

13 Cirkels

Voorkennis

- V1 a** $y = 0$ invullen geeft $3x = 12$ ofwel $x = 4$.
 Het snijpunt met de x -as is $(4, 0)$.
 $x = 0$ invullen geeft $4y = 12$ ofwel $y = 3$.
 Het snijpunt met de y -as is $(0, 3)$.
- b** Deel links en rechts door 12, dit geeft $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.
- c** De noemers van de twee termen geven de x -coördinaat van het snijpunt met de x -as en de y -coördinaat van het snijpunt met de y -as.
- d** $3x + 4y = 12$
 $4y = -3x + 12$
 $y = -\frac{3}{4}x + 3$
- V2 a** $y = -1\frac{1}{5}x + 3$
 $1\frac{1}{5}x + y = 3$
 $6x + 5y = 15$
- b** $y = -\frac{2}{5}x + 10$
 $\frac{2}{5}x + y = 10$
 $2x + 5y = 50$
 $\frac{x}{25} + \frac{y}{10} = 1$
- c** $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1$
 $7x + 5y = 35$
 $5y = -7x + 35$
 $y = -1\frac{2}{5}x + 7$
- V3 a** $k: \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ ofwel $k: 5x + 4y = 20$, dus de normaalvector van k is $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
 De normaalvector van $l: 4x - 5y = 12$ is $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
 De normaalvectoren staan loodrecht op elkaar, dus $k \perp l$.
 Of: de richtingscoëfficiënt van k is $\frac{4}{5}$ en die van lijn l is $-\frac{5}{4}$. Het product van de richtingscoëfficiënten is $\frac{4}{5} \cdot -\frac{5}{4} = -1$, dus $k \perp l$.
- b** De richtingscoëfficiënt van $k: y = 2x - 3$ is 2.
 $l: x - 2y = 1$ ofwel $l: -2y = -x + 1$ ofwel $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
 Het product van de richtingscoëfficiënten 2 en $\frac{1}{2}$ is niet -1 , dus de lijnen staan niet loodrecht op elkaar.
- V4 a** De richtingscoëfficiënt van k is $1\frac{1}{2}$, dus de richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{2}{3}$.
 Een vergelijking van l is $y = -\frac{2}{3}x + b$.
 $(3, -4)$ invullen geeft $-4 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + b$, dus $b = -2$.
 Een vergelijking van l is $y = -\frac{2}{3}x - 2$.

- b** De normaalvector van $n: 3x - 8y = 9$ is $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ en dit is tevens de richtingsvector van m . De richtingscoëfficiënt van m is dan $\frac{-8}{3} = -2\frac{2}{3}$.
Een vergelijking van m is $y = -2\frac{2}{3}x + n$.
 $P(-2, 8)$ invullen geeft $8 = -2\frac{2}{3} \cdot -2 + n$, dus $n = 2\frac{2}{3}$.
Een vergelijking van m is $y = -2\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$.
- c** De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{1-7}{6-2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$, dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Een vergelijking is $y = 1\frac{1}{3}x + b$.
Het midden van AB is $(2, 4)$.
 $(2, 4)$ invullen geeft $4 = 1\frac{1}{3} \cdot 2 + b$, dus $b = 1\frac{1}{3}$.
Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = 1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

V5 a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -25 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \end{pmatrix}$

V6 a $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking is $-2x - 3y = c$.

$(1, -9)$ invullen geeft $-2 + 27 = c$ dus $c = 25$.

Een vergelijking van de lijn is $-2x - 3y = 25$ of ook $2x + 3y = -25$.

b De richtingsvector van deze lijn is $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ dus dit is een horizontale lijn.

De vergelijking is $y = -6$.

V7 a Uit $x + y = 5$ volgt $y = -x + 5$, dus de richtingscoëfficiënt is -1 .

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b $y = -5x + 3$, dus de richtingscoëfficiënt is -5 .

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

V8 a Stel de vergelijking op van een loodlijn door P op l .

De richtingscoëfficiënt van l is 1 , dus die van de loodlijn is -1 .

Voor de loodlijn geldt $y = -x + b$.

$P(3, -11)$ invullen geeft $-11 = -3 + b$ dus $b = -8$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = -x - 8$.

Deze loodlijn snijden met l geeft $x = -x - 8$.

$2x = -8$, dus $x = -4$ en het snijpunt is $S(-4, -4)$.

$d(P, l) = PS = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (-11 - (-4))^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

13 Cirkels

- b** De normaalvector van l is $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en dit is tevens de richtingsvector van de loodlijn. De richtingscoëfficiënt van de loodlijn is dan $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 1\frac{1}{3}x + b$.

$P(5, 12)$ invullen geeft $12 = 1\frac{1}{3} \cdot 5 + b$ dus $b = 5\frac{1}{3}$.

Een vergelijking van de loodlijn is $y = 1\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}$.

Deze loodlijn snijden met l geeft $3x + 4(1\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}) = 13$.

$$8\frac{1}{3}x + 21\frac{1}{3} = 13$$

$8\frac{1}{3}x = -8\frac{1}{3}$, dus $x = -1$ en het snijpunt is $S(-1, 4)$.

$$d(P, l) = PS = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

13.1 Vergelijking van een cirkel

intro Kay kan een cirkel tekenen met middelpunt $(6, 4)$ en straal 4.
Daarna tellen hoeveel roosterpunten binnen deze cirkel liggen.

- 1 a** $MQ = x - 4$ als het punt P rechts van de verticale lijn door M ligt.
 $MQ = 4 - x$ als het punt P links van de verticale lijn door M ligt.
- b** $PQ = y - 2$ of $PQ = 2 - y$
- c** $MP^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2$
- d** $MP = 4$, dus $MP^2 = 16$ en daaruit volgt $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.
- e** $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$
- 2 a** $c : (x - -4)^2 + (y - -7)^2 = 8^2$ ofwel
 $c : (x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 64$
- b** $AB = \sqrt{(4 - -1)^2 + (-2 - -3)^2} = \sqrt{26}$, dus de straal is $\sqrt{26}$.
De vergelijking is $d : (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 26$.
- c** De coördinaten van $C(3, 3)$ invullen in de vergelijking van d geeft
 $(3 - 4)^2 + (3 + 2)^2 = 1 + 25 = 26$, klopt dus C ligt op cirkel d .
- 3 a** Het middelpunt is $(3, 0)$ en de straal is $\sqrt{9} = 3$.
- b** Het middelpunt wordt dan $(-3, 0)$ en de straal blijft 3.
De vergelijking van de beeldcirkel is $(x + 3)^2 + y^2 = 9$.
- c** De straal is 6.
De vergelijking is $d : (x - 6)^2 + y^2 = 36$.
- 4 a** Vier cirkels zijn mogelijk: twee met middelpunt op de x -as en twee met middelpunt op de y -as.
- b** Stel het middelpunt op de x -as is $(a, 0)$.
De vergelijking is $(x - a)^2 + y^2 = 65$ en de cirkel gaat door $(7, 8)$ dus
 $(7 - a)^2 + 8^2 = 65$
 $(7 - a)^2 = 1$
 $7 - a = 1$ of $7 - a = -1$
 $a = 6$ of $a = 8$
De vergelijkingen zijn $(x - 6)^2 + y^2 = 65$ of $(x - 8)^2 + y^2 = 65$.

Stel het middelpunt op de y -as is $(0, b)$.

De vergelijking is $x^2 + (y - b)^2 = 65$ en de cirkel gaat door $(7, 8)$ dus

$$7^2 + (8 - b)^2 = 65$$

$$(8 - b)^2 = 16$$

$$8 - b = 4 \text{ of } 8 - b = -4$$

$$b = 4 \text{ of } b = 12$$

De vergelijkingen zijn $x^2 + (y - 4)^2 = 65$ of $x^2 + (y - 12)^2 = 65$.

5 a Het middelpunt is $(4, -1)$ en de straal is $\sqrt{26}$.

b $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 26$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 26$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y = 9$$

6 a $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 12 = 0$

$$x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$$

$$y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 12 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

b Het middelpunt is $(4, -1)$ en de straal is $\sqrt{5}$.

7 a $x^2 + y^2 + 4y = 9$

$$x^2 + (y + 2)^2 - 4 = 9$$

$$x^2 + (y + 2)^2 = 13$$

Het middelpunt is $(0, -2)$ en de straal is $\sqrt{13}$.

b $x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 24y = 0$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 12)^2 - 144 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$$

Het middelpunt is $(5, 12)$ en de straal is 13.

c $x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{1}{2} = 0$

$$x^2 - 3x + y^2 - y + \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

Het middelpunt is $\left(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en de straal is $\sqrt{2}$.

d $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + 4\sqrt{2} \cdot y + 4 = 0$

$$x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + y^2 + 4\sqrt{2} \cdot y + 4 = 0$$

$$\left(x - \sqrt{3}\right)^2 - 3 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 - 8 + 4 = 0$$

$$\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 7$$

Het middelpunt is $(\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$ en de straal is $\sqrt{7}$.

8 a $0^2 + 0^2 + 2a \cdot 0 + 2b \cdot 0 = 0$, klopt dus de cirkel gaat door $(0, 0)$.

b $P(1, 5)$ invullen geeft $1 + 25 + 2a + 10b = 0$ ofwel $2a + 10b = -26$.

$Q(6, 4)$ invullen geeft $36 + 16 + 12a + 8b = 0$ ofwel $12a + 8b = -52$.

Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 6 en trek de tweede vergelijking daarvan af, het resultaat is $52b = -104$, dus $b = -2$.

$2a - 20 = -26$ geeft $2a = -6$, dus $a = -3$.

13 Cirkels

- c $a = -3$ en $b = -2$ invullen in $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$ geeft

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

Het middelpunt is $(3, 2)$ en de straal is $\sqrt{13}$.

- 9 a $x^2 + y^2 - 4x - 20y + 108 = 0$

$$x^2 - 4x + y^2 - 20y + 108 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y - 10)^2 - 100 + 108 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 10)^2 = -4$$

Dat zou betekenen dat $r^2 = -4$ en dat kan niet.

- b $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$

$$x^2 + px + y^2 + qy + s = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + \left(y + \frac{1}{2}q\right)^2 - \frac{1}{4}q^2 + s = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}q\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 - s$$

Dit kan alleen de vergelijking van een cirkel zijn als

$$\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 - s > 0, \text{ dus } \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 > s \text{ ofwel } p^2 + q^2 > 4s.$$

- 07 a In stap 1 zijn de termen met x en de termen met y bij elkaar geplaatst.

- b $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$, op de puntjes moet het getal 25 staan.

- c Dat getal moet de helft van 6 zijn, dus 3.

Dit is omdat $(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$.

- d Dat moet het tegenovergestelde zijn van 3^2 , dat is nodig omdat

$$(y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9.$$

- e $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 - 25 - 9 + 9 = 0$

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

- f Het middelpunt is $(-5, 3)$ en de straal is $\sqrt{25} = 5$.

- U1 a $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, dus $\sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Als $r > 0$ is dit gelijkwaardig met $x^2 + y^2 = r^2$ en dat is de vergelijking van een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal r .

- b $\left| \begin{pmatrix} x - 6 \\ y + 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x - 6)^2 + (y + 4)^2}$

$$\sqrt{(x - 6)^2 + (y + 4)^2} = 7$$

$$(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 49$$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt $(6, -4)$ en straal 7.

- U2 Het snijpunt van de middelloodlijnen is het middelpunt van de cirkel.

De richtingscoëfficiënt van lijnstuk AB is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ en het midden is $(4, 6)$.

De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn van lijnstuk AB is -2 .

De vergelijking van de middelloodlijn is $y = -2x + 14$.

De middelloodlijn van lijnstuk AC is de lijn $x = 6$.

$y = -2 \cdot 6 + 14 = 2$. Het snijpunt van de middelloodlijnen is $M(6, 2)$.

De straal van de cirkel is gelijk aan $AM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

De middelpuntsvergelijking van de cirkel is $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

13.2 Snijpunten van lijn en cirkel

intro Een lijn door de oorsprong kan één, twee of geen snijpunten hebben met de getekende cirkel.

Dan moet je $y = mx$ invullen bij de vergelijking van de cirkel. Je krijgt een kwadratische vergelijking. Een kwadratische vergelijking kan één, twee of geen oplossingen hebben.

10 a $x^2 + (3x)^2 = 10$

$$x^2 + 9x^2 = 10$$

$$10x^2 = 10$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ of } x = -1$$

b $y = 3 \cdot 1 = 3$ of $y = 3 \cdot -1 = -3$

c $x + 2y = 1$ geeft $x = -2y + 1$

$$x = -2y + 1 \text{ invullen in } x^2 + y^2 = 10 \text{ geeft}$$

$$(-2y + 1)^2 + y^2 = 10$$

$$4y^2 - 4y + 1 + y^2 = 10$$

$$5y^2 - 4y - 9 = 0$$

$$\text{De discriminant van deze vergelijking is } (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -9 = 196.$$

$$y = \frac{4 + \sqrt{196}}{10} = 1\frac{4}{5} \text{ of } y = \frac{4 - \sqrt{196}}{10} = -1$$

$$x = -2 \cdot 1\frac{4}{5} + 1 = -2\frac{3}{5} \text{ of } x = -2 \cdot -1 + 1 = 3$$

$$\text{De snijpunten zijn } \left(-2\frac{3}{5}, 1\frac{4}{5}\right) \text{ en } (3, -1).$$

11 a $(2 + 3\lambda)^2 + (10 + 2\lambda)^2 = 169$

$$4 + 12\lambda + 9\lambda^2 + 100 + 40\lambda + 4\lambda^2 = 169$$

$$13\lambda^2 + 52\lambda - 65 = 0$$

b $13\lambda^2 + 52\lambda - 65 = 0$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda = 1 \text{ of } \lambda = -5$$

$$\text{De snijpunten zijn } (5, 12) \text{ en } (-13, 0).$$

12 a $x^2 + (x + 2)^2 = 20$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 20 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 16 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 2, \text{ dit geeft } y = -2 \text{ of } y = 4$$

$$\text{De snijpunten zijn } (-4, -2) \text{ en } (2, 4).$$

b $x = -3y + 15$ invullen in c :

$$(-3y + 14)^2 + (y + 2)^2 = 80$$

$$9y^2 - 84y + 196 + y^2 + 4y + 4 = 80$$

$$10y^2 - 80y + 120 = 0$$

$$y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$(y - 2)(y - 6) = 0$$

$$y = 2 \text{ of } y = 6, \text{ dit geeft } x = 9 \text{ of } x = -3$$

$$\text{De snijpunten zijn } (9, 2) \text{ en } (-3, 6).$$

13 Cirkels

- 13 a** $x = 4 - 2\lambda$ en $y = 3 + \lambda$ invullen in c geeft

$$\begin{aligned}(4 - 2\lambda)^2 + (3 + \lambda)^2 &= 40 \\ 16 - 16\lambda + 4\lambda^2 + 9 + 6\lambda + \lambda^2 &= 40 \\ 5\lambda^2 - 10\lambda - 15 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda - 3) &= 0 \\ \lambda &= -1 \text{ of } \lambda = 3\end{aligned}$$

De snijpunten zijn $(6, 2)$ en $(-2, 6)$.

- b** $x = 5 + \lambda$ en $y = 2\lambda$ invullen in c geeft

$$\begin{aligned}(1 + \lambda)^2 + (2\lambda + 3)^2 &= 10 \\ 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 &= 10 \\ 5\lambda^2 + 14\lambda &= 0 \\ \lambda(5\lambda + 14) &= 0 \\ \lambda &= 0 \text{ of } 5\lambda = -14 \\ \lambda &= 0 \text{ of } \lambda = -2\frac{4}{5}\end{aligned}$$

De snijpunten zijn $(5, 0)$ en $(2\frac{1}{5}, -5\frac{3}{5})$.

- 14** Een vectorvoorstelling van AB is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ ofwel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$x = -2 + 5\lambda$ en $y = 10 - 4\lambda$ invullen in c geeft

$$\begin{aligned}(-2 + 5\lambda)^2 + (10 - 4\lambda)^2 + 2(-2 + 5\lambda) - 2(10 - 4\lambda) - 39 &= 0 \\ 4 - 20\lambda + 25\lambda^2 + 100 - 80\lambda + 16\lambda^2 - 4 + 10\lambda - 20 + 8\lambda - 39 &= 0 \\ 41\lambda^2 - 82\lambda + 41 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0, \text{ dus } \lambda = 1.\end{aligned}$$

Er is één snijpunt, en dat is $(3, 6)$.

- 15 a** $(5 - 2y)^2 + y^2 = 5$

$$\begin{aligned}25 - 20y + 4y^2 + y^2 &= 5 \\ 5y^2 - 20y + 20 &= 0 \\ y^2 - 4y + 4 &= 0\end{aligned}$$

- b** $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

- c** Uit opdracht a volgt $(y - 2)^2 = 0$, dus $y = 2$.

De coördinaten van het gemeenschappelijk punt zijn $(1, 2)$.

- 16 a** $x^2 + (3x + 4)^2 = 20$

$$\begin{aligned}x^2 + 9x^2 + 24x + 16 &= 20 \\ 10x^2 + 24x - 4 &= 0\end{aligned}$$

$D = 24^2 - 4 \cdot 10 \cdot -4 = 736$, dus er zijn twee gemeenschappelijke punten.

- b** $x = 5 + \lambda$ en $y = 4 - \lambda$ invullen in c geeft.

$$\begin{aligned}(4 + \lambda)^2 + (3 - \lambda)^2 &= 16 \\ 16 + 8\lambda + \lambda^2 + 9 - 6\lambda + \lambda^2 &= 16 \\ 2\lambda^2 + 2\lambda + 9 &= 0\end{aligned}$$

$D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -68$, dus er zijn geen gemeenschappelijke punten.

c Een vectorvoorstelling van AB is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$x = 1 + \lambda$ en $y = 6 - \lambda$ invullen in c geeft

$$(1 + \lambda)^2 + (6 - \lambda)^2 - 2(1 + \lambda) - 119 = 0$$

$$1 + 2\lambda + \lambda^2 + 36 - 12\lambda + \lambda^2 - 2 - 2\lambda - 119 = 0$$

$$2\lambda^2 - 12\lambda - 84 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -84 = 816, \text{ dus er zijn twee gemeenschappelijke punten.}$$

17 a $x^2 + (px - 15)^2 = 180$

$$x^2 + p^2x^2 - 30px + 225 = 180$$

$$(p^2 + 1)x^2 - 30px + 45 = 0$$

b $D = (-30p)^2 - 4 \cdot (p^2 + 1) \cdot 45$

$$D = 900p^2 - 180p^2 - 180$$

$$D = 720p^2 - 180$$

$$720p^2 - 180 = 0 \text{ geeft } p^2 = \frac{1}{4} \text{ dus } p = \frac{1}{2} \text{ of } p = -\frac{1}{2}.$$

c $p = \frac{1}{2}$ invullen in $(p^2 + 1)x^2 - 30px + 45 = 0$ geeft

$$1\frac{1}{4}x^2 - 15x + 45 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x - 6)^2 = 0, \text{ dus } x = 6. \text{ Het gemeenschappelijke punt is } (6, 3).$$

$$p = -\frac{1}{2} \text{ invullen in } (p^2 + 1)x^2 - 30px + 45 = 0 \text{ geeft}$$

$$1\frac{1}{4}x^2 + 15x + 45 = 0$$

$$x^2 + 12x + 36 = 0$$

$$(x + 6)^2 = 0, \text{ dus } x = -6. \text{ Het gemeenschappelijke punt is } (-6, -3).$$

18 a Het middelpunt van c is $M(-2, 3)$.

De vergelijking van l : $5y - x = 17$ is $5y = x + 17$ of $y = \frac{1}{5}x + 3\frac{2}{5}$.

De richtingscoëfficiënt van de loodlijn op l is -5 .

De vergelijking van de loodlijn op l is $y = -5x + b$.

$(-2, 3)$ invullen geeft $3 = -5 \cdot -2 + b$ dus $b = -7$.

De vergelijking van de loodlijn door M op l is $y = -5x - 7$.

$$5(-5x - 7) - x = 17$$

$$-25x - 35 - x = 17$$

$$-26x = 52, \text{ dus } x = -2. \text{ Het snijpunt is dus } M(-2, 3) \text{ en dat betekent dat}$$

$$d(M, l) = 0.$$

b l gaat door het middelpunt van c , dus c en l hebben twee punten gemeenschappelijk.

013 a $y = 4 - \lambda$

b $x - 1 = -2 + 2\lambda - 1 = -3 + 2\lambda$

c $(-3 + 2\lambda)^2 + (4 - \lambda)^2 = 10$

d $9 - 12\lambda + 4\lambda^2 + 16 - 8\lambda + \lambda^2 = 10$

$$5\lambda^2 - 20\lambda + 15 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 1 \text{ of } \lambda = 3$$

e Snijpunten: $(0, 3)$ en $(4, 1)$

13 Cirkels

- 016 a** $(-3y + 9)^2 + y^2 + 8y = 24$
 $9y^2 - 54y + 81 + y^2 + 8y - 24 = 0$
 $10y^2 - 46y + 57 = 0$
- b** $D = (-46)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 57 = -164$
- c** De vergelijking heeft geen oplossingen, dus c en l hebben geen punten gemeenschappelijk.
- d** $y = 3x + 1$ invullen in $(x - 1)^2 + y^2 = 20$ geeft
 $(x - 1)^2 + (3x + 1)^2 = 20$
 $x^2 - 2x + 1 + 9x^2 + 6x + 1 - 20 = 0$
 $10x^2 + 4x - 18 = 0$
 De discriminant $D = 4^2 - 4 \cdot 10 \cdot -18 = 736$.
 De cirkel en de lijn hebben twee punten gemeenschappelijk.
- e** $x = 2 - \lambda$ en $y = 4 + \lambda$ invullen in $x^2 + y^2 = 16$ geeft
 $(2 - \lambda)^2 + (4 + \lambda)^2 = 16$
 $4 - 4\lambda + \lambda^2 + 16 + 8\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$
 $2\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$
 De discriminant $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -16$.
 De cirkel en de lijn hebben geen punten gemeenschappelijk.
- f** $x = 2\lambda$ en $y = 8 + 5\lambda$ invullen in $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 19$ geeft
 $(2\lambda)^2 + (8 + 5\lambda)^2 - 6 \cdot 2\lambda - 2(8 + 5\lambda) = 19$
 $4\lambda^2 + 64 + 80\lambda + 25\lambda^2 - 12\lambda - 16 - 10\lambda - 19 = 0$
 $29\lambda^2 + 58\lambda + 29 = 0$
 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
 $(\lambda + 1)^2 = 0$
 $\lambda = -1$
 De cirkel en de lijn hebben één punt gemeenschappelijk.

- U3** De lijn m snijden met de cirkel geeft
 $x^2 + (mx - 14)^2 + 2x + 4(mx - 14) = 15$
 $x^2 + m^2x^2 - 28mx + 196 + 2x + 4mx - 56 - 15 = 0$
 $(1 + m^2)x^2 + (-24m + 2)x + 125 = 0$
 Als er geen gemeenschappelijke punten zijn, is de discriminant negatief.
 $D = (-24m + 2)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot 125$
 $D = 576m^2 + 96m + 4 - 500 - 500m^2$
 $D = 76m^2 + 96m - 496$
 $D = 0$ geeft $76m^2 + 96m - 496 = 0$ ofwel $19m^2 - 24m - 124 = 0$
 De discriminant van deze vergelijking is $(-24)^2 - 4 \cdot 19 \cdot -124 = 10000$.
 $m = \frac{24 + \sqrt{10000}}{38} = 3\frac{5}{19}$ of $m = \frac{24 - \sqrt{10000}}{38} = -2$
 De discriminant is negatief als $-2 < m < 3\frac{5}{19}$, dus voor die waarden van m zijn er geen gemeenschappelijke punten.

13.3 Raaklijnen aan een cirkel

intro De hoeken zijn even groot omdat de stralen naar de beide raakpunten even lang zijn. De driehoek die zo ontstaat is gelijkbenig en heeft dus twee gelijke hoeken.

Die hoek is altijd kleiner dan 90° .

19 a $y = -2x + 9$ substitueren in $(x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 20$ geeft

$$(x - 9)^2 + (-2x + 8)^2 = 20$$

$$x^2 - 18x + 81 + 4x^2 - 32x + 64 - 20 = 0$$

$$5x^2 - 50x + 125 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x - 5)^2 = 0$$

Er is één oplossing: $x = 5$, dus de lijn raakt de cirkel.

b Het raakpunt is $(5, -1)$ en het middelpunt van de cirkel is $(9, 1)$.

De richtingscoëfficiënt van de straal naar het raakpunt is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

De richtingscoëfficiënt van l is -2 .

$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, dus de straal naar het raakpunt staat loodrecht op de raaklijn.

20 a De kleinste afstand van een punt naar een lijn is de lengte van een lijnstuk dat loodrecht op die lijn staat.

b MP is de lengte van de straal, dus als $MQ < MP$ dan moet punt Q binnen de cirkel liggen.

c Als een lijn door een punt gaat dat binnen de cirkel ligt, dan moet die lijn twee punten gemeenschappelijk hebben met de cirkel.

d De veronderstelling van opdracht a is dus onmogelijk. Daarmee is bewezen dat l loodrecht staat op de straal MP .

21 a Het middelpunt is $M(0, 0)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $-x + 3y = c$.

$P(-1, 3)$ invullen geeft $1 + 3 \cdot 3 = c$ dus $c = 10$.

De vergelijking is $-x + 3y = 10$.

b Het middelpunt is $M(2, -3)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $3x - y = c$.

$P(5, -4)$ invullen geeft $3 \cdot 5 - 4 = c$ dus $c = 11$.

De vergelijking is $3x - y = 11$.

22 a Het middelpunt is $M(4, -3)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Een richtingsvector is $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b Een vector loodrecht op $\overrightarrow{MP}$ is $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c Een vectorvoorstelling van de raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

13 Cirkels

23 a Het middelpunt is $M(-3, 7)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Een vectorvoorstelling van de raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 5 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

Het middelpunt is $M(-1, 2)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Een vectorvoorstelling van de raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

24 a Als $a \neq 0$ dan kun je beide kentallen van $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ door a delen.

Je krijgt dan een vector met dezelfde of tegengestelde richting.

b Als $a = 0$ dan is de raaklijn verticaal. In dit geval is er geen verticale raaklijn aan de cirkel, die door P gaat.

c $(6 + \lambda)^2 + (m\lambda)^2 = 18$

$$36 + 12\lambda + \lambda^2 + m^2\lambda^2 - 18 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + 12\lambda + 18 = 0$$

d Er is één oplossing als de discriminant gelijk is aan 0.

$$12^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 18 = 0$$

$$144 - 72m^2 - 72 = 0$$

$$-72m^2 = -72$$

$$m^2 = 1$$

$$m = 1 \text{ of } m = -1$$

e $m = 1$ geeft $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $m = -1$ geeft $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

25 a Een vectorstelling van de raaklijnen is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = -6 + \lambda$ en $y = 2 + m\lambda$ invullen in c geeft

$$(-6 + \lambda)^2 + (2 + m\lambda)^2 = 20$$

$$36 - 12\lambda + \lambda^2 + 4 + 4m\lambda + m^2\lambda^2 - 20 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (-12 + 4m)\lambda + 20 = 0$$

$$D = (-12 + 4m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 20$$

$$144 - 96m + 16m^2 - 80m^2 - 80 = 0$$

$$-64m^2 - 96m + 64 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$m = \frac{-3 + \sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } m = \frac{-3 - \sqrt{25}}{4} = -2$$

De raaklijnen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- b** Een vectorstelling van de raaklijnen is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 10 + \lambda$ en $y = -20 + m\lambda$ invullen in c geeft

$$(10 + \lambda)^2 + (-20 + m\lambda)^2 = 100$$

$$100 + 20\lambda + \lambda^2 + 400 - 40m\lambda + m^2\lambda^2 - 100 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (20 - 40m)\lambda + 400 = 0$$

$$D = (20 - 40m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 400$$

$$400 - 1600m + 1600m^2 - 1600m^2 - 1600 = 0$$

$$-1600m = 1200$$

$m = -\frac{3}{4}$, er is op deze manier slechts één oplossing voor m , de tweede raaklijn is verticaal.

De raaklijnen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- c** Een vectorstelling van de raaklijnen is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = \lambda$ en $y = -4 + m\lambda$ invullen in c geeft

$$\lambda^2 + (-4 + m\lambda)^2 - 2\lambda - 6(-4 + m\lambda) = 15$$

$$\lambda^2 + 16 - 8m\lambda + m^2\lambda^2 - 2\lambda + 24 - 6m\lambda - 15 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (-2 - 14m)\lambda + 25 = 0$$

$$D = (-2 - 14m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 25$$

$$4 + 56m + 196m^2 - 100m^2 - 100 = 0$$

$$96m^2 + 56m - 96 = 0$$

$$12m^2 + 7m - 12 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot -12 = 625$$

$$m = \frac{-7 + \sqrt{625}}{24} = \frac{3}{4} \text{ of } m = \frac{-7 - \sqrt{625}}{24} = -1\frac{1}{3}$$

De raaklijnen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

- 26 a** Een vectorstelling van de raaklijnen is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 6\frac{1}{2} + \lambda$ en $y = 13 + m\lambda$ invullen in c geeft

$$\left(6\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 + (13 + m\lambda)^2 = 65$$

$$42\frac{1}{4} + 13\lambda + \lambda^2 + 169 + 26m\lambda + m^2\lambda^2 - 65 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (13 + 26m)\lambda + 146\frac{1}{4} = 0$$

$$D = (13 + 26m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 146\frac{1}{4}$$

$$169 + 676m + 676m^2 - 585m^2 - 585 = 0$$

$$91m^2 + 676m - 416 = 0$$

$$7m^2 + 52m - 32 = 0$$

$$D = 52^2 - 4 \cdot 7 \cdot -32 = 3600$$

$$m = \frac{-52 + \sqrt{3600}}{14} = \frac{4}{7} \text{ of } m = \frac{-52 - \sqrt{3600}}{14} = -8$$

De raaklijnen zijn $y = \frac{4}{7}x + b$ en $y = -8x + b$.

Door invullen van $(6\frac{1}{2}, 13)$ vind je

$$y = \frac{4}{7}x + 9\frac{2}{7} \text{ en } y = -8x + 65.$$

13 Cirkels

- b Een vectorstelling van de raaklijnen is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Vul in $x = -4 + \lambda$ en $y = 13 + m\lambda$:

$$(-4 + \lambda)^2 + (13 + m\lambda)^2 - 10(-4 + \lambda) = 0$$

$$16 - 8\lambda + \lambda^2 + 169 + 26m\lambda + m^2\lambda^2 + 40 - 10\lambda = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (26m - 18)\lambda + 225 = 0$$

$$D = (26m - 18)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 225$$

$$676m^2 - 936m + 324 - 900m^2 - 900 = 0$$

$$-224m^2 - 936m - 576 = 0$$

$$28m^2 + 117m + 72 = 0$$

$$D = 117^2 - 4 \cdot 28 \cdot 72 = 5625$$

$$m = \frac{-117 + \sqrt{5625}}{56} = -\frac{3}{4} \text{ of } m = \frac{-117 - \sqrt{5625}}{56} = -3\frac{3}{7}$$

Door invullen van $(-4, 13)$ vind je $y = -\frac{3}{4}x + 10$ en $y = -3\frac{3}{7}x - \frac{5}{7}$.

- 27** De richtingscoëfficiënt van $l: x + y = 17$ ofwel $l: y = -x + 17$ is -1 .
 De lijn loodrecht op l heeft de vergelijking $y = x + b$.
 De coördinaten van het middelpunt $(5, 6)$ invullen geeft
 $6 = 5 + b$ dus $b = 1$.
 De lijn loodrecht op l door het middelpunt heeft vergelijking $y = x + 1$.
 Deze lijn snijden met l geeft $x + x + 1 = 17$
 $2x = 16$, dus $x = 8$
 Het snijpunt $S(8, 9)$ is het punt waar l de cirkel raakt.
 De straal van de cirkel is $\sqrt{(8 - 5)^2 + (9 - 6)^2} = \sqrt{18}$.
 De vergelijking van de cirkel is $c: (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 18$.

- 021 a** Het middelpunt is $M(6, 0)$.

b $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -2 - 6 \\ 2 - 0 \end{pmatrix}$ ofwel $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

- c $\overrightarrow{MP}$ is een normaalvector van de raaklijn, omdat de straal naar het raakpunt loodrecht op de raaklijn staat.

- d Een vergelijking van de raaklijn is $-8x + 2y = c$

- e $-8 \cdot -2 + 2 \cdot 2 = c$ dus $c = 20$.

Een vergelijking is $-8x + 2y = 20$ ofwel $4x - y = -10$.

- f Het middelpunt is $(0, 0)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $8x - 3y = c$.

$(8, -3)$ invullen geeft $8 \cdot 8 - 3 \cdot -3 = c$ dus $c = 73$.

Een vergelijking van de raaklijn is $8x - 3y = 73$.

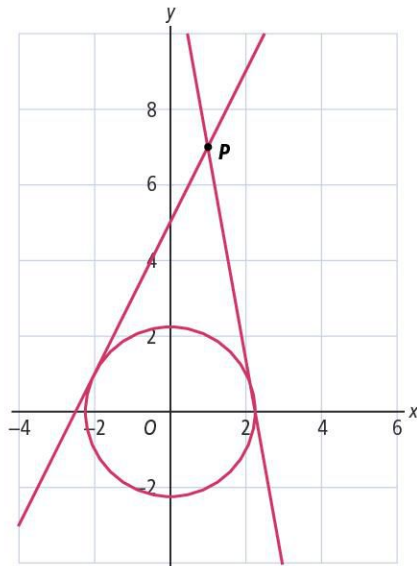
- g Het middelpunt is $(6, -2)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 1 - 6 \\ -4 - -2 \end{pmatrix}$ ofwel $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $-5x - 2y = c$.

$(1, -4)$ invullen geeft $-5 \cdot 1 - 2 \cdot -4 = c$ dus $c = 3$.

Een vergelijking van de raaklijn is $-5x - 2y = 3$ ofwel $5x + 2y = -3$.

025 a



b $x = 1 + \lambda$ en $y = 7 + m\lambda$ zijn ingevuld in de vergelijking van de cirkel.

c $1 + 2\lambda + \lambda^2 + 49 + 14m\lambda + m^2\lambda^2 = 5$

$$m^2\lambda^2 + \lambda^2 + 2\lambda + 14m\lambda + 49 + 1 = 5$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (2 + 14m)\lambda + 45 = 0$$

d $(14m + 2)^2 - 180(m^2 + 1) = 0$

$$196m^2 + 56m + 4 - 180m^2 - 180 = 0$$

$$16m^2 + 56m - 176 = 0$$

$$2m^2 + 7m - 22 = 0$$

De discriminant van deze vergelijking is $7^2 - 4 \cdot 2 \cdot -22 = 225$.

$$m = \frac{-7 + \sqrt{225}}{4} = 2 \text{ of } m = \frac{-7 - \sqrt{225}}{4} = -5\frac{1}{2}$$

e Richtingsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ofwel $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$.

f $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$

U4 $MQ \perp PQ$, dus $MQ^2 + PQ^2 = MP^2$

$$PQ^2 = 8^2 - 4^2 = 48, \text{ dus } PQ = \sqrt{48}$$

$$\cos(\angle PMQ) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \text{ dus } \angle PMQ = 60^\circ.$$

De oppervlakte is te verdelen in een cirkelsector met een middelpuntshoek van 240° en de vierhoek $PQMR$.

$$\text{De oppervlakte van de cirkelsector is } \frac{240}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 10\frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{De oppervlakte van vierhoek } PQMR \text{ is } 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{48} = 4\sqrt{48} = 16\sqrt{3}.$$

$$\text{De totale oppervlakte is } 10\frac{2}{3}\pi + 16\sqrt{3} \approx 61,2.$$

U5 Als de cirkel de lijnen $x = 5$ en $y = 4$ beide raakt, moet het middelpunt liggen op één van de bissectrices van de hoeken die door deze lijnen worden gemaakt.

Die bissectrices zijn $y = x - 1$ en $y = -x + 9$.

Het middelpunt van de gevraagde cirkel is het snijpunt van de lijn

$$7x + 3y = 67 \text{ met één van deze bissectrices.}$$

$$7x + 3(x - 1) = 67 \text{ geeft } 10x - 3 = 67 \text{ dus } x = 7. \text{ Het snijpunt is } (7, 6).$$

$$7x + 3(-x + 9) = 67 \text{ geeft } 4x + 27 = 67 \text{ dus } x = 10. \text{ Het snijpunt is } (10, -1).$$

De straal is de afstand van de gevonden punten tot de lijnen $x = 5$ en $y = 4$, dus de straal is 2 of 5.

13 Cirkels

13.4 Snijdende cirkels

intro De vier punten vormen een ruit, en de diagonaal MN heeft dezelfde lengte als de zijden van de ruit. De driehoeken MNP en MNQ zijn gelijkzijdig, dus de afstand PQ kan worden berekend.

$$28 \text{ a } \begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 25 = 9 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 = 29 \end{cases}$$

$$-10y + 10x = -20$$

$$y = x + 2$$

b De snijpunten voldoen aan beide middelpuntsvergelijkingen, dus ook aan het verschil daarvan. Het is de vergelijking van de lijn door de snijpunten.

c $y = x + 2$ invullen in $x^2 - 10x + 25 + y^2 = 29$ geeft

$$x^2 - 10x + 25 + x^2 + 4x + 4 = 29$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

De snijpunten zijn $A(0, 2)$ en $B(3, 5)$.

$$29 \text{ a } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 + y^2 - 4x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Aftrekken geeft } 4x = 12$$

$$x = 3$$

$$9 + y^2 = 13$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2 \text{ of } y = -2$$

snijpunten $(3, 2)$ en $(3, -2)$.

$$\text{c } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y = 21 \end{cases}$$

$$\text{Aftrekken geeft } 4x - 4y = 4$$

$$y = x - 1$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 - 2x + 24 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = -3$$

snijpunten $(4, 3)$ en $(-3, -4)$.

$$\text{b } \begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ x^2 + y^2 - 6x - 18y = -70 \end{cases}$$

$$\text{Aftrekken geeft } 6x + 18y = 120 \text{ ofwel } x = -3y + 20$$

$$(-3y + 20)^2 + y^2 = 50$$

$$9y^2 - 120y + 400 + y^2 - 50 = 0$$

$$10y^2 - 120y + 350 = 0$$

$$y^2 - 12y + 35 = 0$$

$$(y - 5)(y - 7) = 0$$

$$y = 5 \text{ of } y = 7$$

snijpunten $(5, 5)$ en $(-1, 7)$.

$$30 \text{ a } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 12x - 4y = -30 \end{cases}$$

$$\text{Aftrekken geeft } 12x + 4y = 40 \text{ ofwel } y = -3x + 10$$

$$x^2 + 9x^2 - 60x + 100 = 10$$

$$10x^2 - 60x + 90 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0, \text{ er is dus één oplossing, namelijk } x = 3.$$

Het punt is $P(3, 1)$.

- b** Het middelpunt van c_1 is $(0, 0)$ en het punt $P(3, 1)$ is het raakpunt, dus de vector $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ is de normaalvector van de raaklijn l .

De vectorvoorstelling van l is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- c** Voor lijn l geldt $x = 3 + \lambda$ en $y = 1 - 3\lambda$.
Dit invullen in $x^2 - 12x + y^2 - 4y + 30 = 0$ geeft
 $(3 + \lambda)^2 - 12(3 + \lambda) + (1 - 3\lambda)^2 - 4(1 - 3\lambda) + 30 = 0$
 $9 + 6\lambda + \lambda^2 - 36 - 12\lambda + 1 - 6\lambda + 9\lambda^2 - 4 + 12\lambda + 30 = 0$
 $10\lambda^2 = 0$ dus $\lambda = 0$, dat betekent dat c_2 en l één punt gemeenschappelijk hebben, dus dat ze elkaar raken.
- d** $c_2: x^2 - 12x + y^2 - 4y + 30 = 0$
 $c_2: (x - 6)^2 - 36 + (y - 2)^2 - 4 + 30 = 0$
 $c_2: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 10$, dus het middelpunt van c_2 is $M(6, 2)$.
 Het middelpunt van c_1 is $(0, 0)$.

De richtingsvector van de lijn door de middelpunten is $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ dus l staat loodrecht op de lijn door de middelpunten.

- 31** Stel cirkel c_1 heeft middelpunt M en cirkel c_2 heeft middelpunt N .
 Het gemeenschappelijke raakpunt is P .
 De raaklijn in P aan de cirkel met middelpunt M is l , dus $\overrightarrow{MP} \perp l$.
 l raakt ook c_2 , dus $\overrightarrow{NP} \perp l$.
 Uit $\overrightarrow{MP} \perp l$ en $\overrightarrow{NP} \perp l$ volgt $\angle MPN = 180^\circ$, dus de punten M , N en P liggen op een lijn en die lijn staat loodrecht op de raaklijn l .
- 32 a** Het middelpunt van de ene cirkel is $(2, 0)$ en het middelpunt van de andere cirkel is $(8, 0)$.
 De vergelijkingen zijn $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ en $(x - 8)^2 + y^2 = 9$.
- b** De middelpunten liggen op de lijn door $O(0, 0)$ en $R(4, 3)$.
 Omdat $OR = 5$, zijn de middelpunten van de cirkels met straal $2\frac{1}{2}$ de eindpunten van de vectoren $\frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$ en $1\frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$.
 Dat zijn de punten $(2, 1\frac{1}{2})$ en $(6, 4\frac{1}{2})$.
 De vergelijkingen zijn $(x - 2)^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$ en $(x - 6)^2 + (y - 4\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$.
- 33** Het middelpunt van de cirkel is $M(-2, 5)$.
 $x = 12 + 3\lambda$ en $y = -2\lambda$ invullen in de vergelijking van c geeft
 $(14 + 3\lambda)^2 + (-2\lambda - 5)^2 = 13$
 $196 + 84\lambda + 9\lambda^2 + 4\lambda^2 + 20\lambda + 25 - 13 = 0$
 $13\lambda^2 + 104\lambda + 208 = 0$
 $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$
 $(\lambda + 4)^2 = 0$
 $\lambda = -4$, het raakpunt is $R(0, 8)$.
 $\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, de lengte van deze vector is $\sqrt{13}$.
 Het middelpunt van cirkel d ligt op de lijn met vectorvoorstelling
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

13 Cirkels

Omdat $\sqrt{52} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$ zijn de middelpunten van de gevraagde cirkels te vinden met $\mu = 2$ en $\mu = -2$.

De middelpunten zijn $(4, 2)$ en $(-4, 14)$.

De vergelijking van d is $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 52$ of $(x + 4)^2 + (y - 14)^2 = 52$.

34 a $OA \perp PA$, $OA = 4$ en $OP = 5$

$$PA^2 + 4^2 = 5^2, \text{ dus } PA^2 = 9$$

$$PA = PB = 3$$

b $(x + 5)^2 + y^2 = 9$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + 10x + 25 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$-10x - 25 = 7 \text{ ofwel } -10x = 32 \text{ dus } x = -3\frac{1}{5}$$

$$y^2 = 16 - \left(-3\frac{1}{5}\right)^2 = 5\frac{19}{25}, \text{ dus } y = 2\frac{2}{5} \text{ of } y = -2\frac{2}{5}$$

De coördinaten zijn $A\left(-3\frac{1}{5}, -2\frac{2}{5}\right)$ en $B\left(-3\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5}\right)$.

d De richtingscoëfficiënt van lijn PA is $\frac{-2\frac{2}{5} - 0}{-3\frac{1}{5} - 5} = \frac{-2\frac{2}{5}}{1\frac{4}{5}} = -1\frac{1}{3}$

De vergelijking van lijn PA is $y = -1\frac{1}{3}x + n$.

$$P(-5, 0) \text{ invullen geeft } n = -6\frac{2}{3}$$

De vergelijkingen van de lijnen PA en PB zijn $y = -1\frac{1}{3}x - 6\frac{2}{3}$ en

$$y = 1\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}.$$

35 De straal van c is $\sqrt{20}$, het middelpunt van c is $M(3, 0)$ en $MP = \sqrt{40}$.

$$\angle MAP = \angle MBP = 90^\circ, \text{ dus } PA^2 + (\sqrt{20})^2 = (\sqrt{40})^2.$$

$$PA^2 = 40 - 20 = 20, \text{ dus } PA = PB = \sqrt{20}.$$

A en B liggen op de cirkel met middelpunt P en straal $\sqrt{20}$.

De vergelijking van deze cirkel is $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 + y^2 = 20 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 + y^2 = 20 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 20 \end{cases}$$

$$-12x + 4y - 4 = 0 \text{ ofwel } y = 3x + 1.$$

Dit invullen in de vergelijking van de eerste cirkel:

$$x^2 - 6x + 9 + 9x^2 + 6x + 1 = 20$$

$$10x^2 = 10, \text{ dus } x = 1 \text{ of } x = -1$$

De coördinaten van de raakpunten zijn $A(1, 4)$ en $B(-1, -2)$.

De richtingscoëfficiënten van de lijnen PA en PB zijn $\frac{1}{2}$ en -2 .

De vergelijkingen van de lijnen PA en PB zijn $y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$ en $y = -2x - 4$.

36 Stel de middelpunten van de grote cirkels zijn $A(-5, 5)$ en $B(5, 5)$, het gemeenschappelijke raakpunt is $R(0, 5)$ en de straal van de kleine cirkel is r .

Het middelpunt van de kleine cirkel is M .

Dan geldt: $AR = BR = 5$, $AM = BM = 5 + r$ en $MR = 5 - r$.

$\triangle BMR$ is rechthoekig, dus $5^2 + (5 - r)^2 = (5 + r)^2$.

$$25 + 25 - 10r + r^2 = 25 + 10r + r^2$$

$$-20r = -25, \text{ dus } r = 1\frac{1}{4}$$

De gevraagde vergelijking is $x^2 + \left(y - 1\frac{1}{4}\right)^2 = 1\frac{9}{16}$.

- 029 a** $(x^2 + y^2 - 4x - 16) - (x^2 + y^2 - 22x - 6y + 80) = 0$
 $x^2 + y^2 - 4x - 16 - x^2 - y^2 + 22x + 6y - 80 = 0$
 $18x + 6y - 96 = 0$
- b** $18x + 6y - 96 = 0$
 $6y = -18x + 96$
 $y = -3x + 16$
- c** y is vervangen door $-3x + 16$ in de vergelijking van c_1 .
 $x^2 + 9x^2 - 96x + 256 - 4x - 16 = 0$
 $10x^2 - 100x + 240 = 0$
 $x^2 - 10x + 24 = 0$
 $(x - 4)(x - 6) = 0$
 $x = 4$ of $x = 6$
- d** $x = 6$ invullen bij $y = -3x + 16$ geeft $y = -2$.
 De snijpunten zijn $(4, 4)$ en $(6, -2)$.
- e** $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 = 5 \end{cases}$
 Aftrekken geeft $6x - 15 = -3$, dus $6x = 12$ en $x = 2$.
 Dit invullen in de vergelijking van c_1 geeft $1 + y^2 = 2$, dus $y = 1$ of $y = -1$.
 De snijpunten zijn $(2, 1)$ en $(2, -1)$.
- f** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y = 92 \end{cases}$
 Aftrekken geeft $4x - 4y = -24$ ofwel $y = x + 6$.
 Dit invullen in de vergelijking van c_1 geeft $x^2 + x^2 + 12x + 36 = 68$
 $x^2 + 6x - 16 = 0$
 $(x + 8)(x - 2) = 0$
 $x = -8$ of $x = 2$
 De snijpunten zijn $(-8, -2)$ en $(2, 8)$.
- g** $\begin{cases} x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 10 \\ x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 37 \end{cases}$
 Aftrekken geeft $-18x - 9 = -27$, dus $-18x = -18$ en $x = 1$.
 Dit invullen in de vergelijking van c_1 geeft $(-3)^2 + (y - 3)^2 = 10$, dus
 $(y - 3)^2 = 1$
 $y - 3 = 1$ of $y - 3 = -1$, dus $y = 4$ of $y = 2$.
 De snijpunten zijn $(1, 4)$ en $(1, 2)$.

- 033 a** $x = 10 + 4\lambda$ en $y = 5 - 3\lambda$ invullen in de vergelijking van c geeft
 $100 + 80\lambda + 16\lambda^2 + 25 - 30\lambda + 9\lambda^2 = 100$
 $25\lambda^2 + 50\lambda + 25 = 0$
 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
 $(\lambda + 1)^2 = 0$, dus $\lambda = -1$
 Het snijpunt is $(6, 8)$.
- b** $OR \perp l$ en $MR \perp l$, dus $\angle ORM = 180^\circ$.
 Dat betekent dat O , R en M op één lijn liggen.
- c** $OR = \sqrt{100} = 10$ en $MR = 5$, dus $\overrightarrow{OR} = 2 \cdot \overrightarrow{RM}$.
 $\overrightarrow{RM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

13 Cirkels

d $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OR}$, dus $M(9, 12)$.

De vergelijking van d is $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 25$.

U6 a
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x = -16 \\ x^2 + y^2 - 4y = 16 \end{cases}$$

Aftrekken geeft $-12x + 4y = -32$ ofwel $y = 3x - 8$.

Dit invullen in c_1 geeft $x^2 + 9x^2 - 48x + 64 - 12x + 16 = 0$.

$$10x^2 - 60x + 80 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$x = 2$ of $x = 4$, de snijpunten zijn $A(4, 4)$ en $B(2, -2)$.

Van c_1 is het middelpunt $M(6, 0)$ en de straal $MA = \sqrt{20}$.

Van c_2 is het middelpunt $N(0, 2)$ en de straal $NA = \sqrt{20}$.

$AN \perp AM$, want de straal naar het raakpunt staat loodrecht op de raaklijn.

Dat betekent dat de raaklijn in A aan c_1 door N gaat en dat de raaklijn in A aan c_2 door M gaat.

$$NM^2 = 2^2 + 6^2 \text{ dus } NM = \sqrt{40}$$

Omdat $\sqrt{20}^2 + \sqrt{20}^2 = \sqrt{40}^2$ staan de raaklijnen loodrecht op elkaar.

b
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 10 \end{cases}$$

Aftrekken geeft $4x + 8y - 20 = 0$ ofwel $x = -2y + 5$.

Dit invullen in de vergelijking van c_1 geeft $4y^2 - 20y + 25 + y^2 = 10$.

$$5y^2 - 20y + 15 = 0$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y - 1)(y - 3) = 0$$

$y = 1$ of $y = 3$, de snijpunten zijn $A(3, 1)$ en $B(-1, 3)$.

De middelpunten van de cirkels zijn $O(0, 0)$ en $M(2, 4)$.

$$OM^2 = 20, OA^2 = 10 \text{ en } MA^2 = 10.$$

$OA^2 + AM^2 = OM^2$, dus de cirkels snijden elkaar loodrecht.

13.5 Afstand tot een cirkel

intro De lijn k snijdt de cirkel, dus deze lijn heeft de kleinste afstand tot de cirkel, namelijk de afstand 0.

De lijn n heeft de grootste afstand tot de cirkel.

37 a $(1 - 4)^2 + (0 + 5)^2 = 34$

$9 + 25 = 34$, klopt dus punt A ligt op de cirkel.

b $(-1 - 4)^2 + (-1 + 5)^2 = 41$, dus de afstand van het middelpunt tot B is groter dan de straal van de cirkel.

c $(10 - 4)^2 + (y + 5)^2 = 34$

$$(y + 5)^2 = -2$$

Er zijn geen oplossingen, dus de cirkel heeft nul punten gemeenschappelijk met de lijn $x = 10$.

d Dan moet gelden: $(1 - 4)^2 + (d + 5)^2 < 34$

$$(d + 5)^2 < 25$$

$$-5 < d + 5 < 5$$

$$-10 < d < 0$$

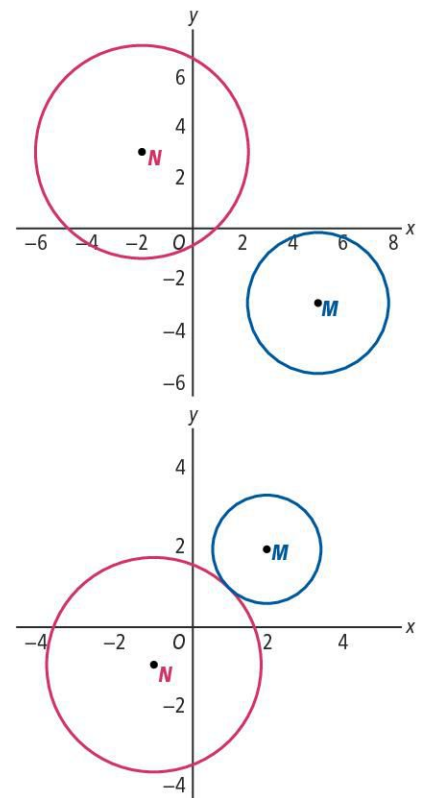
- 38 a** $MA \perp l$ (raaklijn), dus ook $PA \perp l$.
Een loodlijn is altijd het kortste verbindingslijnstuk.
- b** $M(5, 3)$, dus $PM = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117}$
- c** Dat is lijnstuk PA .
 $PA = PM - MA = \sqrt{117} - \sqrt{13} = 3\sqrt{13} - \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$
- d** $MQ = 2$, het kortste verbindingslijnstuk is $BQ = \sqrt{13} - 2$

- 39 a** $M(-5, 3)$ en de straal is 5.
 $MP = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$, dus P ligt buiten de cirkel.
 $d(P, c) = 13 - 5 = 8$
- b** $M(-5, 3)$ en de straal is 5.
 $MP = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, dus P ligt binnen de cirkel.
 $d(P, c) = 5 - \sqrt{5}$
- c** $M(3, -3)$ en de straal is $\sqrt{289} = 17$.
 $MP = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, dus P ligt binnen de cirkel.
 $d(P, c) = 17 - 5 = 12$

- 40 a** Lijnstuk PN geeft de afstand aan tussen c_1 en c_2 .
b Lijnstuk TV geeft de afstand aan tussen c_3 en c_4 .

- 41 a** De middelpunten zijn $M(-2, 3)$ en $N(5, -3)$.
De stralen zijn $\sqrt{18}$ en $\sqrt{8}$.
Alle punten van c_1 liggen buiten c_2 .
 $MN = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$
 $d(c_1, c_2) = \sqrt{85} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$
 $d(c_1, c_2) = \sqrt{85} - 5\sqrt{2}$
- b** $c_1: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 8$
 $c_2: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$
De middelpunten zijn $M(-1, -1)$ en $N(2, 2)$.
De stralen zijn $\sqrt{8}$ en $\sqrt{2}$.
 $MN = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$
 $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ en $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
 MN is gelijk aan het totaal van de twee stralen, dus $d(c_1, c_2) = 0$.

- 42** $c_1: x^2 + y^2 - 24y = -108$
dus $x^2 + (y-12)^2 = 36$.
Het middelpunt is $M(0, 12)$ en de straal is 6.
Stel het middelpunt van c_2 is $N(a, 0)$.
 $MN = 6 + 4 + 3 = 13$.
 $MN = \sqrt{a^2 + 12^2} = 13$, dus $a^2 = 25$.
 $a = 5$ of $a = -5$
De vergelijking van c_2 is $(x-5)^2 + y^2 = 9$ of $(x+5)^2 + y^2 = 9$.



13 Cirkels

- 43 a** Het middelpunt is $M(-3, -2)$ en de straal is 5. De normaalvector van l is $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
 dus een normaalvector van de loodlijn is $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de loodlijn is $5x - 4y = n$.

$M(-3, -2)$ invullen: $5 \cdot -3 - 4 \cdot -2 = n$, dus $n = -7$.

Een vergelijking van de loodlijn is $5x - 4y = -7$.

- b** Stel het snijpunt van lijn MP met de cirkel is R .

Omdat lijn RP loodrecht staat op l is er geen korter verbindingslijnstuk.

- c** De coördinaten van P berekenen:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 19 \\ 5x - 4y = -7 \end{cases} \text{ of ook } \begin{cases} 16x + 20y = 76 \\ 25x - 20y = -35 \end{cases}$$

Optellen geeft $41x = 41$, dus $x = 1$.

Het snijpunt is $P(1, 3)$.

$$d(l, c) = MP - 5 = \sqrt{4^2 + 5^2} - 5 = \sqrt{41} - 5$$

- 44 a** Het middelpunt van c is $M(1, 4)$ en de straal is $\sqrt{6}$.

De normaalvector van l is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, een normaalvector van de loodlijn is $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de loodlijn is $3x - 4y = n$.

$M(1, 4)$ invullen: $3 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = n$, dus $n = -13$.

De loodlijn is $3x - 4y = -13$.

$$\text{Snijpunt berekenen: } \begin{cases} 4x + 3y = -9 \\ 3x - 4y = -13 \end{cases} \text{ of ook } \begin{cases} 16x + 12y = -36 \\ 9x - 12y = -39 \end{cases}$$

Optellen geeft $25x = -75$, dus $x = -3$.

Het snijpunt is $P(-3, 1)$.

$$d(l, c) = MP - \sqrt{6} = \sqrt{4^2 + 3^2} - \sqrt{6} = 5 - \sqrt{6}$$

- b** Het middelpunt van c is $M(0, 0)$ en de straal is 4.

De normaalvector van l is $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, een normaalvector van de loodlijn is $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de loodlijn is $3x - 4y = n$.

$M(0, 0)$ invullen: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = n$, dus $n = 0$.

De loodlijn is $3x - 4y = 0$.

$$\text{Snijpunt berekenen: } \begin{cases} 4x + 3y = 50 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \text{ of ook } \begin{cases} 16x + 12y = 200 \\ 9x - 12y = 0 \end{cases}$$

Optellen geeft $25x = 200$, dus $x = 8$.

Het snijpunt is $P(8, 6)$.

$$d(l, c) = MP - 4 = \sqrt{8^2 + 6^2} - 4 = 10 - 4 = 6$$

- c** Het middelpunt van c is $M(8, 4)$ en de straal is 2.

Een vergelijking van de loodlijn op l is $y = -\frac{1}{3}x + n$.

$M(8, 4)$ invullen geeft $4 = -\frac{1}{3} \cdot 8 + n$, dus $n = 6\frac{2}{3}$.

De loodlijn is $y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$.

$$\text{Snijpunt berekenen: } 3x = -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$$

$$3\frac{1}{3}x = 6\frac{2}{3}, \text{ dus } x = 2$$

Het snijpunt is $P(2, 6)$.

$$MP = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d(l, c) = 2\sqrt{10} - 2.$$

- 45** $OQ = OR + 1 = 2 + 1 = 3$ en $OD = 5$
 $DQ^2 + 9 = 25$, dus $DQ^2 = 16$ en $DQ = 4$.
 Q ligt dus op de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 3
en ook op de cirkel met middelpunt $(-5, 0)$ en straal 4.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x + 5)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + 10x + 25 + y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\text{Aftrekken geeft } -10x - 25 = -7$$

$$-10x = 18, \text{ dus } x = -1\frac{4}{5}$$

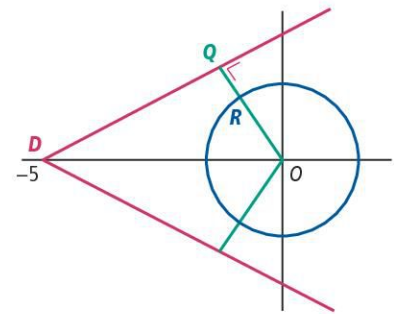
$$\frac{81}{25} + y^2 = 9, \text{ dus } y^2 = \frac{144}{25}$$

$$y = 2\frac{2}{5} \text{ of } y = -2\frac{2}{5}$$

De coördinaten van Q zijn $(-1\frac{4}{5}, 2\frac{2}{5})$ of $(-1\frac{4}{5}, -2\frac{2}{5})$.

$$\overrightarrow{DQ} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{5} \\ 2\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ of } \overrightarrow{DQ} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{5} \\ -2\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{De vectorvoorstelling is } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



- 041 a** De middelpunten zijn $M(2, 2)$ en $N(6, 6)$.

$$MN = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} (= 4\sqrt{2})$$

b $r_1 = \sqrt{4} = 2$ en $r_2 = \sqrt{9} = 3$

c De afstand MN is groter dan $r_1 + r_2$.

d $d(c_1, c_2) = \sqrt{32} - 2 - 3 = \sqrt{32} - 5 = 4\sqrt{2} - 5$

e De middelpunten zijn $M(1, -3)$ en $N(7, 5)$.

$$MN = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, r_1 = \sqrt{9} = 3 \text{ en } r_2 = \sqrt{49} = 7$$

$$MN = r_1 + r_2, \text{ dus } d(c_1, c_2) = 0$$

f $c_1: x^2 + y^2 - 12y + 4 = 0$ ofwel $x^2 + (y - 6)^2 = 32$

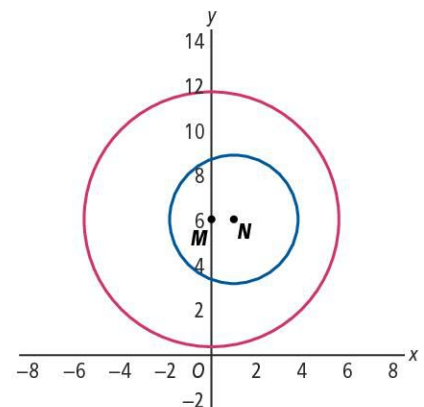
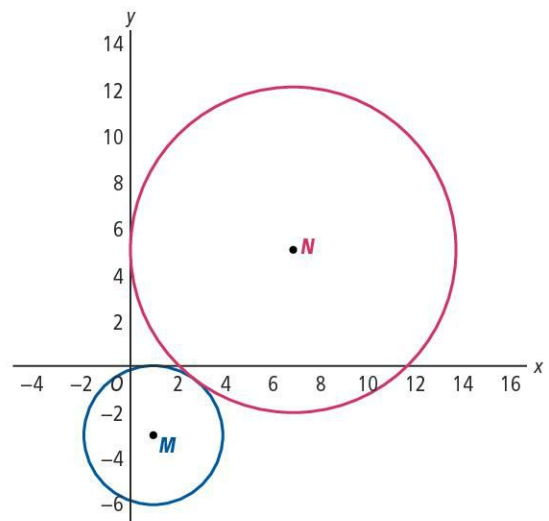
$$c_2: x^2 - 2x + y^2 - 12y + 29 = 0 \text{ ofwel}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 8$$

De middelpunten zijn $M(0, 6)$ en $N(1, 6)$, dus $MN = 1$

$$r_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ en } r_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d(c_1, c_2) = r_1 - MN - r_2 = 4\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1$$



13 Cirkels

044 a Dat is de loodlijn vanuit M op l en een loodlijn geeft altijd de kortste afstand.

b $-\frac{1}{2}x + 9\frac{1}{2} = 2x + 2$

$-2\frac{1}{2}x = -7\frac{1}{2}$, dus $x = 3$.

De coördinaten zijn $P(3, 8)$.

c $PM = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

d $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, dus $d(l, c) = \sqrt{45} - \sqrt{20} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

U7 De afstand tussen het middelpunt N van de gevraagde cirkels en het middelpunt $M(4, 7)$ moet gelijk zijn tweemaal de straal van c , dus $2\sqrt{50}$.

N ligt dus op de cirkel met middelpunt M en straal $2\sqrt{50}$.

De vergelijking van deze cirkel is $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 200$.

De coördinaten van N voldoen ook aan $x = 2\lambda$ en $y = \lambda$.

$(2\lambda - 4)^2 + (\lambda - 7)^2 = 200$

$4\lambda^2 - 16\lambda + 16 + \lambda^2 - 14\lambda + 49 = 200$

$5\lambda^2 - 30\lambda - 135 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda - 27 = 0$

$(\lambda - 9)(\lambda + 3) = 0$

$\lambda = 9$ of $\lambda = -3$

De gevonden middelpunten zijn $N(18, 9)$ en $N(-6, -3)$.

De vergelijkingen zijn $(x - 18)^2 + (y - 9)^2 = 50$ en $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 = 50$.

U8 De straal van c_1 is 2 en de straal van c_2 is 4.

De middelpunten van deze cirkels zijn $(0, 0)$ en $(6, 0)$.

Het middelpunt van de gevraagde cirkels moet afstand 5 hebben tot $(0, 0)$ en afstand 7 tot $(6, 0)$, dus zo'n middelpunt ligt op het snijpunt van de cirkels met vergelijkingen $x^2 + y^2 = 25$ en $(x - 6)^2 + y^2 = 49$.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 49 \end{cases}$

Aftrekken geeft $12x - 36 = -24$

$12x = 12$, dus $x = 1$.

$1 + y^2 = 25$, dus $y = \sqrt{24}$ of $y = -\sqrt{24}$

De vergelijkingen van de gevraagde cirkels zijn

$(x - 1)^2 + (y - 2\sqrt{6})^2 = 9$ en $(x - 1)^2 + (y + 2\sqrt{6})^2 = 9$.

13.6 Ingeschreven en omgeschreven cirkel

intro Je moet de rode driehoek dan gelijkzijdig maken.

46 a Lijn PM is de middelloodlijn, dus $AM = MB$ en $\angle AMP = \angle BMP = 90^\circ$.

$PA^2 = PM^2 + AM^2$

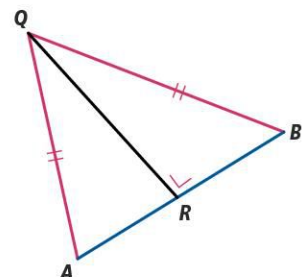
$PB^2 = PM^2 + MB^2 = PM^2 + AM^2$, dus $PA = PB$.

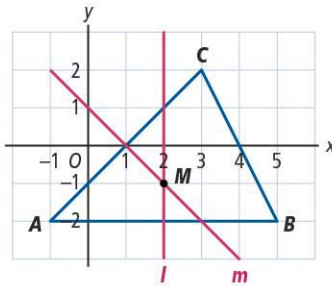
b Uit $QA = QB$ volgt $\angle QAR = \angle QBR$.

De hoeken bij R zijn beide 90° , dus de driehoeken QAR en QBR hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.

QR is hetzelfde in beide driehoeken, dus de driehoeken zijn gelijkvormig met factor 1.

De conclusie is dat $AR = RB$, dus R is het midden van zijde AB .



47 a

- b** De middelloodlijn van zijde AB is $x = 2$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AC is 1 en het midden van zijde AC is $(1, 0)$.
 De middelloodlijn van zijde AC is $y = -x + 1$.
 Het snijpunt van l en m is $M(2, -1)$
- c** M ligt op l , dus $MA = MB$ en M ligt op m , dus $MA = MC$.
 Hieruit volgt $MB = MC$, dus M ligt op de middelloodlijn van zijde BC .
- d** Het middelpunt is $(2, -1)$ en de straal is $MA = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
 De vergelijking is $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

48 a

- De middelloodlijn van lijnstuk AB is $x = 2$.
 De richtingscoëfficiënt van lijnstuk AC is 2 en het midden is $(0, 1)$.
 De middelloodlijn van lijnstuk AC is $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
 Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is $M(2, 0)$
 en de straal is $MA = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
 De vergelijking is $(x - 2)^2 + y^2 = 10$
- b** De richtingscoëfficiënt van lijn AB is -2 en het midden is $(-1, 1)$.
 De middelloodlijn van lijnstuk AB is $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AC is 3 en het midden is $(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.
 De middelloodlijn van lijnstuk AC is $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$$

$$3x + 9 = -2x + 14$$

$$5x = 5, \text{ dus } x = 1$$
 Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is $M(1, 2)$
 en de straal is $MA = 5$.
 De vergelijking is $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

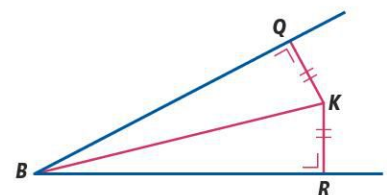
49 a $\frac{PQ}{AP} = \sin(\angle PAQ)$, dus $PQ = AP \cdot \sin(\angle PAQ)$.

b $\frac{PR}{AP} = \sin(\angle PAR)$, dus $PR = AP \cdot \sin(\angle PAR)$ en omdat $\angle PAQ = \angle PAR$
 volgt hieruit dat $PQ = PR$.

c $\sin(\angle KBQ) = \frac{KQ}{KB}$ en $\sin(\angle KBR) = \frac{KR}{KB}$

Omdat $KQ = KR$, volgt hieruit dat $\sin(\angle KBQ) = \sin(\angle KBR)$,
 dus $\angle KBQ = \angle KBR$.

Dat betekent dat K op de deellijn (bissectrice) van hoek B ligt.

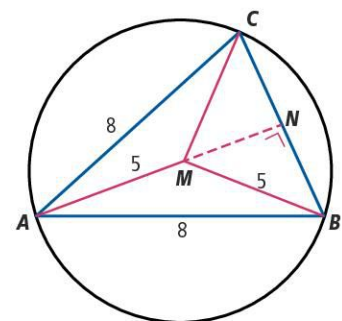


13 Cirkels

- 50 a** Het punt D heeft gelijke afstanden tot de zijden AB en AC .
 Het punt D heeft gelijke afstanden tot de zijden AB en BC .
 Daaruit volgt dat D ook gelijke afstanden heeft tot de zijden AC en BC ,
 daarom ligt D ook op de deellijn van hoek C .
- b** De afstand van D tot elk van de zijden is gelijk, dus de zijden van de driehoek raken een cirkel waarvan punt D het middelpunt is.
- 51 a** $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, dus het punt is $P(2, 0)$.
- b** $AP = AC$, dus driehoek APC is gelijkbenig.
 In een gelijkbenige driehoek is de hoogtelijn uit de top tevens de bissectrice van de tophoek.
- c** Het midden van lijnstuk PC is $N(1, 2)$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AN is $\frac{1}{2}$ en een vergelijking van lijn AN is $y = \frac{1}{2}x + n$.
 $A(-3, 0)$ geeft $n = 1\frac{1}{2}$, dus de vergelijking is $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.
 Het snijpunt met de y -as is $M(0, 1\frac{1}{2})$.
- d** Het middelpunt is M en de straal is gelijk aan $OM = 1\frac{1}{2}$.
 De vergelijking is $x^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4}$.

- 52 a** Stel het midden van lijnstuk AB is P , dus $AP = BP = 45$.
 $AP^2 + CP^2 = AC^2$, dus $CP^2 = 117^2 - 45^2 = 11664$.
 $CP = \sqrt{11664} = 108$
 De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 108 = 4860$.
- b** Opp. $\triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r = 45r$
 Opp. $\triangle BCM = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r = 58\frac{1}{2}r$ en Opp. $\triangle ACM = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot r = 58\frac{1}{2}r$
- c** $45r + 58\frac{1}{2}r + 58\frac{1}{2}r = 4860$
 $162r = 4860$, dus $r = 30$.
- d** Als je een horizontale lijn door het raakpunt van de twee cirkels trekt, ontstaat bovenaan een driehoek met hoogte $108 - 2 \times 30 = 48$.
 Deze driehoek is gelijkvormig met $\triangle ABC$ met factor $\frac{48}{108} = \frac{4}{9}$.
 De straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek is $\frac{4}{9} \times 30 = 13\frac{1}{3}$.

- 53** Kies N als het midden van lijnstuk BC .
 $AN = 5 + MN$
 $BN^2 + AN^2 = AB^2$, dus $BN^2 + (5 + MN)^2 = 64$
 Ook geldt $BN^2 + MN^2 = BM^2$, dus $BN^2 = 25 - MN^2$
 $25 - MN^2 + 25 + 10MN + MN^2 = 64$
 $10MN = 14$
 $MN = 1\frac{2}{5}$, dus $BN^2 = 25 - (1\frac{2}{5})^2 = 23\frac{1}{25}$
 $BN = \sqrt{23\frac{1}{25}} = 4\frac{4}{5}$, dus $BC = 2 \times 4\frac{4}{5} = 9\frac{3}{5}$



048 a De coördinaten van P zijn $(4, 1)$.

b De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.

c De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is 2.

Een vergelijking is $y = 2x + n$.

$P(4, 1)$ invullen geeft $1 = 2 \cdot 4 + n$, dus $n = -7$.

De vergelijking is $y = 2x - 7$.

d Het midden van lijnstuk AC is $Q(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$.

De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{5}{5} = 1$.

De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is -1 .

Een vergelijking is $y = -x + n$.

$Q(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$ invullen geeft $5\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2} + n$, dus $n = 8$.

De vergelijking is $y = -x + 8$.

e $2x - 7 = -x + 8$

$3x = 15$, dus $x = 5$.

De coördinaten van M zijn $(5, 3)$.

f De afstand tussen $A(0, 3)$ en $M(5, 3)$ is $AM = 5$.

g $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

U9 a $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Stel de straal van de ingeschreven cirkel is r .

$opp. OAB = opp. OAM + opp. ABM + opp. OBM$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot r$$

$$24 = 3r + 5r + 4r, \text{ dus } 12r = 24$$

$r = 2$, de straal van de ingeschreven cirkel is 2.

b Uit opdracht a volgt dat het middelpunt is $M(2, 2)$.

$$AM^2 = 2^2 + 4^2, \text{ dus } AM = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

$$AR^2 + MR^2 = AM^2, \text{ dus } AR^2 = 20 - 4 = 16 \text{ en } AR = 4.$$

$$BR = 10 - 4 = 6, \text{ dus } AR \cdot BR = 4 \cdot 6 = 24 \text{ en dat is gelijk aan } opp \Delta OAB.$$

U10 a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking van lijn PA is $-3x + 4y = n$.

$A(-3, 4)$ invullen geeft $-3 \cdot -3 + 4 \cdot 4 = n$, dus $n = 25$.

De vergelijking is $-3x + 4y = 25$.

$$-3x + 4 \cdot 0 = 25 \text{ geeft } x = -8\frac{1}{3}, \text{ dus } P(-8\frac{1}{3}, 0).$$

De coördinaten van B zijn $(-3, -4)$.

De vergelijking van lijn PB is $3x + 4y = -25$.

De normaalvector van lijn PB is $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en dat is gelijk aan $\overrightarrow{OB}$.

$\angle OBP = 90^\circ$, dus PB raakt de cirkel.

b De cirkel moet dan raken aan de verticale lijn $x = 5$.

Stel het midden van lijnstuk AB is Q en R is het punt $(5, 0)$.

$$\Delta PCD \text{ is gelijkvormig met } \Delta PAB \text{ met factor } \frac{PR}{PQ} = \frac{8\frac{1}{3} + 5}{8\frac{1}{3} - 3} = \frac{13\frac{1}{3}}{5\frac{1}{3}} = \frac{40}{16} = 2\frac{1}{2}.$$

De factor is $p = 2\frac{1}{2}$.

13 Cirkels

13.7 Gemengde opdrachten

- 54 a** Het middelpunt van c_1 is $M(-12, 6)$ en de straal is $\sqrt{45}$.

De loodlijn door M op l is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Deze snijden met l : $\begin{cases} 6 - 2\lambda = -12 + \mu \\ 7 + \lambda = 6 + 2\mu \end{cases}$ of ook $\begin{cases} 6 - 2\lambda = -12 + \mu \\ 14 + 2\lambda = 12 + 4\mu \end{cases}$

Optellen geeft $20 = 5\mu$, dus $\mu = 4$. Het snijpunt is $S(-8, 14)$.

$$d(l, c_1) = MS - \sqrt{45} = \sqrt{4^2 + 8^2} - \sqrt{45} = \sqrt{80} - \sqrt{45} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

- b** Het middelpunt van c_2 is $N(0, 0)$ en de straal is $\sqrt{20}$.

$$MN = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}$$

$$d(c_1, c_2) = \sqrt{180} - \sqrt{45} - \sqrt{20} = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

- c** P moet dan op de middelloodlijn van lijnstuk MN liggen.

De richtingscoëfficiënt van lijn MN is $-\frac{1}{2}$ en het midden is $(-6, 3)$.

De middelloodlijn van lijnstuk MN is $y = 2x + n$.

$(-6, 3)$ invullen geeft $3 = 2 \cdot -6 + n$, dus $n = 15$.

De middelloodlijn is $y = 2x + 15$.

Deze snijden met l : $7 + \lambda = 2(6 - 2\lambda) + 15$

$$7 + \lambda = 12 - 4\lambda + 15$$

$5\lambda = 20$, dus $\lambda = 4$. Het snijpunt is $P(-2, 11)$.

- 55 a** Het middelpunt M van de grootste cirkel is het snijpunt van de zwaartelijnen of deellijnen. Stel lijn CD is de zwaartelijne uit de top, dan geldt $MD = \frac{1}{3} \cdot CD$.

De gemeenschappelijk raaklijn van de twee cirkels ligt dus op $\frac{2}{3}$ van de hoogte van de driehoek.

De kleinste cirkel is de ingeschreven cirkel van een driehoek waarvan de zijden $\frac{1}{3}$ maal de lengte van de zijden van de oorspronkelijk driehoek hebben.

Voor de oppervlakten geldt dan de verhouding $3^2 : 1^2$, dus de verhouding van de oppervlakten is $9 : 1$.

- b** $AC = BC = 10$ en $AD = DB = 8$

Dan geldt ook $BE = 8$.

$$CD^2 + 8^2 = 10^2, \text{ dus } CD^2 = 36 \text{ en } CD = 6.$$

Stel de straal van de ingeschreven cirkel is r .

$$CM = 6 - r, ME = r \text{ en } CE = 10 - 8 = 2.$$

$$(6 - r)^2 = r^2 + 2^2$$

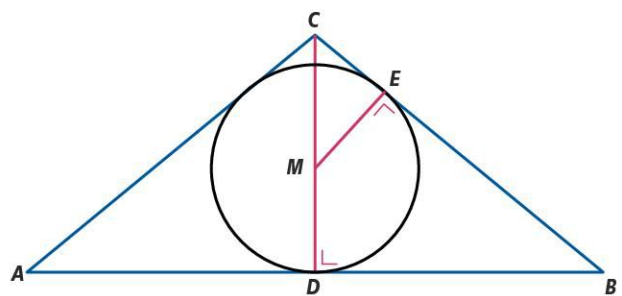
$$36 - 12r + r^2 = r^2 + 4$$

$$12r = 32, \text{ dus } r = \frac{2}{3}.$$

De kleine cirkel (niet getekend!) past dus in een driehoek die gelijkvormig is met ABC en waarvan de hoogte $6 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ is.

De verhouding van de lengten van de zijden van deze driehoek en driehoek ABC is $\frac{2}{3} : 6 = 1 : 9$.

De verhouding van de oppervlakten is dan $1 : 81$.



56 a $l: 4x - 3y = -25$, dus $-3y = -4x - 25$ ofwel $y = \frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$

Dus l is evenwijdig met $k: y = \frac{4}{3}x$.

b $(0, 0)$ ligt op k . De loodlijn uit $(0, 0)$ op l is $y = -\frac{3}{4}x$.

$$\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3} = -\frac{3}{4}x, \text{ vermenigvuldigen met 12 geeft}$$

$$16x + 100 = -9x$$

$$25x = -100, \text{ dus } x = -4 \text{ en het snijpunt is } S(-4, 3).$$

$$d(k, l) = OS = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

c $x - 7 \cdot \frac{4}{3}x + 25 = 0$ geeft $-\frac{25}{3}x = -25$, dus $x = 3$.

Het snijpunt van m met k is $(3, 4)$.

$$x - 7 \cdot \left(\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}\right) + 25 = 0 \text{ geeft } -\frac{25}{3}x - 58\frac{1}{3} = -25, \text{ dus } -\frac{25}{3}x = 33\frac{1}{3},$$

$$x = -4, \text{ het snijpunt van } m \text{ met } l \text{ is } (-4, 3).$$

d Het middelpunt van de gevraagde cirkel ligt op m en even ver van k als van l , dus dat is het midden tussen de twee gevonden punten in opdracht c.

Het middelpunt is $\left(-\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ en de straal is de helft van $d(k, l)$ en dat is $2\frac{1}{2}$.

De vergelijking is $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 3\frac{1}{2}\right)^2 = 6\frac{1}{4}$.

57 a De lijn k en de cirkel moeten één snijpunt hebben.

Stel de vergelijking van k is $y = mx + 10$.

De vergelijking van c is $(x - 5)^2 + y^2 = 25$.

$$(x - 5)^2 + (mx + 10)^2 = 25$$

$$x^2 - 10x + 25 + m^2x^2 + 20mx + 100 - 25 = 0$$

$$(m^2 + 1)x^2 + (20m - 10)x + 100 = 0$$

$$D = (20m - 10)^2 - 4(m^2 + 1) \cdot 100$$

$$400m^2 - 400m + 100 - 400m^2 - 400 = 0$$

$$-400m = 300, \text{ dus } m = -\frac{3}{4}.$$

De vergelijking van k is $y = -\frac{3}{4}x + 10$.

$$-\frac{3}{4}x + 10 = 0 \text{ geeft } \frac{3}{4}x = 10, \text{ dus } x = 13\frac{1}{3} \text{ en } S\left(13\frac{1}{3}, 0\right).$$

De oppervlakte van $\triangle OPS$ is $\frac{1}{2} \cdot 13\frac{1}{3} \cdot 10 = 66\frac{2}{3}$.

b $(x - 5)^2 + p^2 = 25$

$$x - 5 = \sqrt{25 - p^2} \text{ of } x - 5 = -\sqrt{25 - p^2}$$

Het verschil tussen deze twee uitkomsten is $\sqrt{28}$, dus

$$2\sqrt{25 - p^2} = \sqrt{28}$$

$$\sqrt{25 - p^2} = \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{7}$$

$$p^2 = 18, \text{ dus } p = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

De punten zijn $A(5 - \sqrt{7}, 3\sqrt{2})$ en $B(5 + \sqrt{7}, 3\sqrt{2})$.

c $x = \lambda$ en $y = -20 + 3\lambda$ invullen in de vergelijking van de cirkel geeft

$$(\lambda - 5)^2 + (-20 + 3\lambda)^2 = 25$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 + 400 - 120\lambda + 9\lambda^2 - 25 = 0$$

$$10\lambda^2 - 130\lambda + 400 = 0$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 40 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 8) = 0$$

$$\lambda = 5 \text{ of } \lambda = 8, \text{ dus } C(5, -5) \text{ en } D(8, 4).$$

$$CD = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

13 Cirkels

- d** E en F liggen ook op een cirkel met middelpunt P en straal $\sqrt{50}$.

De vergelijking van deze cirkel is $x^2 + (y - 10)^2 = 50$.

Beide cirkels snijden geeft de coördinaten van E en F .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 20y + 100 = 50 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Aftrekken geeft $10x - 20y + 75 = 25$

$$x = 2y - 5$$

$$(2y - 5)^2 + (y - 10)^2 = 50$$

$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 - 20y + 100 = 50$$

$$5y^2 - 40y + 75 = 0$$

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$(y - 3)(y - 5) = 0$$

$y = 3$ of $y = 5$, dus $E(1, 3)$ en $F(5, 5)$.

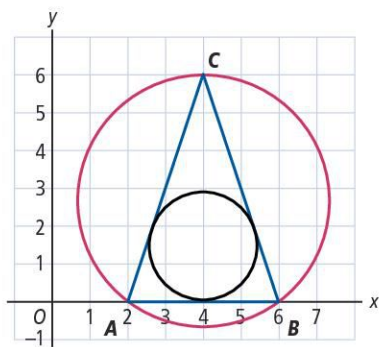
Onderzoeksopdrachten

- 58 a** Ja, want het snijpunt van de diagonalen heeft gelijke afstanden tot alle vier hoekpunten.
- b** Ja, want het snijpunt van de diagonalen heeft gelijke afstanden tot elk van de vier zijden.
- c** Het snijpunt van de diagonalen van een ruit ligt in het algemeen niet op gelijke afstand van de vier hoekpunten.
Het snijpunt van de diagonalen van een ruit heeft gelijke afstanden tot elk van de vier zijden
- d** Dan moeten de halve diagonalen dezelfde lengte hebben, en dan is de ruit tevens een vierkant.
- e** **A** Een parallellogram heeft een omgeschreven cirkel als de halve diagonalen even lang zijn, en dan wordt het een rechthoek.
Een parallellogram heeft een ingeschreven cirkel als het snijpunt van de diagonalen gelijke afstanden heeft tot elk van de zijden. In dat geval is het een ruit.
- B** Een vlieger heeft een omgeschreven cirkel, als twee tegenover elkaar liggende hoeken recht zijn. Het midden van de symmetrieas is dan het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
Elke vlieger heeft een ingeschreven cirkel. Je vindt het middelpunt door de bissectrices van de gelijke hoeken te snijden met de symmetrieas.
- C** Een rechthoek heeft een omgeschreven cirkel want de halve diagonalen zijn even lang.
Een rechthoek heeft alleen een ingeschreven cirkel als het een vierkant is.
- D** Een trapezium heeft altijd een omgeschreven cirkel als het een gelijkbenig trapezium is.
Een trapezium heeft een ingeschreven cirkel, als de bissectrices van de vier hoeken door één punt gaan.

- 59** De vergelijking van hoogtelijn BR is $x = 4$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn OB is 3, dus de vergelijking van hoogtelijn AQ is $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.
 $3x = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$ geeft $x = 1$, dus $Q(1, 3)$.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AB is -2 , en de vergelijking van lijn AB is $y = -2x + 20$. De vergelijking van hoogtelijn OP is $y = \frac{1}{2}x$.
 $-2x + 20 = \frac{1}{2}x$ geeft $x = 8$, dus $P(8, 4)$.
 De coördinaten van R zijn $(4, 0)$.
 De coördinaten van H zijn $(4, 2)$.
 De middens van de zijden zijn $D(7, 6)$, $E(2, 6)$ en $F(5, 0)$.
 De middelloodlijn van lijnstuk OA is $x = 5$ en de middelloodlijn van lijnstuk OB is $y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$.
 Het snijpunt van de middelloodlijnen is $M(5, 5)$.
 De coördinaten van G zijn $(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.
 De coördinaten van S zijn $(2, 1)$.
 De coördinaten van T zijn $(7, 1)$.
 De coördinaten van U zijn $(4, 7)$.
 $GR = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}}$
 De vergelijking van de negenpunts cirkel is $(x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$.
 De punten D, E, F, P, Q, R, S, T en U voldoen allemaal aan deze vergelijking.

Samenvatting

S1 a b c



- S2** De middelpunten van de cirkels zijn $M(0, 8)$ en $N(8, 2)$.
 $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ dus de normaalvector van de raaklijn is $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $4x - 3y = c$.
 $R(4, 5)$ invullen geeft $4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = c$, dus $c = 1$.
 Een vergelijking van de raaklijn is $4x - 3y = 1$.
- S3 a** $x^2 + 10x + y^2 + 6y + 25 = 0$
 $(x + 5)^2 - 25 + (y + 3)^2 - 9 + 25 = 0$
 $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$

13 Cirkels

b $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 3)^2 - 9 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Het middelpunt is $(4, -3)$ en de straal is 5.

S4 a Substitutie van $x = 14 + 5\lambda$ en $y = -\lambda$ in de vergelijking van c geeft

$$(14 + 5\lambda)^2 + (-\lambda)^2 - 2(14 + 5\lambda) = 12$$

$$196 + 140\lambda + 25\lambda^2 + \lambda^2 - 28 - 10\lambda - 12 = 0$$

$$26\lambda^2 + 130\lambda + 156 = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = -2 \text{ of } \lambda = -3.$$

De snijpunten zijn $(4, 2)$ en $(-1, 3)$.

b Substitutie van $y = x + 3$ in de vergelijking van c geeft

$$(x - 4)^2 + (x - 4)^2 = 18$$

$$2 \cdot (x - 4)^2 = 18$$

$$(x - 4)^2 = 9$$

$$x - 4 = 3 \text{ of } x - 4 = -3$$

$$x = 7 \text{ of } x = 1$$

De snijpunten zijn $(7, 10)$ en $(1, 4)$.

S5 Het middelpunt is $M(2, 5)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $-x - 3y = c$.

$P(1, 2)$ invullen geeft $-1 - 6 = c$, dus $c = -7$.

De vergelijking is $-x - 3y = -7$ of $x + 3y = 7$.

S6 Stel een vectorvoorstelling van de raaklijnen is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 2 + \lambda$ en $y = 6 + m\lambda$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$(\lambda - 2)^2 + (6 + m\lambda)^2 = 20$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 36 + 12m\lambda + m^2\lambda^2 - 20 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (12m - 4)\lambda + 20 = 0$$

Deze vergelijking heeft één oplossing als de discriminant 0 is.

$$D = (12m - 4)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 20$$

$$144m^2 - 96m + 16 - 80m^2 - 80 = 0$$

$$64m^2 - 96m - 64 = 0$$

$$2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$m = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} = 2 \text{ of } m = \frac{3 - \sqrt{25}}{4} = -\frac{1}{2}$$

De vectorvoorstelling zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

S7
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 25 \end{cases}$$

 Aftrekken geeft $12x + 6y - 45 = 75$ ofwel $y = -2x + 20$.
 $y = -2x + 20$ invullen in $x^2 + y^2 = 100$ geeft
 $x^2 + 4x^2 - 80x + 400 = 100$
 $5x^2 - 80x + 300 = 0$
 $x^2 - 16x + 60 = 0$
 $(x - 6)(x - 10) = 0$
 $x = 6$ of $x = 10$
 De snijpunten zijn $(6, 8)$ en $(10, 0)$.

S8 a Het middelpunt van c_1 is $M(-8, -10)$ en de straal is $\sqrt{90}$.

$$MP = \sqrt{18^2 + 6^2} = \sqrt{360}$$

$$d(P, c_1) = \sqrt{360} - \sqrt{90} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

b Het middelpunt van c_2 is $N(0, 14)$ en de straal is $\sqrt{10}$.

$$MN = \sqrt{8^2 + 24^2} = \sqrt{640}$$

$$MN > \sqrt{90} + \sqrt{10}, \text{ dus de twee cirkels liggen geheel buiten elkaar.}$$

$$\begin{aligned} d(c_1, c_2) &= MN - \sqrt{90} - \sqrt{10} = \sqrt{640} - \sqrt{90} - \sqrt{10} \\ &= 8\sqrt{10} - 3\sqrt{10} - \sqrt{10} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

S9 Het middelpunt van de cirkel is $M(0, 1)$ en de straal is $\sqrt{10}$.

$$\text{De richtingscoëfficiënt van de loodlijn uit } M \text{ op } l \text{ is } -\frac{1}{3}.$$

$$\text{De loodlijn is } y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

$$3x + 16 = -\frac{1}{3}x + 1$$

$$3\frac{1}{3}x = -15, \text{ dus } x = -4\frac{1}{2}. \text{ Het snijpunt is } S(-4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}).$$

$$MS = \sqrt{\left(4\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{22\frac{1}{2}}$$

$$d(l, c) = MS - \sqrt{10} = \sqrt{22\frac{1}{2}} - \sqrt{10} = \sqrt{2\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{10} = 1\frac{1}{2}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Test jezelf

T1 a $x = 2y + 5$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$(2y + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

$$4y^2 + 4y + 1 + y^2 - 4y + 4 - 10 = 0$$

$$5y^2 = 5$$

$$y = 1 \text{ of } y = -1$$

$$\text{De snijpunten zijn } (7, 1) \text{ en } (3, -1).$$

b Het middelpunt van c is $M(4, 2)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Een vergelijking van de raaklijn is } -x + 3y = c.$$

$$P(3, 5) \text{ invullen geeft } -1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = c, \text{ dus } c = 12.$$

$$\text{Een vergelijking is } -x + 3y = 12.$$

13 Cirkels

- c $y = px$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$(x - 4)^2 + (px - 2)^2 = 10$$

$$x^2 - 8x + 16 + p^2x^2 - 4px + 4 - 10 = 0$$

$$(p^2 + 1)x^2 + (-8 - 4p)x + 10 = 0$$

Om te raken moet deze vergelijking één oplossing hebben.

$$D = (-8 - 4p)^2 - 4 \cdot (p^2 + 1) \cdot 10 = 0$$

$$64 + 64p + 16p^2 - 40p^2 - 40 = 0$$

$$-24p^2 + 64p + 24 = 0$$

$$3p^2 - 8p - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$p = \frac{8 + \sqrt{100}}{6} = 3 \text{ of } p = \frac{8 - \sqrt{100}}{6} = -\frac{1}{3}$$

- T2 a Driehoek OAB is rechthoekig, dus het midden $M(8, 6)$ van AB is het middelpunt van de omschreven cirkel. De straal is

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + 12^2} = 10.$$

De vergelijking van de omschreven cirkel is $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 100$.

- b De afstand van $I(4, 4)$ tot de zijden OA en OB is 4.

De richtingscoëfficiënt van AB is $-\frac{3}{4}$ en de vergelijking is $y = -\frac{3}{4}x + 12$.

Lijn door $I(4, 4)$ loodrecht op AB heeft als vergelijking $y = \frac{4}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

$$\frac{4}{3}x - 1\frac{1}{3} = -\frac{3}{4}x + 12$$

$$16x - 16 = -9x + 144$$

$$25x = 160, \text{ dus } x = 6\frac{2}{5}$$

Het snijpunt is $S(6\frac{2}{5}, 7\frac{1}{5})$.

$$\text{De afstand van } I \text{ tot } AB \text{ is } IS = \sqrt{\left(2\frac{2}{5}\right)^2 + \left(3\frac{1}{5}\right)^2} = 4.$$

Dus de afstand van $I(4, 4)$ tot de zijden van de driehoek is 4.

- c Het middelpunt is $I(4, 4)$ en de straal is 4.

De vergelijking van de ingeschreven cirkel is $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

T3 a $AB = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$$BC = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

- b De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $-\frac{1}{3}$ en het midden is $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
De middelloodlijn van lijnstuk AB is $y = 3x - 1$.

De richtingscoëfficiënt van lijn AC is $\frac{1}{2}$ en het midden is $(0, 4)$.

De middelloodlijn van lijnstuk AC is $y = -2x + 4$.

$$3x - 1 = -2x + 4$$

$$5x = 5$$

$x = 1$, dit geeft het snijpunt $M(1, 2)$.

- c Het middelpunt is $M(1, 2)$ en de straal is gelijk aan $AM = 5$.

De vergelijking is $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

T4 a $y = -\frac{1}{2}x + n$ gaat door $M(4, 3)$

$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + n \text{ geeft } n = 5$$

De vergelijking van de lijn is $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

De vergelijking van de cirkel is $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

$y = -\frac{1}{2}x + 5$ substitueren in de vergelijking van de cirkel geeft

$$(x - 4)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)^2 = 5$$

$$x^2 - 8x + 16 + \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 - 5 = 0$$

$$1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 15 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

$x = 2$ of $x = 6$, de snijpunten zijn $P(2, 4)$ en $Q(6, 2)$.

b De raaklijn in P staat loodrecht op de lijn $y = -\frac{1}{2}x + 5$, dus heeft richtingscoëfficiënt 2. Een vergelijking is $y = 2x + c$.

$P(2, 4)$ invullen geeft $4 = 2 \cdot 2 + c$, dus $c = 0$.

De vergelijking is $y = 2x$.

c Ook de raaklijn in Q staat loodrecht op de lijn $y = -\frac{1}{2}x + 5$, dus heeft richtingscoëfficiënt 2. Een vergelijking is $y = 2x + c$.

$Q(6, 2)$ invullen geeft $2 = 2 \cdot 6 + c$, dus $c = -10$.

De vergelijking is $y = 2x - 10$.

Opmerking: P en Q kunnen worden omgewisseld.

T5 Eerst de coördinaten van de snijpunten van c_1 en c_2 berekenen:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 10 \end{cases}$$

Aftrekken geeft $-6x + 6y = -6$, dus $y = x - 1$

$y = x - 1$ substitueren in de vergelijking van c_1 geeft

$$(x - 2)^2 + (x)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 = 4$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

$x = 0$ of $x = 2$, dus $P(0, -1)$ en $Q(2, 1)$.

De richtingscoëfficiënt van lijn PQ is 1 en het midden is $(1, 0)$.

De middelloodlijn van lijnstuk PQ is $y = -x + 1$.

Bereken nu het snijpunt van deze middelloodlijn met $l: x - 2y = 13$.

$$x - 2(-x + 1) = 13$$

$3x = 15$, dus $x = 5$ en het snijpunt is $S(5, -4)$.

De straal van de gevraagde cirkel is $PS = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

De vergelijking is $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 34$

T6 a $x = 4\lambda$ en $y = 5 - 3\lambda$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$(4\lambda - 1)^2 + (-3\lambda + 7)^2 = 25$$

$$16\lambda^2 - 8\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 42\lambda + 49 - 25 = 0$$

$$25\lambda^2 - 50\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$(\lambda - 1)^2 = 0$, er is één oplossing, namelijk $\lambda = 1$.

Dus k raakt de cirkel.

13 Cirkels

- b** $\lambda = 1$ invullen geeft het raakpunt $R(4, 2)$.
c Het middelpunt van de cirkel is $M(1, -2)$.

Het raakpunt Q van m met de cirkel vind je met $\overrightarrow{MQ} = -\overrightarrow{MR} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
 dus $Q(-2, -6)$.

De richtingscoëfficiënt van k en van m is $-\frac{3}{4}$.

Een vergelijking van m is $y = -\frac{3}{4}x + n$.

$Q(-2, -6)$ invullen geeft $n = -7\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van m is $y = -\frac{3}{4}x - 7\frac{1}{2}$.

- T7 a** Het middelpunt van c_2 is $M(3, 2)$ en de straal is $\sqrt{13}$.

$$MP = \sqrt{13^2 + 13^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$$

$$d(P, c_2) = 13\sqrt{2} - \sqrt{13}$$

- b** $c_1: x^2 - 4x + y^2 = 0$ ofwel $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

Het middelpunt van c_1 is $N(2, 0)$ en de straal is 2.

De richtingscoëfficiënt van l is -2 .

De loodlijn door N op l heeft als vergelijking $y = \frac{1}{2}x + n$.

$N(2, 0)$ invullen geeft $0 = \frac{1}{2} \cdot 2 + n$, dus $n = -1$.

De loodlijn is $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Deze loodlijn snijden met l geeft

$$2x + \frac{1}{2}x - 1 = 19$$

$2\frac{1}{2}x = 20$, dus $x = 8$. Het snijpunt is $S(8, 3)$.

$$d(l, c_1) = NS - 2 = \sqrt{6^2 + 3^2} - 2 = \sqrt{45} - 2 = 3\sqrt{5} - 2$$

- c**
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 13 \end{cases}$$

 Aftrekken geeft $2x + 4y - 13 = -13$
 $x = -2y$

Dit invullen in c_1 geeft $4y^2 + y^2 = -8y$

$$5y^2 + 8y = 0$$

$$5y(y + 1\frac{3}{5}) = 0$$

$y = 0$ of $y = -1\frac{3}{5}$, de snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(3\frac{1}{5}, -1\frac{3}{5})$.

- d** De vectorvoorstelling van de raaklijnen is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 16 + \lambda$ en $y = 15 + m\lambda$ invullen in c_2 geeft

$$(13 + \lambda)^2 + (13 + m\lambda)^2 = 13$$

$$169 + 26\lambda + \lambda^2 + 169 + 26m\lambda + m^2\lambda^2 - 13 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (26m + 26)\lambda + 325 = 0$$

$$D = (26m + 26)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 325$$

$$676m^2 + 1352m + 676 - 1300m^2 - 1300 = 0$$

$$-624m^2 + 1352m - 624 = 0$$

$$6m^2 - 13m + 6 = 0$$

$$m = \frac{13 + \sqrt{169 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = 1\frac{1}{2} \text{ of } m = \frac{13 - \sqrt{169 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{2}{3}$$

De vectorvoorstellingen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

T8 $y = 2x + q$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$x^2 + (2x + q)^2 - 2x - 6(2x + q) - 10 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 4qx + q^2 - 2x - 12x - 6q - 10 = 0$$

$$5x^2 + (4q - 14)x + q^2 - 6q - 10 = 0$$

De discriminant van deze vergelijking moet gelijk zijn aan 0:

$$D = (4q - 14)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (q^2 - 6q - 10)$$

$$16q^2 - 112q + 196 - 20q^2 + 120q + 200 = 0$$

$$-4q^2 + 8q + 396 = 0$$

$$q^2 - 2q - 99 = 0$$

$$(q - 11)(q + 9) = 0$$

$$q = 11 \text{ of } q = -9$$

T9 a Vul de coördinaten van P , R en S in:

$$(-1)^2 + (-3)^2 - 4 \cdot -1 - 2 \cdot -3 - 20 = 1 + 9 + 4 + 6 - 20 = 0, \text{ klopt.}$$

$$5^2 + 5^2 - 4 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 20 = 25 + 25 - 20 - 10 - 20 = 0, \text{ klopt.}$$

$$(-3)^2 + 1^2 - 4 \cdot -3 - 2 \cdot 1 - 20 = 9 + 1 + 12 - 2 - 20 = 0, \text{ klopt.}$$

De cirkel gaat door elk van deze drie punten.

b $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Het middelpunt van de cirkel is $M(2, 1)$ en de straal is 5.

M ligt op lijnstuk PR , dus PR is een middellijn van de cirkel.

Q is het spiegelbeeld van S in de lijn PR .

De richtingscoëfficiënt van lijn PR is $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

De vergelijking van lijn PR is $y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$.

De loodlijn uit S op lijn PR is $y = -\frac{3}{4}x + n$.

$S(-3, 1)$ invullen geeft $1 = -\frac{3}{4} \cdot -3 + n$, dus $n = -1\frac{1}{4}$.

De vergelijking is $y = -\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{4}$.

Voor het snijpunt geldt: $1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} = -\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{4}$

$$16x - 20 = -9x - 15$$

$25x = 5$, dus $x = \frac{1}{5}$. Het snijpunt is $T(\frac{1}{5}, -1\frac{2}{5})$.

$$\overrightarrow{SQ} = 2\overrightarrow{ST} = 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -2\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -4\frac{4}{5} \end{pmatrix} \text{ dus het punt is } Q(3\frac{2}{5}, -3\frac{4}{5}).$$

c De afstand tussen de middelpunten is $OM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

$$r_1 = 5 \text{ en } r_2 = 1.$$

c_2 ligt geheel binnen c_1 .

$$d(c_1, c_2) = 5 - \sqrt{5} - 1 = 4 - \sqrt{5}$$

T10 a
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = -4 \\ x^2 + y^2 - 2y = 4 \end{cases}$$

Aftrekken geeft $-6x + 2y = -8$ ofwel $y = 3x - 4$

Dit invullen in de vergelijking van c_1 geeft $x^2 + (3x - 4)^2 = 6x - 4$

$$x^2 + 9x^2 - 24x + 16 - 6x + 4 = 0$$

$$10x^2 - 30x + 20 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$x = 1$ of $x = 2$. De snijpunten zijn $P(1, -1)$ en $Q(2, 2)$.

13 Cirkels

b $c_1 : x^2 - 6x + y^2 = -4$ ofwel $(x - 3)^2 + y^2 = 5$

$c_2 : x^2 + y^2 - 2y = 4$ ofwel $x^2 + (y - 1)^2 = 5$

De middelpunten van de cirkels zijn $M(3, 0)$ en $N(0, 1)$.

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus de richtingsvectoren van de raaklijnen in P zijn en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Het inproduct van deze richtingsvectoren is 0, dus de raaklijnen staan loodrecht op elkaar.

(Als je $P(2, 2)$ kiest krijg je hetzelfde resultaat)

Extra oefening

E1 a $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 17$

b $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$

$(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 = 0$

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$

Het middelpunt is $(1, -3)$ en de straal is $\sqrt{10}$.

c $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 15 = 0$

$(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 + 15 = 0$

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = -5$

Dan zou moeten gelden $r^2 = -5$ en dat is onmogelijk.

E2 a $l : 3x + 5y = 18$ ofwel $5y = -3x + 18$ dus $y = -\frac{3}{5}x + 3\frac{3}{5}$

$y = -\frac{3}{5}x + 3\frac{3}{5}$ substitueren in de vergelijking van c geeft

$(x - 2)^2 + \left(-\frac{3}{5}x + 4\frac{3}{5}\right)^2 = 17$

$x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{25}x^2 - \frac{138}{25}x + \frac{529}{25} - 17 = 0$

$1\frac{9}{25}x^2 - \frac{238}{25}x + \frac{204}{25} = 0$

$34x^2 - 238x + 204 = 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$(x - 1)(x - 6) = 0$

$x = 1$ of $x = 6$

De snijpunten zijn $(1, 3)$ en $(6, 0)$.

b $x = \lambda$ en $y = -9 + 4\lambda$ substitueren in de vergelijking van c geeft

$(\lambda - 2)^2 + (4\lambda - 8)^2 = 17$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 16\lambda^2 - 64\lambda + 64 - 17 = 0$

$17\lambda^2 - 68\lambda + 51 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda = 1$ of $\lambda = 3$

De snijpunten zijn $(1, -5)$ en $(3, 3)$.

E3 a $c : x^2 + 6x + y^2 = 43$

$$c : (x + 3)^2 + y^2 = 52$$

Het middelpunt is $M(-3, 0)$, dus $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $4x - 6y = c$.

$P(1, -6)$ invullen geeft $4 \cdot 1 - 6 \cdot -6 = c$, dus $c = 40$.

Een vergelijking is $4x - 6y = 40$ of $2x - 3y = 20$.

b Het middelpunt is $M(4, -8)$, dus $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van de raaklijn is $x + y = c$.

$Q(5, -7)$ invullen geeft $5 + -7 = c$, dus $c = -2$.

Een vergelijking is $x + y = -2$.

E4 a Stel een vectorvoorstelling van de raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 3 + \lambda$ en $y = 7 + m\lambda$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$(4 + \lambda)^2 + (m\lambda + 2)^2 = 10$$

$$16 + 8\lambda + \lambda^2 + m^2\lambda^2 + 4m\lambda + 4 - 10 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (4m + 8)\lambda + 10 = 0$$

De discriminant moet gelijk zijn aan 0.

$$D = (4m + 8)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 10$$

$$16m^2 + 64m + 64 - 40m^2 - 40 = 0$$

$$-24m^2 + 64m + 24 = 0$$

$$3m^2 - 8m - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$m = \frac{8 + \sqrt{100}}{6} = 3 \text{ of } m = \frac{8 - \sqrt{100}}{6} = -\frac{1}{3}$$

De vectorvoorstellingen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b Stel een vectorvoorstelling van de raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 3 + \lambda$ en $y = -3 + m\lambda$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$(3 + \lambda)^2 + (-3 + m\lambda)^2 - 16(3 + \lambda) - 4(-3 + m\lambda) + 63 = 0$$

$$9 + 6\lambda + \lambda^2 + 9 - 6m\lambda + m^2\lambda^2 - 48 - 16\lambda + 12 - 4m\lambda + 63 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (-10m - 10)\lambda + 45 = 0$$

De discriminant moet gelijk zijn aan 0.

$$D = (-10m - 10)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 45$$

$$100m^2 + 200m + 100 - 180m^2 - 180 = 0$$

$$-80m^2 + 200m - 80 = 0$$

$$2m^2 - 5m + 2 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$m = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2 \text{ of } m = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}$$

De vectorvoorstellingen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13 Cirkels

$$\text{E5 a } \begin{cases} x^2 + y^2 + 14x = 4 \\ x^2 + y^2 - 6x = 4 \end{cases}$$

Aftrekken geeft $20x = 0$ dus $x = 0$

$y^2 = 4$, dus $y = 2$ of $y = -2$

De snijpunten zijn $(0, 2)$ en $(0, -2)$.

$$\text{b } \begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 25 = 10 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64 = 5 \end{cases}$$

Aftrekken geeft $12x + 6y - 75 = 5$ ofwel $6y = -12x + 80$, dus $y = -2x + 13\frac{1}{3}$

$y = -2x + 13\frac{1}{3}$ invullen in c_1 geeft $x^2 + (-2x + 13\frac{1}{3})^2 = 10$

$$x^2 + 4x^2 - 33\frac{1}{3}x + \frac{625}{9} = 10$$

$$5x^2 - 33\frac{1}{3}x + 59\frac{4}{9} = 0$$

vermenigvuldigen met 9 en delen door 5 geeft

$$9x^2 - 60x + 107 = 0$$

De discriminant is $D = 60^2 - 4 \cdot 9 \cdot 107 = -252$.

De discriminant is negatief, dus er zijn geen snijpunten.

E6 a Het middelpunt van c_1 is $M(4, -1)$ en de straal is $\sqrt{18}$.

$$MP = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$d(P, c_1) = 10 - \sqrt{18} = 10 - 3\sqrt{2}$$

$$\text{b } c_2: x^2 + 16x + y^2 - 8y + 8 = 0$$

$$c_2: (x + 8)^2 + (y - 4)^2 = 72$$

Het middelpunt van c_2 is $N(-8, 4)$ en de straal is $\sqrt{72}$.

$$NQ = 6$$

$$d(Q, c_2) = \sqrt{72} - 6 = 6\sqrt{2} - 6$$

$$\text{c } MN = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$13 > \sqrt{18} + \sqrt{72}$$

$$d(c_1, c_2) = 13 - \sqrt{18} - \sqrt{72}$$

$$= 13 - 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$$

$$= 13 - 9\sqrt{2}$$

E7 Het middelpunt is $M(4, -1)$ en de straal is $\sqrt{18}$.

De loodlijn door M op l heeft als vergelijking $y = -x + b$.

$M(4, -1)$ invullen in $y = -x + b$ geeft $-1 = -4 + b$ dus $b = 3$.

De vergelijking van de loodlijn is $y = -x + 3$.

Deze loodlijn snijden met l geeft $x + 3 = -x + 3$

$2x = 0$, dus $x = 0$ en het snijpunt is $S(0, 3)$.

$$d(l, c) = MS - r = \sqrt{4^2 + 4^2} - \sqrt{18}$$

$$= \sqrt{32} - \sqrt{18}$$

$$= 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

- E8 a** De vergelijkingen van de cirkels zijn $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$ en $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 4 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 1 \end{cases}$$

Aftrekken geeft $-4x + 2y + 7 = 3$ ofwel $y = 2x - 2$

$$x^2 - 8x + 16 + (2x - 2)^2 - 4(2x - 2) + 4 = 4$$

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 8x + 4 - 8x + 8 + 4 = 4$$

$$5x^2 - 24x + 28 = 0$$

$$x = \frac{24 + \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 28}}{10} = 2\frac{4}{5} \text{ of } x = \frac{24 - \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 28}}{10} = 2$$

De snijpunten zijn $(2, 2)$ en $(2\frac{4}{5}, 3\frac{3}{5})$.

- b** Stel een vectorvoorstelling van de raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$x = 3 + \lambda$ en $y = 5 + m\lambda$ invullen in de vergelijking van c_2 geeft

$$(\lambda + 1)^2 + (m\lambda + 2)^2 = 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 + m^2\lambda^2 + 4m\lambda + 4 - 1 = 0$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (4m + 2)\lambda + 4 = 0$$

De discriminant moet gelijk zijn aan 0.

$$D = (4m + 2)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 4$$

$$16m^2 + 16m + 4 - 16m^2 - 16 = 0$$

$$16m = 12, \text{ dus } m = \frac{3}{4}.$$

De vectorvoorstelling van een raaklijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De andere raaklijn is verticaal: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- E9** De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{1}{2}$ en het midden is $(-6, 3)$.
De middelloodlijn van lijnstuk AB is $y = -2x - 9$.

De richtingscoëfficiënt van lijn BC is $\frac{-5}{15} = -\frac{1}{3}$ en het midden is $(-4\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$.

De middelloodlijn van lijnstuk BC is $y = 3x + 11$.

$$3x + 11 = -2x - 9$$

$$5x = -20, \text{ dus } x = -4, \text{ het snijpunt is } M(-4, -1).$$

$$\text{De straal is } AM = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}.$$

De vergelijking van de omgeschreven cirkel is $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 65$

- E10 a** $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ en $AC = 5$, dus $\triangle ABC$ is een gelijkbenige driehoek.
De hoogtelijn uit de top is tevens de bissectrice van de tophoek.

- b** De vergelijking van lijn ON is $y = x$.

De richtingscoëfficiënt van lijn BC is 2, dus die van AD is $-\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van lijn AD is $y = -\frac{1}{2}x + n$, door $A(3, 0)$ in te vullen vind je

$$\text{de vergelijking } y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}.$$

N is het snijpunt van de lijnen AD en BC .

$$x = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } x = 1 \text{ en het snijpunt is } N(1, 1).$$

- c** $N(1, 1)$ is het middelpunt van de ingeschreven cirkel en de afstand tot de zijden is 1, dus de vergelijking is $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

13 Cirkels

E11 a Het middelpunt van c is $M(2, -3)$ en de straal is $\sqrt{20}$.

De loodlijn door M op l heeft de vergelijking $y = 2x + n$.

$M(2, -3)$ invullen geeft $-3 = 2 \cdot 2 + n$, dus $n = -7$.

De loodlijn is $y = 2x - 7$.

Deze loodlijn snijden met lijn l geeft

$$2x - 7 = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$$

$$2\frac{1}{2}x = 12\frac{1}{2}$$

$x = 5$, het snijpunt is $S(5, 3)$.

$$d(l, c) = MS - \sqrt{20}$$

$$= \sqrt{3^2 + 6^2} - \sqrt{20}$$

$$= \sqrt{45} - \sqrt{20}$$

$$= 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{5}$$

b Die lijn moet gaan door een punt T , dat het spiegelbeeld is van S bij spiegelen in M .

$$\overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \text{ dus } \overrightarrow{MT} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

De coördinaten van T zijn $(-1, -9)$.

De vergelijking van de gevraagde lijn is $y = -\frac{1}{2}x + n$.

$T(-1, -9)$ invullen geeft $-9 = -\frac{1}{2} \cdot -1 + n$, dus $n = -9\frac{1}{2}$.

De vergelijking is $y = -\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}$.

14 Exponentiële en logaritmische functies

Voorkennis

- V1 a** Een jaarlijkse afname met 12% betekent dat er steeds 88% overblijft van het jaar ervoor. Dus is er een constante groeifactor van 0,88.
- b** De groeifactor per jaar is 0,88 en per twee jaar is de groeifactor $0,88^2 = 0,7744$.
- c** De beginhoeveelheid is 21 000 en de groeifactor is 0,88 dus $N(t) = 21\,000 \cdot 0,88^t$.
- d** De datum 1 augustus 2018 hoort bij het tijdstip $t = 2$, dus dan is het aantal vlinders $N(2) = 21\,000 \cdot 0,88^2 \approx 16\,262$.
- e** $21\,000 \cdot 0,88^t = 10\,000$
- $$0,88^t = \frac{10}{21}$$
- $$t = \frac{\log\left(\frac{10}{21}\right)}{\log(0,88)} \approx 5,80$$
- Na ongeveer 6 jaar, dus in het jaar 2022 zal dit het geval zijn.
- V2 a** De groeifactor per half uur is $2,3^{0,5} \approx 1,517$.
De groeifactor per kwartier is $2,3^{0,25} \approx 1,231$.
- b** De groeifactor per minuut is $2,3^{\frac{1}{60}} \approx 1,01398$, want één minuut is één zestigste deel van een uur.
- V3 a** Dan is de groeifactor per jaar 1,035 en per 10 jaar is de groeifactor gelijk aan $1,035^{10} = 1,41059\dots$
De bevolking neemt in 10 jaar met ongeveer 41% toe.
- b** Per 17 uur is de groeifactor gelijk aan 1,8.
Per uur is de groeifactor dan $1,8^{\frac{1}{17}}$ en per zes uur $1,8^{\frac{6}{17}} = 1,23054\dots$
De procentuele toename per zes uur is dus ongeveer 23%.
- c** Per vijf jaar is de groeifactor gelijk aan 2.
Per jaar is de groeifactor dan $2^{\frac{1}{5}}$ en per drie jaar $2^{\frac{3}{5}} \approx 1,5157$.
- V4 a** ${}^3\log(8) + {}^3\log(5) =$
 ${}^3\log(8 \cdot 5) =$
 ${}^3\log(40)$
- c** ${}^3\log(6) + 2 \cdot {}^3\log(5) =$
 ${}^3\log(6) + {}^3\log(5^2) =$
 ${}^3\log(6 \cdot 25) =$
 ${}^3\log(150)$
- b** ${}^2\log(18) - {}^2\log(3) =$
 ${}^2\log\left(\frac{18}{3}\right) =$
 ${}^2\log(6)$
- d** $3 \cdot {}^3\log(4) - 2 \cdot {}^3\log(2) =$
 ${}^3\log(4^3) - {}^3\log(2^2) =$
 ${}^3\log(64) - {}^3\log(4) =$
 ${}^3\log\left(\frac{64}{4}\right) =$
 ${}^3\log(16)$
- V5 a** ${}^2\log\left(\frac{1}{4}\right) = {}^2\log(2^{-2}) = -2$
- b** $\frac{1}{2} \log(4) = \frac{{}^2\log(4)}{{}^2\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{-1} = -2$
- c** ${}^7\log\left(\frac{1}{49} \sqrt[4]{7}\right) = {}^7\log\left(7^{-2} \cdot 7^{\frac{1}{4}}\right) = {}^7\log\left(7^{-1\frac{3}{4}}\right) = -1\frac{3}{4}$

14 Exponentiële en logaritmische functies

$$\text{d } {}^{125}\log(25) = \frac{{}^5\log(25)}{{}^5\log(125)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{e } {}^{16}\log\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{{}^2\log\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{{}^2\log(16)} = \frac{{}^2\log\left(2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)}{{}^2\log(2^4)} = \frac{{}^2\log\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)}{{}^2\log(2^4)} = \frac{-\frac{1}{2}}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$\text{f } {}^{\frac{1}{9}}\log(27\sqrt{3}) = \frac{{}^3\log(27\sqrt{3})}{{}^3\log\left(\frac{1}{9}\right)} = \frac{{}^3\log\left(3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)}{{}^3\log(3^{-2})} = \frac{{}^3\log\left(3^{\frac{7}{2}}\right)}{{}^3\log(3^{-2})} = \frac{\frac{7}{2}}{-2} = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$$

$$\text{V6 a } 2^t = 3$$

$$t = {}^2\log(3)$$

$$\text{b } 3^{2t-1} = 7$$

$$2t - 1 = {}^3\log(7)$$

$$2t = 1 + {}^3\log(7)$$

$$t = \frac{1 + {}^3\log(7)}{2} \text{ (of } t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(7))$$

$$\text{c } 1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = 10$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = 9$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t = 3$$

$$t = {}^{\frac{1}{2}}\log(3)$$

$$\text{d } {}^2\log(3x - 2) = 4$$

$$3x - 2 = 2^4 = 16$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

$$\text{e } \log(2x) - \log(x - 1) = \log(3)$$

$$\log(2x) = \log(3) + \log(x - 1)$$

$$\log(2x) = \log(3x - 3)$$

$$2x = 3x - 3$$

$$x = 3$$

$$\text{f } 2 \cdot {}^3\log(x) + {}^3\log(4) = {}^3\log(3 - x)$$

$${}^3\log(x^2) + {}^3\log(4) = {}^3\log(3 - x)$$

$${}^3\log(4x^2) = {}^3\log(3 - x)$$

$$4x^2 = 3 - x$$

$$4x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot -3 = 49$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{49}}{8} = \frac{3}{4} \text{ of } x = \frac{-1 - \sqrt{49}}{8} = -1$$

$$x = -1 \text{ voldoet niet, dus de enige oplossing is } x = \frac{3}{4}.$$

$$\text{V7 a } f(x) = 2 \cdot 3^{2x-2}$$

$$g(x) = 18 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{2-x}$$

$$f(x) = 2 \cdot 3^{-2} \cdot (3^2)^x$$

$$g(x) = 18 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-x}$$

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 9^x$$

$$g(x) = 18 \cdot \frac{1}{81} \cdot \left(\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}\right)^x$$

$$f(x) = \frac{2}{9} \cdot 9^x$$

$$g(x) = \frac{2}{9} \cdot 9^x$$

$$\text{b } f(x) = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$$

$$g(x) = 5^{2-2x}$$

$$f(x) = 25 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^x$$

$$g(x) = 5^2 \cdot 5^{-2x}$$

$$f(x) = 25 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$$

$$g(x) = 5^2 \cdot (5^{-2})^x$$

$$g(x) = 25 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } f(x) &= 1\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} & g(x) &= 12 \cdot 2^{x-3} \\
 f(x) &= 1\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^x & g(x) &= 12 \cdot 2^{-3} \cdot 2^x \\
 f(x) &= 1\frac{1}{2} \cdot 2^x & g(x) &= 12 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2^x \\
 & & g(x) &= 1\frac{1}{2} \cdot 2^x \\
 \text{d } f(x) &= \left(\frac{1}{8}\right)^x \cdot \sqrt{8} & g(x) &= \sqrt[4]{64} \cdot 4^{-1\frac{1}{2}x} \\
 f(x) &= \sqrt{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x & g(x) &= 64^{\frac{1}{4}} \cdot (2^2)^{-1\frac{1}{2}x} \\
 & & g(x) &= (8^2)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-3x} \\
 & & g(x) &= 8^{\frac{1}{2}} \cdot (2^{-3})^x \\
 & & g(x) &= \sqrt{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x
 \end{aligned}$$

V8 a In dat geval geldt $D = 1,8$ en dat invullen in de formule geeft

$$\log(1,8) = -2 + 1,5 \cdot \log(H)$$

$$1,5 \cdot \log(H) = 2 + \log(1,8)$$

$$\log(H) = \frac{2 + \log(1,8)}{1,5} = 1,503\dots$$

$$H = 10^{1,503\dots} = 31,879\dots \text{ dus een hoogte van ongeveer 32 meter.}$$

b $D = 3,6$ invullen in de formule geeft

$$\log(3,6) = -2 + 1,5 \cdot \log(H)$$

$$1,5 \cdot \log(H) = 2 + \log(3,6)$$

$$\log(H) = \frac{2 + \log(3,6)}{1,5} = 1,704\dots$$

$$H = 10^{1,704\dots} = 50,605\dots$$

Zulke bomen zijn dus niet twee keer zo hoog, want $50,6 < 2 \times 31,9$.

c $\log(D) = -2 + 1,5 \cdot \log(H)$

$$\log(D) = \log\left(\frac{1}{100}\right) + \log(H^{1,5})$$

$$\log(D) = \log(0,01 \cdot H^{1,5})$$

$$D = 0,01 \cdot H^{1,5}$$

Daaruit volgt $p = 0,01$ en $q = 1,5$.

14.1 Een ander grondtal

intro Die waarde van k kun je bijvoorbeeld vinden door de vergelijking $3^k = 6$ op te lossen.

$$1 \text{ a } 2 = 5^{\frac{1}{5} \log(2)}$$

$$b \ f(t) = 2^t = (5^{\frac{1}{5} \log(2)})^t = 5^{t \cdot \frac{1}{5} \log(2)}$$

$$2 \text{ a } f(t) = 2 \cdot 5^t \text{ wordt } f(t) = 2 \cdot (0,5^{\frac{1}{5} \log(5)})^t \text{ ofwel}$$

$$\text{Omdat } \frac{1}{5} \log(5) = -2,321\dots \text{ is } f(t) = 2 \cdot 0,5^{\frac{1}{5} \log(5) \cdot t} \text{ dus } f(t) \approx 2 \cdot 0,5^{-2,321t}$$

$$b \ 2,8 = 10^{\log(2,8)} \approx 10^{0,45} \text{ dus } h(t) \approx 4 \cdot 10^{0,45t}$$

$$c \ 0,75 = 10^{\log(0,75)} \approx 10^{-0,12} \text{ dus } k(t) \approx 3 \cdot 10^{-0,12t}$$

$$\frac{2}{3} = 10^{\log(\frac{2}{3})} \approx 10^{-0,18} \text{ dus } m(t) \approx 5 \cdot 10^{-0,18t}$$

$$d \ g = 10^a \text{ met } a < 0 \text{ geeft } 0 < g < 1.$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

- 3 a** $f(t) = 100^{2t}$
 $f(t) = (10^2)^{2t}$
 $f(t) = 10^{4t}$
- b** $f(t) = 3 \cdot 2^{3t}$
 $f(t) = 3 \cdot 8^t$
 $f(t) = 3 \cdot 10^{\log(8) \cdot t}$
 $f(t) \approx 3 \cdot 10^{0,90t}$
- c** $f(t) = 0,7^{3t}$
 $f(t) = 10^{3 \cdot \log(0,7) \cdot t}$
 $f(t) \approx 10^{-0,46t}$
- d** $f(t) = 500 \cdot 1,95^{4t-1}$
 $f(t) = 500 \cdot 1,95^{-1} \cdot 1,95^{4t}$
 $f(t) = \frac{500}{1,95} \cdot 10^{\log(1,95^4) \cdot t}$
 $f(t) \approx 256,41 \cdot 10^{1,16t}$
- 4 a** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$
 $y = (2^{-1})^t = 2^{-t}$
 $a = -1$ en $b = 0$
- b** $y = 32 \cdot 5^t$
 $y = 2^5 \cdot 2^{2\log(5) \cdot t}$
 $y = 2^{5 + 2\log(5) \cdot t}$
 $a = 2\log(5)$ en $b = 5$
- c** $y = 4,5 \cdot 0,6^t$
 $y = 2^{2\log(4,5)} \cdot 2^{2\log(0,6) \cdot t}$
 $y = 2^{2\log(4,5) + 2\log(0,6) \cdot t}$
 $a = 2\log(0,6)$ en $b = 2\log(4,5)$
- d** $y = 3^{1-2t}$
 $y = 3^1 \cdot 3^{-2t}$
 $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t$
 $y = 2^{2\log(3)} \cdot 2^{2\log\left(\frac{1}{9}\right) \cdot t}$
 $y = 2^{2\log(3) + 2\log\left(\frac{1}{9}\right) \cdot t}$
 $a = 2\log\left(\frac{1}{9}\right)$ en $b = 2\log(3)$
- 5 a** Over de periode 1950-1975 is de groeifactor $\frac{2,7}{1,0} = 2,7$.
 De groeifactor per jaar is dan $2,7^{\frac{1}{25}} = 1,0405 \dots \approx 1,04$.
- b** De beginhoeveelheid is 1,0 en de groeifactor is 1,04 per jaar dus
 $P(t) = 1,0 \cdot 1,04^t$.
- c** Voor de verdubbelingstijd T moet dan gelden $1,04^T = 2$.

$$T = \frac{\log(2)}{\log(1,04)} \approx 17,7$$

 De verdubbelingstijd T is dus ongeveer 17,7 jaar.
- d** $P(t) = 1,0 \cdot 1,04^t$
 $P(t) = 1,0 \cdot 2^{2\log(1,04) \cdot t}$
 $P(t) \approx 1,0 \cdot 2^{0,057t}$
- e** Met behulp van de berekening van de opdrachten 5c en 5d zie je dat a en T elkaars omgekeerde zijn, ofwel $a = \frac{1}{T}$.

6 a $t = 38:2 = 19$ geeft $V = 1450 \cdot 2^{0,1 \cdot 19 - 1,5} = 1913,286 \dots$

De gewichtstoename is dus ongeveer 1913 gram.

b Eén dag is één zevende deel van een week, dus vervang t door $\frac{1}{7} t$.

De formule wordt dan $V = 1450 \cdot 2^{\frac{1}{70} t - 1,5}$ met t in dagen.

c $V = 5000$ geeft $1450 \cdot 2^{0,1t - 1,5} = 5000$.

$$2^{0,1t - 1,5} = 3,448 \dots$$

$$0,1t - 1,5 = {}^2\log(3,448 \dots)$$

$$0,1t - 1,5 = 1,785 \dots$$

$$0,1t = 3,285 \dots$$

$$t = 32,858 \dots$$

Dus na ongeveer 33 weken is het gewicht van de vrouw met 5 kg toegenomen.

d $V = 1450 \cdot 2^{0,1t - 1,5}$

$$V = 1450 \cdot (2^{0,1})^t \cdot 2^{-1,5}$$

$$V = 1450 \cdot 2^{-1,5} \cdot (2^{0,1})^t$$

$$V = \frac{1450}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[10]{2}\right)^t$$

$$a = \frac{1450}{2\sqrt{2}} \approx 512,65 \text{ en } g = \sqrt[10]{2} \approx 1,07$$

7 a $f(t) = 3^{-t+2}$

$$f(t) = 3^2 \cdot 3^{-t}$$

$$f(t) = 9 \cdot (3^{-1})^t$$

$$f(t) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

$$f(t) = 2 \cdot 6^{3t-1}$$

b $f(t) = 2 \cdot 6^{-1} \cdot 6^{3t}$

$$f(t) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (6^3)^t$$

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot 216^t$$

c $f(t) = 124 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-4t}$

$$f(t) = 124 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4t}$$

$$f(t) = 124 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right)^t$$

$$f(t) = 62 \cdot 16^t$$

d $f(t) = \frac{4^{\frac{1}{2}t}}{2^{-3-t}}$

$$f(t) = \frac{\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^t}{2^{-3-t}} = \frac{2^t}{2^{-3-t}}$$

$$f(t) = 2^{t-(-3-t)}$$

$$f(t) = 2^{2t+3}$$

$$f(t) = 2^3 \cdot (2^2)^t$$

$$f(t) = 8 \cdot 4^t$$

8 a De groeifactor per 1600 jaar is $\frac{1}{2}$.

De groeifactor per 500 jaar is $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{16}}$.

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{16}} = 80,524 \dots$$

Er is dan nog ongeveer 80,5 mg over.

b De groeifactor per jaar is $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}} = (2^{-1})^{\frac{1}{1600}} = 2^{\frac{-1}{1600}} \approx 2^{-0,00063}$

De beginhoeveelheid is 100 mg.

Een formule is $N = 100 \cdot 2^{-0,00063t}$

02 a $1,2 = 10^{\log(1,2)} \approx 10^{0,08}$

b $f(t) = 5 \cdot (10^{0,08})^t$

c De haakjes werk je weg met de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.

d $f(t) \approx 5 \cdot 10^{0,08t}$

14 Exponentiële en logaritmische functies

07 a In stap 1 is de rekenregel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$ gebruikt.

b In stap 2 is de rekenregel $g^{a \cdot b} = (g^a)^b$ gebruikt.

c $f(t) = 25 \cdot 9^t$

d $f(t) = 4^{5-t}$

$$f(t) = 4^5 \cdot 4^{-t}$$

$$f(t) = 4^5 \cdot (4^{-1})^t$$

$$f(t) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^t$$

f $f(t) = 5 \cdot 1,2^{2t+1}$

$$f(t) = 5 \cdot 1,2^1 \cdot 1,2^{2t}$$

$$f(t) = 5 \cdot 1,2^1 \cdot (1,2^2)^t$$

$$f(t) = 6 \cdot 1,44^t$$

e $f(t) = 4 \cdot 7^{2t+3}$

$$f(t) = 4 \cdot 7^3 \cdot 7^{2t}$$

$$f(t) = 4 \cdot 7^3 \cdot (7^2)^t$$

$$f(t) = 1372 \cdot 49^t$$

g $f(t) = \frac{9^{2t}}{3^{t+2}}$

$$f(t) = \frac{(3^2)^{2t}}{3^{t+2}}$$

$$f(t) = \frac{3^{4t}}{3^{t+2}}$$

$$f(t) = 3^{3t-2}$$

$$f(t) = 3^{-2} \cdot (3^3)^t$$

$$f(t) = \frac{1}{9} \cdot 27^t$$

U1 a $g(x) = 7^x$

$$g(x) = 2^{2\log(7) \cdot x}$$

$g(x) = f(2\log(7) \cdot x)$ dus een vermenigvuldiging met $\frac{1}{2\log(7)}$ ten opzichte van de y-as.

b $g(x) = b^x$

$$g(x) = a^{a\log(b) \cdot x}$$

$g(x) = f(a\log(b) \cdot x)$ dus een vermenigvuldiging met $\frac{1}{a\log(b)}$ ten opzichte van de y-as.

14.2 Het getal e

intro De grafiek van f_2 loopt daar minder steil dan de lijn $y = x + 1$.

De helling in (0, 1) is dus kleiner dan 1.

De grafieken van f_4 en f_5 lopen daar steiler dan de lijn $y = x + 1$.

De helling in (0, 1) is dan groter dan 1.

Bij de grafiek van f_3 is dat niet goed te zien. De helling van die grafiek in

(0, 1) is ongeveer $\frac{3^{0,001} - 3^0}{0,001} \approx 1,099$, dus groter dan 1.

9 a

X	Y ₁	Y ₂		
0	1	0.6931		
1	2	1.3863		
2	4	2.7726		
3	8	5.5452		
4	16	11.09		
5	32	22.181		
6	64	44.361		
7	128	88.723		
8	256	177.45		
9	512	354.89		
10	1024	709.78		
X=0				

- b In de kolom van Y2 staan de waarden van $f'(x)$. Als je een getal uit die kolom deelt door het getal eronder krijg je $\frac{1,3863}{0,6931} = \frac{2,7726}{1,3863} = \frac{5,5452}{2,7726} = \dots = 2$. De groeifactor is 2 en de beginwaarde is ongeveer 0,69.
- c $f'(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$
- d Als $g(x) = 3^x$ kun je weer een tabel maken van $g'(x)$.

X	Y1	Y2		
0	1	1.0986		
1	3	3.2958		
2	9	9.8875		
3	27	29.663		
4	81	88.988		
5	243	266.96		
6	729	800.89		
7	2187	2402.7		
8	6561	7208		
9	19683	21624		
10	59049	64872		
X=0				

Als je in kolom Y2 twee opeenvolgende getallen door elkaar deelt, komt er telkens 3 uit. Dus is het een exponentiële functie met groeifactor 3 en beginwaarde ongeveer 1,10.

$$g'(x) \approx 1,10 \cdot 3^x$$

Als $h(x) = 0,7^x$ kun je weer een tabel maken van $h'(x)$.

X	Y1	Y2		
0	1	-0.357		
1	0.7	-0.25		
2	0.49	-0.175		
3	0.343	-0.122		
4	0.2401	-0.086		
5	0.1681	-0.06		
6	0.1176	-0.042		
7	0.0824	-0.029		
8	0.0576	-0.021		
9	0.0404	-0.014		
10	0.0282	-0.01		
X=0				

Als je in kolom Y2 twee opeenvolgende getallen door elkaar deelt, komt er telkens 0,7 uit. Dus is het een exponentiële functie met groeifactor 0,7 en beginwaarde ongeveer -0,36.

$$h'(x) \approx -0,36 \cdot 0,7^x$$

$$10 \text{ a } \frac{f(x+0,001) - f(x)}{0,001} = \frac{g^{x+0,001} - g^x}{0,001} = \frac{g^x \cdot g^{0,001} - g^x}{0,001} =$$

$$\frac{g^x(g^{0,001} - 1)}{0,001} = \frac{g^{0,001} - 1}{0,001} \cdot g^x$$

b

g	2	3	0,7
c_g	0,693	1,099	-0,357

$$11 \text{ a } c_{0,4} \approx \frac{0,4^{0,001} - 0,4^0}{0,001} = -0,9158\dots$$

Er geldt $f'(x) = 3 \cdot c_{0,4} \cdot 0,4^x = 3 \cdot -0,9158\dots \cdot 0,4^x$ dus $f'(x) \approx -2,75 \cdot 0,4^x$.

- b De helling in het punt met $x = 2$ is gelijk aan $f'(2) = -2,748\dots \cdot 0,4^2 \approx -0,44$.

14 Exponentiële en logaritmische functies

12 a $c_2 \approx 0,693$ en $c_{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{0,001} - 1}{0,001} \approx -0,693$ dus

$$f''(x) \approx 0,693 \cdot 2^x + -0,693 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f''(0) \approx 0,693 \cdot 2^0 - 0,693 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \text{ oftewel de helling in dat punt is } 0.$$

b $f''(-2) \approx 0,693 \cdot 2^{-2} - 0,693 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \approx -2,60$

$$f''(3) \approx 0,693 \cdot 2^3 - 0,693 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 5,46$$

13 a $c_2 \approx 0,693$ en $c_3 \approx 1,099$ dus $c_g = 1$ geldt voor $2 < g < 3$.

b $\frac{g^{0,001} - 1}{0,001} = 1$ geeft $g^{0,001} - 1 = 0,001$

$$g^{0,001} = 1,001$$

$$g = 1,001^{\frac{1}{0,001}} \approx 2,72$$

14 a $f(x) = e^{3x}$
 $f'(x) = e^{3x} \cdot 3$
 $f''(x) = 3e^{3x}$

b $f(x) = e^{-2x}$
 $f'(x) = e^{-2x} \cdot -2$
 $f''(x) = -2e^{-2x}$

c $f(x) = e^{5-3x}$
 $f'(x) = e^{5-3x} \cdot -3$
 $f''(x) = -3e^{5-3x}$

d $f(x) = x^e + e^x$
 $f'(x) = ex^{e-1} + e^x$

e $f(x) = e^{-x^2+5x}$
 $f'(x) = e^{-x^2+5x} \cdot (-2x+5)$
 $f''(x) = (-2x+5)e^{-x^2+5x}$

f $f(x) = \frac{2e^{4x} - 3}{e^x}$
 $f(x) = 2e^{3x} - 3e^{-x}$
 $f'(x) = 2e^{3x} \cdot 3 - 3e^{-x} \cdot -1$
 $f''(x) = 6e^{3x} + 3e^{-x}$

15 a $f(x) = e^{2x} - 4e^x$
 $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x$
 $f'(1) = 2e^2 - 4e^1$

De helling in het punt met $x = 1$ is $2e^2 - 4e$.

b $f'(x) = 0$ geeft $2e^{2x} - 4e^x = 0$

$$2e^x(e^x - 2) = 0$$

$$2e^x = 0 \text{ of } e^x - 2 = 0$$

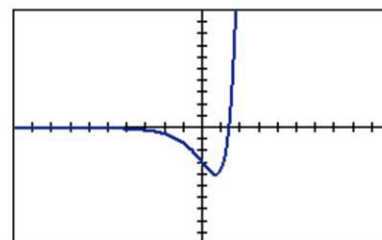
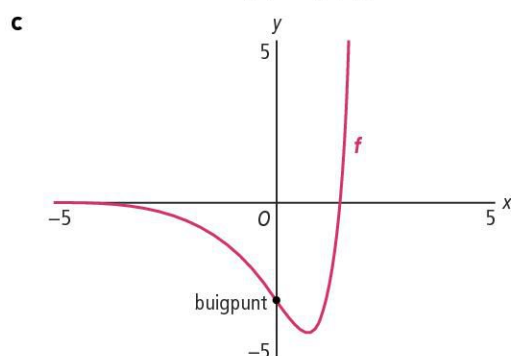
$$e^x \neq 0 \text{ dus } e^x = 2$$

$$x = {}^e\log(2)$$

Zie de plot hiernaast.

f heeft een minimum bij $x = {}^e\log(2)$.

Het minimum is $f({}^e\log(2)) = -4$.



- d** $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x$
 $f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$
 $f''(x) = 0$ geeft $4e^{2x} - 4e^x = 0$
 $4e^x(e^x - 1) = 0$
 $4e^x = 0$ of $e^x - 1 = 0$
 $e^x \neq 0$ dus $e^x = 1$
 $x = 0$ en $y = f(0) = e^{2 \cdot 0} - 4 \cdot e^0 = 1 - 4 \cdot 1 = -3$
 Het buigpunt is $(0, -3)$.
- e** $f''(0) = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} - 4 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -2$
 Een vergelijking van de raaklijn is $y = -2x - 3$.

- 16 a** $e^{3x-5} = e^2$
 $3x - 5 = 2$
 $3x = 7$
 $x = 2\frac{1}{3}$
- d** $e^{2x} - e^{x+2} = 0$
 $e^{2x} = e^{x+2}$
 $2x = x + 2$
 $x = 2$
- b** $2 - e^{2x} = 0$
 $e^{2x} = 2$
 $2x = e \log(2)$
 $x = \frac{1}{2} \cdot e \log(2)$
- e** $\frac{1}{e^{x+1}} = \sqrt{e^{2x+6}}$
 $e^{-x-1} = e^{x+3}$
 $-x - 1 = x + 3$
 $-2x = 4$
 $x = -2$
- c** $(3x - 1) \cdot e^{x-1} = 0$
 $3x - 1 = 0$ ($e^{x-1} \neq 0$)
 $3x = 1$
 $x = \frac{1}{3}$
- f** $\sqrt{e^{2x}} = e$
 $e^{2x} = e^2$
 $2x = 2$
 $x = 1$

- 17 a** De startwaarde is 1200 meter, dus $h = 1,2$. De stijgsnelheid, die gelijk is aan de helling, is 1 meter per seconde, dus 0,001 km per seconde.
 De formule is dus $h = 1,2 + 0,001t$.
- b** $h = 1,2 + 0,001t$ invullen in $p = 1000 \cdot e^{-0,14h}$ geeft
 $p = 1000 \cdot e^{-0,14(1,2+0,001t)} = 1000 \cdot e^{-0,168-0,00014t}$
- c** De ballon is op een hoogte van 1200 meter op het tijdstip $t = 0$.

De snelheid waarmee de druk afneemt is dan gelijk aan $\frac{dp}{dt}$ op $t = 0$.

$$\frac{dp}{dt} = 1000 \cdot e^{-0,168-0,00014t} \cdot -0,00014 = -0,14 \cdot e^{-0,168-0,00014t}$$

$$p'(0) = -0,14 \cdot e^{-0,168} \approx -0,12$$

De druk op de ballon neemt af met een snelheid van 0,12 hPa per seconde.

- 014 a** $g'(x) = e^x$ en $h'(x) = 6x + 5$
- b** $f'(x) = e^{3x^2+5x} \cdot (6x + 5)$ of $f'(x) = (6x + 5)e^{3x^2+5x}$
- c** $f(x) = e^{5x}$
 $f'(x) = e^{5x} \cdot 5$
 $f'(x) = 5e^{5x}$
- e** $f(x) = e^{1+2x}$
 $f'(x) = e^{1+2x} \cdot 2$
 $f'(x) = 2e^{1+2x}$
- d** $f(x) = e^{-3x}$
 $f'(x) = e^{-3x} \cdot -3$
 $f'(x) = -3e^{-3x}$
- f** $f(x) = e^{2x} - e^{-4x}$
 $f'(x) = e^{2x} \cdot 2 - e^{-4x} \cdot -4$
 $f'(x) = 2e^{2x} + 4e^{-4x}$

14 Exponentiële en logaritmische functies

g $f(x) = e^{5-7x^2}$

$$f'(x) = e^{5-7x^2} \cdot -14x$$

$$f'(x) = -14x \cdot e^{5-7x^2}$$

h $f(x) = \frac{4e^x - 3e^{6x}}{e^x}$

$$f(x) = 4 - 3e^{5x}$$

$$f'(x) = -3e^{5x} \cdot 5$$

$$f'(x) = -15e^{5x}$$

016 a $e^{2x} = 0$ heeft geen oplossingen.

b $2x = -1$

$$x = -\frac{1}{2}$$

c In stap 1 is de rekenregel $\frac{1}{g^n} = g^{-n}$ gebruikt.

d $-2x = x + 1$

$$-3x = 1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

U2 Een vergelijking van k is $y = ax + b$. De lijn k gaat door $(-1, 0)$.

$x = -1$ en $y = 0$ invullen geeft $0 = -a + b$ dus $b = a$.

$$f(x) = e^{3x+1} \text{ geeft } f'(x) = 3e^{3x+1}$$

In het raakpunt (p, q) is $f'(p) = 3e^{3p+1}$ dus $a = 3e^{3p+1}$ ($= b$)

De vergelijking van k wordt $y = 3e^{3p+1} \cdot x + 3e^{3p+1}$

Het raakpunt (p, q) ligt op de grafiek van f dus geldt $q = f(p) = e^{3p+1}$

$x = p$ en $y = e^{3p+1}$ invullen bij $y = 3e^{3p+1} \cdot x + 3e^{3p+1}$ geeft

$$e^{3p+1} = 3e^{3p+1} \cdot p + 3e^{3p+1}$$

Beide kanten delen door e^{3p+1} geeft $1 = 3p + 3$.

$$3p = -2$$

$$p = -\frac{2}{3}$$

Een vergelijking van k is $y = 3e^{-1} \cdot x + 3e^{-1}$.

U3 $3 + 4e^{\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$

$$3e^{\frac{1}{2}x} + 4e^x = 1$$

$$4e^x + 3e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$$

Stel $e^{\frac{1}{2}x} = p$ dan wordt de vergelijking $4p^2 + 3p - 1 = 0$.

$$D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot -1 = 25$$

$$p = \frac{-3 + \sqrt{25}}{8} = \frac{1}{4} \text{ of } p = \frac{-3 - \sqrt{25}}{8} = -1$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4} \text{ of } e^{\frac{1}{2}x} = -1 \text{ (voldoet niet)}$$

$$\frac{1}{2}x = {}^e\log\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x = 2 \cdot {}^e\log\left(\frac{1}{4}\right) = {}^e\log\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$f'(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} \text{ en } g'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\text{In } S \text{ is } f'\left({}^e\log\left(\frac{1}{16}\right)\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ en } g'\left({}^e\log\left(\frac{1}{16}\right)\right) = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$$

$$\frac{1}{2} \cdot -2 = -1, \text{ dus de raaklijnen snijden elkaar loodrecht.}$$

14.3 Natuurlijke logaritme

intro t bereken je met de inverse van e^t dus met ${}^e\log(t)$.

18 a De inverse van $h(x) = g^x$ is $h^{inv}(x) = {}^g\log(x)$ dus de inverse van $f(x) = e^x$ is $f^{inv}(x) = {}^e\log(x)$.

b Van de grafiek van f is de horizontale asymptoot de lijn $y = 0$.

Van de grafiek van f^{inv} is de verticale asymptoot de lijn $x = 0$.

c Het domein van f^{inv} is het bereik van f en dat is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

19 a $\ln(3x) = 2$

$$3x = e^2$$

$$x = \frac{1}{3}e^2$$

b $7 - 2\ln(x + 4) = 1$

$$-2 \cdot \ln(x + 4) = -6$$

$$\ln(x + 4) = 3$$

$$x + 4 = e^3$$

$$x = e^3 - 4$$

c $3\ln(\sqrt{x}) - 1 = 5$

$$3\ln(\sqrt{x}) = 6$$

$$\ln(\sqrt{x}) = 2$$

$$\sqrt{x} = e^2$$

$$x = e^4$$

d $\ln(3x) \cdot \ln(x - 2) = 0$

$$\ln(3x) = 0 \text{ of } \ln(x - 2) = 0$$

$$3x = e^0 = 1 \text{ of } x - 2 = e^0 = 1$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ of } x = 3$$

e $\ln^2(5x - 2) = 9$

$$\ln(5x - 2) = -3 \text{ of } \ln(5x - 2) = 3$$

$$5x - 2 = e^{-3} \text{ of } 5x - 2 = e^3$$

$$5x = 2 + e^{-3} \text{ of } 5x = 2 + e^3$$

$$x = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}e^{-3} \text{ of } x = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}e^3$$

f $\ln(x^2) = 3$

$$x^2 = e^3$$

$$x = -\sqrt{e^3} \text{ of } x = \sqrt{e^3}$$

$$x = -e^{\frac{1}{2}} \text{ of } x = e^{\frac{1}{2}}$$

g $\ln(\ln(x)) = 2$

$$\ln(x) = e^2$$

$$x = e^{e^2}$$

h $\ln^2(x) - 3\ln(x) - 10 = 0$

$$\text{stel } \ln(x) = p$$

$$p^2 - 3p - 10 = 0$$

$$(p - 5)(p + 2) = 0$$

$$p = 5 \text{ of } p = -2$$

$$\ln(x) = 5 \text{ of } \ln(x) = -2$$

$$x = e^5 \text{ of } x = e^{-2}$$

20 a $e^{3x} \cdot e^{x+2} = 1$

$$e^{4x+2} = 1$$

$$4x + 2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

b $e^{5x} \cdot \ln(5x) = 0$

$$e^{5x} = 0 \text{ (vervalt) of } \ln(5x) = 0$$

$$5x = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

c $e^{2x} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$

$$e^{2x} = e^{-1\frac{1}{2}}$$

$$2x = -1\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

$$x = \ln\left(8^{\frac{1}{3}}\right) = \ln(2)$$

d $8e^{3x} = 64$

$$e^{3x} = 8$$

$$3x = \ln(8)$$

$$x = \frac{1}{3}\ln(8)$$

$$x = \ln\left(8^{\frac{1}{3}}\right) = \ln(2)$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

e $\ln(3-x) - \ln(2x) = -\ln(4)$

$$\ln\left(\frac{3-x}{2x}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{3-x}{2x} = \frac{1}{4}$$

$$12 - 4x = 2x$$

$$-6x = -12$$

$$x = 2$$

f $\ln(x+1) = \frac{1}{2}\ln(x+3)$

$$2\ln(x+1) = \ln(x+3)$$

$$\ln(x+1)^2 = \ln(x+3)$$

$$(x+1)^2 = x+3$$

$$x^2 + 2x + 1 = x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 1$$

$$x = -2 \text{ voldoet niet dus } x = 1$$

21 a Voor de functie $f(x) = e^x$ geldt $f'(x) = e^x$.

De richtingscoëfficiënt in het punt $P(a, b)$ is dus $f'(a) = e^a$.

b In de grafiek lees je af dat de raaklijn aan g in het punt $Q(b, a)$ gelijk is aan

$$g'(b) = \frac{1}{e^a}$$

c Omdat het punt $P(a, b)$ een punt is van de grafiek van $f(x) = e^x$ is $e^a = b$.

d Invullen van $e^a = b$ in $g'(b) = \frac{1}{e^a}$ geeft $g'(b) = \frac{1}{b}$

Ofwel de afgeleide van $g(x) = \ln(x)$ is $g'(x) = \frac{1}{x}$

22 a Er geldt $g'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$, dus $g'(2) = \frac{4}{2} = 2$.

b $g'(x) = \frac{1}{2}$ geeft $\frac{4}{x} = \frac{1}{2}$

$$x = 8 \text{ en } y = g(8) = 4 \cdot \ln(8) - 3.$$

Dus in het punt $(8, 4\ln(8) - 3)$ is de helling van de grafiek $\frac{1}{2}$.

23 a $f(x) = \ln(5x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{5x} \cdot 5$ (kettingregel) ofwel $f'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \ln(x)$ geeft $g'(x) = \frac{1}{x}$ dus $f'(x)$ en $g'(x)$ zijn hetzelfde.

b $f(x) = \ln(5x)$ is te schrijven als $f(x) = \ln(5) + \ln(x)$.

$\ln(5)$ is een constante, dus de afgeleide van $f(x) = \ln(5) + \ln(x)$ is hetzelfde als de afgeleide van $g(x) = \ln(x)$.

24 a $f(x) = \ln(x^3)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 \text{ ofwel } f'(x) = \frac{3}{x}$$

b $f(x) = 3\ln(x)$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x}$ ofwel $f'(x) = \frac{3}{x}$

c $g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{5-2x}\right)$ is te schrijven als $g(x) = \ln(x+3) - \ln(5-2x)$.

d $g'(x) = \frac{1}{x+3} \cdot 1 - \frac{1}{5-2x} \cdot -2$ ofwel $g'(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{2}{5-2x}$

25 a $f(x) = \ln(7x)$

$$f'(x) = \frac{1}{7x} \cdot 7$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

b $g(x) = \ln(7x + 2)$

$$g'(x) = \frac{1}{7x + 2} \cdot 7$$

$$g'(x) = \frac{7}{7x + 2}$$

c $h(x) = \ln(x^2)$

$$h(x) = 2\ln(x)$$

$$h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = \frac{2}{x}$$

d $j(x) = \ln^2(x)$

$$j'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$j'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

e $k(x) = \ln(\sqrt{x})$

$$k(x) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

$$k'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

f $l(x) = \ln(\ln(x))$

$$l'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$l'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

g $n(x) = \ln\left(\frac{4}{x+5}\right)$

$$n(x) = \ln(4) - \ln(x+5)$$

$$n'(x) = \frac{-1}{x+5}$$

h $p(x) = \ln(x(x+3))$

$$p(x) = \ln(x) + \ln(x+3)$$

$$p'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}$$

26 a $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x$ ofwel $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 1 = 4x$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} \text{ of } x = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$x \approx 3,73 \text{ of } x \approx 0,27$$

b $f'(2) = \frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5}$ dus een vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{4}{5}x + b$.

$$f(2) = \ln(5)$$

$$x = 2 \text{ en } y = \ln(5) \text{ invullen bij } y = \frac{4}{5}x + b \text{ geeft } \ln(5) = \frac{4}{5} \cdot 2 + b \text{ ofwel}$$

$$b = \ln(5) - 1\frac{3}{5}.$$

$$\text{Een vergelijking van de raaklijn is } y = \frac{4}{5}x + \ln(5) - 1\frac{3}{5}.$$

019 a $5\ln(2x - 1) = 10$

$$\ln(2x - 1) = 2$$

b $2x - 1 = e^2$

$$2x = 1 + e^2$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2$$

c $\ln(5x) = 4$

$$5x = e^4$$

$$x = \frac{1}{5}e^4$$

g $\ln^2(x) - 4\ln(x) = 0$

$$\ln(x) \cdot (\ln(x) - 4) = 0$$

$$\ln(x) = 0 \text{ of } \ln(x) = 4$$

$$x = e^0 = 1 \text{ of } x = e^4$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

d $2 + \ln(x+1) = 7$

$$\ln(x+1) = 5$$

$$x+1 = e^5$$

$$x = -1 + e^5$$

h $\ln^2(3x+1) = 16$

$$\ln(3x+1) = 4 \text{ of } \ln(3x+1) = -4$$

$$3x+1 = e^4 \text{ of } 3x+1 = e^{-4}$$

$$3x = -1 + e^4 \text{ of } 3x = -1 + e^{-4}$$

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^4 \text{ of } x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-4}$$

e $2\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = -1$

$$2\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\frac{1}{x} = e \text{ dus } x = \frac{1}{e}$$

i $\ln(\ln(x)) = 0$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

f $\ln(x-1) \cdot \ln(4x) = 0$

$$\ln(x-1) = 0 \text{ of } \ln(4x) = 0$$

$$x-1 = 1 \text{ of } 4x = 1$$

$$x = 2 \text{ of } x = \frac{1}{4}$$

j $\ln^2(x) = \ln(x)$

$$\ln(x) = 1 \text{ of } \ln(x) = 0$$

$$x = e \text{ of } x = 1$$

024 a Dat volgt uit de rekenregel ${}^s\log(a^p) = p \cdot {}^s\log(a)$.

b $g(x) = \ln(x^2(2-5x))$ is te schrijven als $g(x) = \ln(x^2) + \ln(2-5x)$.

Je gebruikt de rekenregel ${}^s\log(a \cdot b) = {}^s\log(a) + {}^s\log(b)$.

c $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ is te schrijven als $h(x) = \ln(x) - \ln(1-x)$.

U4 a $(1, 0)$ wordt $(b, 0)$, $(a, 0)$ wordt $(ab, 0)$, $(1, 1)$ wordt $(b, \frac{1}{b})$ en $(a, \frac{1}{a})$ wordt $(ab, \frac{1}{ab})$.

b $f(b) = \frac{1}{b}$ dus $(b, \frac{1}{b})$ ligt op de grafiek van f .

$f(ab) = \frac{1}{ab}$ dus $(ab, \frac{1}{ab})$ ligt op de grafiek van f .

c $O(b)$ is de oppervlakte van het gebied onder de grafiek van f tussen de lijnen $x=1$ en $x=b$.

H is het gebied onder de grafiek van f tussen de lijnen $x=b$ en $x=ab$.

$O(ab)$ is de oppervlakte van het gebied onder de grafiek van f tussen de lijnen $x=1$ en $x=ab$.

Er geldt: $O(b) + \text{opp } H = O(ab)$.

Ook is $\text{opp } H = \text{opp } G = O(a)$, dus is $O(a) + O(b) = O(ab)$.

d Deze eigenschap geldt voor logaritmische functies.

14.4 Afgeleide functies

intro Bereken bij welke waarde van x de functie $h(x) = x^2 + 4x + 6$ een minimum heeft. Dat kan met de afgeleide van h . Omdat $k(x) = {}^2\log(x)$ een stijgende functie is, heeft $g(x) = k(h(x))$ bij dezelfde waarde van x een minimum.

Je kunt ook $g(x)$ schrijven als $g(x) = \frac{\ln(x^2 + 4x + 6)}{\ln(2)}$ en dan is g wel te

differentiëren. Je gebruikt dus de rekenregel ${}^s\log(m) = \frac{{}^n\log(m)}{{}^n\log(g)}$

$$27 \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(2)}$$

$$28 \quad a \quad f(x) = {}^6\log(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(6)}$$

$$d \quad f(x) = \log(2x - 4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(2x - 4) \cdot \ln(10)} \cdot 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x - 2) \cdot \ln(10)}$$

$$b \quad f(x) = {}^6\log(5x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{5x \cdot \ln(6)} \cdot 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(6)}$$

$$e \quad f(x) = \ln\left(\frac{5}{x}\right)$$

$$f(x) = \ln(5) - \ln(x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$c \quad f(x) = {}^2\log(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln(2)} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln(2)}$$

$$f \quad f(x) = {}^3\log\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$f(x) = {}^3\log(2) - {}^3\log(x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x \cdot \ln(3)}$$

$$29 \quad a \quad {}^2\log(5 - x) = 2 - {}^2\log(x)$$

$${}^2\log(5 - x) + {}^2\log(x) = 2$$

$${}^2\log(5x - x^2) = 2$$

$$5x - x^2 = 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 4 \text{ (beide waarden voldoen)}$$

$$\text{Bij } x = 1 \text{ hoort } y = {}^2\log(5 - 1) = {}^2\log 4 = 2$$

$$\text{Bij } x = 4 \text{ hoort } y = {}^2\log(5 - 4) = {}^2\log 1 = 0$$

$$\text{De snijpunten zijn } A(1, 2) \text{ en } B(4, 0).$$

$$b \quad \text{De lengte van het lijnstuk } CD \text{ is gelijk aan}$$

$$d(p) = y_C - y_D$$

$$d(p) = {}^2\log(5 - p) - (2 - {}^2\log(p))$$

$$d(p) = {}^2\log(5 - p) - 2 + {}^2\log(p)$$

$$d(p) = {}^2\log((5 - p) \cdot p) - 2$$

$$d(p) = {}^2\log(5p - p^2) - 2$$

$$\text{De lengte van lijnstuk } CD \text{ is maximaal als } d'(p) = 0.$$

$$d'(p) = \frac{1}{(5p - p^2) \cdot \ln(2)} \cdot (5 - 2p)$$

$$d'(p) = 0 \text{ geeft } 5 - 2p = 0$$

$$2p = 5 \text{ dus } p = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Voor } p = 2\frac{1}{2} \text{ is de lengte van lijnstuk } CD \text{ maximaal.}$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

30 a $f(x) = 3^x = e^{\ln(3) \cdot x}$

b $f'(x) = e^{\ln(3) \cdot x} \cdot \ln(3)$ dus $f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$

c $f(x) = 2^{x-1} = (e^{\ln(2)})^{x-1} = e^{(x-1) \cdot \ln(2)}$

$f'(x) = e^{(x-1) \cdot \ln(2)} \cdot \ln(2)$ ofwel $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{x-1}$

d $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^x = 3 \cdot e^{x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

$g'(x) = 3 \cdot e^{x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ofwel $g'(x) = 3 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

31 a $f(x) = 4^x$

$f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x$

e $k(x) = 2^{-3x}$

$k'(x) = \ln(2) \cdot 2^{-3x} \cdot -3$

$k'(x) = -3\ln(2) \cdot 2^{-3x}$

b $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$g'(x) = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

f $m(x) = 3 \cdot 4^{2x+1}$

$m'(x) = 3 \cdot \ln(4) \cdot 4^{2x+1} \cdot 2$

$m'(x) = 6\ln(4) \cdot 4^{2x+1}$

c $h(x) = 7 \cdot 0,45^x$

$h'(x) = 7 \cdot \ln(0,45) \cdot 0,45^x$

g $n(x) = 3x^2 + 5^x$

$n'(x) = 6x + \ln(5) \cdot 5^x$

d $j(x) = e^{-3x}$

$j'(x) = -3e^{-3x}$

h $p(x) = 5^{x^2-2x}$

$p'(x) = \ln(5) \cdot 5^{x^2-2x} \cdot (2x-2)$

$p'(x) = \ln(5) \cdot (2x-2) \cdot 5^{x^2-2x}$

32 a $f(x) = 2^{x^3-2x^2}$

$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{x^3-2x^2} \cdot (3x^2-4x)$ ofwel $f'(x) = \ln(2) \cdot (3x^2-4x) \cdot 2^{x^3-2x^2}$

b $f'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 4x = 0$.

$x(3x-4) = 0$

$x = 0$ of $x = 1\frac{1}{3}$

De x -coördinaten van de toppen zijn $x = 0$ en $x = 1\frac{1}{3}$.

33 a Er blijft dan per jaar $100 - 0,012 = 99,988$ procent over.

De groeifactor is dan 0,99988.

b Als je de hoeveelheid C-14 na t jaar aangeeft met K , dan geldt

$K = 0,14 \cdot 0,99988^t$.

c De afnamesnelheid is gelijk aan de afgeleide waarde op het tijdstip $t = 50$.

$\frac{dK}{dt} = 0,14 \cdot \ln(0,99988) \cdot 0,99988^t$

Op $t = 50$ is $\frac{dK}{dt} = 0,14 \cdot \ln(0,99988) \cdot 0,99988^{50} \approx -0,0000167$.

De gevraagde afnamesnelheid is ongeveer 0,000 0167 milligram per jaar.

d 2 procent C-14 geeft de vergelijking $100 \cdot 0,99988^t = 2$.

$0,99988^t = 0,02$

$t = {}_{0,99988} \log(0,02) \approx 32600$.

Het fossiel is ongeveer 32 600 jaar oud.

34 a $t = 0$ geeft $P = \frac{558}{1 + 54,8 \cdot 1} = 10$.

Er zijn 10 korenwolven uitgezet in het gebied.

b Als t heel groot wordt, nadert $e^{-0,462t}$ naar 0. P stijgt dan naar $\frac{558}{1 + 0} = 558$.

$$\text{c } P = 100 \text{ geeft } \frac{558}{1 + 54,8e^{-0,462t}} = 100$$

$$558 = 100(1 + 54,8e^{-0,462t})$$

$$5,58 = 1 + 54,8e^{-0,462t}$$

$$54,8e^{-0,462t} = 4,58$$

$$e^{-0,462t} = 0,083\dots$$

$$-0,462t = \ln(0,083\dots) = -2,481\dots$$

$$t \approx 5,37$$

Na 6 jaar zijn er voor het eerst meer dan 100 korenwolven.

$$\text{d } P = 558(1 + 54,8e^{-0,462t})^{-1}$$

$$\frac{dP}{dt} = -558(1 + 54,8e^{-0,462t})^{-2} \cdot 54,8 \cdot e^{-0,462t} \cdot -0,462$$

$$\frac{dP}{dt} \approx \frac{14127,22e^{-0,462t}}{(1 + 54,8e^{-0,462t})^2}$$

$$\text{e } e^{-0,462t} > 0 \text{ voor elke waarde van } t, \text{ dus } \frac{dP}{dt} > 0 \text{ voor elke waarde van } t, \text{ dus stijgt } P \text{ overall.}$$

f Met de rekenmachine:

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{14127,22e^{-0,462x}}{(1 + 54,8e^{-0,462x})^2} \text{ (uit) en } y_2 = \frac{d}{dx}(y_1)_{x=x} \text{ (aan)}$$

Venster: $8 \leq x \leq 10$, $-1 \leq y \leq 1$

Optie: nulpunt geeft $x \approx 8,67$.

Het buigpunt zit bij $t \approx 8,67$. P is dan ongeveer 279.

Dus het buigpunt ligt inderdaad bij 279 korenwolven.

029 a C ligt op de lijn $x = p$.

$$\text{b } y_C = f(p) = {}^5\log(5p)$$

c De x -coördinaat van D is ook p en $y_D = g(p) = 2 - {}^5\log(6 - p)$, dus de coördinaten zijn $D(p, 2 - {}^5\log(6 - p))$.

$$\text{d } L(p) = CD = y_C - y_D = {}^5\log(5p) - (2 - {}^5\log(6 - p))$$

$$\text{ofwel } L(p) = {}^5\log(5p) - 2 + {}^5\log(6 - p)$$

$$\text{e } L'(p) = \frac{1}{\ln(5) \cdot 5p} \cdot 5 + \frac{1}{\ln(5) \cdot (6 - p)} \cdot -1 \text{ ofwel}$$

$$L'(p) = \frac{1}{\ln(5) \cdot p} - \frac{1}{\ln(5) \cdot (6 - p)}$$

$$L'(p) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{\ln(5) \cdot p} - \frac{1}{\ln(5) \cdot (6 - p)} = 0$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{6 - p}$$

$$p = 6 - p$$

$$2p = 6$$

$$p = 3$$

Voor $p = 3$ is de lengte van lijnstuk CD maximaal.

14 Exponentiële en logaritmische functies

U5 $f_a(e) = {}^a\log(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}$ dus $P\left(e, \frac{1}{\ln(a)}\right)$.

$$f'_a(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

In P is $f'_a(e) = \frac{1}{\ln(a) \cdot e}$ dus een vergelijking van de raaklijn in P is

$$y = \frac{1}{\ln(a) \cdot e} x + b.$$

$x = e$ en $y = \frac{1}{\ln(a)}$ invullen geeft $\frac{1}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a) \cdot e} \cdot e + b$ dus $b = 0$.

Dus de raaklijn gaat door de oorsprong.

U6 a $L(p) = 2^p - {}^3\log(p)$

$$L'(p) = \ln(2) \cdot 2^p - \frac{1}{\ln(3) \cdot p}$$

$L'(p) = 0$ oplossen met de rekenmachine:

Invoer: $y_1 = \ln(2) \cdot 2^x - \frac{1}{\ln(3) \cdot x}$

Venster: standaard

Optie: nulpunt geeft $x \approx 0,77$.

De lengte van lijnstuk AB is minimaal voor $p \approx 0,77$.

b $C: y = q$ dus $2^x = q$

$x = {}^2\log(q)$ en punt C heeft coördinaten $({}^2\log(q), q)$

$D: y = q$ dus ${}^3\log(x) = q$

$x = 3^q$ en punt D heeft coördinaten $(3^q, q)$

$$L(q) = 3^q - {}^2\log(q)$$

$$L'(q) = \ln(3) \cdot 3^q - \frac{1}{\ln(2) \cdot q}$$

$L'(q) = 0$ oplossen met de rekenmachine:

Invoer: $y_1 = \ln(3) \cdot 3^x - \frac{1}{\ln(2) \cdot x}$

Venster: standaard

Optie: nulpunt geeft $x \approx 0,65$.

De lengte van lijnstuk CD is minimaal voor $q \approx 0,65$.

14.5 Primitieven

intro Dat kan vast wel exact. De afgeleide van een e-macht is gemakkelijk, dus een primitieve zal ook wel niet moeilijk zijn.

35 a Als $F_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$ dan is $F'_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cdot a = e^{ax}$ dus $F'_a(x) = f_a(x)$.

En daarmee is F_a een primitieve van f_a .

b Dan is $e^a = 2$, dus $a = \ln(2)$.

c Een primitieve is $F_a(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x$

$$36 \text{ a } \begin{cases} h(x) = \ln(x) & (x > 0) \\ h(x) = \ln(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{b } h'(x) = \frac{1}{x} \text{ voor } x > 0$$

$$\text{c } h'(x) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x} \text{ voor } x < 0$$

$$37 \text{ a } f(x) = 10^x$$

$$F(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot 10^x$$

$$\text{b } g(x) = \frac{-4}{x}$$

$$g(x) = -4 \cdot \frac{1}{x}$$

$$G(x) = -4 \cdot \ln|x|$$

$$\text{c } h(x) = \frac{3}{5x}$$

$$h(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x}$$

$$H(x) = \frac{3}{5} \cdot \ln|x|$$

$$\text{d } k(x) = \frac{1}{4x-3}$$

$$K(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln|4x-3|$$

$$38 \text{ a } f(x) = e^{-3x+5}$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x+5}$$

$$\text{b } f(x) = e^{\ln(x)}$$

$$f(x) = x \quad (x > 0)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (x > 0)$$

$$\text{c } f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 + 4x}{2x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} + \frac{2}{x}$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3\frac{1}{2}x + 2\ln|x|$$

$$\text{e } l(x) = 12 \cdot 5^{7x}$$

$$L(x) = 12 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^{7x}$$

$$L(x) = \frac{12}{7\ln(5)} \cdot 5^{7x}$$

$$\text{f } m(x) = \frac{1}{3x^2}$$

$$m(x) = \frac{1}{3}x^{-2}$$

$$M(x) = -\frac{1}{3}x^{-1}$$

$$M(x) = -\frac{1}{3x}$$

$$\text{g } n(x) = \frac{5}{3-2x}$$

$$N(x) = 5 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \ln|3-2x|$$

$$N(x) = -2\frac{1}{2} \ln|3-2x|$$

$$\text{h } p(x) = 3 \cdot 7^{5-x} + 2$$

$$P(x) = -3 \cdot \frac{1}{\ln(7)} \cdot 7^{5-x} + 2x$$

$$P(x) = -\frac{3}{\ln(7)} \cdot 7^{5-x} + 2x$$

$$\text{d } f(x) = e^{2x}(1 - e^{-2x})$$

$$f(x) = e^{2x} \cdot 1 - e^{2x} \cdot e^{-2x} = e^{2x} - 1$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x$$

$$\text{e } f(x) = 3^{2x-1} + x^3$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^{2x-1} + \frac{1}{4}x^4$$

$$F(x) = \frac{1}{2\ln(3)} \cdot 3^{2x-1} + \frac{1}{4}x^4$$

$$\text{f } f(x) = \frac{3}{e^{x-4}}$$

$$f(x) = 3e^{-x+4}$$

$$F(x) = -3e^{-x+4}$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

39 Er geldt $F'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$ als $ax > 0$ en $F'(x) = \frac{1}{-ax} \cdot -a = \frac{1}{x}$ als $ax < 0$.

Of: $F(x) = \ln|ax| = \ln|a| + \ln|x|$ dus $F'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

40 $\int_0^3 \frac{8}{x+4} dx = \left[8 \cdot \ln|x+4| \right]_0^3 = 8 \cdot \ln(7) - 8 \cdot \ln(4) = 8 \cdot \ln\left(\frac{7}{4}\right)$

De oppervlakte is gelijk aan $8 \ln\left(1\frac{3}{4}\right)$.

41 a $3 - \frac{2}{2x+5} = \frac{3(2x+5)}{2x+5} - \frac{2}{2x+5} = \frac{6x+15-2}{2x+5} = \frac{6x+13}{2x+5}$

Dus f en g zijn hetzelfde.

b Het nulpunt van f volgt uit $6x+13=0$.

$$6x = -13$$

$$x = -2\frac{1}{6}$$

$$\int_{-2\frac{1}{6}}^0 f(x) dx = \int_{-2\frac{1}{6}}^0 \left(3 - \frac{2}{2x+5} \right) dx = \left[3x - \ln|2x+5| \right]_{-2\frac{1}{6}}^0 = -\ln(5) - \left(-6\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right) =$$

$$6\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln(5) = 6\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{15}\right)$$

De oppervlakte van G is gelijk aan $6\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{15}\right)$.

42 De nulpunten van f volgen uit $2x + \frac{2}{x} - 5 = 0$.

$$\frac{2}{x} = -2x + 5$$

$$2 = -2x^2 + 5x$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$$

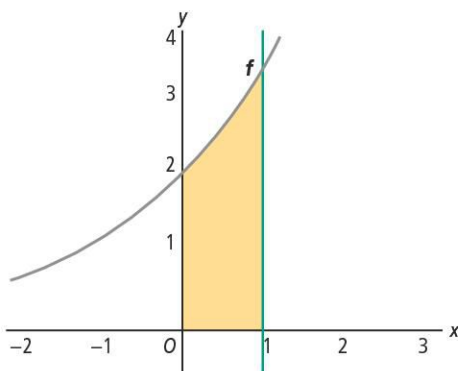
$$x = 2 \text{ of } x = \frac{1}{2}$$

$$opp = -\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2x + \frac{2}{x} - 5 \right) dx = -\left[x^2 + 2\ln|x| - 5x \right]_{\frac{1}{2}}^2 =$$

$$-(4 + 2\ln(2) - 10) + \left(\frac{1}{4} + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2\frac{1}{2} \right) = 6 - 2\ln(2) + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2\frac{1}{4}$$

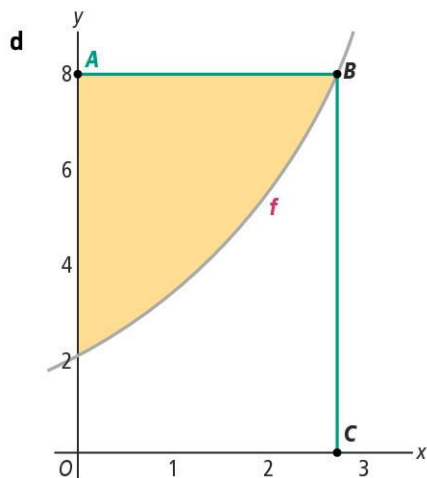
De oppervlakte is $3\frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1}{16}\right)$.

43 a b



$$\text{c} \quad \int_0^1 2e^{0,5x} dx = \left[4e^{0,5x} \right]_0^1 = 4e^{0,5} - 4e^0 = 4e^{0,5} - 4$$

De oppervlakte van A_1 is $4e^{0,5} - 4$ ($= 4\sqrt{e} - 4$).



Het gaat om de oppervlakte van het geel gekleurde gebied.

Eerst de coördinaten van punt C berekenen.

$$2e^{0,5x} = 8$$

$$e^{0,5x} = 4$$

$$0,5x = \ln(4)$$

$x = 2 \ln(4)$, de coördinaten van punt C zijn $(2 \ln(4), 0)$.

$$\int_0^{2 \ln(4)} (8 - 2e^{0,5x}) dx = \left[8x - 4e^{0,5x} \right]_0^{2 \ln(4)} = (16 \ln(4) - 16) - (0 - 4e^0)$$

De oppervlakte is $16 \ln(4) - 12$.

44 $f(x) = g(x)$ geeft $e^{2x} + e = e^{2x} + e^{-\frac{1}{2}x}$.

$$e = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$1 = -\frac{1}{2}x$$

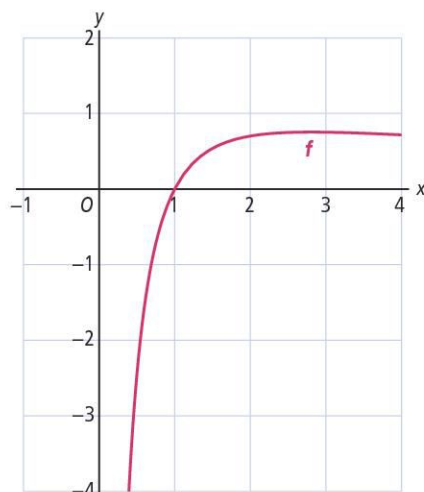
$$x = -2$$

$$\int_{-2}^0 ((e^{2x} + e) - (e^{2x} + e^{-\frac{1}{2}x})) dx = \int_{-2}^0 (e - e^{-\frac{1}{2}x}) dx = \left[ex + 2e^{-\frac{1}{2}x} \right]_{-2}^0 =$$

$$(0 + 2e^0) - (-2e + 2e^1) = 2 + 2e - 2e$$

De oppervlakte is 2.

45 a



14 Exponentiële en logaritmische functies

b $F'(x) = 2 \cdot (\ln(x))^1 \cdot \frac{1}{x}$ ofwel $F'(x) = \frac{2 \cdot \ln(x)}{x}$

Omdat $F'(x) = f(x)$ is F een primitieve van f .

c $\int_1^e f(x) dx = [\ln^2(x)]_1^e = \ln^2(e) - \ln^2(1) = 1^2 - 0 = 1$

De oppervlakte is 1.

d Een primitieve van $g(x) = \frac{\ln^5(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^5$ is $G(x) = \frac{1}{6} \cdot (\ln(x))^6$ ofwel $G(x) = \frac{1}{6} \cdot \ln^6(x)$.

037 a Een primitieve van $f(x) = 2^x$ is $F(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x$

b Een primitieve van $f(x) = 2^{4x-1}$ is $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{4x-1}$ ofwel $F(x) = \frac{1}{4 \ln(2)} \cdot 2^{4x-1}$

c Een primitieve van $f(x) = \frac{5}{x}$ is $F(x) = 5 \ln|x|$

d Een primitieve van $f(x) = \frac{5}{7x+2}$ is $F(x) = \frac{1}{7} \cdot 5 \cdot \ln|7x+2|$ ofwel $F(x) = \frac{5}{7} \ln|7x+2|$

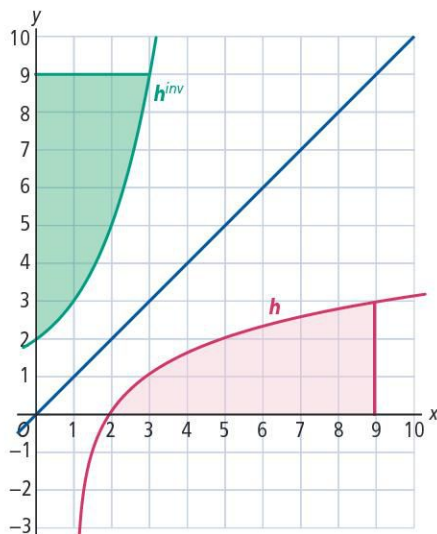
U7 a $3^x = 3$ geeft $x = 1$.

$$\int_0^1 (3 - 3^x) dx = \left[3x - \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x \right]_0^1 = \left(3 - \frac{3}{\ln(3)} \right) - \left(0 - \frac{1}{\ln(3)} \right) = 3 - \frac{2}{\ln(3)}$$

De oppervlakte van het blauwe gebied is $3 - \frac{2}{\ln(3)}$.

b De grafieken van de functies f en g zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$. Het gevolg is dat het rode en het blauwe gebied ook elkaars spiegelbeeld zijn en dus dezelfde oppervlakte hebben.

c



Je spiegelt de grafiek van h in de lijn $y = x$. Het spiegelbeeld is de grafiek van $h^{inv}(x) = 1 + 2^x$.

De oppervlakte van het gevraagde gebied is gelijk aan die van het gebied dat wordt ingesloten door de y -as, de grafiek van h^{inv} en de lijn $y = 9$.

$$\int_0^3 (9 - (1 + 2^x)) dx = \int_0^3 (8 - 2^x) dx = \left[8x - \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x \right]_0^3 =$$

$$\left(24 - \frac{8}{\ln(2)} \right) - \left(0 - \frac{1}{\ln(2)} \right) = 24 - \frac{7}{\ln(2)}$$

De oppervlakte is $24 - \frac{7}{\ln(2)}$

U8 a $\frac{G}{1 + (G-1) \cdot g^t} = \frac{1}{2}G$

$$1 + (G-1) \cdot g^t = 2$$

$$(G-1) \cdot g^t = 1$$

$$g^t = \frac{1}{G-1}$$

$$t = {}^g\log\left(\frac{1}{G-1}\right)$$

b $N = \frac{G}{1 + (G-1) \cdot g^t}$ is te schrijven als $N = G \cdot (1 + (G-1) \cdot g^t)^{-1}$

$$\frac{dN}{dt} = -1 \cdot G \cdot (1 + (G-1) \cdot g^t)^{-2} \cdot (G-1) \cdot \ln(g) \cdot g^t$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{-G \cdot (G-1) \cdot \ln(g) \cdot g^t}{(1 + (G-1) \cdot g^t)^2}$$

Als $N = \frac{1}{2}G$ is $g^t = \frac{1}{G-1}$ (zie opdracht a).

Substitutie geeft $\frac{dN}{dt} = \frac{-G \cdot (G-1) \cdot \ln(g) \cdot \frac{1}{G-1}}{\left(1 + (G-1) \cdot \frac{1}{G-1}\right)^2}$ ofwel $\frac{dN}{dt} = \frac{-G \cdot \ln(g)}{(1+1)^2}$

Dus $\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{4}G \cdot \ln(g)$.

14.6 Gemengde opdrachten

46 a $g(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$ en $f_p(1) = 2p \cdot \ln(1) - 3 \cdot 1^2 = 2p \cdot 0 - 3 = -3$

Dus g en f_p snijden elkaar in $(1, -3)$.

b $g'(x) = -6x$ dus de helling is gelijk aan $g'(1) = -6 \cdot 1 = -6$.

c $f_p'(x) = \frac{2p}{x} - 6x$

$$f_p'(1) = \frac{2p}{1} - 6 \cdot 1 = 2p - 6$$

Er moet gelden $g'(1) \cdot f_p'(1) = -1$ dus $-6 \cdot (2p - 6) = -1$.

$$2p - 6 = \frac{1}{6}$$

$$2p = 6\frac{1}{6}$$

$$p = 3\frac{1}{12}$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

- d** De top ligt op de x -as als voldaan is aan de eis dat $f_p(x) = 0$ en ook $f_p'(x) = 0$.

$$2p \cdot \ln(x) - 3x^2 = 0 \text{ en } \frac{2p}{x} - 6x = 0$$

$$\text{Uit } \frac{2p}{x} - 6x = 0 \text{ volgt dat } \frac{2p}{x} = 6x$$

$$2p = 6x^2$$

$$p = 3x^2$$

$$\text{Dit invullen in } 2p \cdot \ln(x) - 3x^2 = 0 \text{ geeft } 6x^2 \cdot \ln(x) - 3x^2 = 0.$$

$$3x^2(2 \cdot \ln(x) - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$p = 3(\sqrt{e})^2 = 3e$$

47 a $\ln(x) + \ln(x+3) = \ln(7x)$
 $\ln(x(x+3)) = \ln(7x)$
 $x(x+3) = 7x$
 $x = 0 \text{ (voldoet niet) of } x+3 = 7$
 $x = 4$

d $(x-2)\ln(x) = x-2$
 $x-2 = 0 \text{ of } \ln(x) = 1$
 $x = 2 \text{ of } x = e$

b $4^x - 2^x = 56$

$$(2^x)^2 - 2^x - 56 = 0$$

$$\text{stel } 2^x = p$$

$$p^2 - p - 56 = 0$$

$$(p-8)(p+7) = 0$$

$$p = 8 \text{ of } p = -7$$

$$2^x = 8 \text{ of } 2^x = -7 \text{ (kan niet)}$$

$$x = 3$$

c $2\ln(x) = \ln(2x+3)$
 $\ln(x^2) = \ln(2x+3)$
 $x^2 = 2x+3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x-3)(x+1) = 0$
 $x = 3 \text{ of } x = -1 \text{ (voldoet niet)}$

e $\frac{1}{2}e^x = e^{-x}$

$$\frac{1}{2}e^{2x} = 1$$

$$e^{2x} = 2$$

$$2x = \ln(2)$$

$$x = \frac{1}{2}\ln(2)$$

f $x\ln(x) - 3x = 0$
 $x(\ln(x) - 3) = 0$
 $x = 0 \text{ (voldoet niet) of } \ln(x) = 3$
 $x = e^3$

48 a $f(x) = 0$ geeft $4 \cdot 2^x - 2^{2x} = 0$
 stel $2^x = p$
 $4p - p^2 = 0$
 $p(4-p) = 0$
 $p = 0 \text{ of } p = 4$
 $2^x = 0 \text{ (voldoet niet) of } 2^x = 4$
 $x = 2$

$$\int_0^2 (4 \cdot 2^x - 2^{2x}) dx = \left[\frac{4}{\ln(2)} \cdot 2^x - \frac{1}{2\ln(2)} \cdot 2^{2x} \right]_0^2 =$$

$$\left(\frac{16}{\ln(2)} - \frac{16}{2\ln(2)} \right) - \left(\frac{4}{\ln(2)} - \frac{1}{2\ln(2)} \right) = \frac{9}{2\ln(2)}$$

$$\text{De oppervlakte is } \frac{9}{2\ln(2)}$$

b $f(0) = 3$ dus $A(0, 3)$.

$$f'(x) = 4 \ln(2) \cdot 2^x - 2 \ln(2) \cdot 2^{2x}$$

$$f'(0) = 4 \ln(2) \cdot 2^0 - 2 \ln(2) \cdot 2^0 = 2 \ln(2)$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 2 \ln(2) \cdot x + 3$.

$$2 \ln(2) \cdot x + 3 = 0$$

$$2 \ln(2) \cdot x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2 \ln(2)} \text{ dus } B\left(\frac{-3}{2 \ln(2)}, 0\right)$$

$$\text{De oppervlakte van } \triangle OAB \text{ is } \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2 \ln(2)} = \frac{9}{4 \ln(2)}$$

c $f'(x) = 0$ geeft $4 \ln(2) \cdot 2^x - 2 \ln(2) \cdot 2^{2x} = 0$

$$2 \cdot 2^x - 2^{2x} = 0$$

$$\text{stel } 2^x = p$$

$$2p - p^2 = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = 2$$

$$2^x = 0 \text{ (voldoet niet) of } 2^x = 2$$

$$x = 1$$

$$y = f(1) = 4 \cdot 2^1 - 2^{2 \cdot 1} = 4$$

De coördinaten van de top zijn $(1, 4)$.

d $PQ = f(p) = 4 \cdot 2^p - 2^{2p}$

$$OQ = -p$$

Vierhoek $OQPR$ is een vierkant als $PQ = OQ$ dus als $4 \cdot 2^p - 2^{2p} = -p$.

Oplossen met de rekenmachine:

$$\text{Invoer: } y_1 = 4 \cdot 2^x - 2^{2x} \text{ en } y_2 = -x$$

Venster: standaard

Optie: snijpunt geeft $x \approx -1,38$

Voor $p \approx -1,38$ is vierhoek $OQPR$ een vierkant.

49 a $f_a(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 - \ln(ax)$

$$f'_a(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$f'_a(x) = 0 \text{ geeft } x - \frac{1}{x} = 0$$

$$x = \frac{1}{x}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ (voldoet niet) of } x = 1$$

De x -coördinaat van de top van de grafiek is 1, dus onafhankelijk van a .

b $f''_a(x) = x - x^{-1}$

$$f''_a(x) = 1 + x^{-2} \text{ ofwel } f''_a(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$f''_a(x) = 0 \text{ heeft geen oplossing want } 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ voor elke waarde van } x.$$

De grafiek van f_a heeft dus geen buigpunt.

14 Exponentiële en logaritmische functies

Onderzoeksoopdrachten

50 a $f(0) = 192$ geeft $\frac{1}{2a}(1+1) + b = 192$

$$\frac{1}{a} + b = 192$$

$$b = 192 - \frac{1}{a}$$

$$f(96) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2a}(e^{96a} + e^{-96a}) + 192 - \frac{1}{a} = 0$$

Oplossen met de rekenmachine:

$$\text{Invoer: } y_1 = \frac{1}{2x}(e^{96x} + e^{-96x}) + 192 - \frac{1}{x}$$

$$\text{Venster: } -0,03 \leq x \leq 0,03, -1 \leq y \leq 1$$

Optie: nulpunt geeft $x \approx -0,025693$.

$$\text{Dus } a \approx -0,026 \text{ en } b \approx 192 - \frac{1}{-0,025693} \approx 231.$$

b $y = a(x-96)(x+96)$

$$x = 0 \text{ en } y = 192 \text{ invullen geeft } 192 = a \cdot -96 \cdot 96.$$

$$a = \frac{192}{-96 \cdot 96} \approx -0,0208$$

Een formule van de parabool is $y = -0,0208(x-96)(x+96)$.

c Met de rekenmachine:

$$\text{Invoer: } y_1 = -19,23(e^{0,026x} + e^{-0,026x}) + 231 \text{ (uit)}$$

$$y_2 = -0,0208(x-96)(x+96) \text{ (uit)}$$

$$y_3 = y_1 - y_2 \text{ (aan)}$$

$$\text{Venster: } -100 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 40$$

Optie: maximum geeft $x \approx 67,576$ en $y \approx 19,53$ (ook bij $x \approx -67,576$)

Het verschil is maximaal 19,53.

51 De grafieken raken elkaar als $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.

$$f'(x) = 2e^{2x} \text{ en } g'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Uit } f(x) = g(x) \text{ volgt } e^{2x} = a\sqrt{x}$$

$$\text{Uit } f'(x) = g'(x) \text{ volgt } 2e^{2x} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$e^{2x} = a\sqrt{x} \text{ substitueren in } 2e^{2x} = \frac{a}{2\sqrt{x}} \text{ geeft } 2a\sqrt{x} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$2a\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} = a$$

$$4ax = a$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ of } a = 0$$

Als $a = 0$ snijden de grafieken elkaar niet.

$$x = \frac{1}{4} \text{ invullen bij } e^{2x} = a\sqrt{x} \text{ geeft } e^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{\frac{1}{4}} \text{ dus } a = 2\sqrt{e}.$$

Voor $a = 2\sqrt{e}$ hebben de grafieken van f en g één gemeenschappelijk punt.

Uit de figuur is verder af te lezen:

Voor $a < 2\sqrt{e}$ hebben de grafieken geen gemeenschappelijk punt.

Voor $a > 2\sqrt{e}$ hebben de grafieken twee gemeenschappelijke punten.

Samenvatting

S1 a $e^{2x-7} = e^{-x+3}$

$$2x - 7 = -x + 3$$

$$3x = 10$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$

b $2\ln(x-3) + 2 = 12$

$$2\ln(x-3) = 10$$

$$\ln(x-3) = 5$$

$$x-3 = e^5$$

$$x = 3 + e^5$$

S2 a $3 = 10^{\log(3)}$

$$3^5 = 10^{5 \cdot \log(3)}$$

$$3^5 \approx 10^{2,39}$$

$$f(x) \approx 4 \cdot 10^{2,39x}$$

b $3 = e^{\ln(3)}$

$$3^5 = e^{5 \cdot \ln(3)}$$

$$3^5 \approx e^{5,49}$$

$$f(x) \approx 4 \cdot e^{5,49x}$$

S3 a $f(x) = 2^{5x+1}$

$$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{5x+1} \cdot 5$$

$$f'(x) = 5 \ln(2) \cdot 2^{5x+1}$$

b $f(x) = \ln(4-x)$

$$f'(x) = \frac{1}{4-x} \cdot -1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{4-x}$$

c $f(x) = 5 \cdot {}^2\log(3x)$

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{3x \cdot \ln(2)} \cdot 3$$

$$f'(x) = \frac{5}{x \cdot \ln(2)}$$

d $f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x-2}$

$$f'(x) = 3 \cdot e^{\frac{1}{2}x-2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-2}$$

S4 a $f(x) = 5e^{4x-1}$

$$F(x) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4x-1} \text{ ofwel } F(x) = 1\frac{1}{4}e^{4x-1}$$

b $f(x) = 5^{\frac{1}{4}x+1}$

$$F(x) = 4 \cdot \frac{1}{\ln(5)} \cdot 5^{\frac{1}{4}x+1} \text{ ofwel } F(x) = \frac{4}{\ln(5)} \cdot 5^{\frac{1}{4}x+1}$$

S5 a $f(x) = \frac{6}{5x-3}$

$$F(x) = 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \ln|5x-3| \text{ ofwel } F(x) = 1\frac{1}{5} \cdot \ln|5x-3|$$

b $f(x) = \frac{1}{6x}$ geeft $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x}$

$$F(x) = \frac{1}{6} \ln|x|$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

- S6 a** $8 - \ln(2x - 3) = 6$
 $\ln(2x - 3) = 2$
 $2x - 3 = e^2$
 $2x = 3 + e^2$
 $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2$
- b** $\ln(x) - \ln(x - 2) = \ln(4)$
 $\ln(x) = \ln(x - 2) + \ln(4)$
 $\ln(x) = \ln(4x - 8)$
 $x = 4x - 8$
 $3x = 8$
 $x = 2\frac{2}{3}$
- c** $e^{2x} - 6 = e^x$
 $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
 stel $e^x = p$
 $p^2 - p - 6 = 0$
 $(p - 3)(p + 2) = 0$
 $p = 3$ of $p = -2$
 $e^x = 3$ of $e^x = -2$ (kan niet)
 $x = \ln(3)$

Test jezelf

- T1 a** $1,169 = 2^{2 \log(1,169)} \approx 2^{0,225}$
 $B \approx 60 \cdot 2^{0,225t}$
- b** $1,169^t = 2$ geeft $t = {}^{1,169}\log(2) \approx 4,439$
 De verdubbelingstijd is ongeveer $4,439 \times 10 \approx 44,4$ jaar.
- T2 a** $f(x) = e^{0,5x+3}$
 $f'(x) = 0,5 \cdot e^{0,5x+3}$
- b** $f(x) = e^x \cdot e^{2x+1}$ geeft $f(x) = e^{3x+1}$
 $f'(x) = 3e^{3x+1}$
- c** $f(x) = \ln(-2x)$
 $f'(x) = \frac{1}{-2x} \cdot -2$
 $f'(x) = \frac{1}{x}$
- d** $f(x) = \ln\left(\frac{1}{6-2x}\right) + \ln(x+3)$ geeft $f(x) = \ln((6-2x)^{-1}) + \ln(x+3)$ ofwel
 $f(x) = -1 \cdot \ln((6-2x)^{-1}) + \ln(x+3)$.
 $f'(x) = -1 \cdot \frac{1}{6-2x} \cdot -2 + \frac{1}{x+3}$
 $f'(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{x+3}$

e $f(x) = (\ln(x) - 1)(\ln(x) - 2)$ geeft $f(x) = \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{3}{x}$$

f $f(x) = \ln(\sqrt{2-3x})$ geeft $f(x) = \frac{1}{2} \ln(2-3x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2-3x} \cdot -3$$

$$f'(x) = \frac{-3}{4-6x}$$

g $f(x) = e^{-2x} + \ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)$ geeft $f(x) = e^{-2x} + \ln(2x-1) - \ln(x+3)$

$$f'(x) = -2 \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2x-1} \cdot 2 - \frac{1}{x+3}$$

$$f'(x) = -2e^{-2x} + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+3}$$

h $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot (e^x - e^{-x})$$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

T3 a $f(x) = 3 \cdot 2^x$

$$f'(x) = 3 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$$

b $g(x) = 3x - 2^{-x}$

$$g'(x) = 3 - \ln(2) \cdot 2^{-x} \cdot -1$$

$$g'(x) = 3 + \ln(2) \cdot 2^{-x}$$

d $k(x) = (\sqrt{5})^x$

$$k'(x) = \ln(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5})^x$$

e $l(x) = {}^3\log(3x(x+1))$

$$l(x) = {}^3\log(3x) + {}^3\log(x+1)$$

$$l'(x) = \frac{1}{\ln(3) \cdot 3x} \cdot 3 + \frac{1}{\ln(3) \cdot (x+1)}$$

$$l'(x) = \frac{1}{\ln(3) \cdot x} + \frac{1}{\ln(3) \cdot (x+1)}$$

c $h(x) = 3^{1-2x}$

$$h'(x) = \ln(3) \cdot 3^{1-2x} \cdot -2$$

$$h'(x) = -2\ln(3) \cdot 3^{1-2x}$$

f $m(x) = x^2 + {}^5\log(2x)$

$$m'(x) = 2x + \frac{1}{\ln(5) \cdot 2x} \cdot 2$$

$$m'(x) = 2x + \frac{1}{\ln(5) \cdot x}$$

T4 a $f(x) = e^{2x+1}$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1}$$

c $h(x) = \frac{3}{4x-9}$

$$H(x) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln|4x-9|$$

$$H(x) = \frac{3}{4} \ln|4x-9|$$

b $g(x) = 3^{1-x}$

$$G(x) = -1 \cdot \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^{1-x}$$

$$G(x) = -\frac{3^{1-x}}{\ln(3)}$$

d $k(x) = 1 - 2 \cdot 3^{-2x}$

$$K(x) = x - 2 \cdot \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^{-2x}$$

$$K(x) = x + \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^{-2x}$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

e $l(x) = e^x(1 - e^{-3x})$

$$l(x) = e^x - e^{-2x}$$

$$L(x) = e^x + \frac{1}{2} e^{-2x}$$

f $m(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)}$

$$m(x) = 2(x-1)^{-3} + \frac{1}{x-1}$$

$$M(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-1)^{-2} + \ln|x-1|$$

$$M(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \ln|x-1|$$

T5 a $e^{x^2} - e^{2x} = 0$

$$e^{x^2} = e^{2x}$$

$$x^2 = 2x$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

c $2 \cdot \ln(2 - 4x) - 5 = 1$

$$2 \cdot \ln(2 - 4x) = 6$$

$$\ln(2 - 4x) = 3$$

$$2 - 4x = e^3$$

$$4x = 2 - e^3$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^3$$

b $\frac{2 + e^{0,5x}}{e} = 1$

$$2 + e^{0,5x} = e$$

$$e^{0,5x} = e - 2$$

$$0,5x = \ln(e - 2)$$

$$x = 2\ln(e - 2)$$

d $\frac{\ln^2(x)}{2 - \ln(x)} = 1$

$$\ln^2(x) = 2 - \ln(x)$$

$$\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$$

$$\text{stel } \ln(x) = p$$

$$p^2 + p - 2 = 0$$

$$(p + 2)(p - 1) = 0$$

$$p = -2 \text{ of } p = 1$$

$$\ln(x) = -2 \text{ of } \ln(x) = 1$$

$$x = e^{-2} \text{ of } x = e$$

T6 a $f(x) = e^x - x$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0, \text{ dus het minimum ligt inderdaad bij } x = 0.$$

b $g(x) = 20^x - 3x$

$$g'(x) = \ln(20) \cdot 20^x - 3$$

$$g'(x) = 0 \text{ geeft } \ln(20) \cdot 20^x - 3 = 0$$

$$\ln(20) \cdot 20^x = 3$$

$$20^x = \frac{3}{\ln(20)} \text{ dus } x = {}^{20}\log\left(\frac{3}{\ln(20)}\right) \neq 0 \text{ dus het minimum ligt niet bij } x = 0.$$

T7 a $f(x) = \ln(e^x - a) - 2x$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - a} - 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{e^x}{e^x - a} - 2 = 0$$

$$\frac{e^x}{e^x - a} = 2$$

$$e^x = 2e^x - 2a$$

$$e^x = 2a$$

$$x = \ln(2a)$$

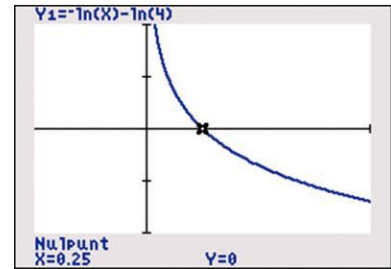
$$\begin{aligned}
 \text{b } f(\ln(2a)) &= \ln(2a - a) - 2 \cdot \ln(2a) \\
 &= \ln(a) - 2\ln(2a) \\
 &= \ln(a) - 2(\ln(2) + \ln(a)) \\
 &= -\ln(a) - 2\ln(2) \\
 &= -\ln(a) - \ln(4)
 \end{aligned}$$

Op de x -as is $y = 0$ dus $-\ln(a) - \ln(4) = 0$

$$\ln(a) = -\ln(4) = \ln(4^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Op de plot is te zien dat $-\ln(a) - \ln(4) > 0$ voor $0 < a < \frac{1}{4}$



T8 a $f(x) = -2x + 6 \ln(x)$ geeft $f'(x) = -2 + \frac{6}{x}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -2 + \frac{6}{x} = 0$$

$$\frac{6}{x} = 2$$

$$x = 3$$

$$f(3) = -6 + 6 \ln(3)$$

De top heeft de coördinaten $(3, -6 + 6 \ln(3))$.

b $f'(x) = 18$ geeft $-2 + \frac{6}{x} = 18$

$$\frac{6}{x} = 20$$

$$x = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$f\left(\frac{3}{10}\right) = -\frac{3}{5} + 6 \ln\left(\frac{3}{10}\right)$$

Het punt heeft coördinaten $\left(\frac{3}{10}; -\frac{3}{5} + 6 \ln\left(\frac{3}{10}\right)\right)$.

c De raaklijn heeft richtingscoëfficiënt $f'(1) = -2 + \frac{6}{1} = 4$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 4x + b$.

$$f(1) = -2 \text{ dus het raakpunt is } (1, -2).$$

$$x = 1 \text{ en } y = -2 \text{ invullen geeft } -2 = 4 \cdot 1 + b \text{ dus } b = -6.$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 4x - 6$.

Uit $4x - 6 = 0$ volgt $x = 1\frac{1}{2}$, dus $A\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$ en verder is $B(0, -6)$.

De oppervlakte van driehoek OAB is dus $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 6 = 4\frac{1}{2}$.

T9 a $f(x) = 0$ geeft $\frac{1 + {}^4\log(x)}{x \cdot \ln(4)} = 0$

$$1 + {}^4\log(x) = 0$$

$${}^4\log(x) = -1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

b De grafiek heeft een verticale asymptoot $x = 0$ en een horizontale asymptoot $y = 0$.

c $F(x) = \frac{1}{2} \cdot {}^4\log^2(x) + {}^4\log(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot {}^4\log(x) \cdot \frac{1}{\ln(4) \cdot x} + \frac{1}{\ln(4) \cdot x}$$

$$F'(x) = \frac{{}^4\log(x)}{\ln(4) \cdot x} + \frac{1}{\ln(4) \cdot x}$$

14 Exponentiële en logaritmische functies

$$F'(x) = \frac{1 + {}^4\log(x)}{\ln(4) \cdot x}$$

$F' = f$ dus is F een primitieve van f .

$$\text{d} \int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{1 + {}^4\log(x)}{x \cdot \ln(4)} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot {}^4\log^2(x) + {}^4\log(x) \right]_{\frac{1}{4}}^4 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + -1 \right) = 2$$

De oppervlakte van G is 2.

Extra oefening

E1 a $f(x) = 3^{2+x}$ is te schrijven als $f(x) = 3^2 \cdot 3^x$ ofwel $f(x) = 9 \cdot 3^x$.

$$f(x) = 9 \cdot 10^{\log(3) \cdot x}$$

$$f(x) \approx 9 \cdot 10^{0,48x}$$

b $f(x) = 4 \cdot 0,1^{2x-3}$

$$f(x) = 4 \cdot 0,1^{-3} \cdot (10^{-1})^{2x}$$

$$f(x) = 4000 \cdot 10^{-2x}$$

c $f(x) = -32 \cdot 5^{3-6x}$

$$f(x) = -32 \cdot 5^3 \cdot 5^{-6x}$$

$$f(x) = -4000 \cdot 5^{-6x}$$

$$f(x) = -4000 \cdot 10^{\log(5) \cdot -6x}$$

$$f(x) \approx -4000 \cdot 10^{-4,19x}$$

E2 a $f(x) = e^{-3x+2}$

$$f'(x) = -3e^{-3x+2}$$

c $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x}$

$$f'(x) = 3 \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x} \cdot (2x+1)$$

$$f'(x) = (6x+3) \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x}$$

b $f(x) = \ln(8x+3)$

$$f'(x) = \frac{1}{8x+3} \cdot 8$$

$$f'(x) = \frac{8}{8x+3}$$

d $f(x) = \ln^2(x) - 4 \ln(x) + 5$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 4 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2 \ln(x)}{x} - \frac{4}{x}$$

E3 a $f(x) = -3 \cdot 0,7^{x+1} + x$

$$F(x) = -3 \cdot \frac{1}{\ln(0,7)} \cdot 0,7^{x+1} + \frac{1}{2}x^2$$

$$F(x) = \frac{-3}{\ln(0,7)} \cdot 0,7^{x+1} + \frac{1}{2}x^2$$

b $g(x) = 2 - 11 \cdot e^{2-x}$

$$G(x) = 2x + 11 \cdot e^{2-x}$$

c $h(x) = e^{2x} - 2x^e$

$$H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot \frac{1}{e+1} \cdot x^{e+1}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{2}{e+1} \cdot x^{e+1}$$

d $k(x) = 4 - 2^{-3x}$

$$K(x) = 4x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-3x}$$

$$K(x) = 4x + \frac{2^{-3x}}{3 \ln(2)}$$

E4 a $f(x) = \frac{4}{7x}$

$$f(x) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \frac{4}{7} \ln|x|$$

b $g(x) = \frac{4}{3 - 0,2x}$

$$g(x) = 4 \cdot \frac{1}{3 - 0,2x}$$

$$G(x) = 4 \cdot \frac{1}{-0,2} \cdot \ln|3 - 0,2x|$$

$$G(x) = -20 \ln|3 - 0,2x|$$

$$\text{c } h(x) = \frac{5}{x+5} + \frac{x+5}{5}$$

$$h(x) = 5 \cdot \frac{1}{x+5} + \frac{1}{5}x + 1$$

$$H(x) = 5 \ln|x+5| + \frac{1}{10}x^2 + x$$

$$\text{d } k(x) = \frac{2}{1-7x} + 3$$

$$k(x) = 2 \cdot \frac{1}{1-7x} + 3$$

$$K(x) = 2 \cdot \frac{1}{-7} \cdot \ln|1-7x| + 3x$$

$$K(x) = -\frac{2}{7} \ln|1-7x| + 3x$$

$$\text{E5 a } 4e^{2x} + 5 = 11$$

$$4e^{2x} = 6$$

$$e^{2x} = 1\frac{1}{2}$$

$$2x = \ln\left(1\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2} \ln\left(1\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{b } e^{2x} = e^x + 56$$

$$e^{2x} - e^x - 56 = 0$$

$$\text{stel } e^x = p$$

$$p^2 - p - 56 = 0$$

$$(p-8)(p+7) = 0$$

$$p = 8 \text{ of } p = -7$$

$$e^x = 8 \text{ of } e^x = -7 \text{ (kan niet)}$$

$$x = \ln(8)$$

$$\text{c } \ln(2x+8) - 3 = 1$$

$$\ln(2x+8) = 4$$

$$2x+8 = e^4$$

$$2x = e^4 - 8$$

$$\text{d } \ln(x^2) = \ln(2x+3)$$

$$x^2 = 2x+3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -1$$

beide oplossingen voldoen

$$\text{E6 a } f(x) = {}^3\log(4x-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(3) \cdot (4x-1)} \cdot 4 \text{ ofwel } f'(x) = \frac{4}{\ln(3) \cdot (4x-1)}$$

$$f'(1) = \frac{4}{\ln(3) \cdot (4 \cdot 1 - 1)} \text{ dus de helling in dat punt is } \frac{4}{3 \ln(3)}$$

$$\text{b } g(0) = 1 \text{ dus het snijpunt met de } y\text{-as is } (0, 1).$$

$$g(x) = \frac{2}{1+e^{-x}} \text{ is te schrijven als } g(x) = 2(1+e^{-x})^{-1}.$$

$$g'(x) = -2(1+e^{-x})^{-2} \cdot e^{-x} \cdot -1$$

$$g'(x) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$g'(0) = \frac{2e^{-0}}{(1+e^{-0})^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Een vergelijking van de raaklijn in $(0, 1)$ is $y = \frac{1}{2}x + 1$.

$$\text{E7 } f(x) = 0 \text{ geeft } 4 - e^{2x} = 0$$

$$e^{2x} = 4$$

$$2x = \ln(4)$$

$$x = \frac{1}{2} \ln(4) = \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(2)$$

$$\int_0^{\ln(2)} (4 - e^{2x}) dx = \left[4x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln(2)} = (4 \ln(2) - 2) - \left(0 - \frac{1}{2} \right) = 4 \ln(2) - 1\frac{1}{2}$$

De oppervlakte van G is $4 \ln(2) - 1\frac{1}{2}$.

14 Exponentiële en logaritmische functies

E8 a $f(x) = -\frac{2}{x} - \ln(x^3)$

$$f(x) = -2x^{-1} - 3\ln(x)$$

$$f'(x) = 2x^{-2} - 3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$$

b $f'(x) = 0$ geeft $\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} = 0$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{3}{x}$$

$$2x = 3x^2$$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } 2 = 3x$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Aan de grafiek van f' is te zien dat f een maximum heeft bij $x = \frac{2}{3}$.

$$\text{Het maximum is } f\left(\frac{2}{3}\right) = -3 - 3\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

c $f'(x) = 2x^{-2} - 3x^{-1}$

$$f''(x) = -4x^{-3} + 3x^{-2}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } -\frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} = 0$$

$$\frac{4}{x^3} = \frac{3}{x^2}$$

$$4x^2 = 3x^3$$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } 3x = 4$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

De x -coördinaat van het buigpunt is $x = 1\frac{1}{3}$.

E9 $f(x) = cx^2$ en $g(x) = \ln(x)$

$$f'(x) = 2cx \text{ en } g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = g(x) \text{ geeft } cx^2 = \ln(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \text{ geeft } 2cx = \frac{1}{x}$$

$$\text{Uit } 2cx = \frac{1}{x} \text{ volgt } 2cx^2 = 1 \text{ ofwel } cx^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Substitutie bij } cx^2 = \ln(x) \text{ geeft } \frac{1}{2} = \ln(x).$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\text{Invullen bij } cx^2 = \ln(x) \text{ geeft } c \cdot e = \frac{1}{2} \text{ dus } c = \frac{1}{2e}$$

E10 a $y = e$ geeft $e^{-\frac{1}{2}x} = e$

$$-\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = -2 \text{ dus punt } A \text{ heeft coördinaten } (-2, e).$$

Als punt C op de y -as ligt, heeft punt B coördinaten $(2, e)$.

$$\text{Dus geldt } g(2) = e.$$

$$g(2) = p\sqrt{2}$$

$$p\sqrt{2} = e \text{ geeft } p = \frac{e}{\sqrt{2}}$$

b $f(1) = g(1)$ geeft $e^{-\frac{1}{2}} = p\sqrt{1}$ dus $e^{-\frac{1}{2}} = p$

$$\int_0^1 \left(e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x} \right) dx = \left[-2e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^1 = \left(-2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{2}} \right) - (-2 - 0) = 2 - 2\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{2}}$$

De gevraagde oppervlakte is $2 - 2\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{2}}$.

15 Meetkunde: rekenen of redeneren

Voorkennis

V1 a $AC^2 = 14^2 - 13^2 = 27$, dus $AC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
 $\cos(\angle B) = \frac{13}{14}$, dus $\angle B \approx 22^\circ$
 $\angle C = 180 - 90 - 22 = 68^\circ$

b $DF^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, dus $DF = \sqrt{144} = 12$
 $\sin(\angle D) = \frac{5}{13}$, dus $\angle D \approx 23^\circ$
 $\angle E = 180 - 90 - 23 = 67^\circ$

c $\angle P = 180 - 90 - 57 = 33^\circ$
 $\tan(57^\circ) = \frac{16}{QR}$ dus $QR = \frac{16}{\tan(57^\circ)} \approx 10,4$
 $\sin(57^\circ) = \frac{16}{PQ}$ dus $PQ = \frac{16}{\sin(57^\circ)} \approx 19,1$

V2

graden	0	30	45	60	90
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

V3 a De drie overeenkomstige hoeken zijn gelijk.

b De vergrotingsfactor is $\frac{DE}{AB} = \frac{21}{7} = 3$.

c $AC = \frac{12}{3} = 4$ en $EF = 5 \cdot 3 = 15$

V4 a $\angle C$ zit in beide driehoeken en $\angle A = \angle CDE$ (F-hoeken) en $\angle B = \angle CED$ (F-hoeken) dus $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

b

$\triangle ABC$	$AC = 9$	$BC = \dots$	$AB = 13\frac{1}{3}$
$\triangle DEC$	$CD = 6$	$CE = 8$	$DE = \dots$

De vergrotingsfactor van $\triangle DEC$ naar $\triangle ABC$ is $\frac{AC}{CD} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}$

$DE = \frac{13\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2}} = 9$ en $BC = 1\frac{1}{2} \cdot 8 = 12$

c $BE = BC - CE = 12 - 8 = 4$

V5 a $\angle A = \angle D$ (Z-hoeken) en $\angle B = \angle E$ (Z-hoeken) dus zijn alle overeenkomstige hoeken gelijk en is $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

b

$\triangle ABC$	$AB = 25$	$AC = x$	$BC = \dots$
$\triangle DEC$	$DE = 10$	$DC = 42 - x$	$EC = \dots$

$10x = 25 \cdot (42 - x)$

$10x = 1050 - 25x$

$35x = 1050$

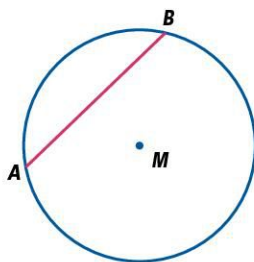
$x = 30$

c $AB : DE = 25 : 10 = 5 : 2$

Lijnstuk AD wordt verdeeld in de verhouding 5 : 2, dit betekent voor AC vijf delen van de in totaal zeven delen, dus $AC = \frac{5}{7} \cdot 42 = 30$.

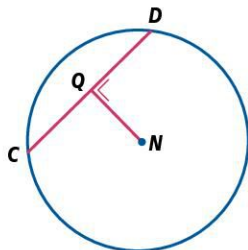
15 Meetkunde: rekenen of redeneren

V6 a



- b $MA = MB = \text{straal}$, dat betekent dat driehoek ABM gelijkbenig is en dus ligt M op de middelloodlijn van AB .

c



- d Omdat $NC = ND = \text{straal}$, is $\triangle CDN$ gelijkbenig en $\angle C = \angle D$.
 $\angle CQN = \angle DQN = 90^\circ$, dus is ook $\angle CNQ = \angle DNQ$.
 Dus ligt Q op de bissectrice van $\angle CND$.

15.1 Sinusregel

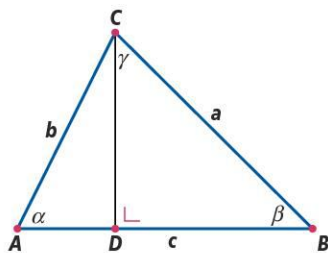
intro Je kunt een hoogtelijn vanuit de voet van de toren in de bovenste driehoek tekenen. Je weet de hoek bij de top van de toren dus kun je de lengte van deze hoogtelijn en vervolgens de afstand vanaf het punt op het strand naar de voet van de toren uitrekenen. Met die afstand kun je in de onderste driehoek dan de hoogte van de duintop berekenen.

1 a $\sin(64^\circ) = \frac{RS}{12}$ dus $RS = 12 \cdot \sin(64^\circ) = 10,785... \approx 10,79$.

b $\sin(\angle Q) = \frac{RS}{RQ} = \frac{10,785...}{15}$ dus $\angle Q \approx 46^\circ$.
 $\angle PRQ \approx 180^\circ - 64^\circ - 46^\circ = 70^\circ$

c $\cos(64^\circ) = \frac{PS}{12}$ dus $PS = 12 \cdot \cos(64^\circ) = 5,260... \approx 5,26$
 $\cos(46^\circ) = \frac{QS}{15}$ dus $QS \approx 15 \cdot \cos(46^\circ) \approx 10,42$
 $PQ = 5,260... + 10,419... \approx 15,68$

d $\frac{PQ}{\sin(\angle R)} = \frac{15,69}{\sin(70^\circ)} \approx 16,7$
 $\frac{QR}{\sin(\angle P)} = \frac{15}{\sin(64^\circ)} \approx 16,7$
 $\frac{PR}{\sin(\angle Q)} = \frac{12}{\sin(46^\circ)} \approx 16,7$
 Klopt, ze zijn alle drie ongeveer even groot.

2 a b

c $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$ dus $h = b \cdot \sin(\alpha)$

$\sin(\beta) = \frac{h}{a}$ dus $h = a \cdot \sin(\beta)$

- d Omdat $h = a \cdot \sin(\beta)$ en $h = b \cdot \sin(\alpha)$ volgt hieruit dat $a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha)$
Beide kanten delen door $\sin(\alpha)$ en door $\sin(\beta)$ geeft

$$\frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)} = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)} \text{ ofwel } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

- e Om dat te bewijzen heb je de hoogtelijn vanuit A nodig.

3 a $\frac{b}{\sin(88^\circ)} = \frac{5}{\sin(49^\circ)}$ dus $b = \frac{5 \cdot \sin(88^\circ)}{\sin(49^\circ)} \approx 6,6$ ofwel $AC \approx 6,6$

$$\gamma = 180^\circ - 49^\circ - 88^\circ = 43^\circ$$

$$\frac{c}{\sin(43^\circ)} = \frac{5}{\sin(49^\circ)} \text{ dus } c = \frac{5 \cdot \sin(43^\circ)}{\sin(49^\circ)} \approx 4,5 \text{ ofwel } AB \approx 4,5$$

b $\frac{17}{\sin(79^\circ)} = \frac{13}{\sin(\beta)}$ dus $\sin(\beta) = \frac{13 \cdot \sin(79^\circ)}{17} = 0,750\dots$ en $\beta \approx 49^\circ$

$$\gamma \approx 180^\circ - 79^\circ - 49^\circ = 52^\circ$$

$$\frac{17}{\sin(79^\circ)} = \frac{c}{\sin(52^\circ)} \text{ dus } c = \frac{17 \cdot \sin(52^\circ)}{\sin(79^\circ)} \approx 13,6 \text{ ofwel } AB \approx 13,6$$

c $\beta = 180^\circ - 67^\circ - 53^\circ = 60^\circ$

$$\frac{a}{\sin(67^\circ)} = \frac{45}{\sin(60^\circ)} \text{ dus } a = \frac{45 \cdot \sin(67^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 47,8 \text{ ofwel } BC \approx 47,8$$

$$\frac{c}{\sin(53^\circ)} = \frac{45}{\sin(60^\circ)} \text{ dus } c = \frac{45 \cdot \sin(53^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 41,5 \text{ ofwel } AB \approx 41,5$$

d $\frac{12}{\sin(\alpha)} = \frac{14}{\sin(82^\circ)}$ dus $\sin(\alpha) = \frac{12 \cdot \sin(82^\circ)}{14} = 0,848\dots$ en $\alpha \approx 58^\circ$

$$\beta \approx 180^\circ - 82^\circ - 58^\circ = 40^\circ$$

$$\frac{b}{\sin(40^\circ)} = \frac{14}{\sin(82^\circ)} \text{ dus } b = \frac{14 \cdot \sin(40^\circ)}{\sin(82^\circ)} \approx 9,1 \text{ ofwel } AC \approx 9,1$$

4 a $\cos(65^\circ) = \frac{PN}{7}$ dus $PN = 7 \cdot \cos(65^\circ) = 2,958\dots \approx 3,0$

$$\sin(65^\circ) = \frac{SN}{7} \text{ dus } SN = 7 \cdot \sin(65^\circ) = 6,344\dots \approx 6,3$$

15 Meetkunde: rekenen of redeneren

$$\begin{aligned} \text{b } RN &= \sqrt{17^2 - 6,344...^2} = 15,771... \approx 15,8 \\ PR &= PN + RN = 2,958... + 15,771... \approx 18,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{7}{\sin(\angle PRS)} &= \frac{17}{\sin(65^\circ)} \\ \sin(\angle PRS) &= \frac{7 \cdot \sin(65^\circ)}{17} = 0,373... \text{ dus } \angle PRS = 21,912...^\circ \text{ en} \\ \angle PSR &= 180^\circ - 65^\circ - 21,912...^\circ = 93,087...^\circ \\ \frac{PR}{\sin(93,087...^\circ)} &= \frac{17}{\sin(65^\circ)} \text{ dus } PR = \frac{17 \cdot \sin(93,087...^\circ)}{\sin(65^\circ)} \approx 18,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{5 a } \frac{6}{\sin(23^\circ)} &= \frac{13}{\sin(\angle Q)} \\ \sin(\angle Q) &= \frac{13 \cdot \sin(23^\circ)}{6} = 0,846... \text{ dus } \angle Q \approx 58^\circ \end{aligned}$$

$$\text{b } \frac{6}{\sin(23^\circ)} = \frac{13}{\sin(\angle Q)} \text{ dus } \sin(\angle Q) = 0,846...$$

$$\text{c } \sin(180^\circ - 58^\circ) = 0,848... \text{ en } \sin(58^\circ) = 0,848...$$

$$\text{d } \angle Q \approx 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$$

$$\text{6 a } \frac{4}{\sin(27^\circ)} = \frac{8}{\sin(\angle D)} \text{ dus } \sin(\angle D) = \frac{8 \sin(27^\circ)}{4} = 0,907...$$

$\angle D \approx 65^\circ$, maar de hoek is stomp dus $\angle D \approx 180 - 65 = 115^\circ$.

$$\text{b } \angle BCD \approx 180 - 115 - 27 = 38^\circ$$

$$\angle ADC = 180 - 115 = 65^\circ$$

Omdat $AC = DC$ is $\triangle ABC$ gelijkbenig, dus $\angle A \approx 65^\circ$.

$$\angle ACD \approx 180 - 65 - 65 = 50^\circ$$

$$\text{c } \frac{AD}{\sin(50^\circ)} = \frac{4}{\sin(65^\circ)} \text{ dus } AD = \frac{4 \sin(50^\circ)}{\sin(65^\circ)} \approx 3,4$$

$$\frac{BD}{\sin(38^\circ)} = \frac{8}{\sin(115^\circ)} \text{ dus } BD = \frac{8 \sin(38^\circ)}{\sin(115^\circ)} \approx 5,4$$

$$\text{7 Voor } \triangle ABC \text{ geldt } \frac{12}{\sin(\angle B)} = \frac{10}{\sin(30^\circ)}$$

$$\text{dus } \sin(\angle B) = \frac{12 \sin(30^\circ)}{10} = 0,6$$

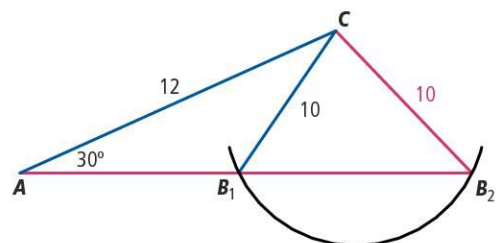
$$\text{dus } \angle B_2 \approx 37^\circ \text{ en } \angle B_1 \approx 180 - 37 = 143^\circ$$

$$\angle C \approx 180 - 30 - 37 = 113^\circ \text{ of } \angle C \approx 180 - 30 - 143 = 7^\circ$$

$$\text{Voor } \triangle DEF \text{ geldt } \frac{12}{\sin(\angle E)} = \frac{6}{\sin(30^\circ)}$$

$$\text{dus } \sin(\angle E) = \frac{12 \sin(30^\circ)}{6} = 1$$

$\angle E = 90^\circ$, dus voor $\triangle DEF$ is er maar één mogelijkheid.



03 a $\frac{a}{\sin(73^\circ)} = \frac{10}{\sin(32^\circ)}$

b $a = \frac{10 \cdot \sin(73^\circ)}{\sin(32^\circ)} = 18,046... \approx 18,0$

c $\gamma = 180^\circ - 73^\circ - 32^\circ = 75^\circ$

d $\frac{10}{\sin(32^\circ)} = \frac{c}{\sin(75^\circ)}$ dus $c = \frac{10 \cdot \sin(75^\circ)}{\sin(32^\circ)} = 18,227... \approx 18,2$

05 a $\frac{5}{\sin(27^\circ)} = \frac{8}{\sin(\beta)}$

$$\sin(\beta) = \frac{8 \cdot \sin(27^\circ)}{5} = 0,7263... \approx 0,726$$

b $\beta = \sin^{-1}(0,7263...) = 46,584...^\circ \approx 47^\circ$

c $180^\circ - 46,58...^\circ = 133,415...^\circ$

$$\sin(133,415...^\circ) = 0,7263... \text{ dus } \sin(180^\circ - \beta) = \sin(\beta)$$

d grote driehoek:

$$\beta \approx 47^\circ \text{ geeft } \gamma \approx 180^\circ - 27^\circ - 47^\circ = 106^\circ$$

$$\frac{5}{\sin(27^\circ)} = \frac{c}{\sin(106^\circ)} \text{ dus } AB = c = \frac{5 \cdot \sin(106^\circ)}{\sin(27^\circ)} \approx 10,6$$

kleine driehoek:

$$\beta \approx 133^\circ \text{ geeft } \gamma \approx 180^\circ - 27^\circ - 133^\circ = 20^\circ$$

$$\frac{5}{\sin(27^\circ)} = \frac{c}{\sin(20^\circ)} \text{ dus } AB = c = \frac{5 \cdot \sin(20^\circ)}{\sin(27^\circ)} \approx 3,8$$

U1 a $\angle ABM = \angle BAM = \alpha_1$ en $\angle ACM = \angle CAM = \alpha_2$

$$\angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot \alpha_1 \text{ en } \angle AMC = 180^\circ - 2 \cdot \alpha_2$$

$$\text{dus } \angle BMC = 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha_1) - (180^\circ - 2\alpha_2) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$$

b $\triangle BMC$ is gelijkbenig dus de middelloodlijn ME is tevens bissectrice van

$$\angle BMC \text{ en daaruit volgt } \angle CME = \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 2\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$\text{In } \triangle BME \text{ geldt } \sin(\angle BME) = \frac{BE}{BM}$$

$$\angle BME = \alpha, BE = \frac{1}{2}a \text{ en } BM = R, \text{ dit invullen in } \sin(\angle BME) = \frac{BE}{BM} \text{ geeft}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}a}{R}$$

$$\text{Daaruit volgt } R \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2}a \text{ ofwel } R = \frac{a}{2\sin(\alpha)}$$

c Voor de oppervlakte geldt $O = \frac{1}{2} \cdot CT \cdot AB$.

$$AB = c \text{ en } \frac{CT}{b} = \sin(\alpha), \text{ dus } CT = b\sin(\alpha) \text{ en } O = \frac{1}{2} \cdot b\sin(\alpha) \cdot c = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha).$$

d $R = \frac{a}{2\sin(\alpha)} = \frac{abc}{2bc\sin(\alpha)} = \frac{abc}{4 \cdot \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)} = \frac{abc}{4O}$

15 Meetkunde: rekenen of redeneren

15.2 Cosinusregel

intro Bij de tweede driehoek kun je $\angle C$ direct berekenen met de sinusregel.
 Bij de eerste en derde driehoek moet je eerst de hoogtelijn vanuit C (of A) tekenen, vervolgens de zijde er tegenover lengte x en $8 - x$ noemen (of x en $5 - x$). Door twee keer de stelling van Pythagoras toe te passen kun je x berekenen en vervolgens $\angle C$.

- 8 a** Stel Q is het snijpunt van de verticale lijn door P met de x -as.

De stelling van Pythagoras toepassen in $\triangle OQP$ geeft

$$PQ^2 + OQ^2 = 1^2 \text{ dus } (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$$

- b** Als de hoek stomp is, dan is de afstand OQ gelijk aan $-\cos(x)$.

Dan geldt $(\sin(x))^2 + (-\cos(x))^2 = 1$ en daaruit volgt weer $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$

9 a $\sin(80^\circ) = \frac{CD}{10}$ dus $CD = 10 \cdot \sin(80^\circ) = 9,848... \approx 9,8$

b $\cos(80^\circ) = \frac{AD}{10}$ dus $AD = 10 \cdot \cos(80^\circ) = 1,736... \approx 1,7$

$$BD = 15 - 1,736... = 13,263... \approx 13,3$$

c $BC = \sqrt{9,848...^2 + 13,263...^2} \approx 16,5$

10 a $\sin(\alpha) = \frac{CD}{b}$ dus $CD = b \cdot \sin(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = \frac{AD}{b} \text{ dus } AD = b \cdot \cos(\alpha) \text{ en } BD = c - b \cdot \cos(\alpha)$$

- b** De antwoorden van opdracht a invullen in $BC^2 = CD^2 + BD^2$ geeft

$$a^2 = (b \cdot \sin(\alpha))^2 + (c - b \cdot \cos(\alpha))^2$$

haakjes wegwerken

$$a^2 = b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot (\cos(\alpha))^2$$

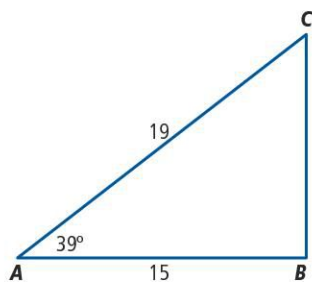
c $a^2 = b^2 \cdot (\sin(\alpha))^2 + b^2 \cdot (\cos(\alpha))^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$$a^2 = b^2 \cdot ((\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2) + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 \cdot 1 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

- 11 a**



Neem de cosinusregel met $a = BC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$a^2 = 19^2 + 15^2 - 2 \cdot 19 \cdot 15 \cdot \cos(39^\circ) = 143,02...$$

$$BC = a = \sqrt{143,02...} \approx 12,0$$

b $QR^2 = 35^2 + 13^2 - 2 \cdot 35 \cdot 13 \cdot \cos(85^\circ) = 1314,68\dots$
 $QR = \sqrt{1314,68\dots} \approx 36,3$

c Neem de cosinusregel met $\alpha = \angle L$:
 $KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos(\alpha)$
 $12^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos(\alpha)$
 $144 = 549 - 540 \cdot \cos(\alpha)$
 $540 \cdot \cos(\alpha) = 405$
 $\cos(\alpha) = \frac{405}{540}$ geeft $\alpha = \angle L \approx 41^\circ$
 Neem nu de cosinusregel met $\beta = \angle M$:
 $KL^2 = KM^2 + LM^2 - 2 \cdot KM \cdot LM \cdot \cos(\beta)$
 $15^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos(\beta)$
 $225 = 468 - 432 \cdot \cos(\beta)$
 $432 \cdot \cos(\beta) = 243$
 $\cos(\beta) = \frac{243}{432}$ geeft $\beta = \angle M \approx 56^\circ$

12 a $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$
 $65^2 = 33^2 + 56^2 - 2 \cdot 33 \cdot 56 \cdot \cos(\gamma)$
 $4225 = 4225 - 3696 \cdot \cos(\alpha)$
 $3696 \cdot \cos(\gamma) = 0$
 $\cos(\gamma) = 0$ dus $\gamma = 90^\circ$
b Driehoek ABC is rechthoekig.
c Als $\gamma = 90^\circ$ dan geldt
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(90^\circ)$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot 0$ ofwel $c^2 = a^2 + b^2$

13 a $9^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \cos(\angle F)$
 $81 = 260 - 224 \cdot \cos(\angle F)$
 $224 \cdot \cos(\angle F) = 179$
 $\cos(\angle F) = \frac{179}{224}$ geeft $\angle F = 36,955\dots^\circ \approx 37^\circ$

b $\frac{8}{\sin(\angle E)} = \frac{9}{\sin(36,955\dots^\circ)}$
 $\sin(\angle E) = \frac{8 \cdot \sin(36,955\dots^\circ)}{9} = 0,534\dots$ dus $\angle E \approx 32^\circ$

c $14^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cos(\angle D)$
 $196 = 145 - 144 \cdot \cos(\angle D)$
 $144 \cdot \cos(\angle D) = -51$
 $\cos(\angle D) = -\frac{51}{144} < 0$

d $\angle D = \cos^{-1}\left(-\frac{51}{144}\right) = 110,742\dots^\circ \approx 111^\circ$
 $\angle D + \angle E + \angle F \approx 111^\circ + 32^\circ + 37^\circ = 180^\circ$

14 De stompe hoek ligt tegenover de langste zijde, dus tegenover zijde ST .
 $\angle U$ is dus de stompe hoek.
 $13^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle U)$
 $169 = 117 - 108 \cdot \cos(\angle U)$
 $108 \cdot \cos(\angle U) = -52$
 $\cos(\angle U) = -\frac{52}{108}$ geeft $\angle U = 118,782\dots^\circ \approx 119^\circ$

15 Meetkunde: rekenen of redeneren

15 a $AH = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$AF = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}$$

$$FH = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$$

b $(\sqrt{153})^2 = (\sqrt{160})^2 + 5^2 - 2 \cdot \sqrt{160} \cdot 5 \cdot \cos(\angle A)$

$$153 = 185 - 10\sqrt{160} \cdot \cos(\angle A)$$

$$\cos(\angle A) = \frac{32}{10\sqrt{160}} \text{ geeft } \angle A = 75,345\dots^\circ \approx 75^\circ$$

$$5^2 = (\sqrt{160})^2 + (\sqrt{153})^2 - 2 \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{153} \cdot \cos(\angle A)$$

$$25 = 313 - 2 \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{153} \cdot \cos(\angle A)$$

$$2 \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{153} \cdot \cos(\angle F) = 288$$

$$\cos(\angle F) = \frac{288}{2 \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{153}} \text{ dus } \angle F = 23,021\dots^\circ \approx 23^\circ$$

$$\angle H = 180^\circ - 75,345\dots^\circ - 23,021\dots^\circ \approx 82^\circ$$

16 Eerst $\angle A$ berekenen:

$$21^2 = 28^2 + 17^2 - 2 \cdot 28 \cdot 17 \cdot \cos(\angle A)$$

$$952 \cos(\angle A) = 632, \text{ dus } \cos(\angle A) = \frac{632}{952} = 0,663\dots \text{ en } \angle A = 48,406\dots^\circ$$

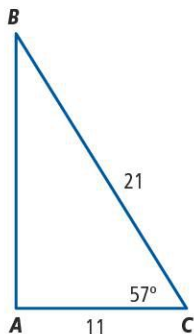
Nu de cosinusregel toepassen in $\triangle ADC$:

$$CD^2 = 14^2 + 17^2 - 2 \cdot 14 \cdot 17 \cdot \cos(\angle A)$$

$$CD^2 = 14^2 + 17^2 - 2 \cdot 14 \cdot 17 \cdot \frac{632}{952}$$

$$CD^2 = 169 \text{ dus } CD = 13$$

011 a



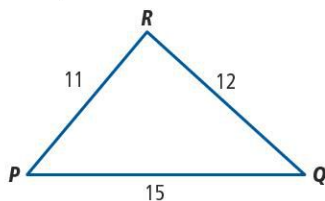
b $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

$$c^2 = 21^2 + 11^2 - 2 \cdot 21 \cdot 11 \cdot \cos(57^\circ)$$

$$c^2 = 310,376\dots$$

c $c = \sqrt{310,376\dots} = 17,617\dots \approx 17,6$

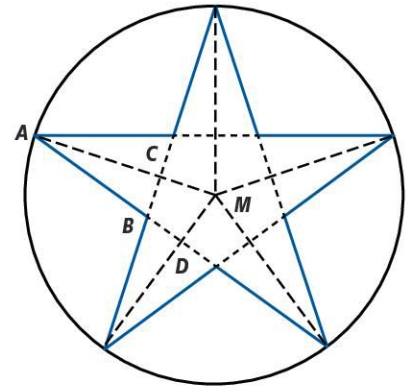
d



- e Tegenover hoek R ligt zijde PQ .
- f $PQ^2 = PR^2 + QR^2 - 2 \cdot PR \cdot QR \cdot \cos(\angle R)$
 $15^2 = 11^2 + 12^2 - 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \cos(\angle R)$
 $225 = 265 - 264 \cdot \cos(\angle R)$
 $264 \cdot \cos(\angle R) = 40$
 $\cos(\angle R) = \frac{40}{264} = \frac{5}{33}$
- g $\angle R = \cos^{-1}\left(\frac{5}{33}\right) = 81,285\dots^\circ \approx 81^\circ$

- U2** $\angle AMD = 72^\circ$ en $\angle ADM = 90^\circ$ dus $\angle MAB = 18^\circ$
 $\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$, dus $\angle ABM = 180 - 18 - 36 = 126^\circ$
 De sinusregel toepassen in $\triangle ABM$ geeft
- $$\frac{8}{\sin(36^\circ)} = \frac{AM}{\sin(126^\circ)} \text{ dus } AM = \frac{8 \sin(126^\circ)}{\sin(36^\circ)} = 11,011\dots$$

Ze moet een cirkel met een straal van 110 mm tekenen.

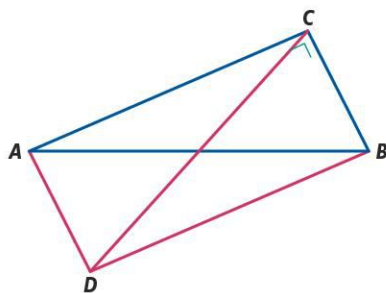


15.3 Stelling van Thales

intro Al deze hoeken zijn 90° .

- 17 a** $\triangle AMC$ is gelijkbenig, dus $\angle ACM = 54^\circ$
 $\angle AMC = 180 - 2 \times 54 = 72^\circ$, dus $\angle BMC = 180 - 72 = 108^\circ$
 $\triangle BMC$ is ook gelijkbenig, dus $\angle BCM = \frac{1}{2}(180 - 108) = 36^\circ$
 $\angle ACB = \angle ACM + \angle BCM = 54 + 36 = 90^\circ$
- b** $\triangle BMC$ is gelijkbenig, dus $\angle BCM = 40^\circ$
 $\angle BMC = 180 - 2 \times 40 = 100^\circ$, dus $\angle AMC = 180 - 100 = 80^\circ$
 $\triangle AMC$ is ook gelijkbenig, dus $\angle ACM = \frac{1}{2}(180 - 80) = 50^\circ$
 $\angle ACB = \angle ACM + \angle BCM = 50 + 40 = 90^\circ$
- c** $\triangle AMC$ is gelijkbenig, dus $\angle ACM = \alpha$
 $\triangle BMC$ is gelijkbenig, dus $\angle BCM = \beta$
 $\angle ACB = \angle ACM + \angle BCM = \alpha + \beta$
 De drie hoeken van $\triangle ABC$ zijn samen 180° dus $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180^\circ$.
 Daaruit volgt $\alpha + \beta = 90^\circ$, dus $\angle ACB = 90^\circ$.

18 a b

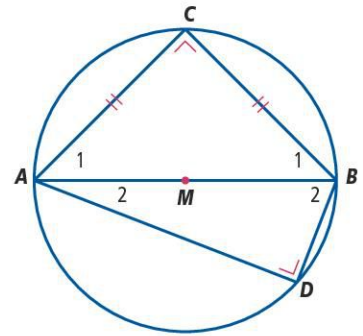


- c** De diagonalen van een rechthoek zijn even lang en delen elkaar middendoor.
- d** Het snijpunt van de diagonalen heeft gelijke afstand tot alle vier hoekpunten, dus C ligt op de cirkel met middellijn AB .

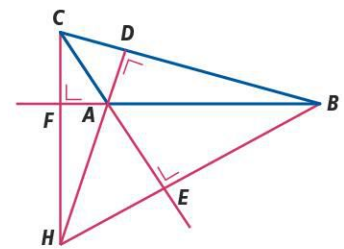
15 Meetkunde: rekenen of redeneren

- 19 a** $\angle MAP = 90^\circ$ dus M , A en P liggen op een cirkel met middellijn MP (stelling van Thales).
 $\angle MBP = 90^\circ$ dus M , B en P liggen op een cirkel met middellijn MP (stelling van Thales).
 De vier punten M , A , B en P liggen dus op dezelfde cirkel.
- b** Het middelpunt van deze cirkel is het midden van lijnstuk MP .
- c** Neem het midden N van lijnstuk MP als middelpunt en de halve lengte van MP als straal van een cirkel. De snijpunten van deze cirkel met de cirkel met middelpunt M zijn de raakpunten A en B .

- 20** $\angle C = 90^\circ$ en $\angle D = 90^\circ$ (stelling van Thales)
 Uit $AC = BC$ volgt $\angle A_1 = \angle B_1$ dus $\angle A_1 = \angle B_1 = 45^\circ$.
 $\angle A_2 = 35^\circ$, dus $\angle B_2 = 180 - 35 - 90 = 55^\circ$
 $\angle A = 45 + 35 = 80^\circ$ en $\angle B = 45 + 55 = 100^\circ$



- 21 a** $\angle BDH = 90^\circ$, dus de punten B , D en H liggen op de cirkel met middellijn BH (stelling van Thales).
 $\angle BFH = 90^\circ$, dus de punten B , F en H liggen ook op de cirkel met middellijn BH (stelling van Thales).
 Daaruit volgt dat de punten B , D , F en H op een cirkel liggen.
- b** $\angle ADB = 90^\circ$, dus de punten A , D en B liggen op de cirkel met middellijn AB (stelling van Thales).
 $\angle AEB = 90^\circ$, dus de punten A , B en E liggen ook op de cirkel met middellijn AB (stelling van Thales).
 Daaruit volgt dat de punten A , B , D en E op een cirkel liggen.
- c** Dat is het midden van zijde AB .
- d** $AFDC$, $AFHE$, $CDHE$ en $BCEF$.
- e** Als $\triangle ABC$ een stompe hoek heeft, ligt het punt H buiten de driehoek. De beweringen kloppen nog steeds, alleen krijgen de hoekpunten van de vierhoeken in sommige gevallen een andere volgorde.



- 22 a** $\triangle DEC$ ontstaat uit een vermenigvuldiging van $\triangle ABC$ met een factor 0,5.
 Daaruit volgt dat $\angle CDE = \angle CAB = 90^\circ$, dus $\frac{DE}{AB}$ (F-hoeken).
- b** Uit de vermenigvuldiging volgt dat $DE = \frac{1}{2} AB$, dus $DE = AF$.
 Vierhoek $ADEF$ heeft twee rechte hoeken en twee zijden die evenwijdig en even lang zijn, dus vierhoek $ADEF$ is een rechthoek.
- c** De cirkel met middellijn AE gaat door de vier hoekpunten van rechthoek $ADEF$.
 $\angle AGE = 90^\circ$, dus de cirkel met middellijn AE gaat door A , G en E .
 Er gaat dus één cirkel door de punten A , D , E , G en F .
- d** Het middelpunt is het midden van lijnstuk AE .

- 23** $\angle ACB = 90^\circ$ (stelling van Thales).
 Evenzo is $\angle AED = 90^\circ$ en $\angle BFD = 90^\circ$.
 Vierhoek $CEDF$ heeft dus vier rechte hoeken en is dus een rechthoek.
 De diagonalen van een rechthoek zijn even lang, dus $CD = EF$.

- 24 a** $\angle ACB = 90^\circ$ (Stelling van Thales) en $AB = 8$

$$\cos(30^\circ) = \frac{AC}{8}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{AC}{8} \text{ dus } AC = 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

- b** $\angle ABC = 180 - 90 - 30 = 60^\circ$

$\angle ACB = 90^\circ$ (stelling van Thales), dus ook $\angle BCD = 90^\circ$.

Omdat $AC = CD$ zijn de driehoeken ABC en DBC gelijkvormig met factor 1.

Dus is $\angle BDC = 30^\circ$ en daaruit volgt $\angle CBD = 60^\circ$.

$$\angle ABE = 180 - 60 - 60 = 60^\circ.$$

Punt E ligt op de cirkel met middellijn AB dus $\angle AEB = 90^\circ$ (Thales).

De hoeken van $\triangle ABE$ zijn dus gelijk aan de hoeken van $\triangle ABC$, dus deze driehoeken zijn gelijkvormig met factor 1.

Daaruit volgt $BE = BC$.

- 021 a** $\triangle ADC$ is rechthoekig.

- b** M is het midden van lijnstuk AC (stelling van Thales).

- c** N is het midden van lijnstuk BC (stelling van Thales).

- d** De zijden van $\triangle CMN$ ontstaan door de zijden van $\triangle CAB$ te vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$.

- e** $MN = \frac{1}{2} \times AB = 4\frac{1}{2}$

- 023 a** $\angle STA = 90^\circ$ volgens de stelling van Thales.

- b** Volgens de stelling van Thales is ook $\angle STB = 90^\circ$.

- c** $\angle ATB = 90 + 90 = 180^\circ$, dus T ligt op lijnstuk AB .

- U3 a** $\angle ADS = 90^\circ$ en $\angle BCS = 90^\circ$ (stelling van Thales).

$\angle ASD = \angle BSC$ (overstaande hoeken)

De driehoeken ASD en BSC hebben gelijke hoeken dus $\triangle ASD \sim \triangle BSC$.

- b** Uit de gelijkvormigheid volgt $\frac{AS}{BS} = \frac{SD}{SC}$, dus $\frac{AS}{8} = \frac{3}{SC}$.

$$AS \cdot SC = 24 \text{ en omdat } AS = SC \text{ geldt } AS^2 = 24, \text{ dus } AS = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

- c** $AD^2 + DS^2 = AS^2$, dus $AD^2 = 24 - 9 = 15$.

$$BD = 11 \text{ en } AD = \sqrt{15}, \text{ dus } AB^2 = 15 + 11^2 = 136.$$

$$AB = \sqrt{136}$$

$$\text{De straal is } MA = \frac{1}{2}\sqrt{136} \left(\text{of } \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 136} = \sqrt{44} \right).$$

15.4 Cirkels en raaklijnen

intro Stel de straal van de kleinste cirkel is r dan is de zijde van het vierkant gelijk aan $2r$.

Voor de diagonaal d van het vierkant geldt dan $d^2 = (2r)^2 + (2r)^2$ dus $d = \sqrt{8r^2}$.

$$\text{De straal van de grote cirkel is } \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{8r^2} = \sqrt{2r^2}$$

De oppervlakte van de kleine cirkel is $\pi \cdot r^2$

$$\text{De oppervlakte van de grote cirkel is } \pi \cdot (\sqrt{2r^2})^2 = \pi \cdot 2r^2$$

De verhouding van de oppervlakten is $1 : 2$

- 26** $MA = 5$ en $\angle APM = 30^\circ$, dus $\frac{5}{PM} = \sin(30^\circ)$ en $\frac{PA}{PM} = \cos(30^\circ)$

- 31** Teken lijnstuk MC en teken lijnstuk CE evenwijdig met AB .

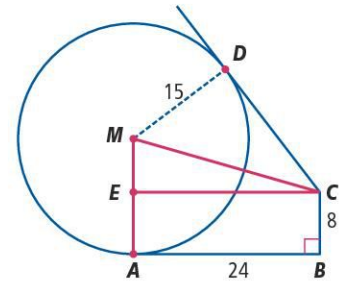
$$ME = 15 - 8 = 7 \text{ en } CE = AB = 24.$$

$$MC^2 = 7^2 + 24^2 = 625 \text{ dus } MC = \sqrt{625} = 25.$$

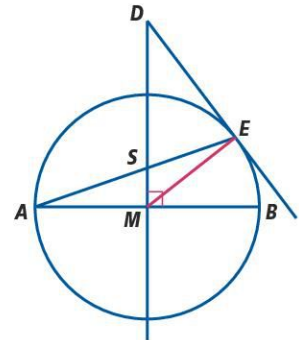
$$CD^2 + 15^2 = 25^2$$

$$CD^2 = 625 - 225 = 400$$

$$CD = \sqrt{400} = 20$$



- 028** a Als $\angle DSE = \angle DES$ dan is DSE een gelijkbenige driehoek en zijn DS en DE even lang.
 b de straal ME
 c $AM = ME$ (straal) dus $\triangle AME$ is gelijkbenig en daarom is $\angle SAM = \angle SEM$.
 d $ME \perp DE$ dus $\angle DES = 90^\circ - \angle SEM$.
 e $\angle DSE = \angle ASM$ (overstaande hoeken), dus $\angle DSE = 90^\circ - \angle SAM$.
 Uit opdracht c volgt dan dat $\angle DSE = 90^\circ - \angle SEM$.
 Maar in opdracht d was ook $\angle DES = 90^\circ - \angle SEM$.
 Dus hieruit volgt $\angle DSE = \angle DES$.
 En uit opdracht a weet je dan dat $DS = DE$.



- 029** a Stel F is een punt op het verlengde van AC .
 $\angle DCE = \angle DCB + \angle BCE$
 $\angle DCE = \frac{1}{2} \angle ACB + \frac{1}{2} \angle BCF = \frac{1}{2} \angle ACF$
 $\angle ACF = 180^\circ$ dus $\angle DCE = 90^\circ$.
 b De stelling van Thales.
 c Omdat DEC een rechthoekige driehoek is met $\angle DCE = 90^\circ$, is het midden van DE het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
 C ligt op de cirkel met middellijn DE .

- U4** Stel de straal van de cirkel is r , dan is $PB = PM - r$ en $PC = PM + r$.
 $\angle PAM = 90^\circ$, dus $PA^2 + AM^2 = PM^2$
 $PA^2 + r^2 = PM^2$ dus $PA^2 = PM^2 - r^2$
 $PB \times PC = (PM - r)(PM + r) = PM^2 - r^2$
 Conclusie: $PB \times PC = PA^2$

15.5 Algebraïsch of meetkundig

intro Stel een vergelijking op van AB en een vergelijking van de loodlijn uit O op AB . Bereken de coördinaten van punt C en vervolgens de afstand OC . De driehoeken OAB en CAO zijn gelijkvormig en daarmee kun je zijde OC ook berekenen.

- 32** a $AB^2 = 3^2 + 4^2$ dus $AB^2 = 25$ en $AB = 5$
 $\sin(\angle A) = \frac{3}{5}$
 b $\sin(\angle A) = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{4}$
 c $\frac{OC}{4} = \frac{3}{5}$ dus $OC = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$

15 Meetkunde: rekenen of redeneren

d $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB$ dus $OA \cdot OB = OC \cdot AB$

$$4 \times 3 = 5 \times OC, \text{ dus } OC = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

33 a $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de raaklijn in R is $5x - 12y = 169$.

Snijden met $x = -13$ geeft $-65 - 12y = 169$, ofwel $-12y = 234$.

$$y = -19\frac{1}{2} \text{ dus } P(-13, -19\frac{1}{2}).$$

Snijden met $x = 13$ geeft $65 - 12y = 169$, ofwel $-12y = 104$.

$$y = -8\frac{2}{3} \text{ dus } Q(13, -8\frac{2}{3}).$$

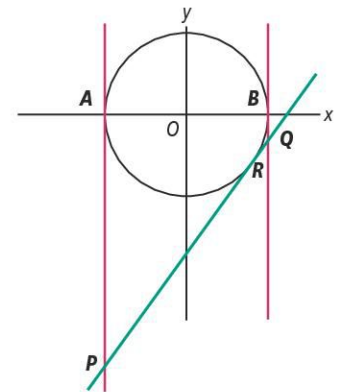
$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -13 \\ -19\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -8\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -169 + \frac{39}{2} \cdot \frac{26}{3} = 0, \text{ dus } \angle POQ = 90^\circ.$$

b Stel A en B zijn de snijpunten van de cirkel met de x -as.

$OA = OR$, $AP = RP$ en $OP = OP$, dus de driehoeken OAP en ORP zijn gelijkvormig met factor 1. Daaruit volgt $\angle AOP = \angle ROP$.

$OB = OR$, $BQ = RQ$ en $OQ = OQ$, dus de driehoeken OBQ en ORQ zijn gelijkvormig met factor 1. Daaruit volgt $\angle BOQ = \angle ROQ$.

$\angle ROP + \angle ROQ = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 180 = 90^\circ$, dus $\angle POQ = 90^\circ$.



34 a MS en MR staan loodrecht op AB respectievelijk AC , dus $ASMR$ is een vierkant. De diagonaal van het vierkant is tevens de bissectrice van hoek A .

b De vergelijking van lijn AM is $y = x$.

De lijn door $B(21, 0)$ en $C(0, 28)$ heeft als helling $-\frac{28}{21} = -\frac{4}{3}$.

De vergelijking van lijn BC is $y = -\frac{4}{3}x + 28$.

c Het snijpunt van de lijnen AM en BC berekenen:

$$x = -\frac{4}{3}x + 28$$

$$\frac{7}{3}x = 28, \text{ dus } x = 12.$$

De coördinaten van M zijn $(12, 12)$ en de straal is dus 12.

d $BS = 21 - r$

e De driehoeken BSM en BAC zijn gelijkvormig:

$$\frac{SM}{AC} = \frac{BS}{BA} \text{ invullen geeft } \frac{r}{28} = \frac{21-r}{21}$$

$$21r = 588 - 28r$$

$$49r = 588, \text{ dus } r = 12.$$

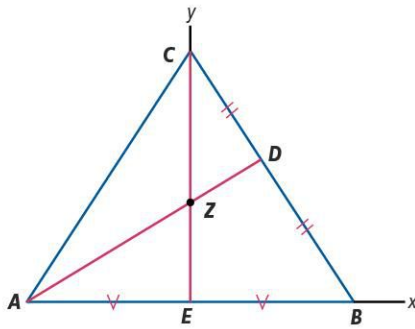
f De oppervlakte van driehoek ABM is $\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot r = 10\frac{1}{2}r$.

De oppervlakte van driehoek ACM is $\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot r = 14r$.

g De oppervlakte van driehoek ABC is $\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 28 = 294$.

$$10\frac{1}{2}r + 14r = 294$$

$$24\frac{1}{2}r = 294 \text{ dus } r = 12.$$

35 a

b $CE^2 + 6^2 = 12^2$

$$CE^2 = 108, \text{ dus } CE = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

De coördinaten zijn $C(0, 6\sqrt{3})$ en $D(3, 3\sqrt{3})$.

c Punt Z verdeelt CE in de verhouding 1: 2 dus $Z(0, 2\sqrt{3})$

De coördinaten zijn $F(0, 4\sqrt{3})$.

d $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DE} = -3 \cdot -3 + \sqrt{3} \cdot -3\sqrt{3} = 9 - 9 = 0$$

$$\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{DE}, \text{ dus } \angle EDF = 90^\circ$$

36 Voor de tekening zie opdracht 35.

Omdat driehoek ABC gelijkzijdig is, zijn de zwaartelijnen even lang.

Het zwaartepunt Z verdeelt beide zwaartelijnen in de verhouding 1: 2 dus $ZE = ZD$.

Omdat F het midden is van ZC, geldt $ZF = \frac{1}{2} ZC$ en dus ook $ZF = ZE$.

De punten D, E en F liggen dus even ver van punt Z, dus op een cirkel met middelpunt Z.

Volgens de stelling van Thales volgt daaruit $\angle EDF = 90^\circ$.

37 a De coördinaten van enkele punten zijn $M(-9, 0)$, $N(15, 0)$ en $P(-9, 9)$.

De vergelijking van PT is $y = 9$.

De vergelijking van c_2 is $(x - 15)^2 + y^2 = 225$.

$y = 9$ invullen geeft $(x - 15)^2 + 81 = 225$.

$$(x - 15)^2 = 144$$

$$x - 15 = 12 \text{ of } x - 15 = -12$$

$$x = 27 \text{ of } x = 3, \text{ dus } S(3, 9) \text{ en } T(27, 9).$$

$$PS = 12 \text{ en } PT = 36$$

b $SQ^2 + 9^2 = 15^2$ dus $SQ^2 = 144$ en $SQ = \sqrt{144} = 12$.

$$PS = PQ - SQ = 24 - 12 = 12$$

$$PT = PQ + QT = 24 + 12 = 36$$

38 a $BC = 2 \cdot BM$ dus de vergelijking van MC is $y = 2x$.

MK staat loodrecht op MC, dus de vergelijking van MK is $y = -\frac{1}{2}x$

b Stel (bijvoorbeeld) $AB = 12$.

De coördinaten zijn $B(6, 0)$, $C(6, 12)$ en $K(-6, 3)$.

15 Meetkunde: rekenen of redeneren

c $\tan(\angle BCM) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$MK = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} \text{ en } MC = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180}$$

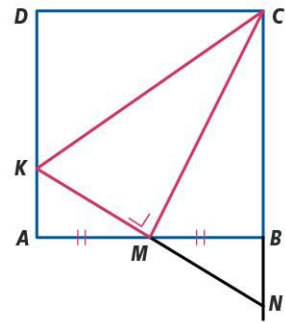
$$\tan(\angle MCK) = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{180}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\angle BCM) = \tan(\angle MCK), \text{ dus } \angle BCM = \angle MCK.$$

- d Stel het verlengde van KM snijdt het verlengde van CB in punt N .
De driehoeken MAK en MBN zijn gelijkvormig, want hun hoeken zijn gelijk.

Daaruit volgt dat $\angle CKM = \angle CNM$.

$$\angle BCM = 90^\circ - \angle CNM \text{ en } \angle MCK = 90^\circ - \angle CKM \text{ dus } \angle BCM = \angle MCK.$$



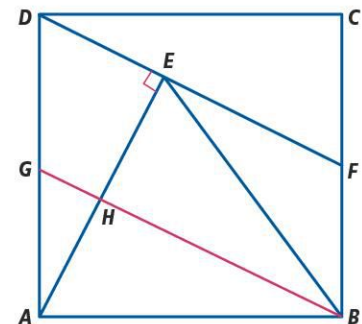
- 39 G is het midden van AD .

Teken BG , het snijpunt met AE is H .

$BFDG$ is een parallellogram, dus $\frac{BG}{FD}$, en dus staat BG loodrecht op AE .

Daaruit volgt $\triangle AHG \sim \triangle AED$, en omdat $AG:AD = 1:2$ geldt ook $AH:AE = 1:2$. Dus H is het midden van AE .

Omdat BH zowel de zwaartelijn als de hoogtelijn is in driehoek ABE , is driehoek ABE gelijkbenig met $AB = BE$.



Algebraïsch:

Kies een assenstelsel met $A(0,0)$ en neem $AB = 12$, dus is $B(12,0)$

De lijn door $D(0,12)$ en $F(12,6)$ heeft als vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 12$.

De loodlijn AE heeft de vergelijking $y = 2x$.

Het snijpunt van deze lijnen berekenen geeft:

$$2x = -\frac{1}{2}x + 12$$

$$2\frac{1}{2}x = 12, \text{ dus } x = 4\frac{4}{5}. \text{ Het snijpunt is } E\left(4\frac{4}{5}, 9\frac{3}{5}\right).$$

$$BE = \sqrt{(12 - 4\frac{4}{5})^2 + (9\frac{3}{5})^2} = \sqrt{144} = 12, \text{ dus } BE = AB.$$

- 40 Stel de coördinaten van punt C zijn (p, q) .

Punt M is de oorsprong, dus de vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 = 25$.

$\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en dat is de normaalvector van de raaklijn in C .

De vergelijking van PQ is $px + qy = r$.

Invullen van $C(p, q)$ geeft $p^2 + q^2 = r$, en omdat C op de cirkel ligt is $r = 25$.

De vergelijking van PQ is $px + qy = 25$.

Het snijpunt van PQ met de y -as berekenen:

$$p \cdot 0 + qy = 25 \text{ geeft } y = \frac{25}{q}, \text{ dus } Q\left(0, \frac{25}{q}\right).$$

Het snijpunt van PQ met de raaklijn in A berekenen: $p \cdot 5 + qy = 25$ geeft

$$qy = -5p + 25 \text{ ofwel } y = \frac{-5p + 25}{q} \text{ dus } P\left(5, \frac{-5p + 25}{q}\right)$$

$$PQ = \sqrt{(5 - 0)^2 + \left(\frac{-5p + 25}{q} - \frac{25}{q}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{25p^2}{q^2}}$$

$$PQ = \sqrt{\frac{25q^2}{q^2} + \frac{25p^2}{q^2}} = \sqrt{\frac{25q^2 + 25p^2}{q^2}} = \sqrt{\frac{25(p^2 + q^2)}{q^2}}$$

C ligt op de cirkel, dus $p^2 + q^2 = 25$.

Daaruit volgt $PQ = \sqrt{\frac{625}{q^2}} = \frac{25}{q}$ en dat is gelijk aan MQ .

Meetkundig:

Stel $\angle AMP = \alpha$, dan is $\angle MPA = 90^\circ - \alpha$.

Omdat $PA = PC$ (raaklijnstukken), zijn de driehoeken MAP en

MCP gelijkvormig en daaruit volgt $\angle CMP = \angle AMP = \alpha$ en

$\angle MPC = \angle MPA = 90^\circ - \alpha$.

$\angle CMQ = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$

$\angle PMQ = \angle CMQ + \angle CMP = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha$

Conclusie: $\angle PMQ = \angle MPQ$ en daaruit volgt $MQ = PQ$.

033 a $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van PQ is $3x - 4y = c$.

Door de coördinaten van R in te vullen vind je de vergelijking $3x - 4y = 25$.

$x = -5$ invullen geeft $-15 - 4y = 25$ ofwel $-4y = 40$ dus $y = -10$.

Dit geeft $Q(5, -2\frac{1}{2})$.

$x = 5$ invullen geeft $15 - 4y = 25$ ofwel $-4y = 10$ dus $y = -2\frac{1}{2}$.

Dit geeft $P(-5, -10)$.

b $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -25 + 25 = 0$, dus deze vectoren staan loodrecht op elkaar.

Dat betekent dat $\angle POQ = 90^\circ$.

c Neem $A(-5, 0)$ en $B(5, 0)$.

$PA = PR$ (raaklijnstukken) en $OA = OR$ (straal), dus de driehoeken OAP en

ORP zijn gelijkvormig met factor 1. Daaruit volgt $\angle O_1 = \angle O_2$.

Op dezelfde manier kun je beredeneren dat $\angle O_3 = \angle O_4$.

d $\angle POQ = \angle O_2 + \angle O_3$ en $\angle O_2 + \angle O_3 = \frac{1}{2} \angle AOR + \frac{1}{2} \angle BOR$

$$\frac{1}{2} (\angle AOR + \angle BOR) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Dus $\angle POQ = 90^\circ$.

039 a De lijn door $D(0, 6)$ en $F(6, 3)$ heeft als vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

De loodlijn AE heeft als vergelijking $y = 2x$.

Het snijpunt van deze twee lijnen berekenen geeft:

$$2x = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$2\frac{1}{2}x = 6, \text{ dus } x = 2\frac{2}{5}.$$

Het snijpunt is $E(2\frac{2}{5}, 4\frac{4}{5})$.

b $BE = \sqrt{(6 - 2\frac{2}{5})^2 + (4\frac{4}{5})^2} = \sqrt{36} = 6$.

Ook $AB = 6$, dus $BE = AB$.

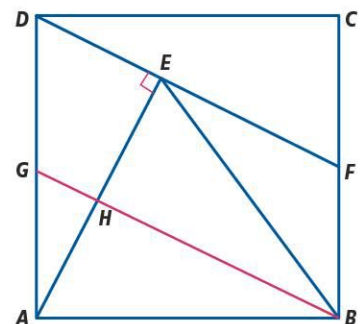
c Teken BG , het snijpunt met AE is H .

$BFDG$ is een parallellogram, dus $\frac{BG}{FD}$, en dus staat BG loodrecht op AE .

Daaruit volgt $\triangle AHG \sim \triangle AED$, en omdat $AG : AD = 1 : 2$, geldt ook

$AH : AE = 1 : 2$. Dus G is het midden van AE .

Omdat BH zowel zwaartelijn als hoogtelijn is in driehoek ABE , is driehoek ABE gelijkbenig met $AB = BE$.



15 Meetkunde: rekenen of redeneren

- U5** $MP = MB$ (straal van de grootste cirkel)
 $MA = MC$ (straal van de kleinste cirkel)
 $\angle PMC = \angle BMA$
 Hieruit volgt dat de driehoeken MPC en MBA gelijkvormig zijn met factor 1.
 Dat betekent dat $\angle MCP = \angle MAB$.
 $\angle MAB = 90^\circ$, dus ook $\angle MCP = 90^\circ$ en dus raakt lijn PC de cirkel.

15.6 Gemengde opdrachten

- 41** De hoeken van driehoek ABR zijn 20° , 20° en 140° .
 $AR = BR$ dus $6^2 = AR^2 + AR^2 - 2 \cdot AR \cdot AR \cdot \cos(140^\circ)$
 $36 = 2AR^2 + 1,532...AR^2$
 $36 = 3,532...AR^2$
 $AR^2 = 10,192...$, dus $AR = 3,192...$
 $AQ = AR$
 $QR^2 = AR^2 + AQ^2 - 2 \cdot AR \cdot AQ \cdot \cos(20^\circ)$
 $QR^2 = AR^2 + AR^2 - 2 \cdot AR \cdot AR \cdot \cos(20^\circ)$
 Invullen van $AR = 3,192...$ geeft $QR^2 = 1,229...$
 De zijden van driehoek PQR zijn $\sqrt{1,229...} \approx 1,11$ lang.
- 42** Stel $AB = AC = a$ en pas de cosinusregel toe.
 $(a + 6)^2 = a^2 + 8^2 - 2 \cdot a \cdot 8 \cdot \cos(103^\circ)$
 $a^2 + 12a + 36 = a^2 + 64 + 3,599... \cdot a$
 $8,400... \cdot a = 28$
 $a \approx 3,3$, dus $AB = AC \approx 3,3$
- 43 a** De vergelijking van l is $y = 5$.
 De richtingscoëfficiënt van BC is $\frac{8}{4} = 2$, dus de vergelijking is $y = 2x - 5$.
 $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en dat is de normaalvector van DE , dus de vergelijking is
 $4x + 3y = c$ en door invullen van de coördinaten van C vind je $4x + 3y = 25$.
 De x -coördinaat van S volgt uit $5 = 2x - 5$.
 $2x = 10$, dus $x = 5$ en $S(5, 5)$.
 De coördinaten van D volgen uit $4x + 3 \cdot 5 = 25$, dus $4x = 10$.
 $x = 2\frac{1}{2}$, dus $D(2\frac{1}{2}, 5)$.
 $AD = 2\frac{1}{2}$ en $AS = 5$, dus D is het midden van AS .
- b** $\angle EBC = \angle DSC$ en $\angle BEC = \angle SDC$ (beide Z -hoeken) dus $\triangle EBC \sim \triangle DSC$.
 $EB = EC$ (raaklijnstukken) dus ook $DS = DC$.
 Ook geldt $DA = DC$ (raaklijnstukken)
 $DS = DC$ en $DA = DC$, dus $DA = DS$.
 D is het midden van AS .

- 44** Verleng QP , het snijpunt met de lijn AB is S .

Stel de afstand $SA = x$.

$$\triangle SKP \sim \triangle SLQ, \text{ dus } \frac{SK}{PK} = \frac{SL}{QL} \text{ ofwel } \frac{x+1}{1} = \frac{x+5}{3}$$

$$3(x+1) = 1(x+5)$$

$$3x + 3 = x + 5$$

$$2x = 2, \text{ dus } x = 1$$

$$SP^2 + 1^2 = 2^2, \text{ dus } SP^2 = 3 \text{ en } SP = \sqrt{3}$$

$$SQ^2 + 3^2 = 6^2, \text{ dus } SQ^2 = 27 \text{ en } SQ = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ en } PQ = 2\sqrt{3}$$

$$CD^2 + CM^2 = DM^2, \text{ dus } CD^2 = 16 - 4 = 12$$

$$CD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \text{ dus } CD = PQ.$$

Onderzoeksoopdrachten

- 45** Kies een punt D op de verticale lijn door A zodat driehoek ABD rechthoekig is.

$$AB = \sqrt{(208 - 162)^2 + (375 - 384)^2} = \sqrt{2197}$$

$$\tan(\angle DAB) = \frac{208 - 162}{384 - 375} = \frac{46}{9} = 5\frac{1}{9}, \text{ dus } \angle DAB \approx 79^\circ$$

$$\angle ACB = 180 - 59 - 71 = 50^\circ$$

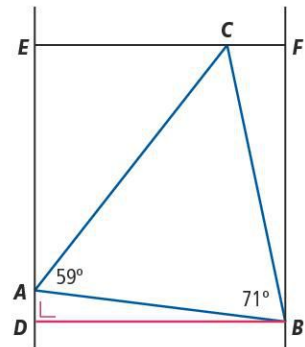
$$\frac{AC}{\sin(71^\circ)} = \frac{\sqrt{2197}}{\sin(50^\circ)} \text{ dus } AC = \frac{\sqrt{2197} \cdot \sin(71^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 57,85$$

$$\angle EAC = 180 - 59 - 79 = 42^\circ$$

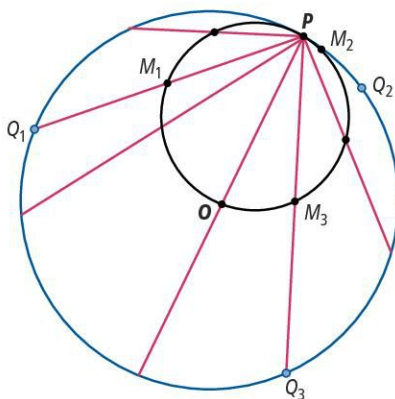
$$\sin(42^\circ) = \frac{EC}{57,85} \text{ dus } EC = 57,85 \sin(42^\circ) \approx 38,7$$

$$\cos(42^\circ) = \frac{AE}{57,85} \text{ dus } AE = 57,85 \cos(42^\circ) \approx 43,0$$

De coördinaten van punt C zijn $(162 + 38,7; 384 + 43,0)$, dus $C(200,7; 427,0)$.



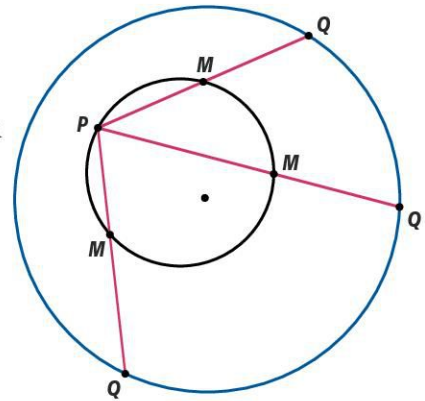
- 46 a b**



De gevonden punten liggen op een cirkel.

15 Meetkunde: rekenen of redeneren

- c Voor ieder punt Q geldt: $OP = OQ$, dus $\triangle OPQ$ is gelijkbenig
De zwaartelijn uit de top van een gelijkbenige driehoek is tevens de hoogtelijn, dus $OM \perp PQ$.
 $\angle OMP = 90^\circ$, dus M ligt op een cirkel met middellijn OP (stelling van Thales).
- d Alle punten M ontstaan door uit punten Q op de cirkel de afstand tot punt P te halveren. Het resultaat is een cirkel waarvan de straal de helft is van de straal van de oorspronkelijke cirkel.
N.B. Deze redenering geldt overigens ook bij opdracht c.



Samenvatting

S1 $\angle B = 180^\circ - 42^\circ - 81^\circ = 57^\circ$

a $\frac{AC}{\sin(57^\circ)} = \frac{11}{\sin(81^\circ)}$ dus $AC = \frac{11 \cdot \sin(57^\circ)}{\sin(81^\circ)} \approx 9,3$

$\frac{BC}{\sin(42^\circ)} = \frac{11}{\sin(81^\circ)}$ dus $BC = \frac{11 \cdot \sin(42^\circ)}{\sin(81^\circ)} \approx 7,5$

b $\frac{13}{\sin(\angle R)} = \frac{10}{\sin(48^\circ)}$

$\sin(\angle R) = \frac{13 \cdot \sin(48^\circ)}{10} = 0,966\dots$ dus $\angle R = 75,036\dots^\circ$

$\angle Q = 180^\circ - 48^\circ - 75,036\dots^\circ = 56,963\dots^\circ \approx 57^\circ$

$\frac{PR}{\sin(56,963\dots^\circ)} = \frac{10}{\sin(48^\circ)}$

$PR = \frac{10 \cdot \sin(56,963\dots^\circ)}{\sin(48^\circ)} \approx 11,3$

S2 a $4^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle C)$ $6^2 = 4^2 + 9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \cos(\angle A)$
 $16 = 36 + 81 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle C)$ $36 = 16 + 81 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \cos(\angle A)$
 $108 \cdot \cos(\angle C) = 101$ $72 \cdot \cos(\angle A) = 61$

$\cos(\angle C) = \frac{101}{108}$

$\angle C = 20,741\dots^\circ \approx 21^\circ$

$\angle B = 180^\circ - 20,741\dots^\circ - 32,089\dots^\circ \approx 127^\circ$

$\cos(\angle A) = \frac{61}{72}$

$\angle A = 32,089\dots^\circ \approx 32^\circ$

b $LM^2 = 15^2 + 7^2 - 2 \cdot 15 \cdot 7 \cdot \cos(117^\circ) = 369,338\dots$

$LM = \sqrt{369,338\dots} \approx 19,2$

- S3 Uit de stelling van Thales volgt $\angle AQB = 90^\circ$, dus $\angle QAP = 90^\circ - \angle QBP$ en dus $\angle PQB = \angle QAP$.

$\tan(\angle QAP) = \frac{PQ}{PA}$ en $\tan(\angle PQB) = \frac{PB}{PQ}$

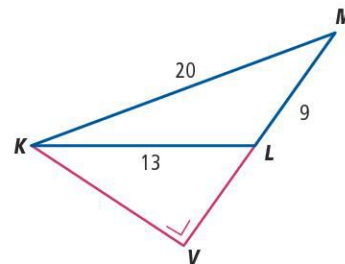
waaruit volgt $\frac{PQ}{PA} = \frac{PB}{PQ}$ dus $PQ^2 = PA \times PB$.

- S4** $MB = 4$ (straal), pas nu de cosinusregel toe in $\triangle MAB$:
 $6^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos(\angle AMB)$
 $4 = -32\cos(\angle AMB)$
 $\cos(\angle AMB) = -0,125$ dus $\angle AMB \approx 97^\circ$.
Omdat $\angle MAP$ en $\angle MBP$ beide gelijk zijn aan 90° , geldt
 $\angle APB \approx 360 - 90 - 90 - 97 = 83^\circ$.
- S5 a** Kies een assenstelsel met $B(0,0)$ en $A(0,10)$.
Een vergelijking van raaklijn l is $y = 10$.
Een vergelijking van BC is $y = -2x$.
De coördinaten van S berekenen: $-2x = 10$, dus $x = -5$ en $S(-5, 10)$.
Het middelpunt is $M(0, 5)$ dus $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Een vergelijking van de lijn PD is $-4x + 3y = 40$.
De coördinaten van D berekenen: $-4x + 3 \cdot 10 = 40$, dus $x = -2\frac{1}{2}$ en
 $D(-2\frac{1}{2}, 10)$.
 $AD = DS = 2\frac{1}{2}$, dus D is het midden van AS .
- b** $\triangle PBC$ is gelijkbenig (raaklijnstukken PB en PC zijn gelijk).
c $\angle PBC = \angle DSC$ (Z-hoeken) en $\angle BCP = \angle SCD$ (overstaande hoeken), dus
 $\triangle PBC \sim \triangle DSC$.
d Omdat $PB = PC$ volgt uit de gelijkvormigheid dat ook $DS = DC$.
Verder geldt $DA = DC$ (gelijke raaklijnstukken).
Daaruit volgt $DS = DA$, dus D is het midden van AS .

Test jezelf

- T1** $\frac{12}{\sin(83^\circ)} = \frac{7}{\sin(\angle R)}$ geeft $\sin(\angle R) = \frac{7 \cdot \sin(83^\circ)}{12} = 0,578\dots$ dus
 $\angle R = 35,379\dots^\circ$
 $\angle Q = 180 - 83 - 35,379\dots = 61,620\dots^\circ$
 $\frac{PR}{\sin(61,620\dots^\circ)} = \frac{12}{\sin(83^\circ)}$ geeft $PR = \frac{12\sin(61,620\dots^\circ)}{\sin(83^\circ)} \approx 10,6$

- T2** Stel de hoogtelijn snijdt LM in punt V .
 $KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos(\angle L)$
 $400 = 169 + 81 - 234\cos(\angle L)$
 $\cos(\angle L) = \frac{150}{-234} = -0,641\dots$ dus $\angle L \approx 130^\circ$.
 $\angle KLV = 180 - 130 = 50^\circ$
 $\sin(50^\circ) = \frac{KV}{13}$ dus $KV = 13\sin(50^\circ) \approx 10,0$



15 Meetkunde: rekenen of redeneren

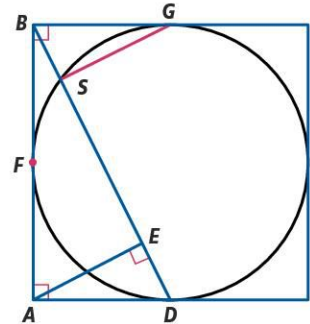
- T3 a** Omdat $\triangle ABC$ gelijkbenig is, geldt $\angle B = \frac{1}{2}(180 - 70) = 55^\circ$.
- b** $\angle AEB = 90^\circ$ (stelling van Thales) dus ook $\angle AEC = 90^\circ$.
 $\angle CAE = 180 - 90 - 70 = 20^\circ$.
- c** Als $\alpha = 90^\circ$ ligt C op de cirkel (stelling van Thales) dus als $\alpha < 90^\circ$ ligt C buiten de cirkel.
- d** $\angle A = \angle B = \frac{1}{2}(180 - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$
 $\angle AEC = 90^\circ$ dus $\angle CAE = 180 - 90 - \alpha = 90^\circ - \alpha$.
 $\angle MAE = \angle MAC - \angle CAE = (90 - \frac{1}{2}\alpha) - (90 - \alpha) = \frac{1}{2}\alpha$ en $\triangle AME$ is gelijkbenig, dus ook $\angle AEM = \frac{1}{2}\alpha$.
 $\angle AME = 180 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha = 180 - \alpha$.
 De hoeken van vierhoek $AMEC$ zijn: $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, $180^\circ - \alpha$, $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ en α .
- T4 a** Als je NS tekent evenwijdig aan PQ met S op MP , ontstaat een rechthoekige driehoek MNS met $MN = 8$ en $MS = 2$.
 $PQNS$ is een rechthoek dus $PQ = NS$.
 $8^2 = 2^2 + NS^2$, dus $NS^2 = 60$ en $NS = \sqrt{60}$.
 Dus $PQ = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.
- b** $\angle MNS = \angle NRQ$ (F -hoeken) en $\angle MSN = \angle NQR = 90^\circ$
 dus $\triangle MSN \sim \triangle NQR$. Hieruit volgt
 $\frac{RQ}{2\sqrt{15}} = \frac{3}{2}$ dus $RQ = \frac{3 \cdot 2\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$
- T5** De cosinusregel toepassen in $\triangle ABC$ geeft
 $8^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos(\angle A)$
 $126 \cos(\angle A) = 66$, dus $\cos(\angle A) = \frac{66}{126}$
 Pas nu de cosinusregel toe in $\triangle ADC$:
 $CD^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos(\angle A)$
 $CD^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{66}{126}$
 $CD^2 = 36$ dus $CD = 6$
 Opmerking: Het is niet nodig de grootte van $\angle A$ te berekenen.
- T6 a** De coördinaten van de punten zijn dan $A(0, 0)$, $B(0, 8)$, $D(4, 0)$, $F(0, 4)$ en $G(4, 8)$. Het middelpunt van de cirkel is $(4, 4)$.
- b** De richtingscoëfficiënt van BD is -2 , en een vergelijking van BD is
 $y = -2x + 8$. Een vergelijking van AE is $y = \frac{1}{2}x$.
 De coördinaten van E volgen uit $\frac{1}{2}x = -2x + 8$.
 $2\frac{1}{2}x = 8$ dus $x = \frac{8}{2\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{5}$
 $y = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} = 1\frac{3}{5}$, dus $E(3\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5})$
 Een vergelijking van de cirkel is $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$.
 BD snijden met de cirkel:
 $(x - 4)^2 + (-2x + 8 - 4)^2 = 16$
 $(x - 4)^2 + (-2x + 4)^2 = 16$
 $x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 16x + 16 = 16$
 $5x^2 - 24x + 16 = 0$
 De discriminant is $(-24)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 16 = 256$.

$$x = \frac{24 - \sqrt{256}}{10} = \frac{4}{5} \text{ of } x = \frac{24 + \sqrt{256}}{10} = 4$$

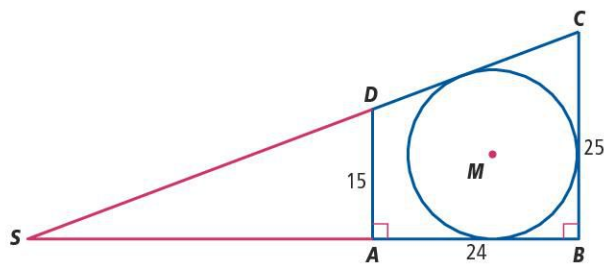
De snijpunten zijn $S(\frac{4}{5}, 6\frac{2}{5})$ en $D(4, 0)$.

$$DE = \sqrt{(4 - 3\frac{1}{5})^2 + (1\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{80}{25}} \text{ en } BS = \sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (8 - 6\frac{2}{5})^2} = \sqrt{\frac{80}{25}} \text{ dus } DE = BS.$$

- T7** $\angle GSD = 90^\circ$ (stelling van Thales) en $\angle GBS = \angle ADE$ (Z-hoeken).
De driehoeken BGS en DAE hebben gelijke hoeken, dus $\triangle BGS \sim \triangle DAE$.
 $BG = AD = 4$, dus de factor van de gelijkvormigheid is 1.
Hieruit volgt dat $DE = BS$.



T8 a



- b** $\triangle SAD \sim \triangle SBC$, want de overeenkomstige hoeken zijn gelijk.

$$\frac{AS}{AS + 24} = \frac{15}{25} \text{ dus } 25AS = 15AS + 360$$

$$10AS = 360 \text{ waaruit volgt } AS = 36$$

$$SD^2 = 36^2 + 15^2 = 1521 \text{ dus } SD = \sqrt{1521} = 39$$

- c** $SC^2 = (36 + 24)^2 + 25^2 = 4225$ dus $SC = \sqrt{4225} = 65$

De oppervlakte van $\triangle SBC$ is gelijk aan
 $\text{opp. } \triangle SMB + \text{opp. } \triangle BMC + \text{opp. } \triangle SMC =$

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot SB + \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot r \cdot SC =$$

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot 25 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot 65 = 75r$$

De oppervlakte van $\triangle SBC$ is ook $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 60 = 750$.

$$75r = 750, \text{ dus } r = 10.$$

Extra oefening

E1 a $\frac{AC}{\sin(12^\circ)} = \frac{22}{\sin(82^\circ)} \text{ dus } AC = \frac{22 \cdot \sin(12^\circ)}{\sin(82^\circ)} \approx 4,6$

$$\angle A = 180^\circ - 82^\circ - 12^\circ = 86^\circ$$

$$\frac{BC}{\sin(86^\circ)} = \frac{22}{\sin(82^\circ)} \text{ dus } BC = \frac{22 \cdot \sin(86^\circ)}{\sin(82^\circ)} \approx 22,2$$

15 Meetkunde: rekenen of redeneren

$$\text{b} \quad \frac{14}{\sin(\angle F)} = \frac{7}{\sin(21^\circ)}$$

$$\sin(\angle F) = \frac{14 \cdot \sin(21^\circ)}{7} \text{ dus } \angle F \approx 46^\circ \text{ of } \angle F \approx 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$$

$$\text{Als } \angle F = 46^\circ \text{ dan is } \angle E \approx 180^\circ - 21^\circ - 46^\circ = 113^\circ$$

$$\text{Als } \angle F = 134^\circ \text{ dan is } \angle E \approx 180^\circ - 21^\circ - 134^\circ = 25^\circ$$

$$\text{E2 a} \quad ML^2 = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \cos(47^\circ) = 128,020\dots$$

$$ML = \sqrt{128,020\dots} \approx 11,3$$

$$\text{b} \quad 17^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos(\angle U)$$

$$160 \cdot \cos(\angle U) = -125$$

$$\cos(\angle U) = -\frac{125}{160} \text{ dus } \angle U = 141,375\dots^\circ \approx 141^\circ$$

$$8^2 = 17^2 + 10^2 - 2 \cdot 17 \cdot 10 \cdot \cos(\angle S)$$

$$340 \cdot \cos(\angle S) = 325$$

$$\cos(\angle S) = \frac{325}{340} \text{ dus } \angle S = 17,082\dots^\circ \approx 17^\circ$$

$$\angle T = 180^\circ - 141,375\dots^\circ - 17,082\dots^\circ \approx 22^\circ$$

$$\text{E3} \quad \angle CDE = 90^\circ \text{ (stelling van Thales) dus } DE \perp CD.$$

CD is de hoogtelijn op AB , dus $AB \perp CD$.

Hieruit volgt dat lijnstuk DE evenwijdig is met zijde AB .

$$\text{E4 a} \quad c = AQ + BQ$$

$$AP = AQ \text{ en } BQ = BR, \text{ dus } c = AP + BR.$$

$$AP = b - r \text{ en } BR = a - r \text{ dus}$$

$$c = b - r + a - r$$

$$c = a + b - 2r$$

$$\text{b} \quad \text{Stel } b = 4 \text{ en } c = 6, \text{ dan geldt } a^2 + 16 = 36.$$

$$a^2 = 20 \text{ dus } a = \sqrt{20}$$

Uit $c = a + b - 2r$ volgt nu

$$6 = \sqrt{20} + 4 - 2r$$

$$2r = -2 + \sqrt{20}$$

$$r = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{20}$$

$$r = -1 + \sqrt{5}$$

$$\text{E5 a} \quad \text{Neem aan dat de } y\text{-as door } D \text{ gaat.}$$

Dan zijn de coördinaten van punt C $(60, 25)$.

Het midden van AC is het punt $N(30, 12\frac{1}{2})$.

De richtingsvector van AC is $\begin{pmatrix} 60 \\ 25 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Een lijn door N loodrecht op AC heeft de vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 12\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Deze lijn snijden met de y -as geeft het middelpunt M van de cirkel.

$$30 + 5\lambda = 0 \text{ dus } \lambda = -6.$$

Het middelpunt is $M(0, 84\frac{1}{2})$, dus de straal is $84\frac{1}{2}$.

- b** $\angle ACD = 90^\circ$ (stelling van Thales), dus $\angle ADC = 90^\circ - \angle CAD$.
 $\angle DAB = 90^\circ$ (raaklijn), dus $\angle BAC = 90^\circ - \angle CAD$.
 De driehoeken ACD en CBA hebben dus gelijke hoeken en zijn gelijkvormig.

Bereken eerst AC : $AC^2 = 60^2 + 25^2$ dus $AC^2 = 4225$ en $AC = \sqrt{4225} = 65$.

$\frac{AD}{65} = \frac{65}{25}$ geeft $25AD = 4225$ dus $AD = 169$ en dat is gelijk aan tweemaal de straal.

De straal is $\frac{1}{2} \cdot 169 = 84\frac{1}{2}$.

- E6** Verdeel de vierhoek $ABCD$ in de driehoeken ABM , BCM , CDM en ADM .
 In elk van deze driehoeken is de lengte van de hoogtelijn uit M gelijk aan de straal van de ingeschreven cirkel.

$$Opp.ABCD = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot r \cdot CD + \frac{1}{2} \cdot r \cdot AD$$

$$Opp.ABCD = \frac{1}{2} \cdot r(AB + BC + CD + AD)$$

$$Opp.ABCD = r \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CD + AD)$$

$$Opp.ABCD = r \cdot \text{halve omtrek}$$

$$\text{dus } r = \frac{\text{opp.}ABCD}{\text{halve omtrek}}$$

- E7 a** $\angle ADB = 90^\circ$ en $\angle ACB = 90^\circ$ (stelling van Thales)
 $\angle ASD = \angle BSC$ (overstaande hoeken)
 $\triangle ASD \sim \triangle BSC$, want de overeenkomstige hoeken zijn gelijk.

b $\frac{DS}{6} = \frac{9}{10}$ dus $10DS = 54$ en $DS = 5,4$

- c** Kies bijvoorbeeld $\triangle ABC$, hiervan is $AC = 15$ bekend.
 De andere rechthoekszijde, BC , kan berekend worden in $\triangle BSC$.
 $BC^2 + 6^2 = 10^2$ dus $BC^2 = 64$ en $BC = 8$.

- d** Gebruik weer $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 15^2 + 8^2 = 289, \text{ dus } AB = \sqrt{289} = 17$$

De straal is $17 : 2 = 8\frac{1}{2}$.

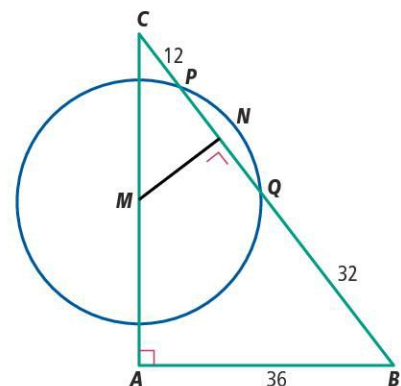
- E8** Trek de hulplijn MN loodrecht op BC .
 N is het midden van PQ , want $\triangle MPQ$ is gelijkbenig.
 $BC = 32 + 16 + 12 = 60$ en $CN = 12 + 8 = 20$.
 $AC^2 + 36^2 = 60^2$, dus $AC^2 = 2304$ en $AC = 48$.
 $\triangle ABC \sim \triangle NMC$, want ze hebben gelijke hoeken.

$$\frac{MN}{20} = \frac{36}{48} \text{ hieruit volgt } 48MN = 720 \text{ dus } MN = 15.$$

$$MP^2 = MN^2 + NP^2$$

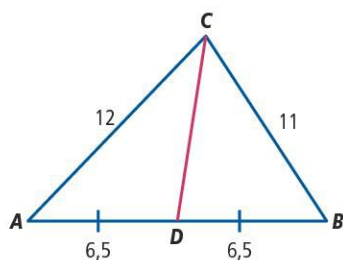
$$MP^2 = 15^2 + 8^2 = 289, \text{ dus } MP = 17$$

De straal van de cirkel is 17.



15 Meetkunde: rekenen of redeneren

E9 a



$$\text{b } CD^2 = 12^2 + (6\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6\frac{1}{2} \cdot \cos(\angle A)$$

$$CD^2 = 186\frac{1}{4} - 156 \cdot \cos(\angle A)$$

$$\text{c } 11^2 = 12^2 + 13^2 - 2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \cos(\angle A)$$

$$-192 = -312 \cdot \cos(\angle A)$$

$$\cos(\angle A) = \frac{192}{312} = \frac{8}{13}$$

$$\text{d } \cos(\angle A) = \frac{8}{13} \text{ substitueren in } CD^2 = 186\frac{1}{4} - 156 \cdot \cos(\angle A) \text{ geeft}$$

$$CD^2 = 186\frac{1}{4} - 156 \cdot \frac{8}{13}$$

$$CD^2 = 90\frac{1}{4} \text{ dus } CD = \sqrt{90\frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

Voorkennis

$$\begin{aligned} \text{V1 a } f(x) &= 11 + 6x^{11} - 11 \cdot x^{-7} \\ f'(x) &= 0 + 6 \cdot 11x^{10} - 11 \cdot -7x^{-8} \\ f'(x) &= 66x^{10} + 77x^{-8} \\ f'(x) &= 66x^{10} + \frac{77}{x^8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } g(x) &= -4 \cdot x^{\frac{3}{5}} + 125 \\ g'(x) &= -4 \cdot \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} + 0 \\ g'(x) &= \frac{-12}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{-12}{5\sqrt[5]{x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } h(x) &= e^x + 5 \\ h'(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= -4 \cdot (2x - 5)^{-2} \\ k'(x) &= -4 \cdot -2(2x - 5)^{-3} \cdot 2 \\ k'(x) &= \frac{16}{(2x - 5)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } l(x) &= x^3 - \frac{1}{3}x^2 \\ l'(x) &= 3x^2 - \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } m(x) &= 2\ln(x) + 7 \\ m'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V2 a } f(x) &= 6 \cdot (3x - 4)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= 6 \cdot \frac{1}{2} (3x - 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 \\ f'(x) &= \frac{9}{\sqrt{3x - 4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } g(x) &= (x^2 - 8x + 20)^{\frac{1}{2}} \\ g'(x) &= \frac{1}{2} (x^2 - 8x + 20)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 8) \\ g'(x) &= \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } h(x) &= x + 4x^2 + \frac{4}{x} + 16 \\ h(x) &= x + 4x^2 + 4x^{-1} + 16 \\ h'(x) &= 1 + 4 \cdot 2x + 4 \cdot -x^{-2} + 0 \\ h'(x) &= 1 + 8x - \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= 7x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{7}} \\ k'(x) &= 7 \cdot -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{7}x^{-\frac{1}{7}} \\ k'(x) &= \frac{-7}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{14x\sqrt[7]{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } l(x) &= e^{5x+2} \\ l'(x) &= 5e^{5x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } m(x) &= \ln(3x + 2) \\ m'(x) &= \frac{1}{3x + 2} \cdot 3 \\ m'(x) &= \frac{3}{3x + 2} \end{aligned}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

V3 a $f(x) = x^2 - 2x^{-1}$ geeft $f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2}$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 + \frac{2}{1^2} = 4 \text{ dus de helling in } (1, -1) \text{ is } 4.$$

b $g(x) = x - 10\sqrt{x}$ geeft $g'(x) = 1 - 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ofwel $g'(x) = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}}$

$$g'(x) = 0 \text{ geeft } 1 - \frac{5}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$\frac{5}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\sqrt{x} = 5 \text{ dus } x = 25$$

$$g(25) = 25 - 10\sqrt{25} = 25 - 50 = -25$$

In het punt $(25, -25)$ is de helling gelijk aan 0.

V4 a $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 8x$.

$$4x^3 - 8x = 0$$

$$4x(x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 2$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{2} \text{ of } x = \sqrt{2}$$

Zie de plot hiernaast.

f heeft een minimum $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -2$ en een maximum $f(0) = 2$.

b $g(x) = 2 - (3x - 4)^4$ geeft $g'(x) = -4(3x - 4)^3 \cdot 3$

$$\text{ofwel } g'(x) = -12 \cdot (3x - 4)^3.$$

$$-12 \cdot (3x - 4)^3 = 0$$

$$3x - 4 = 0$$

$$3x = 4 \text{ dus } x = \frac{4}{3}$$

Zie de plot hiernaast.

g heeft een maximum $g(\frac{4}{3}) = 2 - 0 = 2$.

c $h(x) = (x - 1)(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$

$$h'(x) = 3x^2 - 14x + 15$$

$$3x^2 - 14x + 15 = 0$$

$$D = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15 = 16$$

$$x = \frac{14 + \sqrt{16}}{6} = 3 \text{ of } x = \frac{14 - \sqrt{16}}{6} = 1\frac{2}{3}$$

Zie de plot hiernaast.

h heeft een maximum $h(1\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \cdot (\frac{4}{3})^2 = 1\frac{5}{27}$ en een minimum $h(3) = 0$.

d $k(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 20}$

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 8x + 20}} \cdot (2x - 8) \text{ ofwel } k'(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}}$$

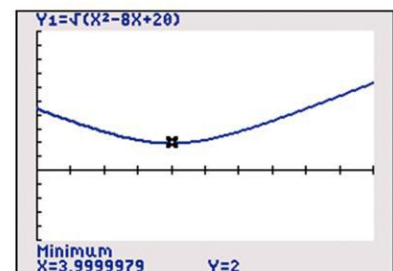
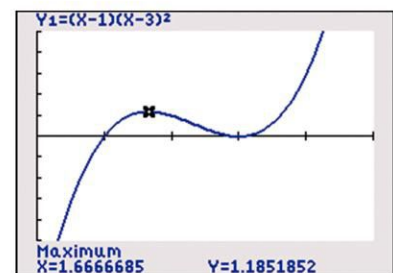
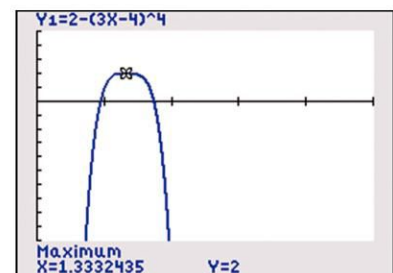
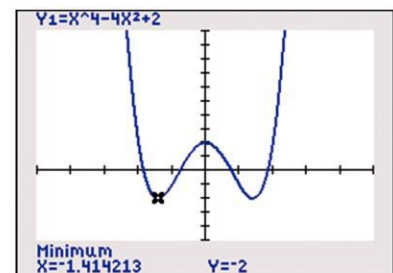
$$\frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}} = 0$$

$$x - 4 = 0$$

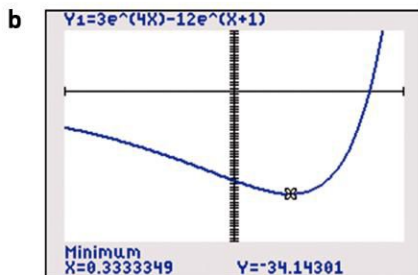
$$x = 4$$

Zie de plot hiernaast.

k heeft een minimum $k(4) = 2$.



- V5 a** $f(x) = 3e^{4x} - 12e^{x+1}$
 $f'(x) = 3e^{4x} \cdot 4 - 12e^{x+1} \cdot 1$ ofwel $f'(x) = 12e^{4x} - 12e^{x+1}$
 Een horizontale raaklijn als geldt:
 $12e^{4x} - 12e^{x+1} = 0$
 $e^{4x} - e^{x+1} = 0$
 $e^{4x} = e^{x+1}$
 $4x = x + 1$
 $3x = 1$
 $x = \frac{1}{3}$



In de plot is te zien dat er bij $x = \frac{1}{3}$ sprake is van een minimum.

- V6 a** $f_a(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 6x)^a$
 $f'_a(x) = \frac{1}{4}a(x^2 - 6x)^{a-1} \cdot (2x - 6)$
 Voor $x = 3$ is de factor $2x - 6$ gelijk aan 0 zodat $f'_a(3) = 0$ voor elke waarde van a .
 De helling van de grafiek van f_a is dus voor elke waarde van a in het punt met x -coördinaat 3 gelijk aan 0.
- b** Uit $f'_a(8) = 3$ volgt $\frac{1}{4}a(8^2 - 6 \cdot 8)^{a-1} \cdot (2 \cdot 8 - 6) = 3$.
 $2\frac{1}{2}a \cdot 16^{a-1} = 3$
 Met de rekenmachine:
 Invoer: $y_1 = 2,5x \cdot 16^{x-1}$ en $y_2 = 3$
 Venster: standaard
 Opties: snijpunt geeft $x = 1,048\dots$
 De oplossing is $a \approx 1,05$.

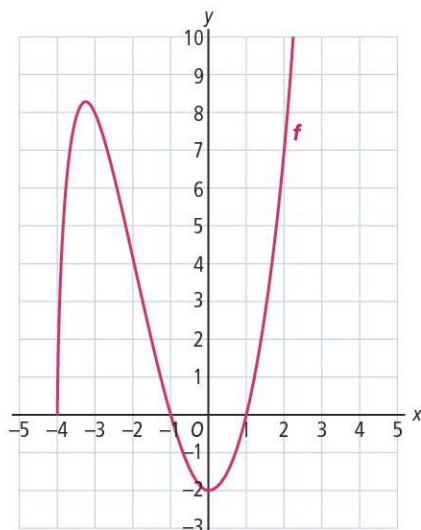
16.1 Product- en quotiëntfuncties

- intro** Noem b de breedte van de witte rand in cm.
 Dan is de breedte van de hele lijst $30 + 2b$ en de hoogte $15 + 2b$.
 Een formule voor de oppervlakte A in cm^2 is dan $A = (30 + 2b)(15 + 2b)$.

16 Product- en quotiëntfuncties

- 1 a Voor het domein moet gelden $x + 4 \geq 0$, dus $x \geq -4$.

b



- c $f(x) = 0$ voor $x^2 - 1 = 0$ of $\sqrt{x+4} = 0$.
 $x^2 - 1 = 0$ geeft $x = 1$ of $x = -1$.
 $\sqrt{x+4} = 0$ geeft $x = -4$.
 De nulpunten van f zijn $x = 1$, $x = -1$ en $x = -4$.

- 2 a $(2x + 1)(x^3 - 8) = 0$

$$2x + 1 = 0 \text{ of } x^3 - 8 = 0$$

$$2x = -1 \text{ of } x^3 = 8$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ of } x = 2$$

- b $(x^2 - 16)(e^{3x} - 4) = 0$

$$x^2 - 16 = 0 \text{ of } e^{3x} - 4 = 0$$

$$x^2 = 16 \text{ of } e^{3x} = 4$$

$$x = -4 \text{ of } x = 4 \text{ of } 3x = \ln(4)$$

$$x = -4 \text{ of } x = 4 \text{ of } x = \frac{1}{3} \ln(4)$$

- c $x \cdot \ln(x + 3) \cdot (x - 4) = 0$

$$x = 0 \text{ of } \ln(x + 3) = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x + 3 = 1 \text{ of } x = 4$$

$$x = 0 \text{ of } x = -2 \text{ of } x = 4$$

- d $(x^2 + 3)\sqrt{3 - x^2} = 0$

$$x^2 + 3 = 0 \text{ (geen oplossing) of } 3 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ of } x = \sqrt{3}$$

- 3 Voor $x = 4$ wordt de uitdrukking onder het wortelteken negatief, dus voldoet deze oplossing niet. Alleen $x = 2$ is een nulpunt.

- 4 a $(x^2 - 4)\sqrt{x - 1} = 0$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ of } x - 1 = 0$$

$$x^2 = 4 \text{ of } x = 1$$

$$x = -2 \text{ (voldoet niet) of } x = 2 \text{ of } x = 1$$

- b $(2x + 3)\ln(x - 4) = 0$

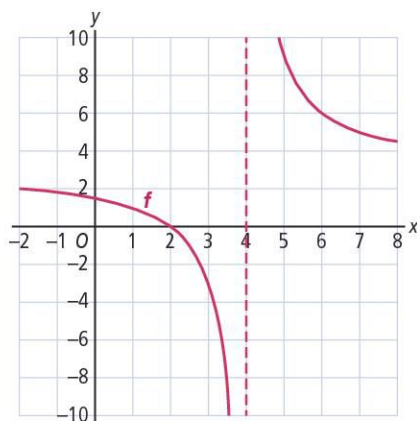
$$2x + 3 = 0 \text{ of } \ln(x - 4) = 0$$

$$2x = -3 \text{ of } x - 4 = 1$$

$$x = -1\frac{1}{2} \text{ (voldoet niet) of } x = 5$$

- c $\sqrt{8-x} \cdot \ln(x+3) = 0$
 $8-x = 0$ of $\ln(x+3) = 0$
 $x = 8$ of $x+3 = 1$
 $x = 8$ of $x = -2$ (beide oplossingen voldoen)
- d $x \cdot \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2-3} = 0$
 $x = 0$ (voldoet niet) of $x+2 = 0$ of $x^2-3 = 0$
 $x = -2$ of $x^2 = 3$
 $x = -2$ of $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$

5 a



- b Voor f mag de noemer niet 0 zijn, dus bij $x = 4$ bestaat f niet.
- c $f(x) = 0$ als $3x - 6 = 0$ dus als $x = 2$.
- d De teller is 0 en de noemer is -2 .

- 6 a $\frac{7x-3}{3-6x} = 0$
 $7x-3 = 0$ en $3-6x \neq 0$
 $7x = 3$
 $x = \frac{3}{7}$
- b $\frac{e^{3x}-2}{x} = 0$
 $e^{3x} = 2$ en $x \neq 0$
 $3x = \ln(2)$
 $x = \frac{1}{3}\ln(2)$
- c $\frac{x^2-6x}{x^2-36} = 0$
 $x^2-6x = 0$ en $x^2-36 \neq 0$
 $x(x-6) = 0$
 $x = 0$ of $x = 6$ (voldoet niet)
- d $\frac{x^2-5x-6}{\ln(x)} = 0$
 $x^2-5x-6 = 0$ en $\ln(x) \neq 0$
 $(x-6)(x+1) = 0$
 $x = 6$ of $x = -1$ (voldoet niet)

- 7 a $f(x) = \frac{x^2+6}{x^2-4}$
 $x^2-4 = 0$ en $x^2+6 \neq 0$
 $x^2 = 4$
 $x = -2$ of $x = 2$
De grafiek heeft verticale asymptoten $x = -2$ en $x = 2$.

- b $g(x) = \frac{7x-3}{8-2x}$
 $8-2x = 0$ en $7x-3 \neq 0$
 $2x = 8$
 $x = 4$
De grafiek heeft een verticale asymptoot $x = 4$.

16 Product- en quotiëntfuncties

c $h(x) = \frac{e^x + 3}{10 - x^2}$

$$10 - x^2 = 0 \text{ en } e^x + 3 \neq 0$$

$$x^2 = 10$$

$$x = -\sqrt{10} \text{ of } x = \sqrt{10}$$

De grafiek heeft verticale asymptoten $x = -\sqrt{10}$ en $x = \sqrt{10}$.

d $k(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 2x - 3}$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ en } 3x - 9 \neq 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3 \text{ (voldoet niet) of } x = -1$$

De grafiek heeft de verticale asymptoot $x = -1$.

- 8 a** 5,0 uur komt overeen met 300 minuten.

$$300 = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T}$$

$$285 = \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T}$$

$$285(0,0785 - 0,0034T) = 7,2$$

$$22,3725 - 0,969T = 7,2$$

$$T = \frac{7,2 - 22,3725}{-0,969} = 15,657\dots$$

Dus als het water 16 graden is zal de overlevingstijd ongeveer 5,0 uur zijn.

- b** Uit $0,0785 - 0,0034T = 0$ volgt $T = \frac{0,0785}{0,0034} = 23,088\dots$

De verticale asymptoot is de lijn $T \approx 23,1$.

De lichaamstemperatuur zal, als het water 23,1 graden (of meer) is, geen 30 graden (of minder) worden. Voor de te water geraakte persoon ontstaat er dan geen levensbedreigende situatie.

- 04 a** Dat blijkt uit de regel: Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$.

b $x^2 = 8$

$$x = -\sqrt{8} \text{ of } x = \sqrt{8}$$

- c** $x = -9$ invullen geeft $((-9)^2 + 9 \cdot -9)\sqrt{8 - (-9)^2} = 0 \cdot \sqrt{-73}$ en de wortel uit een negatief getal bestaat niet.

- d** $x = -\sqrt{8}$ invullen: $(8 - 9\sqrt{8}) \cdot 0 = 0$, klopt.

$$x = \sqrt{8} \text{ invullen: } (8 + 9\sqrt{8}) \cdot 0 = 0, \text{ klopt ook dus beide oplossingen voldoen.}$$

e $(9 - x^2)\sqrt{4x - 16} = 0$

$$9 - x^2 = 0 \text{ of } 4x - 16 = 0$$

$$x^2 = 9 \text{ of } 4x = 16$$

$$x = -3 \text{ (voldoet niet) of } x = 3 \text{ (voldoet niet) of } x = 4$$

f $(x^2 - 3)\ln(x) = 0$

$$x^2 - 3 = 0 \text{ of } \ln(x) = 0$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ (voldoet niet) of } x = \sqrt{3} \text{ of } x = 1$$

g $\sqrt{x-6} \cdot \ln(x^2-3) = 0$
 $x-6 = 0$ of $\ln(x^2-3) = 0$
 $x = 6$ of $x^2-3 = 1$
 $x = 6$ of $x^2 = 4$
 $x = 6$ of $x = -2$ (voldoet niet) of $x = 2$ (voldoet niet)

h $x \cdot \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x^2-1} = 0$
 $x = 0$ (voldoet niet) of $x-4 = 0$ of $x^2-1 = 0$
 $x = 4$ of $x^2 = 1$
 $x = 4$ of $x = -1$ (voldoet niet) of $x = 1$ (voldoet niet)

- 07 a** $x^2 - 4x = 0$
 $x(x-4) = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$
- b** $x^2 - 16 = 0$
 $x^2 = 16$
 $x = -4$ of $x = 4$
- c** $x^2 - 4x = 0$ en $x^2 - 16 \neq 0$ geldt voor $x = 0$.
- d** De lijn $x = 0$ is verticale asymptoot van de grafiek van f .

- U1** De grafiek van g heeft dan de nulpunten $x = -1$, $x = 2$ en $x = 4$.
Dus $g(x) = k \cdot (x+1)(x-2)(x-4)$ voor zekere k .
Omdat $g(0) = -1$ moet gelden $g(0) = k \cdot (0+1)(0-2)(0-4) = -1$ dus
 $8k = -1$ ofwel $k = -\frac{1}{8}$.
 $g(x) = -\frac{1}{8}(x+1)(x-2)(x-4)$ en $f(x) = g(x) + 1$ dus
 $f(x) = 1 - \frac{1}{8}(x+1)(x-2)(x-4)$.

- U2 a** $f_0(x) = \frac{6x^2 + 59}{x^2 - 9}$
 $x^2 - 9 = 0$ en $6x^2 + 59 \neq 0$
 $x^2 = 9$
 $x = -3$ of $x = 3$
De grafiek heeft verticale asymptoten $x = -3$ en $x = 3$.

b $f_a(x) = ax - 6 + \frac{5}{x^2 - 9}$

$$f'_a(x) = \frac{ax - 6}{1} + \frac{5}{x^2 - 9}$$

$$f'_a(x) = \frac{(ax - 6)(x^2 - 9)}{x^2 - 9} + \frac{5}{x^2 - 9}$$

$$f'_a(x) = \frac{ax^3 - 9ax - 6x^2 + 54 + 5}{x^2 - 9}$$

$$f'_a(x) = \frac{ax^3 - 9ax - 6x^2 + 59}{x^2 - 9}$$

- c** $f_{10}(x) = 10x - 6 + \frac{5}{x^2 - 9}$
Op den duur (bij grote waarden van x) is de uitkomst van de breuk $\frac{5}{x^2 - 9}$
vrijwel 0. De waarde van $f_{10}(x)$ nadert dan de waarde van $y = 10x - 6$.
De grafiek komt op den duur steeds dichterbij de lijn $y = 10x - 6$.

16 Product- en quotiëntfuncties

16.2 Limieten en horizontale asymptoten

intro Als de oppervlakte telkens halveert, nadert de oppervlakte naar 0.

9 a $x - 3 = 0$ als $x = 3$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = 3$.

b Als x steeds groter wordt, wordt de noemer $x - 3$ ook steeds groter en nadert de breuk, en dus $f(x)$, naar 0.

c De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot.

10 a Als x nadert naar oneindig, dan nadert de noemer van de breuk ook naar oneindig. De breuk in zijn geheel nadert dan naar nul.

Dus is $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-15}{x^2 - 5} = 0$.

b Als x nadert naar oneindig, dan nadert de noemer van de breuk ook naar oneindig. De breuk in zijn geheel nadert dan naar nul.

Dus is $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(12 - \frac{3}{8x + 10} \right) = 12 - 0 = 12$.

11 a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$ betekent dat de grafiek van f een horizontale asymptoot $y = -3$ heeft.

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7$ betekent dat de grafiek van f een horizontale asymptoot $y = 7$ heeft.

12 a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

d $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} = 0$

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000}{x^{0,3}} = 0$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{0,3}} = 0$

f $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$ met $n > 0$

13 a $f(100) = \frac{493}{608} \approx 0,811$

$f(-100) = \frac{-507}{-592} \approx 0,856$

$f(1000) = \frac{4993}{6008} \approx 0,831$

$f(-1000) = \frac{-5007}{-5992} \approx 0,836$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \approx 0,83$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \approx 0,84$

b In stap 1 zijn teller en noemer door x gedeeld.

c $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{5 - 0}{6 + 0} = \frac{5}{6}$

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - \frac{7}{x}}{6 + \frac{8}{x}} = \frac{5 - 0}{6 + 0} = \frac{5}{6}$

e De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{5}{6}$.

$$14 \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x - 6}{5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11 - \frac{6}{x}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{11 - 0}{5 + 0} = 2\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x - 6}{5x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11 - \frac{6}{x}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{11 - 0}{5 + 0} = 2\frac{1}{5}$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2\frac{1}{5}$.

$$b \quad g(x) = \frac{12x^2 + 8x}{8 + 7x - 6x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 + 8x}{8 + 7x - 6x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 + \frac{8}{x}}{\frac{8}{x^2} + \frac{7}{x} - 6} = \frac{12 + 0}{0 + 0 - 6} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^2 + 8x}{8 + 7x - 6x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12 + \frac{8}{x}}{\frac{8}{x^2} + \frac{7}{x} - 6} = \frac{12 + 0}{0 + 0 - 6} = -2$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

$$c \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{4x^2 - 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{10}{x^2}} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{4x^2 - 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{10}{x^2}} = \frac{3}{4}$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{3}{4}$.

$$d \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x}{12 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{12}{x^3} + \frac{9}{x^2}}{\frac{12}{x^3} - 1} = \frac{0 + 0}{0 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 9x}{12 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{12}{x^3} + \frac{9}{x^2}}{\frac{12}{x^3} - 1} = \frac{0 + 0}{0 - 1} = 0$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

$$15 \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 8}{3x + 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 5 - \frac{8}{x}}{3 + \frac{9}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 5 - 0}{3 + 0} = \infty$$

$$b \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 5x - 8}{3x + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 5 - \frac{8}{x}}{3 + \frac{9}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 5 - 0}{3 + 0} = -\infty$$

16 Product- en quotiëntfuncties

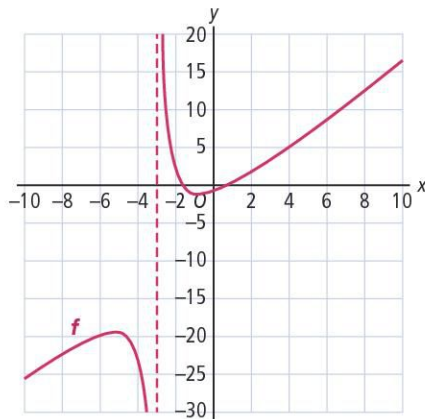
c $3x + 9 = 0$ en $6x^2 + 5x - 8 \neq 0$

$$3x = -9$$

$$x = -3$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

d



De antwoorden van de opdrachten b en c kloppen met de grafiek.

$$16 \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 81}{16 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{81}{x^2}}{\frac{16}{x^2} - 3} = \frac{1 - 0}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 81}{16 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{81}{x^2}}{\frac{16}{x^2} - 3} = \frac{1 - 0}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

De grafiek heeft een horizontale asymptoot $y = -\frac{1}{3}$.

$$b \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 10x + 11} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 8 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{10}{x} + \frac{11}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 8 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 10x + 11} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 8 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{10}{x} + \frac{11}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 8 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = -\infty$$

De grafiek heeft geen horizontale asymptoot.

$$c \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x + 3}{5x^2 - 8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{15}{x} + \frac{3}{x^2}}{5 - \frac{8}{x}} = \frac{0 + 0}{5 - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15x + 3}{5x^2 - 8x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{15}{x} + \frac{3}{x^2}}{5 - \frac{8}{x}} = \frac{0 + 0}{5 - 0} = 0$$

De grafiek heeft een horizontale asymptoot $y = 0$.

$$\text{d } k(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{5x^2(x^2 - 2x + 1)}$$

$$k(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{5x^4 - 10x^3 + 5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{5x^4 - 10x^3 + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4}}{5 - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{5 - 0 + 0} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{5x^4 - 10x^3 + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4}}{5 - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{5 - 0 + 0} = \frac{1}{5}$$

De grafiek heeft een horizontale asymptoot $y = \frac{1}{5}$.

17 a $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$ want $f(x) = 2^x$ is een toenemende stijgende functie.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$ want bijvoorbeeld $2^{-1000} \approx 0$ en $2^{-10000} \approx 0$.

De grafiek van f heeft de negatieve x -as als horizontale asymptoot.

b $\lim_{x \rightarrow \infty} g^x = \infty$ voor $g > 1$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} g^x = 0$ voor $0 < g < 1$.

$$\text{18 a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$$\text{b } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,5^x - 3}{0,4^x + 2} = \frac{0 - 3}{0 + 2} = -1\frac{1}{2}$$

$$\text{c } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e^x}}{1 + \frac{5}{e^{2x}}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

$$\text{d } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 18}{4e^x - 3} = \frac{0 + 18}{0 - 3} = -6$$

014 a In stap 1 zijn teller en noemer door x^3 gedeeld.

$$\text{b } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^3} = 0 \text{ (standaardlimiet)}$$

$$\text{c } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{7}{x^3}}{\frac{8}{x^3} - 1} = \frac{3 + 0}{0 - 1} = -3 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{7}{x^3}}{\frac{8}{x^3} - 1} = \frac{3 + 0}{0 - 1} = -3$$

d De grafiek heeft een horizontale asymptoot $y = -3$.

016 a Van de breuken $\frac{8}{x}$, $\frac{7}{x^2}$ en $\frac{1}{x^2}$ is de limiet gelijk aan 0.

b Als $x \rightarrow \infty$ dan ook $5x \rightarrow \infty$.

16 Product- en quotiëntfuncties

- c Als $x \rightarrow \infty$ dan gaat de teller van de breuk $\frac{5x - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 1}$ ook naar ∞ en de noemer naar -1 , dus gaat $f(x) \rightarrow -\infty$.

Als $x \rightarrow -\infty$ dan gaat de teller van de breuk $\frac{5x - \frac{8}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 1}$ ook naar $-\infty$ en de noemer naar -1 , dus gaat $f(x) \rightarrow \infty$.

- d Om een horizontale asymptoot te hebben moet $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ en/of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$.

- U3 a** Voor $x > 0$ is $\sqrt{x^6} = x^3$. Voor $x < 0$ is $\sqrt{x^6} = -x^3$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^6 - x}}{\sqrt{x^6}}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^6 - x}{x^6}}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{x^5}}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{\sqrt{9 - 0}}{1 + 0} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^6 - x}}{\sqrt{x^6}}}{-1 - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^6 - x}{x^6}}}{-1 - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{x^5}}}{-1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{\sqrt{9 - 0}}{-1 - 0} = -3$$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = -3$ en $y = 3$.

$$\text{b } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 2^x + 8}{3 \cdot 2^x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{8}{2^x}}{3 + \frac{2}{2^x}} = \frac{6 + 0}{3 + 0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 \cdot 2^x + 8}{3 \cdot 2^x + 2} = \frac{6 \cdot 0 + 8}{3 \cdot 0 + 2} = 4$$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = 2$ en $y = 4$.

- U4 a** $f(x) = e^x$ geeft $f'(x) = e^x$.
 $f'(0) = e^0 = 1$

De raaklijn gaat door $(0, 1)$ en heeft dus als vergelijking $y = x + 1$.

- b In de buurt van $x = 0$ valt de grafiek van f vrijwel samen met de raaklijn in $(0, 1)$, dus geldt $f(x) \approx x + 1$ ofwel $e^x \approx x + 1$.

- c Door links en rechts te verheffen tot de macht $\frac{1}{x}$ volgt $e \approx (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ uit $e^x \approx x + 1$.

- d In de buurt van $x = 0$ geldt $e^x \approx x + 1$ en dus $e \approx (1 + x)^{\frac{1}{x}}$. Hoe dichter bij 0, hoe beter klopt deze benadering. Dus is $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

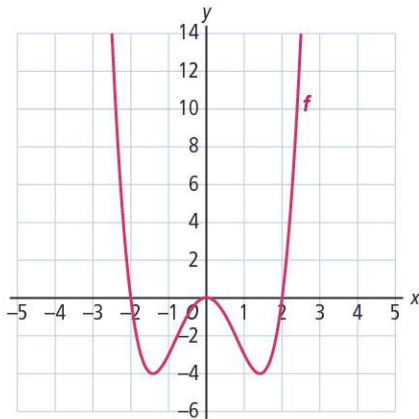
Stel $x = \frac{1}{y}$ dan is $\frac{1}{x} = y$ en geldt: als $x \rightarrow 0$ dan $y \rightarrow \infty$

$$\text{Dus is } \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

16.3 Productregel

intro $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ kun je differentiëren, want $f(x)$ kun je schrijven als $f(x) = x^{1\frac{1}{2}}$.
 $g(x) = x \cdot \sqrt{5x-1}$ kun je differentiëren, want $g(x)$ kun je schrijven als
 $g(x) = \sqrt{5x^3 - x^2}$ (voor $x \geq 0$).
 $k(x) = x \cdot x^2$ kun je differentiëren, want $k(x)$ kun je schrijven als $k(x) = x^3$.
 De andere twee zijn productfuncties die je niet anders kunt schrijven. Deze functies kun je dus (nog) niet differentiëren.

19 a



- b Hij heeft de afgeleide van beide factoren genomen en die weer met elkaar vermenigvuldigd.
- c Het enige nulpunt van $f'(x) = 4x^2$ is $x = 0$, terwijl in de grafiek te zien is dat er drie punten zijn met een horizontale raaklijn. De afgeleide van f moet dus drie nulpunten hebben.
- d $f(x) = x^2(x^2 - 4)$ geeft $f(x) = x^4 - 4x^2$ en als afgeleide $f'(x) = 4x^3 - 8x$.

20 a De toename van oppervlakte O is:

$\Delta O = \text{strook rechts} + \text{strook boven} + \text{rechthoek rechtsboven} =$
 $\Delta l \times b + l \times \Delta b + \Delta l \times \Delta b$, klopt.

$$\text{b } \frac{\Delta O}{\Delta x} = \frac{\Delta l \times b + l \times \Delta b + \Delta l \times \Delta b}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta O}{\Delta x} = \frac{\Delta l \times b + (l + \Delta l) \times \Delta b}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta O}{\Delta x} = \frac{\Delta l \times b}{\Delta x} + \frac{(l + \Delta l) \times \Delta b}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta O}{\Delta x} = \frac{\Delta l}{\Delta x} \cdot b + (l + \Delta l) \cdot \frac{\Delta b}{\Delta x}$$

c Als $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\frac{\Delta O}{\Delta x} \rightarrow \frac{dO}{dx}$ en $\frac{\Delta b}{\Delta x} \rightarrow \frac{db}{dx}$ en $l + \Delta l \rightarrow l$.

$$\text{Dus } \frac{\Delta O}{\Delta x} = \frac{\Delta l}{\Delta x} \cdot b + (l + \Delta l) \cdot \frac{\Delta b}{\Delta x} \text{ wordt dan } \frac{dO}{dx} = \frac{dl}{dx} \cdot b + l \cdot \frac{db}{dx}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

d Als $O = f(x)$ dan is $\frac{dO}{dx} = f'(x)$.

Als $l = p(x)$ dan is $\frac{dl}{dx} = p'(x)$.

Als $b = q(x)$ dan is $\frac{db}{dx} = q'(x)$.

$\frac{dO}{dx} = \frac{dl}{dx} \cdot b + l \cdot \frac{db}{dx}$ wordt dan $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$.

21 a $f(x) = (4x^3 + 3) \cdot (x^5 - 5)$
 $p(x) = 4x^3 + 3$ en $p'(x) = 12x^2$
 $q(x) = x^5 - 5$ en $q'(x) = 5x^4$
 $f'(x) = 12x^2 \cdot (x^5 - 5) + (4x^3 + 3) \cdot 5x^4$
 $f'(x) = 32x^7 + 15x^4 - 60x^2$

b $g(x) = (1 + x + x^2) \cdot (x^3 - 7)$
 $p(x) = 1 + x + x^2$ en $p'(x) = 1 + 2x$
 $q(x) = x^3 - 7$ en $q'(x) = 3x^2$
 $g'(x) = (1 + 2x) \cdot (x^3 - 7) + (1 + x + x^2) \cdot 3x^2$
 $g'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 14x - 7$

c $h(x) = (x^2 + 4x) \cdot e^x$
 $p(x) = x^2 + 4x$ en $p'(x) = 2x + 4$
 $q(x) = e^x$ en $q'(x) = e^x$
 $h'(x) = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x)e^x$
 $h'(x) = (x^2 + 6x + 4)e^x$

d $k(x) = x^3 \cdot {}^5\log(x)$
 $p(x) = x^3$ en $p'(x) = 3x^2$
 $q(x) = {}^5\log(x)$ en $q'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(5)}$
 $k'(x) = 3x^2 \cdot {}^5\log(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(5)}$
 $k'(x) = 3x^2 \cdot {}^5\log(x) + \frac{x^2}{\ln(5)}$

e $l(x) = (4x^2 - 10) \cdot \sqrt{x}$
 $l(x) = (4x^2 - 10) \cdot x^{\frac{1}{2}}$
 $l(x) = 4x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}}$
 $l'(x) = 10x^{\frac{3}{2}} - 5x^{-\frac{1}{2}}$
 $l'(x) = 10x\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{x}}$

22 a $f'(x) = 2(5x + 2)^4 + (2x - 1) \cdot 20(5x + 2)^3$ of ook
 $f'(x) = 2(5x + 2)^4 + 20(2x - 1)(5x + 2)^3$

b $g(x) = (3x - 1)^3(5x^2 + 8)$
 $p(x) = (3x - 1)^3$ en $p'(x) = 3(3x - 1)^2 \cdot 3 = 9(3x - 1)^2$
 $q(x) = 5x^2 + 8$ en $q'(x) = 10x$
 $g'(x) = 9(3x - 1)^2(5x^2 + 8) + (3x - 1)^3 \cdot 10x$ of ook
 $g'(x) = 9(3x - 1)^2(5x^2 + 8) + 10x(3x - 1)^3$
 $h(x) = (7x - 4)\sqrt{3 - x}$
 $p(x) = 7x - 4$ en $p'(x) = 7$

$$q(x) = \sqrt{3-x} \text{ en } q'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot -1 = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$h'(x) = 7\sqrt{3-x} + (7x-4) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} \text{ of ook}$$

$$h'(x) = 7\sqrt{3-x} - \frac{7x-4}{2\sqrt{3-x}}$$

23 a $f(x) = x \cdot \sqrt{9-x^2}$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{9-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot -2x \text{ of ook}$$

$$f'(x) = \sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

b $g(x) = (3x+1) \cdot 6^{2x+1}$

$$g'(x) = 3 \cdot 6^{2x+1} + (3x+1) \cdot \ln(6) \cdot 6^{2x+1} \cdot 2 \text{ of ook}$$

$$g'(x) = 3 \cdot 6^{2x+1} + 2\ln(6) \cdot (3x+1) \cdot 6^{2x+1}$$

c $h(x) = e^{-2x} \cdot \ln^2(x)$

$$h'(x) = e^{-2x} \cdot -2 \cdot \ln^2(x) + e^{-2x} \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \text{ of ook}$$

$$h'(x) = -2e^{-2x} \cdot \ln^2(x) + e^{-2x} \cdot \frac{2\ln(x)}{x}$$

d $k(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^3+1}$

$$k'(x) = 2x \cdot \sqrt{x^3+1} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+1}} \cdot 3x^2 \text{ of ook}$$

$$k'(x) = 2x \cdot \sqrt{x^3+1} + \frac{3x^4}{2\sqrt{x^3+1}}$$

e $m(x) = \frac{8x}{(4x-5)^2} = 8x \cdot (4x-5)^{-2}$

$$m'(x) = 8 \cdot (4x-5)^{-2} + 8x \cdot -2(4x-5)^{-3} \cdot 4 \text{ of ook}$$

$$m'(x) = \frac{8}{(4x-5)^2} - \frac{64x}{(4x-5)^3}$$

f $n(x) = x^3 \cdot e^{-x+3}$

$$n'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x+3} + x^3 \cdot e^{-x+3} \cdot -1 \text{ of ook}$$

$$n'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x+3} - x^3 \cdot e^{-x+3}$$

24 a $K(p) = p^2(p+3)^4$ geeft

$$K'(p) = 2p(p+3)^4 + p^2 \cdot 4(p+3)^3$$

$$K'(p) = 2p(p+3)^4 + 4p^2(p+3)^3$$

b $K'(p) = (2p^2 + 6p + 4p^2)(p+3)^3$

$$K'(p) = (6p^2 + 6p)(p+3)^3$$

c $K'(p) = 0$ geeft $(6p^2 + 6p)(p+3)^3 = 0$

$$6p^2 + 6p = 0 \text{ of } (p+3)^3 = 0$$

$$6p(p+1) = 0 \text{ of } p+3 = 0$$

$$p = 0, p = -1 \text{ of } p = -3$$

16 Product- en quotiëntfuncties

- 25 a** $g(x) = 4(x - 7)^3 + 5x(x - 7)^3$
 $g(x) = (4 + 5x)(x - 7)^3$
 $g(x) = 0$ geeft $(4 + 5x)(x - 7)^3 = 0$
 $4 + 5x = 0$ of $(x - 7)^3 = 0$
 $5x = -4$ of $x - 7 = 0$
 $x = -\frac{4}{5}$ of $x = 7$
- b** $h(x) = 2(2x + 1)^3 - 5(2x + 1)^2$
 $h(x) = 2(2x + 1)(2x + 1)^2 - 5(2x + 1)^2$
 $h(x) = (2(2x + 1) - 5)(2x + 1)^2$
 $h(x) = (4x - 3)(2x + 1)^2$
 $h(x) = 0$ geeft $(4x - 3)(2x + 1)^2 = 0$
 $4x - 3 = 0$ of $(2x + 1)^2 = 0$
 $4x = 3$ of $2x = -1$
 $x = \frac{3}{4}$ of $x = -\frac{1}{2}$
- c** $k(x) = 2x(x^2 - 1) - 5(x^2 - 1)^2$
 $k(x) = 2x(x^2 - 1) - 5(x^2 - 1)(x^2 - 1)$
 $k(x) = (x^2 - 1)(2x - 5(x^2 - 1))$
 $k(x) = (x^2 - 1)(2x - 5x^2 + 5)$
 $k(x) = 0$ geeft $(x^2 - 1)(2x - 5x^2 + 5) = 0$
 $x^2 - 1 = 0$ of $2x - 5x^2 + 5 = 0$
 $x^2 = 1$ of $-5x^2 + 2x + 5 = 0$
 $x = -1$ of $x = 1$ of $D = 2^2 - 4 \cdot -5 \cdot 5 = 104$
 $x = -1$ of $x = 1$ of $x = \frac{-2 + \sqrt{104}}{-10}$ of $x = \frac{-2 - \sqrt{104}}{-10}$
 $x = -1$ of $x = 1$ of $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{26}$ of $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{26}$
- 26 a** $f(x) = 0$ geeft $(x^2 - 4)(x^2 - 8x + 12) = 0$
 $x^2 - 4 = 0$ of $x^2 - 8x + 12 = 0$
 $x^2 = 4$ of $(x - 2)(x - 6) = 0$
 $x = -2$ of $x = 2$ of $x = 6$
- b** $f'(x) = 2x \cdot (x^2 - 8x + 12) + (x^2 - 4) \cdot (2x - 8)$
 $f'(x) = 2x \cdot (x - 2)(x - 6) + (x - 2)(x + 2) \cdot 2(x - 4)$
 $f'(x) = (x - 2) \cdot (2x \cdot (x - 6) + 2(x + 2)(x - 4))$
 $f'(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 - 12x + 2(x^2 - 2x - 8))$
 $f'(x) = (x - 2) \cdot (4x^2 - 16x - 16)$
 $f'(x) = 4(x - 2)(x^2 - 4x - 4)$
- c** $f'(x) = 0$ geeft $4(x - 2)(x^2 - 4x - 4) = 0$
 $x - 2 = 0$ of $x^2 - 4x - 4 = 0$
 $x = 2$ of $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 32$
 $x = 2$ of $x = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2}$ of $x = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2}$
 $x = 2$ of $x = 2 + 2\sqrt{2}$ of $x = 2 - 2\sqrt{2}$
- 27 a** $f(x) = 0$ geeft $x^2 \cdot e^x = 0$
 $x^2 = 0$ of $e^x = 0$ (geen oplossing)
 $x = 0$

- b** $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
 $f'(x) = (2x + x^2) \cdot e^x$
 $f'(x) = 0$ geeft $(2x + x^2) \cdot e^x = 0$
 $x^2 + 2x = 0$ of $e^x = 0$ (geen oplossing)
 $x(x + 2) = 0$
 $x = 0$ of $x = -2$
 $f(0) = 0$ en $f(-2) = 4e^{-2}$
 De toppen zijn $(0, 0)$ en $(-2, \frac{4}{e^2})$.
- c** $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x = 0$ (met een tabel), dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.
- d** $f''(x) = (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x$
 $f''(x) = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$
 $f''(x) = 0$ geeft $(x^2 + 4x + 2) \cdot e^x = 0$
 $x^2 + 4x + 2 = 0$ of $e^x = 0$ (geen oplossing)
 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$
 $x = \frac{-4 - \sqrt{8}}{2}$ of $x = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2}$
 De x -coördinaten van de buigpunten zijn $x = -2 - \sqrt{2}$ en $x = -2 + \sqrt{2}$.

- 023 a** Er staat een product van twee functies waarvan er één ($q(x) = e^{-x^2+1}$) een kettingfunctie is.
- b** $p'(x) = 12x^3$
- c** $q'(x) = e^{-x^2+1} \cdot -2x$ of ook $q'(x) = -2xe^{-x^2+1}$
- d** $f''(x) = 12x^3 \cdot e^{-x^2+1} + (3x^4 - 7) \cdot -2xe^{-x^2+1}$

- 025 a** $(x - 3)^5 = (x - 3)^1(x - 3)^4$
- b** $f(x) = x^2(x - 3)^4 - (12x - 36)(x - 3)^4$
- c** $f(x) = (x^2 - 12x + 36)(x - 3)^4$
- d** Ja, omdat $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$ zijn $f(x) = (x^2 - 12x + 36)(x - 3)^4$ en $g(x) = (x - 6)^2(x - 3)^4$ hetzelfde.
- e** Om de nulpunten van f te berekenen kun je het beste het functievoorschrift $f(x) = (x - 6)^2(x - 3)^4$ gebruiken.
 $(x - 6)^2(x - 3)^4 = 0$
 $x = 6$ of $x = 3$
- f** $g(x) = 8x(x + 2)^3 - 48(x + 2)^3$
 $g(x) = (8x - 48)(x + 2)^3$
 $g(x) = 0$ geeft $(8x - 48)(x + 2)^3 = 0$
 $8x - 48 = 0$ of $x + 2 = 0$
 $8x = 48$ of $x = -2$
 $x = 6$ of $x = -2$
- g** $h(x) = 2(3x - 2)^3 + 12(3x - 2)^2$
 $h(x) = 2(3x - 2)(3x - 2)^2 + 12(3x - 2)^2$
 $h(x) = (6x - 4)(3x - 2)^2 + 12(3x - 2)^2$
 $h(x) = (6x + 8)(3x - 2)^2$
 $h(x) = 0$ geeft $(6x + 8)(3x - 2)^2 = 0$
 $6x + 8 = 0$ of $3x - 2 = 0$
 $6x = -8$ of $3x = 2$
 $x = -1\frac{1}{3}$ of $x = \frac{2}{3}$

16 Product- en quotiëntfuncties

h $k(x) = 9x(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4)^2$
 $k(x) = 9x(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4)(x^2 - 4)$
 $k(x) = 9x(x^2 - 4) + (3x^2 - 12)(x^2 - 4)$
 $k(x) = (3x^2 + 9x - 12)(x^2 - 4)$
 $k(x) = 0$ geeft $(3x^2 + 9x - 12)(x^2 - 4) = 0$
 $3x^2 + 9x - 12 = 0$ of $x^2 - 4 = 0$
 $x^2 + 3x - 4 = 0$ of $x^2 = 4$
 $(x + 4)(x - 1) = 0$ of $x = -2$ of $x = 2$
 $x = -4$ of $x = 1$ of $x = -2$ of $x = 2$

U5 In verkorte schrijfwijze krijg je $f = p \cdot q \cdot r = (p \cdot q) \cdot r$.
 $f' = (p \cdot q)' \cdot r + (p \cdot q) \cdot r'$
 $f' = (p' \cdot q + p \cdot q') \cdot r + p \cdot q \cdot r'$
 De uitgeschreven vorm geeft
 $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) \cdot r(x) + p(x) \cdot q'(x) \cdot r(x) + p(x) \cdot q(x) \cdot r'(x)$.

U6 a $f(x) = x^x$ kun je schrijven als $f(x) = e^{\ln(x^x)}$.
 En omdat $\ln(x^x) = x \ln(x)$ (rekenregel van logaritmen), is $f(x) = x^x$ te schrijven als $f(x) = e^{x \ln(x)}$.

b Met de kettingregel en productregel:

$$f'(x) = e^{x \ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \text{ ofwel } f'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } x^x \cdot (\ln(x) + 1) = 0$$

$$x^x = 0 \text{ (geen oplossing) of } \ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1} \text{ en } f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}}$$

$$\text{De top is het punt } \left(\frac{1}{e}, \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{e}} \right).$$

c $f(0,1) \approx 0,79$, $f(0,01) \approx 0,95$, $f(0,001) \approx 0,99$ en $f(0,0001) \approx 0,999$
 $f(x)$ nadert naar 1 als x naar 0 nadert.

16.4 Quotiëntregel

intro Je kunt deze punten bijvoorbeeld vinden door met je rekenmachine na te gaan bij welke waarden van x de afgeleide van f gelijk is aan 1.
 Of met een liniaal de lijn $y = x$ verschuiven tot de lijn raakt aan de grafiek van f . Of het functievoorschrift van f schrijven als een product en dan met de productregel en de kettingregel de functie te differentiëren en de vergelijking $f'(x) = 1$ oplossen.

28 a $f(x) = (x^2 + 2)(1 + 2x)^{-1}$ geeft
 $f'(x) = 2x \cdot (1 + 2x)^{-1} + (x^2 + 2) \cdot -(1 + 2x)^{-2} \cdot 2$
 b $f'(x) = 2x \cdot (1 + 2x)^{-1} - 2(x^2 + 2)(1 + 2x)^{-2}$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + 2x} - \frac{(x^2 + 2) \cdot 2}{(1 + 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (1 + 2x)}{(1 + 2x)^2} - \frac{(x^2 + 2) \cdot 2}{(1 + 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (1 + 2x) - (x^2 + 2) \cdot 2}{(1 + 2x)^2}$$

29 a $f(x) = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$

$$f'(x) = t'(x) \cdot n^{-1}(x) + t(x) \cdot - (n(x))^{-2} \cdot n'(x)$$

$$f'(x) = \frac{t'(x)}{n(x)} - \frac{t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

b $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x)}{(n(x))^2} - \frac{t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ geeft $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

c In $f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 + 2x}$ is $t(x) = x^2 + 2$ en $n(x) = 1 + 2x$.

$$t'(x) = 2x \text{ en } n'(x) = 2$$

Dit invullen in $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ geeft

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (1 + 2x) - (x^2 + 2) \cdot 2}{(1 + 2x)^2} \text{ en dat komt overeen met opdracht 28b.}$$

30 a $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

$$t(x) = x \text{ en } t'(x) = 1$$

$$n = x^2 + 1 \text{ en } n'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

c $h(x) = \frac{3e^x}{x^3 + 8}$

$$t(x) = 3e^x \text{ en } t'(x) = 3e^x$$

$$n = x^3 + 8 \text{ en } n'(x) = 3x^2$$

$$h'(x) = \frac{3e^x \cdot (x^3 + 8) - 3e^x \cdot 3x^2}{(x^3 + 8)^2}$$

$$h'(x) = \frac{3x^3e^x + 24e^x - 9x^2e^x}{(x^3 + 8)^2}$$

b $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

$$t(x) = x^2 - 4 \text{ en } t'(x) = 2x.$$

$$n(x) = x^2 - 1 \text{ en } n'(x) = 2x$$

$$g'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 8x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2}$$

d $k(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

$$t(x) = \ln(x) \text{ en } t'(x) = \frac{1}{x}$$

$$n(x) = x \text{ en } n'(x) = 1$$

$$k'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2}$$

$$k'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

$$31 \quad f(x) = \frac{4x+3}{x-2} \text{ geeft } f'(x) = \frac{4 \cdot (x-2) - (4x+3) \cdot 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x-8-4x-3}{(x-2)^2} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{-11}{(x-2)^2}$$

De teller is een constante, dus $f'(x) = 0$ heeft geen oplossingen.

Er zijn dus geen punten waarin de helling gelijk is aan 0.

$$32 \text{ a } f(x) = \frac{x^2+5}{(4x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(4x-1)^2 - (x^2+5) \cdot 2(4x-1) \cdot 4}{(4x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(16x^2-8x+1) - 8(4x^3-x^2+20x-5)}{(4x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{32x^3-16x^2+2x-32x^3+8x^2-160x+40}{(4x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-8x^2-158x+40}{(4x-1)^4}$$

$$\text{b } g(x) = \frac{2^{3x-2}+3}{2^x+4}$$

$$g'(x) = \frac{\ln(2) \cdot 2^{3x-2} \cdot 3(2^x+4) - (2^{3x-2}+3) \cdot \ln(2) \cdot 2^x}{(2^x+4)^2}$$

$$g'(x) = \frac{3\ln(2) \cdot 2^{4x-2} + 12\ln(2) \cdot 2^{3x-2} - \ln(2) \cdot 2^{4x-2} - 3\ln(2) \cdot 2^x}{(2^x+4)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2\ln(2) \cdot 2^{4x-2} + 12\ln(2) \cdot 2^{3x-2} - 3\ln(2) \cdot 2^x}{(2^x+4)^2}$$

$$\text{c } h(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x+2} \text{ geeft } h(x) = \frac{x^{2\frac{1}{2}}}{x+2}$$

$$h'(x) = \frac{2\frac{1}{2} \cdot x^{1\frac{1}{2}} \cdot (x+2) - x^{2\frac{1}{2}} \cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2\frac{1}{2} \cdot x^{2\frac{1}{2}} + 5x^{1\frac{1}{2}} - x^{2\frac{1}{2}}}{(x+2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{1\frac{1}{2} \cdot x^{2\frac{1}{2}} + 5x^{1\frac{1}{2}}}{(x+2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{3x^2\sqrt{x} + 10x\sqrt{x}}{2(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= \frac{x \ln(x)}{x+4} \\ k'(x) &= \frac{\left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)(x+4) - x \ln(x) \cdot 1}{(x+4)^2} \\ k'(x) &= \frac{(\ln(x) + 1)(x+4) - x \ln(x)}{(x+4)^2} \\ k'(x) &= \frac{x \ln(x) + 4 \ln(x) + x + 4 - x \ln(x)}{(x+4)^2} \\ k'(x) &= \frac{4 \ln(x) + x + 4}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

33 a $f(x) = 0$ geeft $2x^2 + 3x = 0$ en $e^x \neq 0$.

$$x(2x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 2x = -3$$

$$x = 0 \text{ of } x = -1\frac{1}{2}$$

$$\text{b } f'(x) = \frac{(4x+3)e^x - (2x^2+3x)e^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4xe^x + 3e^x - 2x^2e^x - 3xe^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x^2 + x + 3)e^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + x + 3}{e^x}$$

$$\text{c } f'(0) = \frac{3}{1} = 3 \text{ en het startgetal is } 0.$$

Een vergelijking van de raaklijn is $y = 3x$.

d $f'(x) = 0$ geeft $-2x^2 + x + 3 = 0$ en $e^x \neq 0$.

$$D = 1^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3 = 25$$

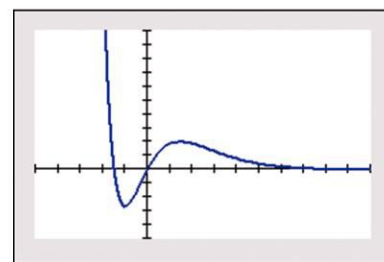
$$x = \frac{-1+5}{-4} \text{ of } x = \frac{-1-5}{-4}$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1\frac{1}{2}$$

Zie de plot hiernaast.

f heeft een minimum $f(-1) = -e$.

f heeft een maximum $f(1\frac{1}{2}) = \frac{9}{e\sqrt{e}}$.



$$\text{34 a } f(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

- b** $f'(x) = 0$ geeft $1 - x^2 = 0$ en $(1 + x^2)^2 \neq 0$.

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

In de grafiek is te zien dat f een minimum heeft bij $x = -1$ en een maximum bij $x = 1$.

Het minimum is $f(-1) = \frac{-1}{1 + (-1)^2} = -\frac{1}{2}$ en het maximum is $f(1) = \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{1}{2}$.

- c** $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ geeft

$$f''(x) = \frac{-2x(1 + x^2)^2 - (1 - x^2) \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1 + x^2) - (1 - x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3}$$

- d** $f''(x) = 0$ geeft $2x - 6x^3 = 0$ en $(1 + x^2)^3 \neq 0$

$$2x(1 - 3x^2) = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} \text{ of } x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}$$

$$f(0) = \frac{0}{1 + 0^2} = 0; \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}\right)^2} = -\frac{1}{4} \sqrt{3} \text{ en}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{3}$$

De buigpunten zijn: $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}, -\frac{1}{4} \sqrt{3}\right)$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}, \frac{1}{4} \sqrt{3}\right)$.

- 35 a** $f(0) = 0^2 + e^0 = 1$ en $g(0) = 3 - \frac{4}{0 + 2} = 3 - 2 = 1$ dus $(0, 1)$ is een gemeenschappelijk punt van de grafieken van f en g .

- b** $f'(x) = 2x + e^x$ dus $f'(0) = 0 + 1 = 1$.

$$g(x) = 3 - 4(x + 2)^{-1}$$

$$g'(x) = 0 + 4(x + 2)^{-2}$$

$$g'(x) = \frac{4}{(x + 2)^2} \text{ dus } g'(0) = \frac{4}{(0 + 2)^2} = 1.$$

In het gemeenschappelijke punt $(0, 1)$ hebben de grafieken van f en g dezelfde helling, dus een gemeenschappelijke raaklijn.

- 36 a** $f(x) = g(x)$ geeft $-\frac{2}{x} = x^3 - 3$.

$$f(x) = -2x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 2x^{-2} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$g'(x) = 2x$$

$$f'(x) = g'(x) \text{ geeft } \frac{2}{x^2} = 2x.$$

$$2 = 2x^3$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

$$f(1) = -2 \text{ en } g(1) = -2$$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar bij $x = 1$.

b $h(x) = k(x)$ geeft $x^2 + \frac{1}{x} = -3x^2 + p$.

$$h(x) = x^2 + x^{-1} \text{ geeft } h'(x) = 2x - x^{-2} \text{ ofwel } h'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$k'(x) = -6x$$

$$h'(x) = k'(x) \text{ geeft } 2x - \frac{1}{x^2} = -6x.$$

$$8x = \frac{1}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ invullen bij } x^2 + \frac{1}{x} = -3x^2 + p \text{ geeft } \frac{1}{4} + 2 = -\frac{3}{4} + p.$$

$$p = 3$$

37 a $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ geeft $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1} \cdot 1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{x^2}$$

b $f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{x^2} \cdot \frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$ geeft $f'(x) = \frac{x - 2(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}}$

$$f'(x) = \frac{x - 2x - 2}{2x^2\sqrt{x+1}} \text{ en dus } f'(x) = \frac{-x - 2}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

c $g(x) = -\sqrt{x+1} + p$ geeft $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x+1}}$

$$f'(x) = g'(x) \text{ geeft } \frac{-x - 2}{2x^2\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{-x - 2}{2x^2} = \frac{-1}{2} \text{ geeft } 2(-x - 2) = -2x^2.$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = -1 \text{ (voldoet niet)}$$

$$f(2) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } g(2) = -\sqrt{3} + p$$

$$f(2) = g(2) \text{ geeft } \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{3} + p \text{ dus } p = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

16 Product- en quotiëntfuncties

032 a De teller van $f(x) = \frac{x \cdot e^{2x}}{x+3}$ is een productfunctie, dus daar is de productregel nodig voor het differentiëren. Om $q(x) = e^{2x}$ te differentiëren, is de kettingregel nodig.

b De kettingregel zorgt voor de factor 2 in de afgeleide van $q(x) = e^{2x}$, want de afgeleide van $2x$ is 2.

c $n'(x) = 1$

$$\mathbf{d} \quad f'(x) = \frac{(e^{2x} + 2x \cdot e^{2x})(x+3) - x \cdot e^{2x} \cdot 1}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xe^{2x} + 3e^{2x} + 2x^2e^{2x} + 6xe^{2x} - xe^{2x}}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2e^{2x} + 6xe^{2x} + 3e^{2x}}{(x+3)^2} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{(2x^2 + 6x + 3)e^{2x}}{(x+3)^2}$$

$$\mathbf{e} \quad g'(x) = \frac{2x(8x+2)^2 - (x^2-1) \cdot 2(8x+2) \cdot 8}{(8x+2)^4}$$

$$g'(x) = \frac{2x(8x+2) - 16(x^2-1)}{(8x+2)^3}$$

$$g'(x) = \frac{16x^2 + 4x - 16x^2 + 16}{(8x+2)^3}$$

$$g'(x) = \frac{4x + 16}{(8x+2)^3}$$

$$\mathbf{f} \quad h'(x) = \frac{\ln(2) \cdot 2^{5-x} \cdot -1 \cdot (2^x+1) - 2^{5-x} \cdot \ln(2) \cdot 2^x}{(2^x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-\ln(2) \cdot 2^5 - \ln(2) \cdot 2^{5-x} - 2^5 \cdot \ln(2)}{(2^x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-64 \ln(2) - \ln(2) \cdot 2^{5-x}}{(2^x+1)^2}$$

$$\mathbf{g} \quad k(x) = \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x+4} \text{ geeft } k(x) = \frac{x^{3\frac{1}{2}}}{x+4}$$

$$k'(x) = \frac{3\frac{1}{2} x^{2\frac{1}{2}}(x+4) - x^{3\frac{1}{2}} \cdot 1}{(x+4)^2}$$

$$k'(x) = \frac{3\frac{1}{2} x^{3\frac{1}{2}} + 14x^{2\frac{1}{2}} - x^{3\frac{1}{2}}}{(x+4)^2}$$

$$k'(x) = \frac{2\frac{1}{2} x^{3\frac{1}{2}} + 14x^{2\frac{1}{2}}}{(x+4)^2} \text{ ofwel } k'(x) = \frac{5x^3\sqrt{x} + 28x^2\sqrt{x}}{2(x+4)^2}$$

$$\mathbf{h} \quad l'(x) = \frac{\frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot (x^2+4x) - \ln(2x) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x)^2}$$

$$l'(x) = \frac{x+4 - (2x+4) \ln(2x)}{(x^2+4x)^2}$$

U7 a De helling van de grafiek van f is gelijk aan $f'(x)$.

Als de helling van de grafiek van f op den duur de helling van lijn l benadert is dus $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \text{richtingscoëfficiënt van } l$.

$$\text{b } f'(x) = \frac{(4x+1)(x-1) - (2x^2+x-2) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\lim_{(x) \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

c Als de grafiek van f en de lijn l vrijwel samenvallen als $x \rightarrow \infty$ dan is $f(x) \approx ax + b$ en zal $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$.

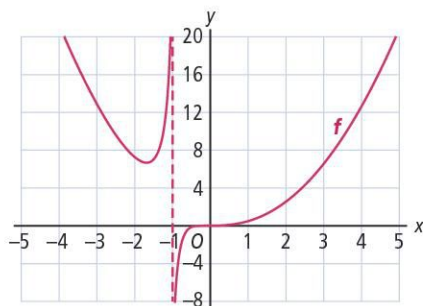
$$\text{d } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x - 1} - \frac{2x(x - 1)}{x - 1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 2 - 2x^2 + 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 3 \text{ dus een vergelijking}$$

van de asymptoot is $y = 2x + 3$.

16.5 Gemengde opdrachten

38 a



$$\text{b } f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - x^3 \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(6x^2 + 6x)(x+1)^2 - (2x^3 + 3x^2) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(6x^2 + 6x)(x+1) - 2(2x^3 + 3x^2)}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6x^3 + 6x^2 + 6x^2 + 6x - 4x^3 - 6x^2}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x}{(x+1)^3}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

$f'''(x) = 0$ geeft $2x^3 + 6x^2 + 6x = 0$ en $(x+1)^3 \neq 0$.

$$2x(x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 \text{ (dus geen oplossingen)}$$

$$x = 0$$

$f(0) = 0$ dus het buigpunt is $(0, 0)$.

$$39 \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x} + 3} = \frac{12 - 0 + 0}{0 + 0 + 3} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x} + 3} = \frac{12 - 0 + 0}{0 + 0 + 3} = 4$$

De grafiek heeft als horizontale asymptoot de lijn $y = 4$.

$$b \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}} = \sqrt{4} = 2 \text{ (zie opdracht a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}} = \sqrt{4} = 2 \text{ (zie opdracht a)}$$

De grafiek heeft als horizontale asymptoot de lijn $y = 2$

c Voor $x > 0$ is $\sqrt{x^2} = x$. Voor $x < 0$ is $\sqrt{x^2} = -x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 3}}{8x + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2 + x + 3}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{8x + 10}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2 + x + 3}{x^2}}}{8 + \frac{10}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{8 + \frac{10}{x}} = \frac{\sqrt{4 + 0 + 0}}{8 + 0} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 3}}{8x + 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2 + x + 3}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{8x + 10}{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2 + x + 3}{x^2}}}{-8 - \frac{10}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{-8 - \frac{10}{x}} = \frac{\sqrt{4 + 0 + 0}}{-8 - 0} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

De grafiek heeft als horizontale asymptoten de lijnen $y = -\frac{1}{4}$ en $y = \frac{1}{4}$.

$$d \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot |x| + 1}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 1}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{5}{x}} = \frac{6 + 0}{2 + 0} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 \cdot |x| + 1}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x + 1}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{5}{x}} = \frac{-6 + 0}{2 + 0} = -3$$

De grafiek heeft als horizontale asymptoten de lijnen $y = -3$ en $y = 3$.

- 40 a** Uit de gelijkvormigheid van $\triangle BRQ$ en $\triangle QPA$ volgt $\frac{RB}{PQ} = \frac{RQ}{PA}$.

$$\text{Dus } \frac{RB}{2} = \frac{1}{a-1} \text{ en dus is } RB = \frac{2}{a-1}$$

$$\text{En geldt } b = OB = OR + RB = 2 + \frac{2}{a-1}$$

- b** De grafiek heeft een verticale asymptoot $x = 1$.
De verticale asymptoot zie je in de figuur terug doordat als $x \rightarrow 1$ dan nadert A naar P en komt B zeer hoog te liggen, dus $b \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{x-1} \right) = 2 + 0 = 2, \text{ dus } y = 2 \text{ is een horizontale asymptoot.}$$

De horizontale asymptoot zie je in de figuur terug doordat als $x \rightarrow \infty$ dan ligt A zeer ver naar rechts en nadert B punt R maar bereikt R nooit.

- c** Oppervlakte $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(2 + \frac{2}{a-1} \right)$ ofwel

$$S = a + \frac{a}{a-1} = \frac{a(a-1) + a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$$

- d** Verschuif je A vanuit P naar rechts dan neemt de oppervlakte af vanuit de asymptoot voor $x \rightarrow 1$ en daarna toe tot de asymptoot voor $x \rightarrow \infty$. De overgang van afname naar toename is alleen mogelijk als er in het verloop een minimum voorkomt.

e
$$\frac{dS}{da} = \frac{2a(a-1) - a^2 \cdot 1}{(a-1)^2}$$

$$\frac{dS}{da} = \frac{2a^2 - 2a - a^2}{(a-1)^2}$$

$$\frac{dS}{da} = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}$$

$$\frac{dS}{da} = 0 \text{ geeft } a^2 - 2a = 0 \text{ en } (a-1)^2 \neq 0.$$

$$a(a-2) = 0$$

$$a = 0 \text{ (voldoet niet) of } a = 2$$

$$a = 2 \text{ geeft } b = 2 + \frac{2}{2-1} = 4.$$

$$\text{Dan is } A(2, 0) \text{ en is } B(0, 4).$$

41 a
$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + 3x} = \frac{3(x^2 - 9)}{x(x+3)}$$

$$f(x) = \frac{3(x-3)(x+3)}{x(x+3)}$$

$$f(x) = \frac{3(x-3)}{x} \text{ (mits } x \neq -3)$$

$$f(x) = \frac{3x-9}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{9}{x} \text{ dus } f(x) = 3 - \frac{9}{x}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

- b** Omdat $f(x) = \frac{3(x-3)(x+3)}{x(x+3)}$ zijn voor $x = -3$ de teller en noemer beide 0.

Voor $x = -3$ bestaat de functie f niet, maar de functie g bestaat wel voor $x = -3$.

De grafiek van f heeft geen punt voor $x = -3$. Voor alle andere waarden van x vallen de grafieken van f en g samen. Bij het tekenen van de grafiek van f zie je op het scherm van je rekenmachine niet dat het punt bij $x = -3$ niet bestaat.

Onderzoeksopdrachten

- 42** Bij het zwemmen zet Kjell zich af tegen het water, dus zijn snelheid is 1 m/s ten opzichte van het water.

Het water stroomt met snelheid v ten opzichte van de wal.

Zwemt Kjell met de stroom mee dan wordt zijn snelheid met v vergroot tot

$1 + v$ m/s ten opzichte van de wal en legt hij 500 meter af in $\frac{500}{1+v}$ seconden.

Zwemt hij tegen de stroom in dan wordt zijn snelheid met v verkleind tot

$1 - v$ m/s ten opzichte van de wal en legt hij 500 meter af in $\frac{500}{1-v}$ seconden.

De totale duur voor de hele tocht tussen de kribben is dus $T(v) = \frac{500}{1-v} + \frac{500}{1+v}$ seconden.

Voor de snelste tijd heeft T een minimum, dus geldt dan $T'(v) = 0$.

$$T'(v) = \frac{0 \cdot (1-v) - 500 \cdot -1}{(1-v)^2} + \frac{0 \cdot (1+v) - 500 \cdot 1}{(1+v)^2}$$

$$T'(v) = \frac{500}{(1-v)^2} - \frac{500}{(1+v)^2}$$

$$T'(v) = 0 \text{ geeft } \frac{500}{(1-v)^2} - \frac{500}{(1+v)^2} = 0.$$

$$\frac{500}{(1-v)^2} = \frac{500}{(1+v)^2}$$

$$(1-v)^2 = (1+v)^2$$

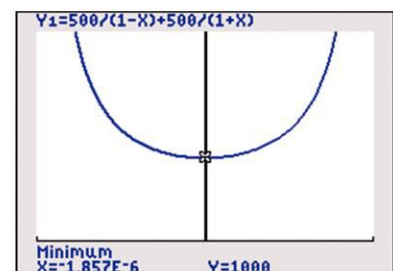
$$1 - 2v + v^2 = 1 + 2v + v^2$$

$$4v = 0 \text{ ofwel } v = 0$$

Zie de plot hiernaast.

T heeft een minimum $T(0) = 1000$.

Dus in stilstaand water ($v = 0$ m/s) zwemt Kjell dus het snelst heen en weer.



- 43 a** $f_p(x) = (x^2 - p)\sqrt{3x+6}$

$$f_p(5) = 0 \text{ geeft } (25 - p) \cdot \sqrt{21} = 0.$$

$$25 - p = 0$$

$$p = 25$$

- b** $f_1(x) = (x^2 - 1)\sqrt{3x + 6}$
 $f_1(x) = 0$ geeft $(x^2 - 1)\sqrt{3x + 6} = 0$.
 $x^2 - 1 = 0$ of $3x + 6 = 0$
 $x^2 = 1$ of $3x = -6$
 $x = -1$ of $x = 1$ of $x = -2$
 De drie oplossingen voldoen alle drie, dus f_1 heeft drie nulpunten.
- c** $f_p(x) = (x^2 - p)\sqrt{3x + 6}$
 $f_p(x) = 0$ geeft $(x^2 - p)\sqrt{3x + 6} = 0$.
 $x^2 - p = 0$ of $3x + 6 = 0$
 $x^2 = p$ of $3x = -6$
 $x = -\sqrt{p}$ of $x = \sqrt{p}$ (mits $p \geq 0$) of $x = -2$
 Als $p < 0$ dan heeft f_p één nulpunt, namelijk $x = -2$.
 Als $p = 0$ dan heeft f_p twee nulpunten, namelijk $x = 0$ en $x = -2$.
 Als $p = 4$ dan heeft f_p twee nulpunten, namelijk $x = 2$ en $x = -2$.
 Als $0 < p < 4$ of $p > 4$ dan heeft f_p drie nulpunten, namelijk $x = -\sqrt{p}$ en $x = \sqrt{p}$ en $x = -2$.

Samenvatting

- S1 a** $f(x) = 0$ geeft $(2^x - 10)(6 - 7x) = 0$.
 $2^x - 10 = 0$ of $6 - 7x = 0$
 $2^x = 10$ of $7x = 6$
 $x = {}^2\log(10)$ of $x = \frac{6}{7}$
- b** $g(x) = 0$ geeft $(3x^2 - 75) \ln(x) = 0$.
 $3x^2 = 75$ of $\ln(x) = 0$
 $x^2 = 25$ of $x = 1$
 $x = -5$ (voldoet niet) of $x = 5$ of $x = 1$
- S2 a** $f(x) = 0$ geeft $\frac{3x^2 + 6x}{1 - 4x^2} = 0$.
 $3x^2 + 6x = 0$ en $1 - 4x^2 \neq 0$
 $3x(x + 2) = 0$
 $x = 0$ of $x = -2$
- b** $1 - 4x^2 = 0$ en $3x^2 + 6x \neq 0$
 $4x^2 = 1$
 $x^2 = \frac{1}{4}$
 $x = -\frac{1}{2}$ of $x = \frac{1}{2}$
 De grafiek heeft als verticale asymptoten de lijnen $x = -\frac{1}{2}$ en $x = \frac{1}{2}$.
- S3 a** De grafiek van f heeft als horizontale asymptoot de lijn $y = 13$.
- b** De grafiek van f heeft als horizontale asymptoot de lijn $y = 2\frac{1}{3}$.

16 Product- en quotiëntfuncties

$$\text{S4 a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+2}{3-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{5+0}{0-1} = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+2}{3-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{5+0}{0-1} = -5$$

$$\text{b } f(x) = \frac{(2x+1)(6-3x)}{19-3x^2} \text{ geeft } f(x) = \frac{-6x^2+9x+6}{19-3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2+9x+6}{19-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 + \frac{9}{x} + \frac{6}{x^2}}{\frac{19}{x^2} - 3} = \frac{-6+0+0}{0-3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^2+9x+6}{19-3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6 + \frac{9}{x} + \frac{6}{x^2}}{\frac{19}{x^2} - 3} = \frac{-6+0+0}{0-3} = 2$$

$$\text{c } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4+2}{7x^3-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + \frac{2}{x^3}}{7 - \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+0}{7-0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4+2}{7x^3-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + \frac{2}{x^3}}{7 - \frac{4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+0}{7-0} = -\infty$$

$$\text{d } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-x^2}{8x^3+5x^2-9x+12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x^3} - \frac{1}{x}}{8 + \frac{5}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{12}{x^3}} = \frac{0-0}{8+0-0+0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7-x^2}{8x^3+5x^2-9x+12} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{7}{x^3} - \frac{1}{x}}{8 + \frac{5}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{12}{x^3}} = \frac{0-0}{8+0-0+0} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{S5 a } f(x) &= (80x^2 - 35)(5 - 2x) \\ f'(x) &= 160x(5 - 2x) + (80x^2 - 35) \cdot -2 \\ f'(x) &= 800x - 320x^2 - 160x^2 + 70 \\ f'(x) &= -480x^2 + 800x + 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } g(x) &= (7x+3) \cdot e^{5x-10} \\ g'(x) &= 7 \cdot e^{5x-10} + (7x+3) \cdot e^{5x-10} \cdot 5 \\ g'(x) &= 7 \cdot e^{5x-10} + (35x+15) \cdot e^{5x-10} \\ g'(x) &= (35x+22) \cdot e^{5x-10} \end{aligned}$$

S6 a $f(x) = \frac{19x + 26}{4x - 12}$

$$f'(x) = \frac{19(4x - 12) - (19x + 26) \cdot 4}{(4x - 12)^2}$$

$$f'(x) = \frac{76x - 228 - 76x - 104}{(4x - 12)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-332}{(4x - 12)^2}$$

b $g(x) = \frac{3x^2 - 27}{4 - x^2}$

$$g'(x) = \frac{6x(4 - x^2) - (3x^2 - 27) \cdot -2x}{(4 - x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{24x - 6x^3 + 6x^3 - 54x}{(4 - x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-30x}{(4 - x^2)^2}$$

c $h(x) = \frac{2xe^x}{x + 5}$

$$h'(x) = \frac{(2e^x + 2xe^x)(x + 5) - 2xe^x \cdot 1}{(x + 5)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2xe^x + 10e^x + 2x^2e^x + 10xe^x - 2xe^x}{(x + 5)^2}$$

$$h'(x) = \frac{(2x^2 + 10x + 10)e^x}{(x + 5)^2}$$

d $k(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$

$$k'(x) = \frac{2x \ln(x) - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

$$k'(x) = \frac{2x \ln(x) - x}{\ln^2(x)}$$

S7 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ geeft $f(x) = x + x^{-1}$.

$$f'(x) = 1 - x^{-2} \text{ ofwel } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = -4x^2 + x + 3 \text{ geeft } g'(x) = -8x + 1.$$

$$f'(x) = g'(x) \text{ geeft } 1 - \frac{1}{x^2} = -8x + 1.$$

$$\frac{1}{x^2} = 8x$$

$$1 = 8x^3$$

$$x^3 = \frac{1}{8} \text{ dit geeft } x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2} \text{ en } g\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} + 3 = 2\frac{1}{2}$$

Omdat $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$ en $f'\left(\frac{1}{2}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right)$ raken de grafieken van f en g elkaar.

16 Product- en quotiëntfuncties

Test jezelf

T1 a $f(x) = 0$ geeft $(2x - 5) \cdot \sqrt{12x - x^2} = 0$.

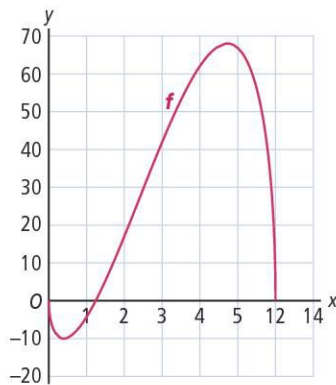
$$2x - 5 = 0 \text{ of } 12x - x^2 = 0$$

$$2x = 5 \text{ of } x(12 - x) = 0$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 0 \text{ of } x = 12$$

De nulpunten zijn $x = 2\frac{1}{2}$ en $x = 0$ en $x = 12$.

b



c $g(x) = 0$ geeft $(2x + 5) \cdot \sqrt{12x - x^2} = 0$.

$$2x + 5 = 0 \text{ of } 12x - x^2 = 0$$

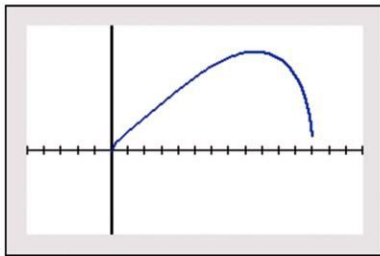
$$2x = -5 \text{ of } x(12 - x) = 0$$

$$x = -2\frac{1}{2} \text{ of } x = 0 \text{ of } x = 12$$

$$x = -2\frac{1}{2} \text{ voldoet niet.}$$

De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = 12$.

d



Een plot geeft ook de nulpunten $x = 0$ en $x = 12$.

T2 a $f(x) = 0$ geeft $3x + 6 = 0$ en $2 - 5x \neq 0$.

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

Het nulpunt van f is $x = -2$.

Voor een verticale asymptoot geldt: $2 - 5x = 0$ en $3x + 6 \neq 0$.

$$5x = 2 \text{ dus } x = \frac{2}{5}.$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{2}{5}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 6}{2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{6}{x}}{\frac{2}{x} - 5} = \frac{3 + 0}{0 - 5} = -\frac{3}{5} \text{ en}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+6}{2-5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{6}{x}}{\frac{2}{x} - 5} = \frac{3+0}{0-5} = -\frac{3}{5}$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = -\frac{3}{5}$.

- b** $g(x) = 0$ geeft $x^2 - 4x + 3 = 0$ en $x + 6 \neq 0$.

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 3$$

De nulpunten zijn $x = 1$ en $x = 3$.

Voor een verticale asymptoot geldt $x + 6 = 0$ en $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

De verticale asymptoot is de lijn $x = -6$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4 + 0}{1 + 0} = \infty \text{ en}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 4 + 0}{1 + 0} = -\infty$$

Er zijn geen horizontale asymptoten.

- c** $h(x) = 0$ geeft $8x + 3x^2 = 0$ en $x^3 - 8 \neq 0$

$$x(8 + 3x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 8 + 3x = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 3x = -8$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\frac{8}{3}$$

De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = -\frac{8}{3}$.

Voor een verticale asymptoot geldt $x^3 - 8 = 0$ en $8x + 3x^2 \neq 0$.

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 3x^2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{8}{x^2} + \frac{3}{x}}{1 - \frac{8}{x^3}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0 \text{ en}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3x^2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{8}{x^2} + \frac{3}{x}}{1 - \frac{8}{x^3}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

- d** $k(x) = 0$ geeft $5 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x} = 0$.

$$\frac{5x(x+1)}{x(x+1)} - \frac{3x}{x(x+1)} + \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = 0$$

$$\frac{5x(x+1) - 3x + 2(x+1)}{x(x+1)} = 0$$

$$5x(x+1) - 3x + 2(x+1) = 0 \text{ en } x(x+1) \neq 0$$

$$5x^2 + 5x - 3x + 2x + 2 = 0$$

$$5x^2 + 4x + 2 = 0$$

16 Product- en quotiëntfuncties

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 16 - 40 = -24 < 0.$$

k heeft geen nulpunten.

Voor een verticale asymptoot geldt $x + 1 = 0$ of $x = 0$.

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -1$ en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x} \right) = 5 - 0 + 0 = 5 \text{ en}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x} \right) = 5 - 0 + 0 = 5$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 5$.

T3 a $g(x) = (x+2)^2(x-5)$
 $g'(x) = 2(x+2)(x-5) + (x+2)^2 \cdot 1$
 $g'(x) = 2(x^2 - 3x - 10) + x^2 + 4x + 4$
 $g'(x) = 2x^2 - 6x - 20 + x^2 + 4x + 4$
 $g'(x) = 3x^2 - 2x - 16$

b $h(x) = (2 - 9x)\sqrt{x+7}$

$$h'(x) = -9\sqrt{x+7} + (2 - 9x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+7}}$$

$$h'(x) = -9\sqrt{x+7} \cdot \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x+7}} + \frac{2 - 9x}{2\sqrt{x+7}}$$

$$h'(x) = \frac{-18(x+7)}{2\sqrt{x+7}} + \frac{2 - 9x}{2\sqrt{x+7}}$$

$$h'(x) = \frac{-18x - 126 + 2 - 9x}{2\sqrt{x+7}}$$

$$h'(x) = \frac{-27x - 124}{2\sqrt{x+7}}$$

c $k(x) = x^2 \cdot {}^3\log(4x)$
 $k'(x) = 2x \cdot {}^3\log(4x) + x^2 \cdot \frac{1}{\ln(3) \cdot 4x} \cdot 4$
 $k'(x) = 2x \cdot {}^3\log(4x) + \frac{x}{\ln(3)}$

d $f(x) = 3^x \cdot e^{2x+1}$
 $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x \cdot e^{2x+1} + 3^x \cdot e^{2x+1} \cdot 2$
 $f'(x) = (\ln(3) + 2) \cdot 3^x \cdot e^{2x+1}$

T4 a Met de stelling van Pythagoras: $OQ^2 + p^2 = 32^2$ dus $OQ = \sqrt{1024 - p^2}$.

b Punt P kan niet boven O liggen en kan er maximaal 32 boven liggen.
 De waarde van p ligt in het interval $0 < p \leq 32$.

c $A(p) = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ = \frac{1}{2} p \cdot \sqrt{1024 - p^2}$

$$\text{d } A'(p) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1024 - p^2} + \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{2\sqrt{1024 - p^2}} \cdot -2p$$

$$A'(p) = \frac{1}{2} \sqrt{1024 - p^2} - \frac{p^2}{2\sqrt{1024 - p^2}}$$

$$A'(p) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2} \sqrt{1024 - p^2} - \frac{p^2}{2\sqrt{1024 - p^2}} = 0.$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1024 - p^2} = \frac{p^2}{2\sqrt{1024 - p^2}}$$

$$1024 - p^2 = p^2$$

$$1024 = 2p^2$$

$$p^2 = 512$$

$p = \sqrt{512}$ (want $p > 0$), dus de maximale oppervlakte is

$$A(\sqrt{512}) = \frac{1}{2} \sqrt{512} \cdot \sqrt{1024 - (\sqrt{512})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{512} \cdot \sqrt{1024 - 512} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{512} \cdot \sqrt{512} = \frac{1}{2} \cdot 512 = 256.$$

$$\text{T5 a } f(x) = \frac{8x - 3}{5 - x}$$

$$f'(x) = \frac{8 \cdot (5 - x) - (8x - 3) \cdot -1}{(5 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{40 - 8x + 8x - 3}{(5 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{37}{(5 - x)^2}$$

$$\text{b } h(x) = \frac{2 - e^{0,5x}}{3x + 2}$$

$$h'(x) = \frac{-0,5e^{0,5x}(3x + 2) - (2 - e^{0,5x}) \cdot 3}{(3x + 2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-1,5xe^{0,5x} - e^{0,5x} - 6 + 3e^{0,5x}}{(3x + 2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-1,5xe^{0,5x} + 2e^{0,5x} - 6}{(3x + 2)^2}$$

$$\text{c } g(x) = \frac{\ln^2(x)}{2 - \ln(x)}$$

$$g'(x) = \frac{2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} (2 - \ln(x)) - \ln^2(x) \cdot -\frac{1}{x}}{(2 - \ln(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{4 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 2 \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x} + \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}}{(2 - \ln(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{4 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}}{(2 - \ln(x))^2}$$

$$g'(x) = \frac{4 \ln(x) - \ln^2(x)}{x(2 - \ln(x))^2}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

$$\begin{aligned}
 \text{d } k(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 1} \\
 k'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3 - 1) - \sqrt{x} \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} \\
 k'(x) &= \frac{\frac{1}{2}(x^3 - 1) - x \cdot 3x^2}{\sqrt{x} \cdot (x^3 - 1)^2} \\
 k'(x) &= \frac{\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2} - 3x^3}{\sqrt{x} \cdot (x^3 - 1)^2} \\
 k'(x) &= \frac{-5x^3 - 1}{2\sqrt{x} \cdot (x^3 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

T6 a f en g raken elkaar als $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$.

$$f(x) = xe^x \text{ dus } f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \text{ dus } g'(x) = x + 1$$

$$f'(x) = g'(x) \text{ geeft } e^x + x \cdot e^x = x + 1.$$

$$e^x(1 + x) = x + 1$$

$$e^x = 1 \text{ of } x + 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -1$$

$$f(0) = xe^0 = 0 \text{ en } g(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0 = 0$$

$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = \frac{-1}{e} \text{ en } g(-1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + -1 = -\frac{1}{2}$$

De grafieken van f en g raken elkaar in de oorsprong.

$$\text{b } h(x) = \ln(x) \text{ dus } h'(x) = \frac{1}{x}$$

$$k(x) = x^2 + p \text{ dus } k'(x) = 2x$$

$$h'(x) = k'(x) \text{ geeft } \frac{1}{x} = 2x.$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ (voldoet niet) of } x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \text{ en } k\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + p = \frac{1}{2} + p$$

$$h(x) = k(x) \text{ als } \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} + p$$

$$\text{Hieruit volgt } p = \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}.$$

T7 a $f(x) = 0$ geeft $2 + 2 \ln(x) = 0$ en $x \neq 0$.

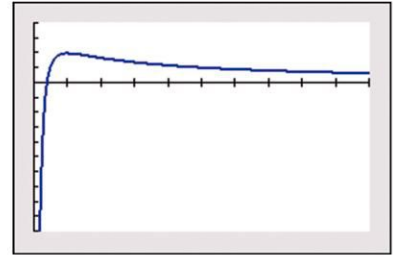
$$2 \ln(x) = -2$$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1}$$

$$\text{Het nulpunt is } x = e^{-1} \left(\text{of } \frac{1}{e} \right).$$

- b** In de plot is te zien dat de grafiek als verticale asymptoot de lijn $x = 0$ heeft.
Omdat $f(100) \approx 0,1121$ en $f(1000) \approx 0,0158$ heeft de grafiek als horizontale asymptoot de lijn $y = 0$.



$$\text{c } f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (2 + 2 \ln(x)) \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 2 - 2 \ln(x)}{x^2} \text{ ofwel } f'(x) = -\frac{2 \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2 \ln(x) = 0.$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1$$

In de plot bij opdracht b is te zien dat f een maximum $f(1) = 2$ heeft.

$$\text{T8 a } f'(x) = \frac{(2x - 15)(x + 5) - (x^2 - 15x) \cdot 1}{(x + 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 10x - 15x - 75 - x^2 + 15x}{(x + 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 10x - 75}{(x + 5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } x^2 + 10x - 75 = 0 \text{ en } (x + 5)^2 \neq 0.$$

$$(x - 5)(x + 15) = 0$$

$$x = 5 \text{ of } x = -15$$

$$f(5) = -5 \text{ en } f(-15) = -45 \text{ dus de toppen zijn } (5, -5) \text{ en } (-15, -45).$$

- b** $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 15x = 0$ en $x + 5 \neq 0$.

$$x(x - 15) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 15$$

Voor het punt A geldt $x = 15$.

$$f'(15) = \frac{15^2 + 10 \cdot 15 - 75}{(15 + 5)^2} = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$$

$$x = 15 \text{ en } y = 0 \text{ invullen bij } y = \frac{3}{4}x + b \text{ geeft } 0 = \frac{3}{4} \cdot 15 + b \text{ dus } b = -11\frac{1}{4}.$$

$$\text{Een vergelijking van de raaklijn is } y = \frac{3}{4}x - 11\frac{1}{4}.$$

$$\text{T9 a } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6t}{3t + 2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6}{3 + \frac{2}{t}} = \frac{6}{3 + 0} = 2.$$

Op den duur wordt de hoeveelheid eindproduct 2 mol.

- b** De reactiesnelheid is $\frac{dC}{dt}$.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{6(3t + 2) - 6t \cdot 3}{(3t + 2)^2}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{18t + 12 - 18t}{(3t + 2)^2} \text{ ofwel } \frac{dC}{dt} = \frac{12}{(3t + 2)^2}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

$$c \quad \frac{dC}{dt} = \frac{12}{9t^2 + 12t + 4}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{12}{9t^2 + 12t + 4} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{12}{t^2}}{9 + \frac{12}{t} + \frac{4}{t^2}} = \frac{0}{9 + 0 + 0} = 0$$

Op den duur wordt de reactiesnelheid dus 0 mol/minuut.

- T10 a** Invullen van $V = 12$, $R_{\text{inwendig}} = 5$ en $R_{\text{uitwendig}} = x$ bij $V = I \times (R_{\text{inwendig}} + R_{\text{uitwendig}})$ geeft

$$12 = I \cdot (5 + x) \text{ ofwel } I = \frac{12}{x + 5}$$

$$b \quad P = I^2 \times R_{\text{uitwendig}} = \left(\frac{12}{x + 5} \right)^2 \cdot x \text{ ofwel } P = \frac{144x}{(x + 5)^2}$$

$$c \quad \frac{dP}{dx} = \frac{144(x + 5)^2 - 144x \cdot 2(x + 5) \cdot 1}{(x + 5)^4}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{144(x + 5) - 144x \cdot 2}{(x + 5)^3}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{144x + 720 - 288x}{(x + 5)^3} \text{ ofwel } \frac{dP}{dx} = \frac{-144x + 720}{(x + 5)^3}$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ geeft } -144x + 720 = 0 \text{ en } (x + 5)^3 \neq 0.$$

$$144x = 720$$

$$x = 5 \text{ en } P(5) = \frac{144 \cdot 5}{(5 + 5)^2} = \frac{720}{100} = 7,2$$

Het maximale vermogen is 7,2 watt bij een uitwendige weerstand van 5 ohm.

Extra oefening

$$E1 \quad a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x + 7}{3 - 6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 + \frac{7}{x}}{\frac{3}{x} - 6} = \frac{15 + 0}{0 - 6} = -2\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15x + 7}{3 - 6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15 + \frac{7}{x}}{\frac{3}{x} - 6} = \frac{15 + 0}{0 - 6} = -2\frac{1}{2}$$

Een vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = -2\frac{1}{2}$.

$$b \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 16}{6x^3 + 8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{16}{x^3}}{6 + \frac{8}{x^2}} = \frac{0 - 0}{6 + 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 16}{6x^3 + 8x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{16}{x^3}}{6 + \frac{8}{x^2}} = \frac{0 - 0}{6 + 0} = 0$$

Een vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = 0$.

$$\text{c } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x - 12}{3x^2 - 10x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{3 - \frac{10}{x}} = \frac{4 + 0 - 0}{3 - 0} = 1\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 4x - 12}{3x^2 - 10x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{3 - \frac{10}{x}} = \frac{4 + 0 - 0}{3 - 0} = 1\frac{1}{3}$$

Een vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = 1\frac{1}{3}$.

E2 a $f(x) = \sqrt{x} \cdot (5x^3 - 12x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (5x^3 - 12x) + \sqrt{x} \cdot (15x^2 - 12)$$

b $g(x) = 8x \cdot e^{5x}$

$$g'(x) = 8e^{5x} + 8x \cdot e^{5x} \cdot 5 \text{ of ook } g'(x) = 8e^{5x} + 40x \cdot e^{5x}$$

c $h(x) = \left(\frac{1}{x^3} - 5\right) \cdot \sqrt{3x - 4}$

$$h(x) = (x^{-3} - 5) \cdot \sqrt{3x - 4}$$

$$h'(x) = -3x^{-4} \cdot \sqrt{3x - 4} + (x^{-3} - 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x - 4}} \cdot 3$$

$$h'(x) = -\frac{3}{x^4} \sqrt{3x - 4} + \left(\frac{1}{x^3} - 5\right) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x - 4}}$$

d $k(x) = x^3 \ln(x)$

$$k'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} \text{ of ook } k'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2$$

E3 a $f(x) = \frac{3x - 7}{2 - x^2}$

$$f'(x) = \frac{3(2 - x^2) - (3x - 7) \cdot -2x}{(2 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6 - 3x^2 + 6x^2 - 14x}{(2 - x^2)^2} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{3x^2 - 14x + 6}{(2 - x^2)^2}$$

b $n(x) = \frac{x^3 + 2x}{\ln(x)}$

$$n'(x) = \frac{(3x^2 + 2) \ln(x) - (x^3 + 2x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

$$n'(x) = \frac{(3x^2 + 2) \ln(x) - x^2 - 2}{\ln^2(x)}$$

16 Product- en quotiëntfuncties

$$\text{c } h(x) = \frac{1 - \ln(x)}{2x}$$

$$h'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot 2x - (1 - \ln(x)) \cdot 2}{(2x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2 - 2 + 2 \ln(x)}{4x^2}$$

$$h'(x) = \frac{-4 + 2 \ln(x)}{4x^2} \text{ of ook } h'(x) = \frac{-2 + \ln(x)}{2x^2}$$

$$\text{d } k(x) = \frac{x^3 - 4x}{15 - 3x^2}$$

$$k'(x) = \frac{(3x^2 - 4)(15 - 3x^2) - (x^3 - 4x) \cdot -6x}{(15 - 3x^2)^2}$$

$$k'(x) = \frac{45x^2 - 9x^4 - 60 + 12x^2 + 6x^4 - 24x^2}{(15 - 3x^2)^2}$$

$$k'(x) = \frac{-3x^4 + 33x^2 - 60}{(15 - 3x^2)^2}$$

$$\text{E4 a } f(x) = x^2 \ln(x) \text{ geeft } f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x$$

$$g(x) = 1 - \frac{x+3}{5x-1} \text{ geeft } g'(x) = -\frac{1 \cdot (5x-1) - (x+3) \cdot 5}{(5x-1)^2}$$

$$g'(x) = -\frac{5x-1-5x-15}{(5x-1)^2} \text{ ofwel } g'(x) = -\frac{-16}{(5x-1)^2}$$

$$f(1) = 1^2 \cdot \ln(1) = 0 \text{ en } g(1) = 1 - \frac{4}{4} = 0$$

$$f'(1) = 2 \ln(1) + 1 = 1 \text{ en } g'(1) = -\frac{-16}{4^2} = 1$$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar bij $x = 1$.

$$\text{b } h(x) = \frac{1}{x^2} \text{ geeft } h(x) = x^{-2}$$

$$h'(x) = -2x^{-3} \text{ ofwel } h'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$k(x) = 2 - x^2 \text{ geeft } k'(x) = -2x$$

$$h'(x) = k'(x) \text{ geeft } -\frac{2}{x^3} = -2x.$$

$$-2 = -2x^4$$

$$x^4 = 1$$

$$x = -1 \text{ of } x = 1$$

$$h(1) = 1 \text{ en } k(1) = 1$$

$$h(-1) = 1 \text{ en } k(-1) = 1$$

De grafieken van h en k raken elkaar bij $x = 1$ en bij $x = -1$.

E5 a $g(t) = 0$ geeft $(t^2 - 8t)(t^4 + 6t) = 0$.

$$t^2 - 8t = 0 \text{ of } t^4 + 6t = 0$$

$$t(t - 8) = 0 \text{ of } t(t^3 + 6) = 0$$

$$t = 0 \text{ of } t = 8 \text{ of } t^3 = -6$$

$$t = 0 \text{ of } t = 8 \text{ of } t = \sqrt[3]{-6} \left(= -\sqrt[3]{6} \right)$$

b $h(x) = 0$ geeft $\left(2 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{4x + 10} = 0$

$$2 - \frac{1}{x} = 0 \text{ of } 4x + 10 = 0$$

$$\frac{1}{x} = 2 \text{ of } 4x = -10$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ of } x = -2\frac{1}{2}$$

c $k(s) = 0$ geeft $\sqrt{16 - s^2} \cdot \sqrt{3s + 7} = 0$.

$$16 - s^2 = 0 \text{ of } 3s + 7 = 0$$

$$s^2 = 16 \text{ of } 3s = -7$$

$$s = -4 \text{ (voldoet niet) of } s = 4 \text{ of } s = -2\frac{1}{3}$$

d $h(x) = 0$ geeft $x^3 \ln(x) = 0$.

$$x^3 = 0 \text{ of } \ln(x) = 0$$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } x = 1$$

E6 a $f(x) = \frac{3x - 7}{2 - x^2}$

$$f(x) = 0 \text{ als } 3x - 7 = 0 \text{ en } 2 - x^2 \neq 0.$$

$$3x = 7$$

$$\text{Het nulpunt is } x = 2\frac{1}{3}.$$

$$\text{Voor een verticale asymptoot geldt } 2 - x^2 = 0 \text{ en } 3x - 7 \neq 0.$$

$$x^2 = 2$$

$$\text{De grafiek van } f \text{ heeft als verticale asymptoten de lijnen } x = -\sqrt{2} \text{ en } x = \sqrt{2}.$$

b $g(x) = \frac{1 - x - x^2}{x^2 + 1}$

$$g(x) = 0 \text{ als } 1 - x - x^2 = 0 \text{ en } x^2 + 1 \neq 0.$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ of } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{De nulpunten zijn } x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ of } x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

$$\text{Voor een verticale asymptoot geldt } x^2 + 1 = 0 \text{ en } 1 - x - x^2 \neq 0.$$

$$x^2 + 1 = 0 \text{ heeft geen oplossingen.}$$

$$\text{De grafiek van } g \text{ heeft geen verticale asymptoten.}$$

c $h(x) = \frac{5x - 2}{e^{0,2x}}$

$$h(x) = 0 \text{ geeft } 5x - 2 = 0 \text{ en } e^{0,2x} \neq 0.$$

$$5x = 2$$

$$\text{Het nulpunt is } x = \frac{2}{5}.$$

16 Product- en quotiëntfuncties

Voor een verticale asymptoot geldt $e^{0,2x} = 0$ en $5x - 2 \neq 0$.

$e^{0,2x} = 0$ heeft geen oplossingen.

De grafiek van h heeft geen verticale asymptoten.

d $k(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{x^3}$

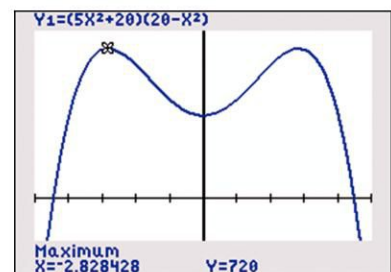
$k(x) = 0$ geeft $\sqrt{e^x} = 0$ en $x^3 \neq 0$.

$\sqrt{e^x} = 0$ heeft geen oplossingen, dus k heeft geen nulpunten.

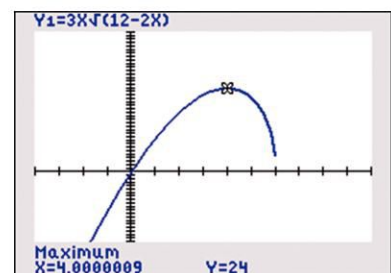
Voor een verticale asymptoot geldt $x^3 = 0$ en $\sqrt{e^x} \neq 0$.

De grafiek heeft als verticale asymptoot de lijn $x = 0$.

- E7 a** $f(x) = (5x^2 + 20)(20 - x^2)$ geeft
 $f'(x) = 10x(20 - x^2) + (5x^2 + 20)(-2x)$
 $f'(x) = 200x - 10x^3 - 10x^3 - 40x$
 $f'(x) = 160x - 20x^3$
 $f'(x) = 0$ geeft $160x - 20x^3 = 0$.
 $20x(8 - x^2) = 0$
 $x = 0$ of $x^2 = 8$
 $x = 0$ of $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 Zie de plot hiernaast.
 f heeft een minimum $f(0) = 400$.
 f heeft maxima $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) = 720$.



- b** $g(x) = 3x\sqrt{12 - 2x}$ geeft
 $g'(x) = 3\sqrt{12 - 2x} + 3x \cdot \frac{1}{2\sqrt{12 - 2x}} \cdot -2$
 $g'(x) = 3\sqrt{12 - 2x} - \frac{3x}{\sqrt{12 - 2x}}$
 $g'(x) = \frac{3(12 - 2x) - 3x}{\sqrt{12 - 2x}}$
 $g'(x) = \frac{36 - 9x}{\sqrt{12 - 2x}}$
 $g'(x) = 0$ geeft $36 - 9x = 0$ en $\sqrt{12 - 2x} \neq 0$.
 $9x = 36$
 $x = 4$
 Zie de plot hiernaast.
 g heeft een maximum $g(4) = 12\sqrt{12 - 8} = 24$.
 g heeft een randminimum $g(6) = 0$.



- E8 a** $f(x) = (3x + 1) \cdot 2^x$ geeft $f'(x) = 3 \cdot 2^x + (3x + 1) \cdot \ln(2) \cdot 2^x$.
 $f'(x) = 3 \cdot 2^x + (3x \ln(2) + \ln(2)) \cdot 2^x$
 $f'(x) = (3 + 3x \ln(2) + \ln(2)) \cdot 2^x$
- b** $f'(x) = 0$ geeft $(3 + 3x \ln(2) + \ln(2)) \cdot 2^x = 0$.
 $3 + 3x \ln(2) + \ln(2) = 0$
 $3x \ln(2) = -3 - \ln(2)$
 $x = \frac{-3 - \ln(2)}{3 \ln(2)}$

$$\text{E9 } f(2) = (4-2)\sqrt{2 \cdot 2} = 2\sqrt{4} = 4 \text{ en } g(2) = \frac{6-2}{2-1} = 4$$

$$f'(x) = -1 \cdot \sqrt{2x} + (4-x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2$$

$$f'(x) = -\sqrt{2x} + \frac{4-x}{\sqrt{2x}}$$

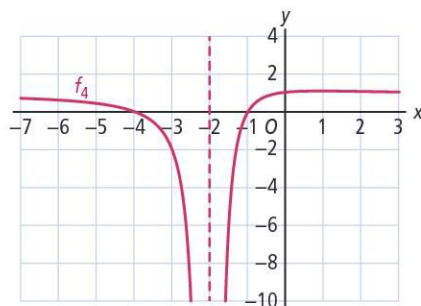
$$g'(x) = \frac{3 \cdot (x-1) - (3x-2) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{3x-3-3x+2}{(x-1)^2} \text{ ofwel } g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = -\sqrt{4} + \frac{4-2}{\sqrt{4}} = -2 + \frac{2}{2} = -1 \text{ en } g'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = \frac{-1}{1^2} = -1.$$

Conclusie: de grafieken raken elkaar bij $x = 2$.

E10 a



$$\text{b } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

De horizontale asymptoot heeft vergelijking $y = 1$.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4x + 4} = 1 \text{ geeft } x^2 + 5x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

Dus $x = 0$ en dus is $P(0, 1)$.

c Als $x \rightarrow \infty$ dan $f(x) \rightarrow 1$ dus is er rechts van P een maximum.

Als $x \rightarrow \infty$ vanaf het maximum is er een punt waar de helling minimaal is.

Dus is er een buigpunt.

16 Product- en quotiëntfuncties

d $f_4(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4x + 4}$ geeft

$$f'_4(x) = \frac{(2x + 5)(x^2 + 4x + 4) - (x^2 + 5x + 4)(2x + 4)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$$

$$f'_4(x) = \frac{(2x + 5)(x + 2)(x + 2) - 2(x^2 + 5x + 4)(x + 2)}{(x + 2)^4}$$

$$f'_4(x) = \frac{(2x + 5)(x + 2) - 2(x^2 + 5x + 4)}{(x + 2)^3}$$

$$f'_4(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5x + 10 - 2x^2 - 10x - 8}{(x + 2)^3}$$

$$f'_4(x) = \frac{-x + 2}{(x + 2)^3}$$

$$f''_4(x) = \frac{-1(x + 2)^3 - (-x + 2) \cdot 3(x + 2)^2 \cdot 1}{(x + 2)^6}$$

$$f''_4(x) = \frac{-1(x + 2) - 3(-x + 2)}{(x + 2)^4}$$

$$f''_4(x) = \frac{-x - 2 + 3x - 6}{(x + 2)^4}$$

$$f''_4(x) = \frac{2x - 8}{(x + 2)^4}$$

$$f''_4(x) = 0 \text{ geeft } 2x - 8 = 0 \text{ en } (x + 2)^4 \neq 0.$$

$$2x = 8$$

$$x = 4 \text{ en } f(4) = \frac{40}{36} = 1\frac{1}{9}$$

Het buigpunt is $(4, 1\frac{1}{9})$.

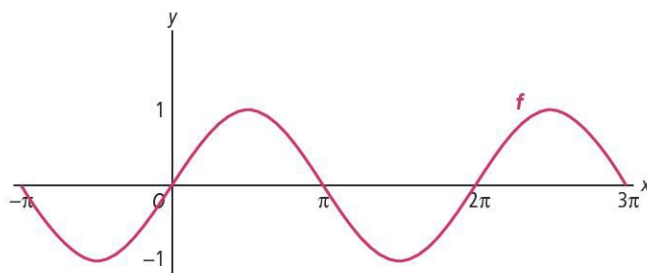
e $x^2 + ax + a = 0$ heeft geen oplossingen als $D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot a < 0$ dus als $a(a - 4) < 0$.

Dit is het geval als $0 < a < 4$.

17 Goniometrische functies

Voorkennis

V1 a



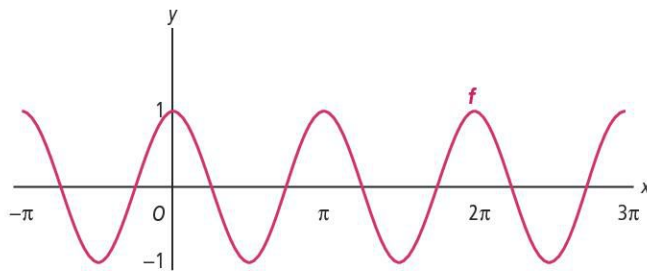
b $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ en $x = 3\pi$

c $f(x) = 1$ als $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 2\frac{1}{2}\pi$.

$f(x) = -1$ als $x = -\frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

d De periode van f is 2π .

e



$\cos(2x) = 0$ voor $x = -\frac{3}{4}\pi$, $x = -\frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = 1\frac{1}{4}\pi$,
 $x = 1\frac{3}{4}\pi$, $x = 2\frac{1}{4}\pi$ en $x = 2\frac{3}{4}\pi$

$\cos(2x) = 1$ als $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ en $x = 3\pi$.

$\cos(2x) = -1$ als $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\frac{1}{2}\pi$.

De periode van f is π .

V2 a $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{5}{6}\pi)$, want de sinusgrafiek is symmetrisch ten opzichte van de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

b $\cos(-1\frac{1}{4}\pi) = \cos(1\frac{1}{4}\pi)$, want de cosinusgrafiek is symmetrisch ten opzichte van de y -as.

c $\sin(1\frac{1}{6}\pi) = -\sin(\frac{5}{6}\pi)$ want de periode van de sinusgrafiek is 2π .

d $\cos(1\frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{2}{3}\pi)$ omdat de cosinusgrafiek symmetrisch is ten opzichte van de lijn $x = \pi$, en $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\cos(\frac{1}{3}\pi)$ omdat de cosinusgrafiek puntsymmetrisch is ten opzichte van het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

e $\cos(\frac{5}{6}\pi) = -\cos(\frac{1}{6}\pi)$, omdat de cosinusgrafiek puntsymmetrisch is ten opzichte van het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

f $\sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\sin(\frac{3}{4}\pi)$, omdat de sinusgrafiek puntsymmetrisch is ten opzichte van het punt $(\pi, 0)$.

V3 a $\sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

e $\sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$

b $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$

f $\cos(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\sin(-\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

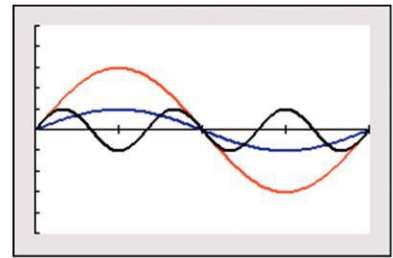
g $\sin(-1\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$

d $\cos(-1\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}$

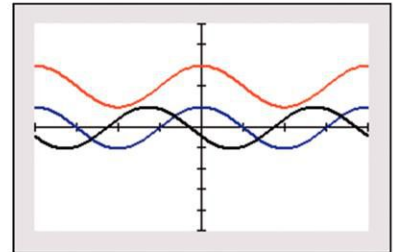
h $\sin(1\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

17 Goniometrische functies

- V4 a** De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor 3.
De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door de grafiek van f te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{3}$.



- b** De grafiek van m ontstaat uit de grafiek van k door de grafiek van k twee eenheden omhoog te verschuiven.
De grafiek van n ontstaat uit de grafiek van k door de grafiek van k twee eenheden naar links te verschuiven.



- V5 a** De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door deze te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{6}$.
De evenwichtsstand is $y = 0$, de amplitude is 1 en de periode $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$.
- b** De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door deze te spiegelen in de x -as en de grafiek vervolgens 0,22 naar links te verschuiven.
De evenwichtsstand is $y = 0$, de amplitude is 1 en de periode 2π .
- c** De grafiek van m ontstaat uit de grafiek van f door deze te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{4\pi}$ en vervolgens te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor $\sqrt{5}$.
De evenwichtsstand is $y = 0$, de amplitude is $\sqrt{5}$ en de periode: $\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.
- d** De grafiek van n ontstaat uit de grafiek van f door deze te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor -2 en vervolgens één eenheid omhoog te verschuiven.
De evenwichtsstand is $y = 1$, de amplitude is 2 en de periode 2π .

- V6 a** $\sin(5x) = 1$
 $5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$
 Op $[0, 2\pi]$: $x = \frac{1}{10}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{9}{10}\pi$ of $x = 1\frac{3}{10}\pi$ of $x = 1\frac{7}{10}\pi$.
- b** $\cos(4x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $4x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $4x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{3}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{5}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 Op $[0, 2\pi]$: $x = \frac{3}{16}\pi$ of $x = \frac{5}{16}\pi$ of $x = \frac{11}{16}\pi$ of $x = \frac{13}{16}\pi$ of $x = 1\frac{3}{16}\pi$ of $x = 1\frac{5}{16}\pi$ of $x = 1\frac{11}{16}\pi$ of $x = 1\frac{13}{16}\pi$.
- c** $\sin(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
 Op $[0, 2\pi]$: $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = 1\frac{1}{3}\pi$.
- d** $\cos(6x) = -1$
 $6x = \pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
 Op $[0, 2\pi]$: $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{5}{6}\pi$

V7 a $4\cos(2x) = 2\sqrt{3}$
 $\cos(2x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
 $2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$
Op $[-\pi, 3\pi]$: $x = -\frac{11}{12}\pi$ of $x = -\frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{11}{12}\pi$ of
 $x = 1\frac{1}{12}\pi$ of $x = 1\frac{11}{12}\pi$ of $x = 2\frac{1}{12}\pi$ of $x = 2\frac{11}{12}\pi$.

b $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{3}{4}$
 $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = 2\frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = 3\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$
Op $[-\pi, 3\pi]$: $x = 2\frac{1}{3}\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi$.

c $\cos\left(1\frac{1}{2}x\right) = 0$
 $1\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
Op $[-\pi, 3\pi]$: $x = -\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = \pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$ of
 $x = 2\frac{1}{3}\pi$ of $x = 3\pi$.

d $6\sin(2x) = 3$
 $\sin(2x) = \frac{1}{2}$
 $2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$
Op $[-\pi, 3\pi]$: $x = -\frac{11}{12}\pi$ of $x = -\frac{7}{12}\pi$ of $x = \frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi$ of
 $x = 1\frac{1}{12}\pi$ of $x = 1\frac{5}{12}\pi$ of $x = 2\frac{1}{12}\pi$ of $x = 2\frac{5}{12}\pi$.

17.1. Harmonische trillingen

intro Als l korter wordt, wordt de slingertijd, en dus de periode ook korter.
De onderste grafiek hoort dus bij de kortere slinger.

- 1 a** De periode van u is $\frac{2\pi}{880\pi} = \frac{1}{440}$ seconde.
b De periode is het omgekeerde van het aantal trillingen per seconde.

$$\text{periode} = \frac{1}{\text{aantal trillingen per seconde}}$$

- c** De periode is $\frac{1}{600}$ seconde.
De b in de formule is dan $\frac{2\pi}{\frac{1}{600}} = 1200\pi$.

De formule is $u = \sin(1200\pi t)$ met u in mm en t in seconden.

17 Goniometrische functies

- 2 a** Amplitude 1 mm, periode $\frac{2\pi}{500\pi} = \frac{1}{250}$ s en frequentie 250 Hz.
- b** Amplitude 0,02 mm, periode $\frac{2\pi}{300} = \frac{1}{150} \pi$ s en frequentie $\frac{150}{\pi}$ Hz.
- c** Amplitude 1 mm, periode $\frac{2\pi}{256\pi} = \frac{1}{128}$ s en frequentie 128 Hz.
- d** Amplitude 9 mm, periode $\frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6}$ s en frequentie 6 Hz.
- 3 a** Als de frequentie verdubbelt, wordt de formule $u = 6\sin(8t)$.
- b** De frequentie wordt 6, de formule $u = 6\sin(6t)$.
- 4** Uit het voorbeeld weet je dat de periode 8 is, de evenwichtsstand $y = 10$ en de amplitude 4. De grafiek gaat een kwart periode voor de top stijgend door de evenwichtsstand, dat is dus bij $x = 5 - 2 = 3$.
 $f(x) = 10 + 4\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x - 3)\right)$
- 5 a** De evenwichtsstand is $y = \frac{1}{2}(14 + 13) = 13\frac{1}{2}$ en de amplitude $14 - 13\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Een halve periode is $1 - -7 = 8$, dus de periode is 16. De top is 7 naar links verschoven: $f(x) = 13\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{8}\pi(x + 7)\right)$.
- b** De evenwichtsstand is $y = -2$, de amplitude $2 - -2 = 4$ en de periode 12. De top is 5 naar links verschoven: $f(x) = -2 + 4\cos\left(\frac{1}{6}\pi(x + 5)\right)$.
- c** De evenwichtsstand is $y = 3$, de amplitude 3 en de periode $6 - 2 = 4$. De top is 2 naar rechts verschoven: $f(x) = 3 + 3\cos\left(\frac{1}{2}\pi(x - 2)\right)$.
 Of: de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt (1, 3) dus $f(x) = 3 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$.
- 6** De frequentie is 20 Hz en de amplitude 7 cm, dus het functievoorschrift is $u(t) = 7\sin(40\pi t)$.
- 7 a** Bij een frequentie van 20 Hz hoort $b = 20 \cdot 2\pi = 40\pi$ en bij een frequentie van 20 000 Hz is $b = 20\,000 \cdot 2\pi = 40\,000\pi$, dus b ligt tussen 40π en $40\,000\pi$.
- b** De waarde van b wordt dan ook 1,5 keer zo groot.

8 a $b = \frac{2\pi}{12\frac{5}{12}} \approx 0,506$

b $4 = 5 + 3\sin(0,506t)$

Invoer: $y_1 = 5 + 3\sin(0,506x)$ en $y_2 = 4$

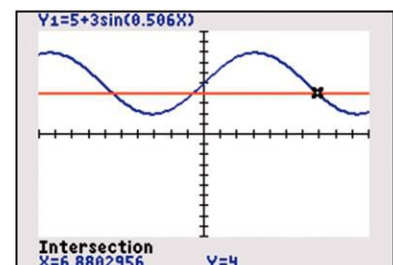
Venster: standaard

Opties: snijpunten

De snijpunten zijn $x = 0,671\dots$ en $x = 6,880\dots$

Het water staat $6,880\dots - 0,671\dots = 7,551\dots$ uur boven de 4 meter.

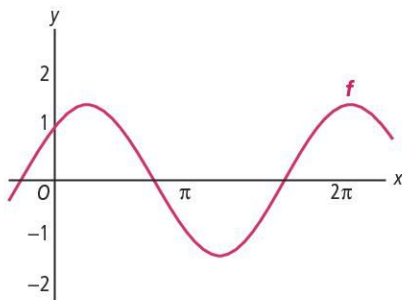
Dat is 7 uur en 33 minuten.



- 05 a** Tussen twee toppen ligt een halve periode. De halve periode is het verschil tussen de x -coördinaten van de toppen: $3 - -5 = 8$. De periode is 16.
- b** De evenwichtsstand d zit precies tussen de y -waarden van de toppen in en is $d = \frac{1}{2}(-2 + 8) = 3$.
 De amplitude a is $a = 8 - 3 = 5$.

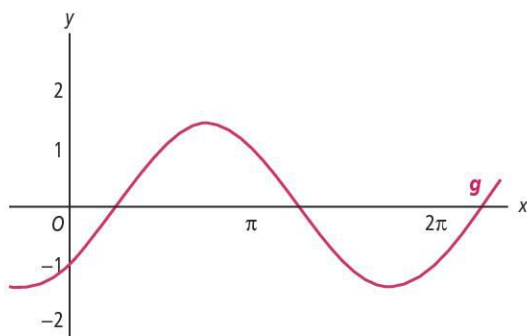
- c $b = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{16} = \frac{1}{8}\pi$
- d Dat punt is $(\frac{1}{2}(-5 + 3), \frac{1}{2}(-2 + 8)) = (-1, 3)$, dus $c = -1$.
- e Een functievoorschrift is $f(x) = 3 + 5\sin(\frac{1}{8}\pi(x + 1))$.

U1 a



- b Met je rekenmachine vind je de evenwichtsstand $y = 0$, dus $d = 0$.
De periode is 2π , dus $b = 1$.
Een top is $(0,785; 1,4142)$, dus de amplitude is $a = 1,4142$.
Een nulpunt is $-0,785$. Een functievoorschrift is $f(x) = 1,41\sin(x + 0,79)$.

c



Evenwichtsstand $y = 0$, dus $d = 0$. De periode is 2π , dus $b = 1$.
Een top is $(2,356; 1,4142)$, dus de amplitude is $a = 1,4142$.
Een nulpunt is $0,785$. Een functievoorschrift is $g(x) = 1,41\sin(x - 0,79)$.

U2 a $-1 \leq \sin(2\pi t) \leq 1$

2^{-t} is voor elke waarde van t positief, dus $-2^{-t} \leq 2^{-t} \cdot \sin(2\pi t) \leq 2^{-t}$

- b De helling van de grafiek van f is overal negatief, dus moeten de toppen van de grafiek van u die bij een maximum horen onder de grafiek van f liggen. Omdat de helling van de grafiek van g overal positief is, liggen de toppen van de grafiek van u die bij een minimum horen boven de grafiek van g .

17.2 Goniometrische formules

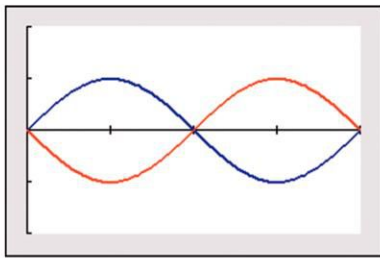
intro $h(x) = f(x) + g(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

Door deze formule h in te voeren in je rekenmachine en dan de grafiek te plotten zie je een horizontale lijn.

De grafiek is de lijn $y = 1$.

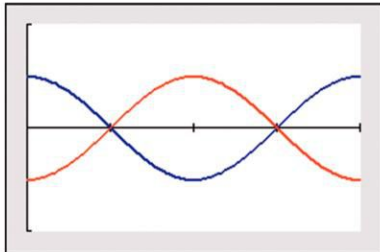
17 Goniometrische functies

9 a



$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

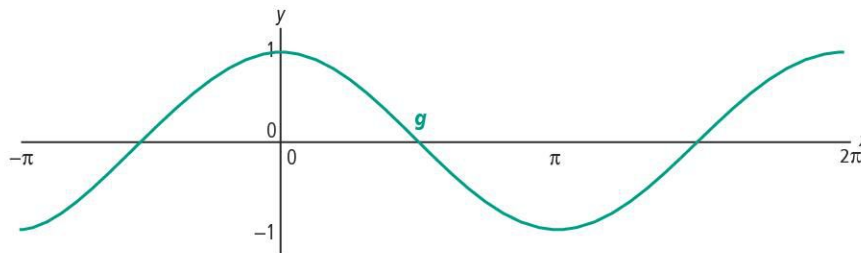
b



$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

10 a De grafiek is symmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

b



c Nee, want deze grafiek is niet symmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

d $\cos(-a) = \cos(a)$, omdat de grafiek symmetrisch is in de y -as.

11 a Door een translatie van $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts.

b $\sin(x) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ dus op de puntjes moet $-\frac{1}{2}\pi$ staan.

c $\cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ omdat de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ de beeldgrafiek is van de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ bij een translatie van $\frac{1}{2}\pi$ naar links.

12 a $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \cos((x + \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$

b $\cos(1\frac{1}{3}\pi - x) = \sin((1\frac{1}{3}\pi - x) + \frac{1}{2}\pi) = \sin(-x + 1\frac{5}{6}\pi)$

c $-\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x + \frac{2}{3}\pi) = \sin(2x + \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + 1\frac{1}{6}\pi)$

d $-\sin(2(x + \frac{1}{4}\pi)) = -\sin(2x + \frac{1}{2}\pi) = -\cos(2x) = \cos(2x + \pi)$

13 a $\cos(2x - \frac{5}{6}\pi) = \sin(2x - \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) =$

$\sin(1\frac{1}{3}\pi - 2x) = -\sin(2x - 1\frac{1}{3}\pi) = \sin(2x - 1\frac{1}{3}\pi + \pi) = \sin(2x - \frac{1}{3}\pi),$

dus $f(x) = g(x)$.

b $\sin(1\frac{3}{4}\pi - 3x) = \cos(1\frac{3}{4}\pi - 3x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(1\frac{1}{4}\pi - 3x) = \cos(3x - 1\frac{1}{4}\pi) =$

$-\cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = \cos(3x - 1\frac{1}{4}\pi),$ dus $f(x) = g(x)$.

14 a $\sin(x) = \frac{2}{5}$
 $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$
 $\cos(x) = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{21}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{5}\sqrt{21}$
 Op het gegeven interval: $\cos(x) = \frac{1}{5}\sqrt{21}$.

b $\cos(x) = -\frac{7}{25}$
 $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$
 $\sin(x) = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$ of $\sin(x) = -\frac{24}{25}$
 Op het gegeven interval: $\sin(x) = \frac{24}{25}$.

c $\cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$
 $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$
 $\sin(x) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ of $\sin(x) = -\frac{2}{3}$
 Op het gegeven interval: $\sin(x) = -\frac{2}{3}$.

d $\sin(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$
 $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$
 $\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{4}$
 Op het gegeven interval: $\cos(x) = \frac{1}{4}$.

15 $\sin(a) = 3\cos(a)$
 $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$
 $9\cos^2(a) + \cos^2(a) = 1$
 $10\cos^2(a) = 1$
 $\cos^2(a) = \frac{1}{10}$, dus $\sin^2(a) = \frac{9}{10}$
 $\cos(a) = \sqrt{\frac{1}{10}}$ of $\cos(a) = -\sqrt{\frac{1}{10}}$
 $\sin(a) = 3\sqrt{\frac{1}{10}}$ of $\sin(a) = -3\sqrt{\frac{1}{10}}$

16 a $f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
 Spiegelen in de x -as geeft $u(x) = -\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$.
 Verschuiving π naar rechts: $v(x) = -\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi - \pi\right) = -\sin\left(x - \frac{10}{3}\pi\right)$.
 Vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor 2 geeft ten slotte
 $g(x) = -\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$.
b $-\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \cos\left(\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi\right)$
 Dus $g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi\right)$.

012 a $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - 2x\right) = \sin\left(\left(\frac{3}{4}\pi - 2x\right) + \frac{1}{2}\pi\right)$
b $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - 2x\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi - 2x + \frac{1}{2}\pi\right)$
c $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - 2x\right) = \sin\left(2\frac{1}{4}\pi - 2x\right)$
 (of ook $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - 2x\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi - 2x\right)$)
d $\sin\left(-x + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(-x + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(-x + \frac{1}{6}\pi\right)$
 (of ook $\sin\left(-x + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$)

17 Goniometrische functies

014 a $\cos^2(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ en $\sin^2(x) + \frac{1}{16} = 1$

b $\sin^2(x) = \frac{15}{16}$

$\sin(x) = \frac{1}{4}\sqrt{15}$ of $\sin(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$

c Op het gegeven interval is $\sin(x)$ positief.

d $\sin(x) = \frac{1}{4}\sqrt{15}$

e $\sin^2(x) = \left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 5 = \frac{5}{9}$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

$\cos(x) = \frac{2}{3}$ of $\cos(x) = -\frac{2}{3}$

Op het gegeven interval: $\cos(x) = \frac{2}{3}$.

f $\cos^2(x) = \frac{144}{169}$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

$\sin(x) = \frac{5}{13}$ of $\sin(x) = -\frac{5}{13}$

Op het gegeven interval: $\sin(x) = -\frac{5}{13}$.

g $\cos^2(x) = \frac{1}{100}$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

$\sin(x) = \frac{3}{10}\sqrt{11}$ of $\sin(x) = -\frac{3}{10}\sqrt{11}$

Op het gegeven interval: $\sin(x) = \frac{3}{10}\sqrt{11}$.

h $\sin^2(x) = \frac{48}{49}$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \frac{48}{49} = \frac{1}{49}$

$\cos(x) = \frac{1}{7}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{7}$

Op het gegeven interval: $\cos(x) = -\frac{1}{7}$.

U3 a Het minimum is 0 en het maximum is 1, dus de amplitude is $\frac{1}{2}$.

De periode π .

b Vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{2}$, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor $\frac{1}{2}$, gevolgd door een verschuiving $\frac{1}{2}$ omhoog en $\frac{1}{4}\pi$ naar rechts.

c $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, $d = \frac{1}{2}$ en $c = \frac{1}{2}\pi$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$ ofwel $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x - \pi)$

of ook $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

d Bij een verschuiving van $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts of links.

e $\frac{1}{2}\pi$ naar links verschuiven van de grafiek van f geeft

$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\left(\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$

$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$

17.3 Vergelijkingen oplossen

intro De periode is gelijk aan het verschil van de x -coördinaten van P_1 en P_2 :

$$6,69 - 0,41 = 6,28$$

De x -coördinaat van Q_2 is $2,73 + 6,28 = 9,01$.

De x -coördinaat van Q_{30} is $2,73 + 29 \cdot 6,28 = 184,85$.

17 a $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

b Dat volgt uit de symmetrie van de grafiek van de sinus.

$$2x - \frac{1}{6}\pi = \pi - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

c $x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi$

d $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

18 a $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = \pi - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } x = 2\frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$$

b $\sin(2x) = \sin(3x)$

$$2x = 3x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \pi - 3x + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

c $\sin(4x - \pi) = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$$4x - \pi = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 4x - \pi = \pi - x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \frac{3}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

d $\cos\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$$\cos\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{6}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

17 Goniometrische functies

e $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$
 $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi - x + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{3}\pi = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi - x\right) + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + x + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $0 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$ ($0 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ heeft geen oplossingen)

f $\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) = \cos(3\pi - \pi x)$
 $\frac{2}{3}\pi x = 3\pi - \pi x + k \cdot 2\pi$ of $\frac{2}{3}\pi x = -3\pi + \pi x + k \cdot 2\pi$
 $1\frac{2}{3}\pi x = 3\pi + k \cdot 2\pi$ of $-\frac{1}{3}\pi x = -3\pi + k \cdot 2\pi$
 $1\frac{2}{3}x = 3 + k \cdot 2$ of $-\frac{1}{3}x = -3 + k \cdot 2$
 $x = 1\frac{4}{5} + k \cdot 1\frac{1}{5}$ of $x = 9 + k \cdot 6$

19 a $\sin(x) = -\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$
 $\sin(x) = \sin\left(x + 1\frac{1}{2}\pi\right)$
 $x = x + 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \pi - x - 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = x + 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ heeft geen oplossing.
 $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

b $\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos(3x)$
 $\cos\left(2x + 1\frac{1}{3}\pi\right) = \cos(3x)$
 $2x + 1\frac{1}{3}\pi = 3x + k \cdot 2\pi$ of $2x + 1\frac{1}{3}\pi = -3x + k \cdot 2\pi$
 $-x = -1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = -1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{4}{15}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

c $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{4}\pi - 2x\right)$
 $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(1\frac{1}{4}\pi - 2x\right)$
 $x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{4}\pi - 2x + k \cdot 2\pi$ of $x - \frac{1}{3}\pi = -1\frac{1}{4}\pi + 2x + k \cdot 2\pi$
 $3x = 1\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $-x = -\frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{19}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

d $\sin(3x) = -\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$
 $\sin(3x) = \sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$
 $3x = 2x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \pi - 2x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

20 a $\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos(2x)$

$$\cos\left(3x - \frac{2}{3}\pi\right) = \cos(2x)$$

$$3x - \frac{2}{3}\pi = 2x + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x - \frac{2}{3}\pi = -2x + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{2}{15}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

b $\sin(2x) = \cos(x)$

$$\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(x)$$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{2}\pi = -x + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

c $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin(2x)$

$$\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$x + \frac{1}{4}\pi = 2x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x + \frac{1}{4}\pi = -2x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$-x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

d $\sin(4x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$\cos\left(4x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$4x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi \text{ of } 4x - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi$$

$$3\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 4\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{7}\pi + k \cdot \frac{4}{7}\pi \text{ of } x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{4}{9}\pi$$

e $\cos\left(x - 1\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$

$$\cos\left(x - 1\frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$$

$$x - 1\frac{1}{3}\pi = x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x - 1\frac{1}{3}\pi = -x + \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x - 1\frac{1}{3}\pi = x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ heeft geen oplossing.}$$

$$2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

21 $\sin(3x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

$$3x = x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \pi - \left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 4x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{De oplossingen zijn: } x = \frac{5}{16}\pi, x = \frac{13}{16}\pi, x = \frac{7}{8}\pi, x = 1\frac{5}{16}\pi,$$

$$x = 1\frac{13}{16}\pi \text{ en } x = 1\frac{7}{8}\pi.$$

17 Goniometrische functies

22 $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$
 $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos\left(x + \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$
 $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
 $\frac{1}{2}x = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = -\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$
 $-\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = -x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $1\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
 De oplossingen zijn: $x = -1\frac{1}{9}\pi$, $x = \frac{2}{9}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = 1\frac{5}{9}\pi$.

23 a $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$
 Stel $\sin(x) = p$ dan wordt de vergelijking
 $2p^2 - p - 1 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
 $p = \frac{1+3}{4} = 1$ of $p = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$
 $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

b $3\cos(x) - 2\sin^2(x) = 0$
 $3\cos(x) - 2(1 - \cos^2(x)) = 0$
 $2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2 = 0$
 Stel $\cos(x) = p$ dan wordt de vergelijking
 $2p^2 + 3p - 2 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$
 $p = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ of $p = \frac{-3-5}{4} = -2$
 $\cos(x) = \frac{1}{2}$ of $\cos(x) = -2$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ ($\cos(x) = -2$ heeft geen oplossingen)

c $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
 $1 - \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
 Stel $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = p$ dan wordt de vergelijking
 $-p^2 = 2p$
 $p = 0$ of $p = -2$
 $\cos(x) = 0$ of $\cos(x) = -2$
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ ($\cos(x) = -2$ heeft geen oplossingen)

d $\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 0$
 Stel $\cos(x) = p$ dan wordt de vergelijking
 $p^2 + 2p + 1 = 0$
 $(p+1)^2 = 0$
 $p = -1$
 $\cos(x) = -1$
 $x = \pi + k \cdot 2\pi$

24 a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ en $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$

$f(x)$ kan maximaal $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$ en minimaal $3 \cdot -1 + 2 \cdot 0 = -3$ zijn.

Maar zoals in de grafiek te zien is, wordt dit maximum lang niet gehaald.

b $3\cos(x) + 2\sin^2(x) = 0$

$$3\cos(x) + 2 - 2\cos^2(x) = 0$$

Stel $\cos(x) = p$ dan wordt de vergelijking

$$2p^2 - 3p - 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$p = \frac{3+5}{4} = 2 \text{ of } p = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = 2 \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$(\cos(x) = 2 \text{ heeft geen oplossingen}) \quad x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

c $3\cos(x) + 2\sin^2(x) = 3$

$$3\cos(x) + 2 - 2\cos^2(x) = 3$$

$$2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$$

Stel $\cos(x) = p$ dan wordt de vergelijking

$$2p^2 - 3p + 1 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

$$p = \frac{3+1}{4} = 1 \text{ of } p = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = 1 \text{ of } \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

018 a $3x - \frac{1}{2}\pi = \pi - \frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi$

b $2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

c $2 : 2\frac{1}{2} = 2 : \frac{5}{2} = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

d $x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \frac{4}{5}\pi$ of $x = \frac{3}{5}\pi + k \cdot \frac{4}{5}\pi$

e $\cos(2x - \frac{1}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{2}x)$

$$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi$$

$$1\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{4}{5}\pi$$

f $\cos(2x) = \cos(3x - \frac{1}{3}\pi)$

$$2x = 3x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -3x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$-x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{15}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

g $\sin(5x - \pi) = \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$

$$5x - \pi = x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x - \pi = \pi - x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 6x = 2\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

h $\cos(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 4\pi$$

17 Goniometrische functies

i $\cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi - x\right)$
 $x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi - x + k \cdot 2\pi$ of $x + \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{6}\pi + x + k \cdot 2\pi$
 $2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $0 = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ ($0 = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ heeft geen oplossing)

j $\sin\left(\frac{3}{4}\pi x\right) = \sin(2\pi + \pi x)$
 $\frac{3}{4}\pi x = 2\pi + \pi x + k \cdot 2\pi$ of $\frac{3}{4}\pi x = \pi - 2\pi - \pi x + k \cdot 2\pi$
 $-\frac{1}{4}\pi x = 2\pi + k \cdot 2\pi$ of $1\frac{3}{4}\pi x = -\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -8 + k \cdot 8\pi$ of $x = -\frac{4}{7} + k \cdot 1\frac{1}{7}$

023 a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ofwel $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.
 En ook $\cos^2(2x) = 1 - \sin^2(2x)$.
 Dit substitueren in $2\cos^2(2x) + \sin(2x) - 1 = 0$ geeft
 $2(1 - \sin^2(2x)) + \sin(2x) - 1 = 0$
 $2 - 2\sin^2(2x) + \sin(2x) - 1 = 0$
 $-2\sin^2(2x) + \sin(2x) + 1 = 0$

b Beide kanten zijn vermenigvuldigd met -1 .

c $2p^2 - p - 1 = 0$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
 $p = \frac{1+3}{4} = 1$ of $p = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

d $\sin(2x) = 1$ of $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$

e $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

U4 a $16\cos^4(x) - 8\sin^2(x) = -5$
 $16\cos^4(x) - 8(1 - \cos^2(x)) = -5$
 $16\cos^4(x) + 8\cos^2(x) - 3 = 0$
 Stel $\cos^2(x) = p$ dan wordt de vergelijking
 $16p^2 + 8p - 3 = 0$
 $D = 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot -3 = 256$

$$p = \frac{-8+16}{32} = \frac{1}{4} \text{ of } p = \frac{-8-16}{32} = -\frac{3}{4}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4} \text{ of } \cos^2(x) = -\frac{3}{4}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{2} \quad (\cos^2(x) = -\frac{3}{4} \text{ heeft geen oplossing})$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

b $\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\cos^2(x) = \sin(x) + \sin^2(x) \text{ en } \sin(x) \neq -1 \text{ en } \cos(x) \neq 0$$

$$1 - \sin^2(x) = \sin(x) + \sin^2(x)$$

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

Stel $\sin(x) = p$ dan wordt de vergelijking

$$2p^2 + p - 1 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$$

$$p = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \sin(x) = -1 \text{ (vervalt)}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{c } \cos^4(x) - \sin^4(x) = \frac{1}{2}$$

$$(\cos^2(x) + \sin^2(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = \frac{1}{2}$$

$$2 \cos^2(x) = 1\frac{1}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi \text{ of } x = -\frac{5}{6}\pi$$

17.4 Differentiëren

intro De horizontale snelheid is het grootst als de slinger van de klok door het laagste punt gaat. In de grafiek zijn dat de nulpunten.

$$5 \cdot \cos(2\pi t) = 0$$

$$2\pi t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

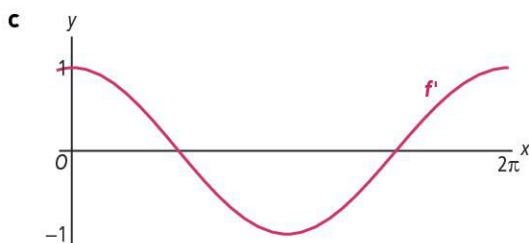
$$t = \frac{1}{4} + k \cdot \frac{1}{2}$$

Dus elke halve seconde is de snelheid het grootst, te beginnen bij $\frac{1}{4}$ seconde.

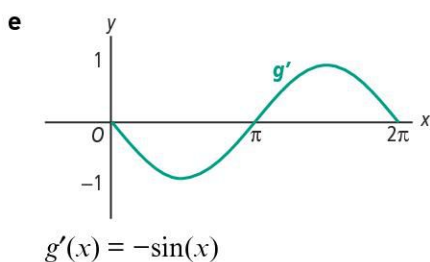
25 a In de toppen is de helling gelijk aan 0.

Bij de sinusgrafiek is dat bij $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

$$\text{b } f'(0) \approx 1$$



$$\text{d } f''(x) = \cos(x)$$



$$\text{26 a } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)+1}} \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)+1}}$$

$$\text{b } k'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot -\sin(x)$$

$$k'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

17 Goniometrische functies

$$c \quad g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos(x) \cdot -\sin(x)$$

$$g'(x) = -\sin(x)\cos(x)$$

$$d \quad l'(x) = -3\sin\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$l'(x) = -\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$e \quad m'(x) = 2\sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3$$

$$m'(x) = 6\sin(3x)\cos(3x)$$

$$f \quad n'(x) = e^{x+2\cos(x)} \cdot (1 - 2\sin(x))$$

$$27 \quad a \quad f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot -\sin(x)$$

$$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$b \quad g'(x) = \frac{1 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin(x) - x \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$c \quad h'(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$$

$$d \quad k'(x) = \frac{1 \cdot \cos^2(2x) - x \cdot 2 \cdot \cos(2x) \cdot -\sin(2x) \cdot 2}{\cos^4(x)}$$

$$k'(x) = \frac{\cos^2(2x) + 4x\cos(2x)\sin(2x)}{\cos^4(x)}$$

$$k'(x) = \frac{\cos(2x) + 4x\sin(2x)}{\cos^3(2x)}$$

$$28 \quad a \quad f'(x) = \frac{-3\sin(3x) \cdot \sin(3x) - \cos(3x) \cdot 3\cos(3x)}{\sin^2(3x)}$$

$$f'(x) = \frac{-3\sin^2(3x) - 3\cos^2(3x)}{\sin^2(3x)} = \frac{-3(\sin^2(3x) + \cos^2(3x))}{\sin^2(3x)} = \frac{-3}{\sin^2(3x)}$$

$$b \quad f'(x) = 2x \cdot \sin(2x) + x^2 \cos(2x) \cdot 2$$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x)$$

$$c \quad g'(x) = \frac{-\sin(2x) \cdot 2 \cdot \sin(3x) - (1 + \cos(2x)) \cdot \cos(3x) \cdot 3}{\sin^2(3x)}$$

$$g'(x) = -\frac{2\sin(2x) \cdot \sin(3x) + 3\cos(3x) + \cos(2x) \cdot \cos(3x) \cdot 3}{\sin^2(3x)}$$

$$29 \quad a \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \sin(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) = 0$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{Op het gegeven interval: } x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{1}{3}\pi, x = \frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{De toppen zijn } \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \text{ en } \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

$$b \quad f''(x) = -\sin(x)$$

$$-\sin(x) = 0$$

$$x = k \cdot \pi$$

$$\text{Op het gegeven interval: } x = 0, x = \pi, x = 2\pi \text{ en } x = 3\pi.$$

$$\text{De buigpunten zijn } (0, 0), \left(\pi, \frac{1}{2}\pi\right), (2\pi, \pi) \text{ en } \left(3\pi, \frac{1}{2}\pi\right).$$

- 30 a** Voor de verticale asymptoot moet de noemer 0 zijn.

$$1 + \sin(x) = 0$$

$$\sin(x) = -1$$

$$x = 1\frac{1}{2}\pi$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

b
$$f'(x) = \frac{0 \cdot (1 + \sin(x)) - 3 \cdot -\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$$

$$f'(x) = -\frac{3\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \cos(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = 1\frac{1}{2}\pi \text{ (vervalt)}$$

Zie de blauwe plot hiernaast.

$$\text{Minimum } f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1\frac{1}{2}$$

c
$$\frac{3}{1 + \sin(x)} = 4\sin(x)$$

$$3 = 4\sin(x) \cdot (1 + \sin(x)) \text{ en } \sin(x) \neq -1$$

$$4\sin^2(x) + 4\sin(x) - 3 = 0$$

Stel $\sin(x) = p$ dan wordt de vergelijking

$$4p^2 + 4p - 3 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot -3 = 64$$

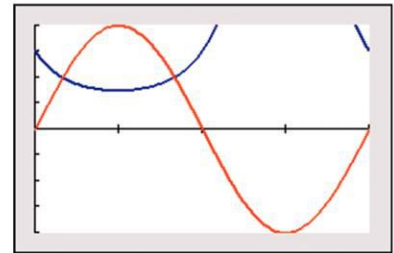
$$p = \frac{-4 + 8}{8} = \frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{-4 - 8}{8} = -1\frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \sin(x) = -1\frac{1}{2} \text{ (geen oplossing)}$$

De oplossingen van de vergelijking op $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$.

Zie de plot bij opdracht b.

De oplossing van de ongelijkheid is $\frac{1}{6}\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$.



- 31 a** De periode $\frac{2\pi}{0,4\pi} = 5$ seconden.

b
$$p'(t) = -20\cos(0,4\pi t) \cdot 0,4\pi$$

$$p'(t) = -8\pi \cdot \cos(0,4\pi t)$$

$$p'(1) = -8\pi \cdot \cos(0,4\pi) \approx -7,766$$

$p'(1) < 0$, dus de luchtdruk daalt, de persoon ademt uit.

- c** Bij uitademen is $|p'(t)|$ maximaal als $\cos(0,4\pi t) = 1$ en bij inademen is $p'(t)$ maximaal als $\cos(0,4\pi t) = -1$.

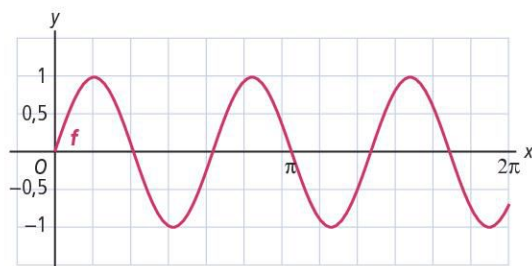
Deze maximale snelheid is $p'(t) = -20 \cdot 1 \cdot 0,4\pi = -8\pi$ per seconde bij uitademen en 8π per seconde bij inademen.

$$0,4\pi t = 0 + k \cdot 2\pi \text{ of } 0,4\pi t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = 0 + k \cdot 5 \text{ of } t = 2\frac{1}{2} + k \cdot 5$$

Om de 2,5 seconden is de snelheid waarmee de luchtdruk toeneemt of afneemt maximaal.

- 32 a**



17 Goniometrische functies

b $f'(x) = 3\cos(x) - 12\sin^2(x) \cdot \cos(x)$

$$3\cos(x) - 12\sin^2(x) \cdot \cos(x) = 0$$

$$3\cos(x)(1 - 4\sin^2(x)) = 0$$

$$3\cos(x) = 0 \text{ of } 1 - 4\sin^2(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } \sin^2(x) = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

Op $[0, 2\pi]$: $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$

De extreme waarden zijn:

randminimum $f(0) = 0$

maxima $f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3 + 4 = 1$$

minima $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 3 - 4 = -1$

$$f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 3 \cdot -\frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 3 \cdot -\frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

randmaximum $f(2\pi) = 0$

- c** Er gaan 3 perioden in het interval $[0, 2\pi]$, dus $g(x) = \sin(3x)$ en $b = 3$.

33 a $f'_{a,b}(x) = a \cos(bx) \cdot b = ab \cos(bx)$

$$f'_{a,b}(0) = ab \cos(0) = ab \cdot 1 = ab$$

De richtingscoëfficiënt van l is 3, dus $ab = 3$.

- b** Het maximum van $f_{a,b}$ is gelijk aan de amplitude a .

Dus $a = 5$ en omdat $ab = 3$ is $b = \frac{3}{5}$.

34 a $f'(x) = 2 \sin^3(x)$

$$f'(x) = 6 \sin^2(x) \cdot \cos(x)$$

$$6\sin^2(x) \cdot \cos(x) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 0$$

Op $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$ zijn de oplossingen

$$x = -\frac{1}{2}\pi \text{ of } x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi.$$

Zie de plot hiernaast.

De extreme waarden zijn: randminimum $f\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -2$,

maximum $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot 1^3 = 2$ en randminimum $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1)^3 = -2$

- b** Voor de snijpunten met de x -as geldt $2 \sin^3(x) = 0$, dus $x = 0$ en $x = \pi$.

$$f'(x) = 6 \sin^2(x) \cdot \cos(x)$$

$$f''(x) = 12\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + 6\sin^2(x) \cdot -\sin(x)$$

$$f''(x) = 12\sin(x) \cdot \cos^2(x) - 6\sin^3(x)$$

$$f''(x) = 6\sin(x) \cdot (2\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$f''(0) = 6\sin(0) \cdot (2\cos^2(0) - \sin^2(0)) = 0 \text{ en}$$

$$f''(\pi) = 6\sin(\pi) \cdot (2\cos^2(\pi) - \sin^2(\pi)) = 0$$

Dus de snijpunten met de x -as zijn inderdaad buigpunten.

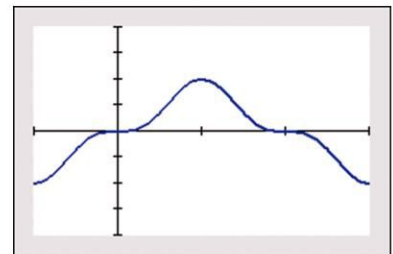
- c** $6\sin(x) \cdot (2\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 0$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } 2\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$$

$$2\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 0$$

$$3\cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{3}$$



026 a $f(x) = x^3$

b $f'(\sin(x)) = 3 \sin^2(x)$ en $g'(x) = \cos(x)$

c $h'(x) = 3 \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

d $f'(x) = -7 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2}$

$$f'(x) = -3\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

g $l'(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \cdot \frac{1}{5}$

$$l'(x) = \frac{2}{5} \cos\left(\frac{1}{5}x\right)$$

e $k'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$$k'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

h $m'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

f $n'(x) = -\sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}$

$$n'(x) = \frac{-\sin(\ln(x))}{x}$$

i $p'(x) = \cos(e^{2x}) \cdot e^{2x} \cdot 2$

$$p'(x) = 2e^{2x} \cos(e^{2x})$$

027 a $p(x) = \frac{1}{2}x$ en $q(x) = \sin(x)$

$$p'(x) = \frac{1}{2} \text{ en } q'(x) = \cos(x)$$

b $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2}x \cdot \cos(x)$

c Nee, het resultaat is niet te vereenvoudigen.

d $p(x) = \sin(x)$ en $q(x) = \frac{1}{2} - \cos(x)$

$$p'(x) = \cos(x) \text{ en } q'(x) = \sin(x)$$

$$g'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right) - \sin(x) \cdot \sin(x)}{\left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right)^2}$$

U5 a $f(x) = e^{\sin(x)}$

$$f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$$

$$e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) = 0$$

$$e^{\sin(x)} = 0 \text{ (geen oplossing) of } \cos(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Het maximum is $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = e$ en het minimum $f\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

b $f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$$f''(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + e^{\sin(x)} \cdot -\sin(x)$$

$$f''(x) = e^{\sin(x)}(\cos^2(x) - \sin(x))$$

c $f''(x) = 0$ geeft $\cos^2(x) - \sin(x) = 0$

$$1 - \sin^2(x) - \sin(x) = 0$$

$$\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

Stel $\sin(x) = p$ dan wordt de vergelijking $p^2 + p - 1 = 0$.

$$p = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ of } p = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ (vervalt)}$$

d $\sin(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ geeft $x = 0,666\dots$ of $x = \pi - 0,666\dots$

$$e^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} \approx 1,86$$

De buigpunten zijn (0,67; 1,86) en (2,48; 1,86).

17 Goniometrische functies

U6 a Voor raken moet gelden: $f(x) = g_a(x)$ en $f'(x) = g'_a(x)$.

$$f'(x) = \cos(x - \pi) \text{ en } g'_a(x) = -\sin(x)$$

$$\cos(x - \pi) = -\sin(x)$$

$$-\cos(x) = -\sin(x)$$

$$\cos(x) = \sin(x)$$

$$\cos(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$x = x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$0 = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ (geen oplossing) of } 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$\text{Er moet gelden } f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = g\left(\frac{1}{4}\pi\right) \text{ of } f\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = g\left(1\frac{1}{4}\pi\right).$$

$$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = a + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \text{ of } \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = a + \cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = a + \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ geeft } a = -\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = a - \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ geeft } a = \sqrt{2}$$

Dus voor $a = -\sqrt{2}$ en $a = \sqrt{2}$ raken ze elkaar.

b Geplot zijn de grafieken van f , $g_{\sqrt{2}}$ en $g_{-\sqrt{2}}$

Geen gemeenschappelijke punten als $a < -\sqrt{2}$ of $a > \sqrt{2}$.

17.5 Integreren

intro De oppervlakte van een halve cirkel is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 = \frac{1}{8}\pi^3 = 3,875\dots$

De oppervlakte van een driehoek is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi^2 = 2,467\dots$

De afwijking bij een halve cirkel is $3,875\dots - \pi = 0,734\dots$

De afwijking bij een driehoek is $\pi - 2,467\dots = 0,674\dots$

De oppervlakte van de driehoek is een betere benadering.

35 a $f'(x) = \cos(x)$

b Een primitieve van $g(x) = \cos(x)$ is $G(x) = \sin(x)$.

c $g'(x) = -\sin(x)$

d Een primitieve van $f(x) = \sin(x)$ is $F(x) = -\cos(x)$.

36 a $F(x) = -\cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$

$$F(x) = -\cos(x) + \frac{1}{2} \sin(2x)$$

b $G(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x) - \frac{1}{3} \cdot \sin(3x)$

$$G(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{3} \sin(3x)$$

c $H(x) = 2x - 3 \cdot \frac{1}{4} \cos(4x)$

$$H(x) = 2x + \frac{3}{4} \cos(4x)$$

d $K(x) = -3 \cdot \frac{1}{5} \cos(5x) + 4 \cdot \frac{1}{2} \sin(2x)$

$$K(x) = \frac{3}{5} \cos(5x) + 2\sin(2x)$$

37 a $F(x) = -\cos(x)$

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 + 1 = 0$$

$$\int_{-\pi}^0 \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^0 = -\cos(0) - (-\cos(-\pi)) = -1 + -1 = -2$$

- b** Noem A het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as op het interval $[0, \pi]$, B het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as op het interval $[\pi, 2\pi]$ en C het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as op het interval $[-\pi, 0]$.

De oppervlaktes van A , B en C zijn allen gelijk aan 2.

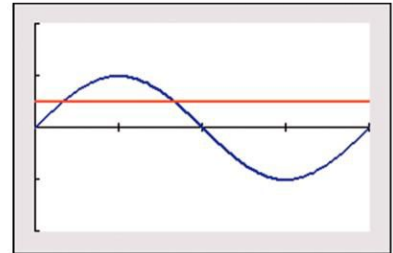
De integraal over het interval $[0, \pi]$ is de oppervlakte van A dus 2.

De integraal over het interval $[0, 2\pi]$ is de oppervlakte van A min de oppervlakte van B , dus $2 - 2 = 0$.

De integraal over het interval $[-\pi, 0]$ is het tegengestelde van de oppervlakte van C , dus -2 .

- c** $\sin(x) = \frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \right) dx &= \left[-\cos(x) - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} = \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{12}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi = \\ &= \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$



38 a $F(x) = -1\frac{1}{2} \cdot 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$F(x) = -3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

b $G(x) = 2x - 3 \cdot -\frac{1}{2} \sin(4 - 2x)$

$$G(x) = 2x + 1\frac{1}{2} \sin(4 - 2x)$$

c $H(x) = -\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x)$

$$H(x) = -\frac{1}{2} \cos(2\pi x)$$

d $L(x) = -3 \cdot \frac{1}{4} \cos(4x) + \sin(\pi - x) \cdot -1$

$$L(x) = -\frac{3}{4} \cos(4x) - \sin(\pi - x)$$

39 a $F'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ en $G'(x) = -2\cos(x) \cdot -\sin(x) = 2\cos(x) \cdot \sin(x)$

Beide zijn dus primitieve functies van f .

b $F(x) = 1 - \cos^2(x)$ en heeft dezelfde afgeleide als $G(x) = -\cos^2(x)$.

40 a $\sin(x) = \cos(x)$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

De snijpunten zijn $\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ en $\left(1\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b } \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx &= \left[-\cos(x) - \sin(x) \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} = \\ &= -\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \left(-\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

41 a Een macht van e is altijd positief en nooit nul.

b Met behulp van je grafisch rekenmachine

Invoer: $y_1 = e^{x\sin(x)}$

Venster $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 8$

Optie: integraal (grenzen 0 en 2π)

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sin(x)} dx \approx 10,71$$

De oppervlakte van het gebied is ongeveer 10,71.

17 Goniometrische functies

42 a $P'(x) = a \cdot \frac{1}{2} \cdot (3\sin(x) + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3\cos(x)$

$$P'(x) = 4\frac{1}{2}a \cos(x) \cdot \sqrt{3\sin(x) + 1}$$

$$4\frac{1}{2}a = 1, \text{ dus } a = \frac{2}{9}.$$

b $Q(x) = \frac{a}{\sin^2(2x)} = a \sin^{-2}(2x)$

$$Q'(x) = -2a \sin^{-3}(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

$$Q'(x) = \frac{-2a}{\sin^3(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \frac{-4a \cos(2x)}{\sin^3(2x)}$$

$$-4a = \frac{4}{3}, \text{ dus } a = -\frac{1}{3}.$$

43 a T is maximaal als $\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-14)\right) = 1$.

$$\frac{\pi}{12}(t-14) = 0 \text{ geeft } t = 14.$$

b $\int_6^{18} \left(10 + 8\cos\left(\frac{\pi}{12}(t-14)\right)\right) dx = \left[10t + \frac{96}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-14)\right)\right]_6^{18} =$

$$180 + \frac{96}{\pi} \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) - 60 - \frac{96}{\pi} \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) =$$

$$120 + \frac{48\sqrt{3}}{\pi} + \frac{48\sqrt{3}}{\pi} = 120 + \frac{96\sqrt{3}}{\pi} \approx 172,93$$

c De oppervlakte van deze rechthoek is dan $C \times 12 = 120 + \frac{96\sqrt{3}}{\pi}$

$$C = \left(120 + \frac{96\sqrt{3}}{\pi}\right) : 12 = 10 + \frac{8\sqrt{3}}{\pi} \approx 14,41$$

d C is de gemiddelde temperatuur van de grafiek van T op het interval $[6, 18]$.

44 a $\cos\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$

$$2x - \frac{5}{6}\pi = x - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{5}{6}\pi = -\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Op het interval $[-\pi, \pi]$ zijn de oplossingen

$$x = -\pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = \pi.$$

b $\int_{-\pi}^{-\frac{1}{3}\pi} \left(\cos\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right) dx = \left[\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right) - \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right]_{-\pi}^{-\frac{1}{3}\pi} =$

$$\frac{1}{2}\sin\left(-1\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) - \frac{1}{2}\sin\left(-2\frac{5}{6}\pi\right) + \sin\left(-1\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$$

$$\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\cos\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right) dx = \left[\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right) - \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} =$$

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

042 a $F(x) = a \cos^3(x)$

$$F(x) = a \cdot (\cos(x))^3$$

$$F'(x) = a \cdot 3 \cos^2(x) \cdot -\sin(x)$$

$$F'(x) = -3a \sin(x) \cdot \cos^2(x)$$

b $-3a = 3$, dus $a = -1$

$$\begin{aligned} \text{c } G(x) &= a \cdot \sin^4(2x) \\ G(x) &= a \cdot (\sin(2x))^4 \\ G'(x) &= a \cdot 4\sin^3(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 \\ G'(x) &= 8a \sin^3(2x) \cdot \cos(2x) \\ 8a &= 1, \text{ dus } a = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } H'(x) &= a \cdot \frac{1}{1 + 5\cos(\frac{1}{2}x)} \cdot -5\sin(\frac{1}{2}x) \cdot \frac{1}{2} \\ H'(x) &= -2\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{1 + 5\cos(\frac{1}{2}x)} \\ -2\frac{1}{2}a &= 1, \text{ dus } a = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{U7 } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(px) dx &= \left[-\frac{1}{p} \cos(px) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{p} \cos\left(\frac{1}{2}\pi p\right) + \frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} \cos\left(\frac{1}{2}\pi p\right) + \frac{1}{p} &= 0 \text{ geeft } \cos\left(\frac{1}{2}\pi p\right) = 1 \\ \frac{1}{2}\pi p &= 0 + k \cdot 2\pi \text{ geeft } p = 0 + k \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{U8 a } f(-x) &= \sin^2(-x) \cdot \cos(-x) \\ f(-x) &= (-\sin(x))^2 \cdot \cos(x) \\ f(-x) &= \sin^2(x) \cdot \cos(x) \\ \text{Omdat } f(x) &= f(-x) \text{ is } f \text{ een even functie.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } F'(x) &= 3a \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x) \\ 3a &= 1 \text{ dus } a = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{c nulpunten: } \sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = 0, \text{ dus } x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(x) dx = \left[\frac{1}{3} \sin^3(x) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

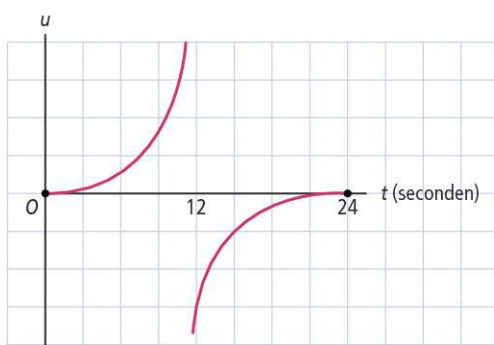
$$\text{d De functie is even en puntsymmetrisch in het punt } \left(\frac{1}{2}\pi, 0\right), \text{ dat wil zeggen } f\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -f\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \text{ en lijnsymmetrisch in de } y\text{-as.}$$

$$\text{Bewijs: } \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = \cos^2(x) \cdot -\sin(x) \text{ en}$$

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos^2(x) \cdot \sin(x)$$

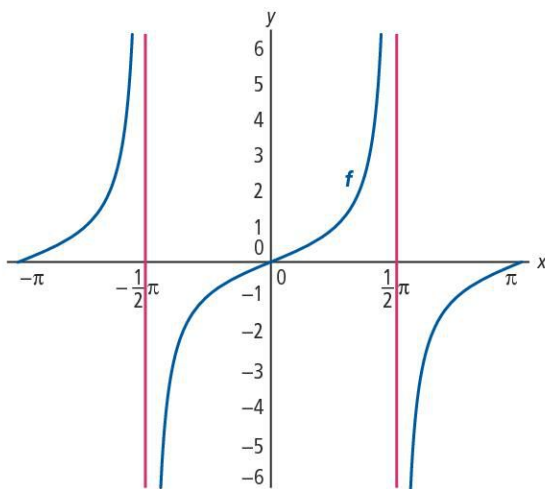
17.6 Tangensfunctie

intro



17 Goniometrische functies

45 a



b De grafiek van f heeft verticale asymptoten als de noemer nul is.

$$\cos(x) = 0 \text{ geeft } x = -\frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi$$

c f heeft nulpunten als de teller nul is en de noemer niet nul is.

$$\sin(x) = 0 \text{ en } \cos(x) \neq 0$$

De nulpunten van f zijn: $x = -\pi$, $x = 0$ en $x = \pi$.

De periode π .

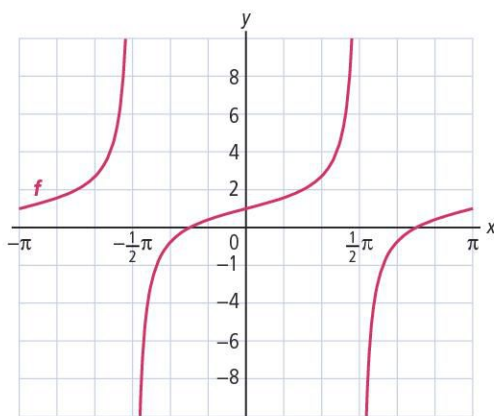
$$46 \text{ a } \tan\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$47 \text{ a } \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

$$\text{b } \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

48 a



b Invoer: $y_2 = 4$

Optie: snijpunten

$x \approx -1,89$ en $x \approx 1,25$.

c $1 + \tan(x) = 0$

$$\tan(x) = -1$$

$$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Op het gegeven interval: $x = -\frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$.

$$f(x) \leq 0 \text{ als } -\frac{1}{2}\pi < x \leq -\frac{1}{4}\pi \text{ of } \frac{1}{2}\pi < x \leq \frac{3}{4}\pi$$

49 a $2\sin(x) = 2\sqrt{3} \cdot \cos(x)$

$$\sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3} \text{ ofwel } \tan(x) = \sqrt{3}$$

b $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{4}{3}\pi$.

c De snijpunten zijn $(\frac{1}{3}\pi, \sqrt{3})$ en $(\frac{4}{3}\pi, -\sqrt{3})$.

50 a $\tan(-\frac{1}{2}x) = 1$

$$-\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

b $\tan^2(x) = 3$

$$\tan(x) = \sqrt{3} \text{ of } \tan(x) = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

c $\tan^2(x) - 1\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \tan(x) + 1 = 0$

Stel $\tan(x) = p$ dan wordt de vergelijking

$$p^2 - 1\frac{1}{3}\sqrt{3}p + 1 = 0$$

$$D = \left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{16}{9} \cdot 3 - 4 = 1\frac{1}{3}$$

$$p = \frac{1\frac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{1\frac{1}{3}}}{2} \text{ of } p = \frac{1\frac{1}{3}\sqrt{3} - \sqrt{1\frac{1}{3}}}{2}$$

$$\sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$p = \frac{1\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ of } p = \frac{1\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan(x) = \sqrt{3} \text{ of } \tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

d $2 \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$$\frac{2 \sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$2 \sin(x) = 1 \text{ en } \cos(x) \neq 0$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

51 a $4 \sin(3x) = -4 \cos(3x)$

$$\sin(3x) = -\cos(3x)$$

$$\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = -1$$

$$\tan(3x) = -1$$

$$3x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

17 Goniometrische functies

$$\text{b } \cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$\tan\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -1$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{24}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{c } \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\tan\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{d } 3 \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$\tan\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{3}$$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$\text{52 a } f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\text{b } f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ of }$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\text{53 a } f'(x) = \frac{2}{\cos^2(3x)} \cdot 3$$

$$f'(x) = \frac{6}{\cos^2(3x)}$$

$$\text{b } g'(x) = \frac{1}{\tan(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\tan(x) \cdot \cos^2(x)}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \cos^2(x)}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$$

$$\text{c } h'(x) = \cos(x) \cdot \tan(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$h'(x) = \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= \frac{1}{\tan(x)} = (\tan(x))^{-1} \\ k'(x) &= \frac{-1}{\tan^2(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \\ k'(x) &= \frac{-1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

54 a $f(1) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1$, dus het punt $P(1, 1)$ ligt op de grafiek van f .

$$\text{b } f'(x) = \left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{4}\pi x\right)\right) \cdot \frac{1}{2}\pi x$$

$$f'(1) = \left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi$$

$$f'(1) = (1 + 1^2) \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi$$

Voor de raaklijn geldt $y = \pi x + c$

$P(1, 1)$ ligt op de raaklijn dus $1 = \pi + c$, dus $c = 1 - \pi$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = \pi x + 1 - \pi$.

$$\text{55 a } F'(x) = -\frac{1}{\cos(x)} \cdot -\sin(x)$$

$$F'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ dus } F'(x) = \tan(x)$$

$$\text{b } \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan(x) dx = [-\ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{1}{4}\pi} = -\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \ln(1) = -\ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\text{c } -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \tan(x) dx = [\ln(|\cos(x)|)]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

$$\text{050 a } 3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\text{b } \frac{1}{3}$$

$$\text{c } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

$$\text{d } \tan\left(\frac{1}{3}x\right) = -\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = -\pi + k \cdot 3\pi$$

$$\text{f } \tan(3x) = \tan\left(-x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$3x = -x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$4x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$$

$$\text{e } \tan^2(x) = 1$$

$$\tan(x) = 1 \text{ of } \tan(x) = -1$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$\text{g } 2 \sin(x) = \tan(x)$$

$$2 \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } 2 = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of}$$

$$x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{051 a } 3 \sin(2x) = \sqrt{3} \cdot \cos(2x)$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \cos(2x)$$

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{b } a = \frac{1}{6}\pi$$

17 Goniometrische functies

- c** $\tan(2x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
 $2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
- d** $\sin(2x) = -\sqrt{3} \cos(2x)$
 $\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = -\sqrt{3}$
 $\tan(2x) = -\sqrt{3}$
 $2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
 $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
- e** $\sin(4x) = -\cos(4x)$
 $\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} = -1$
 $\tan(4x) = -1$
 $4x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
 $x = -\frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$
- f** $\sin(3x - \pi) = \cos(3x - \pi)$
 $\tan(3x - \pi) = 1$ ofwel $\tan(3x) = 1$
 $3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
- g** $\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$
 $\sqrt{3} \cdot \tan\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = 1$
 $\tan\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
 $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

U9

$$a \sin(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = \frac{1}{a}$$

$\sin(x) = 0$ geeft op het interval $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ de oplossing $x = 0$.

$\cos(x) = \frac{1}{a}$ heeft geen oplossingen voor $\frac{1}{a} < -1$ of $\frac{1}{a} > 1$, dus voor $-1 < a < 0$ of $0 < a < 1$, dan is er in totaal 1 oplossing.

$a = 0$ geeft $\tan(x) = 0$ en in $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ weer de oplossing $x = 0$.

$a = 1$ geeft $\cos(x) = 1$ en in het interval $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ de oplossing $x = 0$.

$a = -1$ geeft $\cos(x) = -1$ en in het interval $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ geen oplossing.

Als $a > 1$ heeft $\cos(x) = \frac{1}{a}$ twee oplossingen in $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$, dus dan zijn er in totaal 3 oplossingen.

Als $a < -1$ heeft $\cos(x) = \frac{1}{a}$ geen oplossingen in $\left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.

Conclusie: 0 oplossingen komt niet voor, 1 oplossing voor $a \leq 1$ en 3 oplossingen voor $a > 1$.

17.7 Gemengde opdrachten

- 56 a** De grafieken van f en g hebben dezelfde raaklijn in $x = 0$ als

$$f(0) = g(0) \text{ en } f'(0) = g'(0).$$

$$f(0) = \cos(0) = 1 \text{ en } g(0) = 2 - \cos^3(0) = 2 - 1^3 = 1, \text{ dus } f(0) = g(0).$$

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ en } g'(x) = -3\cos^2(x) \cdot -\sin(x) = 3\cos^2(x) \cdot \sin(x)$$

$$f'(0) = -\sin(0) = 0 \text{ en } g'(0) = 3\cos^2(0) \cdot \sin(0) = 0$$

Dus de grafieken hebben dezelfde raaklijn in $x = 0$.

b $H(x) = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)$

$$H'(x) = \cos(x) - \sin^2(x) \cdot \cos(x)$$

$$H'(x) = \cos(x) - (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x)$$

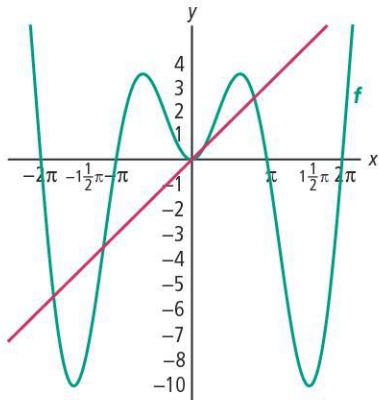
$$H'(x) = \cos(x) - \cos(x) + \cos^3(x)$$

$$H'(x) = \cos^3(x)$$

$H'(x) = h(x)$ dus H is een primitieve van h .

c $\int_0^{2\pi} (2 - \cos^3(x) - \cos(x)) dx =$
 $\left[2x - \sin(x) + \frac{1}{3}\sin^3(x) - \sin(x) \right]_0^{2\pi} =$
 $4\pi - 0 = 4\pi$

- 57 a**



b $2x \sin(x) = x$

$$2 \sin(x) \cdot x = 1 \cdot x$$

$$x = 0 \text{ of } 2 \sin(x) = 1$$

$$x = 0 \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Op het gegeven interval zijn de oplossingen:

$$x = -1\frac{5}{6}\pi \text{ of } x = -1\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{5}{6}\pi$$

De snijpunten zijn: $(-1\frac{5}{6}\pi, -1\frac{5}{6}\pi)$, $(-1\frac{1}{6}\pi, -1\frac{1}{6}\pi)$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ en $(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$.

c $f(x) = 2x \cdot \sin(x)$

$$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$$

$$f'(2) = 2 \sin(2) + 4 \cos(2) \approx 0,154$$

- d** De helling van de grafiek voor $x = 2$ is positief.

In de schets zien we dat de top in de buurt van $x = 2$ een maximum is.

Dat betekent dat dat maximum rechts van de lijn $x = 2$ ligt.

17 Goniometrische functies

e $F(x) = -2x \cdot \cos(x) + 2 \sin(x)$

$$F'(x) = -2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \sin(x) + 2 \cos(x)$$

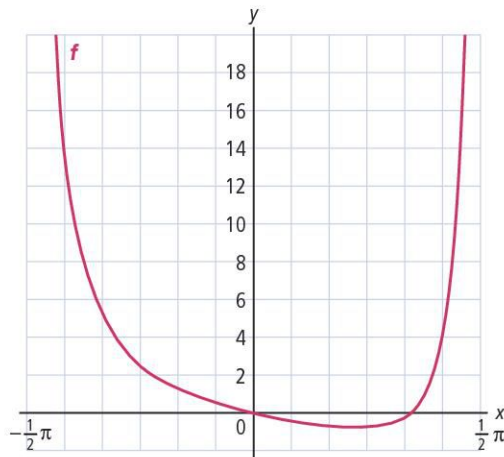
$$F'(x) = 2x \cdot \sin(x)$$

$F'(x) = f(x)$ dus F is een primitieve van f .

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \left[-2x \cdot \cos(x) + 2 \sin(x) \right]_0^{\pi} = -2\pi \cdot -1 + 0 + 0 - 0 = 2\pi.$$

De oppervlakte van het gebied is 2π .

58 a



b $\tan^2(x) - \sqrt{3} \cdot \tan(x) = 0$

$$\tan(x) \cdot (\tan(x) - \sqrt{3}) = 0$$

$$\tan(x) = 0 \text{ of } \tan(x) = \sqrt{3}$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi$$

c $f'_a(x) = 2 \tan(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} - a \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$

$$f'_a(x) = \frac{2 \tan(x) - a}{\cos^2(x)}$$

d $f'_a(x) = 0$ geeft $\tan(x) = \frac{1}{2}a$.

$$f_a(x) = -1 \text{ geeft } \tan^2(x) - a \tan(x) = -1.$$

Substitueren van $\tan(x) = \frac{1}{2}a$ geeft

$$\frac{1}{4}a^2 - a \cdot \frac{1}{2}a = -1$$

$$-\frac{1}{4}a^2 = -1$$

$$a^2 = 4, \text{ dus } a = 2 \text{ of } a = -2.$$

Onderzoeksopdrachten

59 a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \right| \cdot \cos(\varphi), \text{ met } \varphi \text{ de hoek tussen}$

de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$

$$\text{Dus } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)} \cdot \cos(\varphi) \text{ en}$$

$$= f_{a,b}(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\varphi)$$

Als de hoek die $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ met de x -as maakt gelijk is aan α , dan is

$$\varphi = x - \alpha \text{ of } \varphi = \alpha - x \text{ en } f_{a,b}(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(x - \alpha)$$

- b** $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
c $\cos(p + d) = 1$ of $\cos(p + d) = -1$
 $p + d = k \cdot \pi$.

60 De parabool door de punten $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ en $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ heeft vergelijking

$$y = a(x + \frac{1}{2}\pi)(x - \frac{1}{2}\pi) = a(x^2 - \frac{1}{4}\pi^2).$$

De parabool gaat bovendien door het punt $(0, 1)$ dus

$$1 = a(0 - \frac{1}{4}\pi^2), \text{ dit geeft } a = -\frac{4}{\pi^2}$$

Een functievoorschrift van de parabool is dan $f(x) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + 1$.

$$k_{p,q}(x) = p - e^{qx} - e^{-qx}$$

De kettinglijn gaat door $(0, 1)$, dus $1 = p - 1 - 1$, dus $p = 3$.

De lijn gaat ook door $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, dus $0 = 3 - e^{q \cdot \frac{1}{2}\pi} - e^{-q \cdot \frac{1}{2}\pi}$

Stel $e^{\frac{1}{2}\pi q} = t$, dan wordt de vergelijking

$$0 = 3 - t - \frac{1}{t}$$

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

$$t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,618... \text{ of } t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,381...$$

$$e^{\frac{1}{2}\pi q} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,618... \text{ of } e^{\frac{1}{2}\pi q} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,381...$$

$$\frac{1}{2}\pi q = \ln(2,618...) \text{ of } \frac{1}{2}\pi q = \ln(0,381...)$$

$$q \approx 0,613 \text{ of } q \approx -0,613$$

$$k(x) = 3 - e^{0,613x} - e^{-0,613x}$$

Met de GR: de maximale afwijking van de parabool is het maximum van de

functie $v(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \cos(x)$ en dat is 0,056.

De maximale afwijking van de kettinglijn is het maximum van de functie

$w(x) = k(x) - \cos(x)$ en dat is 0,075.

Conclusie: de benadering met de parabool is beter dan de benadering met de kettinglijn.

Samenvatting

S1 De amplitude is 2,5 mm, de frequentie $\frac{640\pi}{2\pi} = 320$ Hz en de periode $\frac{1}{320}$ seconden.

S2 De periode is $\frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$.

Voor de nulpunten geldt: $1\frac{1}{2}\tan(\frac{1}{3}x) = 0$.

$$\tan(\frac{1}{3}x) = 0$$

$$\frac{1}{3}x = 0 + k \cdot \pi$$

$$x = k \cdot 3\pi$$

Voor de asymptoten geldt: $\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

$$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 3\pi$$

17 Goniometrische functies

S3 a $\sin^2(a) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$
 $\sin^2(a) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$
 Op het gegeven interval: $\sin(a) = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2}{5}\sqrt{6}$.

b $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \cos^2(b) = 1$
 $\cos^2(b) = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$
 Op het gegeven interval: $\cos(b) = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{10}$.

S4 a $\cos\left(2\frac{1}{3}\pi - 2x\right) = \sin\left(2\frac{1}{3}\pi - 2x + \frac{1}{2}\pi\right)$
 $= \sin\left(2\frac{5}{6}\pi - 2x\right)$
 $= \sin\left(\frac{5}{6}\pi - 2x\right)$
 $= \sin\left(-2x + \frac{5}{6}\pi\right)$

b $-\sin\left(3\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right) = \sin\left(3\left(-x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$
 $= \cos\left(-3x + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$
 $= \cos\left(-3x + \frac{1}{4}\pi\right)$

S5 a $\cos\left(3x + \frac{1}{4}\pi\right) = \cos(x)$
 $3x + \frac{1}{4}\pi = x + k \cdot 2\pi$ of $3x + \frac{1}{4}\pi = -x + k \cdot 2\pi$
 $2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $4x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

b $\sin(2x) = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
 $\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
 $2x - \frac{1}{2}\pi = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{2}\pi = -x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

S6 a $2 \sin^2(x) = 1 - \sin(x)$
 $2 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$
 Stel $\sin(x) = p$ dan wordt de vergelijking
 $2p^2 + p - 1 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
 $p = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$ of $p = \frac{-1 - 3}{4} = -1$
 $\sin(x) = \frac{1}{2}$ of $\sin(x) = -1$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

b $3 \sin^2(x) + 4 \cos(x) = \frac{1}{4}$
 $3(1 - \cos^2(x)) + 4 \cos(x) = \frac{1}{4}$
 $3 - 3 \cos^2(x) + 4 \cos(x) = \frac{1}{4}$
 $3 \cos^2(x) - 4 \cos(x) - 2\frac{3}{4} = 0$
 Stel $\cos(x) = p$ dan wordt de vergelijking
 $3p^2 - 4p - 2\frac{3}{4} = 0$
 $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2\frac{3}{4} = 49$

$$p = \frac{4+7}{6} = \frac{11}{6} \text{ of } p = \frac{4-7}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{11}{6} \text{ (geen oplossing) of } \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

S7 a $f(x) = \sin^2(x) + \tan(2x)$

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2$$

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) + \frac{2}{\cos^2(2x)}$$

b $g(x) = \frac{1}{2} \cos(x^2 + 1)$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \sin(x^2 + 1) \cdot 2x$$

$$g'(x) = -x \sin(x^2 + 1)$$

S8 a $F(x) = -\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cos\left(\frac{1}{6}x\right)$

$$G(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{1}{6}x\right)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$F(x) = -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{1}{6}x\right)$$

b $\int_{\pi}^{3\pi} \left(2 \cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right) dx = \left[2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}x\right)\right]_{\pi}^{3\pi} =$

$$6 \sin(\pi) - 6 \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 0 - 6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

S9 a $\tan(3x) = 1$

$$3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

b $\tan(2x) = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$

$$2x = \frac{1}{2}\pi - x + k \cdot \pi$$

$$3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

c $2 \sin(4x) = \sqrt{12} \cos(4x)$

$$2 \sin(4x) = 2\sqrt{3} \cos(4x)$$

$$\tan(4x) = \sqrt{3}$$

$$4x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$$

Test jezelf

T1 a De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ seconden.

b De uitwijking is maximaal voor $t = 0$, dus $w = a \cos(bt)$.

De amplitude is 2, dus $a = 2$.

De frequentie is 3 Hz, dat geeft $b = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$.

De formule is $w = 2 \cos(6\pi t)$.

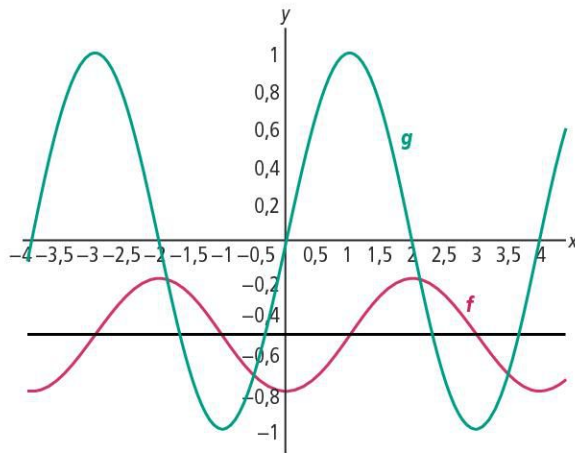
17 Goniometrische functies

T2 a $g(x) = \sin(b \cdot x)$

De periode is 4, dus $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Het functievoorschrift is $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$.

b



c De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ door een verschuiving van 1 naar rechts, dit geeft $y = \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x-1)\right)$.

Amplitude 0,3 geeft $y = 0,3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x-1)\right)$.

En evenwichtsstand $y = -0,5$ geeft $y = -0,5 + 0,3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x-1)\right)$.
 $f(x) = -0,5 + 0,3 \sin(0,5\pi(x-1))$

T3 a $f(x) = -\cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right)$

$f(x) = -\sin(3x)$

$f(x) = \sin(-3x)$ ofwel $f(x) = \sin(-3x + 0)$

b $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$\cos^2(x) = 1 - \left(-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Op het gegeven interval: $\cos(x) = -\sqrt{\frac{7}{9}} = -\frac{1}{3}\sqrt{7}$.

c $\sin^2(x) = 1 - \left(\frac{2}{5}\sqrt{3}\right)^2 = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$

Op het gegeven interval: $\sin(x) = -\sqrt{\frac{13}{25}} = -\frac{1}{5}\sqrt{13}$.

T4 a $2 \sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\sqrt{3}$

$\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2x - \frac{1}{2}\pi = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{2}\pi = \pi - 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = 2\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ of $x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$

b $\cos(2x) = \cos(\pi - 3x)$

$2x = \pi - 3x + k \cdot 2\pi$ of $-2x = \pi - 3x + k \cdot 2\pi$

$5x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

$x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$ of $x = \pi + k \cdot 2\pi$

c $\cos^2(x) - 1\frac{1}{2}\sin(x) = 0$
 $1 - \sin^2(x) - 1\frac{1}{2}\sin(x) = 0$
 $\sin^2(x) + 1\frac{1}{2}\sin(x) - 1 = 0$
 $2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0$
 Stel $\sin(x) = p$ dan wordt de vergelijking
 $2p^2 + 3p - 2 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$
 $p = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{1}{2}$ of $p = \frac{-3 - 5}{4} = -2$
 $\sin(x) = \frac{1}{2}$ of $\sin(x) = -2$ (geen oplossing)
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

d $\cos(3x - \pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi - x)$
 $\cos(3x - \pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi - x - \frac{1}{2}\pi)$
 $\cos(3x - \pi) = \cos(-x - \frac{1}{4}\pi)$
 $\cos(3x - \pi) = \cos(x + \frac{1}{4}\pi)$
 $3x - \pi = x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x - \pi = -x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $4x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{5}{8}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{3}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

T5 a $f'(x) = -2 \sin(\frac{1}{3}\pi - 4x) \cdot -4$
 $f'(x) = 8 \sin(\frac{1}{3}\pi - 4x)$

b $h'(x) = e^{2\cos(x)} \cdot -2 \sin(x) \cdot \sin(3x) + e^{2\cos(x)} \cdot \cos(3x) \cdot 3$
 $h'(x) = e^{2\cos(x)}(-2 \sin(x) \cdot \sin(3x) + 3 \cos(3x))$

c $g'(x) = \frac{1}{\sin(x) + 2\cos(x)} \cdot (\cos(x) - 2\sin(x))$
 $g'(x) = \frac{\cos(x) - 2\sin(x)}{\sin(x) + 2\cos(x)}$

d $k'(x) = \frac{(-\sin(3x) \cdot 3)(1 + \sin(3x)) - \cos(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3}{(1 + \sin(3x))^2}$
 $k'(x) = \frac{-3 \sin(3x) - 3 \sin^2(3x) - 3 \cos^2(3x)}{(1 + \sin(3x))^2}$
 $k'(x) = \frac{-3 \sin(3x) - 3}{(1 + \sin(3x))^2} = \frac{-3(\sin(3x) + 1)}{(1 + \sin(3x))^2}$
 $k'(x) = \frac{-3}{1 + \sin(3x)}$

T6 a $\int_{-\pi}^{\pi} (2 + 2 \cos(x)) dx = [2x + 2 \sin(x)]_{-\pi}^{\pi} = (2\pi + 0) - (-2\pi + 0) = 4\pi$

b $\int_{\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (3 \sin(5x)) dx = \left[-3 \cos(5x) \cdot \frac{1}{5} \right]_{\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \left(-\frac{3}{5} \cos\left(2\frac{1}{2}\pi\right) - \left(-\frac{3}{5} \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \right) \right)$
 $= 0 + \frac{3}{5} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{3}{10}\sqrt{3}$

c $\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \right) dx = \left[-\frac{1}{3} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 2 \right]_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \left(-\frac{2}{3} \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right) - \left(-\frac{2}{3} \cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) \right)$
 $= \left(-\frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) = \frac{1}{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

17 Goniometrische functies

$$\begin{aligned} \text{d } \int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{2}{3}x\right)\right) dx &= \left[x - \sin\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{3}{2}\right]_{-\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\pi - 1\frac{1}{2} \cdot \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) - \left(-\pi - \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\pi - -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right) - \left(-\pi - -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

T7 a $f'(x) = \cos(x)$ en $f'(0) = \cos(0) = 1$

De lijn $y = 1x$ ofwel $y = x$ raakt de grafiek van f in $(0, 0)$.

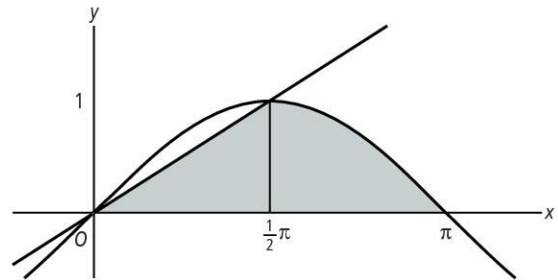
- b** Nee, als er naast het snijpunt $(0, 0)$ nog een ander snijpunt is voor bijvoorbeeld $x = p$, is er vanwege de puntsymmetrie in de oorsprong ook een snijpunt voor $x = -p$.

- c** Zie de figuur hiernaast.

Het gebied bestaat uit een rechthoekige driehoek en een stuk tussen de grafiek van f en de x -as op het interval $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$.

De oppervlakte is

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 1 + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin(x) dx = \frac{1}{4}\pi + \left[-\cos(x)\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}\pi + 1$$



T8 a $3 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Invoer: $y_1 = 3 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ en $y_2 = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Venster: $0 \leq x \leq 2\pi$, $-4 \leq y \leq 4$

Optie: snijpunt

$f(x) = g(x)$ geeft $x \approx 0,86$ of $x \approx 3,61$ of $x \approx 4,95$.

$$\begin{aligned} \text{b } \int_{0,86}^{3,61} \left(2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx &= \\ \left[-2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_{0,86}^{3,61} &= \\ \left[-2 \cdot 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 3 \cdot \frac{2}{1} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_{0,86}^{3,61} &\approx 8,01 \end{aligned}$$

T9 $f(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $\sin(x^2) = 0$

$x = 0$ of $x^2 = k \cdot \pi$

Voor het gekleurde vlakdeel zijn de oplossingen $x = 0$ of $x^2 = \pi$

$x = 0$ of $x = \sqrt{\pi}$

Een primitieve is $F(x) = p \cdot \cos(x^2)$.

$$F'(x) = p \cdot -\sin(x^2) \cdot 2x$$

$$F'(x) = -2px \sin(x^2)$$

Omdat $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$ moet $-2p = 1$, dus $p = -\frac{1}{2}$

$$\text{De oppervlakte is } \int_0^{\sqrt{\pi}} (x \sin(x^2)) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} =$$

$$\left(-\frac{1}{2} \cos(\pi)\right) - \left(-\frac{1}{2} \cos(0)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

T10 a $F(x) = \ln(|\sin(x)|)$

$$F'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

b Voor het snijpunt van f met de x -as geldt

$$\cos(x) = 0 \text{ dus } x = \frac{1}{2}\pi.$$

Zie de figuur hiernaast.

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \left[\ln(|\sin(x)|) \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$\ln\left(\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) =$$

$$\ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) =$$

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\ln(2^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

c $\frac{1}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} =$

$$\frac{\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} =$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} =$$

$$\tan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

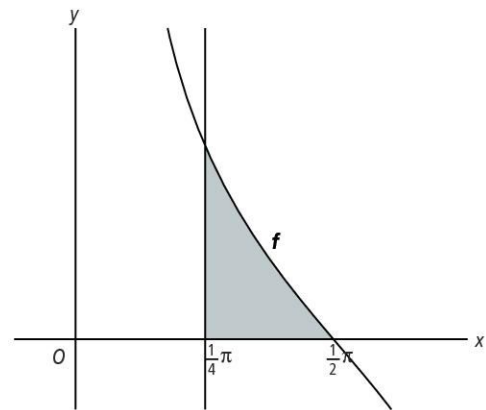
d $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} dx = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \left(\tan(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) dx =$

$$\left[-\ln(|\cos(x)|) + \ln(|\sin(x)|) \right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} =$$

$$-\ln\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) + \ln\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) =$$

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4} : \frac{1}{4}\right) = \ln(3)$$



Extra oefening

E1 a $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$

$$\cos^2(a) = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\cos^2(a) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Op het gegeven interval is $\cos(a) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

b $\sin^2(b) = 1 - \cos^2(b)$

$$\sin^2(b) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\sin^2(b) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Op het gegeven interval is $\sin(x) = -\frac{1}{6}\sqrt{11}$.

c $\sin^2(c) + \cos^2(c) = 1$

$$5\cos^2(c) + \cos^2(c) = 1$$

$$6\cos^2(c) = 1$$

$$\cos^2(c) = \frac{1}{6}, \text{ dus } \sin^2(c) = \frac{5}{6}$$

$$\cos(c) = \sqrt{\frac{1}{6}} \text{ of } \cos(c) = -\sqrt{\frac{1}{6}} \text{ en } \sin(c) = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ of } \sin(c) = -\sqrt{\frac{5}{6}}$$

17 Goniometrische functies

E2 a $-\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(1\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi\right) =$

$$\sin\left(1\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

b $\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\pi\right)$

c $f(x) = \sin\left(2\frac{1}{2}x - 3\pi\right) \qquad g(x) = \cos\left(2\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi\right)$

$$f(x) = \sin\left(2\frac{1}{2}x - 3\pi + 2\pi\right) \qquad g(x) = \sin\left(2\frac{1}{2}x + \pi\right)$$

$$f(x) = \sin\left(2\frac{1}{2}x - \pi\right) \qquad g(x) = \sin\left(2\frac{1}{2}x + \pi - 2\pi\right)$$

$$g(x) = \sin\left(2\frac{1}{2}x - \pi\right)$$

d $h(x) = \cos\left(3\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + \pi\right)$

$$k(x) = \sin\left(3\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

$$h(x) = \cos\left(3x - \frac{3}{4}\pi + \pi\right)$$

$$k(x) = \sin\left(3x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$h(x) = \cos\left(3x + \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$k(x) = \cos\left(3x + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$k(x) = \cos\left(3x + \frac{1}{4}\pi\right)$$

E3 a $\cos\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$2x + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x + \frac{1}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

b $\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = \sin(-4x)$

$$\frac{2}{3}\pi - x = -4x + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{2}{3}\pi - x = \pi - 4x + k \cdot 2\pi$$

$$3x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } -5x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{15}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

c $\sin(2x) = \cos(3x)$

$$\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(3x)$$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = 3x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{2}\pi = -3x + k \cdot 2\pi$$

$$-x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

d $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ of } \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

e $\cos(2x) = \cos\left(1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x\right)$

$$2x = 1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = -\left(1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x\right) + k \cdot 2\pi$$

$$2\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 1\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{5}\pi + k \cdot \frac{4}{5}\pi \text{ of } x = -\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
 \text{f } \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) &= -\sin(3x) \\
 \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) &= -\cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) \\
 \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) &= \cos\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right) \\
 x - \frac{1}{4}\pi &= 3x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{1}{4}\pi = -3x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2 \\
 -2x &= \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 4x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \\
 x &= -\frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{E4 a } 2 \sin^2(2x) + 3 \sin(2x) &= 2 \\
 \text{Stel } \sin(2x) &= p \text{ dan wordt de vergelijking} \\
 2p^2 + 3p - 2 &= 0 \\
 D &= 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25 \\
 p &= \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{-3 - 5}{4} = -2 \\
 \sin(2x) &= \frac{1}{2} \text{ of } \sin(2x) = -2 \text{ (geen oplossing)} \\
 2x &= \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
 x &= \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } 4 \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) &= 1 + 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \\
 4\left(1 - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right) &= 1 + 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \\
 4 \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) + 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 3 &= 0 \\
 \text{Stel } \sin\left(\frac{1}{2}x\right) &= p \text{ dan wordt de vergelijking} \\
 4p^2 + 4p - 3 &= 0 \\
 D &= 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot -3 = 64 \\
 p &= \frac{-4 + 8}{8} = \frac{1}{2} \text{ of } p = \frac{-4 - 8}{4} = -3 \\
 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) &= \frac{1}{2} \text{ of } \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -3 \text{ (geen oplossing)} \\
 \frac{1}{2}x &= \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \\
 x &= \frac{1}{3}\pi + k \cdot 4\pi \text{ of } x = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 4\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{E5 a } f'(x) &= 2\cos(3(x - 0,25\pi)) \cdot 3 \\
 f'(x) &= 6\cos(3(x - 0,25\pi)) \\
 \text{b } g'(x) &= \frac{1}{\cos(5 - 2x)} \cdot -\sin(5 - 2x) \cdot -2 \\
 g'(x) &= \frac{2\sin(5 - 2x)}{\cos(5 - 2x)} \\
 g'(x) &= 2\tan(5 - 2x) \\
 \text{c } h'(x) &= -\sin(2x) \cdot 2 \cdot e^{0,5\sin(3x)} + \cos(2x) \cdot e^{0,5\sin(3x)} \cdot 0,5\cos(3x) \cdot 3 \\
 h'(x) &= e^{0,5\sin(3x)}(-2\sin(2x) + 1,5\cos(2x)\cos(3x)) \\
 \text{d } k(x) &= 3 \cdot \cos^{-2}(5x) \\
 k'(x) &= -6 \cdot \frac{1}{\cos^3(5x)} \cdot -\sin(5x) \cdot 5 \\
 k'(x) &= \frac{30\sin(5x)}{\cos^3(5x)}
 \end{aligned}$$

17 Goniometrische functies

E6 a $F(x) = -2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cos(4x) = -\frac{5}{8} \cos(4x)$

b $G(x) = -4 \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) = -2\sin(2x)$

c $H(x) = 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 3 \cdot 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 6\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

d $K(x) = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}x\right) = 1\frac{1}{2} \cdot 3\cos\left(\frac{1}{3}x\right) = 4\frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

E7 a $\tan(2x) = \tan\left(1\frac{1}{3}\pi - x\right)$

$$2x = 1\frac{1}{3}\pi - x + k \cdot \pi$$

$$3x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

b $\sqrt{3}\sin(x) = -\cos(x)$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

c $\tan^2(x) = \frac{1}{3}$

$$\tan(x) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ of } \tan(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

d $\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 3 \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 3$$

$$\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{3} \text{ of } \tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \text{ of } \frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

E8 a $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(x) - \cos(x)) dx =$

$$\left[-2\cos(x) - \sin(x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$(0 - 1) - (-2 - 0) = 1$$

b $\int_0^{\pi} (2 + x + 2\sin(4x)) dx =$

$$\left[2x + \frac{1}{2}x^2 - 2\cos(4x) \cdot \frac{1}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2} \cdot 1\right) - \left(0 + 0 - \frac{1}{2}\right) = 2\pi + \frac{1}{2}\pi^2$$

$$\begin{aligned} \text{c} \quad & \int_0^1 \left(\sin(\pi x) - 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right) \right) dx = \\ & \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) - 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right) \cdot \frac{4}{\pi} \right]_0^1 = \\ & \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sqrt{2} \right) - \left(-\frac{1}{\pi} - 0 \right) = \frac{2 - 4\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad & \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (2\sin(x) - \sin(2x)) dx = \\ & \left[-2\cos(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) \right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} = \\ & \left(1 + \frac{1}{4} \right) - \left(-1 + \frac{1}{4} \right) = 2 \end{aligned}$$

E9 a $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$ geeft $\cos(x) = 0$, dus de nulpunten zijn $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

$$f(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \text{ de periode is } \pi.$$

b Er zijn verticale asymptoten voor $\sin(x) = 0$, dus voor $x = k \cdot \pi$.

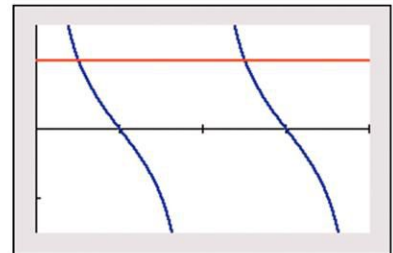
c Eerst oplossen $f(x) = 1$.

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 1 \text{ geeft } \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1, \text{ dus } \tan(x) = 1$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Zie de plot.

$$f(x) \leq 1 \text{ voor } \frac{1}{4}\pi \leq x < \pi \text{ of } 1\frac{1}{4}\pi \leq x < 2\pi$$



$$\text{d} \quad f'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

$$h'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

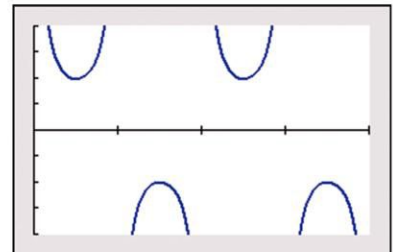
$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1, \text{ dus } \tan^2(x) = 1.$$

$$\tan(x) = 1 \text{ of } \tan(x) = -1$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Op het interval $[0, 2\pi]$: $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$ of $x = 1\frac{1}{4}\pi$ of $x = 1\frac{3}{4}\pi$

De toppen zijn $(\frac{1}{4}\pi, 2)$, $(\frac{3}{4}\pi, -2)$, $(1\frac{1}{4}\pi, 2)$ en $(1\frac{3}{4}\pi, -2)$.



17 Goniometrische functies

$$\begin{aligned}
 \text{E10 a } f'(x) &= -\cos(x) \cdot \cos(x) + (1 - \sin(x)) \cdot -\sin(x) \\
 &= -\cos^2(x) - \sin(x) + \sin^2(x) \\
 &= -(1 - \sin^2(x)) - \sin(x) + \sin^2(x) \\
 &= -1 + \sin^2(x) - \sin(x) + \sin^2(x) \\
 &= 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$$

Stel $\sin(x) = p$ dan wordt de vergelijking

$$2p^2 - p - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$$

$$p = \frac{1+3}{4} = 1 \text{ of } p = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = 1 \text{ of } \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{Op het gegeven interval: } x = -\frac{5}{6}\pi \text{ of } x = -\frac{1}{6}\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{minimum } f\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{3} \text{ en maximum } f\left(-\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

(bij $x = \frac{1}{2}\pi$ zit geen top)

$$\begin{aligned}
 \text{b } f'(x) &= 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 \\
 f''(x) &= 4\sin(x)\cos(x) - \cos(x)
 \end{aligned}$$

Voor de x -coördinaten van de buigpunten geldt

$$4\sin(x)\cos(x) - \cos(x) = 0$$

$$\cos(x) \cdot (4\sin(x) - 1) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } 4\sin(x) - 1 = 0$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \sin(x) = \frac{1}{4}$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\cos(x) = 0 \text{ of } \cos(x) = \frac{1}{4}\sqrt{15} \text{ of } \cos(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{15}$$

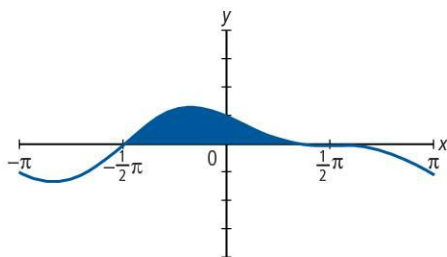
$$\text{c } F'(x) = \cos(x) + \cos(x) \cdot -\sin(x) = \cos(x)(1 - \sin(x)) = f(x)$$

d Voor de snijpunten met de x -as geldt

$$(1 - \sin(x)) \cdot \cos(x) = 0$$

$$\sin(x) = 1 \text{ of } \cos(x) = 0$$

$$\text{Op het interval } [-\pi, \pi] \text{ zijn de oplossingen } x = -\frac{1}{2}\pi \text{ of } x = \frac{1}{2}\pi.$$



$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} ((1 - \sin(x)) \cdot \cos(x)) dx =$$

$$\left[\sin(x) + \frac{1}{2} \cos^2(x) \right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \left(\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{2} \cos^2\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right) =$$

$$1 + 0 - (-1 + 0) = 2$$

18 Toepassingen van integreren

Voorkennis

V1 a $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$$

b $G(x) = -\cos(x) - 3\sin(x)$

c $H(x) = \frac{1}{2} \ln|2x|$

d $i(x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2$

$$I(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^4 + \frac{16}{3}x^3$$

e $M(x) = \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x + \frac{1}{4}x^4$

f $k(x) = x^{-2} - 2x^{-3}$

$$K(x) = -1 \cdot x^{-1} - 2 \cdot \frac{1}{-2}x^{-2}$$

$$K(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

V2 a $f(x) = 2x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$$f(x) = 2x^{1\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}} \text{ dus } F(x) = \frac{4}{5}x^2\sqrt{x}$$

b $g(x) = 4x^{-\frac{1}{3}}$

$$G(x) = 4 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$$

$$G(x) = 4 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \text{ dus } G(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$$

V3 a $F(x) = \frac{1}{7} \cdot e^{7x+1}$

b $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x - 4)$

c $f(x) = \sqrt[5]{5x+1} = (5x+1)^{\frac{1}{5}}$

$$F(x) = \frac{1}{6}(5x+1)^{\frac{6}{5}}$$

$$F(x) = \frac{1}{6}(5x+1) \cdot \sqrt[5]{(5x+1)}$$

d $F(x) = \frac{1}{4} \ln|4x| - 4 \cdot \frac{1}{4} \cos(4x)$

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln|4x| - \cos(4x)$$

e $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^{2x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3x+1)^{-2}$

$$F(x) = \frac{3^{2x+1}}{2 \ln(3)} - \frac{1}{6(3x+1)^2}$$

f $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x - 4|$

V4 a Een primitieve van $f(x) = \frac{2}{x}$ is $F(x) = 2 \ln|x|$ en dus is

$$\int_1^e \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln|x| \right]_1^e = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2.$$

b Een primitieve van $f(x) = 2\sin(3x)$ is $F(x) = -\frac{2}{3} \cos(3x)$ en dus is

$$\int_0^\pi 2\sin(3x) dx = \left[-\frac{2}{3} \cos(3x) \right]_0^\pi = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = 1\frac{1}{3}.$$

c Een primitieve van $f(x) = x^3 - x^2$ is $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$ en dus is

$$\int_0^3 (x^3 - x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \left(\frac{81}{4} - 9 \right) - 0 = 11\frac{1}{4}.$$

18 Toepassingen van integreren

- d** Een primitieve van $f(x) = \sin(2x) + \cos(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \sin(x)$ en dus is

$$\int_0^{\pi} (\sin(2x) + \cos(x)) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + \sin(x) \right]_0^{\pi} = \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) - \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) = 0.$$

V5 a Optie integraal geeft $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx \approx 3,14$.

b Optie integraal geeft $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx \approx 0,89$.

V6 a $f: y = \frac{1}{x+1}$

$$f^{inv}: x = \frac{1}{y+1}$$

$$y+1 = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} - 1$$

$$f^{inv}(x) = \frac{1}{x} - 1$$

c $f: y = \ln(x+3)$

$$f^{inv}: x = \ln(y+3)$$

$$y+3 = e^x$$

$$y = e^x - 3$$

$$f^{inv}(x) = e^x - 3$$

b $f: y = e^{2x+1}$

$$f^{inv}: x = e^{2y+1}$$

$$\ln(x) = 2y+1$$

$$y = \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2}$$

$$f^{inv}(x) = \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2}$$

d $f: y = \sqrt{3x-2}$

$$f^{inv}: x = \sqrt{3y-2}$$

$$3y-2 = x^2$$

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$

$$f^{inv}(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$

18.1 Integraal en oppervlakte

intro Je hebt drie integralen nodig. Eén met grenzen 1 en 4, één met grenzen 4 en 6 en één met grenzen 6 en 8.

1 a $\int_0^1 (x^2 - 6x + 5) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 3 + 5 = 2\frac{1}{3}$

De oppervlakte van G_1 is $2\frac{1}{3}$.

b $\int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_1^5 = -8\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} = -10\frac{2}{3}$

De oppervlakte van G_2 is $10\frac{2}{3}$.

2 a $p(x) = f(x) + 4 = x^2$ en $q(x) = g(x) + 4 = -x^2 + 4x$

b $\int_0^2 (q(x) - p(x)) dx = \int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx =$

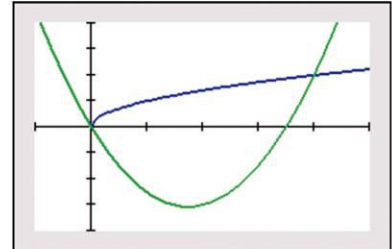
$$\left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = 2\frac{2}{3} - 0 = 2\frac{2}{3}$$

$$c \quad \int_0^2 (g(x) + 4) - (f(x) + 4) dx = \int_0^2 (g(x) + 4 - f(x) - 4) dx = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$$

- d Uit opdracht c volgt dat de integraal $\int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$ gelijk is aan de oppervlakte van het omhooggeschoven gebied en dus ook aan de oppervlakte van G .

- 3 a In een plot zie je dat tussen 0 en 4 de grafiek van f boven die van g ligt. De oppervlakte is

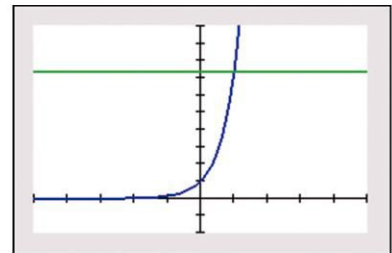
$$\begin{aligned} \int_0^4 (\sqrt{x} - (x^2 - 3\frac{1}{2}x)) dx &= \int_0^4 (x^{\frac{1}{2}} - x^2 + 3\frac{1}{2}x) dx = \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 + 1\frac{3}{4} x^2 \right]_0^4 = \frac{16}{3} - \frac{64}{3} + 28 - 0 = 12 \end{aligned}$$



- b De lijn $y = e^2$ is een horizontale lijn.
 $e^{2x} = e^2$ geeft $x = 1$.
 Het gebied zit tussen $x = 0$ en $x = 1$.

$$\int_0^1 (e^2 - e^{2x}) dx = \left[e^2 x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = e^2 - \frac{1}{2} e^2 - \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2}$$

De oppervlakte is $\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2}$.



- 4 a $f(x) = g(x)$ $g(x) = h(x)$
 $5 + \sqrt{x} = x - 1$ $x - 1 = 5 - 2x$
 $\sqrt{x} = x - 6$ $3x = 6$
 $x = x^2 - 12x + 36$ $x = 2$
 $x^2 - 13x + 36 = 0$
 $(x - 4)(x - 9) = 0$
 $x = 4$ (voldoet niet) of $x = 9$
 Het snijpunt van de grafieken van f en g is $(9, 8)$.
 Het snijpunt van de grafieken van g en h is $(2, 1)$.

$$b \quad opp G = \int_0^2 (f(x) - h(x)) dx + \int_2^9 (f(x) - g(x)) dx$$

$$c \quad \int_0^2 (5 + \sqrt{x} - 5 + 2x) dx + \int_2^9 (5 + \sqrt{x} - x + 1) dx =$$

$$\int_0^2 (x^{\frac{1}{2}} + 2x) dx + \int_2^9 (6 + x^{\frac{1}{2}} - x) dx =$$

$$\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x^2 \right]_0^2 + \left[6x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_2^9 =$$

$$\frac{4}{3} \sqrt{2} + 4 + 31\frac{1}{2} - \left(10 + \frac{4}{3} \sqrt{2} \right) = 25\frac{1}{2}$$

De oppervlakte van G is $25\frac{1}{2}$.

18 Toepassingen van integreren

5 a $g(x) = h(x)$

$$x^2 - 1 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \text{ of } x = -\sqrt{2}$$

De grafieken van g en h snijden elkaar bij $x = \sqrt{2}$ en $x = -\sqrt{2}$.

$$\int_0^{\sqrt{2}} (x + 1 - 1) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (x + 1 - (x^2 - 1)) dx =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} x dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (-x^2 + x + 2) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} + \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{\sqrt{2}}^2 =$$

$$1 - 0 + 3\frac{1}{3} - \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} + 1 \right) = 3\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{2}$$

De oppervlakte van gebied 3 is $3\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{2}$.

b De oppervlakte van gebied 2 is de oppervlakte van de gebieden 2 en 3 samen

min de oppervlakte van gebied 3, dus $4\frac{1}{2} - \left(3\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{2} \right) = 1\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \sqrt{2}$.

c
$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} (1 - x^2 + 1) dx + \int_{-1}^0 (1 - x - 1) dx =$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} (2 - x^2) dx + \int_{-1}^0 -x dx =$$

$$= \left[2x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{-1} + \left[-\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 =$$

$$-1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} \sqrt{2} + \left(0 + \frac{1}{2} \right) = -1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{3} \sqrt{2}$$

De oppervlakte van gebied 1 is $-1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{3} \sqrt{2}$.

6 $f(x) = g(x)$

$$\cos(x) = \cos(2x)$$

$$x = 2x + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -2x + k \cdot 2\pi$$

$$-x = k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = k \cdot 2\pi$$

$$x = -k \cdot 2\pi \text{ of } x = k \cdot \frac{2}{3} \pi$$

Op $[0, 1\frac{1}{3} \pi]$ snijden de grafieken van f en g elkaar bij $x = 0$, $x = \frac{2}{3} \pi$ en $x = 1\frac{1}{3} \pi$.

De oppervlakte van het rode gebied is:

$$\int_0^{\frac{2}{3} \pi} (\cos(x) - \cos(2x)) dx =$$

$$\left[\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{2}{3} \pi} =$$

$$\left(\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{4} \sqrt{3} \right) - (0 - 0) = \frac{3}{4} \sqrt{3}$$

De oppervlakte van het groene gebied is:

$$\int_{\frac{2}{3} \pi}^{1\frac{1}{3} \pi} (\cos(2x) - \cos(x)) dx =$$

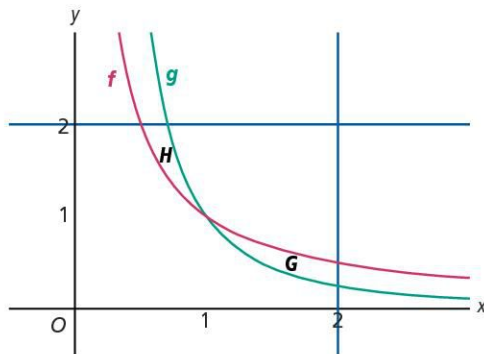
$$\left[\frac{1}{2} \sin(2x) - \sin(x) \right]_{\frac{2}{3} \pi}^{1\frac{1}{3} \pi} =$$

$$\frac{3}{4} \sqrt{3} - \left(-\frac{3}{4} \sqrt{3} \right) = 1\frac{1}{2} \sqrt{3}$$

7 a $f(1) = e^1 = e$ en $g(1) = \frac{e}{1} = e$ dus de grafieken van f en g snijden elkaar bij $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad & \int_0^1 \left(e^x - \frac{1}{x+1} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{e}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ & \left[e^x - \ln(x+1) \right]_0^1 + \left[e \ln(x) - \ln(x+1) \right]_1^2 = \\ & e - \ln(2) - (1 - 0) + e \ln(2) - \ln(3) - (0 - \ln(2)) = \\ & e - 1 + e \ln(2) - \ln(3) \\ & \text{De oppervlakte is } e - 1 + e \ln(2) - \ln(3). \end{aligned}$$

8 a



b Snijpunten bij:

$f(x) = g(x)$	$f(x) = 2$	$g(x) = 2$
$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} = 2$	$\frac{1}{x^2} = 2$
$x = 1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

De oppervlakte van G is

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 (x^{-1} - x^{-2}) dx = \\ & \left[\ln|x| + x^{-1} \right]_1^2 = \ln(2) + \frac{1}{2} - (0 + 1) = \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De oppervlakte van H is

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(2 - \frac{1}{x} \right) dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \\ & \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (2 - x^{-1}) dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 (x^{-2} - x^{-1}) dx = \\ & \left[2x - \ln(x) \right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} + \left[-\frac{1}{x} - \ln(x) \right]_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^1 = \\ & = 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \left(1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) - 1 - \left(-\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right) = \\ & 2\sqrt{2} - 2 - \ln(2) \end{aligned}$$

De oppervlakten van G en H zijn dus niet gelijk.

c Voor $a > 1$ is de oppervlakte

$$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln(x) + x^{-1} \right]_1^a = \ln(a) + \frac{1}{a} - 1 = 3$$

Invoer: $y_1 = \ln(x) + \frac{1}{x} - 1$ en $y_2 = 3$

Venster: $-10 < x < 100$, $-5 < y < 5$

Optie: snijpunten geeft $x = 53,588\dots$ dus $a = 54$.

18 Toepassingen van integreren

9 a $F'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x) - 1$

$$F'(x) = 1 + \ln(x) - 1$$

$$F'(x) = \ln(x)$$

$F'(x) = f(x)$ dus F is een primitieve van f .

b De grafiek van f snijdt de x -as bij $x = 1$ en e^2 ligt rechts hiervan.

$$\text{De oppervlakte is } \int_1^{e^2} \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^{e^2} =$$

$$(e^2 \cdot 2 - e^2) - (1 \cdot 0 - 1) =$$

$$(2e^2 - e^2) + 1 = e^2 + 1$$

c $x = \frac{1}{e}$ ligt links van $x = 1$ en dit gebied bevindt zich onder de x -as.

$$\text{De gevraagde oppervlakte is } -\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln(x) dx = -[x \ln(x) - x]_{\frac{1}{e}}^1 =$$

$$-\left((1 \cdot 0 - 1) - \left(\frac{1}{e} \cdot -1 - \frac{1}{e}\right)\right) = 1 - \frac{2}{e}$$

03 a De grafiek van g ligt hoger.

b $\int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$

c De oppervlakte van G is

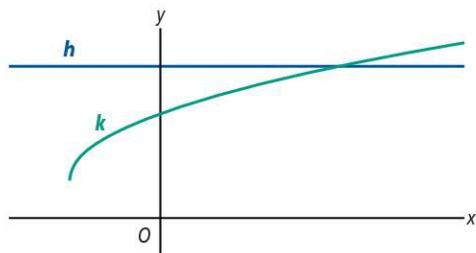
$$\int_0^3 (x^3 - 10x^2 + 24x - 4 - x^2 + 4) dx =$$

$$\int_0^3 (x^3 - 11x^2 + 24x) dx =$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{3}x^3 + 12x^2\right]_0^3 =$$

$$\frac{81}{4} - 99 + 108 - 0 = 29\frac{1}{4}$$

d



e De grafieken snijden elkaar als $1 + \sqrt{x+3} = 4$ ofwel

$$\sqrt{x+3} = 3 \text{ dus } x+3 = 9 \text{ en } x = 6.$$

De oppervlakte van H is

$$\int_0^6 (4 - (1 + \sqrt{x+3})) dx =$$

$$\int_0^6 (3 - \sqrt{x+3}) dx =$$

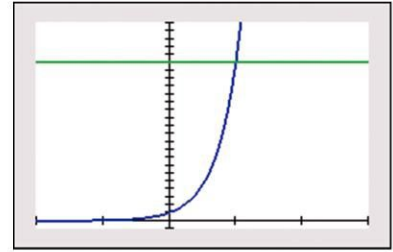
$$\left[3x - \frac{2}{3}(x+3)^{3/2}\right]_0^6 =$$

$$18 - 18 - (-2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

- f** De grafieken snijden elkaar als $e^{3x} = e^3$ ofwel $x = 1$.

De oppervlakte van het gebied is

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^3 - e^{3x}) dx &= \\ \left[e^3 x - \frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 &= \\ e^3 - \frac{1}{3} e^3 - \left(0 - \frac{1}{3} \right) &= \frac{2}{3} e^3 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$



- 07 a** $f(1) = 1^2 + 4 = 5$ en $g(1) = 6 - 1 = 5$ dus de grafieken van f en g snijden elkaar bij $x = 1$.

$g(4) = 6 - 4 = 2$ en $h(4) = \sqrt{4} = 2$ dus de grafieken van g en h snijden elkaar bij $x = 4$.

- b** Je hebt twee integralen nodig, omdat het gebied aan de bovenkant door twee verschillende functies begrensd wordt.

c $\int_1^4 ((g(x) - h(x))) dx$

- d** De oppervlakte van G is

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 4 - \sqrt{x}) dx + \int_1^4 (6 - x - \sqrt{x}) dx &= \\ \left[\frac{1}{3} x^3 + 4x - \frac{2}{3} x^{1/2} \right]_0^1 + \left[6x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^{1/2} \right]_1^4 &= \\ 3\frac{2}{3} - 0 + 10\frac{2}{3} - 4\frac{5}{6} &= 9\frac{1}{2} \end{aligned}$$

U1 a $\frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{2}{5} x$

$$\frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{2x}{5}$$

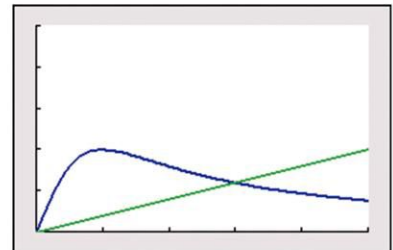
$$2x(x^2 + 1) = 5 \cdot 4x$$

$$2x^3 - 18x = 0$$

$$2x(x^2 - 9) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 3 \text{ of } x = -3 \text{ (voldoet niet, want } x \geq 0)$$

De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(3, \frac{6}{5})$.



b $F'(x) = c \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2cx}{x^2 + 1}$

$$F'(x) = f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \text{ dus } c = 2.$$

De oppervlakte van G is

$$\int_0^3 \left(\frac{4x}{x^2 + 1} - \frac{2}{5} x \right) dx = \left[2 \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{5} x^2 \right]_0^3 = 2 \ln(10) - \frac{1}{5}$$

18 Toepassingen van integreren

18.2 Omwentelingslichamen

intro De inhoud van de cilinder is $\pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$.

De inhoud van de ring is $\pi \cdot 2^2 \cdot 1 - \pi = 3\pi$.

De inhoud van de ring is 3 keer zo groot.

10 a De straal is dan $f(2) = \sqrt{2}$ en de oppervlakte van de bijbehorende cirkel is

$$\pi (\sqrt{2})^2 = 2\pi.$$

b Voor alle $1 \leq x \leq 5$ is de straal $f(x)$ en de oppervlakte van de cirkel is

$$g(x) = \pi r^2 = \pi (f(x))^2.$$

c De inhoud van het omwentelingslichaam is te benaderen met de som

$$\sum_i \pi (f(x_i))^2 \cdot \Delta x \text{ van de inhoud van een groot aantal cilinders met dikte } \Delta x.$$

Door Δx naar 0 te laten naderen, gaat deze som naar $\int_1^5 \pi (f(x))^2 dx$, wat de exacte inhoud van het omwentelingslichaam is.

$$\text{d} \quad \int_1^5 \pi (f(x))^2 dx = \int_1^5 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_1^5 \pi x dx = \left[\frac{1}{2} \pi x^2 \right]_1^5 = 12\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi = 12\pi$$

11 a De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^3 (e^{\frac{1}{2}x})^2 dx = \pi \int_0^3 e^x dx = \pi [e^x]_0^3 = \pi (e^3 - 1)$$

b De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_1^6 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \pi \int_1^6 \frac{4}{x} dx = \pi [4 \ln(x)]_1^6 = \pi (4 \ln(6) - 0) = 4\pi \ln(6)$$

c Voor de nulpunten van f geldt:

$$\frac{1}{2} x \sqrt{16x - x^3} = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 16x - x^3 = 0$$

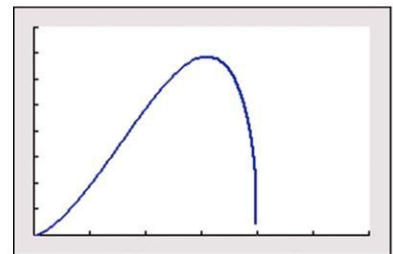
$$x = 0 \text{ of } x(16 - x^2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4 \text{ of } x = -4 \text{ (voldoet niet)}$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2} x \sqrt{16x - x^3} \right)^2 dx = \pi \int_0^4 \frac{1}{4} x^2 (16x - x^3) dx =$$

$$\pi \int_0^4 \left(4x^3 - \frac{1}{4} x^5 \right) dx = \pi \left[x^4 - \frac{1}{24} x^6 \right]_0^4 = \pi \left(85\frac{1}{3} - 0 \right) = 85\frac{1}{3} \pi$$



12 a Het gebied van G moet dan 1 naar beneden verschuiven.

b De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^1 (e^x - 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx =$$

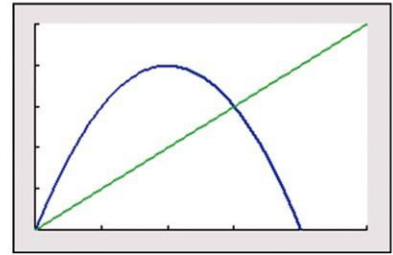
$$\pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x + x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - 2e + 1 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - 2e + 2\frac{1}{2} \right)$$

- 13 a** De inhoud van het omwentelingslichaam is het verschil van de inhoud van de omwentelingslichamen van f en g , dus $\pi \int_0^3 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$.

- b** De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^3 ((4x - x^2)^2 - x^2) dx = \pi \int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^2) dx =$$

$$\pi \int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4) dx = \pi \left[5x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^3 = 21\frac{3}{5}\pi$$



- 14 a** Voor de snijpunten geldt:

$$2\sqrt{x} = x$$

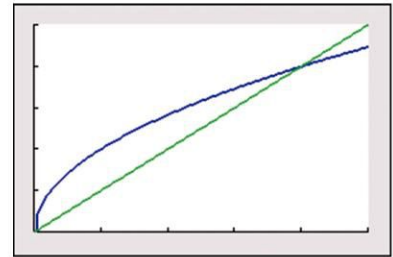
$$4x = x^2$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

In de plot is te zien dat de grafiek van f boven de lijn $y = x$ ligt, dus de inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^4 ((2\sqrt{x})^2 - x^2) dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2) dx =$$

$$\pi \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \pi \left(32 - \frac{64}{3} \right) = 10\frac{2}{3}\pi$$



- b** Voor de snijpunten geldt:

$$\frac{4}{x} = 5 - x$$

$$4 = 5x - x^2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

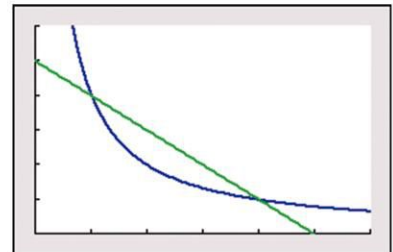
$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x = 4 \text{ of } x = 1$$

In de plot is te zien dat de grafiek van g onder de lijn $y = 5 - x$ ligt, dus de inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_1^4 \left((5 - x)^2 - \left(\frac{4}{x} \right)^2 \right) dx = \pi \int_1^4 (25 - 10x + x^2 - 16x^{-2}) dx =$$

$$\pi \left[25x - 5x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 16x^{-1} \right]_1^4 = \pi \left(45\frac{1}{3} - 36\frac{1}{3} \right) = 9\pi$$



- 15 a** $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x) \cdot \cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \cdot -\sin(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \sin^2(x)) + \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

$$F'(x) = \sin^2(x)$$

$F'(x) = f(x)$ dus F is een primitieve van f .

- b** De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^\pi ((\sin(x) + 1)^2 - 1^2) dx = \pi \int_0^\pi (\sin^2(x) + 2\sin(x) + 1 - 1) dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) \right]_0^\pi = \pi \left(\frac{1}{2}\pi + 2 - (-2) \right) = \frac{1}{2}\pi^2 + 4\pi$$

18 Toepassingen van integreren

- 16** De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - 1 - \frac{1}{2} \right) = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - 1\frac{1}{2} \right)$$

- 014 a** $f(x) = g(x)$

$$x^2 + 4 = 4x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)(x - 2) = 0$$

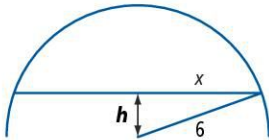
$$x = 2$$

- b** De grafiek van f ligt boven de grafiek van g .

$$\text{c } \pi \int_0^2 ((x^2 + 4)^2 - (4x)^2) dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 8x^2 + 16 - 16x^2) dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx$$

$$\text{d } \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{8}{3} x^3 + 16x \right]_0^2 = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = 17\frac{1}{15} \pi$$

- U2 a**



$$x = \sqrt{36 - h^2}$$

Een vierkant op hoogte h heeft zijden $2\sqrt{36 - h^2}$ dus de oppervlakte is

$$O = (2\sqrt{36 - h^2})^2 = 4(36 - h^2) = 144 - 4h^2.$$

- b** De hoogte van het kruisgewelf is gelijk aan de straal van de halve cilinders, dus 6.

De inhoud van het kruisgewelf kan worden benaderd door een stapel vierkante plakken met dikte Δh en een oppervlakte van $144 - 4h^2$.

De inhoud van het kruisgewelf is dan ongeveer $\sum_i (144 - 4h_i^2) \Delta h$.

Als Δh nadert naar 0 dan gaat $\sum_i (144 - 4h_i^2) \Delta h$ over in $\int_0^6 (144 - 4h^2) dh$.

$$\text{c } \int_0^6 (144 - 4h^2) dh = \left[144h - \frac{4}{3} h^3 \right]_0^6 = 864 - \frac{4}{3} \cdot 216 = 576 \text{ m}^3$$

- U3** Nee, een tegenvoorbeeld is gegeven in de intro van deze paragraaf.

18.3 Wentelen om de y -as

intro De inhoud bij wentelen om de x -as is $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 4 = 85\frac{1}{3} \pi$.

De inhoud bij wentelen om de y -as is $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 42\frac{2}{3} \pi$.

De twee inhouds zijn dus niet hetzelfde.

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ is symmetrisch in de lijn $y = x$ dus dan geeft wentelen om de x -as dezelfde inhoud als wentelen om de y -as.

- 17 a** $y = x^2 + 2$ met $x \geq 0$ dus bij de inverse is $y \geq 2$.

$$f^{inv}: x = y^2 + 2$$

$$y^2 = x - 2$$

$$y = \sqrt{x - 2}$$

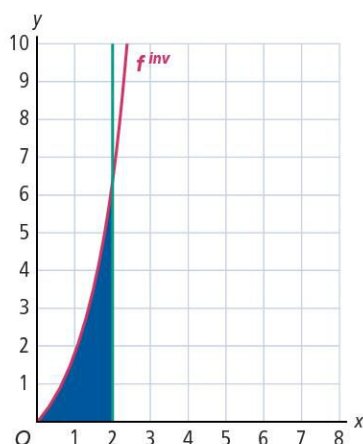
$$\text{Dus } f^{inv}(x) = \sqrt{x - 2}.$$

$$\text{b } \pi \int_2^5 (\sqrt{x - 2})^2 dx = \pi \int_2^5 (x - 2) dx$$

- c** De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_2^5 (x - 2) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^5 = \pi \left(12\frac{1}{2} - 10 - (2 - 4) \right) = 4\frac{1}{2}\pi.$$

- 18 a**



$$\text{b } x = \ln(y + 1)$$

$$e^x = y + 1$$

$$y = e^x - 1$$

$$\text{Dus } f^{inv}(x) = e^x - 1.$$

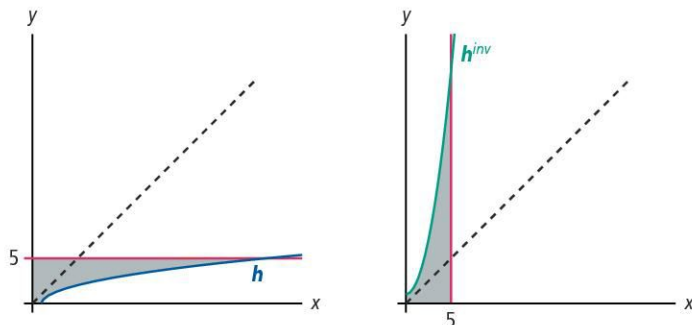
- c** $[0, 2]$

- d** De inhoud is van L is

$$\pi \int_0^2 (e^x - 1)^2 dx = \pi \int_0^2 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x \right]_0^2 =$$

$$\pi \left(\frac{1}{2}e^4 - 2e^2 + 2 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{2}e^4 - 2e^2 + 3\frac{1}{2} \right)$$

- 19 a**



$$h^{inv}: x = \sqrt{y - 1}$$

$$x^2 = y - 1$$

$$y = x^2 + 1$$

$$\text{Dus } h^{inv}(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

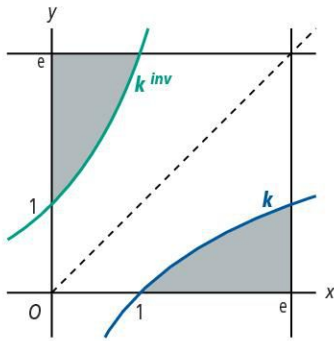
Het integratie-interval is $[0, 5]$.

18 Toepassingen van integreren

De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^5 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_0^5 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^5 = 713 \frac{1}{3} \pi$$

b



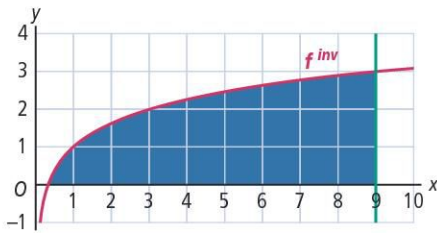
$$k^{inv}(x) = e^x$$

Het integratie-interval is $[0, 1]$.

De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 (e^2 - (e^x)^2) dx &= \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2x}) dx = \pi \left[e^2 x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \\ \pi \left(e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \right) &= \pi \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

20 a



$$\begin{aligned} f^{inv} : x &= 3^{y-1} \\ {}^3\log(x) &= y - 1 \\ y &= {}^3\log(x) + 1 \\ f^{inv}(x) &= {}^3\log(x) + 1 \end{aligned}$$

Het integratie-interval is $\left[\frac{1}{3}, 9\right]$.

Gebruik op je GR de optie integraal, dit geeft $\pi \int_{\frac{1}{3}}^9 ({}^3\log(x) + 1)^2 dx \approx 145,17$.

b De inhoud is $\pi \int_0^3 (9^2 - (3^{x-1})^2) dx = \pi \int_0^3 (81 - 3^{2x-2}) dx =$

$$\pi \left[81x - \frac{1}{2 \ln(3)} \cdot 3^{2x-2} \right]_0^3 = \pi \left(\left(243 - \frac{81}{2 \ln(3)} \right) + \frac{1}{18 \ln(3)} \right) = \pi \left(243 - \frac{364}{9 \ln(3)} \right)$$

Afgerond op twee decimalen is dat 647,75

21 a De grafieken snijden elkaar bij $x = 0$ en $x = 4$ en de grafiek van g ligt op het interval $[0, 4]$ boven de grafiek van f .

$$\text{De oppervlakte is } \int_0^4 (4\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx = \left[\frac{8}{3} x^{1.5} - \frac{2}{5} x^{2.5} \right]_0^4 = \frac{64}{3} - \frac{64}{5} - 0 = 8 \frac{8}{15}$$

b $f^{inv}: x = y\sqrt{y}$

$$y = x^{\frac{2}{3}}$$

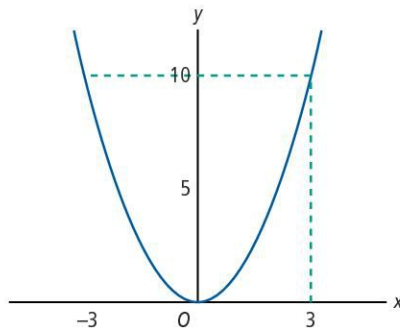
$g^{inv}: x = 4\sqrt{y}$

$$y = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 = \frac{1}{16}x^2$$

Het integratie-interval is $[0, 8]$.

$$\pi \int_0^8 \left(\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}x^2\right)^2 \right) dx = \pi \int_0^8 \left(x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{256}x^4 \right) dx = \left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{1280}x^5 \right]_0^8 = \frac{1024}{35}\pi$$

22 De afmetingen in het plaatje zijn in dm.



Voor de parabool geldt $y = ax^2$.

De parabool gaat door $(3, 10)$ dus $10 = a \cdot 9$ ofwel $a = \frac{10}{9}$.

Een formule voor de parabool is $y = \frac{10}{9}x^2$.

De parabool wordt gewenteld om de y -as, dus de inverse wordt gewenteld om de x -as.

Inverse: $x = \frac{10}{9}y^2$ dus $y = \sqrt{\frac{9}{10}x}$.

De inhoud van het bovenste deel van het vat is $\pi \int_5^{10} \left(\sqrt{\frac{9}{10}x} \right)^2 dx = \pi \int_5^{10} \frac{9}{10}x dx =$

$$\pi \left[\frac{9}{20}x^2 \right]_5^{10} = \pi \left(45 - 11\frac{1}{4} \right) \approx 106 \text{ liter.}$$

Er wordt 80 liter toegevoegd, dus het vat stroomt niet over.

23 a x en y verwisselen geeft $25y^2 - 4x^2 = 9$

$$25y^2 = 4x^2 + 9$$

$$y^2 = \frac{4}{25}x^2 + \frac{9}{25}$$

$$y = \sqrt{\frac{4}{25}x^2 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{1}{25} \cdot (4x^2 + 9)} = \frac{1}{5} \sqrt{4x^2 + 9}$$

b $\pi \int_{-2}^1 \left(\frac{4}{25}x^2 + \frac{9}{25} \right) dx = \pi \left[\frac{4}{75}x^3 + \frac{9}{25}x \right]_{-2}^1 = \pi \left(\frac{4}{75} + \frac{9}{25} - \left(-\frac{32}{75} - \frac{18}{25} \right) \right) = \frac{39}{25}\pi.$

De schaal is 1: 25 dus de inhoud van de koeltoren is $25^3 \cdot \frac{39}{25}\pi \approx 76\,576 \text{ m}^3$.

019 a De getallen op de x -as en op de y -as zijn 3 en 12.

b $f^{inv}: x = y^2 + 3$

$$y^2 = x - 3$$

$$y = \sqrt{x - 3}$$

$$f^{inv}(x) = \sqrt{x - 3}$$

18 Toepassingen van integreren

$$\text{c } inh = \pi \int_3^{12} (f^{inv}(x))^2 dx = \pi \int_3^{12} (x-3) dx$$

$$\text{d } \pi \int_3^{12} (x-3) dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x \right]_3^{12} = \pi \left(72 - 36 - \left(4\frac{1}{2} - 9 \right) \right) = 40\frac{1}{2}\pi$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is $40\frac{1}{2}\pi$.

021 a $f(x) = g(x)$

$$3x = 6\sqrt{x}$$

$$x = 2\sqrt{x}$$

$$x^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

De grafieken van f en g snijden elkaar in $(0,0)$ en $(4,12)$.

b De oppervlakte van G is

$$\int_0^4 (6\sqrt{x} - 3x) dx = \left[\frac{6}{1\frac{1}{2}} x^{1\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} x^2 \right]_0^4 = \left[4x\sqrt{x} - 1\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = 32 - 24 - 0 = 8$$

c $x = 3y$ geeft $y = \frac{1}{3}x$ dus $f^{inv}(x) = \frac{1}{3}x$.

$x = 6\sqrt{y}$ geeft $\sqrt{y} = \frac{1}{6}x$ ofwel $y = \frac{1}{36}x^2$ dus $g^{inv}(x) = \frac{1}{36}x^2$.

d De grafieken van f en g snijden elkaar in $(0,0)$ en $(4,12)$.

Hieruit volgt dat de grafieken van f^{inv} en g^{inv} elkaar snijden in $(0,0)$ en $(12,4)$.

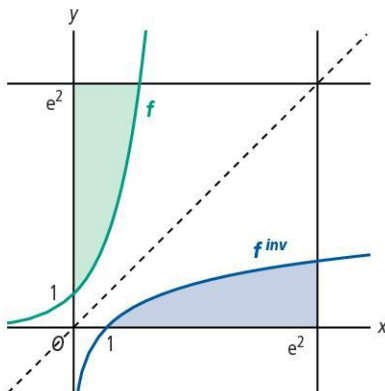
$$\text{e } \pi \int_0^{12} ((f^{inv}(x))^2 - (g^{inv}(x))^2) dx = \pi \int_0^{12} \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{1296}x^4 \right) dx$$

f De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^{12} \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{1296}x^4 \right) dx = \left[\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{6480}x^5 \right]_0^{12} = \pi(64 - 38\frac{2}{5}) = 25\frac{3}{5}\pi$$

U4 a $G'(x) = \ln^2(x) + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 2 \ln(x) - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2 = \ln^2(x)$
 $G'(x) = g(x)$ dus G is een primitieve van g .

b



$$f^{inv}(x) = \ln(x)$$

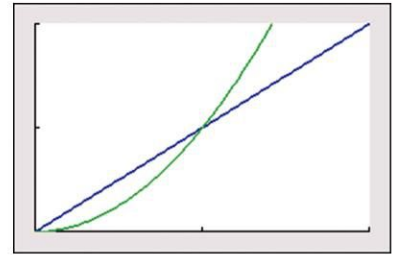
$$inh = \pi \int_1^{e^2} \ln^2(x) dx = \pi [x \cdot \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x]_1^{e^2} = \pi(2e^2 - 2)$$

U5 Bij wentelen om de x -as is de inhoud

$$\pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{2}{15} \pi.$$

Bij wentelen om de y -as is de inhoud $\pi \int_0^1 (x - x^2) dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \pi.$

Dus de inhoud is het grootst bij wentelen om de y -as.



18.4 Variabele grenzen

intro De symmetrieas is de lijn $x = 1$ dus de oppervlakte is twee keer zo groot als $p = 2$.

Ja, er is een waarde van p waarvoor de oppervlakte van H drie keer zo groot is als die van G . Die waarde van p kun je berekenen door eerst de oppervlakte van G te berekenen en vervolgens de vergelijking

$$\int_0^p f(x) dx = 3 \cdot \text{opp}(G) \text{ op te lossen.}$$

24 a $A_p = \int_0^p \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{1/2} \right]_0^p = \frac{2}{3} p^{1/2}$

b $\frac{2}{3} p^{1/2} = 18$

$$p^{1/2} = 27$$

$$p = 27^2 = 9$$

25 $\int_0^a \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^a = \sin(a)$

$$\sin(a) = 1$$

Op het interval $0 < a \leq 2\pi$ is de oplossing hiervan $a = \frac{1}{2}\pi$.

26 De oppervlakte van de rechthoek is $p \cdot f(p) = p(e^p - p^2) = pe^p - p^3$.
De oppervlakte binnen de rechthoek onder de grafiek van f is

$$\int_0^p (e^x - x^2) dx = \left[e^x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^p = e^p - \frac{1}{3} p^3 - 1.$$

De grafiek van f verdeelt de rechthoek in twee gelijke delen als

$$e^p - \frac{1}{3} p^3 - 1 = \frac{1}{2} (pe^p - p^3).$$

Gebruik de GR.

Invoer: $y_1 = e^x - \frac{1}{3} x^3 - 1$ en $y_2 = \frac{1}{2} (xe^x - x^3)$

Venster: standaard

Optie: snijpunten

Dit geeft $x = 2,154\dots$ dus de waarde van $p \approx 2,15$.

18 Toepassingen van integreren

27 De oppervlakte is $\int_p^{4p} x\sqrt{x} dx = \int_p^{4p} x^{1\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_p^{4p} = \frac{2}{5}(4p)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}p^{\frac{5}{2}}.$

$$\frac{2}{5}(4p)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}p^{\frac{5}{2}} = 5022$$

$$32p^{\frac{5}{2}} - p^{\frac{5}{2}} = 12555$$

$$31p^{\frac{5}{2}} = 12555$$

$$p^{\frac{5}{2}} = 405$$

$$p = \sqrt[5]{405^2} = \sqrt[5]{164025}$$

28 a Punt B heeft coördinaten $(a+1, e^{a+1})$.

De horizontale lijn door B heeft dus als vergelijking $y = e^{a+1}$.

Dan is oppervlakte van gebied V gelijk aan

$$\int_a^{a+1} (e^{a+1} - e^x) dx = [e^{a+1}x - e^x]_a^{a+1} = e^{a+1}(a+1) - e^{a+1} - (e^{a+1} \cdot a - e^a) = e^a.$$

Deze oppervlakte is gelijk aan 3, dus $e^a = 3$ ofwel $a = \ln(3)$.

b De oppervlakte van gebied W is $\int_a^{a+1} e^x dx = [e^x]_a^{a+1} = e^{a+1} - e^a.$

$\frac{\text{opp } V}{\text{opp } W} = \frac{e^a}{e^{a+1} - e^a} = \frac{1}{e - 1}$ dus de verhouding van de oppervlaktes is onafhankelijk van a .

29 Voor de inverse van lijn l geldt:

$$x = 4y - 8$$

$$4y = x + 8$$

$$y = \frac{1}{4}x + 2$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_{-8}^p \left(\frac{1}{4}x + 2\right)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{3} \cdot 4 \left(\frac{1}{4}x + 2\right)^3\right]_{-8}^p =$$

$$\pi \left(\frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}p + 2\right)^3 - 0\right) = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{4}p + 2\right)^3$$

De inhoud is $85\frac{1}{3}\pi$, hieruit volgt

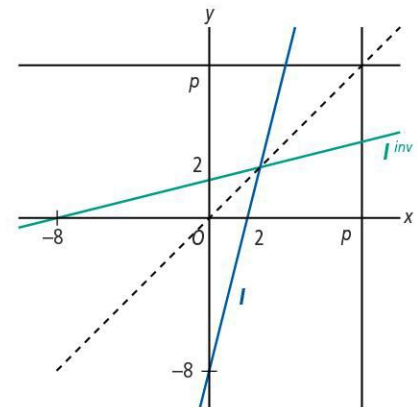
$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{4}p + 2\right)^3 = 85\frac{1}{3} \pi$$

$$\left(\frac{1}{4}p + 2\right)^3 = 64$$

$$\frac{1}{4}p + 2 = 4$$

$$\frac{1}{4}p = 2$$

$$p = 8$$



30 a $g(p) = \int_0^p s dt = \int_0^p 20e^{-0,4t} dt = [-50e^{-0,4t}]_0^p = -50e^{-0,4p} + 50$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} 50 - 50e^{-0,4p} = 50 - 0 = 50$$

Uiteindelijk wordt 50 mol cyclopropan omgezet.

b $-50e^{-0,4p} + 50 = 25$

$$-50e^{-0,4p} = -25$$

$$e^{-0,4p} = \frac{1}{2}$$

$$-0,4p = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$p = 1,732\dots$$

Na ongeveer 1,7 seconden is de helft omgezet.

31 a De richtingscoëfficiënt is $\frac{r}{h}$ en de lijn gaat door $(0,0)$ dus $y = \frac{r}{h}x$.

b De inhoud van de kegel is

$$\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \left[\frac{r^2}{3h^2} x^3 \right]_0^h = \pi \cdot \frac{r^2}{3h^2} h^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

c $\frac{r}{h} = \tan(30^\circ) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ dus $r = h \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\text{De inhoud is dan } \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(h \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{9} \pi h^3.$$

32 a De grafieken van f zijn allemaal halve cirkels, dus dit omwentelingslichaam is een bol.

b De inhoud van een bol is

$$\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r =$$

$$\pi \left(\frac{2}{3} r^3 - \left(-\frac{2}{3} r^3\right) \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

c Om een cilinder met straal r en hoogte h te krijgen moet je het gebied ingesloten door de assen en de lijnen $y = r$ en $x = h$ wentelen om de x -as.

$$\text{De inhoud van deze cilinder is } \pi \int_0^h r^2 dx = \pi [r^2 x]_0^h = \pi r^2 h.$$

025 a Een primitieve van $f(x) = (ax + b)^n$ is $F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (ax + b)^{n+1}$.

$$\text{In dit geval geldt } a = 4 \text{ dus } \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \text{ en } n = \frac{1}{2} \text{ dus } \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

b Stap 5: $\frac{1}{6} (4p - 12)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \cdot 16^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} (4p - 12)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \cdot 64$

c $\frac{1}{6} (4p - 12)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 25\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{6} (4p - 12)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \cdot 64 = 25\frac{1}{3}$$

$$(4p - 12)^{\frac{1}{2}} - 64 = 152$$

$$(4p - 12)^{\frac{1}{2}} = 216$$

$$4p - 12 = 36$$

$$4p = 48$$

$$p = 12$$

18 Toepassingen van integreren

U6 a Oranje gebied:

Een formule van de lijn door $(p, 0)$ en $(0, p)$ is $y = p - x$.

$$\text{inh} = \pi \int_0^p (p-x)^2 dx = \pi \left[-\frac{1}{3} (p-x)^3 \right]_0^p = \pi \left(0 + \frac{1}{3} p^3 \right) = \frac{1}{3} \pi p^3$$

Blauwe gebied:

Voor de kwartcirkel geldt $x^2 + y^2 = p^2$ dus $y = \sqrt{p^2 - x^2}$.

$$\text{inh} = \pi \int_0^p \left((\sqrt{p^2 - x^2})^2 - (p-x)^2 \right) dx = \pi \int_0^p (p^2 - x^2 - (p-x)^2) dx =$$

$$\pi \left[p^2 x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} (p-x)^3 \right]_0^p = \pi \left(\frac{2}{3} p^3 - \frac{1}{3} p^3 \right) = \frac{1}{3} \pi p^3$$

Rode gebied:

$$\text{inh} = \pi \int_0^p \left(p^2 - (\sqrt{p^2 - x^2})^2 \right) dx = \pi \int_0^p (p^2 - p^2 + x^2) dx = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^p = \frac{1}{3} \pi p^3$$

b Het oranje gebied wentelen om de x -as geeft een kegel dus de inhoud is

$$\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi p^2 \cdot p = \frac{1}{3} \pi p^3.$$

Het oranje en blauwe gebied samen wentelen om de x -as geeft een halve bol

met straal p . De inhoud daarvan is $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi p^3 = \frac{2}{3} \pi p^3$.

De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als het blauwe gebied

gewenteld wordt om de x -as is dan $\frac{2}{3} \pi p^3 - \frac{1}{3} \pi p^3 = \frac{1}{3} \pi p^3$.

De drie gebieden samen wentelen om de x -as geeft een cilinder dus de

inhoud is $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot p^2 \cdot p = \pi p^3$.

De inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als het rode gebied

gewenteld wordt om de x -as is dus $\pi p^3 - \frac{2}{3} \pi p^3 = \frac{1}{3} \pi p^3$.

U7 De grafieken snijden elkaar bij $x = 0$ en $x = p$.

Voor de inhoud van het omwentelingslichaam geldt

$$\pi \int_0^p (p^2 x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{1}{3} p^2 x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^p = \pi \left(\frac{1}{3} p^5 - \frac{1}{5} p^5 \right) = \frac{2}{15} p^5 \pi$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is 4π dus $\frac{2}{15} p^5 \pi = 4\pi$.

$$\frac{2}{15} p^5 = 4$$

$$p^5 = 30$$

$$p = \sqrt[5]{30}$$

18.5 Gemengde opdrachten

33 a $f(x) = x^2$ dus $f'(x) = 2x$.

De richtingscoëfficiënt van l is $f'(3) = 6$.

Voor l geldt $y = 6x + b$.

De lijn gaat door $A(3, 9)$ dus $9 = 6 \cdot 3 + b$ ofwel $b = -9$.

Dus $l: y = 6x - 9$.

Lijn l snijdt de y -as in $C(0, -9)$ en de x -as in $B(\frac{1}{2}, 0)$.

$$\text{opp}(V) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3} x^3 - 3x^2 + 9x \right]_{\frac{1}{2}}^3 =$$

$$\frac{9}{8} - 0 + 9 - 7\frac{7}{8} = 2\frac{1}{4}$$

$$\text{opp}(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 9 = 6\frac{3}{4}$$

$$\text{Dus } \text{opp}(\triangle OBC) : \text{opp}(V) = 6\frac{3}{4} : 2\frac{1}{4} = 3 : 1.$$

b A is het punt (p, p^2) .

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $f'(p) = 2p$.

Voor l geldt $y = 2px + b$.

$A(p, p^2)$ ligt op l dus $p^2 = 2p \cdot p + b$ ofwel $b = -p^2$.

Een vergelijking van l is dus $y = 2px - p^2$.

De snijpunten met de assen zijn $B(\frac{1}{2}p, 0)$ en $C(0, -p^2)$.

c $\text{opp}(\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$

$$\text{opp}(V_p) = \int_0^{\frac{1}{2}p} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}p}^p (x^2 - 2px + p^2) dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}p} + \left[\frac{1}{3}x^3 - px^2 + p^2x\right]_{\frac{1}{2}p}^p =$$

$$\frac{1}{24}p^3 - 0 + \frac{1}{3}p^3 - p^3 + p^3 - \left(\frac{1}{24}p^3 - \frac{1}{4}p^3 + \frac{1}{2}p^3\right) = \frac{1}{12}p^3$$

$$\text{opp}(\triangle OBC) : \text{opp}(V) = \frac{1}{4}p^3 : \frac{1}{12}p^3 = 3 : 1$$

34 a Een vergelijking van de lijn door $(0, 10)$ en $(40, 20)$ is $y = \frac{1}{4}x + 10$.

Deze lijn wentelen om de x -as geeft de inhoud van de emmer.

$$\pi \int_0^{40} \left(\frac{1}{4}x + 10\right)^2 dx = \pi \left[4 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}x + 10\right)^3\right]_0^{40} =$$

$$\pi (10666\frac{2}{3} - 1333\frac{1}{3}) \approx 29322 \text{ cm}^3$$

b $29322 \text{ cm}^3 \approx 29$ liter.

35 a $F(x) = -\frac{1}{3}(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} = -\frac{1}{3}(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$F'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(4 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot -2x = x\sqrt{4 - x^2}$$

$F'(x) = f(x)$ dus F is een primitieve van f .

b De grafiek van f snijdt de x -as bij $x = 0$ en $x = 2$.

De oppervlakte van G is

$$\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx =$$

$$\left[-\frac{1}{3}(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}\right]_0^2 =$$

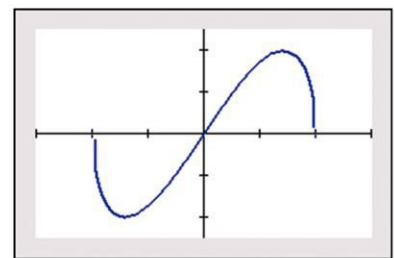
$$0 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 2\right) = \frac{8}{3}$$

c De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^2 (x\sqrt{4 - x^2})^2 dx =$$

$$\pi \int_0^2 x^2(4 - x^2) dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx =$$

$$\pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 4\frac{4}{15}\pi$$



18 Toepassingen van integreren

36 a $-x^2 + 7x + 8 = 24 - x$

$$-x^2 + 8x - 16 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)(x - 4) = 0$$

$$x = 4$$

De lijn en de parabool hebben maar één punt gemeenschappelijk, hieruit volgt dat de lijn $y = 24 - x$ een raaklijn aan de parabool moet zijn.

b De oppervlakte van het groene gebied is $\int_0^8 (-x^2 + 7x + 8 - (8 - x)) dx =$

$$\int_0^8 (-x^2 + 8x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 \right]_0^8 = -170\frac{2}{3} + 256 = 85\frac{1}{3}.$$

De oppervlakte van beide gebieden samen is dan $2 \cdot 85\frac{1}{3} = 170\frac{2}{3}$.

De oppervlakte van beide gebieden samen is

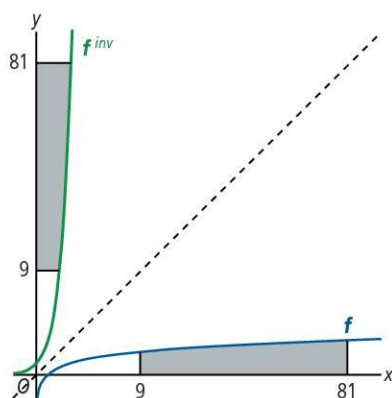
$$\int_0^8 (b - x - (8 - x)) dx = \int_0^8 (b - 8) dx = [bx - 8x]_0^8 = 8b - 64.$$

$$\text{Dus } 8b - 64 = 170\frac{2}{3}.$$

$$8b = 234\frac{2}{3}$$

$$b = 29\frac{1}{3}$$

37



$$f^{inv}(x) = 3^x$$

$$f^{inv}(x) = 9 \text{ als } x = 2$$

$$f^{inv}(x) = 81 \text{ als } x = 4$$

De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f^{inv} , de y -as en de lijnen $y = 9$ en $y = 81$ is

$$2 \cdot (81 - 9) + \int_2^4 (81 - 3^x) dx = 144 + \left[81x - \frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x \right]_2^4 =$$

$$144 + 324 - \frac{81}{\ln(3)} - \left(162 - \frac{9}{\ln(3)} \right) = 306 - \frac{72}{\ln(3)}$$

Omdat de gebieden elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ geldt

$$\int_9^{81} f(x) dx = 306 - \frac{72}{\ln(3)}$$

Onderzoekopdrachten

- 38 a** De oppervlakte onder de grafiek van f is

$$\int_0^{4\pi} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right) dx = \left[x - 4\cos\left(\frac{1}{4}x\right)\right]_0^{4\pi} = 4\pi + 4 - (-4) = 4\pi + 8.$$

De oppervlakte onder de grafiek van $g(x) = c$ op het interval $[0, 4\pi]$ is $4\pi \cdot c$.

Dus $4\pi \cdot c = 4\pi + 8$.

$$c = 1 + \frac{8}{4\pi} = 1 + \frac{2}{\pi}$$

- b** De oppervlakte onder de grafiek van h is

$$\int_0^p \sqrt{p-x} dx = \left[-\frac{2}{3}(p-x)^{3/2}\right]_0^p = 0 + \frac{2}{3}p^{3/2} = \frac{2}{3}p\sqrt{p}.$$

De gemiddelde functiewaarde is dan $\frac{\frac{2}{3}p\sqrt{p}}{p} = \frac{2}{3}\sqrt{p}$.

$$\text{Dus } \frac{2}{3}\sqrt{p} = 6.$$

$$\sqrt{p} = 9$$

$$p = 81$$

- c** Die functies bestaan, bijvoorbeeld $k(x) = \frac{1}{2}p$ of $k(x) = px$.

39 a $g(x) = 3 - \sqrt{4-x^2}$

b $(f(x))^2 - (g(x))^2 = (3 + \sqrt{4-x^2})^2 - (3 - \sqrt{4-x^2})^2 =$
 $9 + 6\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2 - (9 - 6\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2) = 12\sqrt{4-x^2}$

c $\text{inh} = \pi \int_{-2}^2 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = \pi \int_{-2}^2 12\sqrt{4-x^2} dx = 12\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$

$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ is de oppervlakte van een halve cirkel met straal 2, dat is dus
 $\frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 2\pi$.

De inhoud van de torus is daarom $12\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 12\pi \cdot 2\pi = 24\pi^2$.

d Nu geldt $f(x) = R + \sqrt{r^2-x^2}$ en $g(x) = R - \sqrt{r^2-x^2}$.

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = (R + \sqrt{r^2-x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2-x^2})^2 =$$

$$R^2 + 2R\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - x^2) = 4R\sqrt{r^2-x^2}$$

$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx$ is de oppervlakte van een kwartcirkel met straal r , dus $\frac{1}{4} \pi r^2$.

De inhoud van de torus is

$$\pi \int_{-r}^r ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = 2 \cdot \pi \int_0^r ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2-x^2} dx =$$

$$= 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx = 8\pi R \cdot \frac{1}{4} \pi r^2 = 2\pi R \cdot \pi r^2.$$

- e** De lengte van de baan van M is $2\pi R$ en de oppervlakte van de cirkel is πr^2 .

Dus er geldt inderdaad dat

$\text{inhoud torus} = \text{lengte van de baan van } M \times \text{oppervlakte van de cirkel}.$

18 Toepassingen van integreren

Samenvatting

S1 De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^9 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^9 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^9 = 40\frac{1}{2} \pi.$$

S2 De figuur is symmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{2} \pi$, dus beide oppervlaktes zijn even groot.

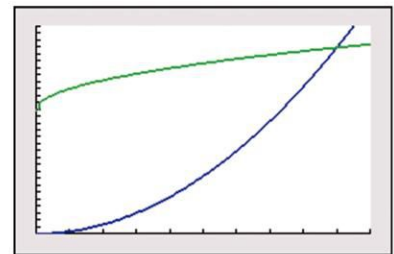
$$\begin{aligned} opp(G) &= 2 \cdot \int_{\frac{1}{10}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(3x) - \cos(2x)) dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{\frac{1}{10}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \\ &= 2 \cdot \left(0 - \left(-\frac{1}{3} \cos\left(\frac{3}{10}\pi\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2}{10}\pi\right) \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \cos\left(\frac{3}{10}\pi\right) + \sin\left(\frac{2}{10}\pi\right) \approx 0,98 \end{aligned}$$

S3 a $f(9) = \frac{1}{3} \cdot 9^2 = 27$ en $g(9) = 18 + 3\sqrt{9} = 27$

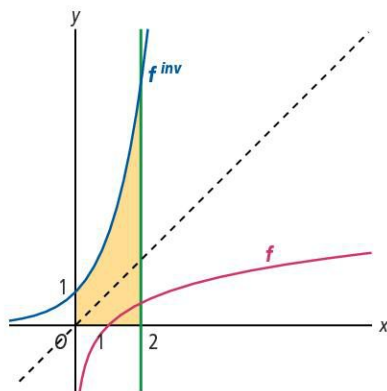
Hieruit volgt dat de grafieken van f en g elkaar snijden in het punt $(9, 27)$.

b Op het interval $[0, 9]$ ligt de grafiek van g boven de grafiek van f .

$$\begin{aligned} inh &= \pi \int_0^9 \left((18 + 3\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 \right) dx = \\ &= \pi \int_0^9 \left(324 + 108\sqrt{x} + 9x - \frac{1}{9}x^4 \right) dx = \\ &= \pi \left[324x + \frac{216}{3} x^{\frac{1}{2}} + 4\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{45}x^5 \right]_0^9 = 3912,3\pi \end{aligned}$$



S4



$$f^{inv}(x) = e^x$$

Het integratie-interval is $[0, 2]$.

De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_0^2 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^2 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} \right)$$

S5 a $opp(G) = \int_2^6 \frac{8}{x} dx = [8 \ln(x)]_2^6 = 8 \ln(6) - 8 \ln(2) = 8 \ln(3)$

$$\text{b } opp(G) = \int_2^p \frac{8}{x} dx = \left[8 \ln(x) \right]_2^p = 8 \ln(p) - 8 \ln(2)$$

De oppervlakte van G is 24 dus $8 \ln(p) - 8 \ln(2) = 24$

$$\ln(p) - \ln(2) = 3$$

$$\ln(p) = \ln(2) + 3$$

$$p = e^{\ln(2)+3} = e^{\ln(2)} \cdot e^3 = 2e^3$$

$$\text{c } \pi \int_2^p \left(\frac{8}{x} \right)^2 dx = \pi \int_2^p \frac{64}{x^2} dx = \pi \int_2^p 64x^{-2} dx$$

$$\pi \left[-\frac{64}{x} \right]_2^p = \pi \left(-\frac{64}{p} + 32 \right)$$

De inhoud is 24π dus $\pi \left(-\frac{64}{p} + 32 \right) = 24\pi$.

$$-\frac{64}{p} + 32 = 24$$

$$\frac{64}{p} = 8$$

$$p = 8$$

Test jezelf

T1 De oppervlakte van het gele gebied is

$$\int_{-\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos(x) - \sin(x)) dx =$$

$$\left[x + \sin(x) + \cos(x) \right]_{-\pi}^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$\frac{1}{2}\pi + 1 + 0 - (-\pi + 0 - 1) = 1\frac{1}{2}\pi + 2.$$

De oppervlakte van het groene gebied is

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} (\sin(x) - 1 - \cos(x)) dx = \left[-\cos(x) - x - \sin(x) \right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} =$$

$$1 - \pi - 0 - \left(0 - \frac{1}{2}\pi - 1 \right) = 2 - \frac{1}{2}\pi.$$

T2 De grafiek van f snijdt de x -as bij $x = -2$ en $x = 2$.

De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi \int_{-2}^2 (x^2 - 4)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x \right]_{-2}^2 =$$

$$\pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 - \left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32 \right) \right) = 34\frac{2}{15}\pi$$

T3 De grafiek van g snijdt de x -as bij $x = 4$.

De andere snijpunten zijn bij:

$$f(x) = 6 \qquad g(x) = 6$$

$$e^x = 6 \qquad 3\sqrt{x-4} = 6$$

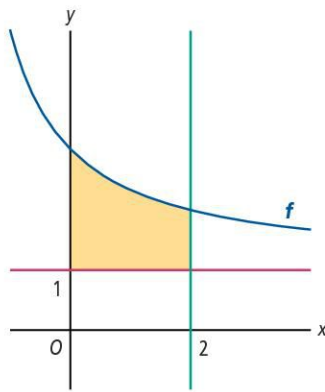
$$x = \ln(6) \qquad \sqrt{x-4} = 2$$

$$x = 8$$

De oppervlakte van dit gebied is

$$\begin{aligned} & \int_1^{\ln(6)} e^x dx + 6 \cdot (4 - \ln(6)) + \int_4^8 (6 - 3\sqrt{x-4}) dx = \\ & [e^x]_1^{\ln(6)} + 24 - 6 \ln(6) + \left[6x - 2(x-4)^{1/2} \right]_4^8 = \\ & 6 - e + 24 - 6 \ln(6) + 48 - 16 - (24 - 0) = \\ & 38 - e - 6 \ln(6) \end{aligned}$$

T4 a

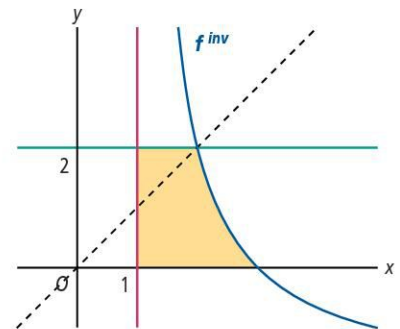


$$\begin{aligned} \text{b } f^{inv}: & \quad x = 1 + \frac{4}{y+2} \\ & \quad x - 1 = \frac{4}{y+2} \\ & \quad y + 2 = \frac{4}{x-1} \\ & \quad y = -2 + \frac{4}{x-1} \\ & \quad f^{inv}(x) = -2 + \frac{4}{x-1} \end{aligned}$$

c Het snijpunt van de grafiek van f^{inv} met de lijn $y = 2$ is $(2, 2)$.

De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\begin{aligned} \pi \cdot 2^2 \cdot 1 + \pi \int_2^3 \left(-2 + \frac{4}{x-1} \right)^2 dx &= 4\pi + \pi \int_2^3 \left(4 - \frac{16}{x-1} + \frac{16}{(x-1)^2} \right) dx = \\ 4\pi + \pi \left[-16(x-1)^{-1} - 16 \ln(x-1) + 4x \right]_2^3 &= \\ 4\pi + \pi(-8 - 16 \ln(2) + 12 - (-16 + 8)) &= \\ \pi(16 - 16 \ln(2)) \end{aligned}$$



$$\text{T5 a } inh = \pi \int_0^2 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \int_0^2 x^{2/3} dx = \pi \cdot \left[\frac{3}{5} x^{5/3} \right]_0^2 = \frac{3}{5} \pi \cdot 2^{5/3} \approx 5,98$$

b De grafiek van f snijdt de lijn $y = 2$ bij $x = 8$.

$$\begin{aligned} inh &= \pi \int_4^8 \left(2^2 - (\sqrt[3]{x})^2 \right) dx = \pi \int_4^8 \left(4 - x^{2/3} \right) dx = \pi \left[4x - \frac{3}{5} x^{5/3} \right]_4^8 = \\ & \pi \left(32 - \frac{3}{5} \cdot 32 - \left(16 - \frac{3}{5} \cdot 4^{5/3} \right) \right) \approx 8,95 \end{aligned}$$

De grafische rekenmachine

- c De inhoud als A_p wordt gewenteld om de x -as is

$$\pi \int_0^p (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \int_0^2 x^{\frac{2}{3}} dx = \pi \cdot \left[\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^p = \frac{3}{5} \pi \cdot p^{\frac{5}{3}}$$

De inhoud als B_p wordt gewenteld om de x -as is

$$\begin{aligned} \pi \int_p^8 (2^2 - (\sqrt[3]{x})^2) dx &= \pi \int_p^8 (4 - x^{\frac{2}{3}}) dx = \\ \pi \left[4x - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_p^8 &= \pi \left(32 - 19\frac{1}{5} - \left(4p - \frac{3}{5} p^{\frac{5}{3}} \right) \right) \end{aligned}$$

De inhoud van beide omwentelingslichamen is gelijk als

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \pi p^{\frac{5}{3}} &= \pi \left(12\frac{4}{5} - 4p + \frac{3}{5} p^{\frac{5}{3}} \right) \\ \frac{3}{5} p^{\frac{5}{3}} &= 12\frac{4}{5} - 4p + \frac{3}{5} p^{\frac{5}{3}} \\ 0 &= 12\frac{4}{5} - 4p \\ 4p &= 12\frac{4}{5} \\ p &= 3\frac{1}{5} \end{aligned}$$

T6 a $f(3) = \sqrt{25 - 9} = 4$ dus $p = 4$.

- b De inhoud van de ring is

$$\begin{aligned} \pi \int_{-3}^3 ((\sqrt{25 - x^2})^2 - 4^2) dx &= \pi \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \pi \left[9x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^3 = \\ \pi(27 - 9 - (-27 + 9)) &= 36\pi \end{aligned}$$

- c Bij de halve cirkel met straal r hoort het functievoorschrift $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$g(3) = \sqrt{r^2 - 9} \text{ dus } p = \sqrt{r^2 - 9}.$$

De inhoud van de ring is dan

$$\begin{aligned} \pi \int_{-3}^3 ((\sqrt{r^2 - x^2})^2 - (\sqrt{r^2 - 9})^2) dx &= \\ \pi \int_{-3}^3 (r^2 - x^2 - (r^2 - 9)) dx &= \pi \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx \text{ en dit is gelijk aan de uitkomst van} \\ \text{opdracht b.} & \\ \text{De inhoud van de ring is niet veranderd.} & \end{aligned}$$

T7 a $I_4 = \pi \int_1^4 \frac{16}{(x+3)^2} dx = \pi \left[-16(x+3)^{-1} \right]_1^4 = \pi \left(-\frac{16}{7} + \frac{16}{4} \right) = 1\frac{5}{7} \pi$

b $I_a = \pi \int_1^a \frac{16}{(x+3)^2} dx = \pi \left[-16(x+3)^{-1} \right]_1^a = \pi \left(-\frac{16}{a+3} + 4 \right)$

c $\pi \left(-\frac{16}{a+3} + 4 \right) = 2\pi$

$$-\frac{16}{a+3} + 4 = 2$$

$$\frac{16}{a+3} = 2$$

$$a+3 = 8$$

$$a = 5$$

18 Toepassingen van integreren

T8 De inhoud als het groene gebied wordt gewenteld om de x -as is:

$$\pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right)$$

De inhoud als het gele gebied wordt gewenteld om de x -as is:

$$\pi \int_0^1 (e^2 - e^{2x}) dx = \pi \left[e^2 x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 =$$

$$\pi \left(e^2 - \frac{1}{2} e^2 - \left(0 - \frac{1}{2} \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Het verschil is } \pi \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \right) - \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \pi e^2 + \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi e^2 + \frac{1}{2} \pi = \pi.$$

T9
$$\text{opp}(G) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

De oppervlakte van het deel van G links van de lijn $x = p$ is

$$\int_0^p \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^p = -\frac{1}{2} \cos(2p) + \frac{1}{2}$$

Er zijn twee mogelijkheden: de oppervlakte van dat deel is $\frac{2}{3}$ of $\frac{1}{3}$.

$$-\frac{1}{2} \cos(2p) + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ of } -\frac{1}{2} \cos(2p) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\cos(2p) = -\frac{1}{3} \text{ of } \cos(2p) = \frac{1}{3}$$

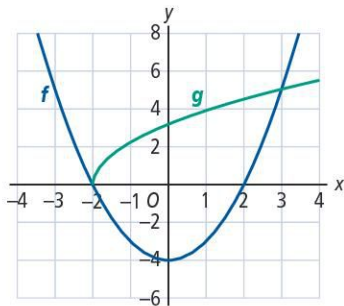
$$2p = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = 1,910... \text{ of } 2p = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 1,230...$$

$$p \approx 0,96 \text{ of } p \approx 0,62$$

De twee waarden van p zijn 0,96 en 0,62.

Extra oefening

E1 a



b De grafiek van f snijdt de x -as bij $x = -2$ en $x = 2$.

$$\int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) = -10\frac{2}{3}$$

De oppervlakte van het gebied is $10\frac{2}{3}$.

c De snijpunten zijn $A(-2, 0)$ en $B(3, 5)$.

$$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0 \text{ en } g(-2) = \sqrt{-10 + 10} = 0$$

$$f(3) = 3^2 - 4 = 5 \text{ en } g(3) = \sqrt{15 + 10} = 5, \text{ klopt.}$$

$$\text{d} \int_{-2}^3 (\sqrt{5x+10} - x^2 + 4) dx$$

$$\text{e} \int_{-2}^3 (\sqrt{5x+10} - x^2 + 4) dx = \int_{-2}^3 ((5x+10)^{\frac{1}{2}} - x^2 + 4) dx =$$

$$\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (5x+10)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 + 4x \right]_{-2}^3 = 19\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 25$$

De oppervlakte van het gebied is 25.

E2 a De grafiek van f snijdt de x -as als

$$4\sqrt{x} - x = 0$$

$$4\sqrt{x} = x$$

$$16x = x^2$$

$$x = 0 \text{ of } x = 16$$

$$\text{De oppervlakte is } \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x) dx = \left[4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{16} = 42\frac{2}{3}.$$

$$\text{b} \pi \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)^2 dx$$

$$\text{c} \pi \int_0^{16} (16x - 8x\sqrt{x} + x^2) dx = \pi \left[8x^2 - \frac{16}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{16} = 136\frac{8}{15} \pi$$

E3 a $f^{inv}: x = \ln(5 - y^2)$

$$e^x = 5 - y^2$$

$$y^2 = 5 - e^x$$

$$y = \sqrt{5 - e^x}$$

$$f^{inv}(x) = \sqrt{5 - e^x}$$

b $f(0) = \ln(5)$ dus het integratie-interval is $[0, \ln(5)]$.

$$inh = \pi \int_0^{\ln(5)} (\sqrt{5 - e^x})^2 dx = \pi \int_0^{\ln(5)} (5 - e^x) dx = \pi [5x - e^x]_0^{\ln(5)} =$$

$$\pi (5 \ln(5) - 5 + 1) = \pi (5 \ln(5) - 4)$$

$$\text{E4} \int_1^p 4 \cdot (2x+1)^{-2} dx = \frac{1}{3}$$

$$\left[-4 \cdot \frac{1}{2} (2x+1)^{-1} \right]_1^p = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{2p+1} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{2p+1} = -\frac{1}{3}$$

$$2p+1 = 6$$

$$p = 2\frac{1}{2}$$

18 Toepassingen van integreren

$$\text{E5 a } opp(V) = \int_0^p \sqrt{x} \, dx = \int_0^p x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^p = \frac{2}{3} p\sqrt{p}$$

Voor lijn BC geldt $y = \sqrt{p}$.

$$opp(W) = \int_0^p (\sqrt{p} - \sqrt{x}) \, dx = \left[\sqrt{p}x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^p = p\sqrt{p} - \frac{2}{3} p\sqrt{p} = \frac{1}{3} p\sqrt{p}$$

Dit betekent dat $opp(V) = 2 \cdot opp(W)$ voor elke waarde van p .

b De inhoud van het omwentelingslichaam dat hoort bij V is

$$\pi \int_0^p (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^p x \, dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^p = \frac{1}{2} p^2 \pi.$$

De inhoud van het omwentelingslichaam dat hoort bij W is

$$\pi \int_0^p ((\sqrt{p})^2 - (\sqrt{x})^2) \, dx = \pi \int_0^p (p - x) \, dx = \pi \left[px - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^p =$$

$$\pi \left(p^2 - \frac{1}{2} p^2 \right) = \frac{1}{2} p^2 \pi.$$

De inhoud is gelijk voor elke waarde van p .

$$\text{E6 a } f'(x) = e^x$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn l is $f'(2) = e^2$.

Voor de raaklijn geldt $l: y = e^2 x + b$.

$(2, e^2)$ ligt op de raaklijn dus $e^2 = 2e^2 + b$ ofwel $b = -e^2$.

Een vergelijking van de raaklijn is $l: y = e^2 x - e^2$.

De raaklijn snijdt de x -as als $x = 1$ dus de x -coördinaat van A is 1.

$$\text{b } opp(G) = \int_0^1 e^x \, dx + \int_1^2 (e^x - e^2 x + e^2) \, dx = [e^x]_0^1 + \left[e^x - \frac{1}{2} e^2 x^2 + e^2 x \right]_1^2 =$$

$$e - 1 + e^2 - \left(e + \frac{1}{2} e^2 \right) = \frac{1}{2} e^2 - 1$$

$$\text{c } inh = \pi \int_0^2 (e^4 - e^{2x}) \, dx = \pi \left[e^4 x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^2 = \pi \left(1 \frac{1}{2} e^4 + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{E7 } f(x) = g(x)$$

$$4 + \sqrt{3x} = -4x + 19$$

$$\sqrt{3x} = -4x + 15$$

$$3x = 16x^2 - 120x + 225$$

$$16x^2 - 123x + 225 = 0$$

$$D = 123^2 - 4 \cdot 16 \cdot 225 = 729$$

$$x = \frac{123 + 27}{32} = 4 \frac{11}{16} \text{ (voldoet niet) of } x = \frac{123 - 27}{32} = 3$$

De grafieken van f en g snijden elkaar bij $x = 3$.

$$g(x) = h(x)$$

$$-4x + 19 = (x - 1)(x - 3)$$

$$-4x + 19 = x^2 - 4x + 3$$

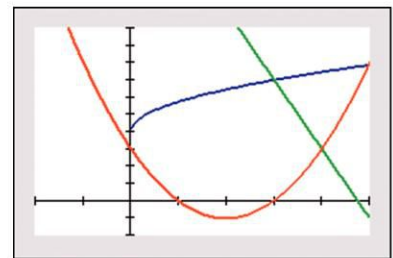
$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ of } x = -4$$

Het snijpunt van de grafieken van g en h welke we nodig hebben is bij $x = 4$.

$$opp = \int_0^3 (4 + \sqrt{3x} - x^2 + 4x - 3) \, dx + \int_3^4 (-4x + 19 - x^2 + 4x - 3) \, dx =$$

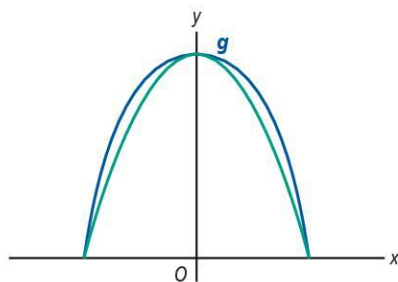
$$\int_0^3 (1 + \sqrt{3x} - x^2 + 4x) \, dx + \int_3^4 (16 - x^2) \, dx =$$



$$\left[x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} (3x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^3 + \left[16x - \frac{1}{3}x^3 \right]_3^4 =$$

$$18 - 0 + 42\frac{2}{3} - 39 = 21\frac{2}{3}$$

E8 a g is de bovenste grafiek.



b Invoer: $y_1 = 10 - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Venster: standaard

Optie: nulpunt

geeft $x \approx 3$ en $x \approx -3$.

c $opp = \int_{-3}^3 \left(10 - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \right) dx = \left[10x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \right]_{-3}^3 \approx 40$

d Zie de onderste grafiek in opdracht a.

e $\int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = 27 - 9 - (-27 + 9) = 36$

Het verschil is 4.