pi$.

De periode is 2π en de evenwichtstand is $y = 0$.

Daaruit volgt $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{4}\pi$ en $d = 0$.

$f(x) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$ is te schrijven als

$$f(x) = \sqrt{2} \left(\sin(x) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \right).$$

Omdat $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = 1$ volgt hieruit dat $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

21 a Voor de nulpunten geldt $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 0$.

$$\cos^4(x) = \sin^4(x)$$

$$\sin(x) = \cos(x) \text{ of } \sin(x) = -\cos(x)$$

$$\tan(x) = 1 \text{ of } \tan(x) = -1$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = 1\frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{3}{4}\pi$.

b Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4\cos^3(x) \cdot -\sin(x) - 4\sin^3(x) \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = -4\cos(x)\sin(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x))$$

$$f'(x) = -4\cos(x)\sin(x)$$

$$-4\cos(x) \cdot \sin(x) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = 0$$

$$x = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De toppen op $[0, 2\pi]$ zijn $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}\pi, -1)$, $(\pi, 1)$, $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$.

c $a = 1$, de periode is π dus $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, $c = 0$ en $d = 0$.

De functie is $g(x) = \cos(2x)$.

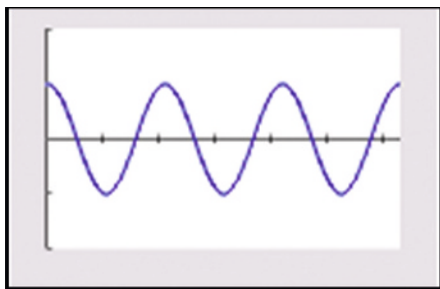
d $f(x) = \cos^4(x) - \sin^4(x) = 0$

$$f(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x))(\cos^2(x) + \sin^2(x))$$

$$f(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot 1$$

$$f(x) = \cos(2x)$$

22 a



Ja, de grafieken vallen samen.

b $\cos(3x) = \cos(2x + x)$

$$= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$$

c $\cos(3x) = (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)$

$$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)$$

$$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x)$$

$$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x)$$

$$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

- 23 a** $f(x) = 1 + \cos(x) + \cos^2(x)$
 $f'(x) = -\sin(x) + 2\cos(x) \cdot -\sin(x)$
 Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$ dus
 $-\sin(x) + 2\cos(x) \cdot -\sin(x) = 0$
 $-\sin(x) \cdot (2\cos(x) + 1) = 0$
 $\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
 $x = 0 + k \cdot \pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 De toppen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn
 $(0, 3), (\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}), (\pi, 1), (\frac{4}{3}\pi, \frac{3}{4})$ en $(2\pi, 3)$.
- b** $p(x) = (1 + \cos(x) + \cos^2(x))(1 - \cos(x))$
 $p(x) = 1 - \cos(x) + \cos(x) - \cos^2(x) + \cos^2(x) - \cos^3(x)$
 $p(x) = 1 - \cos^3(x)$
- c** $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ dus ook $-1 \leq \cos^3(x) \leq 1$.
 Daaruit volgt $0 \leq 1 - \cos^3(x) \leq 2$.
 De grafiek van p ligt dus geheel boven de x -as, behalve in het punt waarvoor $\cos(x) = 1$ en daarom raakt de grafiek de x -as.
- 24 a** $\sin^2(x) + \sin(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$
 $\sin(x) = \cos(x)$
 $\tan(x) = 1$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
 De snijpunten op het interval $[-\pi, 3\pi]$ zijn $(-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}), (\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}),$
 $(\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(\frac{9}{4}\pi, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})$.
- b** Als de grafiek van f de x -as raakt, dan moeten er toppen op de x -as zijn.
 $f(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$
 $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x)$
 $f'(x) = \cos(x)(2\sin(x) + 1)$
 $f'(x) = 0$ als $\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 Als $f(-\frac{1}{2}\pi) = 1 - 1 = 0$ en $f(\frac{1}{2}\pi) = 1 - 1 = 0$,
 dus de grafiek van f raakt de x -as bij $x = -\frac{1}{2}\pi$ en bij $x = \frac{1}{2}\pi$.
- c** Voor symmetrie in de y -as moet gelden $g(-a) = g(a)$ voor elke waarde van a .
 $g(-a) = \sin^2(-a) + \cos(-a)$
 $g(-a) = (\sin(-a))^2 + \cos(-a)$
 $g(-a) = (-\sin(a))^2 + \cos(a)$
 $g(-a) = (\sin(a))^2 + \cos(a) = g(a)$
 Dus de grafiek van g is symmetrisch in de y -as.
- d** Verschuiving $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts, daarna spiegelen in de x -as en tenslotte een verschuiving van 1 omhoog.
 $g(x) = -(\sin^2(x - \frac{1}{2}\pi) + \sin(x - \frac{1}{2}\pi)) + 1$
- e** $\sin(x - \frac{1}{2}\pi) = -\cos(x)$ substitueren in
 $g(x) = -(\sin^2(x - \frac{1}{2}\pi) + \sin(x - \frac{1}{2}\pi)) + 1$ geeft
 $g(x) = -((- \cos(x))^2 + - \cos(x)) + 1$
 $g(x) = 1 - \cos^2(x) + \cos(x)$
 $g(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$

20 Goniometrische formules

25 a Stel $v(x) = \sin^3(x) - \sin^4(x)$

$$v'(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x) - 4 \sin^3(x) \cos(x)$$

$$v'(x) = \sin^2(x) \cos(x) (3 - 4 \sin(x))$$

$$v'(x) = 0 \text{ als } \sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = \frac{3}{4}.$$

Op het interval $[0, \pi]$ zijn er twee waarden x waarvoor $\sin(x) = \frac{3}{4}$ en voor die waarden is het verschil maximaal.

b $g'(x) = 4 \sin^3(x) \cos(x)$

$$g''(x) = 12 \sin^2(x) \cos(x) \cdot \cos(x) + 4 \sin^3(x) \cdot -\sin(x)$$

$$g''(x) = 4 \sin^2(x) (3 \cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$g''(x) = 4 \sin^2(x) (3 - 3 \sin^2(x) - \sin^2(x))$$

$$g''(x) = 4 \sin^2(x) (3 - 4 \sin^2(x))$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \sin^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$$

De oplossingen op het interval $[0, \pi]$ zijn $x = 0$, $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{2}{3}\pi$.

Uit de grafiek blijkt dat de buigpunten $(\frac{1}{3}\pi, \frac{9}{16})$ en $(\frac{2}{3}\pi, \frac{9}{16})$ zijn.

c $F(x) = a \cos^3(x) + b \cos(x)$

$$F'(x) = 3 a \cos^2(x) \cdot -\sin(x) - b \sin(x)$$

$$F'(x) = -3 a \cos^2(x) \cdot \sin(x) - b \sin(x)$$

$$F'(x) = -3 a (1 - \sin^2(x)) \cdot \sin(x) - b \sin(x)$$

$$F'(x) = -3 a \sin(x) + 3 a \sin^3(x) - b \sin(x)$$

$$F'(x) = 3 a \sin^3(x) + (-3 a - b) \sin(x) \text{ en } f(x) = \sin^3(x)$$

$$\text{dus } 3a = 1 \text{ en } -3a - b = 0 \text{ ofwel}$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ en } -3 \cdot \frac{1}{3} - b = 0 \text{ dus } b = -1$$

d $\int_0^\pi \sin^3(x) dx = \left[\frac{1}{3} \cos^3(x) - 1 \cdot \cos(x) \right]_0^\pi =$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \cos^3(\pi) - \cos(\pi) \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \cos^3(0) - \cos(0) \right) =$$

$$\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 1 \frac{1}{3}$$

26 a Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$, dus

$$\frac{1}{2} + \cos(x) = 0$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

De oplossingen op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ zijn $x = -1\frac{1}{3}\pi$, $x = -\frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$ en

$$x = 1\frac{1}{3}\pi.$$

b $f'(x) = \frac{-\sin(x)(1 + \cos(x)) - (\frac{1}{2} + \cos(x)) \cdot -\sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2} \sin(x)}{(1 + \cos(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } x = 0 + k \cdot \pi$$

De extreme waarden op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ zijn een randmaximum

$$f(-2\pi) = \frac{3}{4}, \text{ maximum } f(0) = \frac{3}{4} \text{ en randmaximum } f(2\pi) = \frac{3}{4}.$$

c Verticale asymptoten als $1 + \cos(x) = 0$ en $\frac{1}{2} + \cos(x) \neq 0$.

$$\cos(x) = -1$$

Op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ zijn de verticale asymptoten $x = -\pi$ en $x = \pi$.

d In het punt $(-\frac{2}{3}\pi, 0)$ is $f'(-\frac{2}{3}\pi) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(1 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{3}$

$\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ geeft een hoek van 60° .

In het punt $(\frac{2}{3}\pi, 0)$ is $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$ dus de hoek is daar -60° .

27 a $f(x) = \sqrt{6\sin(x)}$ bestaat als $\sin(x) \geq 0$.

Op het interval $[0, 4\pi]$ is het domein $[0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$.

b $\sqrt{6\sin(x)} = -2\cos(x)$

$$6\sin(x) = 4\cos^2(x)$$

$$6\sin(x) = 4 - 4\sin^2(x)$$

$$2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0$$

Stel $\sin(x) = p$, dat geeft

$$2p^2 + 3p - 2 = 0$$

$$p^2 + 1\frac{1}{2}p - 1 = 0$$

$$(p - \frac{1}{2})(p + 2) = 0$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ of } p = -2$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \sin(x) = -2 \text{ (geen oplossingen)}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Op het interval $[0, 4\pi]$ zijn dat $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = 2\frac{1}{6}\pi$ en $x = 2\frac{5}{6}\pi$.

Echter alleen $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 2\frac{5}{6}\pi$ voldoen (want bij de andere oplossingen is

$$-2\cos(x) = -\sqrt{3}).$$

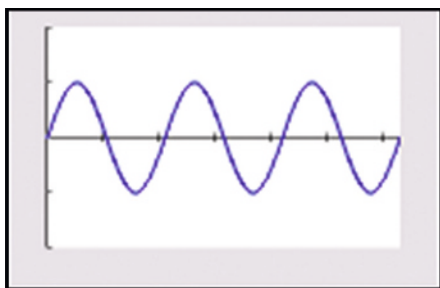
De snijpunten zijn $(\frac{5}{6}\pi, \sqrt{3})$ en $(2\frac{5}{6}\pi, \sqrt{3})$.

c $f''(x) = \frac{6\cos(x)}{2\sqrt{6\sin(x)}} = \frac{3\cos(x)}{\sqrt{6\sin(x)}}$ en $g'(x) = 2\sin(x)$

$$f''(\frac{5}{6}\pi) = \frac{3 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{6 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{-1\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1\frac{1}{2} \text{ en } g'(\frac{5}{6}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$-1\frac{1}{2} \cdot 1 \neq -1$, dus de grafieken van f en g snijden elkaar niet loodrecht.

022 a



Ja, de grafieken vallen samen.

b De somformule voor de sinus is toegepast.

c $f(x) = 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x) + (\dots) \cdot \sin(x)$

d Gebruik $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

$$f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + (1 - 2\sin^2(x)) \cdot \sin(x)$$

$$f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$$

20 Goniometrische formules

- e** Gebruik nu $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$
- f** $f(x) = 2 \sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2 \sin^3(x)$
 $f(x) = 2 \sin(x) - 2 \sin^3(x) + \sin(x) - 2 \sin^3(x)$
 $f(x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$
 dus $f(x)$ en $g(x)$ zijn hetzelfde.

U3 a $g(x) = \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$

- b** Er moet aangetoond worden dat $g(-a) = -g(a)$ ofwel $g(-a) + g(a) = 0$

$$\sin\left(-a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(-a + \frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) = 0$$

Er geldt: $\sin(\alpha) = -\cos\left(\alpha - 1\frac{1}{2}\pi\right)$ en $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - 1\frac{1}{2}\pi\right)$.

$$-\cos\left(-a + \frac{3}{4}\pi - 1\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(-a + \frac{3}{4}\pi - 1\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) = 0$$

$$-\cos\left(-\left(a + \frac{3}{4}\pi\right)\right) + \sin\left(-\left(a + \frac{3}{4}\pi\right)\right) + \sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) = 0$$

$$-\cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + -\sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(a + \frac{3}{4}\pi\right) = 0, \text{ klopt.}$$

Hieruit volgt dat de grafiek van g puntsymmetrisch is in de oorsprong.

- c** Door verschuiven blijft de grafiek symmetrisch en het beeld van $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ na de verschuiving is $(0, 0)$.

d $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
 $f(x) = -\sqrt{2}\left(\sin(x) \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos(x) \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$
 $f(x) = -\sqrt{2}\left(\sin(x) \cdot \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$
 $f(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$

- e** De grafiek van een functie $h(x) = a \cdot \sin(x)$ is puntsymmetrisch in de oorsprong.

De grafiek van f is $\frac{3}{4}\pi$ naar rechts verschoven, dus deze grafiek is puntsymmetrisch in het punt $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$.

20.4 Parametervoorstellingen

intro Met zo klein mogelijke positieve getallen voor a en b :

A: $a = 3$ en $b = 1$

B: $a = 1$ en $b = 2$

C: $a = 3$ en $b = 4$

D: $a = 1$ en $b = 3$

E: $a = 1$ en $b = 4$

F: $a = 3$ en $b = 2$

28 a $-1 \leq x(t) \leq 1$ en $-1 \leq y(t) \leq 1$

b De periode van x is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.

De periode van y is $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$.

- c** De gemeenschappelijke periode is 6.
 Na 6 seconden heeft P de baan één keer doorlopen.

- 29 a** De periode van x is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$ en de periode van y is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.

De periode van de beweging is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 8 en 6 en dat is 24.

- b** Als de raaklijn evenwijdig is aan de y -as, dan geldt $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$$x'(t) = -\frac{3}{4}\pi \sin\left(\frac{1}{4}\pi t\right) = 0$$

$$\frac{1}{4}\pi t = 0 + k \cdot \pi$$

$$t = 0 + k \cdot 4 \text{ (voor deze waarden is } y'(t) \neq 0 \text{)}$$

De punten zijn $(3, 0)$, $(-3, \sqrt{3})$, $(3, \sqrt{3})$, $(-3, 0)$, $(3, -\sqrt{3})$ en $(-3, \sqrt{3})$.

- 30 a** De periode van zowel $x(t)$ als $y(t)$ is 2π , dus de periode van de beweging is 2π .

b $x'(t) = 2\cos(t) + 2\cos(2t)$

$$x'(t) = 0 \text{ als } \cos(2t) = -\cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos(t + \pi)$$

$$2t = t + \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = -t - \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \pi$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$.

De bijbehorende waarden van x zijn $1\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 0 en $-1\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus $-1\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq x \leq 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$y'(t) = 2\sin(t) + 2\sin(2t)$$

$$y'(t) = 0 \text{ als } 2\sin(t) + 2\sin(2t) = 0$$

$$\sin(2t) = -\sin(t)$$

$$\sin(2t) = \sin(\pi + t)$$

$$2t = \pi + t + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = \pi - (\pi + t) + k \cdot 2\pi$$

$$t = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$t = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{1}{3}\pi$ en $t = 2\pi$.

De bijbehorende waarden van y zijn -3 , $1\frac{1}{2}$, 1 , $1\frac{1}{2}$, en -3 , dus $-3 \leq y \leq 1\frac{1}{2}$.

- c** A is het snijpunt met de positieve y -as, dus $x(t) = 0$.

$$2\sin(t) + \sin(2t) = 0$$

$$2\sin(t) + 2\sin(t) \cdot \cos(t) = 0$$

$$\sin(t) \cdot (1 + \cos(t)) = 0$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \cos(t) = -1$$

$$t = 0 + k \cdot \pi \text{ of } t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$t = \pi$ levert het punt $A(0, 1)$ op.

- d** $x'(\pi) = 0$ en $y'(\pi) = 0$ dus $v = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

- e** De coördinaten van B zijn $(2, 1)$.

De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is $\frac{y'(\frac{1}{2}\pi)}{x'(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{2}{-2} = -1$

De vergelijking is van de vorm $y = -x + b$.

De coördinaten van B zijn $(2, 1)$ invullen geeft $1 = -2 + b$ dus $b = 3$.

De vergelijking van de raaklijn in B is $y = -x + 3$.

20 Goniometrische formules

31 a $t = 0$ invullen geeft $A(1, 1)$ en $t = \pi$ invullen geeft $D(1, -1)$.

b Voor de snijpunten met de x -as geldt $y(t) = 0$.

$$\cos(3t) = 0$$

$$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$.

De snijpunten met de x -as zijn $B(\frac{1}{2}, 0)$ en $C(-1, 0)$ (en nogmaals $B(\frac{1}{2}, 0)$).

Voor de snijpunten met de y -as geldt $x(t) = 0$.

$$\cos(2t) = 0$$

$$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $t = \frac{1}{4}\pi$ of $t = \frac{3}{4}\pi$.

De snijpunten met de y -as zijn $(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

c $x'(t) = -2\sin(2t)$ en $y'(t) = -3\sin(3t)$

Voor een raaklijn evenwijdig aan de x -as geldt $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$.

$$-\sin(3t) = 0$$

$$3t = 0 + k \cdot \pi$$

$$t = 0 + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $t = 0$ of $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = \pi$.

Voor $t = 0$ en $t = \pi$ geldt $x'(t) = 0$ dus deze voldoen niet.

De raaklijn is evenwijdig aan de x -as in de punten $(-\frac{1}{2}, -1)$ en $(-\frac{1}{2}, 1)$.

Voor een raaklijn evenwijdig aan de y -as geldt $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.

$$-2\sin(2t) = 0$$

$$\sin(2t) = 0$$

$$2t = 0 + k \cdot \pi$$

$$t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op $[0, \pi]$ zijn $t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \pi$.

Voor $t = 0$ en $t = \pi$ geldt $y'(t) = 0$ dus deze voldoen niet.

De raaklijn is evenwijdig aan de y -as in het punt $C(-1, 0)$.

d $t = a$ geeft $P(\cos(2a), \cos(3a))$.

$$t = \pi - a \text{ geeft } Q(\cos(2(\pi - a)), \cos(3(\pi - a)))$$

$$x_Q = \cos(2(\pi - a)) = \cos(2\pi - 2a) = \cos(2a - 2\pi) = \cos(2a)$$

$$y_Q = \cos(3(\pi - a)) = \cos(3\pi - 3a) = \cos(3a - 3\pi) = \cos(3a + \pi) = -\cos(3a)$$

$$x_P = x_Q \text{ en } y_P = -y_Q, \text{ dus de baan is symmetrisch in de } x\text{-as.}$$

e Voor de baansnelheid geldt $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ dus

$$v = \sqrt{4\sin^2(2t) + 9\sin^2(3t)}$$

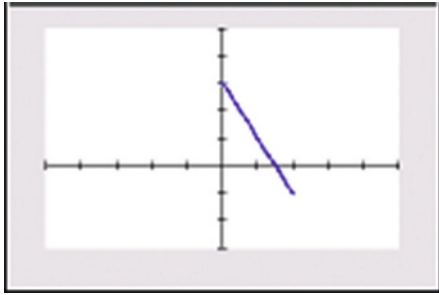
$$B(\frac{1}{2}, 0) \text{ dan } t = \frac{1}{6}\pi \text{ of } t = \frac{5}{6}\pi.$$

$$v(\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ en ook } v(\frac{5}{6}\pi) = 2\sqrt{3}.$$

$$C(-1, 0) \text{ dan } t = \frac{1}{2}\pi.$$

$$v(\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{0 + 9} = \sqrt{9} = 3$$

De baansnelheid in B is groter dan de baansnelheid in C .

32 a

De grafiek loopt van $(0, 3)$ naar $(2, -1)$.

Een vergelijking is $y = -2x + 3$.

b $y(t) = 1 - 2\cos(2t)$

$$y(t) = 1 - 2(2\cos^2(x) - 1)$$

$$y(t) = 1 - 4\cos^2(x) + 2$$

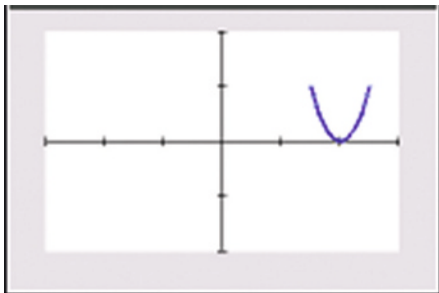
$$y(t) = -4\cos^2(t) + 3$$

$$y(t) = -2(2\cos^2(t)) + 3$$

$$y(t) = -2 \cdot x(t) + 3$$

dus de punten voldoen aan de vergelijking $y = -2x + 3$.

c Voor $0 \leq x \leq 2$ valt de baan van P samen met de lijn.

33 a

$$4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t) = 0$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \cos(t) = 0$$

$$t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Deze waarden van t leveren het punt $(2, 0)$ op.

b $x(t) = 2 + \frac{1}{2}\sin(2t)$ dus $\frac{1}{2}\sin(2t) = x(t) - 2$

$$\sin(2t) = 2x(t) - 4$$

$$y(t) = 4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t) = (2\sin(t)\cos(t))^2 = (\sin(2t))^2$$

$$\text{dus } y(t) = (2x(t) - 4)^2 \text{ ofwel } y = 4x^2 - 16x + 16.$$

c $x(t) = 2 + \frac{1}{2}\sin(2t)$ en aangezien $-1 \leq \sin(2t) \leq 1$ geldt $1\frac{1}{2} \leq 2 + \frac{1}{2}\sin(2t) \leq 2\frac{1}{2}$.

Het domein is $\left[1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right]$.

34 a Voor de y -as geldt $x(t) = 0$ dus $5\cos(t) = 0$ ofwel $\cos(t) = 0$.

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x'(t) = -5\sin(t) \text{ en } y'(t) = 10\cos\left(2t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\text{Als } t = \frac{1}{2}\pi \text{ dan is } x'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -5 \cdot 1 = -5 \text{ en } y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

$$\text{De baansnelheid is } v = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

20 Goniometrische formules

b $x(t) = 2\frac{1}{2}$ dus $5\cos(t) = 2\frac{1}{2}$ ofwel $\cos(t) = \frac{1}{2}$

$$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ geeft het punt } A\left(2\frac{1}{2}, 0\right) \text{ en } t = 1\frac{2}{3}\pi \text{ geeft het punt } B\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

De helling in A is $\frac{y'\left(\frac{1}{3}\pi\right)}{x'\left(\frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{10}{-2\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$ en de helling in B is

$$\frac{y'\left(1\frac{2}{3}\pi\right)}{x'\left(1\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{-5}{2\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

De helling in A is twee keer zo groot als de helling in B .

033 a $y = 3 - \frac{2}{3}x^2$

$$3\sin(2t) = 3 - \frac{2}{3}\left(3\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2$$

b $3\sin(2t) = 3 - \frac{2}{3} \cdot 9\left(\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2$

$$3\sin(2t) = 3 - 6\left(\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2$$

$$\sin(2t) = 1 - 2\left(\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)^2$$

$$\sin(2t) = 1 - 2\cos^2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

c $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ ofwel $1 - 2\cos^2(t) = \cos(2t)$

d $\sin(2t) = -\cos\left(2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

$$\sin(2t) = -\cos\left(2t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

e $\cos\left(t + \pi\right) = -\cos(t)$ dus

$$\sin(2t) = \cos\left(2t + \frac{1}{2}\pi + \pi\right)$$

$$\text{ofwel } \sin(2t) = \cos\left(2t + 1\frac{1}{2}\pi\right)$$

f $\cos(t) = \sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)$ dus

$$\sin(2t) = \sin\left(2t + 1\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\sin(2t) = \sin(2t + 2\pi)$$

$$\text{dus } \sin(2t) = \sin(2t)$$

g $-3 \leq 3\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \leq 3$, dus voor $-3 \leq x \leq 3$ valt de parabool samen met de baan van P .

U4 a $4(\sin(t))^2 + 4\left(\sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\right)^2 - 4\sin(t) \cdot \sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) =$

$$4(\sin(t))^2 + 4\left(\sin(t) \cdot \frac{1}{2} - \cos(t) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - 4\sin(t) \cdot \left(\sin(t) \cdot \frac{1}{2} - \cos(t) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) =$$

$$4\sin^2(t) + 4\left(\frac{1}{4}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) + \frac{3}{4}\cos^2(t)\right) - 2\sin^2(t) + 2\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) =$$

$$4\sin^2(t) + \sin^2(t) - 2\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) - 2\sin^2(t) + 2\sqrt{3}\sin(t)\cos(t) =$$

$$4\sin^2(t) + \sin^2(t) + 3\cos^2(t) - 2\sin^2(t) =$$

$$3(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = 3 \cdot 1 = 3$$

b Bereken de snijpunten met de lijn $y = x$.

$$4x^2 = 3, \text{ dus } x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{De snijpunten zijn } \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \text{ en } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

$$\text{De lengte van de lange as is } \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Bereken de snijpunten met de lijn } y = -x.$$

$$12x^2 = 3, \text{ dus } x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{De snijpunten zijn } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ en } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{De lengte van de korte as is } \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

- c De oppervlakte van de ellips is $\pi \cdot \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{4} \pi \sqrt{12} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{3}$.

De oppervlakte van de eenheidscirkel is $\pi \cdot 1^2 = \pi$.

$\frac{1}{2} \sqrt{3} < 1$, dus de oppervlakte van de ellips is kleiner dan de oppervlakte van de cirkel.

20.5 Gemengde opdrachten

- 35 a** $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ en $-1 \leq \sin(t) \leq 1$

$$-1 \leq \cos^3(t) \leq 1 \text{ en } -1 \leq \sin^3(t) \leq 1$$

$$-4 \leq 4\cos^3(t) \leq 4 \text{ en } -4 \leq \sin^3(t) \leq 4 \text{ dus}$$

$$-4 \leq x \leq 4 \text{ en } -4 \leq y \leq 4$$

- b De periode van x en van y zijn beide 2π dus legt P de baan één keer af in 2π seconden.

c $4\cos^3(t) = 4\sin^3(t)$

$$\sin(t) = \cos(t)$$

$$\tan(t) = 1$$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

De snijpunten op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ en $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

- d $x'(t) = -12\cos^2(t)\sin(t)$ en $y'(t) = 12\sin^2(t)\cos(t)$

$$\text{Als } t = \frac{1}{4}\pi \text{ dan geldt } \frac{y'(\frac{1}{4}\pi)}{x'(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}}{-12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = -1.$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -x + b$.

Invullen van $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ geeft $\sqrt{2} = -\sqrt{2} + b$ dus $b = 2\sqrt{2}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -x + 2\sqrt{2}$.

e $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} =$

$$v(t) = \sqrt{(-12\cos^2(t)\sin(t))^2 + (12\sin^2(t)\cos(t))^2} =$$

$$\sqrt{144\cos^4(t)\sin^2(t) + 144\sin^4(t)\cos^2(t)} =$$

$$\sqrt{144\sin^2(t)\cos^2(t)} \cdot \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} =$$

$$6 \cdot |2\sin(t)\cos(t)| \cdot 1 = 6 \cdot |\sin(2t)|$$

- f De maximale waarde van v is 6, als $\sin(2t) = 1$.

$$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \text{ dus } t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi.$$

Als $t = \frac{1}{4}\pi$ bevindt P zich in A .

- 36 a** $2 + \cos(x) - \cos^2(x) = 2$

$$\cos(x)(1 - \cos(x)) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 1$$

op het interval $[0, 2\pi]$: $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{3}{2}\pi$ of $x = 0$ of $x = 2\pi$

- b $f(x) = 2 + \cos(x) - \cos^2(x)$

$$f'(x) = -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } \sin(x) \cdot (-1 + 2\cos(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = 2\pi$$

$$\text{randminimum } f(0) = 2, \text{ maximum } f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2\frac{1}{4},$$

$$\text{minimum } f(\pi) = 0, \text{ maximum } f\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = 2\frac{1}{4}, \text{ randminimum } f(2\pi) = 2$$

20 Goniometrische formules

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \int_0^{\pi} (2 + \cos(x) - \cos^2(x)) dx &= \int_0^{\pi} \left(2 + \cos(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)\right) dx = \\ &= \left[1\frac{1}{2}x + \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(2x)\right]_0^{\pi} = \\ &= \left(1\frac{1}{2}\pi + 0 - 0\right) - 0 = 1\frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

37 a Als $a = 2$ dan geldt $y(t) = 4 \sin^3(t) - 2 \sin(t)$.

Op de x -as geldt dat $y(t) = 0$, dus

$$4 \sin^3(t) - 2 \sin(t) = 0$$

$$2 \sin(t)(2 \sin^2(t) - 1) = 0$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \sin^2(t) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ of } \sin(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$t = 0 \text{ of } t = \frac{1}{4}\pi \text{ of } t = \frac{3}{4}\pi \text{ of } t = \pi \text{ of } t = 1\frac{1}{4}\pi \text{ of } t = 1\frac{3}{4}\pi \text{ of } t = 2\pi$$

De bijbehorende punten zijn

$(2, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(-2, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ en $(2, 0)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 \sin^2(t) \cos(t) - 2 \cos(t)}{-2 \sin(t)}$$

$$\text{Als } t = \frac{1}{4}\pi \text{ geldt } \frac{dy}{dx} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}}{-2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}} = -2$$

$$\text{Als } t = 1\frac{3}{4}\pi \text{ geldt } \frac{dy}{dx} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}}{-2 \cdot -\frac{1}{2} \sqrt{2}} = 2$$

De raaklijnen maken elk een hoek α met de x -as waarvoor $\tan(\alpha) = 2$.

$$\alpha = 63,4349 \dots^\circ$$

De hoek tussen de raaklijn is $180 - 2\alpha \approx 53^\circ$.

b $4 \sin^3(t) - a \sin(t) = 0$

$$4 \sin(t) \left(\sin^2(t) - \frac{1}{4}a \right) = 0$$

$$\sin(t) = 0 \text{ of } \sin(t) = \sqrt{\frac{1}{4}a} \text{ of } \sin(t) = -\sqrt{\frac{1}{4}a}$$

$\sin(t) = 0$ geeft $t = 0$ of $t = \pi$, de punten op de x -as zijn $(2, 0)$ en $(-2, 0)$.

De vergelijkingen $\sin(t) = \sqrt{\frac{1}{4}a}$ en $\sin(t) = -\sqrt{\frac{1}{4}a}$ moeten oplossingen hebben,

dat is het geval als $0 \leq \frac{1}{4}a \leq 1$ ofwel $0 \leq a \leq 4$.

$a = 0$ voldoet niet, want dan vallen er oplossingen samen.

$a = 4$ voldoet niet, want dan krijg je $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ en die geven beide het punt $(0, 0)$.

Het antwoord is $0 < a < 4$.

38 a $6 \cos(x) + 2 \cos^2(x) - 1 - 2\frac{1}{2} = 0$

$$2 \cos^2(x) + 6 \cos(x) - 3\frac{1}{2} = 0$$

Stel $\cos(x) = p$, dat geeft

$$2p^2 + 6p - 3\frac{1}{2} = 0$$

$$p = \frac{-6 + \sqrt{64}}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{-6 - \sqrt{64}}{4} = -3\frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \cos(x) = -3\frac{1}{2} \text{ (geen oplossingen)}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi \text{ of } x = 1\frac{2}{3}\pi$$

De snijpunten zijn $(\frac{1}{3}\pi, 0)$ en $(1\frac{2}{3}\pi, 0)$.

- b** Voor de toppen geldt $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = -6\sin(x) - 2\sin(2x)$$

$$-6\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$-2\sin(x)(3 + 2\cos(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ (geen oplossingen)}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \pi \text{ of } x = 2\pi$$

De toppen zijn $(0, 4\frac{1}{2})$, $(\pi, -7\frac{1}{2})$ en $(2\pi, 4\frac{1}{2})$.

c $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (6\cos(x) + \cos(2x) - 2\frac{1}{2}) dx =$

$$[6\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - 2\frac{1}{2}x]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} =$$

$$(6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 4\frac{1}{6}\pi) - (6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi) =$$

$$6\frac{1}{2}\sqrt{3} - 3\frac{1}{3}\pi$$

Onderzoeksoopdrachten

- 39 a** M doorloopt een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal $r + 1$ en

$\begin{cases} x(t) = (r + 1)\cos(t) \\ y(t) = (r + 1)\sin(t) \end{cases}$ is een parametervoorstelling van een cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal $r + 1$.

- b** De omtrek van de groene cirkel $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.

Als $r = 2$ dan is de omtrek van de rode cirkel $2\pi \cdot 2 = 4\pi$.

M doorloopt een cirkel met straal 3 en de omtrek van deze baan is

$$2\pi \cdot 3 = 6\pi$$

Dan is de groene cirkel dus $\frac{6\pi}{2\pi} = 3$ keer rond gedraaid.

Als $r = 2$ dan is P dus 3 keer om M gedraaid.

Als $r = 4$ dan is de omtrek van de rode cirkel $2\pi \cdot 4 = 8\pi$.

M doorloopt nu een cirkel met straal 5 en de omtrek van deze baan is

$$2\pi \cdot 5 = 10\pi.$$

Dan is de groene cirkel dus $\frac{10\pi}{2\pi} = 5$ keer rond gedraaid.

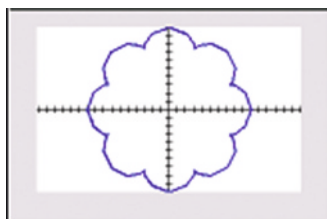
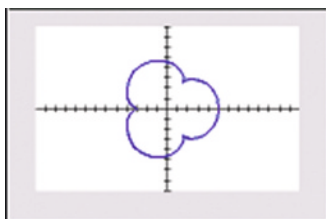
Als $r = 4$ dan is P dus 5 keer om M gedraaid.

- c** De 'omlooptijd' van P om M is $\frac{2\pi}{r+1}$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos((r+1)t) \\ 1 \cdot \sin((r+1)t) \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} (r+1)\cos(t) \\ (r+1)\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos((r+1)t) \\ \sin((r+1)t) \end{pmatrix}$$

$$\text{dus } \begin{cases} x(t) = (r+1)\cos(t) + \cos((r+1)t) \\ y(t) = (r+1)\sin(t) + \sin((r+1)t) \end{cases}$$

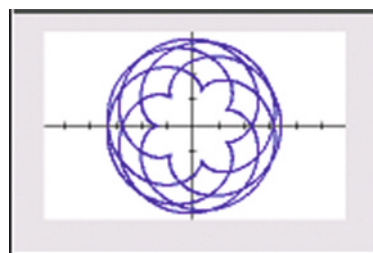
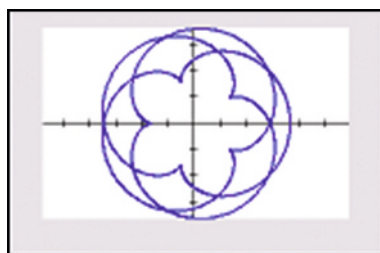
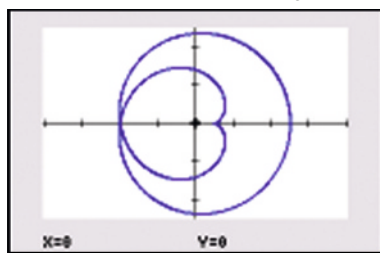
- d** Bijvoorbeeld $r = 3$ en $r = 8$:



Het aantal hoekpunten (knikken) in de baan is gelijk aan r .

20 Goniometrische formules

- e Afgebeeld zijn $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{5}{3}$ en $r = \frac{7}{5}$



Om een gesloten kromme te krijgen moet je een groter interval voor t nemen.

Het aantal hoekpunten is gelijk aan de teller van de breuk.

- f Je krijgt een astroïde zoals in opdracht 35 als $r = 4$.

Samenvatting

- S1 Uit $\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ met $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$ volgt $t = \frac{3}{4}\pi$.

$$\cos\left(t - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$$

$$\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

- S2 a $\sin(3x) = -\sin(2x)$

$$\sin(3x) = \sin(-2x)$$

$$3x = -2x + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \pi + 2x + k \cdot 2\pi$$

$$5x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot \frac{2}{5}\pi \text{ of } x = \pi + k \cdot 2\pi$$

- b $\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$$\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi + \pi\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$x - \frac{2}{3}\pi = 2x + \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{2}{3}\pi = -2x - \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$-x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$x = -1\frac{1}{3}\pi - k \cdot 2\pi \text{ of } x = 0 - k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

- c $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \text{ of } \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } \frac{1}{2}x = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$x = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 0 + k \cdot 4\pi$$

d $3 \cos(2x - \pi) = \sqrt{3} \sin(2x)$

$$-3 \cos(2x) = \sqrt{3} \sin(2x)$$

$$-3 = \sqrt{3} \tan(2x)$$

$$\tan(2x) = -\sqrt{3}$$

$$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

e $2 \cos^2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 4 + 7 \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$$2 \cos^2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 7 \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 4 = 0$$

Stel $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = p$, dat geeft

$$2p^2 - 7p - 4 = 0$$

$$p = \frac{7 - \sqrt{81}}{4} = -\frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{7 + \sqrt{81}}{4} = 4$$

$$\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} \text{ of } \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 4 \text{ (geen oplossingen)}$$

$$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

S3 a Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$.

$$1 - 3 \cos(x) - \sin^2(x) = 0$$

$$1 - 3 \cos(x) - (1 - \cos^2(x)) = 0$$

$$\cos^2(x) - 3 \cos(x) = 0$$

$$\cos(x)(\cos(x) - 3) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 3 \text{ (geen oplossing)}$$

De oplossingen op het interval $[-\pi, \pi]$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = -\frac{1}{2}\pi$.

b $f'(x) = 3 \sin(x) - 2 \sin(x) \cos(x)$

$$f'(x) = 0 \text{ als } 3 \sin(x) - 2 \sin(x) \cos(x) = 0$$

$$\sin(x)(3 - 2 \cos(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } 3 - 2 \cos(x) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 1 \frac{1}{2} \text{ (geen oplossing)}$$

De oplossingen op het interval $[-\pi, \pi]$ zijn $x = -\pi$ en $x = 0$ en $x = \pi$.

randmaximum $f(-\pi) = 4$, minimum $f(0) = -2$ en randmaximum $f(\pi) = 4$

Het bereik is $[-2, 4]$.

c De oppervlakte is gelijk aan het tegengestelde van $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(x) dx$.

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (1 - 3 \cos(x) - \sin^2(x)) dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (1 - 3 \cos(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)\right)) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x - 3 \sin(x) + \frac{1}{4} \sin(2x)\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$\left(\frac{1}{4}\pi - 3 + 0\right) - \left(-\frac{1}{4}\pi + 3 + 0\right) = \frac{1}{2}\pi - 6$$

De gevraagde oppervlakte is $6 - \frac{1}{2}\pi$.

S4 De periode van $x(t) = 2 \sin\left(\frac{1}{3}t\right)$ is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ en

de periode van $y(t) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$ is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud is 12π .

De periode van de beweging van P is 12π .

20 Goniometrische formules

- S5 a** $x(t) = \cos(t) + \cos(2t)$ en $y(t) = \sin(t) + \sin(2t)$
 $x'(t) = -\sin(t) - 2\sin(2t)$ en $y'(t) = \cos(t) + 2\cos(2t)$
 Als de raaklijn verticaal is, dan moet gelden $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$.
 $-\sin(t) - 2\sin(2t) = 0$
 $-\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t) = 0$
 $-\sin(t)(1 + 4\cos(t)) = 0$
 $\sin(t) = 0$ of $1 + 4\cos(t) = 0$
 $\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = -\frac{1}{4}$
 Bij $\sin(t) = 0$ horen de punten $(2, 0)$ en $(0, 0)$.
 Als $\cos(t) = -\frac{1}{4}$, dan is $\sin^2(t) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$ en dus
 $\sin(t) = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ of $\sin(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$
 $\sin(2t) = 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}\sqrt{15}$ of $\sin(2t) = 2 \cdot -\frac{1}{4}\sqrt{15} \cdot -\frac{1}{4} = \frac{1}{8}\sqrt{15}$
 $\cos(2t) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$
 De bijbehorende punten zijn $\left(-1\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{15}\right)$ en $\left(-1\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{15}\right)$.
- b** Op de x -as geldt $y(t) = 0$.
 $\sin(t) + \sin(2t) = 0$
 $\sin(2t) = -\sin(t)$
 $\sin(2t) = \sin(-t)$
 $2t = -t + k \cdot 2\pi$ of $2t = \pi + t + k \cdot 2\pi$
 $3t = 0 + k \cdot 2\pi$ of $t = \pi + k \cdot 2\pi$
 $t = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $t = \pi + k \cdot 2\pi$
 De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$ of $t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = \pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$
 of $t = 2\pi$.
 De kromme snijdt zichzelf in $(-1, 0)$ als $t = \frac{2}{3}\pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$.
 Als $t = \frac{2}{3}\pi$ dan geldt $\frac{y'(\frac{2}{3}\pi)}{x'(\frac{2}{3}\pi)} = \frac{-\frac{1}{2} + 2 \cdot -\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{-1\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.
 Als $t = 1\frac{1}{3}\pi$ dan geldt $\frac{y'(1\frac{1}{3}\pi)}{x'(1\frac{1}{3}\pi)} = \frac{-\frac{1}{2} + 2 \cdot -\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{-1\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
 $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$, dus beide raaklijnen maken een hoek van 60° met de x -as en
 de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt is $180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$.

Test jezelf

- T1 a** $f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$
 $f(x) = \cos(x)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \sin(x)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$
 $f(x) = \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sin(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sin(x) \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \cos(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $f(x) = -\sqrt{2}\sin(x)$
- b** $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = \sin(2x)$
 $-\sqrt{2}\sin(x) = \sin(2x)$
 $-\sqrt{2}\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
 $-\sqrt{2}\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0$
 $-2\sin(x)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos(x)\right) = 0$
 $\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = 0$ of $x = \pi$ of $x = 2\pi$ of
 $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

T2 a $\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$$\cos\left(2x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$2x - \frac{3}{4}\pi = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{3}{4}\pi = -x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi$.

b $\cos(2x) - 2\sin^2(x) = 0$

$$1 - 2\sin^2(x) - 2\sin^2(x) = 0$$

$$4\sin^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$.

c $6 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = 2\sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$\tan\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\pi + x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{4}{3}\pi$.

d $\frac{1}{2}\sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$\frac{1}{2}\sin(3x) = \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$3x = x + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \pi - x + k \cdot 2\pi$$

$$2x = 0 + k \cdot 2\pi \text{ of } 4x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 0 + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = 0$ of $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = \pi$ of $x = \frac{5}{4}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 2\pi$.

T3 a $g(x) = 2\cos^2\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

b Symmetrisch in de y -as, dan moet gelden $g(a) = g(-a)$ voor elke waarde van a .

$$g(a) = 2\cos^2\left(a - \frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(a - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$g(a) = 2\sin^2(a) + \sin\left(a + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$g(a) = 2\sin^2(a) + \cos(a)$$

$$g(-a) = 2(\sin(-a))^2 + \cos(-a)$$

$$g(-a) = 2(-\sin(a))^2 + \cos(a)$$

$$g(-a) = 2\sin^2(a) + \cos(a)$$

$g(a) = g(-a)$, dus de grafiek van g is symmetrisch in de y -as.

c De grafiek van g is symmetrisch in de y -as. Door de grafiek van g $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts te verschuiven ontstaat de grafiek van f . Hierdoor wordt de lijn

$x = \frac{1}{2}\pi$ de symmetrie-as van f .

20 Goniometrische formules

T4 a $\sin(x) + \cos(2x) = 1$

$$\sin(x) + 1 - 2\sin^2(x) = 1$$

$$\sin(x) - 2\sin^2(x) = 0$$

$$\sin(x)(1 - 2\sin(x)) = 0$$

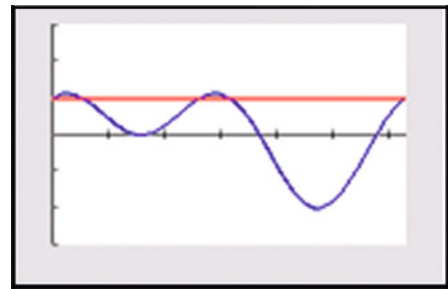
$$\sin(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{2}$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn

$$x = 0 \text{ of } x = \pi \text{ of } x = 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi$$

Zie de plot hiernaast: de oplossing van

$$f(x) > 1 \text{ is } \langle 0, \frac{1}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi, \pi \rangle.$$



b Voor de nulpunten geldt $\sin(x) + \cos(2x) = 0$.

$$\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(2x)$$

$$\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2x + \pi)$$

$$x - \frac{1}{2}\pi = 2x + \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{1}{2}\pi = -2x - \pi + k \cdot 2\pi$$

$$-x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -1\frac{1}{2}\pi - k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

c De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $-\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin(x) + \cos(2x)) dx$.

$$-\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin(x) + \cos(2x)) dx = -\left[-\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} =$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) =$$

$$-\left(-\frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{3}\right) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

De oppervlakte is $1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

d $f'(x) = \cos(x) - 2\sin(2x)$

Voor de toppen geldt $\cos(x) - 2\sin(2x) = 0$

$$\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\cos(x)(1 - 4\sin(x)) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } 4\sin(x) = 1$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{4}$$

$$\cos(x) = 0 \text{ geeft de toppen } \left(\frac{1}{2}\pi, 0\right) \text{ en } \left(1\frac{1}{2}\pi, -2\right).$$

$$\sin(x) = \frac{1}{4} \text{ dan is } \cos(2x) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$$

De y -coördinaat van de bijbehorende toppen is $\frac{1}{4} + \frac{7}{8} = 1\frac{1}{8}$.

De y -coördinaten van de toppen zijn 0 , -2 en $1\frac{1}{8}$.

T5 a Voor de extreme waarden geldt $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2 + \cos(x)) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ als } 2\cos(x) + 1 = 0 \text{ dus als } \cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ en } (2 + \cos(x))^2 \neq 0.$$

De oplossingen op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi]$ zijn $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = 1\frac{1}{3}\pi$.

De extreme waarden zijn: een randminimum $f(-\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}$, een

$$\text{maximum } f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ een minimum } f(1\frac{1}{3}\pi) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

en een randmaximum $f(2\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$.

b
$$f''(x) = \frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin(x)(2 + \cos(x))^2 - (2\cos(x) + 1) \cdot 2(2 + \cos(x)) \cdot -\sin(x)}{(2 + \cos(x))^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin(x)(2 + \cos(x)) - (2\cos(x) + 1) \cdot 2 \cdot -\sin(x)}{(2 + \cos(x))^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)}{(2 + \cos(x))^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x)}{(2 + \cos(x))^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin(x) + \sin(2x)}{(2 + \cos(x))^3}$$

c Voor de buigpunten geldt $f''(x) = 0$.

$$\frac{-2\sin(x) + \sin(2x)}{(2 + \cos(x))^3} = 0$$

$$-2\sin(x) + \sin(2x) = 0 \text{ en } (2 + \cos(x))^3 \neq 0$$

$$-2\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$2\sin(x)(-1 + \cos(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 1$$

De buigpunten op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi]$ zijn $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$ en deze liggen allen op de x -as.

T6 a
$$f_a(x) = a \cdot \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$f'_a(x) = 2a \cdot \cos(x) \cdot -\sin(x) - 2 \cdot \sin(x)\cos(x)$$

$$f'_a(x) = -2a \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) - 2 \cdot \sin(x)\cos(x)$$

$$f'_a(x) = (-2a - 2) \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$$

$$f'_a(x) = 0 \text{ als } (-2a - 2) \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 0$$

omdat $a \neq -1$ geldt $-2a - 2 \neq 0$ dus

$\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 0$ en de oplossingen hiervan zijn onafhankelijk van a .

b
$$f_3(x) = 3 \cdot \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$f_3(x) = 3 \cdot \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$$

$$f_3(x) = 4\cos^2(x) - 1$$

$$f_3(x) = 2(\cos(2x) + 1) - 1$$

$$f_3(x) = 2\cos(2x) + 2 - 1$$

$$f_3(x) = 2\cos(2x) + 1$$

20 Goniometrische formules

$$\begin{aligned} \text{c} \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (3\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (2\cos(2x) + 1) dx = \\ &= \left[\sin(2x) + x \right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \\ \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \frac{1}{4}\pi - 0 &= 1 + \frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

T7 Vul $x(t) = \cos(t)$ en $y(t) = \sin(2t)$ in bij $y^2 = 4x^2 - 4x^4$. Dit geeft
 $(\sin(2t))^2 = 4 \cdot (\cos(t))^2 - 4 \cdot (\cos(t))^4$
 $(2\sin(t)\cos(t))^2 = 4\cos^2(t)(1 - \cos^2(t))$
 $4\sin^2(t)\cos^2(t) = 4\cos^2(t)\sin^2(t)$
 Dit geldt voor alle waarden van t , dus alle punten van de baan van punt P liggen op de kromme met vergelijking $y^2 = 4x^2 - 4x^4$.

T8 a $x(t) = 3\sin(t) - \sin(3t)$ en $y(t) = 3\cos(t) - \cos(3t)$
 $x'(t) = 3\cos(t) - 3\cos(3t)$ en $y'(t) = -3\sin(t) + 3\sin(3t)$
 Als $t = 0$ dan is $x'(0) = 3 - 3 = 0$ en $y'(0) = 0 + 0 = 0$.
 Hieruit volgt de baansnelheid $v(0) = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.
 Als $t = \frac{1}{2}\pi$ dan is $x'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0 - 0 = 0$ en $y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3 \cdot 1 + 3 \cdot -1 = -6$.
 Hieruit volgt de baansnelheid $v\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = \sqrt{36} = 6$.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad v(t) &= \sqrt{(3\cos(t) - 3\cos(3t))^2 + (-3\sin(t) + 3\sin(3t))^2} = \\ &= \sqrt{9\cos^2(t) - 18\cos(t)\cos(3t) + 9\cos^2(3t) + 9\sin^2(t) - 18\sin(t)\sin(3t) + 9\sin^2(3t)} = \\ &= \sqrt{9(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 9(\cos^2(3t) + \sin^2(3t)) - 18(\cos(3t)\cos(t) - \sin(3t)\sin(t))} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 18\cos(3t - t)} = \sqrt{18 - 18\cos(2t)} = \\ &= \sqrt{18 - 18(1 - 2\sin^2(t))} = \sqrt{36\sin^2(t)} = |6\sin(t)| \end{aligned}$$

c $v = |6\sin(t)|$ is maximaal als $\sin(t) = 1$ of als $\sin(t) = -1$
 De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$.
 De punten zijn $(4, 0)$ en $(-4, 0)$.

Extra oefening

E1 a $\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{4}$
 $2\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}$
 $\sin(2t) = \frac{1}{2}$
 $2t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{12}\pi$, $t = \frac{5}{12}\pi$, $t = 1\frac{1}{12}\pi$ en $t = 1\frac{5}{12}\pi$.

b $2\cos^2(t) - 2\sin^2(t) = 1$
 $2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 1$
 $2\cos(2t) = 1$
 $\cos(2t) = \frac{1}{2}$
 $2t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2t = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$
 De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{6}\pi$, $t = \frac{5}{6}\pi$, $t = 1\frac{1}{6}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$.

c $\sin\left(1\frac{1}{2}\pi + t\right) = \cos(3t)$

$$\cos\left(1\frac{1}{2}\pi + t - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(3t)$$

$$\pi + t = 3t + k \cdot 2\pi \text{ of } \pi + t = -3t + k \cdot 2\pi$$

$$-2t = -\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 4t = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{2}\pi - k \cdot \pi \text{ of } t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{3}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$,

$$t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ en } t = 1\frac{3}{4}\pi.$$

E2 a Symmetrisch in de y -as, dan moet gelden $f(a) = f(-a)$ voor elke waarde van a .

$$f(-a) = \frac{2\cos(-a)}{3 + 2\cos(-a)} = \frac{2\cos(a)}{3 + 2\cos(a)} = f(a), \text{ dit geldt voor elke waarde van } a,$$

dus de grafiek van f symmetrisch is in de y -as.

b Eerst $f(x) = 0$ oplossen.

$$\frac{2\cos(x)}{3 + 2\cos(x)} = 0$$

$$2\cos(x) = 0 \text{ en } 3 + 2\cos(x) \neq 0$$

$$\cos(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

De oplossingen op het interval $[-1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn $x = -1\frac{1}{2}\pi$ of $x = -\frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

Zie de schets: de oplossing van $f(x) < 0$ is $\langle -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi \rangle \cup \langle \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi \rangle$.

c
$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)(3 + 2\cos(x)) - 2\cos(x) \cdot -2\sin(x)}{(3 + 2\cos(x))^2} = \frac{-6\sin(x)}{(3 + 2\cos(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } \sin(x) = 0 \text{ en } (3 + 2\cos(x))^2 \neq 0.$$

De oplossingen op het interval $[-1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ zijn $x = -\pi$, $x = 0$ en $x = \pi$.

De extreme waarden zijn: een randmaximum $f(-1\frac{1}{2}\pi) = 0$ een minimum

$f(-\pi) = -2$ een maximum $f(0) = \frac{2}{5}$ een minimum $f(\pi) = -2$ en een

randmaximum $f(1\frac{1}{2}\pi) = 0$.

E3 De periode van $x(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right)$ is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$.

De periode van $y(t) = \sin\left(\frac{1}{a}\pi t\right)$ is $\frac{2\pi}{\frac{1}{a}\pi} = 2a$.

Als $a = 1$ is de periode van $y(t) = 2$, dus de gemeenschappelijke periode 4.

Als $a = 2$ is de periode van $y(t) = 4$, dus de gemeenschappelijke periode 4.

Als $a = 3$ is de periode van $y(t) = 6$, dus de gemeenschappelijke periode 12.

Als $a = 4$ is de periode van $y(t) = 8$, dus de gemeenschappelijke periode 8.

20 Goniometrische formules

E4 a Voor de snijpunten met de x -as geldt $y(t) = 0$.

$$4\cos(2t) = 0$$

$$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{3}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$ en $t = 1\frac{3}{4}\pi$.

$$t = \frac{1}{4}\pi \text{ geeft } x\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) \text{ ofwel } x\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right).$$

$$t = \frac{3}{4}\pi \text{ geeft } x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) \text{ ofwel } x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right).$$

$$t = 1\frac{1}{4}\pi \text{ geeft } x\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = 4\sin\left(1\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) \text{ ofwel } x\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = 4\sin\left(1\frac{5}{12}\pi\right).$$

$$t = 1\frac{3}{4}\pi \text{ geeft } x\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sin\left(1\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) \text{ ofwel } x\left(1\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sin\left(1\frac{11}{12}\pi\right).$$

De coördinaten zijn

$$\left(4\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right), 0\right), \left(4\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right), 0\right), \left(4\sin\left(1\frac{5}{12}\pi\right), 0\right) \text{ en } \left(4\sin\left(1\frac{11}{12}\pi\right), 0\right).$$

b $y = x$ dus $4\cos(2t) = 4\sin\left(t + \frac{1}{6}\pi\right)$

$$\cos(2t) = \sin\left(t + \frac{1}{6}\pi\right)$$

$$\cos(2t) = \cos\left(t + \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$2t = t - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = -t + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } t = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{9}\pi$, $t = \frac{7}{9}\pi$, $t = 1\frac{4}{9}\pi$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$.

c $x'(t) = 4\cos\left(t + \frac{1}{6}\pi\right)$ en $y'(t) = -8\sin(2t)$

Er is een verticale raaklijn als $\cos\left(t + \frac{1}{6}\pi\right) = 0$ en $-8\sin(2t) \neq 0$.

$$t + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ of } t = 1\frac{1}{3}\pi$$

De toppen zijn $(4, -2)$ en $(-4, -2)$.

Er is een horizontale raaklijn als $\sin(2t) = 0$ en $4\cos\left(t + \frac{1}{6}\pi\right) \neq 0$.

$$2t = 0 + k \cdot \pi$$

$$t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$t = 0 \text{ of } t = \frac{1}{2}\pi \text{ of } t = \pi \text{ of } t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ of } t = 2\pi.$$

De toppen zijn $(2, 4)$, $(2\sqrt{3}, -4)$, $(-2, 4)$ en $(-2\sqrt{3}, -4)$.

d Voor een punt op de y -as geldt $4\sin\left(t + \frac{1}{6}\pi\right) = 0$.

$$t + \frac{1}{6}\pi = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{5}{6}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$.

$$t = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft } \frac{y'\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{x'\left(\frac{5}{6}\pi\right)} = \frac{-8 \cdot \sin\left(\frac{10}{6}\pi\right)}{4 \cdot \cos(\pi)} = \frac{-8 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{4 \cdot -1} = -\sqrt{3} \text{ en}$$

$$t = 1\frac{5}{6}\pi \text{ geeft } \frac{y'\left(1\frac{5}{6}\pi\right)}{x'\left(1\frac{5}{6}\pi\right)} = \frac{-8 \cdot \sin\left(\frac{22}{6}\pi\right)}{4 \cdot \cos(2\pi)} = \frac{-8 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}}{4 \cdot 1} = \sqrt{3} \text{ en}$$

Omdat $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$ maken beide raaklijnen een hoek van 60° met de x -as en dus ook een hoek van $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ met elkaar.

E5 a Vul $x(t) = 2\sin(t)$ en $y(t) = \cos(2t)$ in bij $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

$$\cos(2t) = 1 - \frac{1}{2}(2\sin(t))^2$$

$$\cos(2t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4\sin^2(t)$$

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$$

Deze formule is juist voor elke waarde van t .

b $x'(t) = 2\cos(t)$ en $y'(t) = -2\sin(2t)$

$$x'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{3} \text{ en } y'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\sqrt{3}$$

$$v(t) = \sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(2t)}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{-8\cos(t)\sin(t) + 8\sin(2t) \cdot 2\cos(2t)}{2\sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(2t)}}$$

$$a(t) = \frac{-4\cos(t)\sin(t) + 8\sin(2t)\cos(2t)}{\sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(2t)}}$$

$$\text{De baansnelheid voor } t = \frac{1}{6}\pi \text{ is } v\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}.$$

$$\text{De baanversnelling is } a\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{-4 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

E6 a $y(t) = 4\cos^2(t)\sin(t) - 4\cos(t) + 1$
 $y(t) = 4 \cdot \left(\cos^2(t)\sin(t) - \cos(t) + \frac{1}{4}\right)$

$$y(t) = 4 \cdot \left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right)^2$$

De kleinste waarde voor $y(t)$ is de waarde nul, dus de baan van P zal nooit onder de x -as komen, maar alleen raken als $y(t) = 0$.

$$4 \cdot \left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\cos(t) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = \frac{1}{3}\pi$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$.

$$x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{3} \text{ en } x\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$$

De baan van P raakt de x -as in de punten $(\sqrt{3}, 0)$ en $(-\sqrt{3}, 0)$.

b Voor de snijpunten met de y -as geldt $x(t) = 0$.

$$2\sin(t) = 0$$

$$t = 0 + k \cdot \pi$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$ of $t = \pi$ of $t = 2\pi$.

$t = 0$ en $t = 2\pi$ geven beide het punt $(0, 1)$ en $t = \pi$ het punt $(0, -1)$.

In het punt $(0, 1)$ is $y'(0) = 0$ en $x'(0) = 2 \neq 0$ dus de baan snijdt de y -as hier loodrecht.

In het punt $(0, -1)$ is $y'(\pi) = 0$ en $x'(\pi) = -2 \neq 0$ dus de baan snijdt de y -as ook hier loodrecht.

20 Goniometrische formules

- c Invullen in
- $y = x^2 + 1$
- geeft

$$4\cos^2(t) - 4\cos(t) + 1 = (2\sin(t))^2 + 1$$

$$4\cos^2(t) - 4\cos(t) + 1 = 4\sin^2(t) + 1$$

$$4\cos^2(t) - 4\cos(t) + 1 = 4(1 - \cos^2(t)) + 1$$

$$8\cos^2(t) - 4\cos(t) - 4 = 0$$

$$2\cos^2(t) - \cos(t) - 1 = 0$$

Stel $\cos(x) = p$, dit geeft

$$2p^2 - p - 1 = 0$$

$$p = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1 \text{ of } p = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(t) = 1 \text{ of } \cos(t) = -\frac{1}{2}$$

De oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$, $t = 2\pi$, $t = \frac{2}{3}\pi$ en $t = 1\frac{1}{3}\pi$.

De snijpunten zijn $(0, 1)$, $(\sqrt{3}, 4)$ en $(-\sqrt{3}, 4)$.

E7 a $f\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \left(\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right)^4 + \left(\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)\right)^4$

$$f\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = (\cos(x))^4 + (-\sin(x))^4$$

$$f\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos^4(x) + \sin^4(x) = f(x)$$

Dus f is periodiek met periode $\frac{1}{2}\pi$.

- b Voor de toppen geldt
- $f'(x) = 0$
- .

$$f'(x) = 4\sin^3(x) \cdot \cos(x) + 4\cos^3(x) \cdot -\sin(x)$$

$$4\sin^3(x) \cdot \cos(x) + 4\cos^3(x) \cdot -\sin(x) = 0$$

$$4\sin(x)\cos(x)(\sin^2(x) - \cos^2(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = \cos(x) \text{ of } \sin(x) = -\cos(x)$$

De oplossingen op het interval $[0, \pi]$ zijn $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = \pi$

De toppen zijn $(0, 1)$, $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}\pi, 1)$, $(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2})$ en $(\pi, 1)$.

- c De evenwichtsstand is
- $y = \frac{3}{4}$
- , de amplitude is
- $\frac{1}{4}$
- en de periode is
- $\frac{1}{2}\pi$
- .

Een functievoorschrift is $g(x) = \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}$.

- d
- $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$

$$f(x) = (\sin^2(x))^2 + (\cos^2(x))^2$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos^2(2x) + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(2\cos^2(2x) - 1) + \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}$$

dus $f(x) = g(x)$.

e $\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{3}{4}\right) dx =$

$$\left[\frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{3}{4}x\right]_0^{\pi}$$

$$\left(\frac{3}{4}\pi + 0\right) - 0 = \frac{3}{4}\pi$$

- E8 a** De lengten van de rechthoekszijden van elke rechthoekige driehoek zijn $4\cos(t)$ en $4\sin(t)$, dus de oppervlakte van elke driehoek is $\frac{1}{2} \cdot 4\cos(t) \cdot 4\sin(t) = 8\sin(t)\cos(t)$ en dat is gelijk aan $4 \cdot 2\sin(t)\cos(t) = 4\sin(2t)$.
De oppervlakte van zes driehoeken samen is $6 \cdot 4\sin(2t) = 24\sin(2t)$.
De oppervlakte van de twee cirkelsectoren is $\frac{2t}{2\pi}$ deel van de oppervlakte van de cirkel, dus gelijk aan $\frac{2t}{2\pi} \cdot \pi \cdot 4^2 = 16t$.
De oppervlakte van het gebied is gelijk aan $O(t) = 16t + 24\sin(2t)$.
- b** Voor de maximale oppervlakte geldt $O'(t) = 0$.
 $16 + 48\cos(2t) = 0$
 $48\cos(2t) = -16$
 $\cos(2t) = -\frac{1}{3}$
 $1 - 2\sin^2(t) = -\frac{1}{3}$
 $2\sin^2(t) = 1\frac{1}{3}$
 $\sin^2(t) = \frac{2}{3}$
 $\sin(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (omdat $0 < t < \frac{1}{2}\pi$)
De hoogte is $2 \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 8\sqrt{\frac{2}{3}} (= 2\frac{2}{3}\sqrt{6})$.

21 Afsluiting analyse

Voorkennis

V1 a $3x - 1 \neq 0$ dus $x \neq \frac{1}{3}$. Het domein is $\langle \leftarrow, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{1}{3}, \rightarrow \rangle$.

Voor het nulpunt geldt $2x + 7 = 0$, dus $x = -3\frac{1}{2}$.

b $2x \neq 0$ dus $x \neq 0$. Het domein is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Voor het nulpunt geldt $3x - 4 = 0$, dus $x = 1\frac{1}{3}$.

c $2x - x^2 \neq 0$ geeft $x(2 - x) \neq 0$, dus $x \neq 0$ of $x \neq 2$.

Het domein is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

Voor de nulpunten geldt $1 - x^2 = 0$, dus $x = -1$ of $x = 1$.

d De noemer is altijd positief, dus het domein is $\mathbb{R}$.

Het nulpunt is $x = 0$.

e $7 - x^2 \neq 0$ geeft $x^2 \neq 7$. Het domein is $\langle \leftarrow, -\sqrt{7} \rangle \cup \langle -\sqrt{7}, \sqrt{7} \rangle \cup \langle \sqrt{7}, \rightarrow \rangle$.

Het nulpunt is $x = 2$.

f $3 - \sqrt{x} \neq 0$ geeft $x \neq 9$. Het domein is $[0, 9) \cup \langle 9, \rightarrow \rangle$.

Er is geen nulpunt, want $1 + \sqrt{x}$ is altijd positief.

$$\text{V2 a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 - 3x}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{12}{x^2} - \frac{3}{x}}{1 - \frac{5}{x^2}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

De noemer is nul als $x^2 - 5 = 0$, dus als $x = -\sqrt{5}$ of $x = \sqrt{5}$.

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$.

$$\text{b } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 6x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{2 + \frac{6}{x} - \frac{8}{x^2}} = \frac{1 - 0 - 0}{2 + 0 - 0} = \frac{1}{2}$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{2}$.

De noemer is nul als $2x^2 + 6x - 8 = 0$.

$x^2 + 3x - 4 = 0$ geeft $(x + 4)(x - 1) = 0$.

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -4$ en $x = 1$.

$$\text{c } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^2}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{4 - 0 + 0}{2 - 0} = 2$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

De noemer is nul als $2x^2 - 1 = 0$, dus als $x^2 = \frac{1}{2}$.

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ en $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

$$\text{d } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3x - 2)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 - 0}{1 - 0 + 0} = 3$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

De noemer is nul als $(x - 1)^2 = 0$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

21 Afsluiting analyse

- V3 a** De noemer is nul als $x^2 - 4 = 0$, dus als $x = -2$ of $x = 2$.

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

b $f(x) = -3 + \frac{2 - x^2}{x^2 - 4}$

$$f(x) = \frac{-3(x^2 - 4)}{x^2 - 4} + \frac{2 - x^2}{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 12}{x^2 - 4} + \frac{2 - x^2}{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \frac{-4x^2 + 14}{x^2 - 4}$$

- c** $f(x) = 0$ als $-4x^2 + 14 = 0$.

Dit geeft de nulpunten $x = -\sqrt{3\frac{1}{2}}$ en $x = \sqrt{3\frac{1}{2}}$.

d $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + 14}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{14}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{-4 + 0}{1 - 0} = -4$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -4$.

- V4 a** $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{3x-1} = 0$, dus de lijn $y = 0$ is een horizontale asymptoot (naar links).

- b** $10 - 4x = 0$ heeft als oplossing $x = 2\frac{1}{2}$, dus de lijn $x = 2\frac{1}{2}$ is een verticale asymptoot.

- c** $2^{-x} - 1 = 0$ geeft $2^{-x} = 1$ ofwel $x = 0$, dus de lijn $x = 0$ is een verticale asymptoot.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-x} - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1$, dus de lijn $y = -1$ is een horizontale asymptoot (naar rechts).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2^{-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{1 - 2^x} = \frac{0}{1 - 0} = 0$, dus de lijn $y = 0$ is een horizontale asymptoot (naar links).

- d** De grafiek van $q(x) = \tan\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right)$ heeft verticale asymptoten als $2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, dus als $x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$.
Op het interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ zijn de verticale asymptoten de lijnen $x = -\frac{5}{8}\pi$, $x = -\frac{1}{8}\pi$, $x = \frac{3}{8}\pi$ en $x = \frac{7}{8}\pi$.

- V5 a** $15 - 2x - x^2 > 0$

$x^2 + 2x - 15 < 0$ (de vraag is waar deze dalparabool onder de x -as ligt)

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x = -5 \text{ of } x = 3$$

Het domein van deze functie is het interval $\langle -5, 3 \rangle$.

- b** De grafiek heeft een verticale asymptoot als $15 - 2x - x^2 = 0$.

Dat is het geval voor $x = -5$ en $x = 3$.

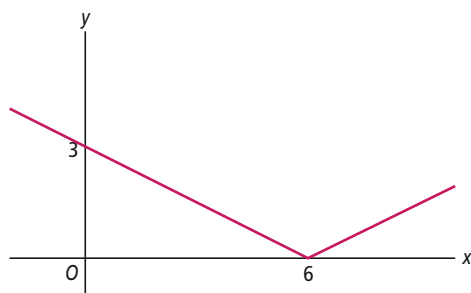
c $f'(x) = \frac{-2 - 2x}{(15 - 2x - x^2) \cdot \ln(2)}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -2 - 2x = 0 \text{ ofwel } x = -1.$$

Het maximum $f(-1) = {}^2\log(16) = 4$.

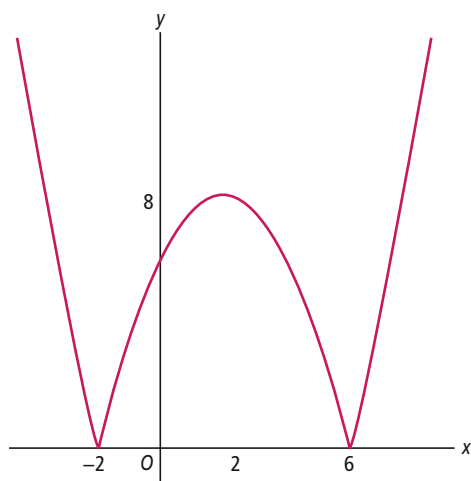
- d** Het bereik van f is $\langle -\infty, 4 \rangle$.

V6 a



- b Voor $\frac{1}{2}x - 3 \geq 0$, dus voor $x \geq 6$.
 c Voor $x < 6$ is het functievoorschrift $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

V7 a



- b $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \geq 0$
 $x^2 - 4x - 12 \geq 0$
 $(x - 6)(x + 2) \geq 0$ geeft $x \leq -2$ of $x \geq 6$.
 c Maximum bij $x = \frac{-2+6}{2} = 2$ en deze is $g(2) = \left|\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 6\right| = 8$.
 d Minimum $g(-2) = g(6) = 0$.

21.1 Limieten en perforaties

intro $x^2 - 4x - 5 = 0$ geeft $(x + 1)(x - 5) = 0$, dus $x = -1$ of $x = 5$.

Voor die waarden van x is er geen functiewaarde.

Voor $-1 < x < 5$ is $x^2 - 4x - 5 < 0$, dus $f(x) = -1$.

Voor $x < -1$ of $x > 5$ is $x^2 - 4x - 5 > 0$, dus $f(x) = 1$.

- 1 a Dan wordt $f(x)$ steeds kleiner of ook $f(x) \rightarrow -\infty$.
 Dan wordt $f(x)$ steeds groter of ook $f(x) \rightarrow \infty$.
 b De grafiek heeft een verticale asymptoot $x = -3$.
 c $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3}$
 Voor $x \neq -3$ is $g(x) = x - 3$.
 d $g(x)$ nadert in beide gevallen tot $-3 - 3 = -6$.
 e De grafiek van g is een rechte lijn met een gaatje in het punt $(-3, -6)$.

21 Afsluiting analyse

- 2 a** Als $x > -3$ is $h(x) = \frac{x+3}{x+3} = 1$ en als $x < -3$ is $h(x) = \frac{-(x+3)}{x+3} = -1$.
- b** Als x van de rechterkant naar -3 nadert, nadert $h(x)$ tot 1 en als x van de linkerkant naar -3 nadert, nadert $h(x)$ tot -1 .
- c** De grafiek van h vertoont een sprong bij $x = -3$.

- 3 a** $x^2 - 25 > 0$ als $x < -5$ of $x > 5$, dus dan is $|x^2 - 25| = x^2 - 25$.
 $x^2 - 25 < 0$ als $-5 < x < 5$, dus dan is $|x^2 - 25| = -(x^2 - 25)$.

$$\lim_{x \uparrow 5} f(x) = \lim_{x \uparrow 5} \frac{|x^2 - 25|}{x - 5} = \lim_{x \uparrow 5} \frac{-(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \uparrow 5} -(x+5) = -10$$

$$\lim_{x \downarrow 5} f(x) = \lim_{x \downarrow 5} \frac{|x^2 - 25|}{x - 5} = \lim_{x \downarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \downarrow 5} (x+5) = 10$$

b $\lim_{x \uparrow 5} g(x) = \lim_{x \uparrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = \lim_{x \uparrow 5} \frac{(x+1)(x-5)}{x-5} = \lim_{x \uparrow 5} (x+1) = 6$

$$\lim_{x \downarrow 5} g(x) = \lim_{x \downarrow 5} \frac{(x+1)(x-5)}{x-5} = \lim_{x \downarrow 5} (x+1) = 6$$

- c** De grafiek van f heeft bij $x = 5$ een sprong en de grafiek van g heeft bij $x = 5$ een perforatie.

4 a $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-3)^2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)^2}$

Als $x \neq 3$ is $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

De grafiek van f heeft een verticale asymptoot $x = 3$.

b $g(x) = \frac{2x-1}{4x^2-2x} = \frac{2x-1}{2x(2x-1)}$

Als $x \neq \frac{1}{2}$ is $g(x) = \frac{1}{2x}$

$$\lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x} = \lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x} = \frac{1}{1} = 1$$

De grafiek van g heeft een perforatie bij het punt $(\frac{1}{2}, 1)$.

De grafiek heeft een verticale asymptoot $x = 0$.

c $h(x) = \frac{2x^2 - 8x}{|x-4|} = \frac{2x(x-4)}{|x-4|}$

Als $x > 4$ is $h(x) = \frac{2x(x-4)}{x-4} = 2x$ en als $x < 4$ is $h(x) = \frac{2x(x-4)}{-(x-4)} = -2x$.

$$\lim_{x \downarrow 4} h(x) = 8 \text{ en } \lim_{x \uparrow 4} h(x) = -8$$

De grafiek van h heeft een sprong bij $x = 4$.

d $k(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - 2} = \frac{(x-4)(x+1)}{2(x^2 - 1)} = \frac{(x-4)(x+1)}{2(x-1)(x+1)}$

Als $x \neq -1$ is $k(x) = \frac{x-4}{2(x-1)}$

$$\lim_{x \uparrow -1} \frac{x-4}{2(x-1)} = \lim_{x \downarrow -1} \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{-1-4}{2(-1-1)} = \frac{5}{4}$$

De grafiek van k heeft een perforatie bij het punt $(-1, 1\frac{1}{4})$.

De grafiek van k heeft een verticale asymptoot als $2(x-1) = 0$.

De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = 1$.

$$5 \text{ a } f(x) = \frac{3x + 18}{x^2 - 3x - 54} = \frac{3(x + 6)}{(x - 9)(x + 6)}$$

$$\text{Als } x \neq -6 \text{ is } f(x) = \frac{3}{x - 9}$$

$$\lim_{x \uparrow -6} \frac{3}{x - 9} = \lim_{x \downarrow -6} \frac{3}{x - 9} = \frac{3}{-15} = -\frac{1}{5}$$

De grafiek van f heeft een perforatie bij het punt $(-6, -\frac{1}{5})$.

$$b \text{ } g(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x - 2} = \frac{(e^x - 1)(e^x - 2)}{e^x - 2}$$

$$\text{Als } x \neq \ln(2) \text{ is } g(x) = e^x - 1$$

$$\lim_{x \uparrow \ln(2)} (e^x - 1) = \lim_{x \downarrow \ln(2)} (e^x - 1) = 1$$

De grafiek van g heeft een perforatie bij het punt $(\ln(2), 1)$.

$$c \text{ } h(x) = \frac{2x^2 + 2x - 12}{3x - 6} = \frac{2(x + 3)(x - 2)}{3(x - 2)}$$

$$\text{Als } x \neq 2 \text{ is } h(x) = \frac{2}{3}(x + 3).$$

$$\lim_{x \uparrow 2} \frac{2}{3}(x + 3) = \lim_{x \downarrow 2} \frac{2}{3}(x + 3) = 3\frac{1}{3}$$

De grafiek van h heeft een perforatie bij het punt $(2, 3\frac{1}{3})$.

$$d \text{ } k(x) = \cos(x) \cdot \tan(x) = \cos(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\text{Als } x \neq \frac{1}{2}\pi \text{ of } x \neq -\frac{1}{2}\pi \text{ is } k(x) = \sin(x).$$

$$\lim_{x \uparrow -\frac{1}{2}\pi} \sin(x) = \lim_{x \downarrow -\frac{1}{2}\pi} \sin(x) = -1 \text{ en } \lim_{x \uparrow \frac{1}{2}\pi} \sin(x) = \lim_{x \downarrow \frac{1}{2}\pi} \sin(x) = 1$$

De grafiek van k heeft perforaties bij de punten $(-\frac{1}{2}\pi, -1)$ en $(\frac{1}{2}\pi, 1)$.

$$6 \text{ } \lim_{x \uparrow 1} 2e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \cdot e^{-\infty} = 0 \text{ en } \lim_{x \downarrow 1} 2e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \cdot e^{\infty} = \infty$$

De grafiek heeft een perforatie bij het punt $(1, 0)$ en een verticale asymptoot $x = 1$.

$$\times 1 \text{ a } f_3(x) = \frac{9 - x^2}{3x^2 - x^3} = \frac{(3 + x)(3 - x)}{x^2(3 - x)}$$

$$\text{Als } x \neq 3 \text{ is } f_3(x) = \frac{3 + x}{x^2}$$

$$\lim_{x \uparrow 3} \frac{3 + x}{x^2} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{3 + x}{x^2} = \frac{2}{3}$$

De grafiek heeft een perforatie bij het punt $(3, \frac{2}{3})$.

Voor het snijpunt met de x -as geldt $f_3(x) = 0$, dit geeft $x = -3$.

$$f_3(x) = \frac{3 + x}{x^2} = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} \text{ ofwel } f_3(x) = 3x^{-2} + x^{-1}$$

$$f'_3(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'_3(-3) = -\frac{6}{-27} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Een vergelijking van de raaklijn in $(-3, 0)$ is $y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$.

Invullen van de coördinaten van de perforatie geeft $\frac{2}{3} = \frac{1}{9} \cdot 3 + \frac{1}{3}$ klopt.

Deze raaklijn gaat dus door de perforatie.

21 Afsluiting analyse

$$\text{b } f_a(x) = \frac{9 - x^2}{ax^2 - x^3} = \frac{(3+x)(3-x)}{x^2(a-x)}$$

Er is ook een perforatie als $a = -3$; $f_{-3}(x) = \frac{3-x}{-x^2} = \frac{x-3}{x^2}$

$$\lim_{x \uparrow -3} \frac{x-3}{x^2} = \lim_{x \downarrow -3} \frac{x-3}{x^2} = -\frac{2}{3}$$

De grafiek heeft een perforatie bij het punt $(-3, -\frac{2}{3})$.

$$\times 2 \text{ a } g(x) = \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(2x)} + 1 = \frac{-2\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} + 1$$

Voor $\sin(x) \neq 0$ is $g(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 = -\tan(x) + 1$.

Er zijn asymptoten als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Asymptoten op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi]$ zijn de lijnen $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\frac{1}{2}\pi$.

b De perforaties doen zich voor als $\sin(x) = 0$, dus bij $x = 0$, $x = \pi$ en $x = 2\pi$.

$$\lim_{x \uparrow 0} (\tan(x) + 1) = \lim_{x \downarrow 0} (\tan(x) + 1) = 1, \quad \lim_{x \uparrow \pi} (\tan(x) + 1) = \lim_{x \downarrow \pi} (\tan(x) + 1) = 1 \text{ en}$$

$$\lim_{x \uparrow 2\pi} (\tan(x) + 1) = \lim_{x \downarrow 2\pi} (\tan(x) + 1) = 1$$

De grafiek van g heeft perforaties bij de punten $(0, 1)$, $(\pi, 1)$ en $(2\pi, 1)$.

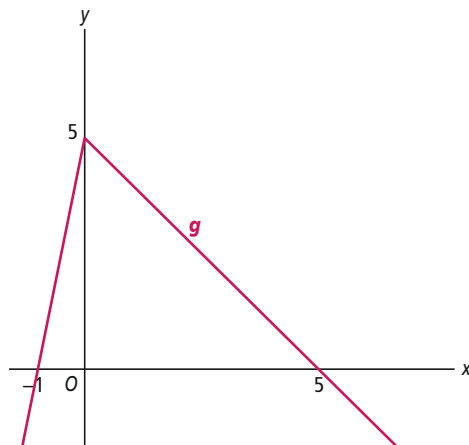
21.2 Functies met absolute waarden

intro Met behulp van je GR vind je $g(x) = |x^3| - |9x|$.

7 a Als $x \geq 0$, dan is $g(x) = 2x - 3x + 5$ ofwel $g(x) = -x + 5$.

b Als $x < 0$, dan is $g(x) = 2x + 3x + 5$ ofwel $g(x) = 5x + 5$.

c



d De richtingscoëfficiënt van het deel van de grafiek links van de knik is 5 en de richtingscoëfficiënt van het deel rechts van de knik is -1 .

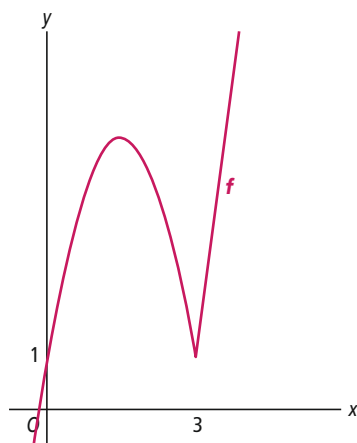
e Maximum $g(0) = 5$.

8 a $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x$ als $\frac{1}{2}x^2 - 4x \geq 0$ ofwel als $x(x - 8) \geq 0$.

Dit is het geval als $x \leq 0$ of $x \geq 8$.

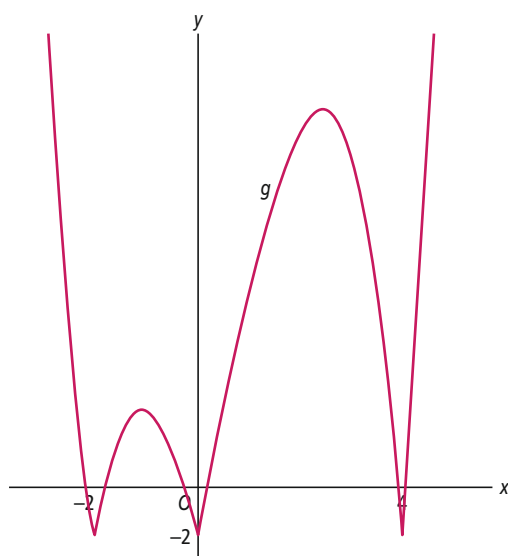
b $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ als $0 < x < 8$.

9 a



- b Als $x \geq 3$, dan is $f(x) = 2x(x - 3) + 1$ of ook $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$.
 Als $x < 3$, dan is $f(x) = 2x \cdot -(x - 3) + 1$ of ook $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$.

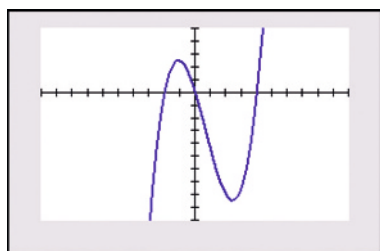
c



$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0$$

$$x(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$\text{Plot } y = x^3 - 2x^2 - 8x.$$



Uit de plot blijkt dat $x^3 - 2x^2 - 8x \geq 0$ als $-2 \leq x \leq 0$ of $x \geq 4$ en

$x^3 - 2x^2 - 8x < 0$ als $x < -2$ of $0 < x < 4$.

Voor $-2 \leq x \leq 0$ of $x \geq 4$ geldt $g(x) = x^3 - 2x^2 - 8x - 2$.

Voor $x < -2$ of $0 < x < 4$ geldt $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x - 2$.

10 a $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}}$ als $x \geq 4$ en $f(x) = \frac{-x+4}{\sqrt{x}}$ als $0 < x < 4$.

- b Het minimum is $f(4) = 0$.

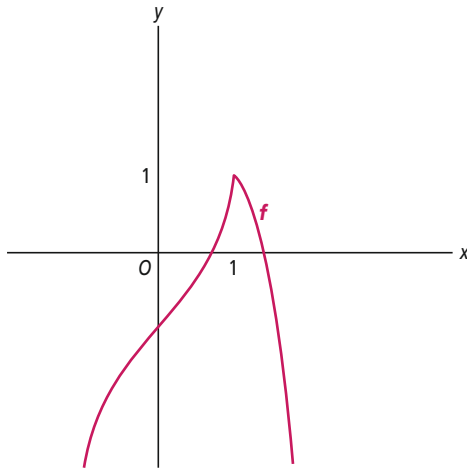
21 Afsluiting analyse

$$\text{c Voor } x > 4 \text{ geldt } f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x} - \frac{x-4}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - (x-4)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+4}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{Voor } 0 < x < 4 \text{ geldt } f'(x) = -\frac{x+4}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{d } \lim_{x \uparrow 4} f'(x) = \lim_{x \uparrow 4} -\frac{x+4}{2x\sqrt{x}} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2} \text{ en } \lim_{x \downarrow 4} f'(x) = \lim_{x \downarrow 4} \frac{x+4}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

11 a

b De extreme waarde is een maximum $f(1) = 1$.

$$\begin{aligned} 12 \text{ a } & \frac{1}{3}x^2 - 4x = 0 \\ & 4x^2 - 12x = 0 \\ & x^2 - 3x = 0 \\ & x(x-3) = 0 \end{aligned}$$

De grafiek van $y = x^2 - 3x$ is een dalparabool die de x -as snijdt in de punten $(0, 0)$ en $(3, 0)$.

$$\frac{1}{3}x^2 - 4x \geq 0 \text{ voor } x \leq 0 \text{ of } x \geq 3 \text{ en } \frac{1}{3}x^2 - 4x < 0 \text{ voor } 0 < x < 3.$$

$$\text{Voor } x \leq 0 \text{ of } x \geq 3 \text{ geldt } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4x \text{ en } f'(x) = x^2 - 2\frac{2}{3}x + 4.$$

$$\text{Voor } 0 < x < 3 \text{ geldt } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 4x \text{ en } f'(x) = x^2 + 2\frac{2}{3}x - 4.$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim_{x \uparrow 0} (x^2 - 2\frac{2}{3}x + 4) = 4 \text{ en } \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} (x^2 + 2\frac{2}{3}x - 4) = -4$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan het linker deel van de grafiek in P is -4 en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan het rechter deel van de grafiek in P is 4 .

b De x -coördinaat van Q is 3 . $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9$, dus $Q(3, 9)$.

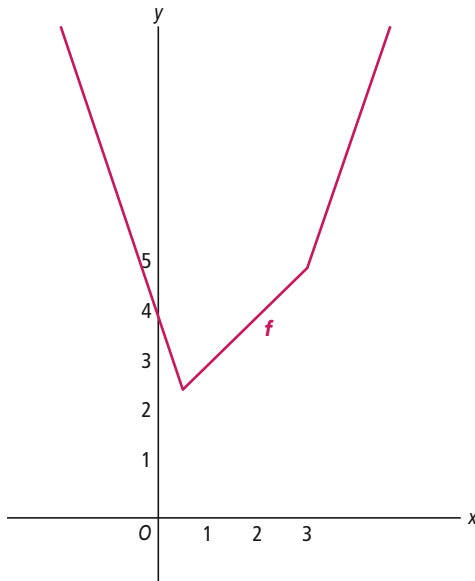
$$\lim_{x \uparrow 3} f'(x) = \lim_{x \uparrow 3} (x^2 + 2\frac{2}{3}x - 4) = 13 \text{ en } \lim_{x \downarrow 3} f'(x) = \lim_{x \downarrow 3} (x^2 - 2\frac{2}{3}x + 4) = 5$$

Vergelijkingen van de raaklijnen in Q zijn $y = 13x + b$ en $y = 5x + c$.

Invullen van de coördinaten van Q geeft $9 = 13 \cdot 3 + b$ en $9 = 5 \cdot 3 + c$.

Dus $b = -30$ en $c = -6$.

Vergelijkingen van de raaklijnen in Q zijn $y = 13x - 30$ (linker deel) en $y = 5x - 6$ (rechter deel).

13 a

- b** De figuur heeft een knik als $2x - 1 = 0$ of $x - 3 = 0$, dus bij $x = \frac{1}{2}$ en $x = 3$.
 $f(\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$ en $f(3) = 5$
 In de punten $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ en $(3, 5)$ heeft de grafiek van f een knik.
- c** Als $x \geq 3$ geldt $f(x) = 2x - 1 + x - 3$ ofwel $f(x) = 3x - 4$.
 Als $\frac{1}{2} \leq x < 3$ geldt $f(x) = 2x - 1 - x + 3$ ofwel $f(x) = x + 2$.
 Als $x < \frac{1}{2}$ geldt $f(x) = -2x + 1 - x + 3$ ofwel $f(x) = -3x + 4$.
- d** De extreme waarde is een minimum $f(\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$.

- 14** $f(0) = 2$ geeft $|b| + |-b| = 2|b| = 2$, dus $b = 1$.
 Omdat a en b positief zijn hoort het knikpunt $(2, 2)$ bij $ax - b = 0$.
 $2a - 1 = 0$ geeft $2a = 1$ ofwel $a = \frac{1}{2}$.

- X3 a** Als $x < a$, dan is $x - a < 0$ en is $|x - a| = a - x$.
 Dus geldt $f_a(x) = \frac{x - |x - a|}{x + |x - a|} = \frac{x - (a - x)}{x + (a - x)} = \frac{2x - a}{a} = \frac{2}{a}x - 1$.
 f_a is dan een lineaire functie en de grafiek een rechte lijn.
- b** De grafiek heeft een verticale asymptoot als $x + |x - a| = 0$.
 $|x - a| = -x$
 $x - a = x$ of $x - a = -x$
 $x = \frac{1}{2}a$
- c** De knik doet zich voor als $|x - a| = 0$ dus als $x = a$.
 $f_a(a) = \frac{a - |a - a|}{a + |a - a|} = \frac{a - 0}{a + 0} = 1$
 De grafiek heeft een knik in het punt $(a, 1)$.
- d** $f_a(p) = q$, dus $q = \frac{p - |p - a|}{p + |p - a|}$
 Omdat $p > 0$ is de noemer positief.
 Dan is $q = \frac{p - |p - a|}{p + |p - a|} \leq \frac{p + |p - a|}{p + |p - a|} = 1$ dus $q \leq 1$.

21 Afsluiting analyse

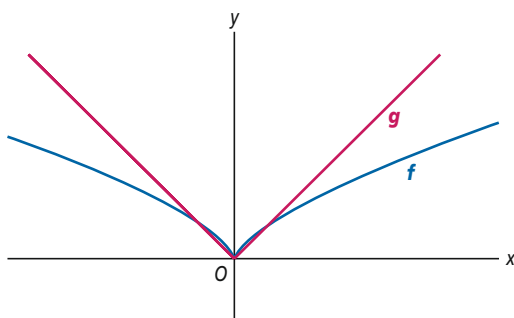
- X4 a** Voor A geldt $|\frac{1}{2}x - 4| = 0$, dus $x = 8$.
 $f(8) = 5$, dus $A(8, 5)$.
 Voor het rechterdeel geldt $x \geq 8$, dus $f(x) = 5 + (\frac{1}{2}x - 4)(2 - x)$.
 $f(x) = 5 + x - \frac{1}{2}x^2 - 8 + 4x$ of ook $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3$.
 $f'(x) = -x + 5$ en $f'(8) = -3$
 Een vergelijking van de raaklijn l is $y = -3x + b$.
 Invullen van de coördinaten van $A(8, 5)$ geeft $5 = -3 \cdot 8 + b$, dus $b = 29$.
 Een vergelijking van de raaklijn l is $y = -3x + 29$.
- b** Het tweede snijpunt ligt op de linker tak: $f(x) = 5 + (-\frac{1}{2}x + 4)(2 - x)$.
 $f(x) = 5 - x + \frac{1}{2}x^2 + 8 - 4x$ of ook $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 13$.
 $\frac{1}{2}x^2 - 5x + 13 = -3x + 29$
 $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 16 = 0$
 $x^2 - 4x - 32 = 0$
 $(x + 4)(x - 8) = 0$
 $x = -4$ of $x = 8$
 Voor het tweede snijpunt geldt $x = -4$.
 $f(-4) = \frac{1}{2} \cdot 16 - 5 \cdot -4 + 13 = 41$
 Het tweede snijpunt is $(-4, 41)$.

21.3 Extreme waarden en buigpunten

intro Voor drie waarden van x .
 f heeft twee maxima en twee minima.
 Dat geldt voor $x = 3$.

- 15 a** $f(x) = x^3 \cdot e^x$
 $f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$
 $x^2 \cdot e^x(3 + x) = 0$
 $x^2 = 0$ of $3 + x = 0$ ($e^x = 0$ heeft geen oplossing)
 $x = 0$ of $x = -3$
- b** Bij $x = 0$ heeft f geen extreme waarde.
- c** $f''(x) = 6x \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x + 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$
 $f''(x) = x^3 \cdot e^x + 6x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x$
 $f''(x) = 0$ geeft $x^3 + 6x^2 + 6x = 0$ ofwel $x(x^2 + 6x + 6) = 0$.
 $x = 0$ of $x^2 + 6x + 6 = 0$
 $x = 0$ of $x = -3 - \sqrt{3}$ of $-3 + \sqrt{3}$
- d** Voor deze waarden van x heeft de grafiek buigpunten.

16 a



b $f''(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, dus $f''(0)$ bestaat niet en ook $g'(0)$ niet.

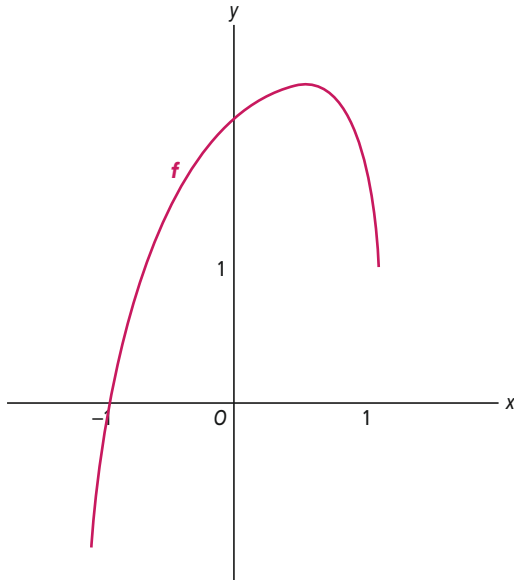
In de grafieken van f en g zit een knik bij $x = 0$.

c f en g hebben beide een minimum 0 voor $x = 0$.

17 a $5 - 4x^2 \geq 0$, dus $4x^2 \leq 5$ ofwel $x^2 \leq \frac{5}{4}$.

Het domein van f is $[-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5}]$.

b



c $f'(x) = 1 + \frac{-8x}{2\sqrt{5-4x^2}}$ ofwel $f'(x) = 1 - \frac{4x}{\sqrt{5-4x^2}}$

d $f'(x) = 0$ geeft $4x = \sqrt{5-4x^2}$.

$$16x^2 = 5 - 4x^2$$

$$20x^2 = 5$$

$$x^2 = \frac{1}{4}, \text{ dus } x = \frac{1}{2} \text{ of } x = -\frac{1}{2} \text{ (voldoet niet).}$$

$$f \text{ heeft een randminimum } f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$f \text{ heeft een maximum } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2} \text{ en een randminimum } f\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

18 a Voor het domein moet gelden $x > 0$ en $\ln(x) \neq 1$, dus $x \neq e$.

Het domein is $\langle 0, e \rangle \cup \langle e, \rightarrow \rangle$.

b $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\ln(x)} - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1$ (de grafiek nadert naar $(0, -1)$).

c $1 - \ln(x) = 0$ geeft een verticale asymptoot $x = e$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln(x)} - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1$$

De lijn $y = -1$ is een horizontale asymptoot.

21 Afsluiting analyse

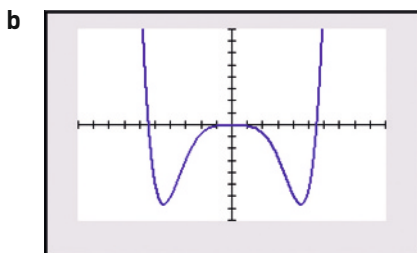
$$d \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (1 - \ln(x)) - \ln(x) \cdot -\frac{1}{x}}{(1 - \ln(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{1}{x(1 - \ln(x))^2}$$

$$\text{Als } x > 0 \text{ en } x \neq e \text{ dan is } f'(x) = \frac{1}{x(1 - \ln(x))^2} > 0$$

De afgeleide zal nooit nul zijn, dus heeft f geen extreme waarden.

19 a $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - 5x^4$
 $f'(x) = x^5 - 20x^3$
 $f''(x) = 5x^4 - 60x^2$
 $f''(x) = 0$ geeft $5x^2(x^2 - 12) = 0$.
 $x = 0$ of $x = \sqrt{12} (= 2\sqrt{3})$ of $x = -\sqrt{12} (= -2\sqrt{3})$



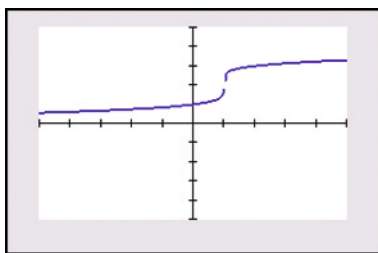
Uit de plot blijkt dat de grafiek geen buigpunt heeft als $x = 0$.

c $f(\sqrt{12}) = \frac{1}{6} \cdot 12^3 - 5 \cdot 12^2 = -432$ en ook $f(-\sqrt{12}) = -432$.
 De buigpunten zijn $(-2\sqrt{3}, -432)$ en $(2\sqrt{3}, -432)$.

20 a $g'(x) = \frac{1}{5}(x-1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{(x-1)^4}}$
 $g''(x) = \frac{1}{5} \cdot -\frac{4}{5} \cdot (x-1)^{-\frac{9}{5}} = \frac{-4}{25 \cdot \sqrt[5]{(x-1)^9}}$

$g''(x) = 0$ heeft geen oplossing.

$\lim_{x \uparrow 1} g'(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow 1} g'(x) = \infty$, dus de raaklijn in het punt $(1, 2)$ is verticaal,



De grafiek heeft een buigpunt $(1, 2)$.

b Een vergelijking van de buigraaklijn is $x = 1$.

21 a $f(x) = x^5 - 5x^4$
 $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$
 $5x^4 - 20x^3 = 0$
 $5x^3(x - 4) = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$
 Er is een maximum $f(0) = 0$ en een minimum $f(4) = -256$.

b $f'''(x) = 20x^3 - 60x^2$

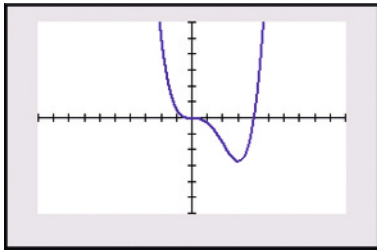
$$20x^3 - 60x^2 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

c



f'' heeft geen extreme waarde voor $x = 0$, dus is er alleen een buigpunt als $x = 3$. (Vensterinstelling $-10 \leq x \leq 10$ en $-300 \leq y \leq 300$.)

22 a $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot -x = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

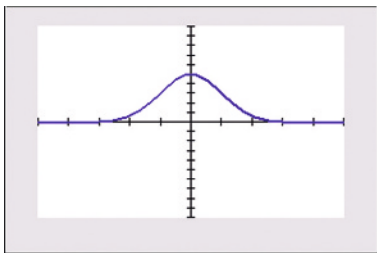
$$f''(x) = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot -x$$

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(-1 + x^2)$$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } x^2 = 1.$$

$$x = 1 \text{ of } x = -1$$



De buigpunten zijn $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ en $\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

b $f'(-1) = e^{-\frac{1}{2}}$ en $f'(1) = -e^{-\frac{1}{2}}$

Vergelijkingen van de buigraaklijnen zijn

$$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + b \text{ en } y = -e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + c.$$

Invullen van de coördinaten van de buigpunten geeft

$$e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 + b, \text{ dus } b = 2e^{-\frac{1}{2}} \text{ en } e^{-\frac{1}{2}} = -e^{-\frac{1}{2}} + c, \text{ dus } c = 2e^{-\frac{1}{2}}.$$

De vergelijkingen van de buigraaklijnen zijn $y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 2e^{-\frac{1}{2}}$ en

$$y = -e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 2e^{-\frac{1}{2}} \left(\text{of ook } y = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ en } y = -\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{e}} \right).$$

X5 a Er moet gelden $f_a(0) = 0$ en $f'_a(0) = 0$.

$$f_a(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

$$f'_a(x) = 2x e^{ax} + x^2 \cdot e^{ax} \cdot a$$

$$f'_a(x) = x e^{ax}(2 + ax) \text{ en } f'_a(0) = 0$$

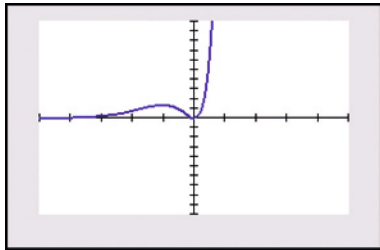
Dus voor elke waarde van a raakt de grafiek de x -as in $(0, 0)$.

21 Afsluiting analyse

b $f_2(x) = x^2 e^{2x}$

$f'_2(x) = x e^{2x}(2 + 2x)$

$f'_2(x) = 0$ als $x = 0$ of $x = -1$



Met een plot: maximum $f_2(-1) = \frac{1}{e^2}$ en minimum $f_2(0) = 0$.

c $f'_a(x) = x e^{ax}(2 + ax)$

$f'_a(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = -\frac{2}{a}$

$f_a(-\frac{2}{a}) = \frac{4}{a^2} e^{-2}$

$x_{top} = -\frac{2}{a}$ en $y_{top} = \frac{4}{a^2} e^{-2} = x_{top}^2 \cdot e^{-2} = x_{top}^2 \cdot \frac{1}{e^2}$

De top ligt dus op de parabool $y = \frac{1}{e^2} x^2$.

d $g'_a(x) = 1 \cdot e^{ax} + x \cdot a e^{ax}$ ofwel $g'_a(x) = (ax + 1) \cdot e^{ax}$

$g''_a(x) = a \cdot e^{ax} + (ax + 1) \cdot a e^{ax}$

$g''_a(x) = a \cdot e^{ax} + (a^2 x + a) \cdot e^{ax}$ ofwel $g''_a(x) = (a^2 x + 2a) \cdot e^{ax}$

Voor buigpunten geldt $g''_a(x) = 0$.

$a^2 x + 2a = 0$ of $e^{ax} = 0$ (geen oplossing)

$ax = -2$

$x = -\frac{2}{a}$

$g_a(-\frac{2}{a}) = \frac{-2}{a} \cdot e^{a \cdot (-\frac{2}{a})} = \frac{-2}{a} \cdot e^{-2}$ Het buigpunt is $(-\frac{2}{a}, \frac{-2}{a} \cdot e^{-2})$.

De buigpunten liggen op de lijn $y = e^{-2} \cdot x$.

X6 $2 \sin(x) \geq 0$ op $[0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$ en $2 \sin(x) < 0$ op $\langle \pi, 2\pi \rangle$ en $\langle 3\pi, 3\frac{1}{2}\pi \rangle$.

$2 \sin(x) \geq 0$

$f(x) = x + 2 \sin(x)$

$f'(x) = 1 + 2 \cos(x)$

$f'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 2\frac{2}{3}\pi$

$2 \sin(x) < 0$

$f(x) = x - 2 \sin(x)$

$f'(x) = 1 - 2 \cos(x)$

$f'(x) = 0$ geeft $\cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = 1\frac{2}{3}\pi$

Maxima $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ en $f(2\frac{2}{3}\pi) = 2\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$

Randminimum $f(0) = 0$ en randmaximum $f(3\frac{1}{2}\pi) = 3\frac{1}{2}\pi - 2$.

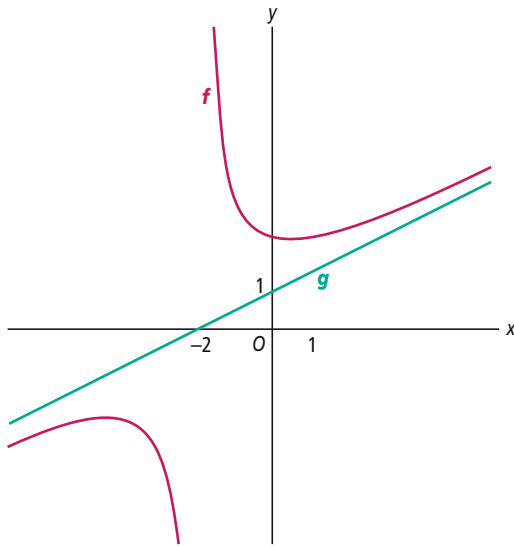
Minima treden op waar de grafiek een knik heeft, dus als $2 \sin(x) = 0$.

Minima $f(\pi) = \pi$ en $f(2\pi) = 2\pi$ en $f(3\pi) = 3\pi$.

21.4 Scheve asymptoten

intro De lijnen met vergelijking $y = x$ en $y = -x$.

23 a



- b** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+2} = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+2} = 0$, dus voor hele grote of hele kleine waarden van x komt de grafiek van f steeds dichterbij die van $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

- 24** $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, dus voor grote waarden van x komt de grafiek van f steeds dichterbij de lijn $y = 6x - 5$.

25 a $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x+2}$

$$f(x) = \frac{(x+3)(x+2)}{x+2} + \frac{4}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x+2} + \frac{4}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 10}{x+2}$$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 3 + \frac{4}{x+2} - (x+3) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+2} = 0$ en

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+2} = 0$$

- c** Dat is de lijn $y = x + 3$.

- 26 a** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1} = 0$, dus de lijn met vergelijking $y = 8 - 12x$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f .

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{4 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{4 - 0} = 0$; net zo is $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{4x^3 - 1} = 0$.

De lijn $y = 9x$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f .

21 Afsluiting analyse

$$\begin{aligned}
 27 \text{ a } f(x) - (3x - 16) &= \frac{3x^2 - 7x + 11}{x + 3} - (3x - 16) \\
 &= \frac{3x^2 - 7x + 11}{x + 3} - \frac{(3x - 16)(x + 3)}{x + 3} \\
 &= \frac{3x^2 - 7x + 11}{x + 3} - \frac{3x^2 - 7x - 48}{x + 3} = \frac{59}{x + 3} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{59}{x + 3} &= 0 \left(\text{en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{59}{x + 3} = 0 \right), \text{ dus de lijn } y = 3x - 16 \text{ is een scheve} \\
 &\text{asymptoot van de grafiek van } f.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27 \text{ b } g(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) &= \frac{15 - x^2}{2x + 3} - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \\
 &= \frac{15 - x^2}{2x + 3} - \frac{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)(2x + 3)}{2x + 3} \\
 &= \frac{15 - x^2}{2x + 3} - \frac{-x^2 + 2\frac{1}{4}}{2x + 3} = \frac{12\frac{3}{4}}{2x + 3} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12\frac{3}{4}}{2x + 3} &= 0 \left(\text{en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12\frac{3}{4}}{2x + 3} = 0 \right), \text{ dus de lijn met vergelijking } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \\
 &\text{is een scheve asymptoot van de grafiek van } g.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28 \text{ a } 2x^2 \text{ is vervangen door } 2x(x + 4) &= 2x^2 + 8x. \\
 \text{Daarvoor moet gecorrigeerd worden door er } 8x &\text{ af te trekken.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28 \text{ b } \frac{2x(x + 4) - 8x + 11x - 5}{x + 4} &= \\
 \frac{2x(x + 4)}{x + 4} + \frac{3x - 5}{x + 4} &= \\
 2x + \frac{3x - 5}{x + 4} &
 \end{aligned}$$

28 c Op de puntjes moet 12 staan.

$$\begin{aligned}
 28 \text{ d } 2x + \frac{3(x + 4) - 12 - 5}{x + 4} &= \\
 2x + 3 - \frac{17}{x + 4} & \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{17}{x + 4} &= 0 \left(\text{en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{17}{x + 4} = 0 \right).
 \end{aligned}$$

28 e De scheve asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 2x + 3$.

$$\begin{aligned}
 29 \text{ a } f(x) &= \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 4} = \frac{x(x + 4) - 4x + 5x - 3}{x + 4} \\
 f(x) &= x + \frac{x - 3}{x + 4} \text{ ofwel } f(x) = x + \frac{x + 4 - 4 - 3}{x + 4} \\
 f(x) &= x + 1 - \frac{7}{x + 4} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x + 4} &= 0 \left(\text{en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x + 4} = 0 \right) \\
 \text{De scheve asymptoot heeft vergelijking } y &= x + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } g(x) &= \frac{x^2 - 3x}{x - 2} = \frac{x(x - 2) + 2x - 3x}{x - 2} \\ g(x) &= x - \frac{x}{x - 2} \text{ ofwel } g(x) = x - \frac{x - 2 + 2}{x - 2} \\ g(x) &= x - 1 - \frac{2}{x - 2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x - 2} &= 0 \left(\text{en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x - 2} = 0 \right) \\ \text{De scheve asymptoot heeft vergelijking } y &= x - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } h(x) &= \frac{x^2}{2x - 1} = \frac{\frac{1}{2}x(2x - 1) + \frac{1}{2}x}{2x - 1} \\ h(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}x}{2x - 1} \text{ ofwel } h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{4}(2x - 1) + \frac{1}{4}}{2x - 1} \\ h(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}}{2x - 1} &= 0 \left(\text{en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{4}}{2x - 1} = 0 \right) \\ \text{De scheve asymptoot heeft vergelijking } y &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= \frac{4x^3 - 2x}{2x^2 + 1} = \frac{2x(2x^2 + 1) - 2x - 2x}{2x^2 + 1} \text{ ofwel} \\ k(x) &= 2x - \frac{4x}{2x^2 + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2 + 0} = 0 \left(\text{en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2x^2 + 1} = 0 \right). \\ \text{De scheve asymptoot heeft vergelijking } y &= 2x. \end{aligned}$$

30 a Als een grafiek een scheve asymptoot heeft, nadert de helling van de grafiek tot de helling van de asymptoot.

$$\begin{aligned} \text{b } f'(x) &= \frac{6x(x + 1) - 3x^2 \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 2x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{6}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 + 0}{1 + 0 + 0} = 3 \text{ dus } a = 3. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x + 1} - 3x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-3}{1 + 0} = -3 \end{aligned}$$

Dat is gelijk aan b , omdat dan $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

21 Afsluiting analyse

31 a $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2 - 0 = 2$$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \ln(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\ln(x)) = -\infty.$

Er is geen scheve asymptoot.

X7 a $f'(x) = \frac{1}{2} + e^{2-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2-\frac{1}{2}x}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } e^{2-\frac{1}{2}x} = 1.$$

$$2 - \frac{1}{2}x = 0, \text{ dus } x = 4.$$

$$\text{Het minimum is } f(4) = 2 + 1 - 1 = 2$$

b $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + e^{2-\frac{1}{2}x}$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{2-\frac{1}{2}x} = 0.$

De scheve asymptoot heeft vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 1.$

c Voor $a > 0$ is $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{2-ax} = 0$ en voor $a < 0$ is $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-ax} = 0.$

De scheve asymptoot heeft daarom als vergelijking $y = ax - 3.$

De asymptoot snijdt de verticale as onder een hoek van 30° , dus de x -as onder een hoek van 60° en $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}.$

Hieruit volgt dat $a = \sqrt{3}$ of $a = -\sqrt{3}.$

X8 a De grafiek van f_2 heeft een verticale asymptoot als $2x + 4 = 0$ (en $3x^2 - 2x - 14 \neq 0$).

Een vergelijking van de verticale asymptoot is $x = -2.$

$$f_2(x) = \frac{3x^2 - 2x - 14}{2x + 4}$$

$$f_2(x) = \frac{1\frac{1}{2}x(2x + 4) - 6x - 2x - 14}{2x + 4} \text{ ofwel } f_2(x) = 1\frac{1}{2}x - \frac{8x + 14}{2x + 4}$$

$$f_2(x) = 1\frac{1}{2}x - \frac{4(2x + 4) - 16 + 14}{2x + 4} \text{ dus } f_2(x) = 1\frac{1}{2}x - 4 + \frac{2}{2x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x + 4} = 0 \left(\text{en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x + 4} = 0 \right)$$

Een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = 1\frac{1}{2}x - 4.$

Voor de hoek α tussen de scheve asymptoot en de x -as geldt: $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}.$

$\alpha = 56,309\dots^\circ.$

De hoek met de verticale asymptoot $x = -2$ is dan $90^\circ - 56,309\dots^\circ \approx 34^\circ.$

b $f_{-3}(x) = \frac{3x^2 - 2x - 14}{-3x + 4}$

$$f_{-3}(x) = \frac{-x(-3x + 4) + 4x - 2x - 14}{-3x + 4} \text{ ofwel } f_{-3}(x) = -x + \frac{2x - 14}{-3x + 4}$$

$$f_{-3}(x) = -x + \frac{-\frac{2}{3}(-3x + 4) + 2\frac{2}{3} - 14}{-3x + 4} \text{ dus } f_{-3}(x) = -x - \frac{2}{3} + \frac{-11\frac{1}{3}}{-3x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-11\frac{1}{3}}{-3x + 4} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-11\frac{1}{3}}{-3x + 4} = 0$$

Een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = -x - \frac{2}{3}.$

Deze snijdt de y -as in het punt $(0, -\frac{2}{3}).$

$$c \quad f_p(x) = \frac{3x^2 - 2x - 14}{px + 4} = \frac{\frac{3x}{p}(px + 4) - \frac{12x}{p} - 2x - 14}{px + 4} = \frac{3}{p}x + \frac{-\frac{12x}{p} - 2x - 14}{px + 4} =$$

De scheve asymptoot gaat door de oorsprong als $\lim_{x \rightarrow \infty} (f_p(x) - \frac{3}{p}x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{12x}{p} - 2x - 14}{px + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{12}{p} - 2\right)x - 14}{px + 4}$$

Deze limiet is 0 als $-\frac{12}{p} - 2 = 0$, dus als $p = -6$.

21.5 Functies onderzoeken

intro Functie: domein en bereik, nulpunten en extremen, stijgen en dalen, even en oneven, periodiciteit.

Grafiek: toppen, buigpunten, asymptoten, knik, perforatie en symmetrie.

$$32 \quad a \quad f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x \cdot (1 + e^x) - (1 - e^x) \cdot e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1 + e^x)^2}$$

Omdat $-2e^x \neq 0$ heeft $f'(x) = 0$ geen oplossing, dus er zijn geen extreme waarden.

$$b \quad f''(x) = \frac{-2e^x(1 + e^x)^2 - (-2e^x \cdot 2(1 + e^x) \cdot e^x)}{(1 + e^x)^4}$$

Teller en noemer delen door $1 + e^x$ geeft

$$f''(x) = \frac{-2e^x(1 + e^x) - (-2e^x \cdot 2e^x)}{(1 + e^x)^3} = \frac{2e^{2x} - 2e^x}{(1 + e^x)^3}$$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } 2e^{2x} - 2e^x = 0 \text{ (en } (1 + e^x)^3 \neq 0)$$

$$2e^x(e^x - 1) = 0$$

$$e^x = 1 \text{ dus } x = 0$$

$$f(0) = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0, \text{ dus het buigpunt is } (0, 0).$$

$$c \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Dus een horizontale asymptoot $y = -1$ naar rechts en een horizontale asymptoot $y = 1$ naar links.

$$d \quad f(-a) = \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}}$$

Teller en noemer vermenigvuldigen met e^a geeft $f(-a) = \frac{e^a - 1}{e^a + 1}$

$$f(-a) = -\frac{1 - e^a}{1 + e^a} = -f(a).$$

Dit betekent dat de grafiek puntsymmetrisch is in $(0, 0)$.

21 Afsluiting analyse

33 a $\sin(2x) - 2\sin(x) = 0$

$$2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x) = 0$$

$$2\sin(x) \cdot (\cos(x) - 1) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 1$$

$$x = 0 + k \cdot \pi \text{ of } x = 0 + k \cdot 2\pi$$

De nulpunten van f op het interval $[-\pi, 2\pi]$ zijn $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$ en $x = 2\pi$.

b $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x)$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2\cos(2x) - 2\cos(x) = 0$$

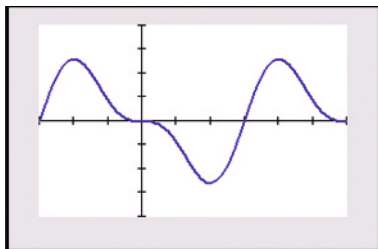
$$2\cos(2x) = 2\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos(x)$$

$$2x = x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -x + k \cdot 2\pi$$

$$x = 0 + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$x = 0 + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$



Op het interval $[-\pi, 2\pi]$ is er een minimum $f(\frac{2}{3}\pi) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en twee maxima

$$f(-\frac{2}{3}\pi) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } f(1\frac{1}{3}\pi) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

c $f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x)$

$$f(-x) = -\sin(2x) - 2\sin(x)$$

$$f(-x) = -(\sin(2x) - 2\sin(x)) = -f(x) \text{ voor elke waarde van } x.$$

34 a Het domein is $\mathbb{R}$, want een derdemachtswortel bestaat voor elk getal.

b $f(x) = \sqrt[3]{4x - x^2} = (4x - x^2)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(4x - x^2)^{-\frac{2}{3}}(4 - 2x) = \frac{4 - 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(4x - x^2)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 4 - 2x = 0 \text{ ofwel } x = 2.$$

$$f(2) = \sqrt[3]{4}, \text{ dus de top is het punt } (2, \sqrt[3]{4}).$$

c $f(x) = 0$ geeft $x(4 - x) = 0$, dus $x = 0$ of $x = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 2x}{3 \sqrt[3]{(4x - x^2)^2}} = \infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow 4} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - 2x}{3 \sqrt[3]{(4x - x^2)^2}} = -\infty$$

De raaklijnen zijn verticaal: $x = 0$ en $x = 4$.

d $f(2 - p) = \sqrt[3]{4(2 - p) - (2 - p)^2}$

$$= \sqrt[3]{8 - 4p - (4 - 4p + p^2)} = \sqrt[3]{4 - p^2}$$

$$f(2 + p) = \sqrt[3]{4(2 + p) - (2 + p)^2}$$

$$= \sqrt[3]{8 + 4p - (4 + 4p + p^2)} = \sqrt[3]{4 - p^2}$$

e De grafiek van f is symmetrisch in de lijn $x = 2$.

35 a $f_p'(x) = p \cdot e^x - 1$

$$f_p'(x) = 0 \text{ geeft } p \cdot e^x - 1 = 0 \text{ dus } e^x = \frac{1}{p}$$

Er zijn geen oplossingen als $p < 0$.

- b** Er moet gelden $f_p(x) = 0$ én $f_p'(x) = 0$.
 $p \cdot e^x - x - 1 = 0$ én $p \cdot e^x - 1 = 0$.
 Aftrekken van de vergelijkingen geeft $x = 0$.
 Daaruit volgt dat $p \cdot e^0 - 1 = 0$, dus $p = 1$.
- c** $\lim_{x \rightarrow -\infty} p \cdot e^x = 0$, dus voor elke waarde van p is de lijn $y = -x - 1$ de scheve asymptoot van de grafiek van f_p .
- d** $f_p'(x) = p \cdot e^x - 1$
 $f_p''(x) = p \cdot e^x$
 $f_p''(x) = 0$ heeft geen oplossing voor $p \neq 0$.
 Er zijn dus geen buigpunten.

- 36 a** Dan moet gelden $e^x - p > 0$ ofwel $e^x > p$ voor elke waarde van x .

Dat is het geval als $p \leq 0$.

- b** $f_e(x) = -2x + \ln(e^x - e)$

$$f_e'(x) = -2 + \frac{e^x}{e^x - e}$$

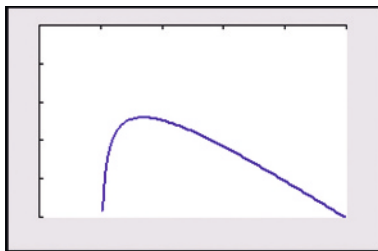
$$f_e'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{e^x}{e^x - e} = 2$$

$$e^x = 2(e^x - e)$$

$$e^x = 2e^x - 2e$$

$$e^x = 2e$$

$$x = \ln(2e) = 1 + \ln(2)$$



Uit de plot blijkt dat f_e bij deze waarde van x een maximum heeft.

- c** $f_0(x) = -2x + \ln(e^x) = -2x + x = -x$. Het is de rechte lijn $y = -x$.

- d** $\lim_{x \rightarrow \infty} (f_p(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \ln(e^x - p))$

Vervang x door $\ln(e^x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(e^x - p) - \ln(e^x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{e^x - p}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 - \frac{p}{e^x}\right) = \ln(1 - 0) = 0.$$

Dus voor elke waarde van $p \neq 0$ is de lijn $y = -x$ een scheve asymptoot van de grafiek van f_p .

- 37** De grafiek van $f(x) = |x|(x - 3)$ heeft voor elke waarde van p altijd het punt $(0, 0)$ gemeenschappelijk met de lijn $y = px$.

Als $x \geq 0$ geldt $f(x) = x(x - 3) = x^2 - 3x$ en $\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} (2x - 3) = -3$.

Als $x < 0$ geldt $f(x) = -x(x - 3) = -x^2 + 3x$ en $\lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim_{x \uparrow 0} (-2x + 3) = 3$.

De hellingen van de linker en rechter raaklijnen zijn 3 respectievelijk -3 .

Als $p = 0$ dan is naast $(0, 0)$ ook $(3, 0)$ een snijpunt.

Als $0 < p \leq 3$ is er nog een tweede gemeenschappelijk punt in het eerste kwadrant.

Als $p > 3$, dan is er ook nog een derde gemeenschappelijk punt in het derde kwadrant.

Als $-3 < p < 0$ dan is er een tweede snijpunt in het vierde kwadrant.

21 Afsluiting analyse

Als $p \leq -3$ dan is $(0, 0)$ het enige snijpunt.

Conclusie: voor $p \leq -3$ is er één gemeenschappelijk punt en voor $-3 < p \leq 3$ zijn er twee gemeenschappelijke punten.

$$\times 9 \text{ a } f'_p(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot px - p \ln(x)}{(px)^2} = \frac{p - p \ln(x)}{(px)^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $\ln(x) = 1$, dus $x = e$.

$$f(e) = \frac{\ln(e)}{pe} = \frac{1}{pe}$$

De maximale y -coördinaat is 2 als $\frac{1}{pe} = 2$ dus als $p = \frac{1}{2e}$.

$$\text{b } f_p(x) = 0 \text{ geeft } x = 1.$$

$$f'(1) = \frac{p - p \cdot 0}{p^2} = \frac{1}{p}$$

De richtingscoëfficiënt is $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$ of $\tan(120^\circ) = -\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{p} = \sqrt{3} \text{ geeft } p = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ en } \frac{1}{p} = -\sqrt{3} \text{ geeft } p = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{c } f_{-2}(x) = \frac{\ln(x)}{-2x}$$

$$\frac{\ln(x)}{-2x} = a \text{ geeft snijpunt } B\left(x_B, -\frac{\ln(x_B)}{2x_B}\right) \text{ en } C\left(x_C, -\frac{\ln(x_C)}{2x_C}\right) \text{ met } x_C = 3x_B.$$

$$\frac{\ln(x_B)}{2x_B} = \frac{\ln(x_C)}{2x_C} \text{ geeft } \frac{\ln(x_B)}{2x_B} = \frac{\ln(3x_B)}{2 \cdot 3x_B}$$

$$\frac{\ln(x_B)}{x_B} = \frac{\ln(3) + \ln(x_B)}{3x_B}$$

$$3 \ln(x_B) = \ln(3) + \ln(x_B)$$

$$2 \ln(x_B) = \ln(3)$$

$$\ln(x_B) = \frac{1}{2} \ln(3) = \ln(\sqrt{3}), \text{ dus } x_B = \sqrt{3}.$$

$$a = -\frac{\ln(x_B)}{2x_B} = -\frac{\ln(\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$$

$\times 10 \text{ a}$ Zowel de teller als de noemer zijn voor elke waarde van x positief.

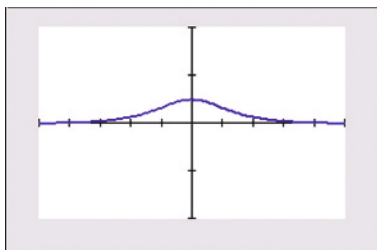
$$\text{b } g'(x) = \frac{e^x(1 + e^{2x}) - e^x \cdot 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{e^x + e^{3x} - 2e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2}$$

$$g'(x) = 0 \text{ geeft } e^x - e^{3x} = 0.$$

$$e^x = e^{3x}$$

$$x = 3x$$

$$x = 0$$



$$\text{Uit de plot blijkt dat het maximum } g(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- c Aangetoond moet worden dat $g(-x) = g(x)$ voor elke waarde van x .

$$g(-x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$$

Teller en noemer vermenigvuldigen met e^{2x} geeft $g(-x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{d } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{-x} - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + e^{2x}}{e^x(1 + e^{2x})} - \frac{e^x \cdot e^x}{e^x(1 + e^{2x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^x(1 + e^{2x})} \right) = 0 \end{aligned}$$

21.6 Gemengde opdrachten

38 a $f'_a(x) = e^x - a$

$f'_a(x) = 0$ geeft $e^x - a = 0$ ofwel $e^x = a$.

Hieruit volgt dat $x = \ln(a)$ en dan moet $a > 0$.

De coördinaten van de top zijn $(\ln(a), a - a \ln(a))$.

- b $x = 0$ geeft $\ln(a) = 0$, dus $a = 1$.

- c Als f_a de x -as raakt, dan moet gelden $f_a(x) = 0$ én $f'_a(x) = 0$.

$$e^x - ax = 0 \text{ en } e^x - a = 0$$

$$e^x = ax \text{ en } e^x = a$$

$$ax = a, \text{ dus } x = 1 \text{ en } a = e.$$

39 a $f_0(x) = \frac{(x-0)(x-0)}{x} = \frac{x^2}{x}$

Voor $x \neq 0$ is $f_0(x) = x$.

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \uparrow 0} x = 0 \text{ en ook } \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \downarrow 0} x = 0,$$

De grafiek is de lijn $y = x$ met een perforatie bij $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{b } f_a(x) &= \frac{(x-a)(x-9a)}{x-10a} = \frac{x^2 - 10ax + 9a^2}{x-10a} \\ f'_a(x) &= \frac{(2x-10a)(x-10a) - (x^2 - 10ax + 9a^2) \cdot 1}{(x-10a)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 30ax + 100a^2 - x^2 + 10ax - 9a^2}{(x-10a)^2} \\ &= \frac{x^2 - 20ax + 91a^2}{(x-10a)^2} = \frac{(x-7a)(x-13a)}{(x-10a)^2} \end{aligned}$$

$f'_a(x) = 0$ geeft $x = 7a$ of $x = 13a$

$$f_a(7a) = \frac{(7a-a)(7a-9a)}{7a-10a} = \frac{6a \cdot -2a}{-3a} = 4a$$

$$f_a(13a) = \frac{(13a-a)(13a-9a)}{13a-10a} = \frac{12a \cdot 4a}{3a} = 16a$$

De toppen zijn $(7a, 4a)$ en $(13a, 16a)$.

- c Voor de toppen $(7a, 4a)$ geldt $x = 7a$ en $y = 4a = 4 \cdot \frac{x}{7} = \frac{4}{7}x$.

Voor de toppen $(13a, 16a)$ geldt $x = 13a$ en $y = 16a = 16 \cdot \frac{x}{13} = \frac{16}{13}x$.

De toppen liggen op de lijnen $y = \frac{4}{7}x$ en $y = \frac{16}{13}x$.

21 Afsluiting analyse

- 40 a** In het raakpunt moet gelden $f(x) = 0$ en $f'(x) = 0$.

$f(x) = 0$ geeft $4(x^2 - 2x + 1) = 0$ ofwel $(x - 1)^2 = 0$, dus $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(8x - 8)(2x - 3) - 2(4x^2 - 8x + 4)}{(2x - 3)^2} \\ &= \frac{16x^2 - 40x + 24 - 8x^2 + 16x - 8}{(2x - 3)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 24x + 16}{(2x - 3)^2} = \frac{8(x^2 - 3x + 2)}{(2x - 3)^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ geeft $(x - 1)(x - 2) = 0$, dus $x = 1$ of $x = 2$.

De grafiek raakt de x -as in het punt $(1, 0)$.

- b** Voor een verticale asymptoot moet gelden $2x - 3 = 0$.

De verticale asymptoot heeft als vergelijking $x = 1\frac{1}{2}$.

De vergelijking van de scheve asymptoot vind je met uitdelen:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 3}$$

$$f(x) = \frac{2x(2x - 3) + 6x - 8x + 4}{2x - 3}$$

$$f(x) = 2x - \frac{2x - 4}{2x - 3} \text{ ofwel } f(x) = 2x - \frac{2x - 3 - 1}{2x - 3}$$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x - 3} = 0 \left(\text{en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3} = 0 \right)$$

De scheve asymptoot heeft als vergelijking $y = 2x - 1$.

- c** De oppervlakte is

$$\begin{aligned} -\int_0^1 f(x) dx &= -\int_0^1 \left(2x - 1 + \frac{1}{2x - 3} \right) dx = -\left[x^2 - x + \frac{1}{2} \ln(|2x - 3|) \right]_0^1 \\ &= -(1 - 1 + \frac{1}{2} \ln(1)) + (0 - 0 + \frac{1}{2} \ln(3)) = \frac{1}{2} \ln(3) \text{ (of } \ln(\sqrt{3})). \end{aligned}$$

- d** Er is een perforatie als teller en noemer beide 0 zijn.

De teller is 0 als $x = 1$ (zie a) en de noemer is 0 voor $x = \frac{1}{2}a$.

Voor $a = 2$ heeft de grafiek een perforatie.

- 41 a** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 18$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$f''(x) = 0$ als $6x - 6 = 0$, dit geeft $x = 1$.

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 = -20$$

De coördinaten van het buigpunt zijn $(1, -20)$.

- b** Door de grafiek 20 omhoog en 1 naar links te verschuiven ontstaat de grafiek van een functie g met het buigpunt in $(0, 0)$.

Dan moet bewezen worden dat de grafiek van g symmetrisch is in $(0, 0)$ door aan te tonen dat g een oneven functie is.

$$g(x) = f(x + 1) + 20$$

$$g(x) = (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 - 18(x + 1) + 20$$

$$g(x) = (x + 1)((x + 1)^2 - 3(x + 1) - 18) + 20$$

$$g(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 - 18) + 20$$

$$g(x) = (x + 1)(x^2 - x - 20) + 20$$

$$g(x) = x^3 - x^2 - 20x + x^2 - x - 20 + 20$$

$$g(x) = x^3 - 21x$$

$g(x)$ is een oneven functie, dus symmetrisch in $(0, 0)$.

- c $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x$
 $f(x) = x(x^2 - 3x - 18)$
 $f(x) = x(x + 3)(x - 6)$
 $f(x) = 0$ geeft $x = -3$ of $x = 0$ of $x = 6$.
 $A(-3, 0)$, $O(0, 0)$ en $B(6, 0)$
De middelloodlijn van lijnstuk OA heeft vergelijking $x = -1\frac{1}{2}$.
 $f(-1\frac{1}{2}) = -1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot -7\frac{1}{2} = 16\frac{7}{8}$, dus $C(-1\frac{1}{2}, 16\frac{7}{8})$.
 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 18$
De raaklijn in C heeft richtingscoëfficiënt
 $f'(-1\frac{1}{2}) = 3 \cdot (-1\frac{1}{2})^2 - 6 \cdot -1\frac{1}{2} - 18 = -2\frac{1}{4}$.
De lijn BC heeft richtingscoëfficiënt $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{16\frac{7}{8} - 0}{-1\frac{1}{2} - 6} = -2\frac{1}{4}$, dus de
raaklijn gaat door B .

Onderzoeksoopdrachten

- 42 a f_a is niet gedefinieerd als $a + \sin(x) \leq 0$ voor elke waarde van x .
Omdat voor elke waarde van x geldt dat $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, is dat het geval als
 $a \leq -1$.
- b Er moet dan gelden $f_a(x) = 0$ en $f'_a(x) = 0$.
 $f_a(x) = 0$ geeft $f'_a(x) = \ln(a + \sin(x)) = 0$.
 $a + \sin(x) = 1$
 $f'_a(x) = \frac{\cos(x)}{a + \sin(x)}$
 $f'_a(x) = 0$ geeft $\cos(x) = 0$, dus $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
Voor deze waarden van x is $\sin(x) = -1$ of $\sin(x) = 1$.
Dan moet $a + 1 = 1$ of $a - 1 = 1$.
Dit geeft $a = 0$ of $a = 2$.
- c *Buigpunten*
Er zijn buigpunten als $f''(x) = 0$.
 $f''_a(x) = \frac{-\sin(x)(a + \sin(x)) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(a + \sin(x))^2} = \frac{-a \sin(x) - 1}{(a + \sin(x))^2}$
 $f''_a(x) = 0$ geeft $\sin(x) = -\frac{1}{a}$ mits $\sin(x) \neq -a$.
Er zijn oplossingen als $-1 < -\frac{1}{a} < 1$ of ook $-1 < \frac{1}{a} < 1$.
(voor $-\frac{1}{a} = 1$ (dus $a = -1$) en $-\frac{1}{a} = -1$ (dus $a = 1$) zijn teller en noemer van $f''_a(x)$ beide 0).
Dus $a < -1$ of $a > 1$.
Voor $a \leq -1$ is de functie niet gedefinieerd.
Conclusie: als $a > 1$ heeft de grafiek van f_a buigpunten.
Verticale asymptoten
Er zijn verticale asymptoten als de noemer nul is, dus als de vergelijking
 $a + \sin(x) = 0$ oplossingen heeft.
 $\sin(x) = -a$
 $-1 \leq a \leq 1$ ($a = -1$ voldoet niet, want dan is f_a niet gedefinieerd)
Conclusie: als $-1 < a \leq 1$ heeft de grafiek van f_a verticale asymptoten.

21 Afsluiting analyse

43 $f_a(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x - a} = \frac{(x+1)(x-7)}{x-a}$

Verticale asymptoot

Er is een verticale asymptoot als $x - a = 0$ en $x^2 - 6x - 7 \neq 0$.

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x-7)(x+1) = 0$$

$$x = 7 \text{ of } x = -1$$

Conclusie: er is een verticale asymptoot voor $a \neq -1$ en $a \neq 7$.

Scheve asymptoot

Er is een scheve asymptoot met vergelijking $y = mx + n$ als

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f_a(x) - (mx + n)) = 0 \text{ en } a \neq -1 \text{ en } a \neq 7.$$

$$f_a(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x - a} \text{ ofwel } f_a(x) = \frac{x^2 - ax + ax - 6x - 7}{x - a}$$

$$f_a(x) = \frac{x(x-a) + ax - 6x - 7}{x - a}$$

$$f_a(x) = x + \frac{ax - 6x - 7}{x - a}$$

$$f_a(x) = x + \frac{(a-6)x - (a-6)a + (a-6)a - 7}{x - a}$$

$$f_a(x) = x + a - 6 + \frac{(a-6)a - 7}{x - a}$$

$$f_a(x) = x + a - 6 + \frac{a^2 - 6a - 7}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 - 6a - 7}{x - a} = 0$$

Conclusie: er is een scheve asymptoot met vergelijking $y = x + a - 6$ voor $a \neq -1$ en $a \neq 7$.

Perforatie

Voor $a = -1$ en $a = 7$ is de grafiek een rechte lijn met een perforatie.

Voor $a = -1$ is dat de lijn $y = x - 7$ met een perforatie in het punt $(-1, -8)$.

Voor $a = 7$ is dat de lijn $y = x + 1$ met een perforatie in het punt $(7, 8)$.

Samenvatting

S1 a $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 + x - 2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}$

$$\lim_{x \uparrow -2} \frac{x(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \uparrow -2} \frac{x(x-1)}{x-2} = \frac{-2 \cdot -3}{-4} = 1\frac{1}{2} \text{ en ook}$$

$$\lim_{x \downarrow -2} \frac{x(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = 1\frac{1}{2}, \text{ dus een perforatie in } (-2, 1\frac{1}{2}).$$

b Voor $x \geq \frac{1}{2}$ geldt $g(x) = \frac{2x-1}{2-4x} = -\frac{2x-1}{2(2x-1)}$ en voor $x < \frac{1}{2}$ geldt

$$g(x) = \frac{-(2x-1)}{2-4x} = \frac{2x-1}{2(2x-1)}$$

$$\lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2(2x-1)} = \lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ en } \lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} -\frac{2x-1}{2(2x-1)} = \lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

De grafiek van g heeft een sprong bij $x = \frac{1}{2}$.

S2 $|x + 3| = x + 3$ voor $x \geq -3$ en $|x + 3| = -x - 3$ voor $x < -3$.
 $2 - 4x \geq 0$ geeft $-4x \geq -2$, dus $x \leq \frac{1}{2}$.
 $|2 - 4x| = 2 - 4x$ voor $x \leq \frac{1}{2}$ en $|2 - 4x| = -2 + 4x$ voor $x > \frac{1}{2}$.
 Voor $x < -3$ geldt $f(x) = -x - 3 - (2 - 4x)$ ofwel $f(x) = -x - 3 - 2 + 4x$,
 dus $f(x) = 3x - 5$.
 Voor $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$ geldt $f(x) = x + 3 - (2 - 4x)$ ofwel $f(x) = x + 3 - 2 + 4x$, dus
 $f(x) = 5x + 1$.
 Voor $x > \frac{1}{2}$ geldt $f(x) = x + 3 - (-2 + 4x)$ ofwel $f(x) = x + 3 + 2 - 4x$, dus
 $f(x) = -3x + 5$.

S3 $f(x) = x|x^2 - x - 2| = x|(x + 1)(x - 2)|$
 $y = (x + 1)(x - 2)$ is de vergelijking van een dalparabool.
 Voor $-1 < x < 2$ is $(x + 1)(x - 2) < 0$ en voor $x \leq -1$ of $x \geq 2$ is
 $(x + 1)(x - 2) \geq 0$.
 $f(x) = -x(x^2 - x - 2)$ voor $-1 < x < 2$ en
 $f(x) = x(x^2 - x - 2)$ voor $x \leq -1$ of $x \geq 2$.
 Er is een knik in de punten $(-1, 0)$ en $(2, 0)$.
 $\lim_{x \uparrow -1} f'(x) = \lim_{x \uparrow -1} (3x^2 - 2x - 2) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 2 = 3$
 $\lim_{x \downarrow -1} f'(x) = \lim_{x \downarrow -1} (-3x^2 + 2x + 2) = -3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 2 = -3$
 $\lim_{x \uparrow 2} f'(x) = \lim_{x \uparrow 2} (-3x^2 + 2x + 2) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = -6$
 $\lim_{x \downarrow 2} f'(x) = \lim_{x \downarrow 2} (3x^2 - 2x - 2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = 6$
 De richtingscoëfficiënten zijn 3 en -3 in het punt $(-1, 0)$ en
 6 en -6 in het punt $(2, 0)$.

S4 $f(x) = x\sqrt{x + 6}$ voor $x \geq 0$ en $f(x) = -x\sqrt{x + 6}$ voor $-6 \leq x < 0$.
 $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x + 6} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + 6}} = \frac{2(x + 6) + x}{2\sqrt{x + 6}} = \frac{3x + 12}{2\sqrt{x + 6}}$ voor $x \geq 0$.
 $f'(x) = -\frac{3x + 12}{2\sqrt{x + 6}}$ voor $-6 \leq x < 0$.
 $f'(x) = 0$ geeft $3x + 12 = 0$, dus $x = -4$.
 Uit de figuur naast de vaardigheid boven S4 blijkt dat er een randminimum
 $f(-6) = 0$, een maximum $f(-4) = -4\sqrt{-4 + 6} = 4\sqrt{2}$ en een minimum
 $f(0) = 0$ is.

S5 $f(x) = (x + 1)(x - 3)(x + 5)$
 $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 15)$
 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x + x^2 + 2x - 15$
 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$
 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 13$
 $f''(x) = 6x + 6$
 $f''(x) = 0$ geeft $6x + 6 = 0$ dus $x = -1$.
 Uit een plot blijkt dat dit een buigpunt is.
 $f(-1) = 0$, dus het buigpunt heeft coördinaten $(-1, 0)$.

21 Afsluiting analyse

S6 Er moet dan worden aangetoond dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (1 - 2x)) = 0$ of dat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (1 - 2x)) &= 0. \\ f(x) - (1 - 2x) &= \frac{-2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 1} - (1 - 2x) \\ f(x) - (1 - 2x) &= \frac{-2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 1} - \frac{(1 - 2x)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\ f(x) - (1 - 2x) &= \frac{-2x^3 + x^2 + x - 1 - (x^2 - 1 - 2x^3 + 2x)}{x^2 - 1} \\ f(x) - (1 - 2x) &= \frac{-2x^3 + x^2 + x - 1 - x^2 + 1 + 2x^3 - 2x}{x^2 - 1} \\ f(x) - (1 - 2x) &= \frac{-x}{x^2 - 1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 - 0} = 0 \quad \left(\text{en ook } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 - 1} = 0 \right) \end{aligned}$$

Een vergelijking van de scheve asymptoot is daarom $y = 1 - 2x$.

S7 $f(x) = \frac{4x^3 + 5x - 1}{7 - 2x^2}$ ofwel $f(x) = -\frac{4x^3 + 5x - 1}{2x^2 - 7}$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2x(2x^2 - 7) + 14x + 5x - 1}{2x^2 - 7} \\ f(x) &= -2x - \frac{19x - 1}{2x^2 - 7} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{19x - 1}{2x^2 - 7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{19}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{7}{x^2}} = \frac{0 - 0}{2 - 0} = 0 \end{aligned}$$

Een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = -2x$.

S8 a $f(x) = g(x)$ geeft $(x^2 - 4)(3 - x) = 4x - 12$

$$3x^2 - x^3 - 12 + 4x = 4x - 12$$

$$3x^2 - x^3 = 0$$

$$x^2(3 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

$$f'(x) = 6x - 3x^2 + 4 \text{ en } g'(x) = 4$$

$$f(0) = -12 \text{ en } g(0) = -12; \text{ ook is } f'(0) = 4 = g'(0),$$

dus de grafieken raken elkaar in $A(0, -12)$.

b Voor punt B geldt $x = 3$.

$$f'(3) = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = -5 \text{ en } g'(3) = 4$$

$$\tan(\alpha) = 5 \text{ geeft } \alpha \approx 78,7^\circ \text{ en } \tan(\beta) = 4 \text{ geeft } \beta \approx 76,0^\circ.$$

De hoek tussen de raaklijnen in B is $180^\circ - (78,7^\circ + 76,0^\circ) \approx 25^\circ$.

c Voor de extreme waarden geldt $f'(x) = 0$

$$6x - 3x^2 + 4 = 0$$

$$-3x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-6 - \sqrt{84}}{-6} = 2,527... \text{ of } x = \frac{-6 + \sqrt{84}}{-6} = -0,527...$$

$$f(2,527...) \approx 1,13 \text{ en } f(-0,527...) \approx -13,13$$

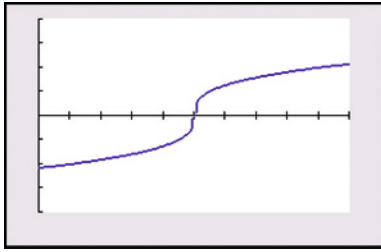
maximum $f(2,53) = 1,13$ en minimum $f(-0,53) = -13,13$

- d** $f'(x) = 6x - 3x^2 + 4$
 $f''(x) = 6 - 6x$
 $f''(x) = 0$ geeft $6 - 6x = 0$ dus $x = 1$.
 $f(1) = -3 \cdot 2 = -6$ dus de coördinaten van het buigpunt zijn $(1, -6)$.
- e** Verschuif de grafiek van f 1 naar links en 6 naar boven en bewijs dat de beeldgrafiek symmetrisch is in $O(0, 0)$.
 De beeldgrafiek is de grafiek van $k(x) = f(x + 1) + 6$
 $k(x) = ((x + 1)^2 - 4)(3 - (x + 1)) + 6$
 $k(x) = (x^2 + 2x - 3)(2 - x) + 6$
 $k(x) = 2x^2 + 4x - 6 - x^3 - 2x^2 + 3x + 6$
 $k(x) = -x^3 + 7x$
 k is een oneven functie, dus puntsymmetrisch in O .
- f** $h(x) = \frac{4(x-3)}{(x^2-4)(3-x)}$ ofwel $h(x) = \frac{-4}{x^2-4}$ voor $x \neq 3$
 $\lim_{x \uparrow 3} \frac{-4}{x^2-4} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{-4}{x^2-4} = -\frac{4}{5}$
 $h\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4}{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 4} = \frac{64}{39}$
 De grafiek heeft een perforatie in $\left(3, -\frac{4}{5}\right)$.
- g** De grafiek heeft verticale asymptoten als $x^2 - 4 = 0$.
 De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -2$ en $x = 2$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^2-4} = 0$ dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

Test jezelf

- T1 a** De grafiek heeft een knik als $x + 2 = 0$, dus als $x = -2$.
 $f(-2) = 0$, dus A is het punt $(-2, 0)$.
- b** $f(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 + 1}$ als $x \geq -2$ en $f(x) = -(x + 2)\sqrt{x^2 + 1}$ als $x < -2$.
 Als $x > -2$ geldt $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + (x + 2) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x(x + 2)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 en als $x < -2$ geldt $f'(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x(x + 2)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 De richtingscoëfficiënten zijn: $\lim_{x \downarrow -2} f'(x) = \sqrt{5}$ en $\lim_{x \uparrow -2} f'(x) = -\sqrt{5}$.
- T2 a** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9} = \sqrt[3]{(x - 3)^2}$
 Omdat $(x - 3)^2 \geq 0$ is de kleinste waarde van $f(3) = \sqrt[3]{0} = 0$.
 Het minimum is $f(3) = 0$.
- b** $g(x) = \sqrt[3]{2x - 10} = (2x - 10)^{\frac{1}{3}}$
 $g'(x) = \frac{1}{3}(2x - 10)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 10)^2}}$
 Bij $x = 5$ is $g(5) = 0$ en $\lim_{x \uparrow 5} \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 10)^2}} = -\infty$.
 Er is sprake van een verticale raaklijn in het punt $(5, 0)$.

21 Afsluiting analyse



Een plot van g laat zien dat de functie daar overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

- c Het buigpunt is $(5, 0)$ en de buigraaklijn heeft vergelijking $x = 5$.

T3 a Er moet worden aangetoond dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4})) = 0$ of dat

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4})) = 0.$$

$$f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{2x - 1} - (-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4})$$

$$f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{2x - 1} - \frac{(-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4})(2x - 1)}{2x - 1}$$

$$f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{2x - 1} - \frac{-x^2 + 5x - 2\frac{1}{4}}{2x - 1}$$

$$f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}) = \frac{-3\frac{3}{4}}{2x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4})) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3\frac{3}{4}}{2x - 1} = 0$$

Dus de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f .

b $g(x) = \frac{1 - 3x + x^2}{x + 5}$ ofwel $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 5}$

$$g(x) = \frac{x^2 + 5x - 5x - 3x + 1}{x + 5}$$

$$g(x) = \frac{x(x + 5) - 8x + 1}{x + 5} \text{ dus } g(x) = x + \frac{-8x + 1}{x + 5}$$

$$g(x) = x + \frac{-8x - 40 + 40 + 1}{x + 5} \text{ dus } g(x) = x + \frac{-8(x + 5) + 40 + 1}{x + 5}$$

$$g(x) = x - 8 + \frac{41}{x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{41}{x + 5} = 0, \text{ dus de scheve asymptoot heeft vergelijking } y = x - 8.$$

T4 $f(x) = \frac{x|x + 3|}{2x^2 - 18} = \frac{x|x + 3|}{2(x^2 - 9)} = \frac{x|x + 3|}{2(x + 3)(x - 3)}$

$$f(x) = \frac{x(x + 3)}{2(x + 3)(x - 3)} = \frac{x}{2(x - 3)} \text{ als } x > -3 \text{ en } f(x) = \frac{-x}{2(x - 3)} \text{ als } x < -3$$

De grafiek van f heeft een verticale asymptoot $x = 3$.

Bij $x = -3$ kan er een perforatie of een sprong zijn.

$$\lim_{x \uparrow -3} f(x) = -\frac{1}{4} \text{ en } \lim_{x \downarrow -3} f(x) = \frac{1}{4} \text{ dus er is een sprong bij } x = -3.$$

T5 a $f(x) = 0$ geeft $x^2 + 8x + 12 = 0$

$$(x + 2)(x + 6) = 0$$

$$x = -2 \text{ en } x = -6$$

b Voor het domein geldt: $x^2 + 8x + 12 \geq 0$ ofwel $(x + 2)(x + 6) \geq 0$.

De grafiek van $y = (x + 2)(x + 6)$ is een dalparabool dus het domein is

$$\langle \leftarrow, -6 \rangle \cup [-2, \rightarrow).$$

c $g(x) = f(x - 4)$

$$g(x) = \sqrt{(x - 4)^2 + 8(x - 4) + 12}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 8x - 32 + 12}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

d De grafiek van g heeft symmetrie in de y -as.

e De grafiek van f heeft symmetrie in de lijn $x = -4$.

T6 a $f(x) = 4x + 1 + \frac{12}{e^x + 1}$ ofwel $f(x) = 4x + 1 + 12(e^x + 1)^{-1}$

$$f'(x) = 4 - 12(e^x + 1)^{-2} \cdot e^x$$

$$f'(x) = 4 - \frac{12e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{12e^x}{(e^x + 1)^2} = 4 \text{ ofwel } \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2} = 1.$$

Stel $e^x = t$ dan wordt de vergelijking $\frac{3t}{(t + 1)^2} = 1$.

$$(t + 1)^2 = 3t$$

$$t^2 + 2t + 1 = 3t$$

$$t^2 - t + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3$$

$D < 0$, dus deze vergelijking heeft geen oplossingen.

Er zijn geen extreme waarden omdat de afgeleide voor geen enkele waarde van x nul is.

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{12}{e^x + 1} \right) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{12}{e^x + 1} \right) = \frac{12}{0 + 1} = 12$

De lijn met vergelijking $y = 4x + 1$ is een scheve asymptoot (naar rechts)

en de lijn met vergelijking $y = 4x + 1 + 12$ ofwel $y = 4x + 13$ is een scheve asymptoot (naar links).

T7 a $f_1(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$

$$f_1'(x) = (2x - 1) \cdot e^x + (x^2 - x) \cdot e^x$$

$$f_1'(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^x$$

$$f_1'(x) = 0 \text{ geeft } x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ of } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

De x -coördinaten van de toppen zijn $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

b $f_1'(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^x$

$$f_1''(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x - 1) \cdot e^x$$

$$f_1''(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$$

$$f_1''(x) = 0 \text{ geeft } x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ en } x = -3$$

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \text{ en } f(-3) = (9 - 3) \cdot e^{-3} = \frac{12}{e^3}$$

De buigpunten zijn $(0, 0)$ en $(-3, \frac{12}{e^3})$.

21 Afsluiting analyse

- c Een extreme waarde voor $x = 1$ betekent $f_p'(1) = 0$.

$$f_p'(x) = (2x - p) \cdot e^x + (x^2 - px) \cdot e^x$$

$$f_p'(x) = (x^2 + 2x - px - p) \cdot e^x$$

$$f_p'(1) = (1 + 2 - p - p) \cdot e^1 = (3 - 2p) \cdot e$$

$$f_p'(1) = 0 \text{ geeft } 3 - 2p = 0, \text{ dus } p = 1\frac{1}{2}.$$

- d $f_p''(x) = (2x + 2 - p) \cdot e^x + (x^2 + 2x - px - p) \cdot e^x$

$$f_p''(x) = (x^2 + 4x - px + 2 - 2p) \cdot e^x$$

$$f_p''(x) = 0 \text{ geeft } x^2 + (4 - p)x + 2 - 2p = 0.$$

$$D = (4 - p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - 2p)$$

$$D = 16 - 8p + p^2 - 8 + 8p$$

$$D = p^2 + 8$$

$D > 0$ voor elke waarde van p , dus er zijn altijd twee oplossingen voor

$f_p''(x) = 0$ en daarmee zijn er altijd twee buigpunten.

- T8 a Voor het domein moet gelden $\frac{x}{x-1} > 0$.

Dit is het geval als $x > 0$ en $x - 1 > 0$ of als $x < 0$ en $x - 1 < 0$.

Dus $x > 1$ of $x < 0$. Het domein is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.

- b $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$ geeft $\frac{x}{x-1} = 1$ ofwel $x = x - 1$ en deze vergelijking heeft geen oplossing.

- c $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ofwel $f(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$$

$f'(x) = 0$ heeft geen oplossing, dus er zijn geen extreme waarden.

- d $\lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{x-1} = 0$, dus $\lim_{x \uparrow 0} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x \uparrow 0} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) = -\infty$

$$\lim_{x \downarrow 1} \frac{x}{x-1} = \infty, \text{ dus } \lim_{x \downarrow 1} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) = \infty$$

- e Uit opdracht d volgt dat er een verticale asymptoot is met vergelijking $x = 0$ en een verticale asymptoot is met vergelijking $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) = \ln(1) = 0, \text{ dus de lijn } y = 0 \text{ is een horizontale}$$

asymptoot van de grafiek.

T9 a $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 5} - x$

$$f(x) - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$$

$$f(x) - x = \frac{x^2 + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$$

$$f(x) - x = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = 0, \text{ dus de lijn } y = x \text{ is een scheve asymptoot van de grafiek.}$$

b $f(x) - (-x) = \sqrt{x^2 + 5} + x$

$$f(x) - (-x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 5} + x)(\sqrt{x^2 + 5} - x)}{\sqrt{x^2 + 5} - x}$$

$$f(x) - (-x) = \frac{x^2 + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5} - x}$$

$$f(x) - (-x) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} - x} = 0, \text{ dus de lijn } y = -x \text{ is ook een scheve asymptoot van de}$$

grafiek.

22 Afsluiting meetkunde

Voorkennis

- V1 a** Vierhoek $AFDE$ is een parallellogram, omdat overstaande zijden evenwijdig zijn. Hieruit volgt $ED = AF = 3$.

Omdat $\triangle EDC \sim \triangle ABC$ geldt de verhoudingstabel:

$\triangle EDC$	$ED = 3$	$EC = \dots$	$DC = \dots$
$\triangle ABC$	$AB = 9$	$AC = 7$	$BC = 8$

$$EC = \frac{3 \times 7}{9} = \frac{21}{9} = 2\frac{1}{3} \text{ en } DC = \frac{3 \times 8}{9} = \frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}$$

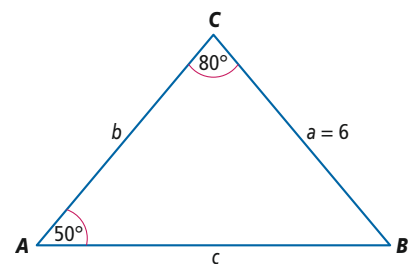
- b** Uit $AB = 9$ en $FB = 6$ volgt de vergrotingsfactor is $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

- V2** Stel de tophoek van beide driehoeken is γ .
 Dan zijn elk van de basishoeken $\frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$.
 Van beide driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk.
 Hieruit volgt: de driehoeken zijn gelijkvormig.

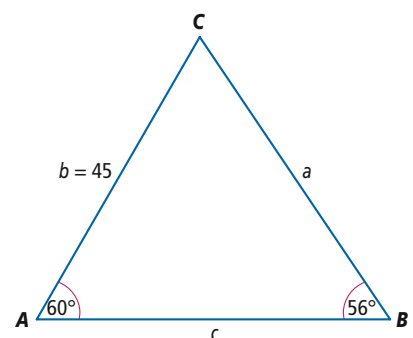
- V3 a** $MA = \frac{1}{2}AD = 5$
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ABM$ geeft $BM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.
 Uit $\angle AMS = \angle CBS$ (Z-hoeken) en $\angle MAS = \angle BCS$ (Z-hoeken) volgt $\triangle AMS \sim \triangle CBS$.
 De vergrotingsfactor is $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
 Lijnstuk BM wordt verdeeld in $BS : MS = 2 : 1$.
 Dan is $BS = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot 13 = 8\frac{2}{3}$.
- b** De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AC = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$.
 Uit $\angle TAB = \angle TCN$ (Z-hoeken) en $\angle ABT = \angle CNT$ (Z-hoeken) volgt $\triangle ABT \sim \triangle CNT$.
 De vergrotingsfactor is $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
 Diagonaal AC wordt verdeeld in $AT : CT = 3 : 1$.
 Dan is $AT = \frac{3}{4}AC = 1\frac{1}{2}\sqrt{61}$.

- V4 a** $\beta = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$, dus driehoek ABC is gelijkbenig.
 Hieruit volgt $b = 6$.

Sinusregel geeft $\frac{c}{\sin(80^\circ)} = \frac{6}{\sin(50^\circ)}$, dus $c = \frac{6 \cdot \sin(80^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 7,7$.



- b** $\gamma = 180^\circ - 60^\circ - 56^\circ = 64^\circ$
 Uit $\frac{a}{\sin(60^\circ)} = \frac{45}{\sin(56^\circ)}$ volgt $a = \frac{45 \cdot \sin(60^\circ)}{\sin(56^\circ)} \approx 47,0$.
 Uit $\frac{c}{\sin(64^\circ)} = \frac{45}{\sin(56^\circ)}$ volgt $c = \frac{45 \cdot \sin(64^\circ)}{\sin(56^\circ)} \approx 48,8$.



- c Cosinusregel $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$ geeft

$$12^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha).$$

$$144 = 49 + 36 - 84 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{144 - 49 - 36}{-84} = -0,702... \text{ dus is } \alpha \approx 135^\circ.$$

Nogmaals de cosinusregel $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ geeft

$$7^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos(\beta).$$

$$49 = 144 + 36 - 144 \cdot \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{49 - 144 - 36}{-144} = 0,909... \text{ dus is } \beta \approx 25^\circ.$$

$$\gamma = 180^\circ - 134,6^\circ - 24,5^\circ \approx 21^\circ$$

- d Cosinusregel $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ geeft

$$b^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos(45^\circ).$$

$$b^2 = 64 + 81 - 144 \cdot \cos(45^\circ)$$

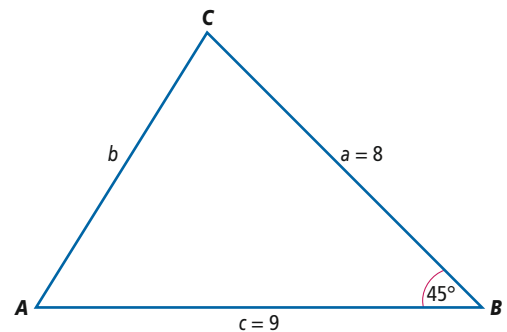
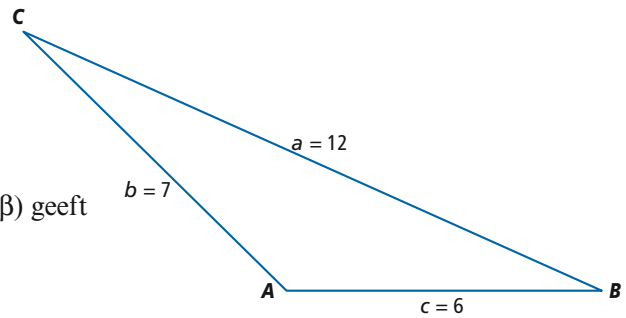
$$b^2 = 145 - 72\sqrt{2} = 43,176... \text{ dus } b = \sqrt{43,176...} \approx 6,6.$$

Nogmaals de cosinusregel $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$ geeft

$$64 = 43,176... + 81 - 2 \cdot 6,570... \cdot 9 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) \approx \frac{60,1766}{118,2761} \text{ dus is } \alpha \approx 59^\circ.$$

$$\gamma = 180^\circ - 59,4^\circ - 45^\circ \approx 76^\circ$$



- V5 a Cosinusregel $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$ geeft

$$BC^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos(50^\circ)$$

$$BC^2 = 100 - 96 \cdot \cos(50^\circ) = 38,292...$$

$$BC = \sqrt{38,292...} \approx 6,19$$

Cosinusregel $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$ geeft

$$CD^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(50^\circ)$$

$$CD^2 = 16 + 36 - 48 \cdot \cos(50^\circ) = 21,146...$$

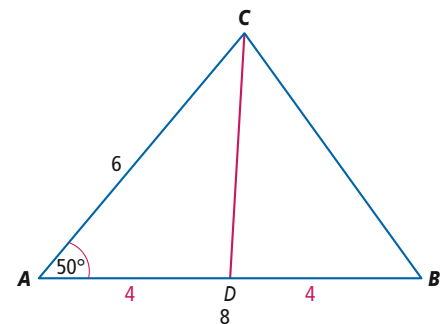
$$CD = \sqrt{21,146...} \approx 4,60$$

- b Uit $\frac{6,188...}{\sin(50^\circ)} = \frac{6}{\sin(\angle B)}$ volgt $\sin(\angle B) = \frac{6 \cdot \sin(50^\circ)}{6,188...} = 0,742...$,

dus $\angle B \approx 48^\circ$.

Uit $\frac{4,598...}{\sin(50^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle ACD)}$ volgt $\sin(\angle ACD) = \frac{4 \cdot \sin(50^\circ)}{4,598...} = 0,666...$,

dus $\angle ACD \approx 42^\circ$.



- V6 a De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{9 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{65}} \text{ geeft } \angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 97^\circ, \text{ dus}$$

$$\angle(l, m) \approx 180^\circ - 97^\circ = 83^\circ.$$

- b De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{1 \cdot 1 + 4 \cdot (-3)}{\sqrt{1 + 16} \cdot \sqrt{1 + 9}} = \frac{-11}{\sqrt{170}} \text{ geeft } \angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 148^\circ, \text{ dus}$$

$$\angle(l, m) \approx 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ.$$

- c De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{9 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \text{ geeft } \angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 60^\circ, \text{ dus}$$

$$\angle(l, m) \approx 60^\circ.$$

22 Afsluiting meetkunde

d $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ herleid je tot $5x + 4y = 20$.

$m: \frac{x}{3} - \frac{y}{12} = 1$ herleid je tot $4x - y = 12$.

De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{4 \cdot 1 + (-5) \cdot 4}{\sqrt{16 + 25} \cdot \sqrt{1 + 16}} = \frac{-16}{\sqrt{697}}$ geeft $\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 127^\circ$, dus $\angle(l, m) \approx 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$.

V7 a Het snijpunt van l met y -as berekenen, dus $x = 0$.

$$3 + 3\lambda = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$y = 1 + (-1) \cdot 4 = -3$$

Het snijpunt van lijn l met de y -as is $(0, -3)$.

$x = 0$ invullen in de vectorvoorstelling van m geeft $-2 - \mu = 0$.

$$\mu = -2$$

$$y = 1 + (-2) \cdot 2 = -3$$

Het snijpunt van lijn m met de y -as is ook $(0, -3)$.

Hieruit volgt dat het snijpunt van l en m op de y -as ligt.

b De richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2}{\sqrt{9 + 16} \cdot \sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ geeft $\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 63^\circ$, dus $\angle(l, m) \approx 63^\circ$.

22.1 Lijnen en cirkels

intro Voor elk raakpunt R geldt $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{MR}$ (een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt), dus elk raakpunt ligt op de cirkel met middellijn MP (stelling van Thales).

1 $3(4 + \lambda) + 4(2 - 3\lambda) = 38$

$$12 + 3\lambda + 8 - 12\lambda = 38$$

$$-9\lambda = 18$$

$$\lambda = -2$$

Dit substitueren in de vergelijking van m geeft $x = 4 + (-2) = 2$ en

$$y = 2 - 3 \cdot (-2) = 8.$$

Het snijpunt heeft coördinaten $S(2, 8)$.

2 $x = -1 + \lambda$ en $y = 2 - 3\lambda$ substitueren in de vergelijking van c geeft

$$(-1 + \lambda)^2 + (2 - 3\lambda)^2 - 4(-1 + \lambda) - 6(2 - 3\lambda) = 7$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 12\lambda + 4 + 4 - 4\lambda - 12 + 18\lambda = 7$$

$$10\lambda^2 = 10$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = -1 \text{ of } \lambda = 1$$

De snijpunten zijn $(-2, 5)$ en $(0, -1)$.

3 Het middelpunt van c is $M(3, -1)$ en $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Een normaalvector van de raaklijn is $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de raaklijn is $4x + 2y = b$.

$x = 7$ en $y = 1$ invullen geeft $4 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = b$ dus $b = 30$.

Een vergelijking van de raaklijn is $4x + 2y = 30$ ofwel $y = -2x + 15$.

4 a De lijn gaat door $P(15, 5)$ dus een steunvector is $\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$.

De richtingscoëfficiënt is m , dus een richtingsvector is $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

b $x = 15 + \lambda$ en $y = 5 + \lambda m$

c $x = 15 + \lambda$ en $y = 5 + \lambda m$ substitueren in de vergelijking van c geeft

$$(15 + \lambda)^2 + (5 + \lambda m)^2 = 50$$

$$225 + 30\lambda + \lambda^2 + 25 + 10\lambda m + \lambda^2 m^2 = 50$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (30 + 10m)\lambda + 200 = 0$$

$$D = 0 \text{ geeft } (30 + 10m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 200 = 0.$$

$$900 + 600m + 100m^2 - 800m^2 - 800 = 0$$

$$-700m^2 + 600m + 100 = 0$$

$$7m^2 - 6m - 1 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 7 \cdot -1 = 64$$

$$m = \frac{6 + \sqrt{64}}{14} = 1 \text{ of } m = \frac{6 - \sqrt{64}}{14} = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}$$

De raaklijnen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d 1e raakpunt

$$(15 + \lambda)^2 + (5 + \lambda)^2 = 50$$

$$225 + 30\lambda + \lambda^2 + 25 + 10\lambda + \lambda^2 = 50$$

$$2\lambda^2 + 40\lambda + 200 = 0$$

$$\lambda^2 + 20\lambda + 100 = 0$$

$$(\lambda + 10)^2 = 0$$

$$\lambda = -10 \text{ geeft } (5, -5).$$

2e raakpunt

$$(15 + 7\lambda)^2 + (5 - \lambda)^2 = 50$$

$$225 + 210\lambda + 49\lambda^2 + 25 - 10\lambda + \lambda^2 = 50$$

$$50\lambda^2 + 200\lambda + 200 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda = -2 \text{ geeft } (1, 7).$$

De raakpunten zijn $A(1, 7)$ en $B(5, -5)$.

5 a $x^2 + y^2 = 13$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 10y = 3 \quad - \\ \hline 10x + 10y = 10 \end{array}$$

Een vergelijking van l is $10x + 10y = 10$ ofwel $y = 1 - x$.

b $y = 1 - x$ substitueren in de vergelijking van c_1 geeft

$$x^2 + (1 - x)^2 = 13.$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -2$$

22 Afsluiting meetkunde

$$x = 3 \text{ geeft } y = 1 - 3 = -2.$$

$$x = -2 \text{ geeft } y = 1 - (-2) = 3.$$

De snijpunten zijn $(3, -2)$ en $(-2, 3)$.

6 a Een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

$$\text{b } OP = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250}$$

$$OA = \sqrt{50} \text{ (straal van de cirkel)}$$

De stelling van Pythagoras toepassen in driehoek OAP geeft

$$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{250 - 50} = \sqrt{200}.$$

Een vergelijking van c_2 is $(x - 15)^2 + (y - 5)^2 = 200$.

c $(x - 15)^2 + (y - 5)^2 = 200$ herleiden geeft

$$x^2 - 30x + 225 + y^2 - 10y + 25 = 200.$$

$$x^2 + y^2 - 30x - 10y = -50$$

De vergelijkingen van de cirkels van elkaar aftrekken:

$$x^2 + y^2 = 50$$

$$x^2 + y^2 - 30x - 10y = -50 \quad -$$

$$30x + 10y = 100$$

$$y = 10 - 3x$$

dit substitueren in de vergelijking van c_1 geeft

$$x^2 + (10 - 3x)^2 = 50.$$

$$x^2 + 100 - 60x + 9x^2 = 50$$

$$10x^2 - 60x + 50 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

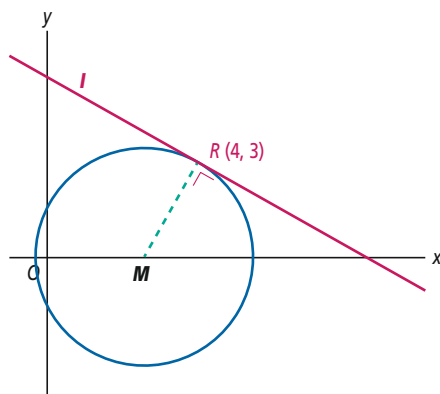
$$x = 1 \text{ of } x = 5$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = 10 - 3 = 7.$$

$$x = 5 \text{ geeft } y = 10 - 15 = -5.$$

De snijpunten zijn $A(1, 7)$ en $B(5, -5)$.

7 a



b De loodlijn op l , door R snijden met de x -as geeft het middelpunt M van de cirkel.

Een richtingsvector van de loodlijn is de normaalvector van l , dus $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een steunvector is $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de loodlijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Deze loodlijn snijden met de x -as geeft $3 + 3\lambda = 0$ ofwel $\lambda = -1$.

De x -coördinaat van het middelpunt is $4 + 2 \cdot -1 = 2$.

Het middelpunt van de cirkel is $M(2, 0)$.

$$r = MR = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{13}$$

De middelpuntsvergelijking van c is $(x - 2)^2 + y^2 = 13$.

- 8** Het middelpunt van cirkel c_1 is $M_1(0, 0)$ en de straal is 4.

Een vergelijking van cirkel c_1 is $x^2 + y^2 = 16$.

Het middelpunt van c_2 is $M_2(-4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ en de straal is

$$AM_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{20\frac{1}{2}}.$$

Een vergelijking van cirkel c_2 is $\left(x + 4\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 4\frac{1}{2}\right)^2 = 20\frac{1}{2}$ ofwel $x^2 + 9x + 20\frac{1}{4} + y^2 - 9y + 20\frac{1}{4} = 20\frac{1}{2}$ dus $x^2 + y^2 + 9x - 9y = -20$.

De vergelijkingen van de cirkels van elkaar aftrekken:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 + 9x - 9y = -20 \quad -$$

$$\hline -9x + 9y = 36$$

$$y = x + 4$$

Dit substitueren in de vergelijking van c_1 geeft

$$x^2 + (x + 4)^2 = 16$$

$$x^2 + x^2 + 8x + 16 = 16$$

$$2x^2 + 8x = 0$$

$$2x(x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -4$$

De snijpunten zijn $A(-4, 0)$ en $D(0, 4)$.

De lijn door B en C heeft richtingscoëfficiënt $\frac{9-0}{-5-4} = -1$.

$x = 4$ en $y = 0$ invullen bij $y = -x + b$ geeft $b = 4$.

Een vergelijking van de lijn BC is $y = -x + 4$.

Het punt $D(0, 4)$ ligt op de lijn BC .

Alternatieve oplossing:

Punt D ligt op de cirkel met middellijn AB dus $\angle ADB = 90^\circ$ (*Thales*).

Punt D ligt op de cirkel met middellijn AC dus $\angle ADC = 90^\circ$ (*Thales*).

Dus $\angle CDB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ en dus liggen B , C en D op één lijn.

- 9 a** $c_1 : x^2 + y^2 - 6x + 18y + 72 = 0$

$$c_1 : x^2 - 6x + y^2 + 18y + 72 = 0$$

$$c_1 : (x - 3)^2 - 9 + (y + 9)^2 - 81 + 72 = 0$$

$$c_1 : (x - 3)^2 + (y + 9)^2 = 18$$

Het middelpunt van c_1 is $M_1(3, -9)$ en de straal is $r_1 = \sqrt{18} (=3\sqrt{2})$.

$$c_2 : x^2 + y^2 + 12x - 6y + 36 = 0$$

$$c_2 : x^2 + 12x + y^2 - 6y + 36 = 0$$

$$c_2 : (x + 6)^2 - 36 + (y - 3)^2 - 9 + 36 = 0$$

$$c_2 : (x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

Het middelpunt van c_2 is $M_2(-6, 3)$ en de straal is $r_2 = 3$.

- b** $M_1P = \sqrt{(p - 3)^2 + 9^2}$

$$R_1P = \sqrt{M_1P^2 - r_1^2} = \sqrt{(p - 3)^2 + 9^2 - 18} = \sqrt{(p - 3)^2 + 63}$$

$$M_2P = \sqrt{(p + 6)^2 + 3^2}$$

$$R_2P = \sqrt{M_2P^2 - r_2^2} = \sqrt{(p + 6)^2 + 3^2 - 9} = \sqrt{(p + 6)^2}$$

$$R_2P = R_2P \text{ geeft } \sqrt{(p - 3)^2 + 63} = \sqrt{(p + 6)^2}.$$

$$(p - 3)^2 + 63 = (p + 6)^2$$

$$p^2 - 6p + 9 + 63 = p^2 + 12p + 36$$

$$-18p = -36 \text{ dus } p = 2$$

22 Afsluiting meetkunde

- X1** De lijn $y = x$ snijden met c_1 geeft $x^2 + x^2 = 50$.
 $2x^2 = 50$
 $x^2 = 25$
 $x = -5$ of $x = 5$
 De snijpunten zijn $A(-5, -5)$ en $(5, 5)$.
 De lijn $y = x$ snijden met c_2 geeft $(x - 12)^2 + (x - 12)^2 = 128$.
 $2(x - 12)^2 = 128$
 $(x - 12)^2 = 64$
 $x - 12 = -8$ of $x - 12 = 8$
 $x = 4$ of $x = 20$
 De snijpunten zijn $(4, 4)$ en $B(20, 20)$.
 Het middelpunt van c_3 is het midden van lijnstuk AB met $A(-5, -5)$ en $B(20, 20)$, dus het punt $(7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$.
 De straal is $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{25^2 + 25^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1250}$.
 Een vergelijking van c_3 is $(x - 7\frac{1}{2})^2 + (y - 7\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{1250})^2$ ofwel
 $(x - 7\frac{1}{2})^2 + (y - 7\frac{1}{2})^2 = 312\frac{1}{2}$.

- X2 a** Van cirkel c_1 is het middelpunt $O(0, 0)$ en de straal $OA = 5$.
 Van cirkel c_2 is het middelpunt $M(12, 0)$ en de straal $MB = 3$.

$\angle OAP = \angle MBP = 90^\circ$ (raaklijnstelling) dus

$$\angle APO = \angle BPM$$

Dit geeft $\triangle OAP \sim \triangle MBP$ met factor $\frac{5}{3}$.

$$OP : MP = 5 : 3 \text{ en dus } OM : MP = 2 : 3$$

$$OM = 12 \text{ geeft } MP = \frac{3}{2} \times 12 = 18.$$

$$OP = 12 + 18 = 30 \text{ en dus } P(30, 0).$$

- b** $AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{30^2 - 5^2} = \sqrt{875} = 5\sqrt{35}$
 $BP = \sqrt{MP^2 - MB^2} = \sqrt{18^2 - 3^2} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35}$
 $AB = AP - BP = 5\sqrt{35} - 3\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$

- c** $OC = 5$ en $MD = 3$

$O(0, 0)$ en $M(12, 0)$

$$\angle OCQ = \angle MDQ = 90^\circ \text{ (raaklijnstelling)}$$

$$\angle CQO = \angle DQM \text{ (overstaande hoeken)}$$

Dit geeft $\triangle OCQ \sim \triangle MDQ$ met factor $\frac{5}{3}$.

$$OQ : MQ = 5 : 3 \text{ geeft } OQ = \frac{5}{8} \times 12 = 7\frac{1}{2}.$$

$$Q(7\frac{1}{2}, 0).$$

- d** $QC = \sqrt{OQ^2 - OC^2} = \sqrt{7\frac{1}{2}^2 - 5^2} = \sqrt{31\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{5}$
 $DQ = \sqrt{MQ^2 - MD^2} = \sqrt{4\frac{1}{2}^2 - 3^2} = \sqrt{11\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{5}$
 $CD = CQ + DQ = 2\frac{1}{2}\sqrt{5} + 1\frac{1}{2}\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

22.2 Afstanden en hoeken

intro Dat zijn de roosterpunten F2, H3, D3, J6 en B6.

10 a Uit $\cos(\angle APQ) = \frac{PQ}{PA}$ volgt $PQ = PA \cdot \cos(\angle APQ)$.

b Uit $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ met $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ en $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$ volgt $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PA} = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PA}| \cdot \cos(\angle APQ)$.

$$\cos(\angle APQ) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PA}|}$$

$\overrightarrow{PQ}$ is een veelvoud van de richtingsvector van l .

De richting van $\overrightarrow{PQ}$ is in dit geval tegengesteld aan die van de

normaalvector van l , $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Door $\overrightarrow{PQ}$ te vervangen door $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wordt

de uitkomst van $\frac{\vec{n}_l \cdot \overrightarrow{PA}}{|\vec{n}_l| \cdot |\overrightarrow{PA}|}$ tegengesteld aan die van $\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PA}|}$ en wordt

de uitkomst van $\cos(\angle APQ)$ negatief (en dus $\angle APQ$ stomp in plaats van scherp).

Door absolute waarde-strepen om de teller te zetten, voorkom je dat $\cos(\angle APQ)$ negatief wordt.

Verder is $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ en $|\vec{n}_l| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

$$\text{Dus is } \cos(\angle APQ) = \frac{|\vec{n}_l \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{n}_l| \cdot |\overrightarrow{PA}|} = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}_l|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}}$$

$$\text{c } \cos(\angle APQ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}} = \frac{|-17|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}} = \frac{17}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}}$$

$$PQ = PA \cdot \cos(\angle APQ) \text{ geeft } d(P, l) = PQ = \sqrt{50} \cdot \frac{17}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}} = \frac{17}{\sqrt{13}}, \text{ klopt.}$$

11 a $A(r, s)$ en $P(p, q)$ geeft $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p-r \\ q-s \end{pmatrix}$.

Een richtingsvector van de lijn PA is $\begin{pmatrix} p-r \\ q-s \end{pmatrix}$ (of $\begin{pmatrix} r-p \\ s-q \end{pmatrix}$).

Een richtingsvector van de lijn PQ is de normaalvector van lijn l , dus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\text{b } d(P, l) = PQ = PA \cdot \cos(\angle APQ) \text{ en } \cos(\angle APQ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} p-r \\ q-s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Dus } d(P, l) = PQ = PA \cdot \frac{|a(p-r) + b(q-s)|}{PA \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ofwel}$$

$$d(P, l) = PQ = \frac{|ap - ar + bq - bs|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

c Uit $ar + bs + c = 0$ volgt $-ar - bs = c$.

$$d(P, l) = PQ = \frac{|ap + bq - ar - bs|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ geeft dan } d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

22 Afsluiting meetkunde

12 a $P(7, -3)$ en $2x - y - 4 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$$d(P, l) = \frac{|2 \cdot 7 - (-3) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

b $\frac{x}{5} + \frac{y}{12} = 1$ herleid je tot $12x + 5y = 60$ ofwel $12x + 5y - 60 = 0$.

$P(0, 0)$ en $12x + 5y - 60 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$$d(P, l) = \frac{|0 + 0 - 60|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{60}{\sqrt{169}} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}.$$

c $P(-1, 6)$ en $x + y - 5 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$$d(P, l) = \frac{|-1 + 6 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

Controle: $-1 + 6 - 5 = 0$ klopt, dus punt P ligt op lijn l .

d $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ herleid je tot $x - 3y + 6 = 0$.

$P(-4, 2)$ en $x - 3y + 6 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$$d(P, l) = \frac{|-4 - 3 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

13 a $P(p, q)$ en $4x - 3y + 12 = 0$ invullen in $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$$d(P, l) = \frac{|4p - 3q + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4p - 3q + 12|}{5}$$

b $P(p, q)$ en $5x + 12y - 60 = 0$ invullen in $d(P, m) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft

$$d(P, m) = \frac{|5p + 12q - 60|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5p + 12q - 60|}{13}$$

c $\frac{|4p - 3q + 12|}{5} = \frac{|5p + 12q - 60|}{13}$

1e oplossing:

$$13(4p - 3q + 12) = 5(5p + 12q - 60)$$

$$52p - 39q + 156 = 25p + 60q - 300$$

$$27p - 99q = 456$$

$$9p - 33q = 152$$

2e oplossing:

$$13(4p - 3q + 12) = -5(5p + 12q - 60)$$

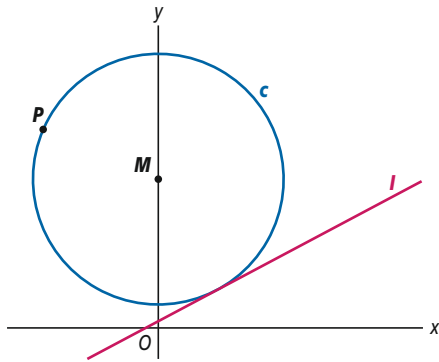
$$52p - 39q + 156 = -25p - 60q + 300$$

$$77p + 21q = 144$$

De vergelijkingen van de beide bissectrices zijn $9x - 33y = 152$ en

$$77x + 21y = 144.$$

14 a



b Voor het middelpunt $M(0, b)$ moet gelden $MP = d(M, l)$.

$$MP = \sqrt{8^2 + (b - 14)^2} = \sqrt{64 + b^2 - 28b + 196} \text{ ofwel } MP = \sqrt{b^2 - 28b + 260}$$

$$d(M, l) = \frac{|0 - 2b|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Uit } MP = d(M, l) \text{ volgt } \sqrt{b^2 - 28b + 260} = \frac{|2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{b^2 - 28b + 260} = |2b|$$

$$5(b^2 - 28b + 260) = 4b^2$$

$$5b^2 - 140b + 1300 = 4b^2$$

$$b^2 - 140b + 1300 = 0$$

$$(b - 10)(b - 130) = 0$$

$$b = 10 \text{ of } b = 130$$

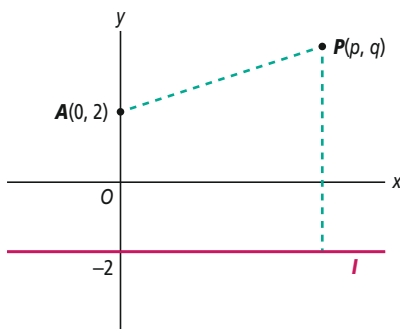
$$\text{Als } b = 10 \text{ dan is } M(0, 10) \text{ en } r = \frac{2 \cdot 10}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} \text{ en } r^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = 80.$$

Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + (y - 10)^2 = 80$.

$$\text{Als } b = 130 \text{ dan is } M(0, 130) \text{ en } r = \frac{2 \cdot 130}{\sqrt{5}} = \frac{260}{\sqrt{5}} \text{ en } r^2 = \left(\frac{260}{\sqrt{5}}\right)^2 = 13\,520.$$

Een vergelijking van deze cirkel is $x^2 + (y - 130)^2 = 13\,520$.

15



Stel $P(p, q)$ met $d(P, l) = AP$.

$$AP = \sqrt{p^2 + (q - 2)^2} \text{ en } d(P, l) = q + 2$$

Uit $d(P, l) = AP$ volgt $\sqrt{p^2 + (q - 2)^2} = q + 2$.

$$p^2 + (q - 2)^2 = (q + 2)^2$$

$$p^2 + q^2 - 4q + 4 = q^2 + 4q + 4$$

$$p^2 = 8q$$

$$q = \frac{1}{8}p^2$$

De coördinaten p en q voldoen aan de vergelijking $y = \frac{1}{8}x^2$, dus punt P ligt op de parabool.

22 Afsluiting meetkunde

- 16 a** De richtingscoëfficiënt van de lijn AB is $\frac{-6 - -2}{2 - -4} = -\frac{2}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van de lijn BC is $\frac{2 - -6}{6 - 2} = 2$.

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = 33,690\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = 2 \text{ geeft } \beta = 63,434\dots^\circ$$

$$\alpha + \beta = 33,690\dots^\circ + 63,434\dots^\circ = 97,125\dots^\circ$$

$$\angle(AB, BC) = 180^\circ - 97,125\dots^\circ \approx 83^\circ$$

- b** $\angle(BC, AC) = \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})) = \frac{-4 \cdot -10 + -8 \cdot -4}{\sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2}} = \frac{72}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{116}}$$

$$\angle(BC, AC) = \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \approx 42^\circ$$

- c** $\angle(AB, AC) = \angle BAC$

$$AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}, AC = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} \text{ en } BC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

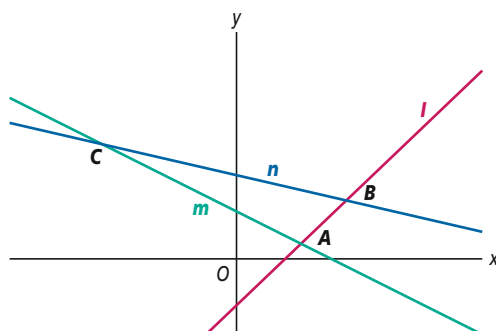
$$\text{cosinusregel: } BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$80 = 116 + 52 - 2 \cdot \sqrt{116} \cdot \sqrt{52} \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{80 - 116 - 52}{-2 \cdot \sqrt{116} \cdot \sqrt{52}} = 0,566\dots$$

$$\angle(AB, AC) = \angle BAC \approx 55^\circ$$

- 17** schets:



$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dus } \vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dus } \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dus } \vec{r}_n = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

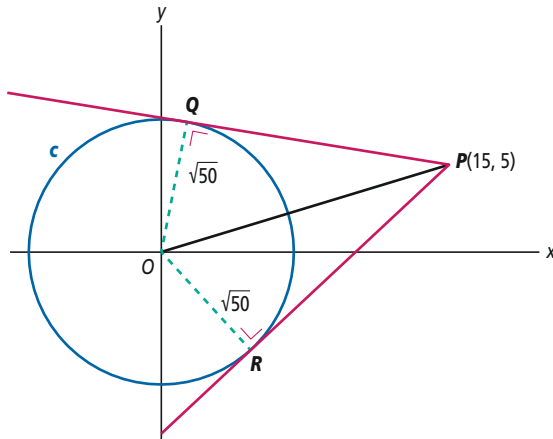
$$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot -1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ dus } \angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 72^\circ \text{ en}$$

$\angle A \approx 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ (zie schets, je hebt de stompe hoek bij A nodig).

$$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_n)) = \frac{1 \cdot 5 + 1 \cdot -1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{26}} = \frac{4}{\sqrt{52}} \text{ dus } \angle(\vec{r}_l, \vec{r}_n) \approx 56^\circ \text{ en } \angle B \approx 56^\circ$$

$$\cos(\angle(\vec{r}_m, \vec{r}_n)) = \frac{2 \cdot 5 + -1 \cdot -1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{26}} = \frac{11}{\sqrt{130}} \text{ dus } \angle(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \approx 15^\circ \text{ en } \angle C \approx 15^\circ$$

18 schets:



$$OP = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250}$$

$$OQ = r = \sqrt{50}$$

$$\angle OQP = 90^\circ \text{ (raaklijnstelling)}$$

$$\sin(\angle QPO) = \frac{OQ}{OP} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{250}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ geeft } \angle OPQ = 26,565\dots^\circ$$

De hoek tussen de raaklijnen is $2 \times 26,565\dots^\circ \approx 53^\circ$.

19 Invullen van de gegevens in $\cos(\phi) = \frac{\vec{r}_l \cdot \vec{r}_m}{|\vec{r}_l| \cdot |\vec{r}_m|}$ levert

$$\cos(45^\circ) = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot a}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + a^2}} \text{ ofwel } \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{2 + a}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + a^2}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + a^2} = 2 + a$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 5 \cdot (1 + a^2) = (2 + a)^2$$

$$2\frac{1}{2} \cdot (1 + a^2) = 4 + 4a + a^2$$

$$5 + 5a^2 = 8 + 4a + a^2$$

$$3a^2 - 4a - 3 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{4 + \sqrt{100}}{6} = 3 \text{ of } a = \frac{4 - \sqrt{100}}{6} = -\frac{1}{3}$$

X3 a $M(-5, -1)$ en $r_1 = \sqrt{4} = 2$

$N(3, 5)$ en $r_2 = \sqrt{25} = 5$

$$MN = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2 = 10 - 2 - 5 = 3$$

b $\angle PAM = \angle PBN = 90^\circ$ (raaklijnstelling) en $\angle APM = \angle BPN$ dus $\triangle APM \sim \triangle BPN$.

$$AM : BN = 2 : 5 \text{ dus ook } PM : PN = 2 : 5 \text{ en } PM : MN = 2 : 3$$

$$PM = \frac{2}{3} MN = \frac{2}{3} \cdot 10 = 6\frac{2}{3}$$

$$\sin(\angle APM) = \frac{AM}{PM} = \frac{2}{6\frac{2}{3}} = \frac{3}{10} \text{ geeft } \angle APM = 17,457\dots^\circ$$

$$\angle(l, m) = 2 \times 17,457\dots^\circ \approx 35^\circ$$

c $\vec{NM} = \frac{3}{5} \cdot \vec{NP}$ ofwel $\vec{NP} = \frac{5}{3} \cdot \vec{NM} = \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13\frac{1}{3} \\ -10 \end{pmatrix}$

Dan is $P(3 - 13\frac{1}{3}, 5 - 10)$ ofwel $P(-10\frac{1}{3}, -5)$.

22 Afsluiting meetkunde

X4 De lijn BC heeft richtingscoëfficiënt $\frac{20-0}{0-15} = -\frac{4}{3}$.

Een vergelijking van lijn BC is $y = -\frac{4}{3}x + 20$.

De hoogtelijn AD staat loodrecht op zijde BC en heeft dus richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$.

$x = -15$ en $y = 0$ invullen bij $y = \frac{3}{4}x + b$ geeft $0 = \frac{3}{4} \cdot -15 + b$ ofwel $b = 11\frac{1}{4}$.

Een vergelijking van de hoogtelijn AD is $y = \frac{3}{4}x + 11\frac{1}{4}$.

De lijnen BC en AD snijden geeft $-\frac{4}{3}x + 20 = \frac{3}{4}x + 11\frac{1}{4}$.

$$-16x + 240 = 9x + 135$$

$$-25x = -105$$

$$x = 4\frac{1}{5} \text{ en } y = \frac{3}{4} \cdot 4\frac{1}{5} + 11\frac{1}{4} = 14\frac{2}{5} \text{ dus } D(4\frac{1}{5}, 14\frac{2}{5})$$

$OD = \sqrt{(4\frac{1}{5})^2 + (14\frac{4}{5})^2} = \sqrt{225} = 15$ en dus is $OD = OA$ en is $\angle DAO = \angle ODA$ (basishoeken).

Vanwege de symmetrie is $ED // AB$ en is dus $\angle EDA = \angle DAO$ (Z-hoeken).

Conclusie: $\angle DAO = \angle EDA$ en dus is hoogtelijn AD tevens bissectrice van hoek EDO . Het bewijs dat hoogtelijn BE ook bissectrice is van hoek DEO verloopt analoog.

Vanwege de symmetrie van de figuur is het volstrekt helder dat hoogtelijn CO ook bissectrice is van hoek EOD .

22.3 Zwaartepunten

intro Als ze de taart vanuit een hoekpunt naar het midden van de overstaande zijde doorsnijden (dus volgens een zwaartelijn), krijgen ze ieder precies de helft.

20 $m = 3 + 6 + 9 = 18$

Invullen van de gegevens in de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{a}_3$ geeft

$$\vec{z} = \frac{3}{18} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{6}{18} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{9}{18} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{3} \\ 5\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt van de massa's in A , B en C is $(7\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3})$.

21 a $m = 1 + 4 + 2 = 7$

Invullen van de gegevens in de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{a}_3$ geeft

$$\vec{z} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt van de massa's in A , B en C is $(2, 1\frac{3}{7})$.

b $m = 1 + 4 + 2 + 3 = 10$

$$\vec{z} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{12}{10} + \frac{3}{10}p = 2 \quad \text{en} \quad -\frac{2}{10} + \frac{12}{10} + 0 + \frac{3}{10}q = 1$$

$$\frac{14}{10} + \frac{3}{10}p = 2 \quad \text{en} \quad 1 + \frac{3}{10}q = 1$$

$$\frac{3}{10}p = \frac{6}{10} \quad \text{en} \quad \frac{3}{10}q = 0$$

$$p = 2 \quad \text{en} \quad q = 0$$

- 22 a** De massa's in A en B zijn gelijk, dus het zwaartepunt D is het midden van A en B . Dit geeft $D(5, 4\frac{1}{2})$.

b $m = 2 + 2 + 4 = 8$

Invullen van de gegevens in de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{a}_3$ geeft

$$\vec{z} = \frac{2}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{8} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{4}{8} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt van de massa's in A , B en C is $E(5, 2\frac{1}{4})$.

- c** De massa in D is 4. De massa in C is ook 4. Het zwaartepunt van de massa's in D en C is dan het midden van lijnstuk CD en dus $E(5, 2\frac{1}{4})$.

- d** Lijn AC : richtingscoëfficiënt is $\frac{5-2}{0-3} = -1$.

$x = 2$ en $y = 3$ invullen in $y = -x + b$ geeft $3 = -2 + b$ dus $b = 5$.

Een vergelijking van lijn AC is $y = -x + 5$.

Lijn BE : richtingscoëfficiënt is $\frac{2\frac{1}{4}-6}{5-8} = 1\frac{1}{4}$.

$x = 8$ en $y = 6$ invullen in $y = 1\frac{1}{4}x + b$ geeft $6 = 1\frac{1}{4} \cdot 8 + b$ dus $b = -4$.

Een vergelijking van lijn BE is $y = 1\frac{1}{4}x - 4$.

Gelijkstellen geeft $1\frac{1}{4}x - 4 = -x + 5$.

$$2\frac{1}{4}x = 9 \text{ dus } x = 4 \text{ en } y = 1$$

De coördinaten zijn $F(4, 1)$.

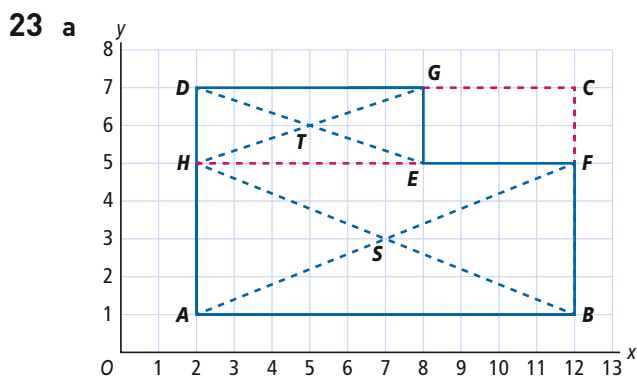
- e** F is het zwaartepunt van de massa's in A en C .

Immers: $m = 2 + 4 = 6$

Invullen van de gegevens in de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2$ geeft

$$\vec{z} = \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt van de massa's in A en C is $F(4, 1)$.



Je kunt bijvoorbeeld de veelhoek verdelen volgens lijn EH met $H(2, 5)$.

Het snijpunt van de diagonalen van een rechthoek deelt de diagonalen middendoor.

Het midden van $A(2, 1)$ en $F(12, 5)$ is $S(7, 3)$.

Het midden van $H(2, 5)$ en $G(8, 7)$ is $T(5, 6)$.

Hieruit volgt dat de zwaartepunten van $ABFH$ en $HEGD$ de punten $S(7, 3)$ en $T(5, 6)$ zijn.

- b** $opp ABFH = AB \cdot BF = 10 \cdot 4 = 40$

$$opp HEGD = HE \cdot EG = 6 \cdot 2 = 12$$

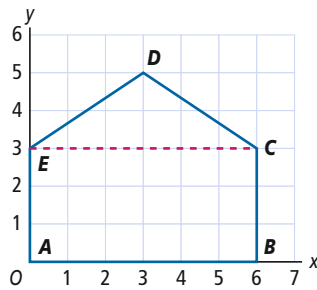
- c** $m = m_1 + m_2 = 40 + 12 = 52$

$$\vec{z} = \frac{40}{52} \cdot \vec{s} + \frac{12}{52} \cdot \vec{t} = \frac{10}{13} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 85 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Dus het zwaartepunt is $Z(\frac{85}{13}, \frac{48}{13})$.

22 Afsluiting meetkunde

24 a



De oppervlakte van rechthoek $ABCE$ is $6 \cdot 3 = 18$ en het zwaartepunt is het snijpunt van de diagonalen, dus $Z_1(3, 1\frac{1}{2})$.

De oppervlakte van driehoek ECD is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$.

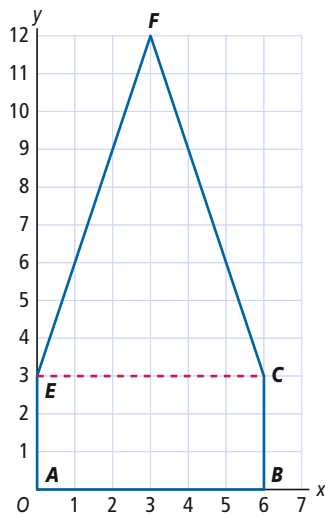
$x_z = \frac{1}{3}(0 + 3 + 6) = 3$ en $y_z = \frac{1}{3}(3 + 3 + 5) = 3\frac{2}{3}$, dit zwaartepunt is $Z_2(3, 3\frac{2}{3})$.

$$m = m_1 + m_2 = 18 + 6 = 24$$

$$\vec{z} = \frac{18}{24} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{6}{24} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

Dus het zwaartepunt van vijfhoek $ABCDE$ is $Z(3, 2\frac{1}{24})$.

b



De oppervlakte van rechthoek $ABCE$ is $6 \cdot 3 = 18$ en het zwaartepunt is het snijpunt van de diagonalen, dus $Z_1(3, 1\frac{1}{2})$.

De oppervlakte van driehoek ECF is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$.

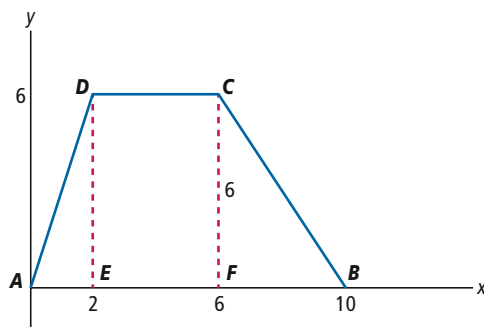
$x_z = \frac{1}{3}(0 + 3 + 6) = 3$ en $y_z = \frac{1}{3}(3 + 12 + 3) = 6$, het zwaartepunt is $Z_2(3, 6)$.

$$m = m_1 + m_2 = 18 + 27 = 45$$

$$\vec{z} = \frac{18}{45} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{27}{45} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Dus het zwaartepunt van vijfhoek $ABCFE$ is $Z(3, 4\frac{1}{5})$.

25 a



$A(0, 0)$, $B(10, 0)$, $C(6, 6)$, $D(2, 6)$, $E(2, 0)$ en $F(6, 0)$

De oppervlakte van driehoek AED is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$.

$x_z = \frac{1}{3}(0 + 2 + 2) = 1\frac{1}{3}$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_1(1\frac{1}{3}, 2)$.

De oppervlakte van rechthoek $EFCD$ is $4 \cdot 6 = 24$ en het zwaartepunt is het snijpunt van de diagonalen, dus $Z_2(4, 3)$.

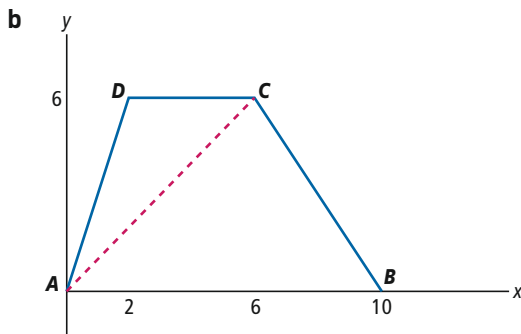
De oppervlakte van driehoek FBC is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.

$x_z = \frac{1}{3}(6 + 10 + 6) = 7\frac{1}{3}$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_3(7\frac{1}{3}, 2)$.

$m = m_1 + m_2 + m_3 = 6 + 24 + 12 = 42$

$$\vec{z} = \frac{6}{42} \cdot \begin{pmatrix} 1\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{24}{42} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{12}{42} \cdot \begin{pmatrix} 7\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{4}{7} \\ 2\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Dus het zwaartepunt van trapezium $ABCD$ is $Z(4\frac{4}{7}, 2\frac{4}{7})$.



De oppervlakte van driehoek ABC is $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$.

$x_z = \frac{1}{3}(0 + 10 + 6) = 5\frac{1}{3}$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_1(5\frac{1}{3}, 2)$.

De oppervlakte van driehoek ACD is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.

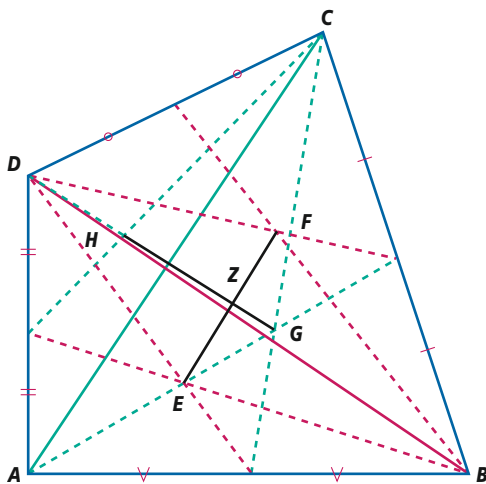
$x_z = \frac{1}{3}(0 + 6 + 2) = 2\frac{2}{3}$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 6 + 6) = 4$, het zwaartepunt is $Z_2(2\frac{2}{3}, 4)$.

$m = m_1 + m_2 = 30 + 12 = 42$

$$\vec{z} = \frac{30}{42} \cdot \begin{pmatrix} 5\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{12}{42} \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{4}{7} \\ 2\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Dus het zwaartepunt van trapezium $ABCD$ is ook nu $Z(4\frac{4}{7}, 2\frac{4}{7})$.

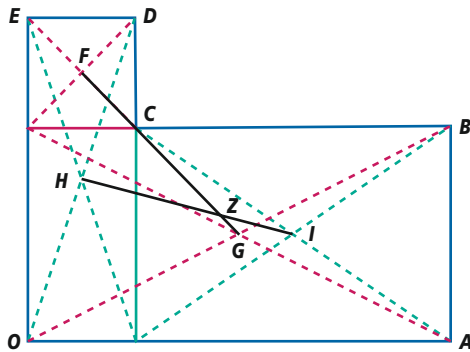
26 a



- b** De coördinaten van Z zijn het gewogen gemiddelde van die van E en F . Dus ligt Z ergens op het lijnstuk EF .
- c** Zie de tekening bij opdracht a.
- d** Z is het snijpunt van de lijnen EF en GH .
- e** Zie de tekening bij opdracht a.

22 Afsluiting meetkunde

- 27 a** De zwaartepunten zijn de punten F en G .



- b** Zie de tekening bij opdracht a, de zwaartepunten zijn de punten H en I .
c Z is het snijpunt van de lijnen FG en HI , zie de tekening bij opdracht a.
d Noem P het snijpunt van lijn BC met lijn OE . Dan is $P(0, 6)$.

De oppervlakte van vierkant $CDEP$ is $3 \cdot 3 = 9$ en het zwaartepunt is $Z_1(1\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$.

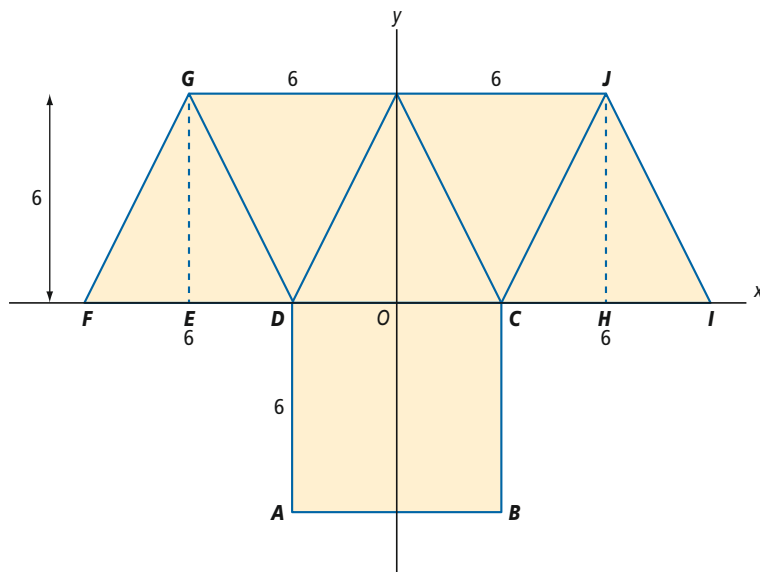
De oppervlakte van rechthoek $OABP$ is $12 \cdot 6 = 72$ en het zwaartepunt is $Z_2(6, 3)$.

$$m = m_1 + m_2 = 9 + 72 = 81$$

$$\vec{z} = \frac{9}{81} \cdot \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{72}{81} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dus het zwaartepunt van de zeshoek is $Z(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

X5 a



Neem $F(-9, 0)$, $E(-6, 0)$, $G(-6, 6)$, $H(6, 0)$, $I(9, 0)$ en $J(6, 6)$.

De oppervlakte van driehoek FEG is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.

$x_z = \frac{1}{3}(-9 + -6 + -6) = -7$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_1(-7, 2)$.

De oppervlakte van rechthoek $EHJG$ is $12 \cdot 6 = 72$ en het zwaartepunt is $Z_2(0, 3)$.

De oppervlakte van driehoek HIJ is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.

$x_z = \frac{1}{3}(6 + 9 + 6) = 7$ en $y_z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 6) = 2$, het zwaartepunt is $Z_3(7, 2)$.

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 9 + 72 + 9 = 90$$

$$\vec{z} = \frac{9}{90} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{72}{90} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{90} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Dus het zwaartepunt van het trapezium is $Z(0, 2\frac{4}{5})$.

- b Neem $A(-3, -6)$, $B(3, -6)$, $C(3, 0)$ en $D(-3, 0)$.

De oppervlakte van vierkant $ABCD$ is $6 \cdot 6 = 36$ en het zwaartepunt is $Z_4(0, -3)$.

$$m = m_{123} + m_4 = 90 + 36 = 126$$

$$\vec{z} = \frac{90}{126} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{4}{5} \end{pmatrix} + \frac{36}{126} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt van de hele figuur is $Z(0, 1\frac{1}{7})$.

- c Het zwaartepunt van het trapezium is $Z_1(0, 2\frac{4}{5})$ en de oppervlakte is 90.

Het zwaartepunt van de rechthoek is $Z_2(0, -\frac{1}{2}p)$ en de oppervlakte is $6p$.

$$m = m_1 + m_2 = 90 + 6p$$

$$\vec{z} = \frac{90}{90 + 6p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{4}{5} \end{pmatrix} + \frac{6p}{90 + 6p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}p \end{pmatrix}$$

Als het zwaartepunt van de figuur in $(0, 0)$ ligt, dan geldt

$$\frac{90}{90 + 6p} \cdot 2\frac{4}{5} + \frac{6p}{90 + 6p} \cdot -\frac{1}{2}p = 0$$

$$90 \cdot 2\frac{4}{5} + 6p \cdot -\frac{1}{2}p = 0$$

$$252 - 3p^2 = 0$$

$$3p^2 = 252$$

$$p^2 = 84$$

$$p = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \quad (p = -\sqrt{84} \text{ voldoet niet})$$

22.4 Redeneren en rekenen

intro Je kunt de lengten van de zijden van $\triangle ABC$ berekenen door gelijkvormigheid te gebruiken. De driehoeken ABC en MBP zijn gelijkvormig.

$$MB = 6, PM = 2 \text{ en } BP = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$$

$$AB = 12 \text{ en dus } AB : MB = 2 : 1.$$

$$\text{Dan is } AC = 2 \cdot MP = 2 \cdot 2 = 4 \text{ en } BC = 2 \cdot BP = 2\sqrt{32}$$

Je gebruikt de stelling van Thales om aan te tonen dat $\angle ACB = 90^\circ$.

Je gebruikt de raaklijnstelling om aan te tonen dat $\angle MPB = 90^\circ$.

En omdat $\angle ACB = \angle MPB$ en $\angle CBA = \angle PBM$ zijn de driehoeken ABC en MBP gelijkvormig.

- 28 a** $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$ en $D(0, 4)$

Een vergelijking van de cirkel c is $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

$$\text{Een vectorvoorstelling van de raaklijn uit } D \text{ is } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

Deze raaklijn snijden met de cirkel c geeft

$$(\lambda - 2)^2 + (4 + \lambda m)^2 = 4$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 16 + 8\lambda m + m^2\lambda^2 = 4$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (8m - 4)\lambda + 16 = 0$$

$$D = (8m - 4)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 16$$

$$D = 64m^2 - 64m + 16 - 64m^2 - 64$$

$$D = -64m - 48$$

$$D = 0 \text{ geeft } -64m - 48 = 0.$$

$$-64m = 48$$

$$m = -\frac{48}{64} = -\frac{3}{4}$$

22 Afsluiting meetkunde

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ of } \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ en dus is de normaalvector } \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Een vergelijking van lijn DE is $3x + 4y = c$.

$x = 0$ en $y = 4$ invullen geeft $c = 16$

De vergelijking van lijn DE is $3x + 4y = 16$.

- b** Voor E geldt $x = 4$ en dus $3 \cdot 4 + 4y = 16$.

$$4y = 4$$

$$y = 1 \text{ dus } E(1, 4)$$

- c** $CE = 4 - 1 = 3$ en de oppervlakte van $\triangle ECD$ is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

- d** $PM \perp DE$ (raaklijnstelling)

Omdat $DP = DA$ (raaklijnstukken) en $AM = PM$ (straal), is $\angle DMA = \angle DMP$.

Evenzo is $\angle PME = \angle BME$.

$$\angle DMA + \angle DMP + \angle PME + \angle BME = 180^\circ$$

$$\angle DMP + \angle PME = 180^\circ : 2 = 90^\circ$$

- e** $\angle A = \angle B = 90^\circ$

$\angle ADM + \angle DMA = 90^\circ$ en ook $\angle BME + \angle DMA = 90^\circ$, dus

$$\angle ADM = \angle BME.$$

Dus is $\triangle DAM \sim \triangle MBE$.

- f** $BE : AM = BM : AD$ geeft $BE : 2 = 2 : 4$ dus $BE = 1$.

Dan is $CE = 4 - 1 = 3$ en is de oppervlakte van $\triangle ECD$ gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

- g** $BE = x$, $PE = x$ (raaklijnstukken) en $CE = 4 - x$

$DP = AD = 4$ (raaklijnstukken)

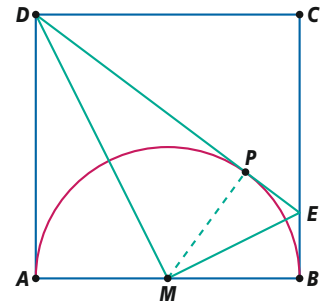
De stelling van Pythagoras in $\triangle ECD$ geeft $4^2 + (4 - x)^2 = (4 + x)^2$.

$$16 + 16 - 8x + x^2 = 16 + 8x + x^2$$

$$-16x = -16 \text{ ofwel } x = 1$$

- h** $BE = x = 1$ geeft $CE = 4 - 1 = 3$.

De oppervlakte van $\triangle ECD$ is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.



29 $\tan(\angle CAB) = \frac{BC}{AB}$ geeft $BC = AB \cdot \tan(60^\circ) = 6\sqrt{3}$.

$$AC = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{108 + 36} = \sqrt{144} = 12$$

$$\cos(\angle DAB) = \frac{AD}{AB} \text{ geeft } AD = 6 \cdot \cos(60^\circ) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ en dus is}$$

$$CD = 12 - 3 = 9.$$

$$\tan(\angle EAB) = \frac{EB}{AB} \text{ geeft } EB = 6 \cdot \tan(30^\circ) = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ en dus is}$$

$$EC = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

$$DB = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

De hoogtelijn uit E op zijde CD snijdt zijde CD in punt F .

$\triangle DBC \sim \triangle FEC$ (want $\angle CDE = \angle CFE$ en $\angle DCE = \angle ECF$)

$$EF : DB = EC : BC \text{ geeft } EF = \frac{EC \cdot DB}{BC} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

$$\text{De oppervlakte van } \triangle DEC = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

Dus de oppervlakte van $\triangle DEC$ is de helft van die van $\triangle ABC$.

- 30 a** $CA = \sqrt{MA^2 + MC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128}$
 $CB = \sqrt{MC^2 + MB^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128}$
 $\angle NPC = 90^\circ$ (raaklijnstelling) dus $CP = \sqrt{CN^2 - PN^2} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{128}$
 Hieruit volgt $CA = CB = CP$.
- b** $\angle ACB = 90^\circ$ (Thales)
 $\angle CAP = \angle CPA$ (basishoeken in een gelijkbenige driehoek)
 $\angle CPB = \angle CBP$ (basishoeken in een gelijkbenige driehoek)
 Hieruit volgt $\angle APB = \angle CAP + \angle CBP$.
 $\angle ACB + \angle CAP + \angle APB + \angle CBP = 360^\circ$ (hoekensom vierhoek)
 $90^\circ + 2 \cdot \angle APB = 360^\circ$
 $2 \cdot \angle APB = 270^\circ$
 $\angle APB = 135^\circ$

- 31** Noem het middelpunt M , dan moet gelden $AM = BM = d(M, l)$.
 Uit $AM = BM$ volgt dat M op de middelloodlijn van lijnstuk AB moet liggen.

Het midden van lijnstuk AB is $(3, -1)$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$ dus een richtingsvector van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Middelloodlijn: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ of korter: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

M op de middelloodlijn, dus $M(3\lambda, -\lambda)$.

$$AM = \sqrt{(6 - 3\lambda)^2 + (8 + \lambda)^2} = \sqrt{36 - 36\lambda + 9\lambda^2 + 64 + 16\lambda + \lambda^2}$$

$$AM = \sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 100}$$

$$d(M, l) = \frac{|3 \cdot 3\lambda + 4 \cdot -\lambda - 60|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5\lambda - 60|}{5} = |\lambda - 12|$$

Uit $AM = d(M, l)$ volgt $\sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 100} = |\lambda - 12|$.

$$10\lambda^2 - 20\lambda + 100 = (\lambda - 12)^2$$

$$10\lambda^2 - 20\lambda + 100 = \lambda^2 - 24\lambda + 144$$

$$9\lambda^2 + 4\lambda - 44 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 9 \cdot -44 = 1600$$

$$\lambda = \frac{-4 + 40}{18} = 2 \text{ of } \lambda = \frac{-4 - 44}{18} = -2\frac{2}{3}$$

$\lambda = 2$ geeft $M(6, -2)$ en $r = |2 - 12| = 10$.

$\lambda = -2\frac{2}{3}$ geeft $M(-8, 2\frac{2}{3})$ en $r = |-2\frac{2}{3} - 12| = 14\frac{2}{3}$.

De cirkels zijn $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 100$ en

$$(x + 8)^2 + (y - 2\frac{2}{3})^2 = (14\frac{2}{3})^2 = 215\frac{1}{9}.$$

- 32 a** $d(M, \text{lijn } AB) = MQ = 4$
 Lijn AC : de richtingscoëfficiënt is $\frac{6 - 2}{1 - -2} = \frac{4}{3}$

$x = -2$ en $y = 2$ invullen bij $y = \frac{4}{3}x + b$ geeft $2 = \frac{4}{3} \cdot -2 + b$ dus $b = 4\frac{2}{3}$.

Een vergelijking van lijn AC is $y = \frac{4}{3}x + 4\frac{2}{3}$ ofwel $4x - 3y + 14 = 0$.

$$d(M, \text{lijn } AC) = \frac{|4 \cdot 6 - 3 \cdot 6 + 14|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

Lijn BC : de richtingscoëfficiënt is $\frac{6 - 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$

$x = 4$ en $y = 2$ invullen bij $y = -\frac{4}{3}x + b$ geeft $2 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + b$ dus $b = 7\frac{1}{3}$.

Een vergelijking van lijn BC is $y = -\frac{4}{3}x + 7\frac{1}{3}$ ofwel $4x + 3y - 22 = 0$.

$$d(M, \text{lijn } BC) = \frac{|4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 - 22|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

22 Afsluiting meetkunde

$d(M, \text{lijn } AB) = d(M, \text{lijn } BC)$ dus M ligt op de bissectrice van hoek CBQ .

$d(M, \text{lijn } AC) = d(M, \text{lijn } BC)$ dus M ligt op de bissectrice van hoek PCB .

En dus is M het snijpunt van deze bissectrices.

b $d(M, \text{lijn } AB) = d(M, \text{lijn } AC)$ dus M ligt op de bissectrice van hoek CAB .

c Het middelpunt is $M(6, 6)$ en de straal is $MQ = 4$.

Een vergelijking van de cirkel is $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

33 a $\vec{e} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}$

$$\vec{f} = \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}$$

$$\vec{g} = \frac{1}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{d} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}$$

$$\vec{h} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{d} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s}$$

b $\overrightarrow{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s} - \left(\frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s} \right) = \frac{1}{3} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3} \cdot \vec{a} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

$$\overrightarrow{HG} = \vec{g} - \vec{h} = \frac{1}{3} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3} \cdot \vec{d} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s} - \left(\frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{d} + \frac{1}{3} \cdot \vec{s} \right) = \frac{1}{3} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3} \cdot \vec{a} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

De overstaande zijden van vierhoek $EFGH$ zijn evenwijdig en even lang, dus is $EFGH$ een parallellogram.

c Uit $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$ volgt dat $EF \parallel AC$ en $HG \parallel AC$.

Uit $\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$ volgt dat $EH \parallel BD$ en $FG \parallel BD$.

d Zwaartelijn SE snijdt zijde AB in punt T met $SE = \frac{2}{3} \cdot ST$.

Noem P het snijpunt van lijn AS met lijn HE en Q het snijpunt van lijn BS met lijn EF .

$$\triangle PQS \sim \triangle ABS \text{ met } SP = \frac{1}{3} \cdot AS \text{ en } opp \triangle PQS = \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot opp \triangle ABS.$$

$$opp \triangle PQS = opp \triangle PQE \text{ (half parallellogram),}$$

$$\text{dus } opp EQSP = \frac{2}{9} \cdot opp \triangle ABS.$$

Zo ook voor de andere driehoeken, dus is $opp EFGH : opp ABCD = 2 : 9$.

34 a $\vec{b} = \vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ p \end{pmatrix}$ en $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + p^2}$

$$|\vec{b}| = 5 \text{ geeft } \sqrt{9 + p^2} = 5.$$

$$9 + p^2 = 25$$

$$p^2 = 16$$

$$p = -4 \text{ of } p = 4$$

b $\sqrt{9 + p^2} = 7$ geeft $9 + p^2 = 49$.

$$p^2 = 40$$

$$p = -\sqrt{40} (= -2\sqrt{10}) \text{ of } p = \sqrt{40} (= 2\sqrt{10})$$

35 a Stel $P(x, y)$ is een punt van een bissectrice, dus geldt $d(P, l) = d(P, m)$.

$$d(P, l) = \frac{|1 \cdot x - 3 \cdot y + 16|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|x - 3y + 16|}{\sqrt{10}}$$

$$d(P, m) = \frac{|3 \cdot x - 1 \cdot y - 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3x - y - 8|}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{|x - 3y + 16|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y - 8|}{\sqrt{10}}$$

$$x - 3y + 16 = 3x - y - 8 \text{ of } x - 3y + 16 = -(3x - y - 8)$$

$$-2x - 2y = -24 \text{ of } 4x - 4y = -8$$

De gevraagde bissectrices zijn $x + y = 12$ en $x - y = -2$.

- b** Vanwege de ligging van punt A ligt middelpunt M op de bissectrice met vergelijking $y = x + 2$.

Stel $M(u, u + 2)$ en de straal r .

De cirkel raakt lijn m , dus $d(M, m) = r$.

$$d(M, m) = \frac{|3 \cdot u - 1 \cdot (u + 2) - 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|2u - 10|}{\sqrt{10}}$$

De cirkel gaat door punt $A(1, -1)$, dus $MA = r$.

$$MA = \sqrt{(1 - u)^2 + (-1 - (u + 2))^2} = \sqrt{(1 - u)^2 + (-3 - u)^2} \text{ ofwel}$$

$$MA = \sqrt{2u^2 + 4u + 10}$$

$$d(M, m) = MA \text{ geeft } \frac{|2u - 10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{2u^2 + 4u + 10}$$

$$\frac{(2u - 10)^2}{10} = 2u^2 + 4u + 10$$

$$4u^2 - 40u + 100 = 20u^2 + 40u + 100$$

$$16u^2 + 80u = 0 \text{ ofwel } 16u(u + 5) = 0$$

$$u = 0 \text{ of } u = -5$$

$$M_1(0, 2) \text{ of } M_2(-5, -3) \text{ en } r_1 = \sqrt{10} \text{ of } r_2 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

De gevraagde middelpuntsvergelijkingen zijn $x^2 + (y - 2)^2 = 10$ en $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 40$.

36 a $AP = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$$BP = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ dus } AP = 2 \cdot BP.$$

b $AP = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ en $BP = \sqrt{(x - 7)^2 + y^2}$

Uit $AP = 2 \cdot BP$ volgt $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x - 7)^2 + y^2}$.

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4((x - 7)^2 + y^2)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 - 56x + 196 + 4y^2$$

$$3x^2 - 54x + 3y^2 + 195 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 18x + 65 = 0$$

$$(x - 9)^2 - 81 + y^2 + 65 = 0$$

$$(x - 9)^2 + y^2 = 16$$

Dit is de middelpuntsvergelijking van een cirkel, dus de punten P liggen op een cirkel.

X6 a Een vergelijking van de lijn OB is $y = 3x$.

Hoogtelijn AC staat loodrecht op lijn OB en heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{3}$.

$x = 5$ en $y = 0$ invullen bij $y = -\frac{1}{3}x + b$ geeft $0 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + b$ dus $b = 1\frac{2}{3}$.

Een vergelijking van hoogtelijn AC is $y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$.

Voor punt C geldt $3x = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$.

$$3\frac{1}{3}x = 1\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ en } y = 1\frac{1}{2} \text{ dus } C\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right).$$

Punt Q is het midden van lijnstuk CD dus $Q\left(1\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Punt P is het midden van lijnstuk AB dus $P\left(3\frac{1}{2}, 3\right)$.

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2} \\ 0 - 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{4} \\ -2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1\frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{4} + -1\frac{1}{2} \cdot -2\frac{1}{4} = 0 \text{ dus } PQ \perp CD.$$

22 Afsluiting meetkunde

- b** S ligt op de cirkel met middellijn ML en dus middelpunt V (*Thales*).
 T ligt ook op de cirkel met middellijn ML en dus middelpunt V (*Thales*).
 Omdat S en T beide op de cirkel liggen met middelpunt V geldt $SV = TV$.
 $\triangle STV$ is gelijkbenig. In een gelijkbenige driehoek valt de zwaartelijn uit de top samen met de hoogtelijn uit de top. Dus is lijnstuk VW ook een hoogtelijn. En daarom geldt $VW \perp ST$.

22.5 Gemengde opdrachten

- 37** $c_1 : M_1(-5, 5)$ en $r_1 = 5$
 $c_2 : M_2(5, 5)$ en $r_2 = 5$
 Vanwege de symmetrie ligt met middelpunt van c_3 op de y -as.
 Stel $M_3(0, p)$ dan is $r_3 = p + 1$.
 Omdat c_3 raakt aan c_1 geldt $M_1M_3 + r_1 = r_3$.

$$M_1M_3 = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (p - 5)^2} = \sqrt{25 + (p - 5)^2}$$
 Uit $M_1M_3 + r_1 = r_3$ volgt $\sqrt{25 + (p - 5)^2} + 5 = p + 1$.

$$\sqrt{p^2 - 10p + 50} = p - 4$$

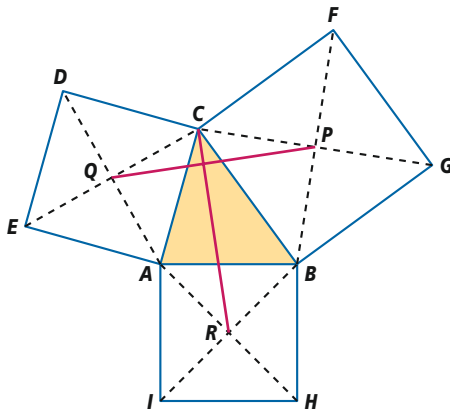
$$p^2 - 10p + 50 = p^2 - 8p + 16$$

$$-2p = -34 \text{ dus } p = 17$$

$$M(0, 17) \text{ en } r = 17 + 1 = 18$$
- 38 a** $\angle BAC = 90^\circ$ want $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (*Pythagoras*).
 Dan ligt A op de cirkel met middellijn BC en middelpunt M (*Thales*).
 En dus is $MB = MA = MC$.
 Omdat $MA = MC$ is $\triangle AMC$ gelijkbenig.
- b** De loodlijn uit M op zijde AC snijdt zijde AC in punt N .
 Omdat $MA = MC$, is N het midden van zijde AC .
 $AM = 5$, $AN = 4$ dus $MN = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
 De oppervlakte van $\triangle MNA$ is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.
 $\triangle MNA \sim \triangle FMA$ (want $\angle MNA = \angle FMA = 90^\circ$ en $\angle MAN = \angle FAM$)
 $MF : MN = MA : NA$ geeft $MF : 3 = 5 : 4$ en dus $MF = \frac{5 \cdot 3}{4} = 3\frac{3}{4}$.
 De oppervlakte van $\triangle FMA$ is $\frac{1}{2} \cdot MF \cdot MA = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 5 = 9\frac{3}{8}$.
 De oppervlakte van vierhoek $AFDE$ is $5^2 - 9\frac{3}{8} = 15\frac{5}{8}$.
- 39** $\angle CAB + \angle CBA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
 $\angle SAB + \angle SBA = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$
 $\angle ASB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
 Dan is $\angle ESA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

40 $A(0, 0)$, $B(8, 0)$ en $C(2, 8)$

Zie de tekening voor de punten D tot en met I .



$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ dan is } \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } E(-8, 2).$$

Q is het midden van lijnstuk EC dus $Q(-3, 5)$.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ dan is } \overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ en } G(16, 6).$$

P is het midden van lijnstuk CG dus $P(9, 7)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan is } \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ en } H(8, -8).$$

R is het midden van lijnstuk AH dus $R(4, -4)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ en } PQ = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2} = \sqrt{148}$$

$$\overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ en } CR = \sqrt{2^2 + (-12)^2} = \sqrt{148} \text{ dus } PQ = CR.$$

$$\begin{pmatrix} -12 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix} = -12 \cdot 2 + -2 \cdot -12 = 0 \text{ dus } PQ = CR \text{ en } PQ \perp CR.$$

Onderzoeksoopdrachten

41 a $c_1 : x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$ ofwel $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

$c_2 : x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 10$ ofwel $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$

De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $12x - 6y = 0$ ofwel $y = 2x$.

De snijpunten van de twee cirkels liggen op lijn l .

b $MP = \sqrt{(4 - -3)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$

$NP = \sqrt{(4 - 3)^2 + (8 - 1)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$

De driehoeken MAP en NBP zijn rechthoekig. (raaklijnstelling)

$AP^2 = MP^2 - MA^2$ geeft $AP = \sqrt{65 - 25} = \sqrt{40}$

$BP^2 = NP^2 - NB^2$ geeft $BP = \sqrt{50 - 10} = \sqrt{40}$ dus $AP = BP$.

c P op l dus voor P geldt $P(x, 2x)$.

$MP = \sqrt{(x - -3)^2 + (2x - 4)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 16x + 16}$ ofwel

$MP = \sqrt{5x^2 - 10x + 25}$

$NP = \sqrt{(x - 3)^2 + (2x - 1)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1}$

$NP = \sqrt{5x^2 - 10x + 10}$

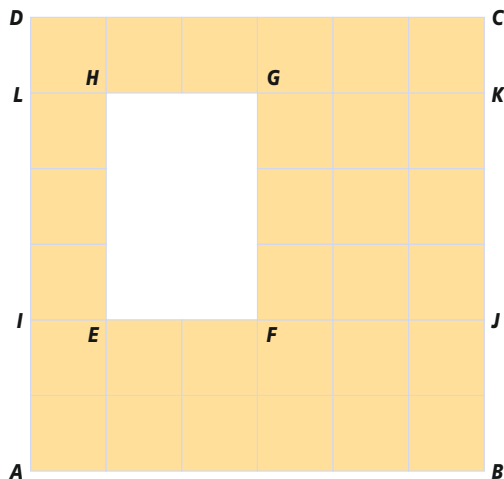
$AP^2 = MP^2 - MA^2$ geeft $AP = \sqrt{5x^2 - 10x + 25 - 25} = \sqrt{5x^2 - 10x}$

$BP^2 = NP^2 - NB^2$ geeft $BP = \sqrt{5x^2 - 10x + 10 - 10} = \sqrt{5x^2 - 10x}$ dus

$AP = BP$ geldt voor elk punt P op l dat buiten de cirkels ligt.

22 Afsluiting meetkunde

- 42 a** $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(6, 6)$, $D(0, 6)$, $E(1, 2)$, $F(3, 2)$, $G(3, 5)$ en $H(1, 5)$
Zie de tekening voor de punten $I(0, 2)$, $J(6, 2)$, $K(6, 5)$ en $L(0, 5)$.



Van rechthoek $ABJI$ is het zwaartepunt $Z_1(3, 1)$ en de oppervlakte $6 \cdot 2 = 12$.

Van rechthoek $FJKG$ is het zwaartepunt $Z_2(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ en de oppervlakte $3 \cdot 3 = 9$.

Van rechthoek $LKCD$ is het zwaartepunt $Z_3(3, 5\frac{1}{2})$ en de oppervlakte $6 \cdot 1 = 6$.

Van rechthoek $IEHL$ is het zwaartepunt $Z_4(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ en de oppervlakte $3 \cdot 1 = 3$.

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 12 + 9 + 6 + 3 = 30$$

$$\vec{z} = \frac{12}{30} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{30} \cdot \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{6}{30} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{3}{30} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{5} \\ 2\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt is $Z(3\frac{1}{5}, 2\frac{9}{10})$.

- b** Noem $Z_1(3, 3)$ het zwaartepunt van vierkant $ABCD$ (met oppervlakte 36).
Noem $Z_2(2, 3\frac{1}{2})$ het zwaartepunt van rechthoek $EFGH$ (met oppervlakte 6).
Noem Z_3 het zwaartepunt van de ontstane figuur (met oppervlakte 30).
Dan geldt $\vec{z}_1 = \frac{6}{36} \cdot \vec{z}_2 + \frac{30}{36} \cdot \vec{z}_3$.

$$\text{Ofwel } \frac{30}{36} \cdot \vec{z}_3 = \vec{z}_1 - \frac{6}{36} \cdot \vec{z}_2$$

$$\vec{z}_3 = \frac{36}{30} \cdot \vec{z}_1 - \frac{6}{30} \cdot \vec{z}_2$$

$$\vec{z}_3 = \frac{36}{30} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{30} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{5} \\ 2\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

Samenvatting

- S1** $x = 5 + 3\lambda$ en $y = \lambda$ invullen bij de vergelijking van c geeft $(5 + 3\lambda)^2 + \lambda^2 = 65$
 $25 + 30\lambda + 9\lambda^2 + \lambda^2 = 65$
 $10\lambda^2 + 30\lambda - 40 = 0$
 $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$
 $(\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0$
 $\lambda = 1$ of $\lambda = -4$
 De snijpunten zijn $(8, 1)$ en $(-7, -4)$.

S2 $c_1 : x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4$ ofwel $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
 $c_2 : x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 17$ ofwel $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$

De vergelijkingen van elkaar aftrekken:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0 \quad - \\ \hline 2x + 4y + 4 = 0 \end{array}$$

$$2x = -4y - 4$$

$$x = -2y - 2$$

Dit resultaat invullen in de vergelijking van c_1 geeft

$$(-2y - 2)^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$4y^2 + 8y + 4 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$5y^2 + 6y + 1 = 0$$

$$y = \frac{-6 + \sqrt{16}}{10} = -\frac{1}{5} \text{ of } y = \frac{-6 - \sqrt{16}}{10} = -1$$

$$x = -2 \cdot -\frac{1}{5} - 2 = -1\frac{3}{5} \text{ of } x = -2 \cdot -1 - 2 = 0$$

De snijpunten zijn $(-1\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ en $(0, -1)$.

S3 Het middelpunt van de cirkel is $M(1, -2)$.

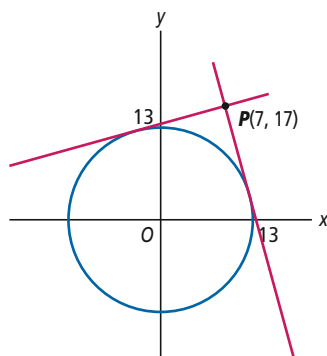
Als $P(5, 5)$, dan is $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ een normaalvector van de raaklijn in P .

Een vergelijking van de raaklijn is dan $4x + 7y = c$.

$x = 5$ en $y = 5$ invullen geeft $4 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = c$ dus $c = 55$.

Een vergelijking van de raaklijn is $4x + 7y = 55$.

S4 Uit een schets blijkt dat geen van de raaklijnen verticaal is.



Voor de raaklijnen geldt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 7 + \lambda$ en $y = 17 + \lambda m$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$(7 + \lambda)^2 + (17 + \lambda m)^2 = 169$$

$$49 + 14\lambda + \lambda^2 + 289 + 34\lambda m + \lambda^2 m^2 = 169$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (14 + 34m)\lambda + 169 = 0$$

$$D = (14 + 34m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 169$$

$$D = 196 + 952m + 1156m^2 - 676 - 676m^2$$

$$D = 480m^2 + 952m - 480$$

$$D = 0 \text{ geeft } 480m^2 + 952m - 480 = 0.$$

$$60m^2 + 119m - 60 = 0$$

$$D = 119^2 - 4 \cdot 60 \cdot -60 = 28\,561$$

$$m = \frac{-119 + \sqrt{28\,561}}{120} = \frac{5}{12} \text{ of } m = \frac{-119 - \sqrt{28\,561}}{120} = \frac{-288}{120} = -\frac{12}{5}$$

De vectorvoorstellingen van de raaklijnen zijn

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

22 Afsluiting meetkunde

S5 $l: 8x + 15y = 1$ ofwel $8x + 15y - 1 = 0$
 $d(P, l) = \frac{|8 \cdot -6 + 15 \cdot -16 - 1|}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \frac{289}{17} = 17$

S6 $l: 3x + 4y = 26$ ofwel $l: y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{2}$
 $m: 5x - 2y = 26$ ofwel $m: y = 2\frac{1}{2}x - 13$

De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{3}{4}$ en de richtingscoëfficiënt van m is $2\frac{1}{2}$.

$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} \text{ geeft } \alpha = 36,896\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = 2\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = 68,198\dots^\circ$$

$$\alpha + \beta = 36,896\dots^\circ + 68,198\dots^\circ = 105,068\dots^\circ$$

$$\angle(l, m) = 180^\circ - 105,068\dots^\circ \approx 75^\circ$$

S7 Elk vierkant heeft oppervlakte 4.

De zwaartepunten van de zes vierkanten zijn $(3, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$, $(5, 3)$, $(7, 3)$ en $(3, 5)$.

$$\vec{z} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{2}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt is $(3\frac{2}{3}, 3)$.

S8 a Neem $M(0, 0)$, dan is $A(-r, 0)$ en $B(r, 0)$.

Noem p de x -coördinaat van P , met $p > 0$. Dan is $Q(p, 0)$.

$$AQ = r + p$$

$$BQ = r - p$$

$$PQ = \sqrt{PM^2 - MQ^2} = \sqrt{r^2 - p^2}$$

$$PQ^2 = r^2 - p^2$$

$$AQ \cdot BQ = (r + p)(r - p) = r^2 - p^2$$

Dus is $PQ^2 = AQ \cdot BQ$.

b $\angle APB = 90^\circ$ (Thales)

$$\angle PAQ + \angle APQ = 90^\circ \text{ (want } \angle AQP = 90^\circ)$$

$$\angle APQ = 90^\circ - \angle BPQ$$

$$\text{dus } \angle PAQ + 90^\circ - \angle BPQ = 90^\circ \text{ ofwel } \angle PAQ = \angle BPQ$$

$$\tan(\angle PAQ) = \frac{PQ}{AQ}$$

$$\tan(\angle BPQ) = \frac{BQ}{PQ}$$

$$\text{Omdat } \angle PAQ = \angle BPQ \text{ is } \frac{PQ}{AQ} = \frac{BQ}{PQ} \text{ en dus } PQ^2 = AQ \cdot BQ.$$

Test jezelf

T1 De cirkel gaat door O en A , dus ligt het middelpunt op de middelloodlijn van lijnstuk OA . Verder ligt het middelpunt ook op de lijn door A , loodrecht op de raaklijn in A .

Het midden van lijnstuk OA is $(1, 1)$.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dus een richtingsvector van de middelloodlijn is } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Voor de middelloodlijn geldt } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$c: x^2 - 2x + y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$c: (x-1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 + 16 = 0$$

$$c: (x-1)^2 + (y-5)^2 = 10$$

Het middelpunt M van c is $M(1, 5)$.

Een normaalvector van de raaklijn in A is $\vec{n} = \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de raaklijn is $x - 3y = b$.

$x = 2$ en $y = 2$ invullen geeft $2 - 3 \cdot 2 = b$ ofwel $b = -4$.

De raaklijn is de lijn $x - 3y = -4$.

De middelloodlijn snijden met deze raaklijn geeft

$$1 + \lambda - 3(1 - \lambda) = -4$$

$$4\lambda - 2 = -4$$

$$4\lambda = -2$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ dus het middelpunt van de gevraagde cirkel is $(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ en de straal is

$$r = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - 1\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}}$$

Een vergelijking van de cirkel is $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2}$.

T2 Een vectorvoorstelling van de raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 20 + \lambda$ en $y = 20 + \lambda m$ invullen bij de vergelijking van de cirkel geeft

$$(20 + \lambda + 6)^2 + (20 + \lambda m - 7)^2 = 260$$

$$(\lambda + 26)^2 + (\lambda m + 13)^2 = 260$$

$$\lambda^2 + 52\lambda + 676 + \lambda^2 m^2 + 26\lambda m + 169 = 260$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (26m + 52)\lambda + 585 = 0$$

$$D = (26m + 52)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 585$$

$$D = 676m^2 + 2704m + 2704 - 2340 - 2340m^2$$

$$D = -1664m^2 + 2704m + 364$$

$$D = 0 \text{ geeft } -1664m^2 + 2704m + 364 = 0.$$

$$416m^2 - 676m - 91 = 0$$

$$D = (-676)^2 - 4 \cdot 416 \cdot -91 = 608400 (=780^2)$$

$$m = \frac{676 + 780}{832} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ of } m = \frac{676 - 780}{832} = -\frac{1}{8}$$

$x = 20$ en $y = 20$ invullen bij $y = 1\frac{3}{4}x + b$ geeft $20 = 1\frac{3}{4} \cdot 20 + b$ dus $b = -15$.

$x = 20$ en $y = 20$ invullen bij $y = -\frac{1}{8}x + b$ geeft $20 = -\frac{1}{8} \cdot 20 + b$ dus $b = 22\frac{1}{2}$.

Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = 1\frac{3}{4}x - 15$ en $y = -\frac{1}{8}x + 22\frac{1}{2}$.

T3 Voor het middelpunt M van de gevraagde cirkels geldt:

M ligt op de lijn m door P , loodrecht op l én $MP = d(M, x\text{-as})$.

De richtingsvector $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ van l is een normaalvector van m , dus een vergelijking

van m is $3x + 4y = c$.

$x = 1$ en $y = 1$ invullen geeft $3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = c$ dus $c = 7$.

Een vergelijking van m is $3x + 4y = 7$ ofwel $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$.

M ligt op m dus de coördinaten van M zijn te schrijven als $M(a, -\frac{3}{4}a + 1\frac{3}{4})$.

$$MP = \sqrt{(a-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}\right)^2}$$

$$d(M, x\text{-as}) = \left|-\frac{3}{4}a + 1\frac{3}{4}\right|$$

Uit $MP = d(M, x\text{-as})$ volgt $\sqrt{(a-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}\right)^2} = \left|-\frac{3}{4}a + 1\frac{3}{4}\right|$.

$$(a-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}a + 1\frac{3}{4}\right)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + \frac{9}{16}a^2 - \frac{9}{8}a + \frac{9}{16} = \frac{9}{16}a^2 - \frac{21}{8}a + \frac{49}{16}$$

22 Afsluiting meetkunde

$$a^2 - \frac{1}{2}a - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$(a - 1\frac{1}{2})(a + 1) = 0$$

$$a = 1\frac{1}{2} \text{ of } a = -1$$

$$a = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } M(1\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \text{ en } r = y_M = \frac{5}{8}.$$

$$a = -1 \text{ geeft } M(-1, 2\frac{1}{2}) \text{ en } r = 2\frac{1}{2}.$$

$$c_1 : (x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{8})^2 = (\frac{5}{8})^2 = \frac{25}{64}$$

$$c_2 : (x + 1)^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = (2\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$$

- T4** $c : (x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 3$ ofwel $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
Het middelpunt M van c is $M(2, 3)$ en de straal is 4.

$$d(M, l) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 72|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{55}{5} = 11$$

$$d(c, l) = d(M, l) - r = 11 - 4 = 7$$

- T5** $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de raaklijn l is $5x + 12y = c$.

$$x = 5 \text{ en } y = 12 \text{ invullen geeft } 5 \cdot 5 + 12 \cdot 12 = c \text{ dus } c = 169.$$

$$\text{Een vergelijking van } l \text{ is } 5x + 12y = 169.$$

$$\text{Voor punt } C \text{ geldt } AC = d(C, l).$$

$$A(13, 0) \text{ en } C(p, 0) \text{ met } p > 13.$$

$$AC = p - 13$$

$$d(C, l) = \frac{|5 \cdot p + 12 \cdot 0 - 169|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5p - 169|}{13}$$

$$\text{Uit } AC = d(C, l) \text{ volgt } \frac{|5p - 169|}{13} = p - 13.$$

$$|5p - 169| = 13p - 169$$

$$5p - 169 = 13p - 169 \text{ of } 5p - 169 = -13p + 169$$

$$-8p = 0 \text{ of } 18p = 338$$

$$p = 0 \text{ (vervalt) of } p = \frac{338}{18} = 18\frac{7}{9}$$

$$\text{De coördinaten van } C \text{ zijn } (18\frac{7}{9}, 0).$$

- T6 a** Noem het snijpunt van l met de x -as punt S .
Dan is $\triangle OSP \sim \triangle MSQ$ (want $\angle OPS = \angle MQS = 90^\circ$ (raaklijnstelling) en $\angle OSP = \angle MSQ$).

$$\text{Stel } MS = x \text{ dan is } OS = x + 10.$$

$OP = 5$	$OS = x + 10$
$MQ = 2$	$MS = x$

$$5x = 3(x + 10)$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

$$\text{De coördinaten van het snijpunt zijn } (25, 0).$$

- b** Een vectorvoorstelling van l is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$

$$\text{Een vergelijking van } c_1 \text{ is } x^2 + y^2 = 25.$$

$$l \text{ snijden met } c_1 \text{ geeft } (25 + \lambda)^2 + (\lambda m)^2 = 25.$$

$$625 + 50\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 m^2 = 25$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + 50\lambda + 600 = 0$$

$$D = 50^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 600 = 2500 - 2400m^2 - 2400$$

$$D = -2400m^2 + 100$$

$$D = 0 \text{ geeft } -2400m^2 + 100 = 0.$$

$$2400m^2 = 100$$

$$m^2 = \frac{1}{24}$$

$$m = -\sqrt{\frac{1}{24}} \text{ of } m = \sqrt{\frac{1}{24}}$$

De richtingscoëfficiënt van l is $-\sqrt{\frac{1}{24}}$.

- c Het middelpunt van c ligt op de middelloodlijn van lijnstuk PQ .

De lijn OP staat loodrecht op l en heeft dus richtingscoëfficiënt $\sqrt{24}$.

Een vergelijking van de lijn OP is $y = \sqrt{24}x$.

Deze snijden met c_1 geeft $x^2 + (\sqrt{24}x)^2 = 25$.

$$x^2 + 24x^2 = 25$$

$$25x^2 = 25$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1 \text{ dus } P(1, \sqrt{24}).$$

Noem $P'(1, 0)$ en $Q'(10 + q, 0)$, dan is $\triangle OP'P \sim \triangle MQ'Q$.

$OP = 5$	$OP' = 1$	$P'P = \sqrt{24}$
$MQ = 3$	$MQ' = p$	$Q'Q$

$$5p = 3$$

$$p = \frac{3}{5}$$

$$5 \cdot Q'Q = 3 \cdot \sqrt{24}$$

$$Q'Q = \frac{3}{5}\sqrt{24} \text{ dus } Q\left(10\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\sqrt{24}\right)$$

Het midden van lijnstuk PQ is $\left(5\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\sqrt{24}\right)$.

De middelloodlijn van lijnstuk PQ staat loodrecht op l en heeft dus richtingscoëfficiënt $\sqrt{24}$.

$x = 5\frac{4}{5}$ en $y = \frac{4}{5}\sqrt{24}$ invullen bij $y = \sqrt{24}x + b$ geeft $\frac{4}{5}\sqrt{24} = \sqrt{24} \cdot 5\frac{4}{5} + b$ dus $b = -5\sqrt{24}$.

Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = \sqrt{24}x - 5\sqrt{24}$.

Deze middelloodlijn snijden met de lijn $x = 10$ geeft $y = 10\sqrt{24} - 5\sqrt{24} = 5\sqrt{24}$ dus het middelpunt van c is $M(10, 5\sqrt{24})$.

$$\text{De straal is } PM = \sqrt{(10 - 1)^2 + (5\sqrt{24} - \sqrt{24})^2} = \sqrt{81 + 384} = \sqrt{465}.$$

Een vergelijking van c is $(x - 10)^2 + (y - 5\sqrt{24})^2 = 465$.

- T7 a Omdat de oppervlakten van de driehoek en het vierkant gelijk zijn, ligt het zwaartepunt van de figuur precies midden tussen de zwaartepunten van de driehoek en het vierkant.

Het zwaartepunt van het vierkant ligt precies midden in het vierkant, dus op hoogte 3.

Het zwaartepunt van de driehoek ligt op $\frac{1}{3}$ deel van de hoogte van de driehoek (de zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in het zwaartepunt en verdelen elke zwaartelijn in twee stukken in verhouding 1 : 2.). Het zwaartepunt van de driehoek ligt dus op hoogte 4 vanaf de basis van de driehoek.

Het midden tussen de twee zwaartepunten ligt dus $\frac{1}{2}$ boven de basis van de driehoek.

22 Afsluiting meetkunde

- b** Neem als oorsprong het midden van het vierkant.

Dan is het zwaartepunt van het vierkant $Z_1(0, 0)$ en de oppervlakte is 36.

Noem de hoogte van de driehoek p .

Dan is het zwaartepunt van de driehoek $Z_2(0, 3 + \frac{1}{3}p)$ en de oppervlakte is

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot p = 3p.$$

$$m_1 + m_2 = 36 + 3p$$

$$\vec{z} = \frac{36}{36 + 3p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3p}{36 + 3p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 + \frac{1}{3}p \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt ligt op het midden van de gemeenschappelijke zijde als de y -coördinaat gelijk is aan 3.

$$y_z = \frac{36 \cdot 0 + 3p \cdot (3 + \frac{1}{3}p)}{36 + 3p}$$

$$y_z = 3 \text{ geeft } \frac{36 \cdot 0 + 3p \cdot (3 + \frac{1}{3}p)}{36 + 3p} = 3.$$

$$9p + p^2 = 3(36 + 3p)$$

$$9p + p^2 = 108 + 9p$$

$$p^2 = 108$$

$$p = \sqrt{108}$$

De hoogte van de driehoek is in dat geval $\sqrt{108}$.

Examen voorbereiding

Functies, grafieken en vergelijkingen

- 1 a Uit $6x - 4 \geq 0$ volgt $6x \geq 4$ dus $x \geq \frac{2}{3}$.

Omdat $\sqrt{6x - 4} \geq 0$ is $10 + \sqrt{6x - 4} \geq 10$.

Dit geeft $D_f = [\frac{2}{3}, \rightarrow)$ en $B_f = [10, \rightarrow)$.

- b $D_g = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ en met $(x - 3)^2 \geq 0$ is het $B_g = [-8, \rightarrow)$.

- c Uit $9 - x^2 > 0$ volgt $-3 < x < 3$.

Omdat ${}^3\log(9 - x^2) \leq 2$ is $4 + {}^3\log(9 - x^2) \leq 6$.

Dit geeft $D_h = \langle -3, 3 \rangle$ en $B_h = \langle \leftarrow, 6 \rangle$.

- d Er moet gelden $x^2 - 2x - 3 \neq 0$, ofwel $(x - 3)(x + 1) \neq 0$.

Omdat $\frac{5}{x^2 - 2x - 3} \neq 0$ is $k(x) \neq -1$. Verder is $x^2 - 2x - 3 \geq -4$.

Dus voor $-1 < x < 3$ geldt $-1 + \frac{5}{x^2 - 2x - 3} \leq -2,25$.

Dit geeft $D_k = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, 3 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$ en $B_k = \langle \leftarrow; -2,25 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$

$$2 \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - 7}{4 - 8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 - \frac{7}{x}}{\frac{4}{x} - 8} = \frac{12 - 0}{0 - 8} = -1\frac{1}{2}$$

$$b \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^4 - 3x^2 + 2}{6x^3 - x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{\frac{6}{x} - 1} = \frac{8 - 0 + 0}{0 - 1} = -8$$

$$c \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(4x^2 + x - 10)}{5x^4 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^3 + 3x^2 - 30x}{5x^4 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{12}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{30}{x^3}}{5 + \frac{2}{x^3}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$d \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 3)(3x^2 + 5)}{x^2(1 - 3x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + 10x + 9x^2 + 15}{x^2 - 3x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 + \frac{10}{x^2} + \frac{9}{x} + \frac{15}{x^3}}{\frac{1}{x} - 3} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2 + 4x)^2}{12x - 3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^4 + 24x^3 + 16x^2}{12x - 3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9 + \frac{24}{x} + \frac{16}{x^2}}{\frac{12}{x} - 3} = \frac{9}{-3} = -3$$

Examen voorbereiding

3 a Deze grafiek heeft geen asymptoten.

b Uit $g(x) = \frac{5x^2 + 1}{3x^2 - 6x} = \frac{5 + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{6}{x}}$ volgt dat de grafiek van g de lijn $y = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ als

horizontale asymptoot heeft.

Met $3x^2 - 6x = 0$ ofwel $3x(x - 2) = 0$ vind je de verticale asymptoten $x = 0$ en $x = 2$.

c Als $x \rightarrow \infty$ dan $h(x) \rightarrow 25 + 0 = 25$ dus de horizontale asymptoot is $y = 25$.

Er is geen verticale asymptoot.

d Er is alleen de horizontale asymptoot $y = 0$.

4 a De scheve asymptoot is de lijn $y = 3x + 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad g(x) &= \frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 4} \\ g(x) &= \frac{2x^2 + 8x - 3x - 1}{x + 4} \\ g(x) &= \frac{2x(x + 4) - 3(x + 4) + 11}{x + 4} \\ g(x) &= 2x - 3 + \frac{11}{x + 4} \end{aligned}$$

De scheve asymptoot is de lijn $y = 2x - 3$

5 a $f(x) = \frac{5x - 20}{x^2 - 3x - 4} = \frac{5(x - 4)}{(x - 4)(x + 1)} = \frac{5}{x + 1}$ mits $x \neq 4$.

De perforatie is het punt $\left(4, \frac{5}{4 + 1}\right) = (4, 1)$.

b $h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 6x + 8} = \frac{x(x^2 + x - 2)}{x^2 + 6x + 8} = \frac{x(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x + 4)} = \frac{x(x - 1)}{x + 4}$ mits $x \neq -2$.

De perforatie is het punt $\left(-2, \frac{-2(-2 - 1)}{-2 + 4}\right) = (-2, 3)$.

c $k(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{e^x - 1} = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{e^x - 1} = e^x - 4$ mits $x \neq 0$.

De perforatie is het punt $(0, e^0 - 4) = (0, -3)$.

d $m(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x} = \frac{x(x^2 + 6x + 9)}{x(x^2 - 9)} = \frac{(x + 3)(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x + 3}{x - 3}$ mits

$x \neq 0$ en $x \neq -3$.

De perforaties zijn de punten $(0, -1)$ en $(-3, 0)$.

6 a $g(x) = f(2x) + 4$

$$g(x) = (2x)^2 + 6(2x) + 1 + 4$$

$$g(x) = 4x^2 + 12x + 5$$

b $g(x) = -4 \cdot f(x - 3)$

$$g(x) = -4((x - 3)^2 + 6(x - 3) + 1)$$

$$g(x) = -4(x^2 - 6x + 9 + 6x - 18 + 1)$$

$$g(x) = -4x^2 + 32$$

- 7 a** Er moet worden aangetoond dat $f(p) = f(-p)$.

$$f(-p) = (-p)^4 + \frac{3}{8 - 6 \cdot (-p)^2}$$

$$f(-p) = p^4 + \frac{3}{8 - 6p^2}$$

De grafiek van f is symmetrisch in de y -as omdat $f(p) = f(-p)$ voor elke p .

- b** De grafiek van g over een afstand 2 naar links verschuiven geeft

$$h(x) = (x + 2)^3 - 6(x + 2)^2 + 12(x + 2) - 8$$

$$h(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 24x - 24 + 12x + 24 - 8$$

$$h(x) = x^3$$

- c** Er is puntsymmetrie in de oorsprong als voor de functie h geldt:

$$h(-p) = -h(p).$$

$h(-p) = (-p)^3 = -p^3 = -h(p)$ dus is de grafiek van h puntsymmetrisch in $(0, 0)$ en daarmee is de grafiek van g puntsymmetrisch in $(2, 0)$.

8 a $f(x) = x^2 + 8x - 17$

$$f(x) = (x + 4)^2 - 16 - 17$$

$$f(x) = (x + 4)^2 - 33$$

c $f(x) = -x^2 - 15x + 18$

$$f(x) = -(x^2 + 15x - 18)$$

$$f(x) = -\left(x + 7\frac{1}{2}\right)^2 + 56\frac{1}{4} + 18$$

$$f(x) = -\left(x + 7\frac{1}{2}\right)^2 + 74\frac{1}{4}$$

b $f(x) = 3x^2 + 12x + 20$

$$f(x) = 3(x^2 + 4x + 4) + 8$$

$$f(x) = 3(x + 2)^2 + 8$$

d $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 24$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - \frac{1}{2} - 24$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 24\frac{1}{2}$$

- 9 a** De grafiek van $f(x) = 2(x - 8)(x - 2)$ heeft als snijpunten met de x -as $(8, 0)$ en $(-2, 0)$.

$$\text{De top is } \left(\frac{8 + (-2)}{2}, f(3)\right) = (3, -50).$$

Het snijpunt met de y -as is $(0, f(0)) = (0, -32)$.

- b** De grafiek van $g(x) = -3(x + 4)^2 + 15$ heeft als top $(-4, 15)$.

Uit $-3(x + 4)^2 + 15 = 0$ volgt $(x + 4)^2 = 5$ dus de snijpunten met de x -as zijn $(-4 + \sqrt{5}, 0)$ en $(-4 - \sqrt{5}, 0)$.

Het snijpunt met de y -as is $(0, -33)$.

- c** De grafiek van $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 12$ snijdt de y -as in $(0, 12)$.

Uit $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 12 = 0$ volgt $x^2 - 2x - 48 = 0$ ofwel $(x + 6)(x - 8) = 0$.

De snijpunten met de x -as zijn $(-6, 0)$ en $(8, 0)$.

$$\text{De top is } \left(\frac{-6 + 8}{2}, h(1)\right) = \left(1, 12\frac{1}{4}\right).$$

- 10 a** Uit $3x - 8 \geq 0$ volgt $x \geq \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ dus $D_g = [2\frac{2}{3}, \rightarrow)$.

- b** Uit $x^2 - 15 \geq 0$ volgt $x \leq -\sqrt{15}$ of $x \geq \sqrt{15}$ dus

$$D_h = \langle \leftarrow, -\sqrt{15} \rangle \cup [\sqrt{15}, \rightarrow).$$

Omdat $x^2 + 15 > 0$ voor elke waarde van x is $D_k = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$ of ook $D_k = \mathbb{R}$.

- 11 a** $1 + x^2 \geq 1$, dus $0 < \frac{10}{1 + x^2} \leq 10$. Dit geeft $B_m = \langle 0, 10]$.

- b** Omdat $n(x) = 2\sqrt{x^2 + 5} \geq 2\sqrt{5}$ is $B_n = [2\sqrt{5}, \rightarrow)$.

Omdat $p(x) = 30 - 6\sqrt{4 - 9x} \leq 30$ is $B_p = \langle \leftarrow, 30]$.

Examen voorbereiding

- 12** De coördinaten van beide punten invullen geeft

$$a \cdot 2^b = 96 \text{ en } a \cdot (-1)^b = -3.$$

$$\text{Hieruit volgt } \frac{96}{-3} = \frac{a \cdot 2^b}{a \cdot (-1)^b} \text{ dus } -32 = \frac{a \cdot 2^b}{a \cdot (-1)^b}$$

$$-32 = (-2)^b$$

$$(-2)^5 = (-2)^b$$

$$b = 5$$

$$\text{Dan is } a \cdot 2^5 = 96 \text{ ofwel } a \cdot 32 = 96 \text{ dus } a = 3.$$

- 13 a** Uit de gegevens volgt $p = c \cdot r^2 \sqrt{q}$.

$$\text{De gegeven waarden invullen geeft } 16 = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{64}.$$

$$\text{Uit } 16 = c \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 \text{ volgt } c = 8.$$

$$\text{De gevraagde formule is } p = 8r^2 \sqrt{q}.$$

- b** Uit de gegevens volgt $m = c \cdot \frac{t^3}{w^2}$

$$\text{De gegeven waarden invullen geeft } 20 = c \cdot \frac{10^3}{5^2}$$

$$\text{Uit } 20 = c \cdot \frac{1000}{25} \text{ volgt } c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{De gevraagde formule is } m = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{w^2}$$

- 14 a** $4x^3 - 7x^2 = -3x$

$$4x^3 - 7x^2 + 3x = 0$$

$$x(4x^2 - 7x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{7 + \sqrt{49 - 48}}{8} = 1 \text{ of } x = \frac{7 - \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{3}{4}$$

- b** $(-3x + 5)^2 = 16x^2$

$$-3x + 5 = 4x \text{ of } -3x + 5 = -4x$$

$$-7x = -5 \text{ of } x = -5$$

$$x = \frac{5}{7} \text{ of } x = -5$$

- c** $\frac{12}{x+1} - \frac{2x}{x-3} = -3$

$$\frac{12}{x+1} = \frac{2x}{x-3} - \frac{3(x-3)}{x-3}$$

$$\frac{12}{x+1} = \frac{-x+9}{x-3}$$

$$12(x-3) = (x+1)(-x+9)$$

$$12x - 36 = -x^2 + 8x + 9$$

$$x^2 + 4x - 45 = 0$$

$$(x+9)(x-5) = 0$$

$$x = -9 \text{ of } x = 5$$

- d** $\frac{1}{2}x^4 + x = 0$

$$\frac{1}{2}x(x^3 + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt[3]{-2}$$

15 a $4 + \sqrt{1 - 2x} = 7$

$$\sqrt{1 - 2x} = 3$$

$$1 - 2x = 9$$

$$-2x = 8$$

$$x = -4, \text{ voldoet}$$

b $4x + \sqrt{1 - 2x} = 1$

$$\sqrt{1 - 2x} = -4x + 1$$

$$1 - 2x = 16x^2 - 8x + 1$$

$$0 = 16x^2 - 6x$$

$$16x\left(x - \frac{3}{8}\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{3}{8}$$

Alleen $x = 0$ voldoet.

c $-1\sqrt{x^2 + 7} = x$

$$\sqrt{x^2 + 7} = x + 1$$

$$x^2 + 7 = x^2 + 2x + 1$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3, \text{ voldoet}$$

d $-x + \sqrt{x^2 - 3} = 3$

$$\sqrt{x^2 - 3} = x + 3$$

$$x^2 - 3 = x^2 + 6x + 9$$

$$-12 = 6x$$

$$x = -2, \text{ voldoet}$$

e $6 - \sqrt{x} = \sqrt{x + 6}$

$$(6 - \sqrt{x})^2 = x + 6$$

$$36 - 12\sqrt{x} + x = x + 6$$

$$-12\sqrt{x} = -30$$

$$\sqrt{x} = 2\frac{1}{2}$$

$$x = 6\frac{1}{4}, \text{ voldoet}$$

f $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{7x - x^2}$

$$x^2 - 4 = 7x - x^2$$

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$x = \frac{7 + \sqrt{81}}{4} = 4 \text{ of } x = \frac{7 - \sqrt{81}}{4} = -\frac{1}{2}$$

alleen $x = 4$ voldoet

16 a $3x - 4 = 2\frac{1}{3}x + 5$

$$\frac{2}{3}x - 4 = 5$$

$$\frac{2}{3}x = 9$$

$$x = 13\frac{1}{2}$$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van $3x - 4 \leq 2\frac{1}{3}x + 5$ is $\langle \leftarrow, 13\frac{1}{2} \rangle$.

b De snijpunten voor $x \leq 0$ of $x \geq 5$ volgen uit $x^2 - 5x = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

$$x^2 - 5\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} = 0$$

$$(x - 5)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = 5 \text{ of } x = \frac{1}{2} \text{ (voldoet niet)}$$

De snijpunten voor $0 < x < 5$ volgen uit $-x^2 + 5x = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

$$x^2 - 4\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} = 0$$

$$(x - 5)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = 5 \text{ of } x = -\frac{1}{2} \text{ (voldoen beide niet)}$$

Er is alleen een snijpunt bij $x = 5$.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van de ongelijkheid is $\langle \leftarrow, 5 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$.

c $x^3 - 2x^2 = 8x$

$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0$$

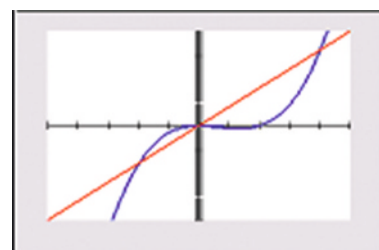
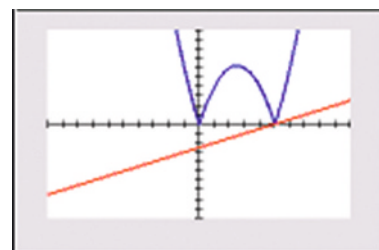
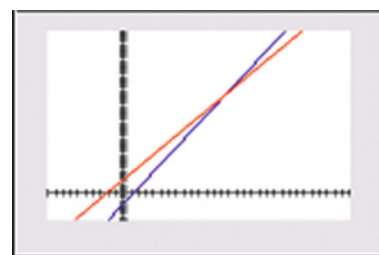
$$x(x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$x(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4 \text{ of } x = -2$$

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van $x^3 - 2x^2 \geq 8x$ is $[-2, 0] \cup [4, \rightarrow)$.



Examen voorbereiding

$$d \quad 1 + \sqrt{6-x} = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\sqrt{6-x} = \frac{1}{2}x + 1$$

$$6-x = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

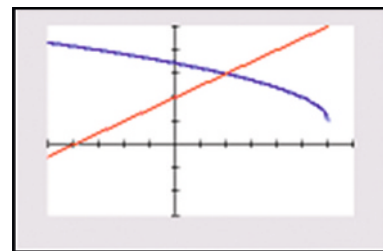
$$(x+10)(x-2) = 0$$

$$x = -10 \text{ of } x = 2$$

Alleen $x = 2$ voldoet.

Zie de plot hiernaast.

De oplossing van $1 + \sqrt{6-x} < \frac{1}{2}x + 2$ is $\langle 2, 6 \rangle$.



$$17 \quad a \quad q = -0,2p + 1,3$$

$$0,2p = -q + 1,3$$

$$p = -5q + 6,5$$

$$d \quad 13p - 4(q+2) = pq$$

$$13p - 4q - 8 = pq$$

$$13p - pq = 4q + 8$$

$$p(13 - q) = 4q + 8$$

$$p = \frac{4q + 8}{13 - q}$$

$$b \quad 3p + 12q = 16 - p$$

$$4p = 16 - 12q$$

$$p = 4 - 3q$$

$$e \quad 0,3q + 1,2pq - 4,5 = 0$$

$$1,2pq = 4,5 - 0,3q$$

$$p = \frac{4,5 - 0,3q}{1,2q}$$

$$p = \frac{15 - q}{4q}$$

$$c \quad \frac{2p-3}{8p} = \frac{4q+5}{7}$$

$$7(2p-3) = 8p(4q+5)$$

$$14p - 21 = 32pq + 40p$$

$$-32pq - 26p = 21$$

$$p(-32q - 26) = 21$$

$$p = \frac{-21}{32q + 26}$$

$$f \quad \frac{7q-3p}{p+8} = \frac{4}{3}$$

$$3(7q-3p) = 4(p+8)$$

$$21q - 9p = 4p + 32$$

$$-13p = -21q + 32$$

$$p = \frac{21q - 32}{13}$$

$$18 \quad a \quad a + 3(8 - 2p) = 6$$

$$a + 24 - 6p = 6$$

$$a = 6p - 18$$

$$c \quad 2(6p) + 3a(6p) = 20$$

$$6p + 9ap = 10$$

$$a = \frac{10 - 6p}{9p}$$

$$b \quad \frac{a}{5p+1} = 10 + 3(5p+1)$$

$$a = 10(5p+1) + 3(5p+1)^2$$

$$a = 75p^2 + 80p + 13$$

$$d \quad a = b - b^2 = p - 1 - (p-1)^2$$

$$a = (p-1) - (p^2 - 2p + 1)$$

$$a = p - 1 - p^2 + 2p - 1$$

$$a = -p^2 + 3p - 2$$

$$\begin{aligned}
 19 \text{ a } y &= -2 + 4x \\
 x &= -2 + 4y \\
 4y &= x + 2 \\
 y &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\
 f^{inv}(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } y &= \frac{12}{3x-2} \\
 x &= \frac{12}{3y-2} \\
 3y-2 &= \frac{12}{x} \\
 3y &= 2 + \frac{12}{x} \\
 y &= \frac{2}{3} + \frac{4}{x} \\
 g^{inv}(x) &= \frac{2}{3} + \frac{4}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \text{ a } \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} &= 25 \\
 \sqrt[3]{b} &= -\sqrt[3]{a} + 25 \\
 b &= (-\sqrt[3]{a} + 25)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } 2ab^3 + 1 &= 5 \\
 2ab^3 &= 4 \\
 b^3 &= \frac{2}{a} \\
 b &= \sqrt[3]{\frac{2}{a}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21 \text{ a } (4q-3)^{\frac{1}{2}} &= p \\
 4q-3 &= p^2 \\
 4q &= 3 + \sqrt{p^2} \\
 q &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{p^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } y &= 2 + \sqrt[3]{4-x} \\
 x &= 2 + \sqrt[3]{4-y} \\
 \sqrt[3]{4-y} &= x-2 \\
 4-y &= (x-2)^3 \\
 y &= 4 - (x-2)^3 \\
 h^{inv}(x) &= 4 - (x-2)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } y &= \frac{5x-1}{2x+3} \\
 x &= \frac{5y-1}{2y+3} \\
 2xy+3x &= 5y-1 \\
 2xy-5y &= -3x-1 \\
 y(2x-5) &= -3x-1 \\
 y &= \frac{-3x-1}{2x-5} \\
 k^{inv}(x) &= \frac{-3x-1}{2x-5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } a+4 &= 0,4b^2 \cdot b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \\
 0,4b^2 \cdot b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} &= a+4 \\
 0,4b^{2\frac{1}{2}} &= a+4 \\
 b^{2\frac{1}{2}} &= 2\frac{1}{2}a+10 \\
 b &= \sqrt[5]{\left(2\frac{1}{2}a+10\right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } 3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b &= 0 \\
 3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} &= 2b \\
 2b &= 7\sqrt{a} \\
 b &= 3\frac{1}{2}\sqrt{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } (q-6) \cdot \sqrt[5]{2p} &= 1 \\
 \sqrt[5]{2p} &= \frac{1}{q-6} \\
 2p &= \frac{1}{(q-6)^5} \\
 p &= \frac{1}{2(q-6)^5}
 \end{aligned}$$

Examen voorbereiding

22 a $9^a \cdot (\sqrt{3})^b = \frac{1}{3}$
 $(3^2)^a \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^b = 3^{-1}$
 $3^{2a} \cdot 3^{\frac{1}{2}b} = 3^{-1}$
 $2a + \frac{1}{2}b = -1$
 $\frac{1}{2}b = -2a - 1$
 $b = -4a - 2$

b $2^a \cdot 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a$
 $2^a \cdot 2^3 = (2^{-1})^b \cdot (2^2)^a$
 $2^{a+3} = 2^{-b+2a}$
 $a+3 = -b+2a$
 $b = a-3$

c $\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a+3} = 0$
 $\sqrt{\frac{1}{4}b} = \sqrt{a+3}$
 $\frac{1}{4}b = a+3$
 $b = 4a+12$

d $\sqrt{3a} - 2\sqrt{b} = 0$
 $2\sqrt{b} = \sqrt{3a}$
 $4b = 3a$
 $b = \frac{3}{4}a$

23 De grafiek van $f_p(x) = \frac{px^2 + 4px + 6}{(x^2 + 1)(x - 2)}$ heeft een perforatie als $px^2 + 4px + 6 = 0$ en $(x^2 + 1)(x - 2) = 0$.
De laatste vergelijking heeft één oplossing, namelijk $x = 2$.
Deze oplossing invullen in de teller geeft
 $p \cdot 2^2 + 4p \cdot 2 + 6 = 0$
 $12p + 6 = 0$
 $12p = -6$
 $p = -\frac{1}{2}$

$f_{-\frac{1}{2}}^{-1}(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6}{(x^2 + 1)(x - 2)}$ ofwel $f_{-\frac{1}{2}}^{-1}(x) = \frac{(-\frac{1}{2}x - 3)(x - 2)}{(x^2 + 1)(x - 2)}$

Dus $f_{-\frac{1}{2}}^{-1}(x) = \frac{-\frac{1}{2}x - 3}{x^2 + 1}$ voor $x \neq 2$.

$\lim_{x \rightarrow 2} f_{-\frac{1}{2}}^{-1}(x) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2 - 3}{2^2 + 1} = \frac{-4}{5}$

De coördinaten van de perforatie zijn $(2, -\frac{4}{5})$.

24 Stel de zijde van het vierkant heeft lengte a .
Het hoekpunt rechtsonder heeft dan coördinaten $(1 + a, 0)$ en het hoekpunt rechtsboven $\left(1 + a, \frac{1}{1 + a}\right)$.

Omdat alle zijden even lang zijn moet gelden $a = \frac{1}{1 + a}$

$a^2 + a = 1$
 $a^2 + a - 1 = 0$

$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ of $a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $a = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

De tweede oplossing is negatief, dus alleen de eerste oplossing voldoet.

De lengte van de zijde van het vierkant is $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

25 $f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$

Dan geldt voor f^{inv} : $x = 4 - \frac{4}{y+1}$ ofwel

$$\frac{4}{y+1} = 4 - x$$

$$y+1 = \frac{4}{4-x}$$

$$y = \frac{4}{4-x} - 1$$

$$y = \frac{4}{4-x} - \frac{4-x}{4-x} = \frac{x}{4-x} = g(x), \text{ dus } g(x) = f^{inv}(x).$$

26 Uit $f(x) = 0$ volgt $87x - 3x^2 - 2x^3 = 0$
 $x(87 - 3x - 2x^2) = 0$
 $x = 0$ of $87 - 3x - 2x^2 = 0$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{705}}{-4} \text{ of } x = \frac{3 + \sqrt{705}}{-4}$$

$$x = 0 \text{ of } x \approx 5,89 \text{ of } x \approx -7,39.$$

De lengte van het ei is ongeveer 5,89 cm.

27 Als de lengte van het verticale verbindingsslijnstuk $\frac{1}{6}$ is, dan moet gelden

$$f(a) - g(a) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$$

$$6a - 6 = a^2 \quad (\text{links en rechts} \times 6a^2)$$

$$a^2 - 6a + 6 = 0$$

$$a = \frac{6 + \sqrt{12}}{2} \text{ of } a = \frac{6 - \sqrt{12}}{2}$$

$$a = 3 - \sqrt{3} \text{ of } a = 3 + \sqrt{3}$$

28 a Dan moet gelden $a^7 = 0,2$ dus $a = 0,2^{\frac{1}{7}} \approx 0,79$.

b $2 \cdot \sqrt{\frac{h_1}{4,9}} = 1,11 \Rightarrow h_1 = \frac{4,9 \cdot 1,11^2}{2^2} = 1,509\dots$

$$2 \cdot \sqrt{\frac{h_4}{4,9}} = 0,68 \Rightarrow h_4 = \frac{4,9 \cdot 0,68^2}{2^2} = 0,56644$$

$$h_n \text{ neemt exponentieel af met factor } a \text{ dus } a^3 = \frac{0,56644}{1,509\dots}$$

$$\text{Dit geeft } a = \left(\frac{0,56644}{1,509\dots} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,721\dots$$

$$\text{Dan is } h_0 = \frac{h_1}{a} = \frac{1,509\dots}{0,721\dots} \approx 2,1 \text{ meter of } 21 \text{ decimeter.}$$

Examen voorbereiding

- 29 a** De vergelijking $p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4}$ mag voor elke waarde van p slechts één oplossing hebben.

Herleiden en kwadrateren geeft

$$\sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4} - p$$

$$x - p = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - 2px - \frac{1}{2}p + p^2$$

$$0 = x^2 + \left(-2p - \frac{1}{2}\right)x + \left(p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{16}\right)$$

$$D = \left(-2p - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{16}\right)$$

$$D = 4p^2 + 2p + \frac{1}{4} - 4p^2 - 2p - \frac{1}{4}$$

$$D = 0 \text{ voor elke waarde van } p.$$

Dus er is altijd maar één oplossing.

- b** Het randpunt van de grafiek van $f_p(x) = p + \sqrt{x-p}$ wordt gevonden uit $x - p = 0$, dus $x = p$.

$$f_p(p) = p + \sqrt{p-p} = p, \text{ dus het randpunt is } (p, p).$$

$$f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x - (p-1)}$$

$$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - (p-1)}$$

$$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p-p+1}$$

$$f_{p-1}(p) = p - 1 + 1$$

$$f_{p-1}(p) = p$$

Dus voor elke waarde van $p \geq 1$ ligt het punt (p, p) op de grafiek van f_{p-1} .

Differentiëren

$$\mathbf{30} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,001) - f(1)}{1,001 - 1} = \frac{3,002386775..... - 3}{0,001} = \frac{0,002386775.....}{0,001} \approx 2,39$$

$$\mathbf{31 a} \quad f(x) = 2x^2 - 8 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 4x - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 4x - \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$\mathbf{b} \quad g(x) = -5 \cdot \frac{1}{3} x^{-4}$$

$$g'(x) = -\frac{5}{3} \cdot -4x^{-5}$$

$$g'(x) = \frac{20}{3x^5}$$

$$\mathbf{c} \quad h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^{-3}$$

$$h'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + 6x^{-4}$$

$$h'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{6}{x^4}$$

$$\mathbf{d} \quad k'(x) = \frac{4x(x^2 + 3)(x - 1) - (x^2 + 3)^2}{(x - 1)^2}$$

e $m'(x) = -1 + 6x^2$

f $n'(x) = 4 \cdot -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 6 \cdot -2x^{-3} - \frac{1}{2} \cdot -3 \cdot x^{-4}$

$$n'(x) = \frac{-2}{x\sqrt{x}} + \frac{12}{x^3} + \frac{3}{2x^4}$$

g $p(x) = 2x^{-2} - 3x^{-3} + x^{-4}$

$$p'(x) = -4x^{-3} + 9x^{-4} - 4x^{-5}$$

$$p'(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4} - \frac{4}{x^5}$$

h $q'(x) = 5(x-2)^4 \cdot \sqrt{x^2-5x} + (x-2)^5 \cdot \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$

32 a Een grafiek is toenemend stijgend als geldt $f'(x) > 0$ en $f''(x) > 0$.

$$f'(x) = (2x-2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (x^2-2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ als } -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0.$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-1} = 3 - \sqrt{5} \text{ of } x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{-1} = 3 + \sqrt{5}$$

Met een plot vind je dat de grafiek van f stijgend is op het interval

$$\langle 3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5} \rangle.$$

$$f''(x) = (-x+3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 4\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x) = 0 \text{ als } \frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 4 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-2)(x-8) = 0$$

Met een plot vind je dat de grafiek van f' stijgend is op het interval

$$\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 8, \rightarrow \rangle.$$

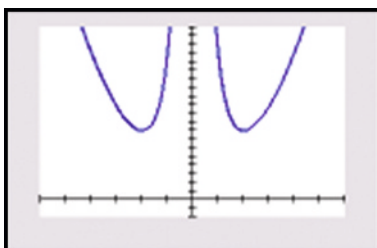
Conclusie: de grafiek van f is toenemend stijgend op $\langle 3 - \sqrt{5}, 2 \rangle$.

b Buigpunten zijn er als $f''(x) = 0$ dus bij $x = 2$ en $x = 8$.

De buigpunten zijn:

$$(2, f(2)) = (2, 0) \text{ en } (8, f(8)) = (8, 48e^{-4}).$$

33 a



$$x^2 + \frac{16}{x^2} = 0$$

$$x^4 + 16 = 0$$

$$x^4 = -16$$

Deze vergelijking heeft geen oplossing, dus g heeft geen nulpunten.

Examen voorbereiding

$$\text{b } g(x) = x^2 + \frac{16}{x^2} = x^2 + 16x^{-2}$$

$$g'(x) = 2x - 32x^{-3}$$

$$g'(4) = 8 - 32 \cdot 4^{-3} = 7\frac{1}{2}$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 7\frac{1}{2}x + b$.

De coördinaten van P invullen geeft $17 = 7\frac{1}{2} \cdot 4 + b$, dus $b = -13$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 7\frac{1}{2}x - 13$.

c Als de raaklijn horizontaal loopt, dan moet gelden $g'(x) = 0$.

$$2x - 32x^{-3} = 0$$

$$2x = 32x^{-3}$$

$$2x^4 = 32$$

$$x^4 = 16$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

De punten met een horizontale raaklijn zijn $(-2, 8)$ en $(2, 8)$.

34 Er moet gelden $x + 6\sqrt{2x + a} = 3x + 19$.

Er moet ook gelden $f'(x) = 3$.

Dit laatste geeft $1 + 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x + a}} \cdot 2 = 3$.

$$6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x + a}} \cdot 2 = 2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2x + a}} = \frac{1}{6}$$

$$\sqrt{2x + a} = 3$$

Dit invullen in $x + 6 \cdot \sqrt{2x + a} = 3x + 19$ geeft

$$x + 6 \cdot 3 = 3x + 19$$

$$-2x = 1 \text{ dus } x = -\frac{1}{2}$$

Dan is $\sqrt{2 \cdot -\frac{1}{2} + a} = 3$, dus $-1 + a = 9$.

Dit geeft $a = 10$.

35 Er moet gelden $f_a(x) = 18$ en $f'_a(x) = 0$.

De tweede vergelijking geeft $3 + a \cdot -\frac{1}{x^2} = 0$

$$-\frac{a}{x^2} = -3$$

$$a = 3x^2$$

Dit invullen in de eerste vergelijking geeft:

$$3x + \frac{3x^2}{x} = 18$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

Dit geeft $a = 3 \cdot 3^2 = 27$.

- 36** $f(x) = (x - 2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$
 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ als $x \geq 2$ en
 $f(x) = (-x + 2) \cdot (\frac{1}{2}x + 2) + 1$
 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 5$ als $x < 2$
 De knik zit bij $x = 2$, dus $A(2, 1)$.
 Voor het linker gedeelte van de grafiek geldt $f'(x) = -x - 1$
 dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A is -3 .
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = -3x + b$.
 Invullen van $(2, 1)$ geeft $1 = -3 \cdot 2 + b$, dus $b = 7$.
 Een vergelijking van de raaklijn l is $y = -3x + 7$.

- 37** Uit $f_p(x) = 2x^2 - px^4$ volgt $f'_p(x) = 4x - 4px^3$.
 $4x - 4px^3 = 0$
 $x - px^3 = 0$
 $x(1 - px^2) = 0$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } x^2 = \frac{1}{p}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ of } x = -\frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\text{Dus geldt } x_A = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\text{Dan is } y_A = f_p\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \frac{2}{p} - p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Uit $OA = BA$ en de symmetrie in de y -as volgt dat driehoek OAB een gelijkzijdige driehoek is.

Dan maakt OA een hoek van 60° met de positieve x -as,

$$\text{dus } \frac{y_A}{x_A} = \tan(60^\circ) = \sqrt{3} \text{ en } \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{\sqrt{p}}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Dan is } \frac{\frac{1}{p^2}}{\frac{1}{p}} = 3 \text{ ofwel } \frac{\frac{1}{p^2} \cdot p}{\frac{1}{p} \cdot p} = 3 \text{ dus } \frac{1}{p} = 3.$$

$$\text{Conclusie: } p = \frac{1}{3}.$$

- 38 a** Vermenigvuldigen teller en noemer met $1 + \sqrt{x+1}$ geeft

$$f(x) = \frac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \frac{-2 - 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + 2(x+1)}{x(1 + \sqrt{x+1})}$$

$$f(x) = \frac{-2 + 2x + 2}{x(1 + \sqrt{x+1})}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x(1 + \sqrt{x+1})}$$

$$f(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}} \text{ en dus gelijk aan } h(x).$$

Examen voorbereiding

$$\text{b } g(x) = \frac{4x^2 + x}{x}$$

$$g(x) = \frac{x(4x + 1)}{x}$$

$$g(x) = 4x + 1 \text{ mits } x \neq 0, \text{ dus } k(x) = 4x + 1.$$

$$h(x) = 2 \cdot (1 + \sqrt{x+1})^{-1}$$

$$h'(x) = -2(1 + \sqrt{x+1})^{-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$h'(0) = -2(1+1)^{-2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{4} \text{ en } k'(0) = 4$$

De grafieken van h en k staan in punt P loodrecht op elkaar want $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$.

Dus staan ook de grafieken van f en g in punt P loodrecht op elkaar.

$$39 \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2(x+2)}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2} \text{ mits } x \neq -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-2-2}{(-2)^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

De perforatie is het punt $(-2, -1)$.

Het snijpunt met de x -as berekenen geeft $\frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2} = 0$.

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x+2)(x-2) = 0$$

$$x = -2 \text{ (voldoet niet) of } x = 2$$

Het snijpunt met de x -as is $(2, 0)$.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x-2) \cdot 2x}{x^4} \text{ dus } f'(2) = \frac{4-0}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

De raaklijn heeft vergelijking $y = \frac{1}{4}(x-2)$.

Invullen van de perforatie $(-2, -1)$ in de vergelijking $y = \frac{1}{4}(x-2)$ geeft

$$-1 = \frac{1}{4}(-2-2)$$

$$-1 = \frac{1}{4} \cdot -4$$

Dit klopt, dus de raaklijn in $(2, 0)$ gaat door de perforatie.

$$40 \quad \text{Voor de lengte van de rechthoek geldt } x_Q - x_P = 1 - p^2 - p.$$

En voor de breedte van de rechthoek geldt $y_P = p$.

De oppervlakte van de rechthoek is

$$O(p) = y_P \cdot (x_Q - x_P) = p(1 - p^2 - p) = p - p^3 - p^2.$$

Deze oppervlakte heeft een uiterste waarde als $O'(p) = 0$.

$$O'(p) = 1 - 3p^2 - 2p$$

$$1 - 3p^2 - 2p = 0$$

$$3p^2 + 2p - 1 = 0$$

$$p = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3} \text{ of } p = \frac{-2 - \sqrt{16}}{6} = -1$$

Alleen $p = \frac{1}{3}$ voldoet.

- 41** Voor de lengte l van het verbindingsslijnstuk geldt $l(b) = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b} = b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$.

Om de maximale lengte te berekenen moet de afgeleide hiervan nul zijn.

$$l'(b) = -\frac{1}{2} \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-b^{-2}) = \frac{-1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2}$$

Oplossen van $l'(b) = 0$ geeft

$$\frac{1}{2b\sqrt{b}} = \frac{1}{b^2}$$

$$2b\sqrt{b} = b^2$$

$$2 = \frac{b^2}{b\sqrt{b}} = \sqrt{b}, \text{ dus } b = 4$$

$$\text{De maximale lengte is } l(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Integreren

42 a $F(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 2\frac{1}{2}x^2 - x$

b $G(x) = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}x\sqrt{x}$

c $H(x) = -x^{-1} - 2x^{-2} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$

d $K(x) = \frac{1}{6} \cdot (7x + 1)^6 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}(7x + 1)^6$

e $M(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{6}x^3(x^3 - 2)$

f $N(x) = -2x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{-2}{x} - \frac{1}{2x^2}$

43 a Uit $F(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1\frac{1}{2}}$ volgt

$$F'(x) = 1\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$F'(x) = 3x \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = 3x\sqrt{x^2 + 1}$$

$F'(x) = f(x)$, dus F is een primitieve van f .

b Uit $F(x) = \frac{-1}{8(x^2 - 1)^4} = -\frac{1}{8} \cdot (x^2 - 1)^{-4}$ volgt

$$F'(x) = -\frac{1}{8} \cdot -4(x^2 - 1)^{-5} \cdot 2x$$

$$F'(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^5}$$

$F'(x) = f(x)$, dus F is een primitieve van f .

Examen voorbereiding

- c Uit $G(x) = a \cdot (x^2 + 6x + 1)^4$ volgt
 $G'(x) = a \cdot 4(x^2 + 6x + 1)^3 \cdot (2x + 6)$
 $G'(x) = a \cdot 4(x^2 + 6x + 1)^3 \cdot 2(x + 3).$
 Dus moet gelden $a \cdot 4 \cdot 2 = 1$ ofwel $a = \frac{1}{8}.$

- 44 a** De oppervlakte van dit gebied is

$$\int_2^8 \frac{1}{4} x^3 dx = \left[\frac{1}{16} x^4 \right]_2^8 = \frac{1}{16} \cdot 8^4 - \frac{1}{16} \cdot 2^4 = 256 - 1 = 255$$

- b Voor de snijpunten van de grafiek van h met de x -as geldt $h(x) = 0.$

$$4x - 1\frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x(4 - 1\frac{1}{2}x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2\frac{2}{3}$$

De oppervlakte van het gevraagde gebied is

$$\int_0^{2\frac{2}{3}} (4x - 1\frac{1}{2}x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right]_0^{2\frac{2}{3}} = \left(2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right)^3 \right) - (0) = \frac{128}{27} = 4\frac{20}{27}$$

- c Voor de snijpunten van de grafieken van f en h geldt $f(x) = h(x)$ ofwel

$$\frac{1}{4}x^3 = 4x - 1\frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{4}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0$$

$$\frac{1}{4}x(x^2 + 6x - 16x) = 0$$

$$\frac{1}{4}x = 0 \text{ of } x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } (x + 8)(x - 2) = 0$$

De snijpunten zijn bij $x = -8$, $x = 0$ en $x = 2$.

De gevraagde oppervlakte van het linker gebied is:

$$\int_{-8}^0 \left(\frac{1}{4}x^3 - \left(4x - 1\frac{1}{2}x^2 \right) \right) dx = \left[\frac{1}{16}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right]_{-8}^0 =$$

$$0 - \left(\frac{1}{16} \cdot (-8)^4 - 2 \cdot (-8)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-8)^3 \right) = 128$$

en de gevraagde oppervlakte van het rechter gebied is:

$$\int_0^2 \left(4x - 1\frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{1}{4}x^3 \right) \right) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{16}x^4 \right]_0^2 =$$

$$\left(2 \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^3 - \frac{1}{16} \cdot 2^4 \right) - 0 = 3$$

- 45 a** Voor de snijpunten van de grafieken van f en g geldt $f(x) = g(x)$ ofwel

$$2\sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2$$

$$8\sqrt{x} = x^2$$

$$64x = x^4$$

$$x(64 - x^3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^3 = 64$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(4, 4)$.

- b De oppervlakte van V is $\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 \right) dx =$

$$\left[\frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{12}x^3 \right]_0^4 =$$

$$\left(\frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - \frac{1}{12} \cdot (4)^3 \right) - 0 =$$

$$\frac{32}{3} - \frac{64}{12} = \frac{128}{12} - \frac{64}{12} = \frac{64}{12} = 5\frac{1}{3}$$

46 a $f(x) = g(x)$

$$\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16 = \frac{1}{3}x^3$$

$$-4x^2 + 12x + 16 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 4$$

De snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(4, 21\frac{1}{3})$.

$$\text{b } \int_0^4 \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16 - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \int_0^4 (-4x^2 + 12x + 16) dx =$$

$$\left[-\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 16x \right]_0^4 =$$

$$\left(-\frac{4}{3} \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 \right) - (0) = 74\frac{2}{3}$$

$$\text{c } OQ = p \text{ en } PQ = f(p) = \frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16$$

De oppervlakte is van driehoek OPQ is

$$\frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} p \cdot \left(\frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16 \right).$$

d Als de oppervlakten I en II gelijk zijn, dan moet gelden

$$\int_0^p f(x) dx = 2 \cdot \text{oppervlakte } \triangle OPQ$$

$$\int_0^p \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16 \right) dx = p \cdot \left(\frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16 \right)$$

$$\left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 16x \right]_0^p = \frac{1}{3}p^4 - 4p^3 + 12p^2 + 16p$$

$$\frac{1}{12}p^4 - \frac{4}{3}p^3 + 6p^2 + 16p = \frac{1}{3}p^4 - 4p^3 + 12p^2 + 16p$$

$$\frac{1}{4}p^4 - 2\frac{2}{3}p^3 + 6p^2 = 0$$

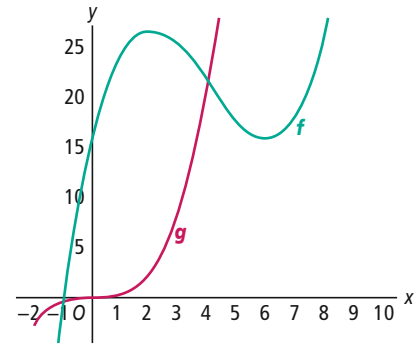
$$p^2 \left(\frac{1}{4}p^2 - 2\frac{2}{3}p + 6 \right) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } \frac{1}{4}p^2 - \frac{8}{3}p + 6 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } 3p^2 - 32p + 72 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = \frac{32 + \sqrt{160}}{6} \text{ of } p = \frac{32 - \sqrt{160}}{6}$$

$$\text{De oplossing } p = \frac{32 + \sqrt{160}}{6} = 5\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{10} \text{ voldoet.}$$

**47 a** Uit $F(x) = \frac{-10}{x^2 + 4} = -10(x^2 + 4)^{-1}$ volgt

$$F'(x) = -10 \cdot -1(x^2 + 4)^{-2} \cdot 2x$$

$$F'(x) = \frac{20x}{(x^2 + 4)^2}$$

dus F is een primitieve van f .

$$\text{b } A(4) = \int_1^4 \frac{20x}{(x^2 + 4)^2} dx = \left[\frac{-10}{x^2 + 4} \right]_1^4 = \frac{-10}{16 + 4} - \frac{-10}{1 + 4} = -\frac{1}{2} + 2 = 1\frac{1}{2}$$

Examen voorbereiding

$$\text{c} \quad A(p) = \int_1^p \frac{20x}{(x^2 + 4)^2} dx = \left[\frac{-10}{x^2 + 4} \right]_1^p$$

$$A(p) = \frac{-10}{p^2 + 4} - \frac{-10}{1 + 4}$$

$$A(p) = -\frac{10}{p^2 + 4} + 2$$

$$\text{Als } A(p) = 1 \frac{9}{10} \text{ dan is}$$

$$-\frac{10}{p^2 + 4} + 2 = 1 \frac{9}{10}$$

$$\frac{10}{p^2 + 4} = \frac{1}{10}$$

$$p^2 + 4 = 100$$

$$p^2 = 96$$

Gegeven is dat $p > 1$ dus voldoet alleen $p = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

- d De oppervlakte van het gebied tussen 1 en p en onder de grafiek van f neemt toe als p toeneemt.

Dus is de grafiek van A stijgend.

- 48 De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = 30$.

Voor de inhoud van dit lichaam geldt

$$\int_0^{30} \pi \cdot (0,564 \cdot \sqrt{x(30-x)})^2 dx = \int_0^{30} \pi \cdot 0,564^2 \cdot x(30-x) dx =$$

$$0,564^2 \pi \cdot \int_0^{30} (30x - x^2) dx =$$

$$0,564^2 \pi \left[15x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{30} = 0,564^2 \pi (13\,500 - 9000 - 0) \approx 4497$$

De inhoud is 4497 cm^3 .

- 49 a Voor de inhoud van R geldt

$$\pi \int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^4 =$$

$$\pi \left(\left(\frac{1}{4} \cdot 4^4\right) - (0)\right) = 64\pi$$

Voor de inhoud van G geldt: stel eerst het functievoorschrift van f^{inv} op.

$$x = y^{\frac{3}{2}} \text{ dus } y = x^{\frac{2}{3}} \text{ en } f^{\text{inv}}(x) = x^{\frac{2}{3}}.$$

$$\pi \int_0^8 \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 dx = \pi \int_0^8 x^{\frac{4}{3}} dx = \pi \left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_0^8 =$$

$$\pi \cdot \frac{3}{7} \cdot 8^{\frac{7}{3}} - 0 = \pi \cdot \frac{3}{7} \cdot 2^7 = 54 \frac{6}{7} \pi$$

- b Inhoud A vind je door eerst de beide gebieden samen te wentelen om de x -as en deze inhoud te verminderen met inhoud G .

Gebruik de inhoudsformule voor een cilinder.

$$\text{inhoud } A = \pi \cdot 8^2 \cdot 4 - \text{inhoud } G = 256\pi - 64\pi = 192\pi$$

Inhoud B vind je op een vergelijkbare manier.

$$\text{inhoud } B = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \text{inhoud } R = 128\pi - 54 \frac{6}{7} \pi = 73 \frac{1}{7} \pi$$

$$\text{Het verschil in inhoud tussen } A \text{ en } B \text{ is } 192\pi - 73 \frac{1}{7} \pi = 118 \frac{6}{7} \pi.$$

- 50 a $f(x) = g(x)$ geeft $x^3 + 1 = x^2 + 1$

$$x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 1$$

De snijpunten zijn $(0, 1)$ en $(1, 2)$.

b De inhoud is gelijk aan $\pi \int_0^1 g^2(x) dx - \pi \int_0^1 f^2(x) dx$

$$\pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = 1 \frac{13}{15} \pi$$

$$\pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1) dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^4 + x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 1 \right) = 1 \frac{9}{14} \pi$$

$$\text{De inhoud van } V \text{ is } 1 \frac{13}{15} \pi - 1 \frac{9}{14} \pi = \frac{47}{210} \pi.$$

51 $f'(x) = 2x$ dus $f'(p) = 2p$

Een vergelijking van de raaklijn in P is $y = 2px + b$.

Invullen van $P(p, p^2)$ geeft $p^2 = 2p \cdot p + b$, dus $b = -p^2$.

Een vergelijking van deze raaklijn is $y = 2px - p^2$.

Om het snijpunt van deze raaklijn met de x -as te vinden moet de vergelijking $2px - p^2 = 0$ worden opgelost.

$p(2x - p) = 0$ geeft $x = \frac{1}{2}p$, dus de raaklijn snijdt de x -as in $A(\frac{1}{2}p, 0)$.

De oppervlakte van $\triangle OAP$ is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$.

Een vergelijking van de lijn OP is $y = px$.

$$\text{De oppervlakte van } V \text{ is } \int_0^p (px - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^p =$$

$$\frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3.$$

$\frac{1}{4}p^3 = 1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}p^3$, dus de oppervlakte van driehoek OAP is anderhalf maal de oppervlakte van V .

52 a $\frac{5}{4x-6} = x - 3 \frac{1}{2}$

$$(4x-6)\left(x-3 \frac{1}{2}\right) = 5$$

$$4x^2 - 14x - 6x + 21 = 5$$

$$4x^2 - 20x + 16 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$x = 1$ of $x = 4$, dus de coördinaten van B zijn $(4, \frac{1}{2})$.

b Lijn k snijdt de x -as in $(3 \frac{1}{2}, 0)$.

De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan

$$\pi \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6} \right)^2 dx + \pi \int_1^{3 \frac{1}{2}} \left(x - 3 \frac{1}{2} \right)^2 dx =$$

$$\pi \int_0^1 \frac{25}{(4x-6)^2} dx + \pi \int_1^{3 \frac{1}{2}} \left(x - 3 \frac{1}{2} \right)^2 dx =$$

$$\pi \left[\frac{-25}{4(4x-6)} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{3} \left(x - 3 \frac{1}{2} \right)^3 \right]_1^{3 \frac{1}{2}} =$$

$$\pi \left(\frac{-25}{-8} - \frac{-25}{-24} \right) + \pi \left(0 - \frac{1}{3} \cdot -\frac{125}{8} \right) = \pi \left(\frac{75}{24} - \frac{25}{24} + \frac{125}{24} \right) = \frac{175}{24} \pi \text{ of } 7 \frac{7}{24} \pi.$$

Examen voorbereiding

- 53** Voor de inhoud van de omwentelingslichamen samen wentel je de gebieden V en W om de y -as.

Gebruik de inverse van $y = x^2$, dat is $y = \sqrt{x}$.

$$\pi \int_0^r (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^r = \frac{1}{2} \pi r^2$$

Het omwentelingslichaam dat ontstaat door W om de y -as te wentelen is een halve bol met straal r , dus met een inhoud $\frac{2}{3} \pi r^3$.

Als de inhoud van de twee omwentelingslichamen gelijk zijn, moet gelden

$$\frac{1}{2} \pi r^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$\frac{1}{2} r^2 - \frac{4}{3} r^3 = 0$$

$$r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} r \right) = 0$$

$$r = 0 \text{ (voldoet niet) of } \frac{4}{3} r = \frac{1}{2}, \text{ dus } r = \frac{3}{8}.$$

- 54** Deze vlakdelen hebben gelijke oppervlakte als geldt

$$\int_0^a \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x} \right) dx = \int_a^4 \frac{1}{2} \sqrt{x} dx$$

$$\int_0^a \frac{1}{2} \sqrt{x} dx = \int_a^4 \frac{1}{2} \sqrt{x} dx$$

$$\left[\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \left[\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_a^4$$

$$\frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}}$$

$$a^{\frac{3}{2}} = 4$$

$$a = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16}$$

Exponentiële en logaritmische functies

55 a ${}^2\log(36) - {}^2\log(9) + {}^2\log(5) =$
 ${}^2\log(36 : 9 \times 5) = {}^2\log(20)$

b $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3) =$

$${}^5\log(\sqrt{49}) + {}^5\log(3^2) =$$

$${}^5\log(7 \cdot 9) = {}^5\log(63)$$

c $2 + {}^6\log(x) =$

$${}^6\log(36) + {}^6\log(x) = {}^6\log(36x)$$

d $-3 + {}^4\log((9p)^2) =$

$${}^4\log(4^{-3}) + {}^4\log(81p^2) =$$

$${}^4\log\left(\frac{1}{64}\right) + {}^4\log(81p^2) = {}^4\log\left(\frac{81}{64} p^2\right)$$

e ${}^8\log(2a) + {}^8\log(a+3) =$

$${}^8\log(2a(a+3)) = {}^8\log(2a^2 + 6a)$$

f $4 \cdot {}^{0,1}\log(x) - {}^{0,1}\log(x^2) =$

$${}^{0,1}\log(x^4) - {}^{0,1}\log(x^2) = {}^{0,1}\log(x^2)$$

56 a ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3$
 ${}^2\log(ab) = {}^2\log(8)$

$$ab = 8$$

$$b = \frac{8}{a}$$

c $a + 4 = 2b^2\sqrt{b}$
 $b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a + 2$

$$b = \left(\frac{1}{2} a + 2 \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$b = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2} a + 2 \right)^2}$$

$$\text{b } a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$$

$${}^3\log(b) = 10 - 2a$$

$$b = 3^{10-2a}$$

$$\text{d } 3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$$

$$2b = 3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = 7\sqrt{a}$$

$$b = 3\frac{1}{2}\sqrt{a}$$

57 a Voor de inverse functie geldt $x = {}^2\log(18 - 3y)$.

$$18 - 3y = 2^x$$

$$-3y = 2^x - 18$$

$$y = 6 - \frac{1}{3} \cdot 2^x$$

$$\text{De inverse functie is } f^{\text{inv}}(x) = 6 - \frac{1}{3} \cdot 2^x.$$

b Voor de inverse functie geldt $x = -2 + {}^3\log(2y - 1)$.

$${}^3\log(2y - 1) = x + 2$$

$$2y - 1 = 3^{x+2}$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{x+2}$$

$$\text{De inverse functie is } g^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{x+2}.$$

c Voor de inverse functie geldt $x = 2 \cdot 3^{5-y}$.

$$3^{5-y} = \frac{1}{2}x$$

$$5 - y = {}^3\log\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$y = 5 - {}^3\log\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\text{De inverse functie is } h^{\text{inv}}(x) = 5 - {}^3\log\left(\frac{1}{2}x\right).$$

d Voor de inverse functie geldt $x = 10 - \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{y-1} = 10 - x$$

$$y - 1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(10 - x)$$

$$y = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(10 - x)$$

$$\text{De inverse functie is } k^{\text{inv}}(x) = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(10 - x).$$

58 a $8 \cdot 4^{x+2} = 1$

$$2^3 \cdot (2^2)^{x+2} = 2^0$$

$$3 + 2x + 4 = 0$$

$$2x = -7$$

$$x = -3\frac{1}{2}$$

d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$

$$2x = {}^3\log(7) - 1$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(7)$$

$$5 \cdot 7^{4x} = 15$$

$$7^{4x} = 3$$

$$4x = {}^7\log(3)$$

$$x = \frac{1}{4} \cdot {}^7\log(3)$$

b $\frac{1}{25} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$$5^{-2} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot 5^{-x}$$

$$-2 + x + 3 = 1 - x$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

c $3^{2x+1} = 7$

$$2x + 1 = {}^3\log(7)$$

$$2x = -1 + {}^3\log(7)$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(7)$$

e $6 - {}^3\log(x + 4) = 5\frac{1}{2}$

$${}^3\log(x + 4) = \frac{1}{2}$$

$$x + 4 = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}} - 4 = \sqrt{3} - 4$$

f $3 \cdot {}^4\log(x - 4) = 6$

$${}^4\log(x - 4) = 2$$

$$x - 4 = 4^2$$

$$x = 20$$

59 a $\ln(2x - 1) = 3$

$$2x - 1 = e^3$$

$$2x = 1 + e^3$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^3$$

c $\sqrt{\ln(x)} = 1\frac{1}{2}$

$$\ln(x) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$x = e^{2\frac{1}{4}}$$

Examen voorbereiding

b $2e^{5-x} = 3$

$$e^{5-x} = 1\frac{1}{2}$$

$$5-x = \ln\left(1\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 5 - \ln\left(1\frac{1}{2}\right)$$

d $e^{2-x^3} = 4$

$$2-x^3 = \ln(4)$$

$$x^3 = 2 - \ln(4)$$

$$x = \sqrt[3]{2 - \ln(4)}$$

60 a $b = 3e^{2a-1}$

$$\frac{1}{3}b = e^{2a-1}$$

$$2a-1 = \ln\left(\frac{1}{3}b\right)$$

$$2a = 1 + \ln\left(\frac{1}{3}b\right)$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{3}b\right)$$

b $b = 2\ln(a-5)$

$$\frac{1}{2}b = \ln(a-5)$$

$$a-5 = e^{\frac{1}{2}b}$$

$$a = 5 + e^{\frac{1}{2}b}$$

c $b = \ln(2a) + \ln(3a)$

$$b = \ln(6a^2)$$

$$6a^2 = e^b$$

$$a^2 = \frac{1}{6}e^b$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{6}e^b} \text{ of } a = -\sqrt{\frac{1}{6}e^b}$$

alleen $a = \sqrt{\frac{1}{6}e^b}$ voldoet.

d $b = e^{3a+1}$

$$3a+1 = \ln(b)$$

$$3a = \ln(b) - 1$$

$$a = \frac{1}{3}\ln(b) - \frac{1}{3}$$

61 a $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{3x+5} \cdot 3$

$$f'(x) = \frac{3}{(3x+5) \cdot \ln(2)}$$

b $g'(t) = 1500 \cdot 0,94^t \cdot \ln(0,94)$

c $s'(u) = -2(1 - \ln(u))^{-2} \cdot \frac{-1}{u}$

$$s'(u) = \frac{2}{u(1 - \ln(u))^2}$$

d $h'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + 2x \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$

$$h'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x)$$

e $k'(x) = 3^{x^2+1} \cdot \ln(3) \cdot 2x$

f $j(t) = 250 \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0,18t})^{-1}$

$$j'(t) = -250 \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0,18t})^{-2} \cdot 15 \cdot e^{-0,18t} \cdot -0,18$$

$$j'(t) = \frac{675}{e^{0,18t} \cdot (1 + 15 \cdot e^{-0,18t})^2}$$

62 a $F(x) = 5e^{3x+2} \cdot \frac{1}{3}$

$$F(x) = 1\frac{2}{3}e^{3x+2}$$

b $g(x) = \frac{2x-1}{x^2} = \frac{2}{x} - x^{-2}$

$$G(x) = 2\ln|x| + x^{-1}$$

$$G(x) = 2\ln|x| + \frac{1}{x}$$

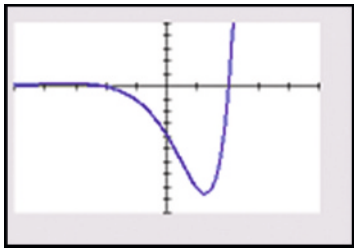
$$c \quad H(x) = 1 \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\ln(3)} \cdot 3^{5-x}$$

$$H(x) = - \cdot \frac{3 \cdot 3^{5-x}}{2\ln(3)}$$

$$H(x) = - \frac{3^{6-x}}{2\ln(3)}$$

$$d \quad K(x) = 4\ln|3x - 5|$$

63 a



b Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$, dus

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

c $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ dus er is een horizontale asymptoot is $y = 0$.

$$d \quad f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 4) \cdot e^x$$

$$2x \cdot e^x + (x^2 - 4) \cdot e^x = 0$$

$$(x^2 + 2x - 4) \cdot e^x = 0$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} \text{ of } x = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2}$$

$$x = -1 - \sqrt{5} \text{ of } x = -1 + \sqrt{5}$$

e Zie de plot:

$$\text{Het maximum is } f(-1 - \sqrt{5}) = ((-1 - \sqrt{5})^2 - 4) \cdot e^{-1-\sqrt{5}} \approx 0,25.$$

$$\text{Het minimum is } f(-1 + \sqrt{5}) = ((-1 + \sqrt{5})^2 - 4) \cdot e^{-1+\sqrt{5}} \approx -8,51.$$

f Er moet gelden $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = (2x + b) \cdot e^x + (x^2 + bx + c) \cdot e^x$$

$$F'(x) = (x^2 + 2x + bx + b + c) \cdot e^x$$

Als $(x^2 + 2x + bx + b + c) \cdot e^x = (x^2 - 4) \cdot e^x$ voor alle waarden van x dan moet gelden $2 + b = 0$ en $b + c = -4$.

Dus is $b = -2$ en is $c = -2$.

g De grafiek van f ligt dan onder de x -as, dus is de oppervlakte

$$-\int_{-2}^2 (x^2 - 4) \cdot e^x dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) \cdot e^x dx =$$

$$[(-x^2 + 2x + 2) \cdot e^x]_{-2}^2 =$$

$$(-4 + 4 + 2) \cdot e^2 - (-4 - 4 + 2) \cdot e^{-2} =$$

$$2e^2 + 6e^{-2} \text{ ofwel } 2e^2 + \frac{6}{e^2}$$

64 a $C'(t) = 160(e^{-0,2t} \cdot -0,2 - e^{-t} \cdot -1)$

$$C'(t) = -160(0,2e^{-0,2t} - e^{-t})$$

$$C'(0) = -160(0,2e^0 - e^0) = -160 \cdot -0,8 = 128 > 0$$

Dus de concentratie van het medicijn gaat direct na het injecteren stijgen.

Examen voorbereiding

- b** Voor de maximale concentratie moet gelden $C'(t) = 0$.

$$-160(0,2e^{-0,2t} - e^{-t}) = 0$$

$$0,2e^{-0,2t} - e^{-t} = 0$$

$$0,2e^{-0,2t} = e^{-t}$$

$$e^{-0,2t} = 5e^{-t}$$

$$e^{0,8t} = 5$$

$$0,8t = \ln(5)$$

$$t_{\max} = \frac{1}{4} \cdot \ln(5)$$

- 65** De verticale asymptoot volgt uit $e^x - 10 = 0$ ofwel $e^x = 10$.

De verticale asymptoot is $x = \ln(10)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0 - 1000}{0 - 10} = 100, \text{ de horizontale asymptoot is } y = 100.$$

Dus $A(0, 100)$ en $B(\ln(10), 100)$.

$$\frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10} = 100$$

$$e^{2x} - 1000 = 100(e^x - 10)$$

$$e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$$

$$e^{2x} - 100e^x = 0$$

$$e^x(e^x - 100) = 0$$

$$e^x = 100, \text{ dus } x = \ln(100) = 2\ln(10).$$

De coördinaten van C zijn $(2\ln(10), 100)$.

Dus B ligt midden tussen A en C .

- 66 a** $g(x) = f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$$g(x) = \ln(x) + 1 - 1$$

$$g(x) = \ln(x)$$

Voor de snijpunten geldt $f(x) = g(x)$ dus

$$x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$$

$$x\ln(x) - \ln(x) = x - 1$$

$$(x - 1)\ln(x) = x - 1$$

$$x - 1 = 0 \text{ of } \ln(x) = 1$$

$$x = 1 \text{ of } x = e$$

- b** f is een primitieve van g , dus

$$\int_p^{2p} g(x) dx = [f(x)]_p^{2p} =$$

$$2p\ln(2p) - 2p + 1 - (p\ln(p) - p + 1) = 0$$

$$p(2\ln(2p) - 2 - \ln(p) + 1) = 0$$

$$p \neq 0 \text{ dus } 2\ln(2p) - \ln(p) - 1 = 0$$

$$\ln(4p^2) - \ln(p) = 1$$

$$\ln(4p) = 1$$

$$4p = e$$

$$p = \frac{1}{4}e$$

- 67 a** Voor de top geldt dat de afgeleide nul is

$$f'_a(x) = e^{ax} + axe^{ax} = 0$$

$$e^{ax}(1 + ax) = 0$$

$$ax = -1$$

$$x = -\frac{1}{a}$$

$$f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} e^{a \cdot -\frac{1}{a}} = -\frac{1}{a} e^{-1}$$

De coördinaten van de toppen zijn $\left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e}\right)$.

Dus voor alle toppen geldt $y = \frac{1}{e} \cdot x$.

b $F'_a(x) = \frac{1}{a} e^{ax} + \frac{1}{a} \cdot x \cdot e^{ax} \cdot a - \frac{1}{a^2} e^{ax} \cdot a$

$$F'_a(x) = \frac{1}{a} e^{ax} + \frac{1}{a} \cdot x \cdot e^{ax} \cdot a - \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$F'_a(x) = xe^{ax}$$

dus F_a is een primitieve van f_a .

c $f_1(x) = xe^x$, dus $F_1(x) = xe^x - e^x$.

Nu de snijpunten berekenen van f_1 met l .

$$xe^x = \frac{1}{e}x$$

$$xe^x = xe^{-1}$$

$$x = 0 \text{ of } x = -1$$

De oppervlakte van het grijze vlakdeel is gelijk aan

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{e}x - xe^x \right) dx = \left[\frac{1}{e}x^2 - xe^x + e^x \right]_{-1}^0 =$$

$$(0 - 0 + 1) - \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right) = 1 - \frac{5}{2e}$$

- 68 a** Voor het minimum geldt dat de afgeleide $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 2^x \ln(2) + 2^{-2x} \cdot -2 \ln(2)$$

$$2^x \ln(2) - 2 \cdot 2^{-2x} \ln(2) = 0$$

$$2^x \ln(2) = 2 \cdot 2^{-2x} \ln(2)$$

$$2^x = 2^{-2x+1}$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

b $\int_{-1}^1 (2^x + 2^{-2x}) dx = \left[\frac{2^x}{\ln(2)} - \frac{2^{-2x}}{2 \ln(2)} \right]_{-1}^1 =$

$$\frac{2}{\ln(2)} - \frac{\frac{1}{4}}{2 \ln(2)} - \frac{\frac{1}{2}}{\ln(2)} + \frac{4}{2 \ln(2)} = \frac{3 \frac{3}{8}}{\ln(2)}$$

De oppervlakte van de rechthoek in figuur 3 is $2k$.

Als de oppervlakte van het grijze gebied uit figuur 2 en 3 gelijk zijn dan geldt

$$2k = \frac{3 \frac{3}{8}}{\ln(2)}$$

$$k = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \frac{3}{8}}{\ln(2)} \approx 2,43$$

Examen voorbereiding

- c Voor de coördinaten van P geldt $P(p, 2^p + 2^{-2p})$.

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ 2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{13}{16} \end{pmatrix}$$

Als de vectoren $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{AQ}$ loodrecht op elkaar staan, dan is $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$.

$$p-1 + \left(2^p + 2^{-2p} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 1\frac{13}{16} = 0$$

Invoer: $y_1 = 1 - x$ en $y_2 = 0,8125(2^x + 2^{-2x} - 2,25)$

Optie: snijpunt geeft $x = -0,67448\dots$

De x -coördinaat van P is ongeveer $-0,67$.

Goniometrie

- 69 a** $\sin\left(23\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$
- b** $\cos\left(3\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- c** $\tan\left(-2\frac{3}{4}\pi\right) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1$
- d** $\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- e** $\cos\left(7\frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- f** $\cos\left(-3\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$
- 70 a** $2\sin(x) = -\sqrt{3}$
 $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $x = 1\frac{1}{3}\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$
- b** $\sin(x) + \cos(x) = 0$
 $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 = 0$
 $\tan(x) = -1$
 $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi$
- c** $1 + 2\sin(x) = 0$
 $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
 $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$
- d** $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$
 $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$
- 71 a** Voor de evenwichtsstand geldt: $y = \frac{16+8}{2} = 12$.
 De periode is $13 - 5 = 8$ en de amplitude is 4.
 De verschuiving is $\frac{5+9}{2} = 7$.
 Dit geeft $s(x) = 12 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{8}(x-7)\right)$ ofwel
 $s(x) = 12 + 4\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x-7)\right)$.

- b** De horizontale verschuiving is nu 9. De overige parameters blijven gelijk.

$$c(x) = 12 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{8}(x - 9)\right) \text{ ofwel}$$

$$c(x) = 12 + 4\cos\left(\frac{1}{4}\pi(x - 9)\right).$$

72 a $2\cos(3x) = 1$

$$\cos(3x) = \frac{1}{2}$$

$$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$$x = \frac{1}{9}\pi \text{ of } x = \frac{5}{9}\pi \text{ of } x = \frac{7}{9}\pi \text{ of } x = 1\frac{2}{9}\pi \text{ of } x = 1\frac{4}{9}\pi \text{ of } x = 1\frac{8}{9}\pi.$$

b $\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(3x)$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right) = \cos(3x)$$

$$\cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) = \cos(3x)$$

$$3x = \frac{1}{4}\pi - x + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -\frac{1}{4}\pi + x + k \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$$x = \frac{1}{16}\pi \text{ of } x = \frac{9}{16}\pi \text{ of } x = \frac{17}{16}\pi \text{ of } x = 1\frac{9}{16}\pi \text{ of } x = \frac{7}{8}\pi \text{ of } x = 1\frac{7}{8}\pi.$$

c $2\sin^2(x) = 1$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$$x = \frac{1}{4}\pi \text{ of } x = \frac{3}{4}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{4}\pi \text{ of } x = 1\frac{3}{4}\pi.$$

d $2\cos^2(x) - \sin(x) = 1$

$$2(1 - \sin^2(x)) - \sin(x) - 1 = 0$$

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

$$\sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$(\sin(x) + 1)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sin(x) + 1 = 0 \text{ of } \sin(x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sin(x) = -1 \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$$x = 1\frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi$$

e $\tan(2x) = \tan\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$$2x = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = 1\frac{2}{3}\pi.$$

f $\sqrt{3} \cdot \sin(2x) = 3 \cdot \cos(2x)$

$$\sin(2x) = \sqrt{3} \cdot \cos(2x)$$

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \sqrt{3}$$

$$\tan(2x) = \sqrt{3}$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Examen voorbereiding

Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen:

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = 1\frac{2}{3}\pi.$$

73 a $f'(x) = 3 \cos(2x) \cdot 2$

$$f'(x) = 6 \cos(2x)$$

b $g'(x) = 3 \cdot 2 \cos(x) \cdot -\sin(x)$

$$g'(x) = -6 \sin(x) \cos(x)$$

c $h'(x) = \frac{\cos(x) \cdot (1 + \sin(x)) - \sin(x) \cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$

$$h'(x) = \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$$

d $k'(x) = \frac{1}{\cos^2(3x^2 + 2)} \cdot 6x$

$$k'(x) = \frac{6x}{\cos^2(3x^2 + 2)}$$

e $m'(x) = \frac{1}{2 + \sin(4x)} \cdot \cos(4x) \cdot 4$

$$m'(x) = \frac{4 \cos(4x)}{2 + \sin(4x)}$$

f $n'(x) = \frac{-2 \sin^2(2x) - \cos(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2}{(\sin(2x))^2}$

$$n'(x) = \frac{-2(\sin^2(2x) + \cos^2(2x))}{(\sin(2x))^2}$$

$$n'(x) = \frac{-2}{(\sin(2x))^2}$$

74 a $F(x) = -3 \cdot \frac{1}{2} \cos(2x)$

$$F(x) = -1\frac{1}{2} \cos(2x)$$

c $H(x) = 4x - 6 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

b $G(x) = -3 \sin\left(\frac{1}{3}\pi - x\right)$

d $K(x) = x^2 - \frac{5}{3} \cos(6 - 3x)$

75 a $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(x) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) =$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(x) - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \cos(x)$$

b $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(x) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) =$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \cos(x) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sin(x)$$

c $\cos\left(1\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \cdot \cos(x) + \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \cdot \sin(x) =$
 $0 \cdot \cos(x) + -1 \cdot \sin(x) = -\sin(x)$

d $\sin\left(x + 1\frac{1}{4}\pi\right) = \sin(x) \cdot \cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) + \cos(x) \cdot \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) =$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \cos(x)$$

76 a $f(x) = 4 \sin(x) \cdot \cos^3(x) - 4 \sin^3(x) \cdot \cos(x)$

$$f(x) = 2 \cdot 2 \sin(x) \cos(x) (\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$f(x) = 2 \sin(2x) \cos(2x)$$

b $f(x) = 2 \sin(2x) \cos(2x)$

$$f(x) = \sin(2 \cdot 2x) = \sin(4x)$$

$$\begin{aligned}
 \text{c} \quad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} \sin(4x) \, dx &= \left[-\frac{1}{4} \cos(4x) \right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} = \\
 &= \left(-\frac{1}{4} \cos\left(2\frac{1}{2}\pi\right) \right) - \left(-\frac{1}{4} \cos(2\pi) \right) = \\
 &= 0 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1 \right) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

77 a Los op $\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$

$$\cos(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin^2(x)$$

$$\cos(x) = -\sqrt{2}(1 - \cos^2(x))$$

$$\cos(x) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos^2(x)$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos^2(x) - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$$

$$\cos(x) = \frac{1 + \sqrt{9}}{2\sqrt{2}} \text{ of } \cos(x) = \frac{1 - \sqrt{9}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos(x) = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ of } \cos(x) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

De eerste vergelijking heeft geen oplossing, de twee oplossingen van de tweede vergelijking met de kleinste x -coördinaten zijn $x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$. Dat zijn de x -coördinaten van A respectievelijk B .

b Als de grafiek van $f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$ perforaties heeft, zijn er waarden

van x waarvoor $\cos(x) = 0$ en $p - \sin^2(x) = 0$.

$\cos(x) = 0$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ en voor deze waarden van x is $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -1$, dus $p - \sin^2(x) = 0$ geeft $p = 1$.

$$f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \text{ als } \cos(x) \neq 0$$

Hieruit blijkt dat de functie verticale asymptoten heeft en geen perforaties.

c $f(0) = \frac{1}{p}$, $f(\pi) = \frac{-1}{p}$ en $f(2\pi) = \frac{1}{p}$, dus

$$P\left(0, \frac{1}{p}\right), Q\left(\pi, \frac{-1}{p}\right) \text{ en } R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$

Als $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QR}$ dan moet het inproduct nul zijn, dus

$$\pi^2 - \frac{4}{p^2} = 0$$

$$p^2 \pi^2 = 4$$

$$p^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$p = \frac{2}{\pi} \text{ of } p = \frac{-2}{\pi}$$

Examen voorbereiding

78 a $f(x) = 6 \sin(x) - \cos(2x)$

Voor de toppen geldt dat de afgeleide nul moet zijn

$$f'(x) = 6 \cos(x) + 2 \sin(2x)$$

$$6 \cos(x) + 2 \sin(2x) = 0$$

$$6 \cos(x) + 2 \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = 0$$

$$2 \cos(x)(3 + 2 \sin(x)) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2} \text{ (geen oplossingen)}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ (} k \text{ geheel) zijn de } x\text{-coördinaten van alle toppen.}$$

- b** De x -coördinaten van de eindpunten van het lijnstuk zijn $1\frac{1}{2}\pi - 1$ en $1\frac{1}{2}\pi + 1$.

$$f\left(1\frac{1}{2}\pi - 1\right) = 6 \sin\left(1\frac{1}{2}\pi - 1\right) - \cos(3\pi - 2) = -3,65796\dots$$

$$\text{De afstand is } -3,65796\dots - (-5) \approx 1,34.$$

79 Er is een perforatie als de teller en noemer van $\frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)}$ beide gelijk zijn

aan nul en de functie voor die waarde van x een limiet heeft.

$$1 + \cos(2x) = 0$$

$$\cos(x) = 0$$

$$\cos(2x) = -1$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

De enige waarden op het interval $[0, 2\pi]$ die in aanmerking komen zijn

$$x = \frac{1}{2}\pi \text{ en } x = 1\frac{1}{2}\pi.$$

$$f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1$$

$$f(x) = \frac{1 + 2\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} + 1$$

$$f(x) = 2\cos(x) + 1 \text{ als } \cos(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} f(x) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ en } \lim_{x \rightarrow 1\frac{1}{2}\pi} f(x) = 2 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$\text{De perforaties zijn de punten } \left(\frac{1}{2}\pi, 1\right) \text{ en } \left(1\frac{1}{2}\pi, 1\right).$$

80 a $\sin(x) + \sin(2x) = 0$

$$\sin(x) + 2 \sin(x) \cos(x) = 0$$

$$\sin(x) \cdot (1 + 2 \cos(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{De } x\text{-coördinaat van } B \text{ is een oplossing van } \cos(x) = -\frac{1}{2},$$

$$\text{dus } x_B = \frac{2}{3}\pi.$$

b Er moet gelden $f'_a\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 0$.

$$f'_a(x) = \cos(x) + 2a \cdot \cos(2x)$$

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + 2a \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{5}{6}\pi\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Invoer: } y_1 = \sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(2x)$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2$$

$$\text{Optie: maximum geeft } x \approx 0,96.$$

- c Voor deze oppervlakte geldt

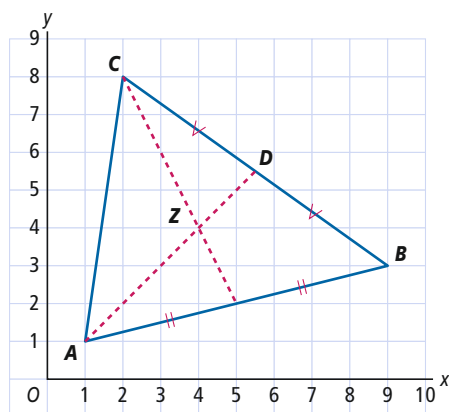
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\sin(x) + a \cdot \sin(2x)) dx &= \\ \left[-\cos(x) - \frac{1}{2}a \cos(2x) \right]_0^{\pi} &= \\ \left(-1 - \frac{1}{2}a \cdot 1 \right) - \left(-1 - \frac{1}{2}a \cdot 1 \right) &= \\ 1 - \frac{1}{2}a + 1 + \frac{1}{2}a &= 2 \end{aligned}$$

De uitkomst is altijd 2 en onafhankelijk van de waarde van a .

Meetkunde en vectoren

- 81 $\angle DAF = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$
 $\angle EAF = \angle AEF = \angle AFE = 60^\circ$
 $\angle BAE = 90^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 10^\circ$
 $\angle AEB = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$
 $\angle CEF = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$
 $\angle EFC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
 $\angle FCE = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$

82 a

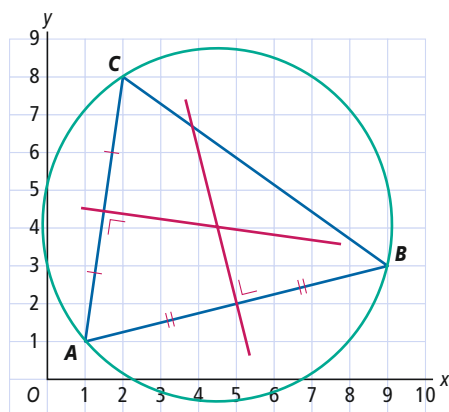


- b Het midden van zijde BC is het punt $D(5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$.

De lengte van zwaartelijn AD is $z_A = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 1)^2 + (5\frac{1}{2} - 1)^2} = 4\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

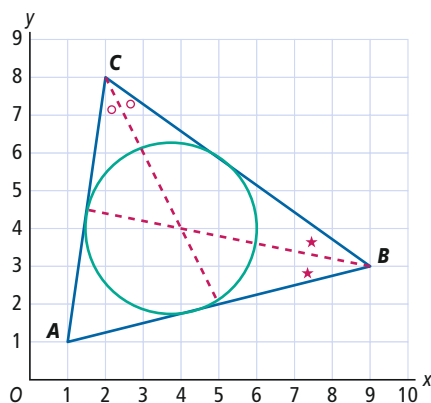
Dan is $AZ = \frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

- c Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.

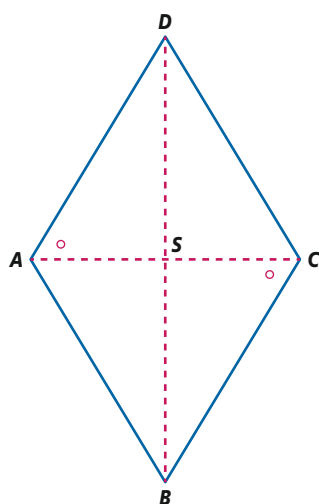


Examen voorbereiding

- d Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de deellijnen van de hoeken van de driehoek.



- 83 a** Elke ruit is een vlieger: klopt, want de diagonalen zijn de symmetrieassen. Niet elke vlieger is een ruit: klopt ook, want de zijden hoeven niet even lang te zijn.
Conclusie: deze bewering is waar.
- b** Deze bewering is waar, want de overstaande zijden van een rechthoek zijn evenwijdig en alle hoeken zijn even groot.
- c** Deze bewering is waar, van een ruit zijn alle zijden even lang en als bovendien de hoeken recht zijn, dan is er sprake van een vierkant.
- d**



In de figuur is een vlieger getekend waarvan de zijden AD en BC evenwijdig zijn.

Dan geldt $\angle BCA = \angle DAC$ (Z-hoeken) en vanwege de symmetrie in de lijn BD is $\angle DCA = \angle DAC$.

Dus is driehoek SCD het spiegelbeeld van driehoek SCB en is $BC = CD$.

Dan zijn alle zijden even lang en daarom is $ABCD$ een ruit.

Deze bewering is waar.

- 84 a** De driehoeken ASB en CSD zijn gelijkvormig.

$$AC = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Dus is $AS : SC = 6 : 4$

$$AS = \frac{6}{10} AC = \frac{6}{10} \cdot 3\sqrt{5} = 1\frac{4}{5}\sqrt{5}$$

b $CS = \frac{4}{10} \cdot 3\sqrt{5} = 1\frac{1}{5}\sqrt{5}$

c $\angle DBA = \angle BDC$ (Z-hoeken)

$$\tan(\angle BDC) = \frac{3}{4} \text{ geeft } \angle BDC = 36,869\dots^\circ \text{ dus } \angle DBA \approx 37^\circ.$$

d $\tan(\angle BAS) = \frac{3}{6}$ geeft $\angle BAS = 26,565\dots^\circ$
 $\angle ABS = \angle DBA = 36,869\dots^\circ$
 $\angle BAS + \angle ABS = 26,565\dots^\circ + 36,869\dots^\circ = 63,434\dots^\circ$
 $\angle ASB = 180^\circ - 63,434\dots^\circ = 116,565\dots^\circ$
 $\angle BSC = 180^\circ - \angle ASB$ (gestrekte hoek)
 $\angle BSC = 180^\circ - 116,565\dots^\circ \approx 63^\circ$

85 a $BP = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

b $AP = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$

c De driehoeken ABS en CPS zijn gelijkvormig met verhouding 3 : 8.

$$AS = \frac{8}{11} \cdot AC = \frac{8}{11} \cdot \sqrt{8^2 + 6^2} = \frac{8}{11} \cdot 10 = 7\frac{3}{11}$$

d $\sin(\angle DAQ) = \frac{DQ}{AD}$ en $\sin(\angle DAP) = \frac{DP}{AP}$

Omdat $\angle DAQ = \angle DAP$ is $\frac{DQ}{AD} = \frac{DP}{AP}$ ofwel

$$DQ \cdot AP = AD \cdot DP$$

$$DQ \cdot \sqrt{61} = 6 \cdot 5$$

$$DQ = \frac{6 \cdot 5}{\sqrt{61}} = \frac{30}{\sqrt{61}}$$

e Uit $\tan(\angle PAD) = \frac{5}{6}$ volgt $\angle PAD \approx 40^\circ$.

f Uit $\tan(\angle DPQ) = \frac{6}{5}$ volgt $\angle DPQ \approx 50^\circ$.

g $\tan(\angle BAC) = \frac{6}{8}$ geeft $\angle BAC = 36,869\dots^\circ$
 $\angle APB = \angle BPC$ (Z-hoeken)
 $\tan(\angle BPC) = \frac{6}{3} = 2$ geeft $\angle BPC = 63,434\dots^\circ$ dus $\angle ABP = 63,434\dots^\circ$
 $\angle BAC + \angle ABP = 36,869\dots^\circ + 63,434\dots^\circ = 100,304\dots^\circ$
 $\angle ASB = 180^\circ - 100,304\dots^\circ = 79,695\dots^\circ$
 $\angle ASP = 180^\circ - \angle ASB$ (gestrekte hoek)
 $\angle ASP = 180^\circ - 79,695\dots^\circ \approx 100^\circ$

86 a $\beta = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\frac{a}{\sin(60^\circ)} = \frac{b}{\sin(45^\circ)} = \frac{8,2}{\sin(75^\circ)}$$

$$a = \frac{8,2 \cdot \sin(60^\circ)}{\sin(75^\circ)} \approx 7,4 \text{ en } b = \frac{8,2 \cdot \sin(45^\circ)}{\sin(75^\circ)} \approx 6,0$$

b $\frac{15}{\sin(45^\circ)} = \frac{18,3}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

$$\sin(\beta) = \frac{18,3 \cdot \sin(45^\circ)}{15} \text{ geeft } \beta \approx 60^\circ$$

$$\gamma \approx 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$$

$$c = \frac{15 \cdot \sin(75^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 20,5$$

Examen voorbereiding

- c** $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
 $b^2 = 9,3^2 + 5,7^2 - 2 \cdot 9,3 \cdot 5,7 \cdot \cos(30^\circ)$
 $b^2 = 27,1639... \text{ geeft } b = \sqrt{27,1639...} = 5,211... \text{ dus } b \approx 5,2.$
 $9,3^2 = 5,211...^2 + 5,7^2 - 2 \cdot 5,211... \cdot 5,7 \cdot \cos(\alpha)$
 $\cos(\alpha) = \frac{9,3^2 - 5,211...^2 - 5,7^2}{-2 \cdot 5,211... \cdot 5,7} \text{ geeft } \alpha \approx 117^\circ.$
 $\gamma \approx 180^\circ - 30^\circ - 117^\circ = 33^\circ$
- d** $\beta = 180^\circ - 35^\circ - 100^\circ = 45^\circ$
 $\frac{a}{\sin(35^\circ)} = \frac{12,5}{\sin(45^\circ)} = \frac{c}{\sin(100^\circ)}$
 $a = \frac{12,5 \cdot \sin(35^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 10,1 \text{ en } c = \frac{12,5 \cdot \sin(100^\circ)}{\sin(45^\circ)} \approx 17,4$
- e** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$
 $BC^2 = 4,1^2 + 8,3^2 - 2 \cdot 4,1 \cdot 8,3 \cdot \cos(120^\circ)$
 $BC = 10,942... \text{ ofwel } BC \approx 10,9$
 $\frac{10,942...}{\sin(120^\circ)} = \frac{8,3}{\sin(\angle B)} = \frac{4,1}{\sin(\angle C)}$
 $\sin(\angle B) = \frac{8,3 \cdot \sin(120^\circ)}{10,942...} \text{ dus } \angle B \approx 41^\circ$
 $\angle C \approx 180^\circ - 120^\circ - 41^\circ = 19^\circ$
- f** $\frac{8,3}{\sin(120^\circ)} = \frac{4,1}{\sin(\angle C)} \text{ geeft } \sin(\angle C) = \frac{4,1 \cdot \sin(120^\circ)}{8,3} \text{ dus } \angle C = 25,327...^\circ$
 $\angle C \approx 25^\circ$
 $\angle B = 180^\circ - 120^\circ - 25,327...^\circ = 34,672...^\circ \approx 35^\circ$
 $\frac{8,3}{\sin(120^\circ)} = \frac{AC}{\sin(34,672...^\circ)}$
 $AC = \frac{8,3 \cdot \sin(34,672...^\circ)}{\sin(120^\circ)} \approx 5,5.$

- 87** De straal van de cirkel is 4 cm.
 De oppervlakte van de cirkel is $\pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$.
 De hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 4 cm is

$$\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

De oppervlakte van de gelijkzijdige driehoeken samen is

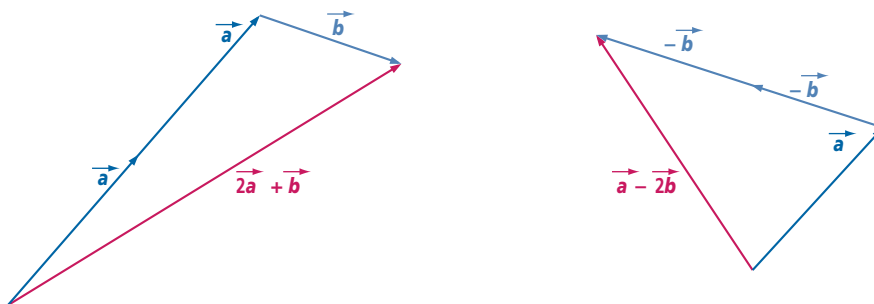
$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Uit $\frac{24\sqrt{3}}{16\pi} = 0,82699... \text{ volgt dat ongeveer } 82,7\% \text{ van de oppervlakte van de cirkel wordt bedekt door de zeshoek.}$

- 88 a** De oppervlakte van vierhoek $ABCP$ is $3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 18 + 15 = 33$.
b De oppervlakte van driehoek APC is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.
c De driehoeken ABS en CPS zijn gelijkvormig met verhouding 3 : 8.
 De hoogte van driehoek ABS is $\frac{8}{11} \cdot 6 = \frac{48}{11}$.
 De oppervlakte driehoek ABS is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{48}{11} = \frac{192}{11} = 17 \frac{5}{11}$.

- d De oppervlakte van $ASPD$ is gelijk aan de oppervlakte van driehoek ACD min de oppervlakte van driehoek CPS .
De oppervlakte van driehoek ACD is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$.
De hoogte van driehoek CPS is $\frac{3}{11} \cdot 6 = \frac{18}{11}$.
De oppervlakte van driehoek CPS is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{18}{11} = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11}$.
De oppervlakte van vierhoek $ASPD$ is $24 - 2\frac{5}{11} = 21\frac{6}{11}$.
- 89 a De straal van de cirkels is $\frac{1}{2} \cdot (10 - 6) = 2$.
De omtrek van $ABCDEF$ is
 $10 + 3 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + 6 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + 3 = 22 + 2\pi \approx 28,3$ cm.
- b De oppervlakte van $ABCDEF$ is $10 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = 42 + 2\pi \approx 48$ cm².
- 90 De stralen MR en MQ staan loodrecht op de raaklijnen. (*raaklijnstelling*)
De punten R en Q liggen op de cirkel met middellijn PM . (*Thales*)
- 91 Noem het raakpunt op de linker cirkel S en die op de rechter cirkel T .
Dan zijn de driehoeken MSQ en NTQ gelijkvormig (overstaande hoeken bij Q en rechte hoeken bij de raakpunten) met verhouding $8 : 3$.
Dan geldt $MQ : QN = 8 : 3$. Dus geldt $(PQ + 8) : (QR + 3) = 8 : 3$.
Stel $PQ = x$ dan is $QR = 22 - x$.
 $(x + 8) : (22 - x + 3) = 8 : 3$
 $\frac{x + 8}{25 - x} = \frac{8}{3}$
 $3x + 24 = 200 - 8x$
 $11x = 176$
 $x = 16$
Conclusie: $PQ = 16$ en $QR = 6$.

92



93

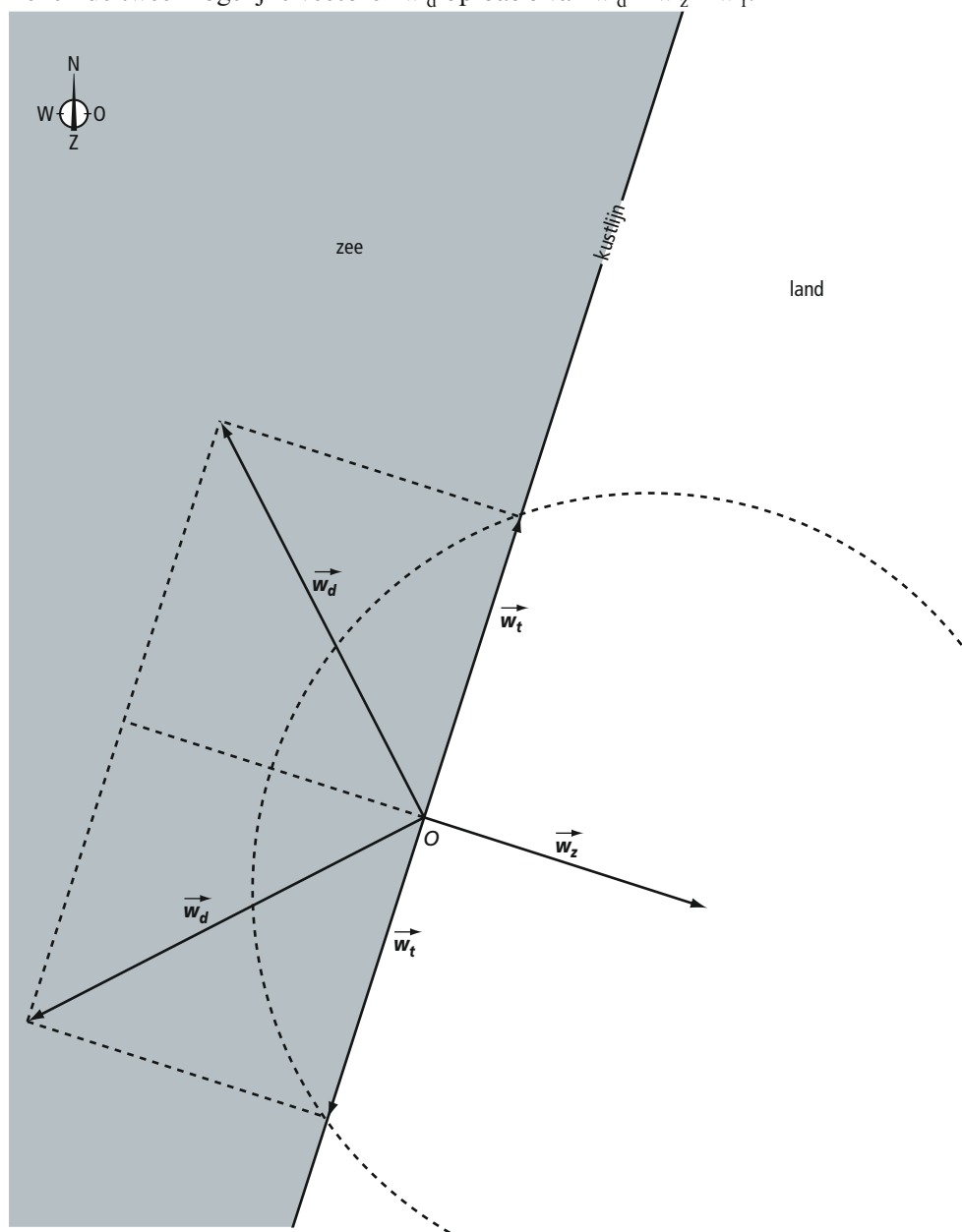
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{64 + 36} \cdot \sqrt{169 + 9}} = \frac{122}{10 \cdot \sqrt{178}} = 0,914\dots$$

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 23,387\dots^\circ \text{ dus } \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 24^\circ.$$

Examen voorbereiding

- 94 a** Teken een cirkel met straal 6 cm en als middelpunt het eindpunt van de vector $\vec{w}_z$. Teken de snijpunten van deze cirkel met de kustlijn. Deze snijpunten zijn de eindpunten van de twee mogelijke vectoren $\vec{w}_r$. Er geldt $\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d$, dus $\vec{w}_d = \vec{w}_z - \vec{w}_r$. Teken de twee mogelijke vectoren $\vec{w}_d$ op basis van $\vec{w}_d = \vec{w}_z - \vec{w}_r$.



- b** Omdat $\vec{w}_z$ loodrecht staat op de kustlijn, is de hoek van $\vec{w}_z$ met de lijn oost-west ook 30° .

$$\vec{w}_z = \begin{pmatrix} 3 \cos(30^\circ) \\ -3 \sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,598... \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_d = \begin{pmatrix} -5 \cos(45^\circ) \\ -5 \sin(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,535... \\ -3,535... \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d \text{ geeft } \vec{w}_r = \begin{pmatrix} -0,937... \\ -5,035... \end{pmatrix}$$

$$|\vec{w}_r| = \sqrt{(-0,937...)^2 + (-5,035...)^2} = \sqrt{26,235...}$$

De snelheid van de resulterende wind is ongeveer 5,1 m/s.

95 a De straal van de cirkel is $MA = \sqrt{(3-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$.

Een vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Van de lijn AC is de richtingscoëfficiënt $\frac{0-4}{4-0} = -1$ en het startgetal 4.

Een vergelijking van de lijn AC is $y = 4 - x$.

Deze vergelijking invullen in de vergelijking van de cirkel geeft

$$(x-3)^2 + (4-x-2)^2 = 5$$

$$(x-3)^2 + (2-x)^2 = 5$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = 5$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 4$$

Bij punt F hoort $x = 1$ en dus $y = 4 - 1 = 3$ ofwel $F(1, 3)$.

Omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ is het midden van lijnstuk CS het punt $(1, 3)$.

Conclusie: F is het midden van lijnstuk CS .

b $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 \text{ dus } \angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) = 90^\circ.$$

De cirkelsector BMF is een kwart cirkel.

Punt G is het midden van lijnstuk OS , dus $G(1, 1)$.

$$\overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 \text{ dus } \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90^\circ.$$

De cirkelsector GMA is ook een kwart cirkel.

De oppervlakte van de twee cirkelsectoren BMF en GMA samen is dus gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

96 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-p \\ 0-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-p \\ -q \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ en $AD = AB$

Dan is $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$$

b $B(2, 0)$ dus $M(1, 0)$

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ED} &= \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix} = (p-1) \cdot 2q + q \cdot (2-2p) \\ &= 2pq - 2q + 2q - 2pq = 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgt $MA \perp ED$.

Examen voorbereiding

Lijnen en cirkels

97 a $k: 10x - 5y = 7$

$$5y = 10x - 7$$

$$y = 2x - 1\frac{2}{5}$$

b $l: y = -3x + 5$

$$3x + y = 5$$

$$\frac{3x}{5} + \frac{y}{5} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{5} = 1$$

$r: 3x + 6y = -5$

$$6y = -3x - 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$$

$s: 3x + y = 10$

$$\frac{3x}{10} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{x}{3\frac{1}{3}} + \frac{y}{10} = 1$$

- c** De richtingscoëfficiënt van l is -3 , van k is 2 , van r is $-\frac{1}{2}$ en van s is -3 .
De lijnen k en r staan loodrecht op elkaar want $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$.

98 a Uit $8x - 4y = 7$ volgt $-4y = -8x + 7$ dus $y = 2x - 1\frac{3}{4}$.

De richtingscoëfficiënt van l is 2 .

Een loodlijn hierop heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$.

- b** Invullen van $x = 4$ en $y = -3$ in $y = -\frac{1}{2}x + b$ geeft $-3 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$ ofwel $b = -1$.

Een vergelijking van de loodlijn uit P op l is $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

99 a De richtingsvector van m is $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ dus een normaalvector is $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$x = -3$ en $y = 2$ invullen bij $5x + 4y = c$ geeft $c = -7$.

Een vergelijking van m is $5x + 4y = -7$.

b $y = 0$ geeft $2 - 5\lambda = 0$ dus $\lambda = \frac{2}{5}$.

Voor de x -coördinaat geldt dan $x = -3 + \frac{2}{5} \cdot 4 = -1\frac{2}{5}$.

Het snijpunt met de x -as is $(-1\frac{2}{5}, 0)$.

100 a $d(P, l) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 9 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$

- b** Kies op één van de lijnen een punt. Bijvoorbeeld $P(1, 1)$ op m .

$n: 3x - y + 2 = 0$

$$d(P, n) = \frac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}\sqrt{10} \text{ dus } d(m, n) = \frac{2}{5}\sqrt{10}$$

101 a Oplossen met elimineren van $\begin{cases} 8x - y = 34 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 56x - 7y = 238 \\ 4x + 7y = 2 \end{cases}$

Deze twee vergelijkingen optellen geeft $60x = 240$ ofwel $x = 4$.

Dit invullen in $8x - y = 34$ geeft

$$8 \cdot 4 - y = 34$$

$$32 - y = 34$$

$$y = -2$$

Het snijpunt van l en m is het punt $(4, -2)$.

b $P(p, q)$ invullen in de afstandsformule $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ voor de lijnen

$$8x - y = 34 \text{ en } 4x + 7y = 2 \text{ geeft } \frac{|8 \cdot p - 1 \cdot q - 34|}{\sqrt{8^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 \cdot p + 7q - 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2}} =$$

$$\frac{|8p - q - 34|}{\sqrt{65}} = \frac{|4p + 7q - 2|}{\sqrt{65}} \text{ dus } |8p - q - 34| = |4p + 7q - 2|.$$

c Deze lijnen zijn de bissectrices van de hoeken gevormd door de lijnen l en m .

$$\begin{array}{ll} \mathbf{d} \quad 8p - q - 34 = 4p + 7q - 2 & \text{of} \quad 8p - q - 34 = -(4p + 7q - 2) \\ 4p - 8q - 32 = 0 & \text{of} \quad 12p + 6q - 36 = 0 \\ p - 2q - 8 = 0 & \text{of} \quad 2p + q - 6 = 0 \end{array}$$

Vergelijkingen van de bissectrices zijn $x - 2y = 8$ en $2x + y = 6$.

Deze zijn ook te schrijven als $y = \frac{1}{2}x - 4$ en $y = -2x + 6$.

Omdat $\frac{1}{2} \cdot -2 = -1$ staan deze bissectrices loodrecht op elkaar.

102 a De richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{|2 \cdot 1 + 5 \cdot 3|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{10}} = \frac{17}{\sqrt{290}} \text{ geeft } \alpha \approx 3^\circ.$$

b Een normaalvector van de lijn $6y + x = 1$ is $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, dus een richtingsvector is

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ De richtingsvectoren zijn } \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|6 \cdot 7 + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{53}} = \frac{40}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{53}} \text{ geeft } \alpha \approx 25^\circ.$$

c De richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Omdat $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ snijden de lijnen elkaar loodrecht en is de hoek 90° .

103 a $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x - 2y = 13 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 9x - 2y = 13 \end{cases}$

Deze vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $5y = -10$ dus $y = -2$

Dan is $3x + (-2) = 1$ ofwel $x = 1$.

De oplossing is $x = 1$ en $y = -2$.

b $\begin{cases} 7a + 3b = -10 \\ a = \frac{1}{2}b - 7 \end{cases}$

De onderste vergelijking substitueren in de bovenste geeft

$$7 \cdot \left(\frac{1}{2}b - 7\right) + 3b = -10$$

$$3\frac{1}{2}b - 49 + 3b = -10$$

$$6\frac{1}{2}b = 39$$

$$b = 6 \text{ en } a = \frac{1}{2} \cdot 6 - 7 = -4$$

De oplossing is $a = -4$ en $b = 6$.

Examen voorbereiding

104 a $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5(x - 1) = 2(x - y) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - 5 = 2x - 2y \end{cases}$ ofwel $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

Deze vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $0 = 2$.

Dit stelsel is strijdig, dus zijn er geen oplossingen.

b $\begin{cases} y = 1\frac{3}{4}x - 7 \\ x = \frac{4}{7}y + 4 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 4y = 7x - 28 \\ 7x = 4y + 28 \end{cases}$ dus $\begin{cases} -7x + 4y = -28 \\ 7x - 4y = 28 \end{cases}$

Deze vergelijkingen optellen geeft $0 = 0$.

Dit stelsel is afhankelijk, dus zijn er oneindig veel oplossingen.

c $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Deze vergelijkingen optellen geeft $2x = 6$ dus $x = 3$ en $y = 0$.

Dit stelsel heeft één oplossing.

d $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} y = 2x - 2\frac{1}{2} \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

Deze vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $0 = -4\frac{1}{2}$.

Dit stelsel is strijdig, dus zijn er geen oplossingen.

105 a Het stelsel $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 5x + py + q = 0 \end{cases}$ is te herleiden tot $\begin{cases} 15x - 5y + 25 = 0 \\ 15x + 3py + 3q = 0 \end{cases}$

Dit zijn twee evenwijdige of samenvallende lijnen als $-5 = 3p$.

Dus als $p = -1\frac{2}{3}$.

$p = -1\frac{2}{3}$ invullen in het stelsel $\begin{cases} 15x - 5y + 25 = 0 \\ 15x + 3py + 3q = 0 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} 15x - 5y + 25 = 0 \\ 15x - 5y + 3q = 0 \end{cases}$

Als $3q = 25$ ofwel $q = 8\frac{1}{3}$, dan is het stelsel afhankelijk.

b Voor $p = -1\frac{2}{3}$ en $q \neq 8\frac{1}{3}$ is het stelsel strijdig.

106 a $(x + 4)^2 + y^2 = 25$

Middelpunt $(-4, 0)$ en straal $r = 5$.

b $(x - 12)^2 + y^2 - 8y = 0$

$(x - 12)^2 + (y - 4)^2 - 16 = 0$

$(x - 12)^2 + (y - 4)^2 = 16$

Middelpunt $(12, 4)$ en straal $r = 4$.

c $x^2 + y^2 + 10x + 4y = 1$

$x^2 + 10x + y^2 + 4y = 1$

$(x + 5)^2 - 25 + (y + 2)^2 - 4 = 1$

$(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 30$

Middelpunt $(-5, -2)$ en straal $r = \sqrt{30}$.

d $x^2 + y^2 - 5x - 7y = 10$

$x^2 - 5x + y^2 - 7y = 10$

$(x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} = 10$

$(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = 28\frac{1}{2}$

Middelpunt $(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ en straal $r = \sqrt{28\frac{1}{2}}$.

e $x^2 + y^2 + 5x - 6y + 16 = 0$

$$x^2 + 5x + y^2 - 6y + 16 = 0$$

$$\left(x + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} + (y - 3)^2 - 9 + 16 = 0$$

$$\left(x + 2\frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = -\frac{3}{4}$$

Omdat $-\frac{3}{4} < 0$ stelt de vergelijking geen cirkel voor.

107 a Invullen van $x = -3$ in $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$ geeft

$$(-3 + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$$

$$(y - 4)^2 = 36$$

$$y - 4 = -6 \text{ of } y - 4 = 6$$

$$y = -2 \text{ of } y = 10$$

De snijpunten zijn $(-3, -2)$ en $(-3, 10)$.

b Invullen van $x = 1 - 5y$ in $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$ geeft

$$(1 - 5y - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

$$(5y + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

$$25y^2 + 30y + 9 + y^2 - 4y + 4 = 13$$

$$26y^2 + 26y = 0$$

$$26y(y + 1) = 0$$

$$y = 0 \text{ of } y = -1$$

$$x = 1 \text{ of } x = 6$$

De snijpunten zijn $(1, 0)$ en $(6, -1)$.

c $y = x + 3$ invullen in $x^2 + y^2 = 9$ geeft

$$x^2 + (x + 3)^2 = 9$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$2x(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3$$

$$y = 3 \text{ of } y = 0$$

De snijpunten zijn $(0, 3)$ en $(-3, 0)$.

108 $y = 2x + 3$ invullen in $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ geeft

$$x^2 + (2x + 3)^2 - 6x - 7 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 12x + 9 - 6x - 7 = 0$$

$$5x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -4$$

Omdat $D < 0$ heeft de laatste vergelijking geen oplossing en dus zijn er geen gemeenschappelijke punten.

109 a De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $6x - 36y - 30 = 0$.

$$x - 6y - 5 = 0$$

$$x = 6y + 5$$

Dit laatste invullen in de vergelijking van cirkel c_1 geeft

$$(6y + 5)^2 - 8(6y + 5) + y^2 - 12y - 22 = 0$$

$$36y^2 + 60y + 25 - 48y - 40 + y^2 - 12y - 22 = 0$$

$$37y^2 - 37 = 0$$

$$y^2 = 1$$

$$y = -1 \text{ of } y = 1$$

$$x = 6 \cdot -1 + 5 = -1 \text{ of } x = 6 \cdot 1 + 5 = 11$$

De snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(11, 1)$.

Examen voorbereiding

b $c_1: x^2 + 6x + 9 + y^2 - 24y + 144 = 100$

$$c_1: x^2 + y^2 + 6x - 24y + 53 = 0$$

$$c_2: x^2 - 2x + 1 + y^2 = 20$$

$$c_2: x^2 + y^2 - 2x - 19 = 0$$

De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $8x - 24y + 72 = 0$.

$$8x = 24y - 72$$

$$x = 3y - 9$$

Dit laatste invullen in de vergelijking van cirkel c_2 geeft

$$(3y - 9 - 1)^2 + y^2 = 20$$

$$(3y - 10)^2 + y^2 = 20$$

$$9y^2 - 60y + 100 + y^2 = 20$$

$$10y^2 - 60y + 80 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$(y - 4)(y - 2) = 0$$

$$y = 4 \text{ of } y = 2$$

$$x = 3 \cdot 4 - 9 = 3 \text{ of } x = 3 \cdot 2 - 9 = -3$$

De snijpunten zijn $(3, 4)$ en $(-3, 2)$.

110 a Het middelpunt M van $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ is $M(2, 1)$.

De lijn MP heeft richtingscoëfficiënt $\frac{2 - 1}{-1 - 2} = -\frac{1}{3}$.

De raaklijn heeft richtingscoëfficiënt 3.

$x = -1$ en $y = 2$ invullen bij $y = 3x + b$ geeft $2 = 3 \cdot -1 + b$ dus $b = 5$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 3x + 5$.

b $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 20 = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 20 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

Het middelpunt M van c is $M(5, 2)$.

De lijn MP loopt verticaal, dus de raaklijn in P loopt horizontaal.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 5$.

111 $y = ax$ invullen in $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$ geeft

$$(x - 2)^2 + (ax - 6)^2 = 20$$

$$x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 - 12ax + 36 = 20$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (-4 - 12a)x + 20 = 0$$

$$D = (-4 - 12a)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 20$$

$$D = 144a^2 + 96a + 16 - 80a^2 - 80$$

$$D = 64a^2 + 96a - 64$$

$$D = 0 \text{ geeft } 64a^2 + 96a - 64 = 0$$

$$a^2 + 1\frac{1}{2}a - 1 = 0$$

$$(a + 2)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$a = -2 \text{ of } a = \frac{1}{2}$$

Voor $a = -2$ en $a = \frac{1}{2}$ raakt lijn l cirkel c .

112 Het middelpunt van cirkel $c: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ is $M(1, 1)$ en de straal is 5.

De afstand van $M(1, 1)$ tot lijn l met vergelijking $3x + 2y = 23$ is

$$\frac{|3 + 2 - 23|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{18}{\sqrt{13}} \approx 4,9923 < 5.$$

Conclusie: lijn l snijdt cirkel c in twee punten.

- 113** De vergrote cirkel raakt lijn k als de straal van de vergrote cirkel gelijk is aan de afstand van het middelpunt M tot lijn k .

$$\text{De afstand van } M(1, 1) \text{ tot } k: x - y = 8 \text{ is } \frac{|1 - 1 - 8|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

De straal van de vergrote cirkel is $4\sqrt{2}$.

- 114 a** $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 52$
b Omdat $\angle MAP = \angle MBP = 90^\circ$ (Thales)
c Het middelpunt van c_2 is het midden van MP , dus $(0, 2)$.

$$\text{De straal is } \frac{1}{2} MP = \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{104} = \sqrt{26}.$$

Een vergelijking van c_2 is $x^2 + (y - 2)^2 = 26$.

$$\begin{aligned} \text{d } c_1: (x - 5)^2 + (y - 3)^2 &= 52 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 &= 52 \\ x^2 + y^2 - 10x - 6y - 18 &= 0 \\ c_2: x^2 + (y - 2)^2 &= 26 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 &= 26 \\ x^2 + y^2 - 4y - 22 &= 0 \end{aligned}$$

De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $-10x - 2y + 4 = 0$.

$$10x + 2y = 4$$

$$5x + y = 2$$

$$y = 2 - 5x$$

Invullen in $x^2 + (y - 2)^2 = 26$ geeft $x^2 + (-5x)^2 = 26$.

$$26x^2 = 26$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

$$y = 7 \text{ of } y = -3$$

De raakpunten zijn $A(-1, 7)$ en $B(1, -3)$.

$$\text{De raaklijn } AP \text{ heeft richtingscoëfficiënt } \frac{7 - 1}{-1 - -5} = 1\frac{1}{2}.$$

$$x = -1 \text{ en } y = 7 \text{ invullen in } y = 1\frac{1}{2}x + b \text{ geeft } 7 = 1\frac{1}{2} \cdot -1 + b \text{ dus } b = 8\frac{1}{2}.$$

$$\text{Een vergelijking van raaklijn } AP \text{ is } y = 1\frac{1}{2}x + 8\frac{1}{2}.$$

$$\text{De raaklijn } BP \text{ heeft richtingscoëfficiënt } \frac{-3 - 1}{1 - -5} = -\frac{2}{3}.$$

$$x = 1 \text{ en } y = -3 \text{ invullen in } y = -\frac{2}{3}x + b \text{ geeft } -3 = -\frac{2}{3} \cdot 1 + b \text{ dus } b = -2\frac{1}{3}.$$

$$\text{Een vergelijking van raaklijn } BP \text{ is } y = -\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}.$$

115 a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

$$\text{Invullen in } c: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 10 \text{ geeft } (\lambda - 5)^2 + (m\lambda - 5)^2 = 10.$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 + m^2\lambda^2 - 10m\lambda + 25 = 10$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (-10m - 10)\lambda + 40 = 0$$

$$D = (-10m - 10)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 40$$

$$D = 100m^2 + 200m + 100 - 160m^2 - 160$$

$$D = -60m^2 + 200m - 60$$

$$D = 0 \text{ geeft } -60m^2 + 200m - 60 = 0.$$

$$3m^2 - 10m + 3 = 0$$

Examen voorbereiding

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$$

$$m = \frac{10+8}{6} = 3 \text{ of } m = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$$

De vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = 3x$ en $y = \frac{1}{3}x$.

$$\text{b } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Invullen in c: $(x-1)^2 + y^2 = 25$ geeft $(11+\lambda)^2 + (m\lambda - 2)^2 = 25$.

$$\lambda^2 + 22\lambda + 121 + m^2\lambda^2 - 4m\lambda + 4 = 25$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (22 - 4m)\lambda + 100 = 0$$

$$D = (22 - 4m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 100$$

$$D = 16m^2 - 176m + 484 - 400m^2 - 400$$

$$D = -384m^2 - 176m + 84$$

$$D = 0 \text{ geeft } -384m^2 - 176m + 84 = 0.$$

$$96m^2 + 44m - 21 = 0$$

$$D = 44^2 - 4 \cdot 96 \cdot -21 = 10000$$

$$m = \frac{-44 + 100}{192} = \frac{7}{24} \text{ of } m = \frac{-44 - 100}{192} = -\frac{3}{4}$$

$$m = \frac{7}{24} \text{ geeft } y = \frac{7}{24}x + b$$

$$x = 12 \text{ en } y = -2 \text{ invullen geeft } -2 = \frac{7}{24} \cdot 12 + b \text{ dus } b = -5\frac{1}{2}.$$

$$m = -\frac{3}{4} \text{ geeft } y = -\frac{3}{4}x + b$$

$$x = 12 \text{ en } y = -2 \text{ invullen geeft } -2 = -\frac{3}{4} \cdot 12 + b \text{ dus } b = 7.$$

Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = \frac{7}{24}x - 5\frac{1}{2}$ en $y = -\frac{3}{4}x + 7$.

- 116 a** Cirkel c: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 20$ heeft middelpunt $M(5, 4)$ en straal $r = \sqrt{20}$.

$$MQ = \sqrt{(5-2)^2 + (4-10)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$\text{Dan is } d(Q, c) = \sqrt{45} - \sqrt{20} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

- b** Cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$ ofwel $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Het middelpunt is $M(1, 4)$ en de straal is $\sqrt{5}$.

$$MQ = \sqrt{(1-9)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

$$\text{Dan is } d(Q, c) = \sqrt{80} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

- 117** Uit $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ volgt $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Dus c_1 heeft middelpunt $(-1, 1)$ en straal $r = \sqrt{2}$.

Cirkel c_2 : $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 8$ heeft middelpunt $(4, 6)$ en straal $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

De afstand tussen de middelpunten is $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

De afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 is $5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

- 118 a** Cirkel c: $x^2 + y^2 = 20$ heeft middelpunt $(0, 0)$ en straal $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

De afstand van het middelpunt $(0, 0)$ tot de lijn l : $x + 2y = 15$ is

$$\frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

De afstand van cirkel c tot lijn l is $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

b $l: y = \frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$ geeft $x - 2y - 15 = 0$

Het middelpunt van de cirkel is $M(-2, 4)$ en de straal is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$$d(M, l) = \frac{|-2 - 2 \cdot 4 - 15|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{25}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}.$$

De afstand van cirkel c tot lijn l is $5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

119 a $x^2 + 6x + y^2 - 8y - 75 = 0$

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 - 75 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$$

Cirkel c heeft middelpunt $M(-3, 4)$ en straal $r = 10$.

$x = -3$ en $y = 4$ invullen in $y = 2x + p$ geeft $4 = 2 \cdot -3 + p$.

Dus $p = 10$.

b $y = 2x + p$ geeft $-2x + y - p = 0$.

$$d(c, l_p) = 5 \text{ geeft } d(M, l_p) = 10 + 5 = 15$$

$$\frac{|-2 \cdot -3 + 1 \cdot 4 - p|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 15$$

$$\frac{|10 - p|}{\sqrt{5}} = 15 \text{ ofwel } |10 - p| = 15\sqrt{5}.$$

$$10 - p = -15\sqrt{5} \text{ of } 10 - p = 15\sqrt{5}$$

$$p = 10 + 15\sqrt{5} \text{ of } p = 10 - 15\sqrt{5}$$

120 a Bedenk dat $\angle ACB = 90^\circ$ (*Thales*)

De driehoeken ABC en ACD zijn gelijkvormig.

Immers $\angle BAC = \angle CAD$ en $\angle ACB = \angle ADC$ (90°).

b Omdat de driehoeken ABC en ACD gelijkvormig zijn, geldt

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD} \text{ dus } AC^2 = AB \cdot AD.$$

121 a Een vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = r^2$.

Als $C(p, q)$ op de cirkel ligt, geldt dus $p^2 + q^2 = r^2$.

b $AB = 2r$, $AD = p + r$ en $AC = \sqrt{(p + r)^2 + q^2}$.

c $AC^2 = \left(\sqrt{(p + r)^2 + q^2} \right)^2$ geeft $AC^2 = (p + r)^2 + q^2$.

$$AC^2 = p^2 + 2pr + r^2 + q^2$$

$$AC^2 = 2pr + 2r^2$$

$$AB \cdot AD = 2r \cdot (p + r)$$

$$AB \cdot AD = 2pr + 2r^2$$

Dus geldt $AC^2 = AB \cdot AD$.

122 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ dus is $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dan is $C(5 + 2, 1 + 4)$ en $D(1 + 2, 3 + 4)$ ofwel $C(7, 5)$ en $D(3, 7)$.

b Uit $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ en $m_4 = 6$ volgt $m = 12$.

$$\vec{z} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{12} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{12} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{6}{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{12} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 42 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 50 \\ 62 \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt zijn $Z(4\frac{1}{6}, 5\frac{1}{6})$.

Examen voorbereiding

- c Dan is $m = 3 + m_4$ en geldt

$$\vec{z} = \frac{1}{3+m_4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3+m_4} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3+m_4} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{m_4}{3+m_4} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3+m_4} \begin{pmatrix} 1+5+7+3m_4 \\ 3+1+5+7m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3+m_4} \begin{pmatrix} 13+3m_4 \\ 9+7m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$13+3m_4 = 3\frac{1}{2}(3+m_4) \text{ en } 9+7m_4 = 5\frac{1}{2}(3+m_4)$$

$$13+3m_4 = 10\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}m_4 \text{ en } 9+7m_4 = 16\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}m_4$$

$$\frac{1}{2}m_4 = 2\frac{1}{2} \text{ en } 1\frac{1}{2}m_4 = 7\frac{1}{2}$$

$$m_4 = 5$$

- 123 a $x_Z = \frac{1}{3}(5+8+11) = 8$ en $y_Z = \frac{1}{3}(2+(-2)+9) = 3$
De coördinaten van het zwaartepunt zijn $Z(8, 3)$.

- b Punt S is het midden van zijde AB . Dus $S(6\frac{1}{2}, 0)$.

$$CS = \sqrt{\left(4\frac{1}{2}\right)^2 + 9^2} = \sqrt{101\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{405} = 4\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijn in twee delen in verhouding 1 : 2.

$$\text{Dus } CZ = \frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

- 124 a $x_Z = \frac{1}{3}(0+4+p) = 1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}p$ en $y_Z = \frac{1}{3}(6+0+9) = 5$
Alle punten Z hebben dezelfde y -coördinaat en liggen dus op een horizontale lijn. Een vergelijking van die lijn is $y = 5$.

- b $C(p, 9)$ en $Z(1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}p, 5)$ geeft $CZ = \sqrt{\left(p - 1\frac{1}{3} - \frac{1}{3}p\right)^2 + (9-5)^2}$.

$$\text{Uit } CZ = 6\frac{2}{3} \text{ volgt: } \sqrt{\left(\frac{2}{3}p - 1\frac{1}{3}\right)^2 + 16} = 6\frac{2}{3}.$$

$$\left(\frac{2}{3}p - 1\frac{1}{3}\right)^2 + 16 = \left(\frac{20}{3}\right)^2$$

$$\frac{4}{9}p^2 - \frac{16}{9}p + \frac{16}{9} + 16 = \frac{400}{9}$$

$$4p^2 - 16p + 16 + 144 = 400$$

$$p^2 - 4p - 60 = 0$$

$$(p+6)(p-10) = 0$$

$$p = -6 \text{ of } p = 10$$

- 125 a Als $\triangle ABC$ een rechthoekige driehoek is, dan is één van de zijden een middellijn van de cirkel (*Thales*).

Zijde AB kan niet een middellijn zijn.

Als zijde BC een middellijn is, dan is C het punt $(0, 8)$.

Als zijde AC een middellijn is, dan is C het punt $(-4, 6)$. Spiegel daartoe punt $A(4, 0)$ in het middelpunt $(0, 3)$ van de cirkel.

- b Omdat $AB = AC$, ligt punt C ook op de cirkel met middelpunt $A(4, 0)$ en

$$\text{straal } AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$$

Een vergelijking van deze cirkel is $(x-4)^2 + y^2 = 20$.

$$x^2 + (y-3)^2 = 25 \text{ herleid je tot } x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25 \text{ of ook } x^2 + y^2 - 6y = 16.$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 20 \text{ herleid je tot } x^2 - 8x + 16 + y^2 = 20 \text{ of ook } x^2 + y^2 - 8x = 4.$$

De vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $8x - 6y = 12$ ofwel $8x = 6y + 12$

$$\text{dus } x = \frac{3}{4}y + 1\frac{1}{2}.$$

Invullen bij $(x - 4)^2 + y^2 = 20$ geeft $\left(\frac{3}{4}y + 1\frac{1}{2} - 4\right)^2 + y^2 = 20$.

$$\left(\frac{3}{4}y - 2\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 20$$

$$\frac{9}{16}y^2 - 3\frac{3}{4}y + 6\frac{1}{4} + y^2 = 20$$

$$1\frac{9}{16}y^2 - 3\frac{3}{4}y - 13\frac{3}{4} = 0$$

$$25y^2 - 60y - 220 = 0$$

$$5y^2 - 12y - 44 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -44 = 1024$$

$$y - \frac{12 + 32}{10} = 4\frac{2}{5} \text{ of } y = \frac{12 - 32}{10} = -2$$

$y = -2$ levert punt B op.

$$y = 4\frac{2}{5} \text{ geeft } x = \frac{3}{4} \cdot 4\frac{2}{5} + 1\frac{1}{2} = 4\frac{4}{5}$$

De coördinaten van C zijn $\left(4\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5}\right)$.

- 126** Een vergelijking van c is $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$.
 $x = t$ en $y = 2t$ invullen geeft $(t - 1)^2 + (2t - 7)^2 = 25$.
 $t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 28t + 49 = 25$
 $5t^2 - 30t + 25 = 0$
 $t^2 - 6t + 5 = 0$
 $(t - 1)(t - 5) = 0$
 $t = 1$ of $t = 5$
 De snijpunten zijn $(1, 2)$ en $(5, 10)$.

- 127 a** Als P op lijn k ligt, dan zijn A , B en P niet de hoekpunten van een driehoek.
 In dat geval is P het snijpunt van de lijnen k en m .

De richtingscoëfficiënt van lijn k is $\frac{0 - 10}{40 - 0} = -\frac{1}{4}$.

Een vergelijking van k is $y = -\frac{1}{4}x + 10$.

Snijden met m geeft $30 - 3t = -\frac{1}{4}(18 + 5t) + 10$.

$$30 - 3t = -4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}t + 10$$

$$-1\frac{3}{4}t = -24\frac{1}{2}$$

$$t = 14$$

De coördinaten van P zijn $(18 + 5 \cdot 14, 30 - 3 \cdot 14)$ ofwel $(88, -12)$.

- b** Als $\angle APB = 90^\circ$ dan is $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$.

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 20 - 3t \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -22 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 + 5t \\ 20 - 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -22 + 5t \\ 30 - 3t \end{pmatrix} = 0$$

$$(18 + 5t)(-22 + 5t) + (20 - 3t)(30 - 3t) = 0$$

$$-396 + 90t - 110t + 25t^2 + 600 - 60t - 90t + 9t^2 = 0$$

$$34t^2 - 170t + 204 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 3)(t - 2) = 0$$

$$t = 3 \text{ of } t = 2$$

$t = 2$ geeft $P(28, 24)$.

Examen voorbereiding

$$AP = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980} \text{ en } BP = \sqrt{12^2 + 24^2} = \sqrt{720}$$

Als $t = 2$, dan is $\triangle ABP$ wel rechthoekig, maar niet gelijkbenig.

$t = 3$ geeft $P(33, 21)$.

$$AP = \sqrt{33^2 + 11^2} = \sqrt{1210} \text{ en } BP = \sqrt{7^2 + 21^2} = \sqrt{490}$$

Als $t = 3$, dan is $\triangle ABP$ wel rechthoekig, maar niet gelijkbenig.

Conclusie: er is geen punt P zó dat $\triangle ABP$ een rechte hoek heeft bij P én gelijkbenig is.

128 a Een vergelijking van c is $(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 100$.

Snijden met de x -as geeft $(x - 14)^2 + (0 - 8)^2 = 100$.

$$(x - 14)^2 + 64 = 100$$

$$(x - 14)^2 = 36$$

$$x - 14 = -6 \text{ of } x - 14 = 6$$

$$x = 8 \text{ of } x = 20$$

De snijpunten zijn $A(8, 0)$ en $B(20, 0)$.

$$m = m_1 + m_2 = 3 + 1 + 2 = 6$$

$$\vec{z} = \frac{3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt zijn $(12, 2\frac{2}{3})$.

b Noem P de projectie van M op de x -as, dan is $P(14, 0)$.

Noem r de straal van cirkel d , dan geldt:

$$NP = 14 - r$$

$$PM = 8$$

$$NM = r + 10 \text{ (rakende cirkels)}$$

Verder is $\triangle NPM$ rechthoekig, dus geldt

$$PN^2 + PM^2 = NM^2 \text{ (Pythagoras)}$$

$$(14 - r)^2 + 8^2 = (r + 10)^2$$

$$196 - 28r + r^2 + 64 = r^2 + 20r + 100$$

$$-48r = -160$$

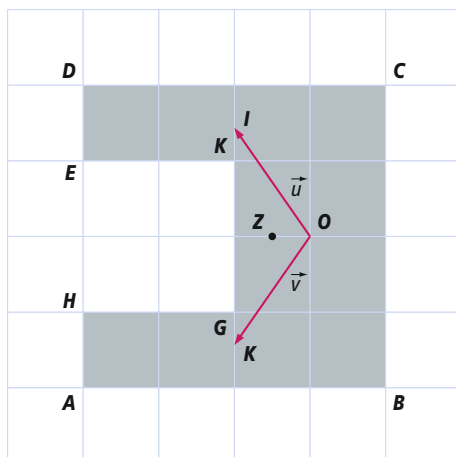
$$r = 3\frac{1}{3}$$

De straal van cirkel d is $3\frac{1}{3}$.

129 Verdeel de figuur in drie rechthoeken elk met oppervlakte 4.

De punten K , O en I zijn de snijpunten van de diagonalen in de respectievelijke rechthoeken.

$$\text{Dan geldt } \vec{z} = \frac{4}{12} \cdot \vec{OO} + \frac{4}{12} \cdot \vec{OI} + \frac{4}{12} \cdot \vec{OK} = \frac{1}{3} (\vec{u} + \vec{v}).$$



- 130 a** De raaklijn voldoet aan de vergelijking $y = ax + 4$ ofwel $ax - y + 4 = 0$.

$$\text{Dan } d(M, k) = \frac{|2a - 0 + 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2.$$

$$|2a + 4| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$4a^2 + 16a + 16 = 4a^2 + 4$$

$$16a = -12$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

De vergelijking van lijn k is $k: y = -\frac{3}{4}x + 4$.

Lijn k snijden met de x -as geeft $-\frac{3}{4}x + 4 = 0$.

$$-\frac{3}{4}x = -4 \text{ geeft } x = 5\frac{1}{3}.$$

De x -coördinaat van S is $5\frac{1}{3}$.

- b** Het punt A heeft coördinaten (a, pa) .

Omdat A op de gegeven cirkel $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ligt moet gelden

$$(a - 2)^2 + (pa)^2 = 4.$$

Omdat $OA = 3$ moet gelden $a^2 + (pa)^2 = 9$.

$(pa)^2 = 9 - a^2$ substitueren in $(a - 2)^2 + (pa)^2 = 4$ geeft

$$(a - 2)^2 + 9 - a^2 = 4$$

$$a^2 - 4a + 4 + 9 - a^2 = 4$$

$$-4a = -9$$

$$a = \frac{9}{4}$$

Dit laatste invullen in $a^2 + (pa)^2 = 9$ geeft $\frac{81}{16} + \frac{81}{16}p^2 = 9$.

$$81 + 81p^2 = 144$$

$$81p^2 = 63$$

$$p^2 = \frac{63}{81} = \frac{7}{9}$$

$$p = \frac{1}{3}\sqrt{7} \quad (p > 0)$$

- 131 a** Er geldt $c_3: x^2 + (y - m)^2 = r^2$ (middelpunt $(m, 0)$ en straal r)

c_3 raakt c_1 dus $m = r + 3$ ofwel $r = m - 3$.

c_3 raakt c_2 dus $m^2 + 15^2 = (r + 12)^2$ ofwel $r = \sqrt{m^2 + 225} - 12$.

Uit $\sqrt{m^2 + 225} - 12 = m - 3$ volgt $\sqrt{m^2 + 225} = m + 9$.

$$m^2 + 225 = m^2 + 18m + 81$$

$$18m = 144$$

$$m = 8$$

$r = m - 3$ dus $r = 5$ en $c_3: x^2 + (y - 8)^2 = 25$.

- b** De verticale (inwendige) raaklijn heeft vergelijking $x = 3$.

De andere (uitwendige) raaklijnen voldoen aan de vergelijking $l: y = ax + b$ ofwel $ax - y + b = 0$.

Er geldt $d((0, 0), l) = 3$ en $d((15, 0), l) = 12$.

Dat geeft $\frac{|a \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$ en $\frac{|a \cdot 15 - 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 12$.

$$|b| = 3\sqrt{a^2 + 1} \text{ en } |15a + b| = 12\sqrt{a^2 + 1}$$

$4 \cdot |b| = 12\sqrt{a^2 + 1}$ substitueren bij $|15a + b| = 12\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $4|b| = |15a + b|$.

$$4b = 15a + b \text{ of } 4b = -15a - b$$

$$3b = 15a \text{ of } 5b = -15a$$

$$b = 5a \text{ of } b = -3a$$

Examen voorbereiding

Invullen van $b = -3a$ in $|b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|-3a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$.

$9a^2 = 9(a^2 + 1)$ dus $a^2 = a^2 + 1$. Dit heeft geen oplossing.

Invullen van $b = 5a$ in $|b| = 3\sqrt{a^2 + 1}$ geeft $|5a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$.

$25a^2 = 9(a^2 + 1)$ dus $25a^2 = 9a^2 + 9$.

$$16a^2 = 9$$

$$a^2 = \frac{9}{16}$$

$$a = \frac{3}{4} \text{ of } a = -\frac{3}{4}$$

$$a = \frac{3}{4} \text{ geeft } b = 5 \cdot \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$$

$$a = -\frac{3}{4} \text{ geeft } b = 5 \cdot -\frac{3}{4} = -3\frac{3}{4}$$

Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $x = 3$, $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$ en $y = -\frac{3}{4}x - 3\frac{3}{4}$.

Bewegingsvergelijkingen

132 Bijvoorbeeld $\begin{cases} x(t) = -3 + 4\cos(t) \\ y(t) = 5 + 4\sin(t) \end{cases}$

In het algemeen geldt $\begin{cases} x(t) = -3 + 4\cos(pt) \\ y(t) = 5 + 4\sin(pt) \end{cases}$ voor elke $p \neq 0$.

De waarde van p bepaalt de snelheid en de richting waarmee een punt de cirkel doorloopt.

133 a Uit $\frac{1}{2}t \cdot \sin(t) = 0$ volgt $t = k \cdot \pi$ met k geheel.

Dan geldt $x(k\pi) = k \cdot \frac{1}{2}\pi \cos(k\pi)$.

Merk op dat de even waarden van k bij de snijpunten met de positieve x -as horen: $x(2) = \pi \cdot \cos(2\pi) = \pi$, $x(4) = 2\pi \cdot \cos(4\pi) = 2\pi$, $x(6) = 3\pi \cdot \cos(6\pi) = 3\pi$ etc.

Twee opeenvolgende even getallen kun je schrijven als $2p$ en $2p + 2$ met p een geheel getal. De afstand tussen twee opeenvolgende snijpunten met de positieve x -as is

$$x((2p+2)\pi) - x(2p\pi) = (2p+2) \cdot \frac{1}{2}\pi \cos((2p+2)\pi) - 2p \cdot \frac{1}{2}\pi \cos(2p\pi) = (p+1) \cdot \pi \cos((2p+2)\pi) - p \cdot \pi \cos(2k\pi) = (p+1) \cdot \pi \cdot 1 - p \cdot \pi \cdot 1 = \pi.$$

De afstand tussen twee opeenvolgende snijpunten met de positieve x -as is dus steeds gelijk aan π .

b Dan geldt: $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 10^2$ dus $\left(\frac{1}{2}t \cdot \cos(t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t \cdot \sin(t)\right)^2 = 100$.

$$\frac{1}{4}t^2 \cdot \cos^2(t) + \frac{1}{4}t^2 \cdot \sin^2(t) = 100$$

$$\frac{1}{4}t^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 100$$

$$\frac{1}{4}t^2 \cdot 1 = 100$$

$$t^2 = 400$$

$$t = -20 \text{ of } t = 20$$

Alleen $t = 20$ voldoet.

134 a Uit $3\cos(3t) = 0$ volgt $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ dus $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$.

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } y\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -3\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -3 \cdot \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}. \text{ Dus punt } \left(0, -1\frac{1}{2}\right).$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft } y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3 \cdot 1 = -3. \text{ Dus punt } (0, -3).$$

$$t = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft } y\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -3\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -3 \cdot \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}. \text{ Dus punt } \left(0, -1\frac{1}{2}\right).$$

$$t = 1\frac{1}{6}\pi \text{ geeft } y\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -3\sin\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = -3 \cdot -\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}. \text{ Dus punt } \left(0, 1\frac{1}{2}\right).$$

$$t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ geeft } y\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -3\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -3 \cdot -1 = 3. \text{ Dus punt } (0, 3).$$

$$t = 1\frac{5}{6}\pi \text{ geeft } y\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -3\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = -3 \cdot -\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}. \text{ Dus punt } \left(0, 1\frac{1}{2}\right).$$

b $\frac{dx}{dt} = -9\sin(3t)$ en $\frac{dy}{dt} = -3\cos(t)$

In een punt met een verticale raaklijn geldt $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

$$-9\sin(3t) = 0 \text{ geeft } 3t = k \cdot \pi \text{ ofwel } t = k \cdot \frac{1}{3}\pi.$$

Voor deze waarden van t geldt $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

Het punt in het eerste kwadrant met een verticale raaklijn hoort bij $t = 1\frac{1}{3}\pi$.

Dus is het gezochte punt

$$\left(3\cos\left(3 \cdot 1\frac{1}{3}\pi\right), -3\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right)\right) = (3\cos(4\pi), -3\sin(1\frac{1}{3}\pi)) = \left(3, 1\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

c Uit $3\cos(3t) = -3\sin(t)$ volgt $\cos(3t) = -\sin(t)$.

$$\cos(3t) = \sin(-t)$$

$$\cos(3t) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - t\right)$$

$$\cos(3t) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi + t\right)$$

$$3t = \frac{1}{2}\pi + t + k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = -\frac{1}{2}\pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 4t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \text{ of } t = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

De gezochte waarden van t zijn $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{3}{8}\pi$, $t = \frac{7}{8}\pi$, $t = 1\frac{3}{8}\pi$ en

$$t = 1\frac{7}{8}\pi.$$

135 De snelheidsvector is $\vec{v} = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ 2t - 2 \end{pmatrix}$.

Als $t = 3$ dan is de snelheidsvector $\vec{v}(3) = \begin{pmatrix} 3^2 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De baansnelheid op $t = 3$ is $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

De baansnelheid is $|\vec{v}| = \sqrt{(t^2 - 2t)^2 + (2t - 2)^2}$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{t^4 - 4t^3 + 4t^2 + 4t^2 - 8t + 4}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 4}$$

De baanversnelling is $v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 4}} \cdot (4t^3 - 12t^2 + 16t - 8)$.

$$v'(t) = \frac{2t^3 - 6t^2 + 8t - 4}{\sqrt{t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 4}}$$

Als $t = 3$ dan is de baanversnelling $v'(3) = \frac{2 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 4}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$.

Examen voorbereiding

- 136 a** Uit $2\cos(t) = 0$ volgt $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

Bij het snijpunt met de positieve y -as hoort $t = 1\frac{1}{2}\pi$.

De snelheidsvector is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ -\sin(t + \frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix}$.

Bij $t = 1\frac{1}{2}\pi$ hoort de snelheidsvector

$$\begin{pmatrix} -2\sin(1\frac{1}{2}\pi) \\ -\sin(1\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin(\frac{3}{2}\pi) \\ -\sin(\frac{7}{4}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bij $t = 1\frac{1}{2}\pi$ is de baansnelheid $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{4\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

- b** De baansnelheid is $|\vec{v}| = \sqrt{(-2\sin(t))^2 + (-\sin(t + \frac{1}{4}\pi))^2}$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{4\sin^2(t) + \sin^2(t + \frac{1}{4}\pi)}$$

De baanversnelling is

$$v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{4\sin^2(t) + \sin^2(t + \frac{1}{4}\pi)}} \cdot (8\sin(t)\cos(t) + 2\sin(t + \frac{1}{4}\pi)\cos(t + \frac{1}{4}\pi))$$

$$v'(t) = \frac{4\sin(t)\cos(t) + \sin(t + \frac{1}{4}\pi)\cos(t + \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{4\sin^2(t) + \sin^2(t + \frac{1}{4}\pi)}}.$$

Bij $t = \pi$ is de baanversnelling

$$\frac{4\sin(\pi)\cos(\pi) + \sin(1\frac{1}{4}\pi)\cos(1\frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{4\sin^2(\pi) + \sin^2(1\frac{1}{4}\pi)}} = \frac{0 + -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{0 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

- 137 a** De snelheidsvector is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 4\cos(t) \end{pmatrix}$.

Op $t = \frac{1}{6}\pi$ is de snelheidsvector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3\sin(\frac{1}{6}\pi) \\ 4\cos(\frac{1}{6}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

De richtingscoëfficiënt van de snelheidsvector is $\frac{2\sqrt{3}}{-1\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

$\tan(\alpha) = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ geeft $\alpha = 66,586\dots^\circ$

De snelheidsvector maakt op het tijdstip $t = \frac{1}{6}\pi$ een hoek van ongeveer 67° met de positieve x -as.

- b** De baansnelheid is $|\vec{v}| = \sqrt{(-3\sin(t))^2 + (4\cos(t))^2} = \sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}$.

De baansnelheid op $t = \frac{1}{6}\pi$ is

$$|\vec{v}| = \sqrt{9\sin^2(\frac{1}{6}\pi) + 16\cos^2(\frac{1}{6}\pi)} = \sqrt{9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{2\frac{1}{4} + 12} = \sqrt{14\frac{1}{4}}.$$

De baanversnelling is $v'(t) = \frac{18\sin(t)\cos(t) - 32\cos(t) \cdot \sin(t)}{2\sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}}$ ofwel

$$v'(t) = \frac{-7\cos(t) \cdot \sin(t)}{\sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}}$$

De baanversnelling bij $t = \frac{1}{6}\pi$ is

$$v'(\frac{1}{6}\pi) = \frac{-7\cos(\frac{1}{6}\pi) \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi)}{\sqrt{9\sin^2(\frac{1}{6}\pi) + 16\cos^2(\frac{1}{6}\pi)}} = \frac{-7 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{3}{4}}} = -\frac{7\sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{57}{4}}} = -\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{57}} = -\frac{7}{2\sqrt{19}}$$

- c Als de baanversnelling 0 is dan heeft de baansnelheid een uiterste waarde.

$$\frac{-7\cos(t) \cdot \sin(t)}{\sqrt{9\sin^2(t) + 16\cos^2(t)}} = 0 \text{ geeft } \sin(t) = 0 \text{ of } \cos(t) = 0.$$

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ geeft dit $t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$.

Voor $t = 0, \pi$ en 2π is de baansnelheid $\sqrt{9\sin^2(0) + 16\cos^2(0)} = \sqrt{0 + 16} = 4$.

Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$ is de baansnelheid $\sqrt{9\sin^2(\frac{1}{2}\pi) + 16\cos^2(\frac{1}{2}\pi)} = \sqrt{9 + 0} = 3$.

Conclusie: de maximale baansnelheid is 4.

- d $OP = \sqrt{9\cos^2(t) + 16\sin^2(t)}$

$$OP = 12\frac{1}{2} \text{ geeft } 9\cos^2(t) + 16\sin^2(t) = 12\frac{1}{2}.$$

$$9\cos^2(t) + 9\sin^2(t) + 7\sin^2(t) = 12\frac{1}{2}$$

$$9 + 7\sin^2(t) = 12\frac{1}{2}$$

$$7\sin^2(t) = 3\frac{1}{2}$$

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ of } \sin(t) = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ geeft dit $t = \frac{1}{4}\pi$ of $t = \frac{3}{4}\pi$ of $t = 1\frac{1}{4}\pi$ of $t = 1\frac{3}{4}\pi$.

- 138 a Snijden met de x -as geeft $y = 0$ dus $\sin(2t) - \sin(t) = 0$.

$$\sin(2t) = \sin(t)$$

$$2t = t + k \cdot 2\pi \text{ of } 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \text{ of } 3t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot 2\pi \text{ of } t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ geeft dit $t = 0$ of $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = \pi$ of $t = 1\frac{2}{3}\pi$ of $t = 2\pi$.

Op $t = \frac{1}{3}\pi$ ligt P links van de y -as.

De x -coördinaat van P is dan $x(\frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

- b $x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t)$

$$y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t)$$

De snelheidsvector op $t = 0$ is $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De snelheidsvector op $t = \pi$ is $\begin{pmatrix} x'(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Noem φ de hoek tussen deze twee snelheidsvectoren, dan geldt

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\varphi = 29,744\dots^\circ$$

De hoek tussen deze snelheidsvectoren is ongeveer $29,7^\circ$.

Examen voorbereiding

139 a $x'(t) = 6t + 1$

$$y'(t) = 6t - 1$$

$$v(t) = \sqrt{(6t + 1)^2 + (6t - 1)^2}$$

$$v(t) = \sqrt{36t^2 + 12t + 1 + 36t^2 - 12t + 1}$$

$$v(t) = \sqrt{72t^2 + 2}$$

$$v'(t) = \frac{144t}{2\sqrt{72t^2 + 2}} = \frac{72t}{\sqrt{72t^2 + 2}}$$

$$v'(t) = 0 \text{ geeft } t = 0.$$

$$\text{De minimale snelheid is } v(0) = \sqrt{72 \cdot 0^2 + 2} = \sqrt{2}.$$

b $y(t) = 0$ geeft $at^2 - t + 1 = 0$.

Deze vergelijking moet één oplossing hebben, dus $D = 0$.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 1 - 4a$$

$$D = 0 \text{ geeft } 1 - 4a = 0.$$

$$a = \frac{1}{4}$$

140 a In punt A geldt $1 - t^2 = 0$.

$$t^2 = 1$$

$$t = -1 \text{ of } t = 1$$

$$t = -1 \text{ geeft punt } (0, 0).$$

$$t = 1 \text{ geeft punt } A(0, 4).$$

$$x'(t) = -2t \text{ en } y'(t) = 2(1 + t)$$

$$x'(1) = -2 \cdot 1 = -2 \text{ en } y'(1) = 2(1 + 1) = 4$$

$$\text{De snelheid in } A \text{ is } \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} (=2\sqrt{5}).$$

b $x = 1 - t^2$ en $y = (1 + t)^2$ invullen in $(x + y)^2 = 4y$ geeft

$$(1 - t^2 + (1 + t)^2)^2 = 4(1 + t)^2$$

$$(1 - t^2 + 1 + 2t + t^2)^2 = 4(1 + 2t + t^2)$$

$$(2 + 2t)^2 = 4 + 8t + 4t^2 \text{ en dat klopt voor iedere waarde van } t, \text{ dus voor iedere waarde van } t \text{ ligt } P \text{ op de kromme met vergelijking } (x + y)^2 = 4y.$$

141 a $x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t)$

$$y'(t) = -2\sin(t)$$

$$v(t) = \sqrt{(-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 + (-2\sin(t))^2}$$

Het maximum van v berekenen met de rekenmachine:

$$\text{Invoer: } y_1 = \sqrt{(-\sin(x) + 2\cos(2x))^2 + (-2\sin(x))^2}$$

$$\text{Venster: } 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 5$$

$$\text{Optie: maximum geeft } x \approx 1,571 \text{ en } y \approx 3,606.$$

De maximale snelheid van P is ongeveer 3,6 meter per seconde.

b Voor de punten O , A en B geldt $y = x$ dus $\cos(t) + \sin(2t) = 2\cos(t)$.

$$\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 2\cos(t)$$

$$-\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 0$$

$$\cos(t)(2\sin(t) - 1) = 0$$

$$\cos(t) = 0 \text{ of } 2\sin(t) = 1$$

$$\cos(t) = 0 \text{ of } \sin(t) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(t) = 0 \text{ geeft } x = 0 \text{ en } y = 0, \text{ dus punt } O.$$

$$\sin(t) = \frac{1}{2} \text{ geeft } t = \frac{1}{6}\pi \text{ of } t = \frac{5}{6}\pi.$$

$$\text{De beweging van } A \text{ naar } B \text{ duurt } \frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi \text{ seconden.}$$

c De helling van lijnstuk PQ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t + \pi) - 2\cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) - (\cos(t) + \sin(2t))}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t + \pi) - 2\cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2t + 2\pi) - \cos(t) - \sin(2t)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(t + \pi) - 2\cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2t) - \cos(t) - \sin(2t)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(\cos(t + \pi) - \cos(t))}{\cos(t + \pi) - \cos(t)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \text{ (voor elke waarde van } t \text{ met } \cos(t) \neq 0)$$

Dus de helling van lijnstuk PQ is onafhankelijk van t .