

12 Integreeren

Voorkennis

- V1 a** $f(x) = \frac{1}{x^3}$
 $f(x) = 1 \cdot x^{-3}$
- b** $f(x) = \frac{4}{5x}$
 $f(x) = \frac{4}{5} \cdot x^{-1}$
- c** $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$
 $f(x) = 5x^{2\frac{1}{2}}$
- d** $f(x) = \frac{1}{3x\sqrt{x}}$
 $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-1\frac{1}{2}}$
- V2 a** $f(x) = \frac{3x^4 - 5x^2 + 2x}{x}$
 $f(x) = \frac{3x^4}{x} - \frac{5x^2}{x} + \frac{2x}{x}$
 $f(x) = 3x^3 - 5x + 2$
 $f(x) = 3 \cdot x^3 + -5 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0$
- b** $g(x) = \frac{x^4 + 8x^3 - 5x^2}{2x^3}$
 $g(x) = \frac{x^4}{2x^3} + \frac{8x^3}{2x^3} - \frac{5x^2}{2x^3}$
 $g(x) = \frac{1}{2}x + 4 - 2\frac{1}{2}x^{-1}$
 $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^1 + 4 \cdot x^0 + -2\frac{1}{2} \cdot x^{-1}$
- c** $h(x) = \frac{3(2x - 3)^2}{4x}$
 $h(x) = \frac{3(4x^2 - 12x + 9)}{4x}$
 $h(x) = \frac{12x^2 - 36x + 27}{4x}$
 $h(x) = 3x - 9 + 6\frac{3}{4}x^{-1}$
 $h(x) = 3 \cdot x^1 + -9 \cdot x^0 + 6\frac{3}{4} \cdot x^{-1}$
- d** $k(x) = \frac{2(x + 5)^3}{x^2}$
 $k(x) = \frac{2(x^3 + 15x^2 + 75x + 125)}{x^2}$
 $k(x) = \frac{2x^3 + 30x^2 + 150x + 250}{x^2}$
 $k(x) = 2x + 30 + 150x^{-1} + 250x^{-2}$
 $k(x) = 2 \cdot x^1 + 30 \cdot x^0 + 150 \cdot x^{-1} + 250 \cdot x^{-2}$
- V3 a** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3,1) - f(3)}{3,1 - 3} = \frac{{}^3\log(3,1) - {}^3\log(3)}{0,1} \approx 0,2985$
- b** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3,01) - f(3)}{3,01 - 3} = \frac{{}^3\log(3,01) - {}^3\log(3)}{0,01} \approx 0,3029$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3,001) - f(3)}{3,001 - 3} = \frac{{}^3\log(3,001) - {}^3\log(3)}{0,001} \approx 0,3034$
- c** De helling is 0,30.
- V4 a** $\frac{f(4,0001) - f(4)}{0,0001} \approx 0,1086$
- b** $\frac{g(4,0001) - g(4)}{0,0001} \approx 0,3781$
- c** $\frac{h(4,0001) - h(4)}{0,0001} \approx 4,3334$
- d** $\frac{k(4,0001) - k(4)}{0,0001} \approx 0,0400$
- V5 a** $f(x) = 3(2x - 5)^4$
 $f'(x) = 3 \cdot 4(2x - 5)^3 \cdot 2$
 $f'(x) = 24(2x - 5)^3$
- b** $g(x) = \frac{3}{5x + 1}$
 $g(x) = 3(5x + 1)^{-1}$
 $g'(x) = -1 \cdot 3(5x + 1)^{-2} \cdot 5$
 $g'(x) = \frac{-15}{(5x + 1)^2}$

12 Integreren

$$\text{c } h(x) = \frac{1}{2} \sqrt{3-4x}$$

$$h(x) = \frac{1}{2} (3-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (3-4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4$$

$$h'(x) = \frac{-1}{\sqrt{3-4x}}$$

$$\text{d } k(x) = \frac{4}{3\sqrt{5x+6}}$$

$$k(x) = \frac{4}{3} (5x+6)^{-\frac{1}{2}}$$

$$k'(x) = \frac{4}{3} \cdot -\frac{1}{2} (5x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5$$

$$k'(x) = \frac{-10}{3(5x+6)\sqrt{5x+6}}$$

$$\text{V6 a } f(x) = (2x^3 - 1)^2$$

$$f'(x) = 2(2x^3 - 1) \cdot 6x^2$$

$$f'(x) = 12x^2(2x^3 - 1)$$

$$g(x) = 4(x^6 - x^3)$$

$$g(x) = 4x^6 - 4x^3$$

$$g'(x) = 24x^5 - 12x^2$$

b Haakjes wegwerken bij $f'(x) = 12x^2(2x^3 - 1)$ geeft $f'(x) = 24x^5 - 12x^2$, dus

$$f'(x) = g'(x)$$

c Uit $f(x) = g(x) + c$ volgt $f'(x) = g'(x) + 0$, dus $f'(x) = g'(x)$.

d $f(0) = 1$ en $g(0) = 0$, dus $c = -1$.

$$\text{V7 a } \sqrt{x} = \frac{1}{2}x$$

$$x = \frac{1}{4}x^2$$

$$x = 0 \text{ of } 1 = \frac{1}{4}x$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

snijpunten $(0, 0)$ en $(4, 2)$

$$\text{b } \frac{4}{x+3} = x$$

$$4 = x^2 + 3x$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 1$$

snijpunten $(-4, -4)$ en $(1, 1)$

$$\text{c } x^2 + 4 = x + 6$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 2$$

snijpunten $(-1, 5)$ en $(2, 8)$

$$\text{d } \frac{3}{x^2-4} = x^2-2$$

$$3 = x^4 - 6x^2 + 8$$

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$

$$(x^2-1)(x^2-5) = 0$$

$$x^2 = 1 \text{ of } x^2 = 5$$

snijpunten $(-1, -1)$, $(1, -1)$,

$(-\sqrt{5}, 3)$ en $(\sqrt{5}, 3)$

12.1 Oppervlakten benaderen

intro De oppervlakte krijg je door lengte maal breedte te doen.

Tijd maal snelheid geeft de afgelegde weg.

$$\text{1 a } \text{oppervlakte} = 2 \times f(1) + 2 \times f(3) = 2 \times 3\frac{1}{8} + 2 \times 4\frac{3}{8} = 15$$

$$\text{b } \text{oppervlakte} = 1 \times \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(1\frac{1}{2}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right) + f\left(3\frac{1}{2}\right) \right) = 14,75$$

c Opdracht b geeft een betere benadering.

d Door een nog groter aantal smallere rechthoekjes te nemen.

$$\text{2 a } \Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$$

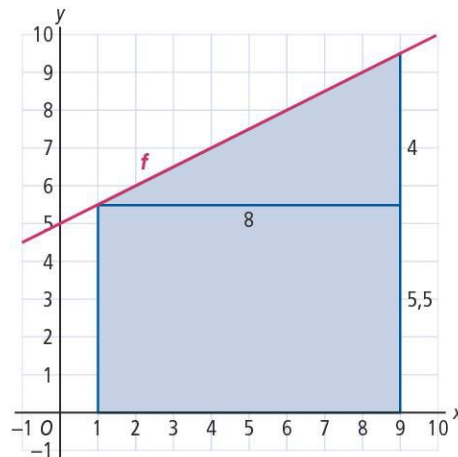
$$\text{b } x = 1\frac{1}{2}; x = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{c } \text{oppervlakte } G = 1 \times \left(f\left(1\frac{1}{2}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right) + f\left(3\frac{1}{2}\right) + f\left(4\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$\text{oppervlakte } G = 1 \times (6,75 + 8,75 + 8,75 + 6,75) = 31$$

$$\text{3 } \text{De Riemann-som is gelijk aan } 2 \times (\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9}) \approx 21,2$$

- 4 a oppervlakte van $G = 2 \times (f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) = 2(6 + 7 + 8 + 9) = 60$
 b oppervlakte van $G = 1 \times \left(f\left(1\frac{1}{2}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right) + \dots + f\left(8\frac{1}{2}\right)\right) = 5\frac{3}{4} + 6\frac{1}{4} + \dots + 9\frac{1}{4} = 60$
 c De oppervlakte bestaat uit een rechthoek en een rechthoekige driehoek.
 Oppervlakte van $G = 8 \times 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 60$



- 5 a De oppervlakte is $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 16\pi$.
 b De oppervlakte is $2(f(1) + f(3) + f(5) + f(7)) \approx 50,94$
 c $\frac{50,942 \dots - 16\pi}{16\pi} \approx 0,013$ dus de afwijking is minder dan 2%.
- 6 oppervlakte = $1 \times \left(f\left(2\frac{1}{2}\right) + f\left(3\frac{1}{2}\right) + f\left(4\frac{1}{2}\right) + f\left(5\frac{1}{2}\right) + f\left(6\frac{1}{2}\right)\right)$
 oppervlakte = $1 \times (1,5 + 1 + 0,75 + 0,6 + 0,5) = 4,35$
- 7 oppervlakte van $G = 1 \times \left(f\left(-1\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(1\frac{1}{2}\right)\right)$
 oppervlakte van $G = 1 \times (2^{-1\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{1\frac{1}{2}}) \approx 5,3$
- 8 a De Riemann-som is gelijk aan
 $0,4(f(-1,8) + f(-1,4) + \dots + f(5,8)) \approx 130,56$
 b De Riemann-som is gelijk aan
 $0,08(f(-1,96) + f(-1,88) + \dots + f(5,96)) \approx 130,66$
- 06 a Elke rechthoek heeft een breedte van 1.
 b De hoogte van de eerste rechthoek is $f\left(2\frac{1}{2}\right)$.
 c De hoogten zijn $f\left(2\frac{1}{2}\right) = 2$; $f\left(3\frac{1}{2}\right) = 1,5$; $f\left(4\frac{1}{2}\right) = 1,2$ en $f\left(5\frac{1}{2}\right) = 1$
 d $2 + 1,5 + 1,2 + 1 = 5,7$
 e oppervlakte = $1 \times \left(g\left(3\frac{1}{2}\right) + g\left(4\frac{1}{2}\right) + g\left(5\frac{1}{2}\right) + g\left(6\frac{1}{2}\right)\right)$
 oppervlakte = $\frac{2}{3} + \frac{6}{11} + \frac{6}{13} + \frac{2}{5} \approx 2,07$
- U1 a De onderste balk heeft de afmetingen 9,5 m bij 9,5 m bij 1 m.
 De inhoud van de onderste blok is $9,5 \times 9,5 \times 1 = 90,25 \text{ m}^3$.
 De volgende balk heeft als inhoud $8,5 \times 8,5 \times 1 = 72,25 \text{ m}^3$.
 De bovenste balk heeft een inhoud van $0,5 \times 0,5 \times 1 = 0,25 \text{ m}^3$.
 Een benadering van de totale inhoud is
 $90,25 + 72,25 + 56,25 + 42,25 + 30,25 + 20,25 + 12,25 + 6,25 + 2,25 + 0,25$
 $= 332,5 \text{ m}^3$.
 b De werkelijke inhoud is $I = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 333\frac{1}{3} \text{ m}^3$.
 De afwijking is $333\frac{1}{3} - 332,5 = \frac{5}{6}$
 Dat is $\frac{\frac{5}{6}}{333\frac{1}{3}} \cdot 100\% = 0,25\%$

12 Integreren

12.2 Integralen

intro De oppervlakte van de groene gebieden bereken je door eerst de oppervlakte van een halve cirkel met straal 4 te berekenen.
Trek dan daarvan de oppervlakte van een driehoek met basis 8 en hoogte 4 af.

- 9 a** De Riemann-sommen zijn gelijk aan
 $0,3(f(0,15) + f(0,45) + \dots f(2,85)) = 8,9775$
 $0,1(f(0,05) + f(0,15) + \dots f(2,95)) = 8,9975$
 $0,03(f(0,015) + f(0,045) + \dots f(2,985)) = 8,999775$
b De uitkomsten zullen dan naderen naar 9.

- 10 a** $f(x) = 0$ als $2\log(-x^2 + 10x - 15) = 0$
 $-x^2 + 10x - 15 = 1$
 $x^2 - 10x + 16 = 0$
 $(x - 2)(x - 8) = 0$
 De snijpunten met de x -as zijn $(2, 0)$ en $(8, 0)$.

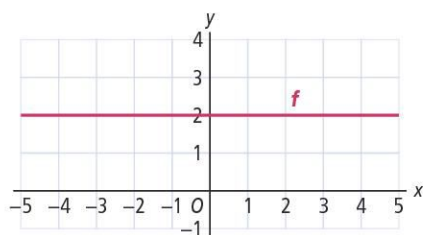
b $\int_2^8 2\log(-x^2 + 10x - 15) dx$

11 a $\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx, \int_0^{\pi} \sin(x) dx, \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - x^2} dx$

b $\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx =$
 $\frac{1}{2} \times \left(f\left(-\frac{3}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(1\frac{1}{4}\right) + f\left(1\frac{3}{4}\right) \right) \approx 4,56$

c $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\sqrt{5})^2 = 2\frac{1}{2} \pi$

12 a



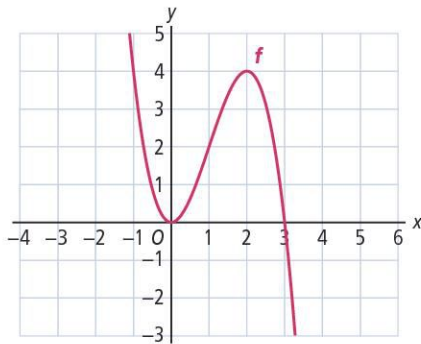
- b** De uitkomst van $\int_1^5 2 dx$ is gelijk aan de oppervlakte van een rechthoek van 4 bij 2, dus $\int_1^5 2 dx = 4 \times 2 = 8$

13 a $\int_0^5 (5 - x) dx$

- b** De oppervlakte van deze driehoek is $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12\frac{1}{2}$

14 a $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$

b 1,57

15 a

- b** Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$ dus $3x^2 - x^3 = 0$
 $x^2(3 - x) = 0$
 $x = 0$ en $x = 3$

De oppervlakte is gelijk aan $\int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = 6,75$

16 a $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2$

c $\int_1^4 \frac{16}{x\sqrt{x}} dx = 16$

b $\int_{-3}^0 5 \cdot \log(x^2 + 1) dx \approx 7,4$

d $\int_0^5 (2^x + 2^{-x}) dx \approx 46,1$

17 a $\frac{1}{2}x^2 + 1 = 4 - \frac{1}{2}x$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$x = -3$ of $x = 2$, de snijpunten zijn $(-3, 5\frac{1}{2})$ en $(2, 3)$.

- b** De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) dx + \int_2^4 \left(4 - \frac{1}{2}x\right) dx = 3,333... + 5 \approx 8,33$$

- c** De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_0^2 \left(4 - \frac{1}{2}x\right) dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) dx = 7 - 3,333... \approx 3,67$$

010 a $-x^2 + 10x - 21 = 0$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$(x - 3)(x - 7) = 0$$

$x = 3$ of $x = 7$, de snijpunten zijn $(3, 0)$ en $(7, 0)$.

- b** De ondergrens is 3 en de bovengrens is 7.

c De oppervlakte van G is $\int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 (-x^2 + 10x - 21) dx$

U2 De oppervlakte van $G = \int_1^p \frac{1}{x} dx = 1$

Je kunt p vinden met behulp van inklemmen:

$p = 2,72$ geeft oppervlakte van $G \approx 1,0006$

$p = 2,718$ geeft oppervlakte van $G \approx 0,9999$

$p = 2,719$ geeft oppervlakte van $G \approx 1,0003$

$p = 2,7182$ geeft oppervlakte van $G \approx 0,9999699$

$p = 2,7183$ geeft oppervlakte van $G \approx 1,0000067$

De benadering in vier decimalen is $p \approx 2,7183$.

12 Integreren

- U3 a** $\int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} dx - \int_{-5}^5 (\sqrt{50-x^2} - 5) dx$
- b** $\int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} dx - \int_{-5}^5 (\sqrt{50-x^2} - 5) dx \approx 25,0$
- c** De oppervlakte tussen de bovenste cirkelboog en de x -as is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = 12\frac{1}{2} \pi$.
 De straal van de onderste cirkelboog is $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$.
 De oppervlakte tussen de onderste cirkelboog en de x -as is
 $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (\sqrt{50})^2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 12,5\pi - 25$.
 De oppervlakte van het maantje is $12\frac{1}{2} \pi - (12,5\pi - 25) = 25$.

12.3 Hoofdstelling van de integraalrekening

intro Splits de oppervlakte van G in een rechthoek en een driehoek:

$$O(p) = 1 \cdot p + \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}p^2 + p$$

$$O'(p) = \frac{1}{2}p + 1 \text{ en dat komt overeen met } f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

- 18 a** $O(p + \Delta p)$ is de oppervlakte begrensd door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = p + \Delta p$.

$O(p)$ is de oppervlakte begrensd door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = p$.

Dus is $\Delta O(p) = O(p + \Delta p) - O(p)$ de oppervlakte begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = p$ en $x = p + \Delta p$.

- b** $\Delta p \cdot f(p)$ is de oppervlakte van een rechthoek die binnen het rood gekleurde gebied past.

$\Delta p \cdot f(p + \Delta p)$ is de oppervlakte van een rechthoek waar het rood gekleurde gebied in past.

Daarom geldt $\Delta p \cdot f(p) \leq \Delta O(p) \leq \Delta p \cdot f(p + \Delta p)$

- c** Als $\Delta p \rightarrow 0$, dan nadert $\frac{\Delta O(p)}{\Delta p}$ naar $O'(p)$.

- d** Als $\Delta p \rightarrow 0$ dan nadert $f(p + \Delta p)$ naar $f(p)$

Omdat $\frac{\Delta O(p)}{\Delta p}$ tussen $f(p + \Delta p)$ en $f(p)$ ligt moet gelden $O'(p) = f(p)$

- 19 a** Als $O(p) = \frac{1}{3}x^3 + C$ dan is $O'(p) = p^2$ en dat is gelijk aan $f(p)$

- b** De oppervlakte tussen de y -as en $p = 0$ (= de y -as) is gelijk aan 0.

$$O(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + C = 0, \text{ dus } C = 0$$

- c** $\int_0^6 x^2 dx = O(6) = \frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72$

- 20 a** $O(6)$ is de oppervlakte begrensd door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = 6$ en $O(3)$ is de oppervlakte begrensd door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = 3$.

Dus is $O(6) - O(3)$ precies de oppervlakte van G .

- b** $\int_3^6 x^2 dx = O(6) - O(3) = \frac{1}{3} \cdot 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 72 - 9 = 63$

- 21 a** $F'(x) = 4x^3 = f(x)$, dus $F(x)$ is een primitieve van $f(x)$.

- b** $\int_0^2 4x^3 dx = [x^4]_0^2 = 2^4 - 0^4 = 16 - 0 = 16$

22 a $F(x) = 2x\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$ dus $F'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$ dus $F(x)$ is een primitieve van $f(x)$.
b $\int_4^9 3\sqrt{x} dx = \left[2x\sqrt{x} \right]_4^9 = 2 \cdot 9\sqrt{9} - 2 \cdot 4\sqrt{4} = 54 - 16 = 38$

23 a $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ dus $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
b Een primitieve van $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ is $f(x) = x^{-2}$ (opgave a), dus een primitieve van $g(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ is $G(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x^2}$

24 a $F'(x) = 11x^{10}$
b Een primitieve van $g(x) = x^{10}$ is $G(x) = \frac{1}{11}x^{11}$

25 De regel geldt niet voor $p = -1$, want dan zou gelden $F(x) = \frac{1}{0}x^0$ en delen door nul is niet mogelijk.

26 a $F(x) = \frac{1}{100}x^{100}$ **c** $f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
 $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$
b $f(x) = \frac{1}{x^{10}} = x^{-10}$ **d** $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = x^{-\frac{5}{2}}$
 $F(x) = -\frac{1}{9}x^{-9} = -\frac{1}{9x^9}$ $F(x) = \frac{1}{-1\frac{1}{2}}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3x\sqrt{x}}$

27 a De oppervlakte is gelijk aan $\int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \right]_0^2 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^2$
 $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} - 0 = 1\frac{1}{3}\sqrt{2}$
b $\int_0^p x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \right]_0^p = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^p = \frac{2}{3} \cdot p\sqrt{p} - 0 = \frac{2}{3}p\sqrt{p}$
 Los op $\frac{2}{3}p\sqrt{p} = 8 \cdot 1\frac{1}{3}\sqrt{2}$
 $\frac{2}{3}p\sqrt{p} = \frac{32}{3}\sqrt{2}$
 $p^{\frac{1}{2}} = 16\sqrt{2} = 2^4\sqrt{2} = (2^3)^{\frac{1}{2}}$
 $p = 2^3 = 8$

021 a Als $F(x) = x^6$ dan is $F'(x) = 6x^5$ dus $F'(x) = f(x)$
b $\int_1^2 6x^5 dx = \left[x^6 \right]_1^2 = 2^6 - 1^6 = 64 - 1 = 63$

026 a $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$
b $p = -\frac{1}{3}$ invullen geeft $F(x) = \frac{1}{-\frac{1}{3} + 1}x^{-\frac{1}{3} + 1}$
c $F(x) = \frac{1}{-\frac{1}{3} + 1}x^{-\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}$

12 Integreren

U4 De oppervlaktes O_1 en O_3 zijn gelijk vanwege de symmetrie in de y -as.

$$O_3 = \int_0^8 x \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{1\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{1}{2\frac{1}{3}} x^{2\frac{1}{3}} \right]_0^8 = \left[\frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} \right]_0^8 = \frac{3}{7} \cdot 64 \cdot 2 = \frac{384}{7}$$

$$O_2 = O(\text{vierkant}) - (O_1 + O_3) = 16 \cdot 16 - 2 \cdot \frac{384}{7} = \frac{1024}{7} \text{ en } O_1 + O_3 = \frac{768}{7}$$

$$O_2 : (O_1 + O_3) = \frac{1024}{7} : \frac{768}{7} = 1024 : 768 = 4 : 3$$

(want $1024 = 4 \times 256$ en $768 = 3 \times 256$)

12.4 Primitiveren en integreren

intro $F(x) = \frac{1}{3}(x+3)^3 = \frac{1}{3}(x+3)(x+3)^2 =$

$$\frac{1}{3}(x+3)(x^2+6x+9) = \frac{1}{3}(x^3+9x^2+27x+27) = \frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+9$$

Het verschil tussen de primitieven van Iris en Anouk is een constante, dus de afgeleiden van deze primitieven zijn hetzelfde.

- 28 a** Een functie waarvan $F'(x) = 5$ is bijvoorbeeld $F(x) = 5x + 3$
b Een primitieve van $g(x) = 6x^2 + 5$ is bijvoorbeeld $G(x) = 2x^3 + 5x - 8$
c Een primitieve van $h(x) = 4x^3 + 6x^2 + 5$ is bijvoorbeeld $H(x) = x^4 + 2x^3 + 5x$

29 a $F(x) = \frac{3}{5}x^5 - x^4$

b $g(x) = 2x^2 + \frac{3}{x^4}$ ofwel $g(x) = 2x^2 + 3x^{-4}$
 $G(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{-3}x^{-3}$ ofwel $G(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{x^3}$

c $h(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ ofwel $h(x) = x^{\frac{7}{3}}$
 $H(x) = \frac{1}{3\frac{1}{3}}x^{\frac{7}{3}+1}$ ofwel $H(x) = \frac{3}{10}x^3 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $k(x) = (x^2 - 2)^2$ ofwel $k(x) = x^4 - 4x^2 + 4$
 $K(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x$

30 a $\int_1^4 (4x^2 - 6x + 5) dx =$ **c** $\int_0^9 (\sqrt{x} + 1) dx =$

$$\left[\frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x \right]_0^9 =$$

$$\left(85\frac{1}{3} - 48 + 20 \right) - \left(1\frac{1}{3} - 3 + 5 \right) = 54 \quad 18 + 9 = 27$$

b $\int_1^4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx =$ **d** $\int_{-4}^{-1} \frac{x^4 + 1}{x^4} dx = \int_{-4}^{-1} (1 + x^{-4}) dx =$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} \right]_1^4 = \left[x - \frac{1}{3}x^{-3} \right]_{-4}^{-1} =$$

$$\left(\frac{64}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 21\frac{3}{4} \quad \left(-1 + \frac{1}{3} \right) - \left(-4 + \frac{1}{192} \right) = 3\frac{21}{64}$$

31 a $f(x) = \frac{x^5 + 3x^3 + 6}{3x^3} = \frac{x^5}{3x^3} + \frac{3x^3}{3x^3} + \frac{6}{3x^3} = \frac{1}{3}x^2 + 1 + 2x^{-3}$

b $F(x) = \frac{1}{9}x^3 + x - 1 \cdot x^{-2} = \frac{1}{9}x^3 + x - \frac{1}{x^2}$

32 a Omdat $F_1'(x) = 3x^2$ en $F_2'(x) = 3x^2$ zijn F_1 en F_2 beide primitieven van $f(x) = 3x^2$.

b $F_2(4) - F_2(2) = (4^3 + 12) - (2^3 + 12) = 76 - 20 = 56$ en

$$F_1(4) - F_1(2) = 4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56$$

c $F_2(b) - F_2(a) = (b^3 + 12) - (a^3 + 12) = b^3 + 12 - a^3 - 12 = b^3 - a^3$

$$F_1(b) - F_1(a) = b^3 - a^3$$

$$\text{dus } F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) - F_1(a)$$

33 a $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - x + 3$

$$F(x) = \frac{2}{5}x^5 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

c $g(x) = -x^5 + \frac{1}{3x^3} - 1$

$$g(x) = -x^5 + \frac{1}{3}x^{-3} - 1$$

$$G(x) = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-2}x^{-2} - x + C$$

$$G(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6x^2} - x + C$$

b $k(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$$k(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$K(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$K(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{15}x^2\sqrt{x} + C$$

d $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2}$

$$h(x) = x - 3 + 5x^{-2}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \cdot -x^{-1} + C$$

$$H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{x} + C$$

34 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ dus $F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$

De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_1^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \right]_1^9 = (18 + 6) - \left(\frac{2}{3} + 2 \right) = 21\frac{1}{3}$$

35 a Een primitieve van $g(x) = x^3$ is $G(x) = \frac{1}{4}x^4$

b $F'(x) = c \cdot 4(3x - 4)^3 \cdot 3 = 12c(3x - 4)^3$

c $12c$ moet gelijk zijn aan 1, dus $c = \frac{1}{12}$

d $F(x) = \frac{1}{12}(3x - 4)^4$

e $F(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax + b)$

36 a $F(x) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}(5x + 1)^4 = \frac{1}{10}(5x + 1)^4$

b $G(x) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}x - 1 \right)^6 = \left(\frac{1}{3}x - 1 \right)^6$

c $h(x) = 2(1 - 6x)^{-3}$ dus $H(x) = 2 \cdot \frac{1}{-6} \cdot \frac{1}{-2}(1 - 6x)^{-2} = \frac{1}{6(1 - 6x)^2}$

d $k(x) = (3x + 5)^{\frac{1}{2}}$ dus $K(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (3x + 5)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(3x + 5)\sqrt{3x + 5}$

37 $f(x) = 4(2x + 1)^{-2}$ dus $F(x) = \frac{1}{2} \cdot -1 \cdot 4(2x + 1)^{-1} = \frac{-2}{2x + 1}$

De oppervlakte is gelijk aan $\int_2^p \frac{4}{(2x + 1)^2} dx = \left[\frac{-2}{2x + 1} \right]_2^p = \frac{-2}{2p + 1} - \frac{-2}{2 \cdot 2 + 1}$

De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{5}$ dus $\frac{-2}{2p + 1} + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

$$\frac{-2}{2p + 1} = -\frac{1}{5} \text{ dit geeft } -10 = -2p - 1 \text{ ofwel } 2p = 9 \text{ dus } p = 4\frac{1}{2}$$

12 Integreren

030 a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

b $F(x) = x^2 + 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} = x^2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} = x^2 + 2x\sqrt{x}$

c $F(4) = 4^2 + 2 \cdot 4\sqrt{4} = 32$ en $F(1) = 1^2 + 2 \cdot 1\sqrt{1} = 3$

d $\int_1^4 (2x + 3\sqrt{x}) dx = [x^2 + 2x\sqrt{x}]_1^4 = 32 - 3 = 29$

e $\int_0^4 (x^{\frac{1}{2}} + 3) dx =$
 $\left[\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} + 3x \right]_0^4 =$
 $\frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + 12 - 0 = 24\frac{4}{5}$

g $\int_1^4 (x^3 + x^{-3}) dx =$
 $\left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^4 =$
 $\left(64 - \frac{1}{32} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = 64\frac{7}{32}$

f $\int_{-1}^2 (3x^2 - x + 5) dx =$
 $\left[x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 5x \right]_{-1}^2 =$
 $(8 - 2 + 10) - (-1 - \frac{1}{2} - 5) = 22\frac{1}{2}$

h $\int_{-3}^{-1} (2x - x^{-2}) dx =$
 $\left[x^2 + x^{-1} \right]_{-3}^{-1} =$
 $(1 - 1) - \left(9 - \frac{1}{3} \right) = -8\frac{2}{3}$

036 a $g(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$ dus $G(x) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} = 2 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$

b $f(x) = g(4x + 1)$, dus $F(x) = \frac{1}{4} \cdot G(4x + 1)$

c $F(x) = \frac{1}{4} \cdot G(4x + 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x + 1)\sqrt{4x + 1} = \frac{1}{3} (4x + 1)\sqrt{4x + 1}$

U5 a $\int_2^8 (12ax - ax^2) dx = \left[6ax^2 - \frac{1}{3} ax^3 \right]_2^8 = \left(384a - \frac{512}{3} a \right) - \left(24a - \frac{8}{3} a \right) = 192a$
 De oppervlakte is 96, dus $192a = 96$. Dit geeft $a = \frac{1}{2}$

b $a = \frac{1}{2}$ invullen geeft
 $\int_p^{10} \left(6x - \frac{1}{2} x^2 \right) dx = \left[3x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right]_p^{10} = \left(300 - \frac{1000}{6} \right) - \left(3p^2 - \frac{1}{6} p^3 \right) = 96$
 $\frac{1}{6} p^3 - 3p^2 + 37\frac{1}{3} = 0$

Deze vergelijking is niet algebraïsch op te lossen, wel met de GR.

De oplossing is $p = 4$.

Je kunt de oplossing ook beredeneren:

De symmetrie-as van de grafiek is $x = 6$.

$x = 2$ en $x = 10$ liggen op gelijke afstand van de symmetrie-as, dus moeten

$x = p$ en $x = 8$ ook op gelijke afstand van de symmetrie-as liggen.

Daaruit volgt $p = 4$.

12.5 Oppervlakte en integraal

intro De grafiek is puntsymmetrisch in de oorsprong, dus $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a .

De Riemann-som is gelijk aan

$$1 \cdot \left(f\left(-3\frac{1}{2}\right) + f\left(-2\frac{1}{2}\right) + f\left(-1\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(3\frac{1}{2}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right) + f\left(1\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right) =$$

$$1 \cdot \left(-f\left(3\frac{1}{2}\right) - f\left(2\frac{1}{2}\right) - f\left(1\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(3\frac{1}{2}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right) + f\left(1\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = 0$$

38 a $\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_{-2}^2 = \left(1\frac{1}{3} - 4\right) - \left(-1\frac{1}{3} + 4\right) = -5\frac{1}{3}$

$\int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_{-2}^2 = \left(-1\frac{1}{3} + 4\right) - \left(1\frac{1}{3} - 4\right) = 5\frac{1}{3}$

b De oppervlakte van G_1 is $5\frac{1}{3}$

39 De oppervlakte van het linker gedeelte is

$\int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^4 = \left(16 - 10\frac{2}{3}\right) - 0 = 5\frac{1}{3}$

De oppervlakte van het rechter gedeelte is

$-\int_4^6 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = -\left[x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_4^6 = -\left((36 - 36) - \left(16 - 10\frac{2}{3}\right)\right) = 5\frac{1}{3}$

De oppervlakte van G is $5\frac{1}{3} + 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$

40 a $f(0) = \sqrt{8 \cdot 0} = \sqrt{0} = 0$ en $g(0) = \frac{1}{8} \cdot 0^2 = 0$

$f(8) = \sqrt{8 \cdot 8} = \sqrt{64} = 8$ en $g(8) = \frac{1}{8} \cdot 8^2 = 8$

De snijpunten zijn dus $(0, 0)$ en $(8, 8)$.

b $\int_0^8 \sqrt{8x} dx = \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8x\sqrt{8x}\right]_0^8 = 42\frac{2}{3}$

c $\int_0^8 \frac{1}{8}x^2 dx = \left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^8 = 21\frac{1}{3}$

d De oppervlakte van G is $42\frac{2}{3} - 21\frac{1}{3} = 21\frac{1}{3}$

e Elk verticaal verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g heeft als lengte $f(p) - g(p)$, dus oppervlakte $G = \int_0^8 (f(x) - g(x)) dx$.

41 a $f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 = 0$ en $g(-2) = -2 + 2 = 0$, dus $(-2, 0)$ is een snijpunt.

$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 = 6$ en $g(4) = 4 + 2 = 6$, dus ook $(4, 6)$ is een snijpunt.

b $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ en $q(x) = x + 5$

c $\int_{-2}^4 (q(x) - p(x)) dx = \int_{-2}^4 \left(x + 5 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right) dx = \int_{-2}^4 \left(x + 4 - \frac{1}{2}x^2\right) dx =$

$\left[\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{1}{6}x^3\right]_{-2}^4 = \left(8 + 16 - 10\frac{2}{3}\right) - \left(2 - 8 + \frac{4}{3}\right) = 18$

d $g(x) - f(x) = x + 2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) = x + 2 - \frac{1}{2}x^2 + 2 = x + 4 - \frac{1}{2}x^2$

$q(x) - p(x) = x + 5 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) = x + 5 - \frac{1}{2}x^2 - 1 = x + 4 - \frac{1}{2}x^2$

Dus $g(x) - f(x) = q(x) - p(x)$

e Dit volgt uit het antwoord op opdracht d.

42 De oppervlakte van dit gebied wordt berekend met $\int_0^2 (f(x) - g(x)) dx =$

$\int_0^2 (x^3 - 8x^2 + 15x - 3x) dx = \int_0^2 (x^3 - 8x^2 + 12x) dx =$

$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^2 = 4 - 21\frac{1}{3} + 24 = 6\frac{2}{3}$

12 Integreeren

- 43** Tussen $x = -1$ en $x = 3$ ligt de grafiek van f boven de grafiek van g .

De oppervlakte is gelijk aan $\int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx =$

$$\int_{-1}^3 (\sqrt{7-2x} - (3 - \sqrt{x+1})) dx = \int_{-1}^3 (\sqrt{7-2x} - 3 + \sqrt{x+1}) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1\frac{1}{2}} (7-2x)^{1\frac{1}{2}} - 3x + \frac{1}{1\frac{1}{2}} (x+1)^{1\frac{1}{2}} \right]_{-1}^3 = \left[-\frac{1}{3} (7-2x)\sqrt{7-2x} - 3x + \frac{2}{3} (x+1)\sqrt{x+1} \right]_{-1}^3 =$$

$$\left(-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - 3 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} \right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - 3 \cdot -1 + \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot \sqrt{0} \right) =$$

$$\left(-\frac{1}{3} - 9 + 5\frac{1}{3} \right) - (-9 + 3 + 0) = 2$$

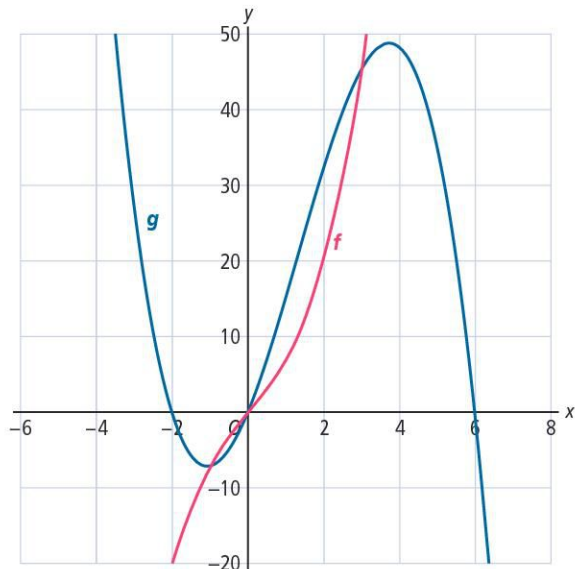
- 44 a** Los op $x^3 + 6x = -x^3 + 4x^2 + 12x$

$$2x^3 - 4x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$2x(x+1)(x-3) = 0$$

De grafieken snijden elkaar bij $x = 0$, $x = -1$ en $x = 3$.



$$\text{Linker gebied: } \int_{-1}^0 (x^3 + 6x - (-x^3 + 4x^2 + 12x)) dx = \int_{-1}^0 (2x^3 - 4x^2 - 6x) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 - 3x^2 \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 3 \right) = 1\frac{1}{6}$$

$$\text{Rechter gebied: } \int_0^3 (-x^3 + 4x^2 + 12x - (x^3 + 6x)) dx = \int_0^3 (-2x^3 + 4x^2 + 6x) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2} x^4 + \frac{4}{3} x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = -40\frac{1}{2} + 36 + 27 = 22\frac{1}{2}$$

b klopt.

- 45 a** $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ en $\cos\left(2 \cdot \frac{1}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} \text{ en } \cos\left(2 \cdot \frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(1\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1 \text{ en } \cos\left(2 \cdot 1\frac{1}{2}\pi\right) = \cos(3\pi) = -1$$

$$\text{b oppervlakte } G_1 = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (\sin(x) - \cos(2x)) dx \approx 2,6$$

$$\text{oppervlakte } G_2 = \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (\cos(2x) - \sin(x)) dx \approx 1,3$$

039 a $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$
 $x^2 - 8x + 12 = 0$
 $(x - 2)(x - 6) = 0$
 $x = 2$ of $x = 6$

b oppervlakte $G_1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3\right) dx$ en oppervlakte $G_2 = -\int_2^6 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3\right) dx$

c $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right]_0^2 = \frac{2}{3} - 4 + 6 = 2\frac{2}{3}$

$\int_2^6 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right]_2^6 = (18 - 36 + 18) - \left(\frac{2}{3} - 4 + 6\right) = -2\frac{2}{3}$

De totale oppervlakte is $2\frac{2}{3} + -2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$

044 a $x^3 - 6x = -x^3 - 4x^2 + 10x$
 $2x^3 + 4x^2 - 16x = 0$
 $2x(x^2 + 2x - 8) = 0$
 $2x(x + 4)(x - 2) = 0$
 $x = 0$ of $x = -4$ of $x = 2$

De snijpunten zijn $(0, 0)$, $(-4, -40)$ en $(2, -4)$.

b Op het interval $\langle -4, 0 \rangle$ (en ook rechts van $x = 2$).

c Elk verticaal verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g heeft als lengte

$f(p) - g(p)$, dus oppervlakte $= \int_{-4}^0 (f(x) - g(x)) dx$

d $f(x) - g(x) = x^3 - 6x - (-x^3 - 4x^2 + 10x) = 2x^3 + 4x^2 - 16x$

e oppervlakte $= \int_{-4}^0 (2x^3 + 4x^2 - 16x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 8x^2\right]_{-4}^0 =$

$0 - \left(128 - 85\frac{1}{3} - 128\right) = 85\frac{1}{3}$

f oppervlakte $= \int_0^2 (-2x^3 - 4x^2 + 16x) dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 8x^2\right]_0^2 =$

$-8 - 10\frac{2}{3} + 32 = 13\frac{1}{3}$

g klopt.

U6 a $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

b $\int_0^1 (\sqrt[n]{x} - x^n) dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{n}} - x^n) dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 =$

$\frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{1+n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$

12.6 Gemengde opdrachten

46 a Als $p = 10$ dan is de oppervlakte $\int_1^{10} x^{-2} dx = \left[-x^{-1}\right]_1^{10} = -\frac{1}{10} - -1 = \frac{9}{10}$

b Als $p = 100$ dan is de oppervlakte $\int_1^{100} x^{-2} dx = \left[-x^{-1}\right]_1^{100} = -\frac{1}{100} - -1 = \frac{99}{100}$

c Als p onbegrensd toeneemt nadert de oppervlakte van G naar 1.

12 Integreren

- 47 a** $\sqrt{-12x} = 2\sqrt{6-x}$
 $-12x = 4(6-x)$
 $-12x = 24 - 4x$
 $-8x = 24$ dus $x = -3$; het snijpunt is $(-3, 6)$.
- b** De grafiek van g snijdt de x -as als $6-x = 0$, dus als $x = 6$.
 De grafiek van f snijdt de x -as als $-12x = 0$, dus als $x = 0$.
 De oppervlakte van G is gelijk aan $\int_{-3}^6 2\sqrt{6-x} dx - \int_{-3}^0 \sqrt{-12x} dx$
- c** $\int_{-3}^6 2\sqrt{6-x} dx = \left[2 \cdot \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} (6-x)^{\frac{1}{2}} \right]_{-3}^6 = 0 - \left(-\frac{4}{3} \cdot 27 \right) = 36$
 $\int_{-3}^0 \sqrt{-12x} dx = \left[\frac{1}{-12} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} (-12x)^{\frac{1}{2}} \right]_{-3}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{18} \cdot 216 \right) = 12$
 De oppervlakte van G is $36 - 12 = 24$

- 48 a** $(3-x)(2x^2+7x+13) = 39-x^2$
 $6x^2 - 2x^3 + 21x - 7x^2 + 39 - 13x = 39 - x^2$
 $-2x^3 + 8x = 0$
 $-2x(x^2 - 4) = 0$
 $x = 0$ of $x = -2$ of $x = 2$
 De snijpunten zijn $(0, 39)$, $(-2, 35)$ en $(2, 35)$.
- b** De oppervlakte van het linker gebied is:
 $\int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^0 (2x^3 - 8x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 \right]_{-2}^0 = 0 - (8 - 16) = 8$
 De oppervlakte van het rechter gebied is:
 $\int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 (-2x^3 + 8x) dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 \right]_0^2 = 0 - (8 - 16) = 8$
 De oppervlaktes zijn even groot.

- 49 a** $4x^2(2x+3)^2 = 4x^2(4x^2+12x+9) = 16x^4+48x^3+36x^2$
- b** $\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3)^2}{4x^2(2x+3)^2} - \frac{4x^2}{4x^2(2x+3)^2} =$
 $\frac{(2x+3)^2 - 4x^2}{16x^4+48x^3+36x^2} = \frac{4x^2+12x+9-4x^2}{16x^4+48x^3+36x^2} = \frac{12x+9}{16x^4+48x^3+36x^2}$
- c** $\int_1^2 \frac{12x+9}{16x^4+48x^3+36x^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{(2x+3)^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{4}x^{-2} - (2x+3)^{-2} \right) dx =$
 $\left[-\frac{1}{4}x^{-1} + \frac{1}{2}(2x+3)^{-1} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{14} \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{10} \right) = \frac{27}{280}$

Onderzoeksopdrachten

- 50 a** De oppervlakte van rechthoek $OAPB$ is $a \cdot b = a \cdot f_2(a) = a \cdot a^2 = a^3$
 De oppervlakte onder de grafiek van f_2 is $\int_0^a x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{1}{3}a^3$
 De verhouding van de oppervlaktes van de twee gebieden is $\frac{1}{3}a^3 : \frac{2}{3}a^3 = 1:2$
- b** De oppervlakte van rechthoek $OAPB$ is dan $a \cdot b = a \cdot f_3(a) = a \cdot a^3 = a^4$
 De oppervlakte onder de grafiek van f_3 is $\int_0^a x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^a = \frac{1}{4}a^4$
 De verhouding van de oppervlaktes van de twee gebieden is $\frac{1}{4}a^4 : \frac{3}{4}a^4 = 1:3$

- c De verhouding is $1:n$

De oppervlakte van rechthoek $OAPB$ is $a \cdot b = a \cdot f_n(a) = a \cdot a^n = a^{n+1}$

De oppervlakte onder de grafiek van f_n is $\int_0^a x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^a = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$

De oppervlakte van het deel van de rechthoek boven de grafiek van f_n is

$$a^{n+1} - \frac{1}{n+1} a^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) a^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) a^{n+1} = \frac{n}{n+1} a^{n+1}$$

De verhouding van de oppervlaktes van de twee gebieden is

$$\frac{1}{n+1} a^{n+1} : \frac{n}{n+1} a^{n+1} = 1:n$$

- d Als $n = 1$ dan is de grafiek van f een rechte lijn en wordt de rechthoek door een diagonaal in twee gelijke delen verdeeld, dus de verhouding is in dit geval $1:1$. De regel geldt ook voor $n = 1$.

- 51** Breng in elk van de figuren een assenstelsel aan met de oorsprong in het midden van de linker zijde van de rechthoek.

Neem aan dat $x = a$ de verticale lijn is en a de gevraagde afstand.

Figuur A: De verticale lijn ligt in het midden, bij $x = 2$, dus $a = 2$.

Figuur B: De boven- en onderzijde van het gekleurde gebied horen bij de functies $f(x) = x$ en $g(x) = -x$. De oppervlakte van dit gebied is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$.

$$\int_0^a (x - (-x)) dx = \int_0^a 2x dx = \left[x^2 \right]_0^a = a^2. \text{ Dit moet gelijk zijn aan } 8, \text{ dus } a = \sqrt{8}.$$

Figuur C: De boven- en onderzijde van het gekleurde gebied horen bij de functies $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g(x) = -2\sqrt{x}$.

$$\int_0^4 (2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x})) dx = \int_0^4 4\sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^4 = 21\frac{1}{3}$$

$$\int_0^a 4\sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^a = \frac{2}{3} a\sqrt{a} \text{ en dit moet gelijk zijn aan } \frac{1}{2} \cdot 21\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} a\sqrt{a} = 10\frac{2}{3} \text{ geeft } a^{\frac{3}{2}} = 16, \text{ dus } a = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16}$$

Figuur D: De boven- en onderzijde van het gekleurde gebied horen bij de functies $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$ en $g(x) = -\sqrt{8x - x^2}$.

De oppervlakte van het gekleurde gebied is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi$.

$$\int_0^a 2\sqrt{8x - x^2} dx \text{ moet gelijk zijn aan } 4\pi.$$

Dit is niet exact op te lossen. Door inklemmen vind je $a \approx 2,4$.

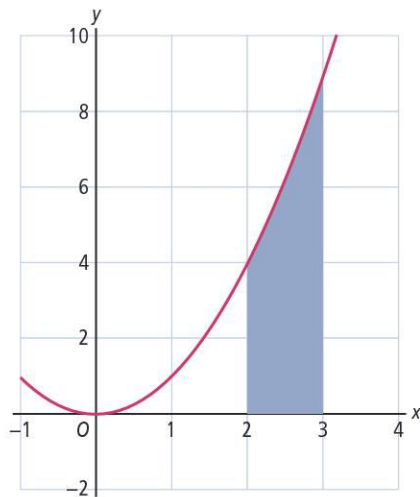
Samenvatting

S1 a $\int_0^3 2^x dx$
b 10,099

S2 De Riemann-som is $2(f(1) + f(3) + f(5) + f(7)) \approx 22,14$

12 Integreren

S3 a



$$\text{b } \int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_2^3 = 9 - 2\frac{2}{3} = 6\frac{1}{3}$$

S4 a $f(x) = x^2\sqrt{x}$ is te schrijven als $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ De primitieven zijn $F(x) = \frac{1}{3\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}+1} + C$ ofwel $F(x) = \frac{2}{7} x^3\sqrt{x} + C$ b $f(x) = \frac{1}{x^6}$ is te schrijven als $f(x) = x^{-6}$ De primitieven zijn $F(x) = \frac{1}{-5} x^{-5} + C$ ofwel $F(x) = -\frac{1}{5x^5} + C$

$$\begin{aligned} \text{S5 a } \int_1^4 (3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}) dx &= \\ \left[2x^{\frac{1}{2}+1} + 6x^{\frac{1}{2}-1} \right]_1^4 &= \\ (16 + 12) - (2 + 6) &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } \int_1^4 (4x^{-2} + x^{-3}) dx &= \\ \left[-4x^{-1} - \frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^4 &= \\ \left(-1 - \frac{1}{32} \right) - \left(-4 - \frac{1}{2} \right) &= 3\frac{15}{32} \end{aligned}$$

S6 a $f(x) = 2(5 - 2x)^4$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (5 - 2x)^5$$

$$F(x) = -\frac{1}{5} (5 - 2x)^5$$

b $g(x) = -2\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^{-2}$

$$G(x) = -2 \cdot \frac{1}{1} \cdot -1 \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^{-1}$$

$$G(x) = \frac{4}{\frac{1}{2}x - 3}$$

S7 Los op $x - 2\sqrt{x} = 0$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$$

 $x = 0$ of $x = 4$, dus tussen 0 en 4 ligt de grafiek van f onder de x -as.

De oppervlakte is gelijk aan

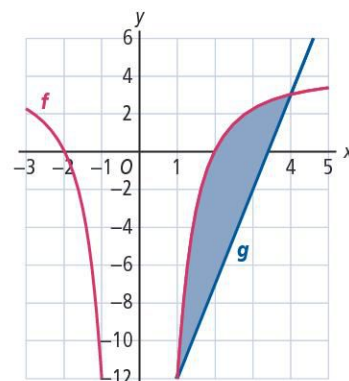
$$-\int_0^4 (x - 2x^{\frac{1}{2}}) dx = -\left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{1\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = -\left(8 - \frac{4}{3} \cdot 8 - 0 \right) = 2\frac{2}{3}$$

S8 De snijpunten van de twee grafieken zijn $(1, -12)$ en $(4, 3)$.

De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_1^4 (4 - 16x^{-2} - (5x - 17)) dx = \int_1^4 (21 - 16x^{-2} - 5x) dx =$$

$$\left[21x + 16x^{-1} - 2\frac{1}{2} x^2 \right]_1^4 = (84 + 4 - 40) - \left(21 + 16 - 2\frac{1}{2} \right) = 13\frac{1}{2}$$



Test jezelf

T1 a De oppervlakte van G berekend met een Riemann-som is gelijk aan
 $2 \cdot (f(1) + f(3) + f(5)) = 2(3 + 5 + \sqrt{57}) \approx 31,10$

b $\int_0^6 \sqrt{2x^2 + 7} \, dx$

c $\int_0^6 \sqrt{2x^2 + 7} \, dx \approx 31,32$

T2 a $f(x) = 3x^2 + 8x - 4$
 $F(x) = \frac{1}{2}x^6 + 4x^2 - 4x$

d $f(x) = \frac{3}{4x^4} - \frac{6}{5x^2}$
 $f(x) = \frac{3}{4}x^{-4} - \frac{6}{5}x^{-2}$
 $F(x) = -\frac{1}{4}x^{-3} + \frac{6}{5}x^{-1}$
 $F(x) = -\frac{1}{4x^3} + \frac{6}{5x}$

b $f(x) = 9\sqrt{3x+5} - \frac{8}{\sqrt{4x+3}}$
 $f(x) = 9(3x+5)^{\frac{1}{2}} - 8(4x+3)^{-\frac{1}{2}}$
 $F(x) = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}(3x+5)^{\frac{1}{2}} - 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}(4x+3)^{\frac{1}{2}}$
 $F(x) = 2(3x+5)\sqrt{3x+5} - 4\sqrt{4x+3}$

e $f(x) = \frac{x^2+6}{x^2}$
 $f(x) = 1 + 6x^{-2}$
 $F(x) = x - 6x^{-1}$
 $F(x) = x - \frac{6}{x}$

c $f(x) = 6x\sqrt[5]{x^2} - 4x$
 $f(x) = 6x^{\frac{7}{5}} - 4x$
 $F(x) = 6 \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}}x^{\frac{7}{5}} - 2x^2$
 $F(x) = 2\frac{1}{2}x^2\sqrt[5]{x^2} - 2x^2$

f $f(x) = \frac{28}{(7x-3)^3}$
 $f(x) = 28(7x-3)^{-3}$
 $F(x) = 28 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{-2}(7x-3)^{-2}$
 $F(x) = -\frac{2}{(7x-3)^2}$

T3 Voor de snijpunten met de x -as geldt $x\sqrt{x} - 3x = 0$
 $x(\sqrt{x} - 3) = 0$
 $x = 0$ of $x = 9$

De oppervlakte van het vlakdeel is gelijk aan

$$-\int_0^9 (x\sqrt{x} - 3x) \, dx = -\left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^9 = -(97\frac{2}{5} - 121\frac{1}{2} - 0) = 24\frac{3}{10}$$

T4 a $f(1) = \frac{6}{1+\sqrt{1}} = \frac{6}{2} = 3$ en $g(1) = 1 + {}^2\log(5-1) = 1 + {}^2\log(4) = 1 + 2 = 3$

$f(4) = \frac{6}{4+\sqrt{4}} = \frac{6}{6} = 1$ en $g(4) = 1 + {}^2\log(5-4) = 1 + {}^2\log(1) = 1 + 0 = 1$

Dus de grafieken snijden elkaar bij $x = 1$ en $x = 4$.

b Tussen $x = 1$ en $x = 4$ ligt de grafiek van g boven de grafiek van f .

De oppervlakte van het ingesloten gebied is gelijk aan $\int_1^4 (g(x) - f(x)) \, dx$
 ofwel $\int_1^4 \left(1 + {}^2\log(5-x) - \frac{6}{x+\sqrt{x}}\right) \, dx \approx 1,81$

12 Integreren

T5 De oppervlakte van het ingesloten gebied is gelijk aan

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^2 + 2 - (4\sqrt{x} - 4) \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^2 + 6 - 4\sqrt{x} \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{24}x^3 + 6x - \frac{8}{3}x\sqrt{x} \right]_0^4 = 2\frac{2}{3} + 24 - 21\frac{1}{3} - 0 = 5\frac{1}{3}$$

T6 a $\frac{2}{(3-\frac{1}{2}x)^2} = \frac{1}{2}$ geeft $(3-\frac{1}{2}x)^2 = 4$

$$3-\frac{1}{2}x = 2 \text{ of } 3-\frac{1}{2}x = -2$$

$$\frac{1}{2}x = 1 \text{ of } \frac{1}{2}x = 5$$

$$x = 2 \text{ of } x = 10$$

De snijpunten van f met de lijn l zijn $(2, \frac{1}{2})$ en $(10, \frac{1}{2})$.

$$\frac{2}{(3-\frac{1}{2}x)^2} = 8 \text{ geeft } 8 \cdot (3-\frac{1}{2}x)^2 = 2 \text{ ofwel } (3-\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{4}$$

$$3-\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \text{ of } 3-\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2} \text{ of } \frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$$

$$x = 5 \text{ of } x = 7$$

De snijpunten van f met de lijn m zijn $(5, 8)$ en $(7, 8)$.

b De primitieve van $f(x) = 2 \cdot (3-\frac{1}{2}x)^{-2}$ is

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot -1 \left(3-\frac{1}{2}x \right)^{-1} = 4 \left(3-\frac{1}{2}x \right)^{-1}$$

De oppervlakte bestaat uit drie delen:

$$\int_2^5 \left(\frac{2}{(3-\frac{1}{2}x)^2} - \frac{1}{2} \right) dx + 2 \cdot 7\frac{1}{2} + \int_7^{10} \left(\frac{2}{(3-\frac{1}{2}x)^2} - \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$\left[4 \left(3-\frac{1}{2}x \right)^{-1} - \frac{1}{2}x \right]_2^5 + 15 + \left[4 \left(3-\frac{1}{2}x \right)^{-1} - \frac{1}{2}x \right]_7^{10} =$$

$$\left((8 - 2\frac{1}{2}) - (2 - 1) \right) + 15 + \left((-2 - 5) - (-8 - 3\frac{1}{2}) \right) =$$

$$4\frac{1}{2} + 15 + 4\frac{1}{2} = 24$$

T7 a Uit $\frac{8x-6}{x^3} = \frac{2}{x^2}$ volgt $2x^3 = x^2(8x-6)$

$$x^2(8x-6) - 2x^3 = 0$$

$$x^2(8x-6-2x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 6x-6 = 0$$

$x = 0$ (voldoet niet) of $x = 1$; het snijpunt is $(1, 2)$

b $\int_1^4 \left(\frac{8x-6}{x^3} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int_1^4 \left(\frac{8}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int_1^4 (6x^{-2} - 6x^{-3}) dx =$

$$\left[-6x^{-1} + 3x^{-2} \right]_1^4 = \left(-1\frac{1}{2} + \frac{3}{16} \right) - (-6 + 3) = 1\frac{11}{16}$$

- c Als de twee delen gelijke oppervlakte hebben, dan moet gelden:

$$\int_1^p \left(\frac{8x-6}{x^3} \right) dx = 2 \cdot \int_1^p \left(\frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$\int_1^p \left(\frac{8x-6}{x^3} \right) dx = \int_1^p (8x^{-2} - 6x^{-3}) dx = [-8x^{-1} + 3x^{-2}]_1^p = -\frac{8}{p} + \frac{3}{p^2} + 5$$

$$2 \cdot \int_1^p \left(\frac{2}{x^2} \right) dx = 2 \cdot \int_1^p (2x^{-2}) dx = 2 \cdot [-2x^{-1}]_1^p = 2 \cdot \left(\frac{-2}{p} - \frac{-2}{1} \right) = -\frac{4}{p} + 4$$

$$-\frac{8}{p} + \frac{3}{p^2} + 5 = -\frac{4}{p} + 4$$

$$-8p + 3 + 5p^2 = -4p + 4p^2$$

$$p^2 - 4p + 3 = 0$$

$$(p-1)(p-3) = 0$$

$$p = 1 \text{ (voldoet niet) of } p = 3$$

Extra oefening

- E1 a De Riemann-som is

$$1 \cdot \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(1\frac{1}{2}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right) + f\left(3\frac{1}{2}\right) \right) = 3\frac{15}{16} + 3\frac{7}{16} + 2\frac{7}{16} + \frac{15}{16} = 10\frac{3}{4}$$

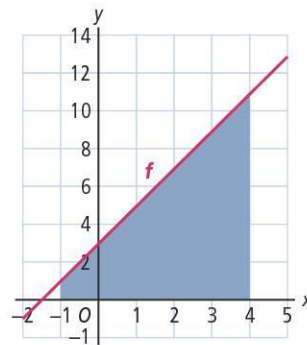
- b De oppervlakte is gelijk aan $\int_0^4 \left(4 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \left[4x - \frac{1}{12}x^3 \right]_0^4 = 16 - 5\frac{1}{3} - 0 = 10\frac{2}{3}$

- E2 a $\int_{-1}^4 (2x+3) dx$

- b $f(-1) = 2 \cdot -1 + 3 = 1$ en $f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

De oppervlakte van G is gelijk aan $5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 30$

- c $\int_{-1}^4 (2x+3) dx = [x^2 + 3x]_{-1}^4 = (16 + 12) - (1 - 3) = 30$



- E3 oppervlakte $H = \int_1^4 (8x - 2x^2) dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_1^4 = \left(64 - 42\frac{2}{3} \right) - \left(4 - \frac{2}{3} \right) = 18$

- E4 a $f(x) = x^{19}$

$$F(x) = \frac{1}{20}x^{20}$$

c $f(x) = \frac{1}{x^{19}} = x^{-19}$

$$F(x) = \frac{1}{-18}x^{-18}$$

$$F(x) = \frac{-1}{18x^{18}}$$

- b $f(x) = x^{3\sqrt[3]{x^2}} = x^{3\frac{2}{3}} = x^2$

$$F(x) = \frac{1}{4\frac{2}{3}}x^{4\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{3}{14}x^{4\sqrt[3]{x^2}}$$

d $f(x) = \frac{1}{x^{3\sqrt[3]{x^2}}} = x^{-3\frac{2}{3}} = x^{-2}$

$$F(x) = \frac{1}{-2\frac{2}{3}}x^{-2\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{-3}{8x^{2\sqrt[3]{x^2}}}$$

12 Integreren

E5 a $f(x) = (x+1)(x-5)$

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$$

c $f(x) = \frac{x^2 - 13x - 30}{x^4}$

$$f(x) = x^{-2} - 13x^{-3} - 30x^{-4}$$

$$F(x) = -x^{-1} + 6\frac{1}{2}x^{-2} + 10x^{-3}$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{13}{2x^2} + \frac{10}{x^3}$$

b $f(x) = 6x(x + \sqrt{x})$

$$f(x) = 6x^2 + 6x^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = 2x^3 + \frac{6}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = 2x^3 + 2\frac{2}{3}x^2\sqrt{x}$$

d $f(x) = \frac{x^2 - 13x + 30}{\sqrt{x}}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 13x^{\frac{1}{2}} + 30x^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{13}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{30}{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^2\sqrt{x} - 8\frac{2}{3}x^2\sqrt{x} + 60\sqrt{x}$$

E6 a $f(x) = (3x+2)^4$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} (3x+2)^5$$

$$F(x) = \frac{1}{15} (3x+2)^5$$

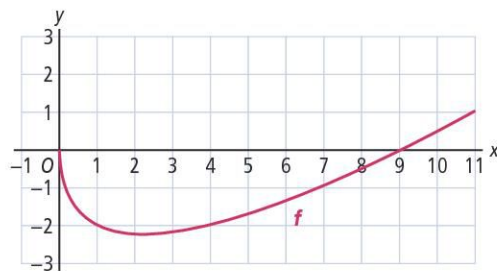
b $f(x) = \frac{2}{(5x-3)^3}$

$$f(x) = 2(5x-3)^{-3}$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{-2} (5x-3)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{-1}{5(5x-3)^2}$$

E7 a



b $x - 3\sqrt{x} = 0$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 9$$

c De oppervlakte is gelijk aan $-\int_0^9 (x - 3\sqrt{x}) dx = -\left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\sqrt{x}\right]_0^9 = -\left(40\frac{1}{2} - 54 - 0\right) = 13\frac{1}{2}$

E8 a $\frac{1}{2}(5x - x^2)\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$

$$\left(2\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = 0 \text{ of } 2\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 2$$

$$\sqrt{x} = 0 \text{ of } -\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } (x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 1 \text{ of } x = 4$$

De coördinaten van de snijpunten zijn (0, 0), (1, 2) en (4, 4).

- b** De oppervlakte van het linker ingesloten gebied is

$$\int_0^1 \left(2\sqrt{x} - 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} \right) dx =$$

$$\left[\frac{4}{3}x\sqrt{x} - x^2\sqrt{x} + \frac{1}{7}x^3\sqrt{x} \right]_0^1 =$$

$$\frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{7} - 0 = \frac{10}{21}$$

De oppervlakte van het rechter ingesloten gebied is

$$\int_1^4 \left(2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \right) dx =$$

$$\left[x^2\sqrt{x} - \frac{1}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} \right]_1^4 =$$

$$\left(32 - \frac{128}{7} - \frac{32}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{4}{3} \right) = 3\frac{11}{21}$$

- E9 a** De oppervlakte van G kun je berekenen met $\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx$

b $\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx \approx 2,42$

E10 $\int_4^p \sqrt{x-4} dx = 2\sqrt{3}$

$$\int_4^p (x-4)^{\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{3}$$

$$\left[\frac{2}{3} (x-4)^{\frac{3}{2}} \right]_4^p = 2\sqrt{3}$$

$$\left[\frac{2}{3} (x-4)\sqrt{x-4} \right]_4^p = 2\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{2}{3} (p-4)\sqrt{p-4} \right) - \left(\frac{2}{3} (4-4)\sqrt{4-4} \right) = 2\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{2}{3} (p-4)\sqrt{p-4} \right) = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{3} (p-4)^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$(p-4)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

$$(p-4)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$p-4 = 3$$

$$p = 7$$

11 Exponentiële en logaritmische functies

Voorkennis

- V1 a** Bij een exponentiële functie staat de x in de exponent.
Dat is hier het geval bij de functies f , g en j .
- b** Een exponentiële functie met begintgetal groter dan 0 is stijgend als de groeifactor groter is dan 1. Dat is hier het geval bij de functies g en j .
- c** Het snijpunt met de y -as vind je door de functiewaarde voor $x = 0$ te berekenen.
 $f(0) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 4 \cdot 1 = 4$, dus snijpunt met de y -as is $(0, 4)$.
 $g(0) = 2 \cdot 1,7^0 = 2 \cdot 1 = 2$, dus snijpunt met de y -as is $(0, 2)$.
 $h(0) = 5 \cdot 0^{1,7} = 5 \cdot 0 = 0$, dus snijpunt met de y -as is $(0, 0)$.
 $i(0) = 17 \cdot 0^{\frac{1}{2}} = 17 \cdot 0 = 0$, dus snijpunt met de y -as is $(0, 0)$.
 $j(0) = 7 \cdot 1,0001^0 = 7 \cdot 1 = 7$, dus snijpunt met de y -as is $(0, 7)$.

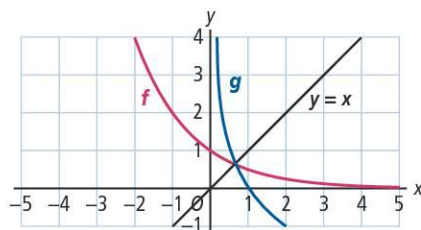
- V2 a** $5^x = 10$
 $x = {}^5\log(10)$
- b** $8^x = 3$
 $x = {}^8\log(3)$
- c** $3^{5x} = 9$
 $5x = {}^3\log(9)$
 $5x = 2$
 $x = \frac{2}{5}$
- d** $4^{2x} = 7$
 $2x = {}^4\log(7)$
 $x = \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(7)$

- V3 a** $x = {}^4\log(7)$
 $4^x = 7$
- b** $x = 2 \cdot {}^5\log(6)$
 $\frac{1}{2}x = {}^5\log(6)$
 $5^{\frac{1}{2}x} = 6$ (of $5^x = 36$)
- c** $x = 1\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(2)$
 $\frac{2}{3}x = {}^3\log(2)$
 $3^{\frac{2}{3}x} = 2$
- d** $x = 1 + {}^2\log(12)$
 $x - 1 = {}^2\log(12)$
 $2^{x-1} = 12$

- V4 a** $f(x) = -12 + {}^3\log(4x - 8)$
 Voor het domein moet gelden $4x - 8 > 0$, dus $x > 2$.
 En voor de asymptoot geldt $4x - 8 = 0$, dus dat is de lijn $x = 2$.
- b** $g(x) = 4 \cdot {}^2\log(15 - 3x)$
 Voor het domein moet gelden $15 - 3x > 0$, dus $-3x > -15$ ofwel $x < 5$.
 En voor de asymptoot geldt $15 - 3x = 0$, dus dat is de lijn $x = 5$.

- V5 a** De beeldgrafiek hoort bij de functie $g(x) = 5^x$.
b Voor de waarde van g geldt dan $0 < g < 1$.

- V6 a**



- b** Door in het assenstelsel van opgave a ook de lijn $y = x$ te tekenen, is te zien dat het snijpunt van de grafieken precies op deze lijn ligt.

11 Exponentiële en logaritmische functies

$$\text{V7 a } {}^3\log(25) = \frac{\log(25)}{\log(3)}$$

$$\text{b } {}^{\frac{1}{2}}\log(15) = \frac{{}^6\log(15)}{{}^6\log(\frac{1}{2})}$$

$$\text{V8 a } {}^8\log(17) = \frac{{}^2\log(17)}{{}^2\log(8)} = \frac{{}^2\log(17)}{3} = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(17)$$

$$\text{b } {}^{\sqrt{2}}\log(20) = \frac{{}^2\log(20)}{{}^2\log(\sqrt{2})} = \frac{{}^2\log(20)}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot {}^2\log(20)$$

$$\text{V9 a } N(t) = 2^{3+t}$$

$$N(t) = 2^3 \cdot 2^t$$

$$N(t) = 8 \cdot 2^t$$

$$\text{c } N(t) = 3^{-2+3t}$$

$$N(t) = 3^{-2} \cdot 3^{3t}$$

$$N(t) = \frac{1}{9} \cdot (3^3)^t$$

$$N(t) = \frac{1}{9} \cdot 27^t$$

$$\text{b } N(t) = 15 \cdot 2^{t+4}$$

$$N(t) = 15 \cdot 2^t \cdot 2^4$$

$$N(t) = 15 \cdot 2^t \cdot 16$$

$$N(t) = 240 \cdot 2^t$$

$$\text{d } N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$$

$$N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-t}$$

$$N(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}^{-1}\right)^t$$

$$N(t) = \frac{1}{2} \cdot 2^t$$

11.1 Vergelijkingen met exponenten en logaritmen

intro Een toename van 4% per jaar betekent een groeifactor van 1,04.

Je moet dan de vergelijking $1,04^t = 2$, met t in jaren oplossen.

Met je rekenmachine vind je dan $t \approx 18$.

Dus de waarde verdubbelt in ongeveer 18 jaar.

$$\text{1 a } 2^{5-x} = 8$$

$$2^{5-x} = 2^3$$

$$5 - x = 3$$

$$x = 2$$

$$\text{b } 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+5} = \sqrt[4]{27}$$

$$3^1 \cdot (3^{-2})^{2x+5} = (3^3)^{\frac{1}{4}}$$

$$3^1 \cdot 3^{-4x-10} = 3^{\frac{3}{4}}$$

$$3^{-4x-9} = 3^{\frac{3}{4}}$$

$$-4x - 9 = \frac{3}{4}$$

$$-4x = 9\frac{3}{4}$$

$$x = -2\frac{7}{16}$$

$$\text{c } 3^{1+x} = 6$$

$$1 + x = {}^3\log(6)$$

$$x = -1 + {}^3\log(6)$$

$$\text{d } 5^{\frac{1}{2}x} = 2$$

$$\frac{1}{2}x = {}^5\log(2)$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot {}^5\log(2)$$

- 2 a** $7^{1-2x} = 21$
 $1 - 2x = {}^7\log(21)$
 $-2x = -1 + {}^7\log(21)$
 $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot {}^7\log(21)$
- b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(1 - 2x) = 3$
 $1 - 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
 $1 - 2x = \frac{1}{8}$
 $2x = \frac{7}{8}$
 $x = \frac{7}{16}$
- 3 a** ${}^3\log(x) = p$ substitueren in ${}^3\log^2(x) - 5 \cdot {}^3\log(x) = 6$ geeft
 $p^2 - 5p = 6$
 $p^2 - 5p - 6 = 0$
 $(p + 1)(p - 6) = 0$
 $p = -1$ of $p = 6$
- b** $p = {}^3\log(x)$ dus
 ${}^3\log(x) = -1$ of ${}^3\log(x) = 6$
 $x = 3^{-1}$ of $x = 3^6$
 $x = \frac{1}{3}$ of $x = 729$
- 4 a** $3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 6 = 0$
 $(3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 6 = 0$
 stel $3^x = p$
 $p^2 - 7p + 6 = 0$
 $(p - 1)(p - 6) = 0$
 $p = 1$ of $p = 6$
 $3^x = 1$ of $3^x = 6$
 $x = 0$ of $x = {}^3\log(6)$
- b** $3^x - 6 \cdot 3^{-x} = 5$
 $(3^x)^2 - 6 = 5 \cdot 3^x$
 stel $3^x = p$
 $p^2 - 5p - 6 = 0$
 $(p + 1)(p - 6) = 0$
 $p = -1$ of $p = 6$
 $3^x = -1$ of $3^x = 6$
 $3^x = -1$ heeft geen oplossing
 $3^x = 6$ geeft $x = {}^3\log(6)$
- c** $6^{2x} - 4 \cdot 6^x = 0$
 stel $6^x = p$
 $p^2 - 4p = 0$
 $p(p - 4) = 0$
 $p = 0$ of $p = 4$
 $6^x = 0$ of $6^x = 4$
 $6^x = 0$ heeft geen oplossing
 $6^x = 4$ geeft $x = {}^6\log(4)$
- c** $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-1} = 81$
 $(3^{-1})^{4x-1} = 3^4$
 $-4x + 1 = 4$
 $-4x = 3$
 $x = -\frac{3}{4}$
- d** $1 + {}^5\log(x - 1) = -2$
 ${}^5\log(x - 1) = -3$
 $x - 1 = 5^{-3}$
 $x = 1 + \frac{1}{125}$
- d** ${}^{\frac{1}{2}}\log^2(x) = 25$
 ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 5$ of ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = -5$
 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ of $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$
 $x = \frac{1}{32}$ of $x = 32$
- e** ${}^2\log^2(x) + 3 \cdot {}^2\log(x) + 2 = 0$
 stel ${}^2\log(x) = p$
 $p^2 + 3p + 2 = 0$
 $(p + 1)(p + 2) = 0$
 $p = -1$ of $p = -2$
 ${}^2\log(x) = -1$ of ${}^2\log(x) = -2$
 $x = 2^{-1}$ of $x = 2^{-2}$
 $x = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{1}{4}$
- f** $25^x - 3 \cdot 5^x = 28$
 $(5^2)^x - 3 \cdot 5^x = 28$
 $(5^x)^2 - 3 \cdot 5^x - 28 = 0$
 stel $5^x = p$
 $p^2 - 3p - 28 = 0$
 $(p + 4)(p - 7) = 0$
 $p = -4$ of $p = 7$
 $5^x = -4$ of $5^x = 7$
 $5^x = -4$ heeft geen oplossing
 $5^x = 7$ geeft $x = {}^5\log(7)$

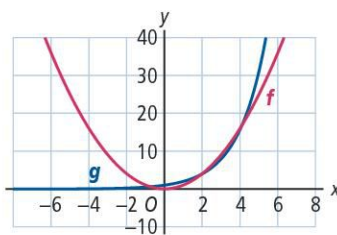
11 Exponentiële en logaritmische functies

- 5 a** $600 \cdot 0,8^t = 300$
 $0,8^t = \frac{1}{2}$
 $t = {}^{0,8}\log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 3,1$
 De hoeveelheid is in ongeveer 3,1 uur gehalveerd.
- b** $100 \cdot 0,8^t = 50$, dus $0,8^t = \frac{1}{2}$ dus weer 3,1 uur.
- c** Je komt steeds uit op $0,8^t = \frac{1}{2}$ dus elke keer 3,1 uur.
- 6 a** De groeifactor is 1,05. De vergelijking is $1,05^t = 2$.
- b** $t = {}^{1,05}\log(2) = 14,206\dots$; de verdubbelingstijd is ongeveer 14 jaar.
- c** $1,05^t = 8$
 $t = {}^{1,05}\log(8) = 42,620\dots$. De verachtvoudigingstijd is ongeveer 43 jaar.
- d** Drie keer, want verachtvoudigen is hetzelfde als 3 keer verdubbelen.
- 7 a** Als g de groeifactor per dag van Jodium-131 is, dan geldt $g^8 = \frac{1}{2}$, dus
 $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 0,917$.
 Nu is op te lossen $0,917^t = 0,05$.
 $t = {}^{0,917}\log(0,05) = 129,657\dots$, dus 5% over na ongeveer 35 dagen.
- Als g de groeifactor per jaar van Cesium-137 is, dan geldt: $g^{30} = \frac{1}{2}$, dus
 $g = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}} \approx 0,977$
 $0,977^t = 0,05$
 $t = {}^{0,977}\log(0,05) = 129,657\dots$, dus 5% over na ongeveer 130 jaar.
- b** Jodium-131: $0,917^t = 0,001$, dus $t = {}^{0,917}\log(0,001) = 79,726\dots$ dagen.
 Cesium-137: $0,977^t = 0,001$, dus $t = {}^{0,977}\log(0,001) = 298,973\dots$ jaar,
 dat zijn ongeveer 109 200 dagen.
 Het duurt ongeveer 1370 keer zo lang.

- 04 a** 9 wordt vervangen door 3^2 .
- b** $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$
- c** 3^x wordt vervangen door p .
- d** $(p-6)(p+2) = 0$
 $p = 6$ of $p = -2$
 $3^x = 6$ of $3^x = -2$
 $3^x = -2$ heeft geen oplossing
 $3^x = 6$ geeft $x = {}^3\log(6)$

- e** $4^{2x} - 3 \cdot 4^x = 0$
 stel $4^x = p$
 $p^2 - 3p = 0$
 $p(p-3) = 0$
 $p = 0$ of $p = 3$
 $4^x = 0$ of $4^x = 3$
 $4^x = 0$ heeft geen oplossing
 $4^x = 3$ geeft $x = {}^4\log(3)$
- f** $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 3$
 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2 + 2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 stel $\left(\frac{1}{2}\right)^x = p$
 $p^2 - 3p + 2 = 0$
 $(p-1)(p-2) = 0$
 $p = 1$ of $p = 2$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ of $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$
 $x = 0$ of $x = {}^{\frac{1}{2}}\log(2)$

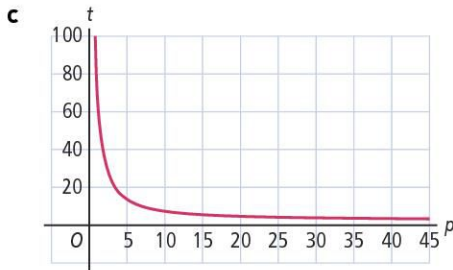
- g** ${}^3\log^2(x) + {}^3\log(x) = 12$
 $({}^3\log(x))^2 + {}^3\log(x) = 12$
 stel ${}^3\log(x) = p$
 $p^2 + p - 12 = 0$
 $(p + 4)(p - 3) = 0$
 $p = -4$ of $p = 3$
 ${}^3\log(x) = -4$ of ${}^3\log(x) = 3$
 $x = 3^{-4}$ of $x = 3^3$
 $x = \frac{1}{81}$ of $x = 27$
- h** ${}^2\log^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 16$
 $\left({}^2\log\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2 = 16$
 ${}^2\log\left(\frac{1}{2}x\right) = 4$ of ${}^2\log\left(\frac{1}{2}x\right) = -4$
 $\frac{1}{2}x = 2^4$ of $\frac{1}{2}x = 2^{-4}$
 $\frac{1}{2}x = 16$ of $\frac{1}{2}x = \frac{1}{16}$
 $x = 32$ of $x = \frac{1}{8}$
- i** $49^x + 2 \cdot 7^x = 8$
 $7^{2x} + 2 \cdot 7^x = 8$
 $(7^x)^2 + 2 \cdot 7^x = 8$
 stel $7^x = p$
 $p^2 + 2p - 8 = 0$
 $(p + 4)(p - 2) = 0$
 $p = -4$ of $p = 2$
 $7^x = -4$ of $7^x = 2$
 $7^x = -4$ heeft geen oplossing
 $7^x = 2$ geeft $x = {}^7\log(2)$
- j** $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
 $(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
 stel $5^x = p$
 $p^2 - 6p + 5 = 0$
 $(p - 1)(p - 5) = 0$
 $p = 1$ of $p = 5$
 $5^x = 1$ of $5^x = 5$
 $x = 0$ of $x = 1$

U1 a

- b** $x^2 = 2^x$
 Optie: snijpunten
 De drie snijpunten zijn $(-0,77; 0,59)$, $(2, 4)$ en $(4, 16)$
- c** Invoer: $y_1 = x^2$ en $y_3 = 1.1^x$
 Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$
 Optie: snijpunten
 De snijpunten zijn $(-1,0; 0,9)$ en $(1,1; 1,1)$
 Om het derde snijpunt te vinden, zoek eerst met de tabel.
 Venster: $-10 \leq x \leq 150$, $0 \leq y \leq 10\,000$.
 Optie: snijpunt
 Het derde snijpunt is $(95,7; 9161,7)$.
- d** Voor $a > 1$ is er altijd één snijpunt links van de y -as. Er is geen ander snijpunt als de grafiek rechts van de y -as 'binnen' de parabool blijft. Dan moet a dus in elk geval groter dan 2 zijn. Experimenteren met de grafische rekenmachine laat zien dat de grafiek bij $y = 3^x$ daaraan voldoet. Ook $y = 2,1^x$ voldoet daar nog aan.
 Een soortgelijke methode kun je gebruiken om te bepalen voor welke a er alleen maar één snijpunt rechts van de y -as is en geen snijpunten links van de y -as. Experimenteren met de grafische rekenmachine geeft $0 < a < 0,4$.
 Conclusie: voor $0 < a < 0,4$ en $a \geq 2,1$ heeft de grafiek van $k(x) = a^x$ precies één snijpunt met de parabool $f(x) = x^2$.

11 Exponentiële en logaritmische functies

- U2 a** De groeifactor is $1 + \frac{p}{100} = 1 + 0,01p$.
- b** Om de verdubbelingstijd uit te rekenen moet je de vergelijking $(1 + 0,01p)^t = 2$ oplossen. De oplossing is $t = \frac{1}{1+0,01p} \log(2)$.



- d** Plot de grafiek van $t = \frac{70}{p}$ in hetzelfde venster.
- Deze grafiek valt nagenoeg samen met de vorige grafiek.
Dus de regel komt goed overeen met de formule uit opdracht b.
- e** Er moet gelden $\frac{70}{p} > 0,95 \cdot 1 + 0,01p \log(2)$.
- Invoer: $y_1 = \frac{70}{x}$ en $y_2 = 0,95 \cdot 1 + 0,01x \log(2)$
Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 20$
Optie: snijpunt geeft $x = 12,867\dots$
Dus tot een percentage van 12,8 is de afwijking minder dan 5%.

11.2 Rekenregels voor logaritmen

intro Na 5 dagen is het aantal patiënten driemaal zo groot.
Na nog 3 dagen verdubbelt dat aantal en is het zesmaal zo groot.
Dus na 8 dagen is het aantal patiënten zesmaal zo groot.
En na driemaal 3 dagen is het driemaal verdubbeld, dus achtmaal zo groot in 9 dagen.

- 8 a** $3^{\log(11)} = 11$
- b** $2^{\log(3)} = 3$, $0,3^{\log(4)} = 4$ en $a^{\log(3)} = 3$
- c** $7 = 2^{\log(7)}$, $7 = 12^{\log(7)}$ en $7 = p^{\log(7)}$
- 9 a** $2^{\log(3)} = 3$, $2^{\log(7)} = 7$ en $2^{\log(3)} \cdot 2^{\log(7)} = 3 \cdot 7 = 21$
- b** Uit de rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- c** $2^{\log(3)} \cdot 2^{\log(7)} = 21 = 2^{\log(21)}$ en $2^{\log(3)} \cdot 2^{\log(7)} = 2^{\log(3) + \log(7)}$
dus $2^{\log(3) + \log(7)} = 2^{\log(21)}$
- d** ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(21)$
- e** ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$
- f** ${}^5\log(7) + {}^5\log(70) = {}^5\log(7 \cdot 70)$, dus $a = 490$
- g** ${}^5\log(70) = {}^5\log(b) + {}^5\log(7)$
 ${}^5\log(70) = {}^5\log(7b)$
 $70 = 7b$ dus $b = 10$
- h** $4 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(2) + {}^3\log(2) + {}^3\log(2) + {}^3\log(2)$
 $4 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ dus $4 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(16)$

- 10 a** ${}^3\log(5) + {}^3\log(6) = {}^3\log(5 \cdot 6) = {}^3\log(30)$
b ${}^7\log(42) - {}^7\log(3) + {}^7\log(2) = {}^7\log(42 : 3 \times 2) = {}^7\log(28)$
c ${}^7\log(42) - ({}^7\log(3) + {}^7\log(2)) =$
 ${}^7\log(42) - {}^7\log(6) = {}^7\log(42 : 6) = {}^7\log(7) = 1$
d $2 \cdot {}^5\log(4) + {}^5\log(a) =$
 ${}^5\log(4^2) + {}^5\log(a) = {}^5\log(16a)$
e ${}^5\log(a) + {}^5\log(a+1) = {}^5\log(a(a+1)) = {}^5\log(a^2 + a)$
f $3 \cdot {}^{0,5}\log(p) - {}^{0,5}\log(p^2) =$
 ${}^{0,5}\log(p^3) - {}^{0,5}\log(p^2) = {}^{0,5}\log(p^3 : p^2) = {}^{0,5}\log(p)$
- 11 a** $\log(1000x) = \log(1000) + \log(x) = 3 + \log(x)$, dus $g(x) = 3 + f(x)$.
b $\log(0,01x) = \log(10^{-2}) + \log(x) = -2 + \log(x)$, dus $h(x) = -2 + f(x)$.
c $h(x) = a + g(x)$
 $-2 + f(x) = a + 3 + f(x)$
 $-2 = a + 3$ dus $a = -5$
d $k(x) = 4 + f(x) = \log(10^4) + \log(x)$, dus $k(x) = \log(10\,000x)$.
e $m(x) = 6 + f(x) = \log(10^6) + \log(x)$, dus $m(x) = \log(1\,000\,000x)$.
f $n(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right) = \log(1) - \log(x) = 0 - \log(x)$, dus $n(x) = -\log(x) = -f(x)$.
g De grafiek van m ontstaat door de grafiek van f 6 omhoog te verschuiven.
De grafiek van n ontstaat door de grafiek van f te spiegelen in de x -as.
- 12 a** Voor het domein van f geldt $2x - 3 > 0$ ofwel $2x > 3$, dus $x > 1\frac{1}{2}$.
Voor het domein van g geldt $16x - 24 > 0$ ofwel $16x > 24$, dus $x > 1\frac{1}{2}$.
b $g(x) = {}^2\log(16x - 24)$
 $g(x) = {}^2\log(8 \cdot (2x - 3))$
 $g(x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(2x - 3)$
 $g(x) = 3 + {}^2\log(2x - 3)$
c De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f 3 omhoog te verschuiven.
- 13 a** $2^{-(x-5)} = 2^{-x+5} = 2^{5-x}$, klopt.
b Als x wordt vervangen door $x - 5$ verschuift de grafiek 5 naar rechts.
c $f(x) = 2^{5-x}$ ofwel $f(x) = 2^5 \cdot 2^{-x}$, dus $b = 2^5 = 32$.
d De grafiek van f ontstaat ook door de grafiek van g met 32 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.
- 010 a** $\log(25) = \log(5^2)$
 $\log(5^2) = 2 \cdot \log(5)$ op grond van rekenregel 3.
b $\log(10x) - \log(x) = \log(10) + \log(x) - \log(x) = \log(10) = 1$
c ${}^3\log(55) - {}^3\log(5) = {}^3\log(55 : 5) = {}^3\log(11)$
d ${}^5\log(90) - ({}^5\log(3) + {}^5\log(6)) =$
 ${}^5\log(90) - {}^5\log(18) =$
 ${}^5\log(90 : 18) = {}^5\log(5) = 1$
e $4 \cdot {}^9\log(2) - {}^9\log(3) =$
 ${}^9\log(2^4) - {}^9\log(3) = {}^9\log(16 : 3) = {}^9\log\left(\frac{16}{3}\right)$
f ${}^2\log(7) + 3 \cdot {}^2\log(p) =$
 ${}^2\log(7) + {}^2\log(p^3) = {}^2\log(7p^3)$
g ${}^3\log(b^2) + {}^3\log(b - 2) = {}^3\log(b^2(b - 2)) = {}^3\log(b^3 - 2b^2)$
h $5 \cdot {}^{0,3}\log(d) - {}^{0,3}\log(d^2) =$
 ${}^{0,3}\log(d^5) - {}^{0,3}\log(d^2) = {}^{0,3}\log(d^5 : d^2) = {}^{0,3}\log(d^3)$

11 Exponentiële en logaritmische functies

- U3 a** ${}^2\log(3) \cdot {}^3\log(4) \cdot {}^4\log(5) \cdot \dots \cdot {}^{n-1}\log(n) =$
 $\frac{\log(3)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(4)}{\log(3)} \cdot \frac{\log(5)}{\log(4)} \cdot \dots \cdot \frac{\log(n)}{\log(n-1)} = \frac{\log(n)}{\log(2)} = {}^2\log(n)$
 De gehele machten van 2 groter dan 3 en kleiner dan 100 voldoen.
 $n = 4, 8, 16, 32$ en 64 .
- b** ${}^2\log(n) = 20$ geeft $n = 2^{20} = 1\,048\,576$.
 De uitkomst is groter dan 20 als $n > 1\,048\,576$.

11.3 Herleiden

intro Overeenkomst: beide hebben de y -as als asymptoot.
 Verschil: de grafiek van f heeft één tak, die van g heeft twee takken.

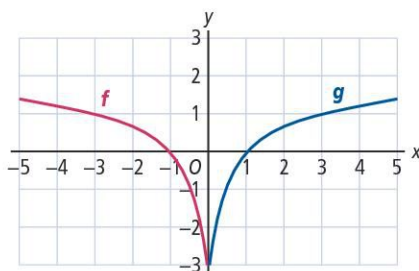
- 14 a** $p = 1 + {}^3\log(r+2)$
 $p - 1 = {}^3\log(r+2)$
 $r + 2 = 3^{p-1}$
- b** $r = 3^{p-1} - 2$
- 15 a** $T = {}^4\log(2a)$
 $2a = 4^T$
 $a = \frac{1}{2} \cdot 4^T$
- b** $a = 2^{-1} \cdot (2^2)^T$
 $a = 2^{-1} \cdot 2^{2T}$
 $a = 2^{2T-1}$
- 16 a** $N = 3 \cdot 4^t$
 $3 \cdot 4^t = N$
 $4^t = \frac{1}{3} N$
 $t = {}^4\log\left(\frac{1}{3}N\right)$
- b** $N = -16 + 4 \cdot 5^t$
 $-16 + 4 \cdot 5^t = N$
 $4 \cdot 5^t = N + 16$
 $5^t = \frac{1}{4}N + 4$
 $t = {}^5\log\left(\frac{1}{4}N + 4\right)$
- c** $4N \cdot 6^t = 5$
 $6^t = \frac{5}{4N}$
 $t = {}^6\log\left(\frac{5}{4N}\right)$
- d** $7^{tN} = 10$
 $tN = {}^7\log(10)$
 $t = \frac{{}^7\log(10)}{N}$
- 17 a** $q = -2 + {}^5\log(p)$
 $-2 + {}^5\log(p) = q$
 ${}^5\log(p) = q + 2$
 $p = 5^{q+2}$
- b** $q = \log(6p - 12)$
 $6p - 12 = 10^q$
 $6p = 10^q + 12$
 $p = \frac{1}{6} \cdot 10^q + 2$
- c** $2^p \cdot q = 1$
 $2^p = \frac{1}{q}$
 $p = {}^2\log\left(\frac{1}{q}\right)$
 $p = -{}^2\log(q)$
- d** $4q \cdot {}^3\log(p) = 8$
 ${}^3\log(p) = \frac{8}{4q}$
 ${}^3\log(p) = \frac{2}{q}$
 $p = 3^{\frac{2}{q}}$

$$\begin{aligned}
 18 \text{ a } & 4 \cdot \log(S) - 2 \cdot \log(R) = 1 \\
 & \log(S^4) - \log(R^2) = 1 \\
 & \log\left(\frac{S^4}{R^2}\right) = 1 \\
 & \frac{S^4}{R^2} = 10 \\
 & S^4 = 10R^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \text{ b } & {}^2\log(P) + 2 \cdot {}^2\log(Q) = -1 \\
 & {}^2\log(P) + {}^2\log(Q^2) = -1 \\
 & {}^2\log(P \cdot Q^2) = -1 \\
 & P \cdot Q^2 = 2^{-1} \\
 & P \cdot Q^2 = \frac{1}{2} \\
 & P = \frac{1}{2Q^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19 & {}^9\log(K) + {}^{27}\log(M) = 2 \\
 & \frac{{}^3\log(K)}{{}^3\log(9)} + \frac{{}^3\log(M)}{{}^3\log(27)} = 2 \\
 & \frac{{}^3\log(K)}{2} + \frac{{}^3\log(M)}{3} = 2 \\
 & {}^3\log(K) + \frac{2}{3} \cdot {}^3\log(M) = 4 \\
 & {}^3\log(K) + {}^3\log(M^{\frac{2}{3}}) = 4 \\
 & {}^3\log(K \cdot M^{\frac{2}{3}}) = 4 \\
 & K \cdot M^{\frac{2}{3}} = 3^4 \\
 & K = \frac{81}{\sqrt[3]{M^2}}
 \end{aligned}$$

20 a



- b De overeenkomst is dat rechts van de y -as de grafieken van f en g samenvallen. Het verschil is dat f ook een tak links van de y -as heeft. De verklaring is dat $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ het domein van f is en $\langle 0, \rightarrow \rangle$ het domein van g is. Dus $\log(x^2) = 2 \cdot \log(x)$ voor $x > 0$.
- c De grafieken van h en j vallen volledig samen.
Conclusie: Voor oneven positieve n geldt: $\log(x^n) = n \cdot \log(x)$ en voor even positieve n geldt $\log(x^n) = n \cdot \log(x)$ voor $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 21 \text{ a } & g(x) = 3 \cdot {}^5\log(25x) \\
 & g(x) = 3 \cdot ({}^5\log(25) + {}^5\log(x)) \\
 & g(x) = 3 \cdot (2 + {}^5\log(x)) \\
 & g(x) = 3 \cdot {}^5\log(x) + 6 \\
 & g(x) = {}^5\log(x^3) + 6 = f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21 \text{ b } & p(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x+6} \\
 & p(x) = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{x+6} \\
 & p(x) = 2^{-\frac{1}{2}x-3} \\
 & p(x) = 2^{-\frac{1}{2}x} \cdot 2^{-3} \\
 & p(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^{-\frac{1}{2}x} = q(x)
 \end{aligned}$$

11 Exponentiële en logaritmische functies

c $f(x) = {}^2\log(32x)$

$$f(x) = {}^2\log(32) + {}^2\log(x)$$

$$f(x) = 5 + {}^2\log(x)$$

d $f(x) = 9^{2x-2}$

$$f(x) = 9^{2x} \cdot 9^{-2}$$

$$f(x) = (9^2)^x \cdot \frac{1}{81}$$

$$f(x) = \frac{1}{81} \cdot 81^x$$

22 a $h(x) = g^{x+b}$

$$h(x) = g^x \cdot g^b \text{ dus } a = g^b$$

b $h(x) = {}^g\log(bx)$

$$h(x) = {}^g\log(b) + {}^g\log(x) \text{ dus } a = {}^g\log(b)$$

23 a $f(x) = {}^5\log(4x)$

$$f(x) = {}^5\log(4) + {}^5\log(x)$$

$$f(x) = {}^5\log(2^2) + {}^5\log(x)$$

$$f(x) = 2 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(x)$$

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$h(x) = 2 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(x) - 4 \cdot {}^5\log(x)$$

$$h(x) = 2 \cdot {}^5\log(2) - 3 \cdot {}^5\log(x)$$

$$g(x) = 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$g(x) = 2 \cdot {}^5\log(x^{-2})$$

$$g(x) = -2 \cdot 2 \cdot {}^5\log(x)$$

$$g(x) = -4 \cdot {}^5\log(x)$$

016 a Links en rechts van het =-teken zijn verwisseld.

b $6^t = \frac{2}{3}P - 1\frac{2}{3}$

c $t = {}^6\log\left(\frac{2}{3}P - 1\frac{2}{3}\right)$

d $2P - 7 = \frac{1}{10} \cdot 3^t$

$$\frac{1}{10} \cdot 3^t = 2P - 7$$

$$3^t = 20P - 70$$

$$t = {}^3\log(20P - 70)$$

e $2P \cdot 3^t = 9$

$$3^t = \frac{9}{2P}$$

$$t = {}^3\log\left(\frac{9}{2P}\right)$$

f $5^{t \cdot P} = 12$

$$t \cdot P = {}^5\log(12)$$

$$t = \frac{{}^5\log(12)}{P}$$

g $3P = 1\frac{1}{2} - 2 \cdot 5^t$

$$2 \cdot 5^t = 1\frac{1}{2} - 3P$$

$$5^t = \frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}P$$

$$t = {}^5\log\left(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}P\right)$$

021 a $g(x) = 5 \cdot {}^3\log(3x)$

$$g(x) = {}^3\log((3x)^5)$$

$$g(x) = {}^3\log(3^5 \cdot x^5)$$

b De rekenregel ${}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$ wordt gebruikt.

c $g(x) = {}^3\log(3^5) + {}^3\log(x^5)$

$$g(x) = 5 + {}^3\log(x^5), \text{ dus } g(x) = f(x)$$

d $f(x) = \left(3^{-1\frac{1}{2}}\right)^{4-x}$

e $f(x) = 3^{-6} \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$

$$f(x) = \frac{1}{729} \cdot 3^{\frac{1}{2}x}, \text{ dus } g(x) = f(x)$$

U4 a $\log(I) = -0,009t + 1$

$$I = 10^{-0,009t+1}$$

$$I = (10^{-0,009})^t \cdot 10^1$$

$$I = 10 \cdot (10^{-0,009})^t$$

$$b = 10 \text{ en } g = 10^{-0,009}$$

b $(10^{-0,009})^t = \frac{1}{2}$

$$t = 10^{-0,009} \log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(10^{-0,009})} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{-0,009} \approx 33,45$$

De intensiteit is na 34 dagen gehalveerd.

U5 a $h(x) = f(x+a) - f(x)$

$$h(x) = 5 \cdot 3^{x+a} - 5 \cdot 3^x$$

$$h(x) = 5 \cdot 3^x \cdot 3^a - 5 \cdot 3^x$$

$$h(x) = 5 \cdot 3^x \cdot (3^a - 1)$$

$$h(x) = 5 \cdot (3^a - 1) \cdot 3^x$$

Dit is een exponentiële functie met beginwaarde $5 \cdot (3^a - 1)$ en groeifactor 3.

b $k(x) = \frac{f(cx)}{f(x)} = \frac{5 \cdot 3^{cx}}{5 \cdot 3^x} = \frac{3^{cx}}{3^x} = 3^{cx-x}$

$$k(x) = 3^{(c-1)x} = (3^{c-1})^x = 1 \cdot (3^{c-1})^x$$

11.4 Vergelijkingen en ongelijkheden

intro Het domein van g is $\mathbb{R}$, want $x^2 + 16$ is altijd positief.

Dus grafiek A hoort bij g . Dan hoort grafiek B bij f .

De grafieken zullen elkaar niet snijden omdat voor dezelfde waarde van x de waarde van $g(x)$ altijd groter zal zijn dan die van $f(x)$.

24 a $3x - 7$ kan alle waarden hebben behalve nul (dus $x \neq \frac{7}{3}$).

b ${}^5\log(|3x - 7|) = 2$

$$|3x - 7| = 5^2$$

$$|3x - 7| = 25$$

$$3x - 7 = 25 \text{ of } 3x - 7 = -25$$

$$3x = 32 \text{ of } 3x = -18$$

$$x = 10\frac{2}{3} \text{ of } x = -6$$

25 a $x^2 - 4x = x - 4$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 4$$

b Voor $x = 1$ staat er ${}^2\log(-3) = {}^2\log(-3)$ en ${}^2\log(-3)$ bestaat niet.

Voor $x = 4$ staat er ${}^2\log(0) = {}^2\log(0)$ en ${}^2\log(0)$ bestaat ook niet.

11 Exponentiële en logaritmische functies

26 a ${}^3\log(|2x - 3|) = 4$

$$|2x - 3| = 3^4$$

$$2x - 3 = 81 \text{ of } 2x - 3 = -81$$

$$2x = 84 \text{ of } 2x = -78$$

$$x = 42 \text{ of } x = -39$$

b ${}^2\log(x - 3) = 1 - {}^2\log(x + 3)$

$${}^2\log(x - 3) + {}^2\log(x + 3) = 1$$

$${}^2\log((x - 3)(x + 3)) = 1$$

$$x^2 - 9 = 2^1$$

$$x^2 = 11$$

$$x = \sqrt{11} \text{ (} x = -\sqrt{11} \text{ voldoet niet)}$$

c $\log(2x - 4) - \log(7) = 1$

$$\log(2x - 4) = \log(10) + \log(7)$$

$$\log(2x - 4) = \log(70)$$

$$2x - 4 = 70$$

$$2x = 74$$

$$x = 37$$

d $\frac{1}{3}\log(4x) - \frac{1}{3}\log(6) = -2$

$$\frac{1}{3}\log\left(\frac{4x}{6}\right) = -2$$

$$\frac{4x}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

$$4x = 54$$

$$x = 13\frac{1}{2}$$

e ${}^5\log\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + {}^5\log(x)$

$${}^5\log(1) - {}^5\log(x) = 2 + {}^5\log(x)$$

$$-2 \cdot {}^5\log(x) = 2$$

$${}^5\log(x) = -1$$

$$x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

f ${}^3\log(5 - x) - {}^3\log(2x + 4) = 1$

$${}^3\log(5 - x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(2x + 4)$$

$${}^3\log(5 - x) = {}^3\log(3 \cdot (2x + 4))$$

$$5 - x = 6x + 12$$

$$-7x = 7$$

$$x = -1$$

27 a Het domein van f is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

b ${}^4\log(|x|) = 1\frac{1}{2}$

$$|x| = 4^{1\frac{1}{2}} = (2^2)^{1\frac{1}{2}} = 2^3 = 8$$

$$x = -8 \text{ of } x = 8$$

c Aflezen uit de gegeven grafiek geeft $-8 < x < 0$ of $0 < x < 8$

d Eerst oplossen ${}^4\log(|x|) = -2$

$$|x| = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

$$x = -\frac{1}{16} \text{ of } x = \frac{1}{16}$$

$$\text{Aflezen uit grafiek geeft } x < -\frac{1}{16} \text{ of } x > \frac{1}{16}$$

28 a Voor het domein van f geldt $x + 2 > 0$, dus $x > -2$.

b Eerst de vergelijking $\frac{1}{2}\log(x + 2) + 4 = 5$ oplossen.

$$\frac{1}{2}\log(x + 2) = 1$$

$$x + 2 = \frac{1}{2}$$

$$x = -1\frac{1}{2}$$

$$\text{De oplossing van } f(x) > 5 \text{ aflezen uit de gegeven grafieken geeft } -2 < x < -1\frac{1}{2}$$

29 a ${}^2\log(2x + 1) < 5$

$$\text{Eerst oplossen } {}^2\log(2x + 1) = 5$$

$$2x + 1 = 2^5 = 32$$

$$2x = 31$$

$$x = 15\frac{1}{2}$$

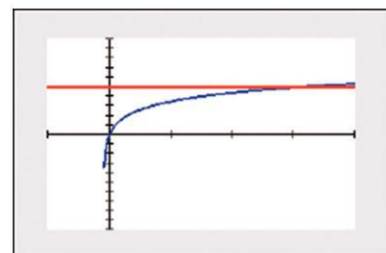
$${}^2\log(2x + 1) \text{ bestaat alleen als } 2x + 1 > 0$$

$$\text{ofwel } x > -\frac{1}{2}$$

$$\text{Invoer: } y_1 = {}^2\log(2x + 1) \text{ en } y_2 = 5$$

$$\text{Venster: } -5 \leq x \leq 20, -10 \leq y \leq 10$$

$$\text{De oplossing van de ongelijkheid is } -\frac{1}{2} < x < 15\frac{1}{2}$$



b ${}^3\log(4-x) \geq 2 - {}^3\log(4+x)$

Eerst oplossen ${}^3\log(4-x) = 2 - {}^3\log(4+x)$

${}^3\log(4-x) + {}^3\log(4+x) = 2$

${}^3\log((4-x)(4+x)) = 2$

$16 - x^2 = 3^2$

$x^2 = 7$

$x = -\sqrt{7}$ of $x = \sqrt{7}$

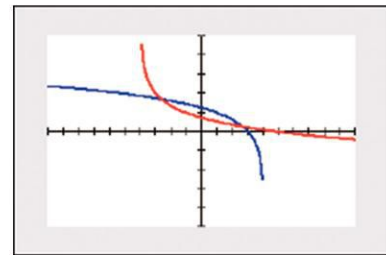
${}^3\log(4-x)$ bestaat alleen als $4-x > 0$ ofwel $x < 4$

${}^3\log(4+x)$ bestaat alleen als $4+x > 0$ ofwel $x > -4$

Invoer: $y_1 = {}^3\log(4-x)$ en $y_2 = 2 - {}^3\log(4+x)$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 5$

De oplossing van de ongelijkheid is $-\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$.



30 a Voor het domein van f geldt $15 - 2x > 0$, dus $x < 7\frac{1}{2}$

Eerst oplossen ${}^3\log(15-2x) = 1$

$15 - 2x = 3$

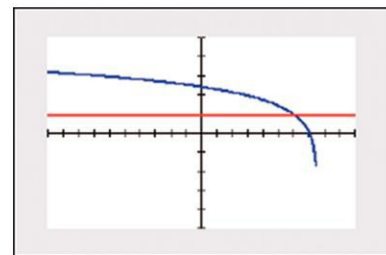
$2x = 12$

$x = 6$

Invoer: $y_1 = {}^3\log(15-2x)$ en $y_2 = 1$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 5$

De oplossing van de ongelijkheid is $x \leq 6$.



b Voor het domein van g geldt $5x + 20 > 0$, dus $x > -4$.

Eerst oplossen ${}^3\log(15-2x) = {}^3\log(5x+20)$

$15 - 2x = 5x + 20$

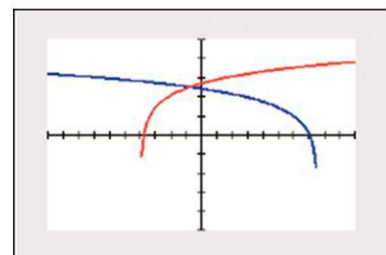
$-5 = 7x$

$x = -\frac{5}{7}$

Invoer: $y_1 = {}^3\log(15-2x)$ en $y_2 = {}^3\log(5x+20)$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 5$

De oplossing van de ongelijkheid is $-\frac{5}{7} < x < 7\frac{1}{2}$



c $f(x) \cdot g(x) > 0$

Eerst oplossen $f(x) \cdot g(x) = 0$

$f(x) = 0$ of $g(x) = 0$

$15 - 2x = 1$ of $5x + 20 = 1$

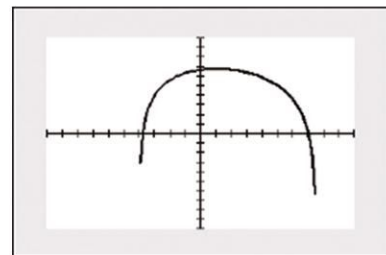
$2x = 14$ of $5x = -19$

$x = 7$ of $x = -3\frac{4}{5}$

Invoer: $y = {}^3\log(15-2x) \cdot {}^3\log(5x+20)$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

De oplossing van de ongelijkheid is $-3\frac{4}{5} < x < 7$



026 a De rekenregel ${}^s\log(a) - {}^s\log(b) = {}^s\log\left(\frac{a}{b}\right)$

b ${}^2\log\left(\frac{x^2+7}{13-x}\right) = 2$

$\frac{x^2+7}{13-x} = 4$

c $x^2 + 7 = 4(13-x)$

$x^2 + 7 = 52 - 4x$

$x^2 + 4x - 45 = 0$

$(x+9)(x-5) = 0$

$x = -9$ of $x = 5$

11 Exponentiële en logaritmische functies

- d** Een logaritmische functie heeft een beperkt domein.
e $x = -9$ invullen geeft ${}^2\log(88) - {}^2\log(22) = {}^2\log\left(\frac{88}{22}\right) = {}^2\log(4) = 2$, klopt en
 $x = 5$ invullen geeft ${}^2\log(32) - {}^2\log(8) = {}^2\log\left(\frac{32}{8}\right) = {}^2\log(4) = 2$, klopt ook.
 De oplossingen voldoen beide.

029 a $(x-1)(7-x) = 2^3$

$$-x^2 + 8x - 7 = 8$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = 5$$

- b** $x = 3$ invullen geeft ${}^2\log(2) + {}^2\log(4) = 1 + 2 = 3$, klopt en
 $x = 5$ invullen geeft ${}^2\log(4) + {}^2\log(2) = 2 + 1 = 3$, klopt ook.

- c** Voor het domein van f geldt $x > 1$ en
 voor het domein van g geldt $x < 7$

- d** Invoer: $y_1 = {}^2\log(x-1) + {}^2\log(7-x)$ en $y_2 = 3$
 Venster: $0 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 5$

- e** De oplossing van de ongelijkheid is $1 < x \leq 3$ of $5 \leq x < 7$

- f** ${}^3\log(5-3x) > 4$

$$\text{Eerst oplossen } {}^3\log(5-3x) = 4$$

$$5-3x = 81$$

$$3x = -76$$

$$x = -25\frac{1}{3}$$

$${}^3\log(5-3x) \text{ bestaat alleen als } 5-3x > 0, \text{ dus } x < 1\frac{2}{3}$$

$$\text{Invoer: } y_1 = {}^3\log(5-3x) \text{ en } y_2 = 4$$

$$\text{Venster: } -50 \leq x \leq 10, -5 \leq y \leq 5$$

$$\text{De oplossing van de ongelijkheid is } x < -25\frac{1}{3}$$

- g** ${}^5\log(x^2+10) - {}^5\log(x+2) \geq 1$

$$\text{Eerst oplossen } {}^5\log(x^2+10) - {}^5\log(x+2) = 1$$

$${}^5\log\left(\frac{x^2+10}{x+2}\right) = 1 \text{ ofwel } \frac{x^2+10}{x+2} = 5$$

$$x^2+10 = 5x+10$$

$$x^2 = 5x$$

$$x = 0 \text{ of } x = 5 \text{ beide voldoen.}$$

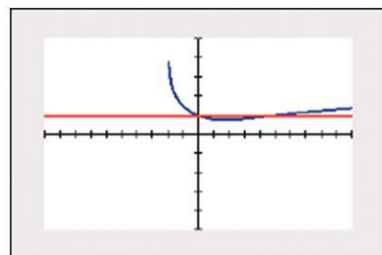
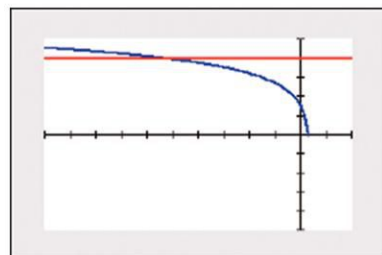
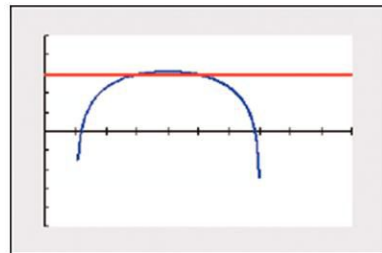
$${}^5\log(x^2+10) \text{ bestaat voor elke waarde van } x.$$

$${}^5\log(x+2) \text{ bestaat alleen als } x+2 > 0, \text{ dus } x > -2$$

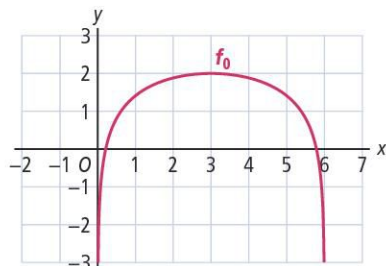
$$\text{Invoer: } y_1 = {}^5\log(x^2+10) - {}^5\log(x+2) \text{ en } y_2 = 1$$

$$\text{Venster: } -10 \leq x \leq 10, -5 \leq y \leq 5$$

$$\text{De oplossing van de ongelijkheid is } -2 < x \leq 0 \text{ of } x \geq 5$$



U6 a



- b** $6x - x^2 > 0$

$$6x - x^2 = 0$$

$$x^2 = 6x$$

$$x = 0 \text{ of } x = 6$$

Zie de grafiek bij opgave a. Het domein is $\langle 0, 6 \rangle$.

- c $y = p + 6x - x^2$ moet dan de vergelijking zijn van een bergparabool die de x -as snijdt in $(-3, 0)$ en $(9, 0)$.
 $(9, 0)$ invullen in $y = p + 6x - x^2$ geeft $0 = p + 6 \cdot 9 - 81$, dus $p = 27$.
 Controle: invullen van $p = 27$ en $(-3, 0)$ geeft $0 = 27 - 18 - 9$ klopt.
- d Het maximum van de parabool $y = p + 6x - x^2$ is dan $3^4 = 81$.
 het maximum wordt bereikt als $\frac{dy}{dx} = 6 - 2x = 0$, dus als $x = 3$.
 $x = 3$ en $y = 81$ invullen geeft $81 = p + 18 - 9$, dus $p = 72$.
- e Dan moet geen enkel punt van de parabool $y = p + 6x - x^2$ boven de x -as liggen. Onderzoek voor welke waarde van p de top op de x -as ligt.
 Je weet dat $x_{top} = 3$, dus dan moet $y_{top} = 0$ zijn.
 Dit invullen in $y = p + 6x - x^2$ geeft $0 = p + 18 - 9$, dus $p = -9$.
 f_p bestaat voor geen enkele waarde van x als $p \leq -9$.

11.5 Groeimodellen

intro Q zou een kwadratische, exponentiële of gebroken functie van R kunnen zijn.

- 31 a** De richtingscoëfficiënt a van een lijn door de punten $(2, 10)$ en $(6, 50)$ is

$$a = \frac{50 - 10}{6 - 2} = 10. \text{ Substitueren van } (2, 10) \text{ in } C = 10t + b \text{ geeft}$$

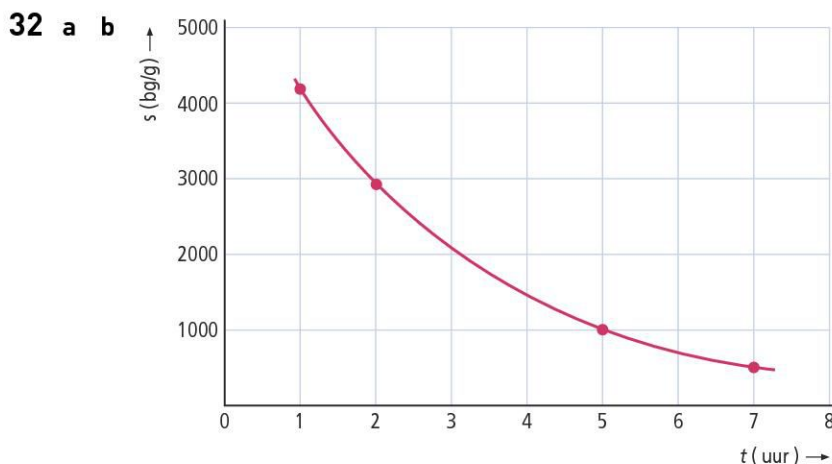
$$10 = 10 \cdot 2 + b \text{ dus } b = -10.$$

- b** De groeifactor per 4 tijdseenheden is $\frac{50}{10} = 5$.

De groeifactor per 1 tijdseenheid is dan $5^{\frac{1}{4}} = 1,4953\dots$

Substitueren van $(2, 10)$ in $C = b \cdot \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^t$ geeft $10 = b \cdot \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2 = b \cdot 5^{\frac{1}{2}} = b \cdot \sqrt{5}$

$$\text{Dus } b = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \approx 4,47.$$



- b** De grafiek heeft de vorm die kan horen bij een exponentieel verband.

c $\frac{2940}{4200} = 0,7$; $4200 \cdot 0,7^4 \approx 1008$ en $4200 \cdot 0,7^6 \approx 494$

De groeifactor per uur is $0,7$.

De sterkte van de straling op $t = 0$ is $4200 : 0,7 = 6000$ bq/g.

d $S = 6000 \cdot 0,7^t$

- e** Voor $t = 1, 2, 5$ en 7 vind je de s -waarden: $4200, 2940, 1008$ en 494 .

De waarden in de tabel voldoen bij benadering aan deze formule.

11 Exponentiële en logaritmische functies

- 33 a** $t = 2$ en $C = 10$ invullen in $C = p \cdot t^2 + q$ geeft

$$10 = p \cdot 2^2 + q$$

$$10 = 4p + q$$

- b** $t = 6$ en $C = 50$ invullen in $C = p \cdot t^2 + q$ geeft

$$50 = p \cdot 6^2 + q$$

$$50 = 36p + q$$

- c** $10 = 4p + q$ geeft $q = 10 - 4p$ en

$$50 = 36p + q \text{ geeft } q = 50 - 36p$$

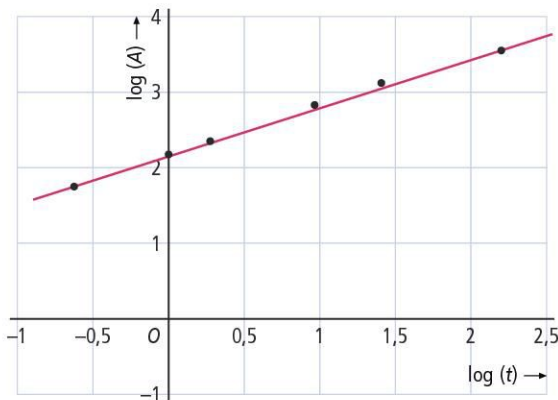
- d** $10 - 4p = 50 - 36p$

$$32p = 40$$

$$p = 1\frac{1}{4} \text{ en } q = 10 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} = 5 \text{ (dus } C = 1\frac{1}{4}t^2 + 5)$$

34 a b

	Mercurius	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Neptunus
$\log(t)$	-0,62	0	0,27	1,07	1,47	2,22
$\log(A)$	1,76	2,17	2,36	2,89	3,16	3,65



De richtingscoëfficiënt m van de lijn is ongeveer $\frac{3,65 - 1,76}{2,22 - -0,62} = 0,665... \approx \frac{2}{3}$

en het startgetal n is $\log(149,6) \approx 2,17$ dus $\log(A) = \frac{2}{3} \cdot \log(t) + 2,17$

- c** $\log(A) = \log(t^{\frac{2}{3}}) + \log(149,6)$

$$A = t^{\frac{2}{3}} \cdot 149,6$$

$$A \approx 149,6 \cdot \sqrt[3]{t^2}$$

- 35 a** Omdat de temperatuur van de thee daalt, moet er met een getal tussen 0 en 1 worden vermenigvuldigt.

- b** Beginverschil is 65°C , de groeifactor 0,7 dus $V = 65 \cdot 0,7^t$.

- c** $T = 20 + V = 20 + 65 \cdot 0,7^t$ met t per 5 minuten.

De groeifactor per minuut is $0,7^{\frac{1}{5}}$; de formule wordt $T = 20 + 65 \cdot 0,7^{\frac{1}{5}t}$

- 36 a** De groeifactor per 6 meter van $d = 4$ naar $d = 10$ is $\frac{4}{25}$ en van $d = 14$ naar $d = 20$ is de groeifactor $\frac{1}{2}$. Dat is niet gelijk.

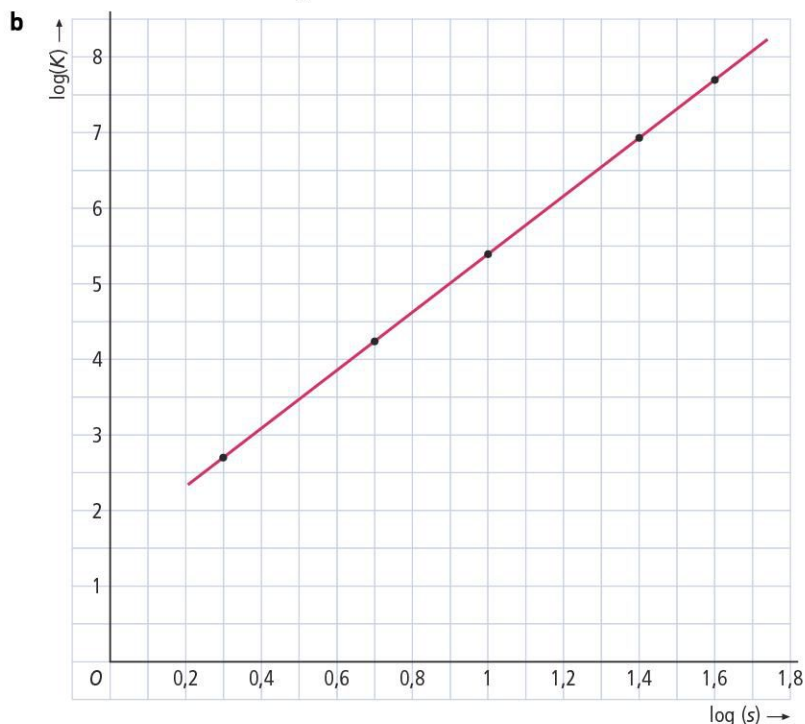
- b** Het product van d en I is niet constant.

c

d^2	16	100	196	400
I	25	4	2	1

$d^2 \cdot I$ is constant (400), dus $I = \frac{400}{d^2}$

034 a Zie de tabel naast de grafiek.



$x = \log(s)$	$y = \log(K)$
0,30	2,57
0,70	4,16
1	5,36
1,40	6,95
1,60	7,77

c De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{7,77 - 2,57}{1,60 - 0,30} = 4$.

(1 ; 5,36) invullen in $y = 4x + b$ geeft $5,36 = 4 \cdot 1 + b$, dus $b = 1,36$, klopt.

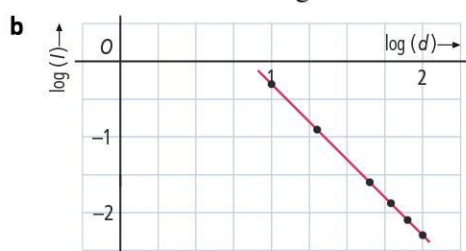
d $\log(K) = 4 \cdot \log(s) + 1,36$

$$\log(K) = \log(s^4) + \log(10^{1,36})$$

$$\log(K) = \log(10^{1,36} \cdot s^4)$$

e $K = 10^{1,36} \cdot s^4$ ofwel $K \approx 23 \cdot s^4$.

U7 a Zie de tabel naast de grafiek.



$\log(d)$	$\log(I)$
1,00	-0,31
1,30	-0,90
1,60	-1,51
1,78	-1,85
1,90	-2,10
2,00	-2,30

c De grafiek is een rechte lijn, de richtingscoëfficiënt is $\frac{-2,30 - -0,31}{2,00 - 1,00} \approx -2$.

(2,00; -2,30) invullen in $\log(I) = -2 \cdot \log(d) + b$ geeft $-2,30 = -2 \cdot 2,00 + b$
dus $b = 1,7$ en de formule is $\log(I) = -2 \cdot \log(d) + 1,7$.

d $\log(I) = -2 \cdot \log(d) + 1,7$

$$\log(I) + 2 \cdot \log(d) = 1,7$$

$$\log(I) + \log(d^2) = 1,7$$

$$\log(I \cdot d^2) = 1,7$$

$$I \cdot d^2 = 10^{1,7} \approx 50 \text{ ofwel } I = \frac{50}{d^2}$$

e De richtingscoëfficiënt is $\frac{97 - 117}{-2,30 - -0,31} \approx 10$.

(-0,31; 117) invullen in $D = 10 \cdot \log(I) + b$ geeft $117 = 10 \cdot -0,31 + b$
dus $b \approx 120$.

Het verband tussen de geluidssterkten is $D = 10 \cdot \log(I) + 120$.

11 Exponentiële en logaritmische functies

11.6 Gemengde opdrachten

37 a $1 + 4 \cdot {}^3\log(x) = 7$

$$4 \cdot {}^3\log(x) = 6$$

$${}^3\log(x) = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 3^{1\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$$

b $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^3\log(x)$

$$f(x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x^4)$$

$$f(x) = {}^3\log(3x^4)$$

$$p = 3 \text{ en } q = 4$$

c $1 + 4 \cdot {}^3\log(x) = 1 + {}^3\log(9x^2)$

$$4 \cdot {}^3\log(x) = {}^3\log(9x^2)$$

$${}^3\log(x^4) = {}^3\log(9x^2)$$

$$x^4 = 9x^2$$

$$x^2 = 0 \text{ of } x^2 = 9$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3$$

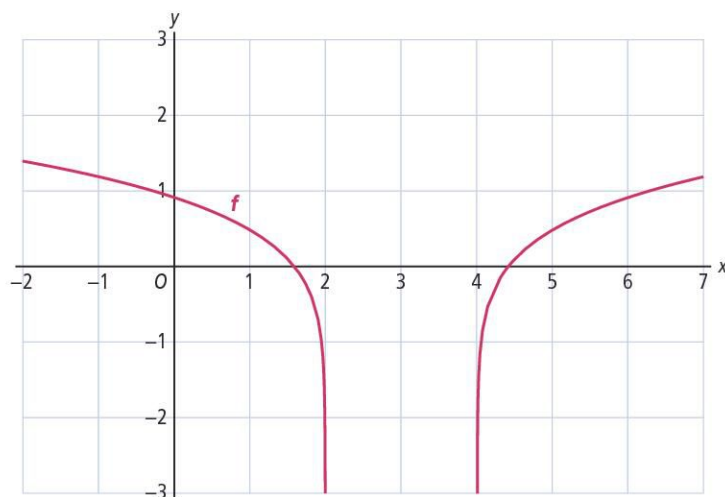
$$x = 0 \text{ en } x = -3 \text{ voldoen niet.}$$

$$\text{De oplossing is } x = 3.$$

$$f(3) = 1 + 4 \cdot {}^3\log(3) = 1 + 4 \cdot 1 = 5$$

$$\text{Het snijpunt is } (3, 5).$$

38 a



b Voor het domein geldt $x^2 - 6x + 8 > 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 2 \text{ of } x = 4$$

De grafiek van $y = x^2 - 6x + 8$ is een dalparabool, dus dit betekent dat $\langle -, 2 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$ het domein van f is.

c De asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = 4$.

d $\log(x^2 - 6x + 8) < 0$

$$\text{Eerst oplossen } \log(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 1$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 8$$

$$x = \frac{6 - \sqrt{8}}{2} \text{ of } x = \frac{6 + \sqrt{8}}{2}$$

$$x = 3 - \sqrt{2} \text{ of } x = 3 + \sqrt{2}$$

$$\text{Zie grafiek, de oplossing van } f(x) < 0 \text{ is } 3 - \sqrt{2} < x < 2 \text{ en } 4 < x < 3 + \sqrt{2}$$

39 a ${}^2\log(R) = 4,45 - 2,31S$

$$R = 2^{4,45-2,31S}$$

$$R = 2^{4,45} \cdot 2^{-2,31S}$$

$$R = 2^{4,45} \cdot (2^{-2,31})^S$$

$$b = 2^{4,45} \approx 21,86 \text{ en } g = 2^{-2,31} \approx 0,20$$

40 a $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$

$$2^4 \cdot 2^{x-6} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{x-2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$x - 2 = \frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

b $15 \cdot 3^{x+2} + 18 = 93$

$$15 \cdot 3^{x+2} = 75$$

$$3^{x+2} = 5$$

$$x + 2 = {}^3\log(5)$$

$$x = -2 + {}^3\log(5)$$

c $|1 - {}^2\log(4x + 1)| = 2$

$$1 - {}^2\log(4x + 1) = 2 \text{ of } 1 - {}^2\log(4x + 1) = -2$$

$${}^2\log(4x + 1) = -1 \text{ of } {}^2\log(4x + 1) = 3$$

$$4x + 1 = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ of } 4x + 1 = 2^3 = 8$$

$$4x = -\frac{1}{2} \text{ of } 4x = 7$$

$$x = -\frac{1}{8} \text{ of } x = 1\frac{3}{4}$$

d $\frac{4}{{}^2\log(x) + 3} = {}^2\log(x)$

$$\text{stel } {}^2\log(x) = p$$

$$\frac{4}{p + 3} = p$$

$$4 = p(p + 3)$$

$$p^2 + 3p - 4 = 0$$

$$(p + 4)(p - 1) = 0$$

$$p = -4 \text{ of } p = 1$$

$${}^2\log(x) = -4 \text{ of } {}^2\log(x) = 1$$

$$x = 2^{-4} = \frac{1}{16} \text{ of } x = 2$$

e ${}^4\log(2x) + {}^4\log(7) \leq 3$

$$\text{Eerst oplossen } {}^4\log(2x) + {}^4\log(7) = 3$$

$${}^4\log(14x) = 3$$

$$14x = 4^3 = 64$$

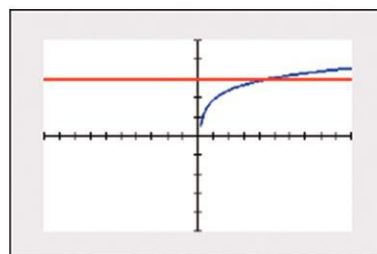
$$x = 4\frac{4}{7}$$

$${}^4\log(2x) \text{ bestaat alleen als } x > 0.$$

$$\text{Invoer: } y_1 = {}^4\log(2x) + {}^4\log(7) \text{ en } y_2 = 3$$

$$\text{Venster: } -10 \leq x \leq 10, -5 \leq y \leq 5$$

$$\text{Zie grafiek, de oplossing is } 0 < x \leq 4\frac{4}{7}$$



f ${}^6\log(5x + 3) + {}^6\log(x - 1) = 2$

$${}^6\log((5x + 3)(x - 1)) = 2$$

$$(5x + 3)(x - 1) = 6^2 = 36$$

$$5x^2 - 2x - 3 = 36$$

$$5x^2 - 2x - 39 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -39 = 784$$

11 Exponentiële en logaritmische functies

$$x = \frac{2 - \sqrt{784}}{2 \cdot 5} \text{ of } x = \frac{2 + \sqrt{784}}{2 \cdot 5}$$

$$x = -2\frac{3}{5} \text{ of } x = 3$$

$x = -2\frac{3}{5}$ voldoet niet, dus de oplossing is $x = 3$.

g $\frac{1}{2}\log(x^2 - 2x) \geq -3$

Eerst oplossen $\frac{1}{2}\log(x^2 - 2x) = -3$

$$x^2 - 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 4$$

$\frac{1}{2}\log(x^2 - 2x)$ bestaat alleen als $x^2 - 2x > 0$.

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

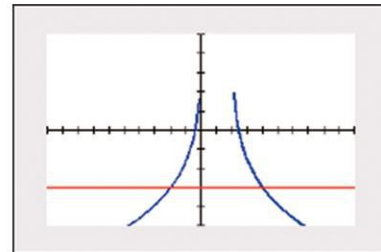
De grafiek van $y = x^2 - 2x$ is een dalparabool, dus

$\frac{1}{2}\log(x^2 - 2x)$ bestaat alleen voor x -waarden uit $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

Invoer: $y_1 = \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x)$ en $y_2 = -3$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 5$

Zie grafiek, de oplossing is $-2 \leq x < 0$ of $2 < x \leq 4$



h $8^x + 4^x = 6 \cdot 2^x$

$$(2^3)^x + (2^2)^x = 6 \cdot 2^x$$

$$(2^x)^3 + (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x = 0$$

stel $2^x = p$.

$$p^3 + p^2 - 6p = 0$$

$$p(p^2 + p - 6) = 0$$

$$p(p + 3)(p - 2) = 0$$

$$p = 0 \text{ of } p = -3 \text{ of } p = 2$$

$$2^x = 0 \text{ of } 2^x = -3 \text{ of } 2^x = 2$$

$2^x = 0$ en $2^x = -3$ hebben geen oplossing.

$2^x = 2$ geeft $x = 1$.

41 a De groeifactor is 0,6.

$0,6^t = \frac{1}{2}$, dus $t = {}^{0,6}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 1,3569\dots$ dagen ≈ 33 uur.

b $36 = 100 \cdot 0,6 \cdot 0,6$, dus na 2 dagen.

c Na twee dagen is er 36 mg over. 33 uur later is deze hoeveelheid gehalveerd.

Dus na twee dagen en 33 uur ofwel 3 dagen en 9 uur.

Onderzoeksopdrachten

42 Je moet onderzoeken voor welke waarde van g de vergelijking ${}^g\log(x) = x$ precies één oplossing heeft.

Als $0 < g < 1$ heeft deze vergelijking precies één oplossing: de grafiek komt vanaf de asymptoot naar het punt $(1, 0)$ en snijdt daarbij de lijn $y = x$ één keer.

Voor $g > 1$ onderzoek je of er een waarde van g is, waarbij de grafiek van m_g de lijn $y = x$ raakt. Met plotten vind je dat de grafiek van m_2 al dichterbij de lijn $y = x$ komt dan m_3 . Verder proberen (inzoomen) leert dat er voor $g = 1,4$ twee snijpunten zijn en voor $g = 1,5$ geen.

De grafiek van m snijdt de lijn $y = x$ tweemaal als $1 < g \leq 1,4$

43 a $f(0) = \frac{8}{1 + 3 \cdot 0,6^0} = \frac{8}{4} = 2$

Op den duur, dat wil zeggen als t zeer groot is, nadert $0,6^t$ naar 0 en $f(t)$ naar

$$f(t) = \frac{8}{1 + 3 \cdot 0} = \frac{8}{1} = 8$$

b Voor het snijpunt met de y -as geldt $t = 0$.

$f(0) = \frac{A}{1 + B \cdot g^0} = \frac{A}{1 + B}$, dus het snijpunt met de y -as wordt bepaald door zowel A als B .

c Als t toeneemt, nadert g^t op den duur naar 0.

De functiewaarde nadert dan tot $\frac{A}{1 + B \cdot 0} = \frac{A}{1} = A$.

De grenswaarde wordt door A bepaald.

d Als B groter wordt, wordt het snijpunt met de y -as, dus de beginwaarde kleiner.

e Als g groter wordt, dus dichterbij 1 komt, gaat de grafiek minder snel naar de grenswaarde.

Samenvatting

S1 a ${}^2\log(13) - 2 \cdot {}^2\log(3) =$
 ${}^2\log(13) - {}^2\log(3^2) =$
 ${}^2\log\left(\frac{13}{9}\right) =$
 ${}^2\log\left(1\frac{4}{9}\right)$

b $1\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(x) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(2) =$
 ${}^5\log(x^{1\frac{1}{2}}) + {}^5\log(2^{\frac{1}{2}}) =$
 ${}^5\log(x\sqrt{x} \cdot \sqrt{2}) =$
 ${}^5\log(x\sqrt{2x})$

S2 a Als t toeneemt, wordt $0,95^t$ kleiner en nadert op de duur naar 0. Hierdoor wordt S dus steeds iets groter (afnemende stijging) en nadert naar de grenswaarde $S = 25 - 3 \cdot 0 = 25$. Kenmerk B is hier van toepassing.

b De formule $S = 12 + 4(t - 1)$ is te herleiden tot $S = 8 + 4t$. Dit is een lineaire functie met een richtingscoëfficiënt 4, dus kenmerk A is hier van toepassing.

S3 $1,004^t = 2$
 $t = {}^{1,004}\log(2) = 173,633... \text{ weken}$
 De verdubbelingstijd is $7 \cdot 173,663... \approx 1215$ dagen.

S4 a $\left({}^{1\frac{1}{2}}\log(x)\right)^2 = {}^{1\frac{1}{2}}\log(x) + 2$
 Stel ${}^{1\frac{1}{2}}\log(x) = p$
 $p^2 = p + 2$
 $p^2 - p - 2 = 0$
 $(p + 1)(p - 2) = 0$
 $p = -1$ of $p = 2$

11 Exponentiële en logaritmische functies

$${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = -1 \text{ of } {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 2$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ of } x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ of } x = 2\frac{1}{4}$$

b ${}^5\log(3x) + {}^5\log(2) = 4$

$${}^5\log(3x \cdot 2) = 4$$

$$6x = 5^4 = 625$$

$$x = 104\frac{1}{6}$$

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(x^2 + 6x) = -3$

$$x^2 + 6x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(x + 9)(x - 3) = 0$$

$$x = -9 \text{ of } x = 3$$

d $4^{2x} - 11 \cdot 4^x + 24 = 0$

$$\text{Stel } 4^x = p$$

$$p^2 - 11p + 24 = 0$$

$$(p - 3)(p - 8) = 0$$

$$p = 3 \text{ of } p = 8$$

$$4^x = 3 \text{ of } 4^x = 8$$

$$x = {}^4\log(3) \text{ of } x = {}^4\log(8) = 1,5$$

S5 a ${}^3\log(10x - x^2) < 2$

$$\text{Eerst oplossen } {}^3\log(10x - x^2) = 2$$

$$10x - x^2 = 3^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x - 1)(x - 9) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 9$$

$${}^3\log(10x - x^2) \text{ bestaat alleen als } 10x - x^2 > 0.$$

$$10x - x^2 = 0$$

$$x(10 - x) = 0$$

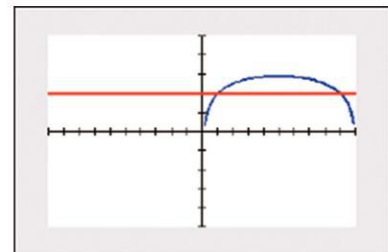
$$x = 0 \text{ of } x = 10 \text{ De grafiek van } y = 10x - x^2 \text{ is een}$$

$$\text{bergparabool, dus } {}^3\log(10x - x^2) \text{ bestaat alleen als } 0 < x < 10.$$

$$\text{Invoer: } y_1 = {}^3\log(10x - x^2) \text{ en } y_2 = 2$$

$$\text{Venster: } -10 \leq x \leq 10, -5 \leq y \leq 5$$

$$\text{Zie grafiek, de oplossing van de ongelijkheid is } 0 < x < 1 \text{ of } 9 < x < 10.$$



b ${}^3\log(10 - x) > -2 + {}^3\log(x + 5)$

$$\text{Eerst oplossen } {}^3\log(10 - x) = -2 + {}^3\log(x + 5)$$

$${}^3\log(10 - x) = {}^3\log\left(\frac{1}{9}\right) + {}^3\log(x + 5)$$

$${}^3\log(10 - x) = {}^3\log\left(\frac{1}{9}(x + 5)\right)$$

$$10 - x = \frac{1}{9}(x + 5)$$

$$90 - 9x = x + 5$$

$$85 = 10x$$

$$x = 8\frac{1}{2}$$

$${}^3\log(10 - x) \text{ bestaat alleen als } 10 - x > 0 \text{ ofwel } x < 10$$

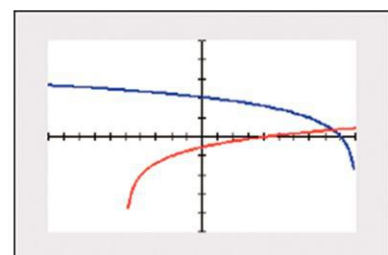
$$\text{en } {}^3\log(x + 5) \text{ bestaat alleen als } x + 5 > 0 \text{ ofwel } x > -5.$$

$$\text{Beide logaritmen bestaan alleen als } -5 < x < 10.$$

$$\text{Invoer: } y_1 = {}^3\log(10 - x) \text{ en } y_2 = -2 + {}^3\log(x + 5)$$

$$\text{Venster: } -10 \leq x \leq 10, -5 \leq y \leq 5$$

$$\text{Zie grafiek, de oplossing van de ongelijkheid is } -5 < x < 8\frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned}
 \text{S6} \quad & {}^3\log(P) = 2,73 - 0,41Q \\
 & P = 3^{2,73 - 0,41Q} \\
 & P = 3^{2,73} \cdot 3^{-0,41Q} \\
 & P = 3^{2,73} \cdot (3^{-0,41})^Q \\
 & c = 3^{2,73} \approx 20,07 \text{ en } g = 3^{-0,41} \approx 0,64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{S7 a} \quad & g(x) = {}^2\log(8x^5) \\
 & g(x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x^5) \\
 & g(x) = 3 + 5 \cdot {}^2\log(x) = f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & f(x) = \sqrt{\frac{1}{27} \cdot 5^x} \\
 & f(x) = \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt{5^x} \\
 & f(x) = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (5^x)^{\frac{1}{2}} \\
 & f(x) = (3^{-3})^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}x} \\
 & f(x) = 3^{-1\frac{1}{2}} \cdot (5^{\frac{1}{2}})^x \\
 & f(x) = 3^{-1\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{5})^x = g(x)
 \end{aligned}$$

Test jezelf

$$\begin{aligned}
 \text{T1 a} \quad & {}^{24}\log(14) + {}^{24}\log(41) = \\
 & {}^{24}\log(14 \cdot 41) = \\
 & {}^{24}\log(574)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & \log(2) - \log(12) + \log(8) = \\
 & \log\left(\frac{2 \cdot 8}{12}\right) = \\
 & \log\left(\frac{16}{12}\right) = \log\left(1\frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c} \quad & {}^5\log(6) - \left({}^5\log\left(\frac{1}{12}\right) - {}^5\log(2)\right) = \\
 & {}^5\log(6) - {}^5\log\left(\frac{1}{12}\right) + {}^5\log(2) = \\
 & {}^5\log\left(\frac{6 \cdot 2}{\frac{1}{12}}\right) = \\
 & {}^5\log(144)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d} \quad & {}^2\log(b) - {}^2\log(3) = \\
 & {}^2\log\left(\frac{b}{3}\right) = \\
 & {}^2\log\left(\frac{1}{3}b\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e} \quad & {}^{\frac{1}{2}}\log(p) + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4p}\right) = \\
 & {}^{\frac{1}{2}}\log\left(p \cdot \frac{1}{4p}\right) = \\
 & {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4}\right) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f} \quad & \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(x^7) - 3 \cdot {}^5\log(\sqrt{x}) = \\
 & {}^5\log((x^7)^{\frac{1}{2}}) - {}^5\log((x^{\frac{1}{2}})^3) = \\
 & {}^5\log(x^{\frac{7}{2}}) - {}^5\log(x^{\frac{3}{2}}) = \\
 & {}^5\log\left(\frac{x^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = {}^5\log(x^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{T2 a} \quad & 5^{|x-2|} = 7 \\
 & |x-2| = {}^5\log(7) \\
 & x-2 = {}^5\log(7) \text{ of } x-2 = -{}^5\log(7) \\
 & x = 2 + {}^5\log(7) \text{ of } x = 2 - {}^5\log(7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad & 3 - \log(x+2) = 2\frac{1}{3} \\
 & \log(x+2) = \frac{2}{3} \\
 & x+2 = 10^{\frac{2}{3}} \\
 & x = \sqrt[3]{100} - 2
 \end{aligned}$$

11 Exponentiële en logaritmische functies

c ${}^2\log(x-6) + {}^2\log(x) = 4$

$${}^2\log(x(x-6)) = 4$$

$$x^2 - 6x = 2^4 = 16$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x+2)(x-8) = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 8$$

$x = -2$ voldoet niet, dus de oplossing is $x = 8$

d $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 24 = 0$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^x - 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 24 = 0$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2 - 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 24 = 0$$

Stel $\left(\frac{1}{2}\right)^x = p$

$$p^2 - 11p + 24 = 0$$

$$(p-3)(p-8) = 0$$

$$p = 3 \text{ of } p = 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 \text{ of } \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

$$x = {}^{\frac{1}{2}}\log(3) \text{ of } x = {}^{\frac{1}{2}}\log(8) = -3$$

e $2 \cdot {}^3\log(x) - {}^3\log(3x+4) = 0$

$${}^3\log(x^2) = {}^3\log(3x+4)$$

$$x^2 = 3x+4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 4$$

$x = -1$ voldoet niet, dus de oplossing is $x = 4$.

f ${}^2\log(3x-2) < 7$

Eerst oplossen ${}^2\log(3x-2) = 7$

$$3x-2 = 2^7 = 128$$

$$3x = 130$$

$$x = 43\frac{1}{3}$$

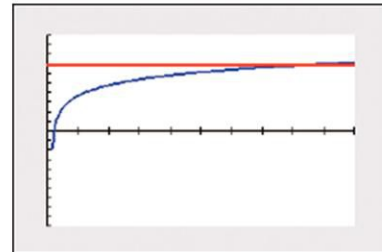
${}^2\log(3x-2)$ bestaat alleen als

$$3x-2 > 0 \text{ ofwel } x > \frac{2}{3}.$$

Invoer: $y_1 = {}^2\log(3x-2)$ en $y_2 = 7$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $-10 \leq y \leq 10$

De oplossing van de ongelijkheid is $\frac{2}{3} < x < 43\frac{1}{3}$



g ${}^{\frac{1}{2}}\log(|8-x^2|) > -2$

Eerst oplossen ${}^{\frac{1}{2}}\log(|8-x^2|) = -2$

$$|8-x^2| = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$8-x^2 = 4 \text{ of } 8-x^2 = -4$$

$$x^2 = 4 \text{ of } x^2 = 12$$

$$x = -\sqrt{12} \text{ of } x = -2 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = \sqrt{12}$$

${}^{\frac{1}{2}}\log|8-x^2|$ bestaat alleen als $8-x^2 \neq 0$ ofwel $x \neq -\sqrt{8}$

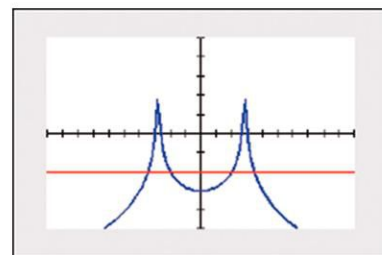
en $x \neq \sqrt{8}$.

Invoer: $y_1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(|8-x^2|)$ en $y_2 = -2$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 5$

De oplossing van de ongelijkheid is

$$-\sqrt{12} < x < -\sqrt{8} \text{ of } -\sqrt{8} < x < -2 \text{ of } 2 < x < \sqrt{8} \text{ of } \sqrt{8} < x < \sqrt{12}$$



h $3^x - \frac{5}{3^x} = 4$

Stel $3^x = p$

$$p - \frac{5}{p} = 4$$

$$p^2 - 5 = 4p$$

$$p^2 - 4p - 5 = 0$$

$$(p + 1)(p - 5) = 0$$

$$p = -1 \text{ of } p = 5$$

$$3^x = -1 \text{ of } 3^x = 5$$

$$3^x = -1 \text{ heeft geen oplossing.}$$

$$x = {}^3\log(5)$$

T3 a $1,08^t = 2$

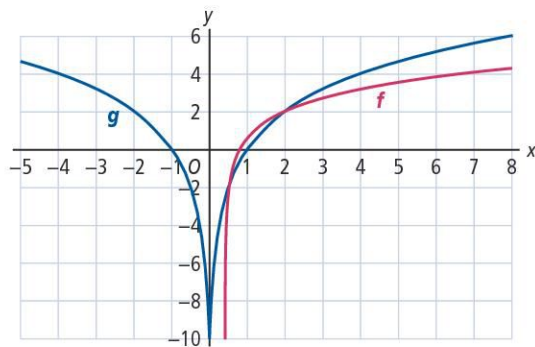
$$t = {}^{1,08}\log(2)$$

$$t = 9,006\dots$$

De verdubbelingstijd is ongeveer 9 jaar.

b Van 15 000 naar 60 000 betekent twee keer verdubbelen, dit duurt 18 jaar.

T4 a



b Voor de verticale asymptoot van f geldt $5x - 2 = 0$, dus $x = \frac{2}{5}$
Voor de verticale asymptoot van g geldt $x = 0$.

c $-1 + {}^2\log(5x - 2) = {}^2\log(x^2)$
 ${}^2\log(\frac{1}{2}) + {}^2\log(5x - 2) = {}^2\log(x^2)$

$${}^2\log(2\frac{1}{2}x - 1) = {}^2\log(x^2)$$

$$2\frac{1}{2}x - 1 = x^2$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{5 + \sqrt{9}}{4} = 2$$

De snijpunten zijn $(\frac{1}{2}, -2)$ en $(2, 2)$.

d Zie grafiek, de oplossing van $f(x) \geq g(x)$ is $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

T5 De verticale asymptoot is $x = -3$, dan is $-3 + b = 0$, dus $b = 3$

$(-1, 0)$ ligt op de grafiek, dus $0 = {}^a\log(-1 + 3) + c$, dus $c = -{}^a\log(2)$

$(1, 1)$ ligt op de grafiek, dus $1 = {}^a\log(1 + 3) + c$, dus $c = 1 - {}^a\log(4)$

$$-{}^a\log(2) = 1 - {}^a\log(4)$$

$${}^a\log(4) - {}^a\log(2) = 1$$

$${}^a\log(\frac{4}{2}) = 1, \text{ dus } {}^a\log(2) = 1 \text{ en } a = 2$$

$$c = -{}^a\log(2) \text{ wordt dan } c = -{}^2\log(2) = -1$$

$$a = 2, b = 3 \text{ en } c = -1$$

11 Exponentiële en logaritmische functies

T6 a Voor het domein geldt $\frac{1}{3}x + 4 > 0$, dus $x > -12$.

b De verticale asymptoot is de lijn $x = -12$.

c $f(x) = {}^3\log\left(\frac{1}{3}x + 4\right)$

$$f(x) = {}^3\log\left(\frac{1}{3} \cdot (x + 12)\right)$$

$$f(x) = {}^3\log\left(\frac{1}{3}\right) + {}^3\log(x + 12)$$

$$f(x) = -1 + {}^3\log(x + 12)$$

$$a = -1 \text{ en } b = 12$$

T7 a $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{5^2}\right) \approx 42,9$ $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{10^2}\right) \approx 36,9$

$$D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{7^2}\right) = 40$$
 $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{20^2}\right) \approx 30,9$

b $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right)$

$$D = 10 \cdot (\log(4,9 \cdot 10^5) - \log(r^2))$$

$$D = 10 \cdot (\log(4,9 \cdot 10^5) - 2 \cdot \log(r))$$

$$D = 10 \cdot \log(4,9 \cdot 10^5) - 20 \cdot \log(r)$$

$$a = 10 \cdot \log(4,9 \cdot 10^5) \approx 56,9 \text{ en } b = -20$$

c $10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right) = 0$

$$\log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right) = 0$$

$$\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2} = 1$$

$$r^2 = 4,9 \cdot 10^5 = 49 \cdot 10^4$$

$$r = \sqrt{49 \cdot 10^4} = 7 \cdot 10^2 = 700$$

Dus op een afstand van 700 meter is de geluidsterkte 0 dB.

T8 a $\log(M) = 2$, dus de massa van het ei is $M = 10^2 = 100$ gram.

$\log(L) \approx 1,12$, dus het waterverlies bedraagt $L \approx 10^{1,12} \approx 13,2$ gram.

b 13,2 van 100 is ongeveer 13%, klopt.

c Voor de albatros geldt $\log(M) = 2,5$, dus $M = 10^{2,5} \approx 316$ gram.

$\log(L) \approx 1,62$, dus $L \approx 10^{1,62} \approx 42$ gram.

13% van 316 is $0,13 \cdot 316 \approx 41$ gram.

Ook voor de albatros klopt dit redelijk.

d $\log(L) = 1,031 \cdot \log(M) - 0,885$

$$\log(L) = \log(M^{1,031}) - \log(10^{0,885})$$

$$\log(L) = \log\left(\frac{M^{1,031}}{10^{0,885}}\right)$$

$$L = \frac{M^{1,031}}{10^{0,885}} = \frac{1}{10^{0,885}} \cdot M^{1,031}$$

$$a = \frac{1}{10^{0,885}} \approx 0,130 \text{ en } b = 1,031$$

Extra oefening

E1 a De groeifactor per jaar is $\frac{72}{64} = 1\frac{1}{8}$

b 2025 is 6 jaar verder dan 2019.

De staatsschuld is dan $72 \cdot \left(1\frac{1}{8}\right)^6 \approx 146$ miljard dollar.

c Voor de verdubbelingstijd geldt $\left(1\frac{1}{8}\right)^t = 2$

De verdubbelingstijd is $t = {}^{1\frac{1}{8}}\log(2)$ jaar.

$t = 5,884\dots$ jaar.

Dat komt overeen met $5,884\dots \cdot 12 \approx 71$ maanden (5 jaar en 11 maanden).

E2 a $\left(1\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 3$

$$1 - x = {}^{1\frac{1}{2}}\log(3)$$

$$x = 1 - {}^{1\frac{1}{2}}\log(3)$$

b $6^{2x-1} = 3$

$$2x - 1 = {}^6\log(3)$$

$$2x = 1 + {}^6\log(3)$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^6\log(3)$$

c $2 - {}^3\log(2x+1) = -2$

$${}^3\log(2x+1) = 4$$

$$2x + 1 = 3^4 = 81$$

$$2x = 80$$

$$x = 40$$

d ${}^7\log\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1 - {}^7\log(x)$

$${}^7\log\left(\frac{1}{x-1}\right) + {}^7\log(x) = 1$$

$${}^7\log\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$$

$$\frac{x}{x-1} = 7$$

$$x = 7x - 7$$

$$-6x = -7$$

$$x = 1\frac{1}{6}$$

e ${}^2\log(|5-2x|) = -3$

$$|5-2x| = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$5-2x = \frac{1}{8} \text{ of } 5-2x = -\frac{1}{8}$$

$$2x = 4\frac{7}{8} \text{ of } 2x = 5\frac{1}{8}$$

$$x = 2\frac{7}{16} \text{ of } x = 2\frac{9}{16}$$

f $5^{-x+1} = 4$

$$-x + 1 = {}^5\log(4)$$

$$x = 1 - {}^5\log(4)$$

g $16^x - 3 \cdot 4^x = 10$

$$(4^2)^x - 3 \cdot 4^x = 10$$

$$(4^x)^2 - 3 \cdot 4^x - 10 = 0$$

$$\text{Stel } 4^x = p$$

$$p^2 - 3p - 10 = 0$$

$$(p+2)(p-5) = 0$$

$$p = -2 \text{ of } p = 5$$

$$4^x = -2 \text{ of } 4^x = 5$$

$4^x = -2$ heeft geen oplossing.

De oplossing is $x = {}^4\log(5)$

h ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = -1$

$$\frac{x-3}{x+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

$$x-3 = 3x+9$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

11 Exponentiële en logaritmische functies

E3 a ${}^2\log(-2x + 1) > 5$

Eerst oplossen ${}^2\log(-2x + 1) = 5$

$$-2x + 1 = 2^5$$

$$-2x + 1 = 32$$

$$-2x = 31$$

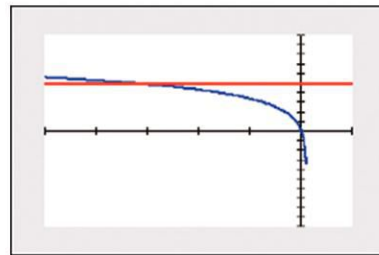
$$x = -15\frac{1}{2}$$

${}^2\log(-2x + 1)$ bestaat alleen voor $-2x + 1 > 0$, dus $x < \frac{1}{2}$

Invoer: $y_1 = {}^2\log(-2x + 1)$ en $y_2 = 5$

Venster: $-25 \leq x \leq 5$, $-10 \leq y \leq 10$

De oplossing van de ongelijkheid is $x < -15\frac{1}{2}$



b $2^{3x-1} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Eerst oplossen $2^{3x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$$2^{3x-1} = (2^{-2})^x = 2^{-2x}$$

$$3x - 1 = -2x$$

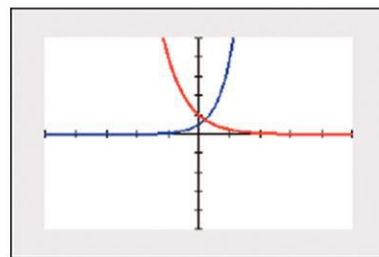
$$5x = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Invoer: $y_1 = 2^{3x-1}$ en $y_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$

De oplossing van de ongelijkheid is $x < \frac{1}{5}$



c $2 \cdot {}^5\log(x) > {}^5\log(x + 6)$

Eerst oplossen $2 \cdot {}^5\log(x) = {}^5\log(x + 6)$

$${}^5\log(x^2) = {}^5\log(x + 6)$$

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x = -2 \text{ (voldoet niet) of } x = 3$$

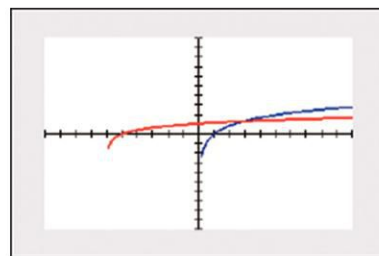
$\log(x)$ bestaat alleen voor $x > 0$.

$\log(x + 6)$ bestaat alleen voor $x + 6 > 0$, dus $x > -6$.

Invoer: $y_1 = 2 \cdot {}^5\log(x)$ en $y_2 = {}^5\log(x + 6)$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-10 \leq y \leq 10$

De oplossing van de ongelijkheid is $x > 3$



d $2 - 3 \cdot \log(x) < 1$

Eerst oplossen $2 - 3 \cdot \log(x) = 1$

$$3 \cdot \log(x) = 1$$

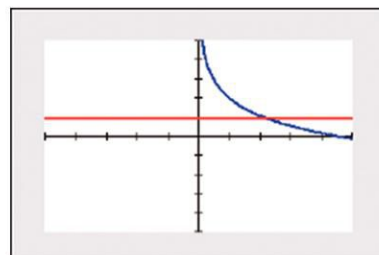
$$\log(x) = \frac{1}{3}$$

$$x = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$$

Invoer: $y_1 = 2 - 3 \cdot \log(x)$ en $y_2 = 1$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$

De oplossing van de ongelijkheid is $x > \sqrt[3]{10}$



e ${}^3\log(7 - x^2) < -1$

Eerst oplossen ${}^3\log(7 - x^2) = -1$

$$7 - x^2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = 6\frac{2}{3}$$

$$x = -\sqrt{6\frac{2}{3}} \text{ of } x = \sqrt{6\frac{2}{3}}$$

${}^3\log(7 - x^2)$ bestaat alleen als $7 - x^2 > 0$, ofwel $x^2 < 7$

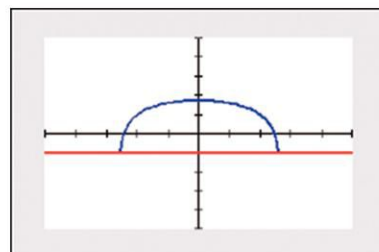
dus $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$.

Invoer: $y_1 = {}^3\log(7 - x^2)$ en $y_2 = -1$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$

De oplossing van de ongelijkheid is $-\sqrt{7} < x < -\sqrt{6\frac{2}{3}}$

of $\sqrt{6\frac{2}{3}} < x < \sqrt{7}$



f $4^x \leq 2^x + 12$

Eerst oplossen $4^x = 2^x + 12$

$$(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

$$(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Stel $2^x = p$

$$p^2 - p - 12 = 0$$

$$(p + 3)(p - 4) = 0$$

$$p = -3 \text{ of } p = 4$$

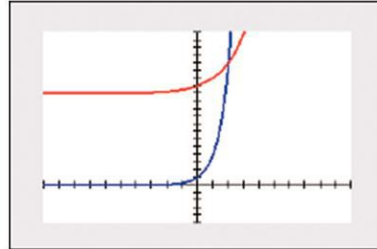
$$2^x = -3 \text{ (geen oplossing) of } 2^x = 4$$

$$x = 2$$

Invoer: $y_1 = 4^x$ en $y_2 = 2^x + 12$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 20$

De oplossing van de ongelijkheid is $x \leq 2$



E4 a $P = 4^t - 3$

$$4^t - 3 = P$$

$$4^t = P + 3$$

$$t = {}^4\log(P + 3)$$

b $2P - 4 \cdot 3^{2t} = 0$

$$4 \cdot 3^{2t} = 2P$$

$$3^{2t} = \frac{1}{2}P$$

$$2t = {}^3\log\left(\frac{1}{2}P\right)$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log\left(\frac{1}{2}P\right)$$

c $\log(P) - \log(t) = 1$

$$\log(t) = \log(P) - 1$$

$$\log(t) = \log(P) - \log(10)$$

$$\log(t) = \log\left(\frac{1}{10}P\right)$$

$$t = \frac{1}{10}P$$

d $P = 4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t)$

$$4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t) = P$$

$${}^{\frac{1}{3}}\log(2t) = \frac{1}{4}P$$

$$2t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}P}$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}P}$$

E5 $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{32}x^3\right)$

$$g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{32}\right) + {}^{\frac{1}{2}}\log(x^3)$$

$$g(x) = 5 + 3 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$$

$$g(x) = 5 + 3 \cdot \frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$g(x) = 5 + 3 \cdot \frac{{}^2\log(x)}{-1}$$

$$g(x) = 5 - 3 \cdot {}^2\log(x) = f(x)$$

E6 a $2 \cdot {}^5\log(11) - 3 \cdot {}^5\log(4)$

$${}^5\log(11^2) - {}^5\log(4^3) =$$

$${}^5\log(121) - {}^5\log(64) =$$

$${}^5\log\left(\frac{121}{64}\right) = {}^5\log\left(1\frac{57}{64}\right)$$

b ${}^{\frac{1}{4}}\log(x) + 2 =$

$${}^{\frac{1}{4}}\log(x) + {}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{16}\right) =$$

$${}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{16}x\right)$$

c $3 \cdot {}^2\log(x) + 1 =$

$${}^2\log(x^3) + {}^2\log(2) =$$

$${}^2\log(2x^3)$$

d $2 \cdot ({}^4\log(15) - {}^4\log(5)) + {}^4\log(3) =$

$$2 \cdot {}^4\log\left(\frac{15}{5}\right) + {}^4\log(3) =$$

$${}^4\log(3^2) + {}^4\log(3) =$$

$${}^4\log(27)$$

11 Exponentiële en logaritmische functies

E7 a $f(x) = g(x)$

$${}^2\log(4 - 2x) = 2 + {}^2\log(x + 4)$$

$${}^2\log(4 - 2x) = {}^2\log(4) + {}^2\log(x + 4)$$

$${}^2\log(4 - 2x) = {}^2\log(4x + 16)$$

$$4 - 2x = 4x + 16$$

$$-6x = 12$$

$$x = -2$$

b $f(x) \cdot g(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ of } g(x) = 0$$

$${}^2\log(4 - 2x) = 0 \text{ of } 2 + {}^2\log(x + 4) = 0$$

$$4 - 2x = 2^0 = 1 \text{ of } {}^2\log(x + 4) = -2$$

$$2x = 3 \text{ of } x + 4 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$x = 1\frac{1}{2} \text{ of } x = -3\frac{3}{4}$$

E8 a Domein van f_{12} : $3x - 12 > 0$ en $x > 2$ geeft $x > 4$

Domein van f_1 : $3x - 1 > 0$ en $x > 2$ geeft $x > 2$

Domein van f_6 : $3x - 6 > 0$ en $x > 2$ geeft $x > 2$

b De asymptoot is dan $x = 10$.

$$3 \cdot 10 - a = 0, \text{ dus } a = 30$$

c Dan moet $3x - a > 0$ en $x > 2$ opleveren $x > 2$

Dit is het geval voor $a \leq 6$.

d $f'_6(x) = {}^3\log(3x - 6) - {}^3\log(x - 2)$

$$f'_6(x) = {}^3\log(3 \cdot (x - 2)) - {}^3\log(x - 2)$$

$$f'_6(x) = {}^3\log\left(\frac{3 \cdot (x - 2)}{(x - 2)}\right) = {}^3\log(3) = 1$$

De grafiek van f_6 is de rechte lijn $y = 1$ (voor $x > 2$)

E9 a $75 = 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$

$$35,9 \cdot \log(v) = 70,9$$

$$\log(v) = \frac{70,9}{35,9} = 1,9749\dots$$

$$v = 10^{1,9749\dots} \approx 94 \text{ km per uur}$$

b Invullen van $2v$ in de formule geeft

$$D_{2v} = 35,9 \cdot \log(2v) + 4,1$$

$$D_{2v} = 35,9 \cdot (\log(2) + \log(v)) + 4,1$$

$$D_{2v} = 35,9 \cdot \log(2) + 35,9 \cdot \log(v) + 4,1 \text{ en } 35,9 \cdot \log(2) \approx 11 \text{ dus}$$

$$D_{2v} \approx 11 + 35,9 \cdot \log(v) + 4,1, \text{ dat is } 11 \text{ dB méér dan bij een snelheid } v.$$

c $28,1 \cdot \log(v) + 16,0 < 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$

$$11,9 < 7,8 \cdot \log(v)$$

$$\log(v) > \frac{11,9}{7,8}$$

$$v > 10^{1,525\dots}, \text{ dus } v > 33,5 \text{ km per uur.}$$

d $(35,9 \cdot \log(v) + 4,1) - (28,1 \cdot \log(v) + 16,0) > 4$

$$7,8 \cdot \log(v) - 11,9 > 4$$

$$7,8 \cdot \log(v) > 15,9$$

$$\log(v) > \frac{15,9}{7,8}$$

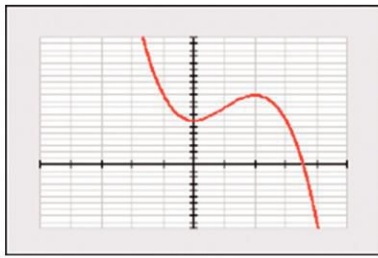
$$v > 10^{2,038\dots}, \text{ dus } v > 109 \text{ km per uur.}$$

10 Kettingregel

Voorkennis

- V1**
- a** $f(x) = 6x - 0,3x^{10}$
 $f'(x) = 6 - 3x^9$
- b** $g(x) = 6x^3 + x + 2$
 $g'(x) = 18x^2 + 1$
- c** $h(x) = 2(x^4 - x^2 + 3)$
 $h(x) = 2x^4 - 2x^2 + 6$
 $h'(x) = 8x^3 - 4x$
- d** $k(x) = x^2(3x - 2x^3)$
 $k(x) = 3x^3 - 2x^5$
 $k'(x) = 9x^2 - 10x^4$
- V2**
- a** $s = 3(t + 5)^2$
 $s = 3(t^2 + 10t + 25)$
 $s = 3t^2 + 30t + 75$
 $\frac{ds}{dt} = 6t + 30$
- b** $s = \frac{1}{3}(t^4 - 5)$
 $s = \frac{1}{3}t^4 - \frac{5}{3}$
 $\frac{ds}{dt} = \frac{4}{3}t^3$
- c** $s = (t^3 + 3)(2t - 3)$
 $s = 2t^4 - 3t^3 + 6t - 9$
 $\frac{ds}{dt} = 8t^3 - 9t^2 + 6$
- d** $s = 25t^2 + (t - 2)^2$
 $s = 25t^2 + t^2 - 4t + 4$
 $s = 26t^2 - 4t + 4$
 $\frac{ds}{dt} = 52t - 4$
- V3**
- a** $f(x) = 0,5x^2 + 3x$
 $f'(x) = x + 3$
 $f'(2) = 2 + 3 = 5$
 De helling in punt P is 5.
- b** $g(x) = 5x^3 - 0,5x^2 - 7$
 $g'(x) = 15x^2 - x$
 $g'(1) = 15 \cdot 1^2 - 1 = 14$
 De helling in punt Q is 14.
- V4**
- a** $f(x) = x^3$
 $f'(x) = 3x^2$
 $f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$, de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is 3.
- b** Als de helling gelijk is aan 6, dan moet $f'(x) = 6$
 $3x^2 = 6$
 $x^2 = 2$
 $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$
 $f(\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}$ en $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$
 De punten waar de helling gelijk is aan 6 zijn $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ en $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.
- V5**
- a** $K(p) = -p^3 + 3p^2 + 7$
 $K'(p) = -3p^2 + 6p$
 $-3p^2 + 6p = 0$
 $-3p(p - 2) = 0$
 $p = 0$ of $p = 2$

- b** Invoer: $y_1 = -x^3 + 3x^2 + 7$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 20$



Bij $p = 0$ is er sprake van een minimum en bij $p = 2$ is er een maximum.

- c** minimum $K(0) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 + 7 = 7$
 maximum $K(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 + 7 = 11$

V6 a $L'(m) = -16m + 16$

$$-16m + 16 = 0$$

$$-16m = -16$$

$$m = 1$$

L is een bergparabool, dus maximum $L(1) = -8 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 - 3 = 5$.

b $h'(x) = 3x^2 + 8x + 16$

$$3x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = -128$$

$D < 0$, dus de afgeleide is nooit nul en h heeft geen maxima of minima.

c $T'(q) = -3q^2 + 6q + 9$

$$-3q^2 + 6q + 9 = 0$$

$$q^2 - 2q - 3 = 0$$

$$(q - 3)(q + 1) = 0$$

$$q = 3 \text{ of } q = -1$$

In een plot zie je dat er een maximum is bij $q = 3$ en een minimum bij $q = -1$.

$$\text{maximum } T(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27$$

$$\text{minimum } T(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot -1 = -5$$

d $w(r) = (3r - 4)^2 - 3r$

$$w(r) = 9r^2 - 24r + 16 - 3r$$

$$w(r) = 9r^2 - 27r + 16$$

$$w'(r) = 18r - 27 = 0$$

$$18r = 27$$

$$r = 1\frac{1}{2}$$

$$w \text{ is een dalparabool, dus minimum } w\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(3 \cdot 1\frac{1}{2} - 4\right)^2 - 3 \cdot 1\frac{1}{2} = -4\frac{1}{4}$$

V7 a $f(x) = 0,5x^4 - 3$

$$f'(x) = 2x^3$$

$f'(1) = 2 \cdot 1^3 = 2$, dus de raaklijn is van de vorm $y = 2x + b$.

Invullen van $x = 1$ en $y = -2\frac{1}{2}$ in $y = 2x + b$ geeft

$$-2\frac{1}{2} = 2 \cdot 1 + b \text{ dus } b = 4\frac{1}{2}$$

De vergelijking van de raaklijn in punt P is $y = 2x + 4\frac{1}{2}$

10 Kettingregel

- b** $f(2) = -2 \cdot 2^3 - 0,25 \cdot 2^2 + 5 = -12$ dus $P(2, -12)$.
 $f'(x) = -6x^2 - 0,5x$
 $f'(2) = -6 \cdot 2^2 - 0,5 \cdot 2 = -25$
 De raaklijn is van de vorm $y = -25x + b$.
 Invullen van $x = 2$ en $y = -12$ in $y = -25x + b$ geeft
 $-12 = -25 \cdot 2 + b$ dus $b = 38$.
 De vergelijking van de raaklijn in punt P is $y = -25x + 38$.
- c** $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 1) = x^4 + x^2 - 2$
 $f'(x) = 4x^3 + 2x$
 $f'(2) = 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 = 36$
 De raaklijn is van de vorm $y = 36x + b$.
 Invullen van $x = 2$ en $y = 18$ in $y = 36x + b$ geeft
 $18 = 36 \cdot 2 + b$ dus $b = -54$.
 De vergelijking van de raaklijn in punt P is $y = 36x - 54$.

- V8 a** $f(x) = x^3 - 3x + 2$
 $f'(x) = 3x^2 - 3$
 $3x^2 - 3 = 0$
 $3x^2 = 3$
 $x^2 = 1$
 $x = -1$ of $x = 1$
 Uit een plot valt op te maken dat er een maximum is bij $x = -1$ en een minimum bij $x = 1$.
 maximum $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4$, minimum $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$
- b** Het snijpunt met de y -as bereken je door $x = 0$ in te vullen.
 $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$.
 $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3$
 De raaklijn is van de vorm $y = -3x + b$.
 Invullen van $x = 0$ en $y = 2$ in $y = -3x + b$ geeft
 $2 = -3 \cdot 0 + b$ dus $b = 2$.
 De vergelijking van de raaklijn is $y = -3x + 2$.
- c** $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9$
 $3x^2 - 3 = 9$
 $3x^2 = 12$
 $x^2 = 4$
 $x = -2$ of $x = 2$
 $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$, dus de coördinaten van punt P zijn $(2, 4)$.

10.1 Machtsfuncties differentiëren

intro Met een differentiequotiënt is dit te controleren.

$$s(10) = 6 \cdot 10\sqrt{10} = 189,736 \dots \text{ en } s(10,001) = 6 \cdot 10,001\sqrt{10,001} = 189,765 \dots$$

$$\text{De snelheid op } t = 10 \text{ is ongeveer } \frac{189,765 \dots - 189,736 \dots}{0,001} = 28,461 \dots \text{ m/s}$$

$28,461 \dots \times 3,6 \approx 102 \text{ km/uur}$. De bewering van Max klopt met de formule.

1 a $\frac{f(2,001) - f(2)}{0,001} = \frac{0,499 \dots - 0,5}{0,001} = -0,249 \dots$

De helling van f in het punt $(2, \frac{1}{2})$ is ongeveer $-0,25$.

$$b \quad \frac{f(-0,999) - f(-1)}{0,001} = \frac{-1,001 \dots - -1}{0,001} = -1,001 \dots$$

De helling van f in het punt $(-1, -1)$ is ongeveer -1 .

$$c \quad f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x + \Delta x)} - \frac{x + \Delta x}{x(x + \Delta x)} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$d \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$$

Als Δx nadert naar 0, dan geldt: $\frac{-1}{x(x - 0)} = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$$e \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \text{ dan } f'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$2 \quad a \quad g(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \text{ dus } g'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

b

X	Y ₁	Y ₂		
1	1	-3		
2	0.125	-0.188		
3	0.037	-0.037		
4	0.0156	-0.012		

X=

c

Plot1	Plot2	Plot3
Y ₁ = X ⁻³		
Y ₂ = $\frac{d}{dx}(Y_1) _{X=X}$		
Y ₃ = $-\frac{3}{x^4}$		
Y ₄ =		
Y ₅ =		
Y ₆ =		
Y ₇ =		

X	Y ₁	Y ₂	Y ₃	
1	1	-3	-3	
2	0.125	-0.188	$-\frac{3}{16}$	
3	0.037	-0.037	$-\frac{1}{27}$	
4	0.0156	-0.012	$-\frac{3}{256}$	

X=1

De kolommen Y₂ (afgerond) en Y₃ komen met elkaar overeen.

$$d \quad h(x) = x^{0,7} \text{ dus } h'(x) = 0,7x^{-0,3}$$

Plot1 Plot2 Plot3

Y ₁ = X ^{0.7}		
Y ₂ = $\frac{d}{dx}(Y_1) _{X=X}$		
Y ₃ = 0.7X ^{-0.3}		
Y ₄ =		
Y ₅ =		
Y ₆ =		
Y ₇ =		

X	Y ₁	Y ₂	Y ₃	
1	1	0.7	0.7	
2	1.6245	0.5686	0.5686	
3	2.1577	0.5035	0.5035	
4	2.639	0.4618	0.4618	

X=1

Ook nu komen de kolommen Y₂ en Y₃ met elkaar overeen.

10 Kettingregel

$$\begin{aligned} 3 \text{ a } p(x) &= -2x^{-2,8} \\ p'(x) &= 5,6x^{-3,8} \\ p'(x) &= \frac{5,6}{x^{3,8}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) &= \frac{2}{x^6} + \frac{1}{3x^2} = 2x^{-6} + \frac{1}{3}x^{-2} \\ f'(x) &= -12x^{-7} - \frac{2}{3}x^{-3} \\ f'(x) &= \frac{-12}{x^7} - \frac{2}{3x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } g(x) &= \frac{x+1}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^{-1} + x^{-2} \\ g'(x) &= -1x^{-2} - 2x^{-3} \\ g'(x) &= -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4} = \frac{x^3}{x^4} + \frac{4x}{x^4} - \frac{3}{x^4} \\ k(x) &= x^{-1} + 4x^{-3} - 3x^{-4} \\ k'(x) &= -1x^{-2} - 12x^{-4} + 12x^{-5} \\ k'(x) &= -\frac{1}{x^2} - \frac{12}{x^4} + \frac{12}{x^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad f(x) &= \sqrt{x} = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \text{ a } f(t) &= 4t^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{t}} = 4t^3 \cdot 2t^{-\frac{1}{2}} = 8t^{2\frac{1}{2}} \\ \text{b } f'(t) &= 2\frac{1}{2} \cdot 8t^{1\frac{1}{2}} = 20t^{1\frac{1}{2}} = 20t\sqrt{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \text{ a } a(x) &= \sqrt[5]{x} + 2\sqrt{x} \\ a(x) &= x^{\frac{1}{5}} + 2x^{\frac{1}{2}} \\ a'(x) &= \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ a'(x) &= \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) &= 5x^2\sqrt{x} \\ f(x) &= 5 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \\ f(x) &= 5x^{2\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= 12\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= 12\frac{1}{2}x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } k(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{6}{5x} \\ k(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4x \cdot x^{-\frac{1}{4}} + \frac{6}{5}x^{-1} \\ k(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{4}} + \frac{6}{5}x^{-1} \\ k'(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{4}} - \frac{6}{5}x^{-2} \\ k'(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{5x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } r(x) &= x(3x + \sqrt{x}) \\ r(x) &= 3x^2 + x\sqrt{x} \\ r(x) &= 3x^2 + x^{\frac{3}{2}} \\ r'(x) &= 6x + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ r'(x) &= 6x + 1\frac{1}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } h(x) &= (4x - \sqrt{x})^2 \\ h(x) &= 16x^2 - 8x\sqrt{x} + x \\ h(x) &= 16x^2 - 8x^{\frac{3}{2}} + x \\ h'(x) &= 32x - 12x^{\frac{1}{2}} + 1 \\ h'(x) &= 32x - 12\sqrt{x} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } j(x) &= \frac{2x+4}{x\sqrt{x}} \\ j(x) &= \frac{2x}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{x\sqrt{x}} \\ j(x) &= 2x \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} \\ j(x) &= 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} \\ j'(x) &= x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} \\ j'(x) &= \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

7 a $D = \frac{6,0}{v^2} + 0,00050v^2 - 0,033$

$$D = 6,0v^{-2} + 0,00050v^2 - 0,033$$

$$\frac{dD}{dv} = -12v^{-3} + 0,001v$$

Het minimum vind je als $\frac{dD}{dv} = 0$

$$-12v^{-3} + 0,001v = 0$$

$$v(-12v^{-4} + 0,001) = 0$$

$$v = 0 \text{ of } -12v^{-4} + 0,001 = 0$$

$$v = 0 \text{ of } \frac{-12}{v^4} = -0,001$$

$$v = 0 \text{ of } v^4 = \frac{-12}{-0,001} = 12000$$

$$v = 0 \text{ of } v = (12000)^{\frac{1}{4}} = 10,466... \text{ of } v = -(12000)^{\frac{1}{4}} = -10,466...$$

Alleen $v \approx 10,5$ voldoet aan de voorwaarden.

De minimale kruissnelheid is ongeveer 10,5 m/s.

03 a In stap 1 wordt gebruik de breuk gesplitst in twee breuken.

b Met behulp van de rekenregels voor machten wordt de functie herleid.

Hier wordt gebruik gemaakt van de regel $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$

$$f(x) = 8x^{-2} - 3x^{-4}$$

c $f'(x) = -16x^{-3} + 12x^{-5}$

d $f'(x) = -\frac{16}{x^3} + \frac{12}{x^5}$

e $g(x) = 15x^{-3,2}$

$$g'(x) = -48x^{-4,2}$$

$$g'(x) = -\frac{48}{x^{4,2}}$$

g $i(x) = \frac{4x^2 + 6}{x^3}$

$$i(x) = \frac{4x^2}{x^3} + \frac{6}{x^3}$$

$$i(x) = 4x^{-1} + 6x^{-3}$$

$$i'(x) = -4x^{-2} - 18x^{-4}$$

$$i'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{18}{x^4}$$

h $j(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 10}{x^6}$

$$j(x) = \frac{x^4}{x^6} + \frac{6x^2}{x^6} + \frac{10}{x^6}$$

$$j(x) = x^{-2} + 6x^{-4} + 10x^{-6}$$

$$j'(x) = -2x^{-3} - 24x^{-5} - 60x^{-7}$$

$$j'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{24}{x^5} - \frac{60}{x^7}$$

06 a $x^2\sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

b Hij gebruikt de rekenregel $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$

c $-1\frac{1}{2} \cdot 8 = -12$

d Hier maakt Dave gebruik van de rekenregel $c \cdot x^{-p} = \frac{c}{x^p}$

e $x^{2\frac{1}{2}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^2\sqrt{x}$

10 Kettingregel

U1 Voor het snijpunt van lijn l met de x -as geldt: $y = 0$.

$$14x - 98 = 0$$

$$14x = 98$$

$$x = 7$$

De coördinaten van punt Q zijn $(7,0)$.

$$f(x) = x\sqrt[4]{x^3} = x^{1\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = 1\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}$$

Als lijn l een raaklijn van f is, dan is in punt P de afgeleide 14, dus

$$1\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} = 14$$

$$x^{\frac{3}{4}} = \frac{14}{1\frac{3}{4}} = 8$$

$$x = 8^{\frac{4}{3}} = 16$$

$$f(16) = 16 \cdot \sqrt[4]{16^3} = 128$$

De coördinaten van punt P zijn $(16,128)$.

De oppervlakte van driehoek OPQ is $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 128 = 448$.

10.2 Samengestelde functies

intro De druk kan je uitrekenen door $20 + 0,5t$ in plaats van de temperatuur T in de formule van p te gebruiken. De formule wordt dan $p = 3,4(20 + 0,5t) + 932$ ofwel $p = 68 + 1,7t + 932$ dus $p = 1,7t + 1000$.

8 a $k(x) = x^2$ twee naar rechts verschuiven geeft $m(x) = (x - 2)^2$.

b $k(x) = x^2$

$$k'(x) = 2x$$

De helling van k in Q is $k'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

Punt P is het beeld van Q en is ontstaan uit de verschuiving van de grafiek.

De helling is daar gelijk aan de helling van punt Q .

c Voor x moet 2 ingevuld worden.

$$m'(4) = k'(2)$$

d $m'(x) = k'(x - 2)$

e $m'(x) = 2(x - 2)$ ofwel $m'(x) = 2x - 4$

9 a Bij een vermenigvuldiging van $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as moet x worden vervangen door $3x$, dit geeft $y = \frac{1}{6}(3x) + 1\frac{1}{2}$ ofwel $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

b De helling is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn, dus $\frac{1}{2}$

c De helling in punt $P = 3 \times$ de helling in punt Q , dus $h'(3) = 3 \cdot k'(9)$

d $h'(x) = 3 \cdot k'(3x)$

e $k(x) = \sqrt{x}$

$$k(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$k'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = 3 \cdot k'(3x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}}$$

$$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

10 a $f(x) = (x - 3)^5$
 $f'(x) = 5(x - 3)^4$

b $W = \sqrt{p + 7}$
 $W = (p + 7)^{\frac{1}{2}}$
 $\frac{dW}{dp} = \frac{1}{2}(p + 7)^{-\frac{1}{2}}$
 $\frac{dW}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{p + 7}}$

c $g(x) = \frac{4}{x + 5}$
 $g(x) = 4(x + 5)^{-1}$
 $g'(x) = -4(x + 5)^{-2}$
 $g'(x) = \frac{-4}{(x + 5)^2}$

d $y = \sqrt{-3x}$
 $y = (-3x)^{\frac{1}{2}}$
 $\frac{dy}{dx} = -3 \cdot \frac{1}{2}(-3x)^{-\frac{1}{2}}$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}(-3x)^{-\frac{1}{2}}$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2\sqrt{-3x}}$

e $h(x) = (x + 8)^4$
 $h'(x) = 4(x + 8)^3$

f $k(x) = \sqrt[3]{5x}$
 $k(x) = (5x)^{\frac{1}{3}}$
 $k'(x) = 5 \cdot \frac{1}{3}(5x)^{-\frac{2}{3}}$
 $k'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x)^2}}$

g $r(x) = \frac{6}{x - 2}$
 $r(x) = 6(x - 2)^{-1}$
 $r'(x) = -1 \cdot 6(x - 2)^{-2}$
 $r'(x) = \frac{-6}{(x - 2)^2}$

h $P = \frac{13}{(9t)^8}$
 $P = 13(9t)^{-8}$
 $\frac{dP}{dt} = 9 \cdot -8 \cdot 13(9t)^{-9}$
 $\frac{dP}{dt} = -936 \cdot (9t)^{-9}$
 $\frac{dP}{dt} = \frac{-936}{(9t)^9}$

11 a $f(3) = 4 \cdot 3 - 2 = 10$
 $g(f(3)) = g(10) = 2^{\frac{1}{2} \cdot 10} = 2^5 = 32$

b $g(f(x)) = 2^{\frac{1}{2}(4x-2)} = 2^{2x-1} = k(x)$

c $r(x) = q(p(x)) = \sin(2x + 1)$

d $v(x) = 4x - 3$ en $w(x) = \log(x)$

12 a $k(x) = g(f(x)) = 4 - 2\log(x)$
 $h(x) = f(g(x)) = \log(4 - 2x)$

b $k(x) = g(f(x)) = 2\sin(x) - 3$
 $h(x) = f(g(x)) = \sin(2x - 3)$

c $k(x) = g(f(x)) = \frac{3}{3^x}$

$h(x) = f(g(x)) = 3^{\frac{3}{x}}$

d $k(x) = g(f(x)) = 2\log(2^x) = x$
 $h(x) = f(g(x)) = 2^{2\log(x)} = x$

13 a $f(x) = 3x^2 - 5$

$g(x) = \sqrt{x}$

b $f(x) = 3x^4 + 7$

$g(x) = \frac{2}{x}$

c $f(x) = x^2 - 3x$

$g(x) = \log(x)$

d $f(x) = \sin(x)$

$g(x) = \frac{2}{x}$

10 Kettingregel

- 14 a** De vergelijking van de raaklijn heeft de vorm $y = ax + b$.

$$\text{De richtingscoëfficiënt } a = \frac{2 - (-2)}{5 - \frac{1}{5}} = \frac{4}{\frac{24}{5}} = \frac{5}{6}$$

$$B(5, 2) \text{ substitueren in } y = \frac{5}{6}x + b \text{ geeft } 2 = \frac{5}{6} \cdot 5 + b, \text{ dus } b = -2\frac{1}{6}$$

$$\text{De vergelijking van lijn } l \text{ is } y = \frac{5}{6}x - 2\frac{1}{6}$$

b $k(x) = -3 + \sqrt{5x} = -3 + (5x)^{\frac{1}{2}}$

$$k'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$$

$$\text{Een raaklijn evenwijdig aan lijn } l, \text{ dan moet } \frac{5}{2\sqrt{5x}} = \frac{5}{6}$$

$$2\sqrt{5x} = 6$$

$$\sqrt{5x} = 3$$

$$5x = 9$$

$$x = \frac{9}{5}$$

$$k\left(\frac{9}{5}\right) = -3 + \sqrt{5 \cdot \frac{9}{5}} = 0$$

De coördinaten van het punt zijn $\left(1\frac{4}{5}, 0\right)$.

- 010 a** Door alleen een verschuiving verandert de helling van een grafiek niet.

b De afgeleide van $h(x) = (x - 7)^4$ is $h'(x) = 4(x - 7)^3$

c x is vervangen door $3x$, dat betekent dat de grafiek met $\frac{1}{3}$ is vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as.

d Als $g(x) = f(ax)$ dan is $g'(x) = a \cdot f'(ax)$, en de afgeleide van $3x$ is 3.

e $m(x) = 5\sqrt{6x} = 5(6x)^{\frac{1}{2}}$

$$m'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5(6x)^{-\frac{1}{2}} \text{ ofwel } m'(x) = \frac{15}{\sqrt{6x}}$$

- 013 a** $g(x) = 2^x$ en $f(x) = 6x - 3$

b De functie k is ontstaan door in de functie $g(x) = \sqrt{x}$ de x te vervangen door $f(x) = 8 - x^2$

c $g(x) = \frac{5}{x}$ en $f(x) = 4x^2 - 9$

d $f(x) = 7x^2 - 2$

$$g(x) = x^5$$

e $f(x) = \log(x)$

$$g(x) = \frac{3}{x}$$

f $f(x) = 8 - 9x$

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

g $f(x) = \cos(x)$

$$g(x) = \frac{-4}{x}$$

U2 a $f_a(x) = a(x - 2)^2$

$$f'_a(x) = 2a(x - 2)$$

$$-6 = 2a(1 - 2)$$

$$-6 = 2a \cdot -1$$

$$a = 3$$

b $2 \cdot 1(x - 2) = 1$

$$2x - 4 = 1$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$f_1\left(2\frac{1}{2}\right) = 1 \cdot \left(2\frac{1}{2} - 2\right)^2 = \frac{1}{4}$$

In het punt $\left(2\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ is de helling van f_1 gelijk aan 1.

c $2 \cdot 4(x - 2) = 1$

$$x - 2 = \frac{1}{8}$$

$$x = 2\frac{1}{8}$$

$$f_4\left(2\frac{1}{8}\right) = 4 \cdot \left(2\frac{1}{8} - 2\right)^2 = \frac{1}{16}$$

In het punt $\left(2\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$ is de helling van f_4 gelijk aan 1.

d $2a(x - 2) = 1$

$$2a = \frac{1}{x - 2}$$

$$a = \frac{1}{2(x - 2)}$$

dit substitueren in $y = f_a(x) = a(x - 2)^2$ geeft

$$y = \frac{1}{2(x - 2)} \cdot (x - 2)^2$$

$$y = \frac{(x - 2)^2}{2(x - 2)}$$

$$y = \frac{x - 2}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

10.3 De kettingregel

intro Als je $Y2$ vermenigvuldigt met $2x$ dan krijg je $Y3$

$$\text{Dus } f'(x) = 2x \cdot 3(x^2 + 5)^2 = 6x(x^2 + 5)^2$$

15 a De coördinaten zijn (10,60) en (20,130).

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{130 - 60}{20 - 10} = 7 \text{ liters per seconde}$$

b De coördinaten zijn (60,50) en (130,58).

$$\frac{\Delta h}{\Delta V} = \frac{58 - 50}{130 - 60} = \frac{8}{70} \approx 0,11 \text{ cm per liter}$$

c $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{58 - 50}{20 - 10} = 0,8 \text{ cm per seconde}$

d $\frac{\Delta h}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta h \cdot \Delta V}{\Delta t \cdot \Delta V} = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, de eenheid hiervan is cm per seconde.

16 a $V(t) = 2t + 50$

$$V'(t) = 2$$

$$V'(10) = 2$$

b $V(10) = 2 \cdot 10 + 50 = 70$

Op $t = 10$ zit er 70 liter water in het reservoir.

c $h(V) = 2\sqrt{V} = 2V^{\frac{1}{2}}$

$$h'(V) = \frac{1}{2} \cdot 2V^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

Op $t = 10$ is $V = 70$, dus $h'(70) = \frac{1}{\sqrt{70}} = 0,1195 \dots \approx 0,12 \text{ cm per liter}$.

d $h(t) = 2\sqrt{2t + 50}$

e $\frac{h(10,001) - h(10)}{10,001 - 10} = \frac{16,7334 \dots - 16,7332 \dots}{0,001} = 0,239 \dots \approx 0,24 \text{ cm per seconde}$

f $h'(70) \cdot V'(10) = 0,1195 \dots \cdot 2 = 0,239 \dots = h'(10)$

10 Kettingregel

17 a $f(x) = (3x^2 + 8)^4$

$$f(x) = g(h(x))$$

$$h(x) = 3x^2 + 8 \text{ en } g(x) = x^4$$

$$h'(x) = 6x \text{ en } g'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 4 \cdot (3x^2 + 8)^3 \cdot 6x$$

$$f'(x) = 24x(3x^2 + 8)^3$$

b $w(x) = (1 - 3x^3)^6$

$$w(x) = g(f(x))$$

$$f(x) = 1 - 3x^3 \text{ en } g(x) = x^6$$

$$f'(x) = -9x^2 \text{ en } g'(x) = 6x^5$$

$$w'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$w'(x) = 6 \cdot (1 - 3x^3)^5 \cdot -9x^2$$

$$w'(x) = -54x^2(1 - 3x^3)^5$$

c $s(t) = (t^3 + 7)^3$

$$s(t) = g(f(t))$$

$$f(t) = t^3 + 7 \text{ en } g(t) = t^3$$

$$f'(t) = 3t^2 \text{ en } g'(t) = 3t^2$$

$$s'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t)$$

$$s'(t) = 3 \cdot (t^3 + 7)^2 \cdot 3t^2$$

$$s'(t) = 9t^2(t^3 + 7)^2$$

d $h(x) = (5x^{1,3} - 12)^7$

$$h(x) = g(f(x))$$

$$f(x) = 5x^{1,3} - 12 \text{ en } g(x) = x^7$$

$$f'(x) = 6,5x^{0,3} \text{ en } g'(x) = 7x^6$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$h'(x) = 7 \cdot (5x^{1,3} - 12)^6 \cdot 6,5x^{0,3}$$

$$h'(x) = 45,5x^{0,3} \cdot (5x^{1,3} - 12)^6$$

e $p(q) = (2 - \sqrt{q})^5$

$$p(q) = g(f(q))$$

$$f(q) = 2 - \sqrt{q} = 2 - q^{\frac{1}{2}} \text{ en } g(q) = q^5$$

$$f'(q) = -\frac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{q}} \text{ en } g'(q) = 5q^4$$

$$p'(q) = g'(f(q)) \cdot f'(q)$$

$$p'(q) = 5(2 - \sqrt{q})^4 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{q}}$$

$$p'(q) = \frac{-5(2 - \sqrt{q})^4}{2\sqrt{q}}$$

f $k(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$

$$k(t) = g(f(t))$$

$$f(t) = 1 - \frac{1}{t} = 1 - t^{-1} \text{ en } g(t) = t^3$$

$$f'(t) = t^{-2} = \frac{1}{t^2} \text{ en } g'(t) = 3t^2$$

$$k'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t)$$

$$k'(t) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$k'(t) = \frac{3}{t^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2$$

18 a Casper vergeet de haakjes om $3x^2 + 4$.

b $f(x) = (x^3 + 4x)^5$

$$f'(x) = 5 \cdot (x^3 + 4x)^4 \cdot (3x^2 + 4)$$

$$f'(x) = (15x^2 + 20) \cdot (x^3 + 4x)^4$$

19 a $f(x) = (x^2 + x + 311)^4$

$$f(x) = g(h(x)) \text{ met}$$

$$h(x) = x^2 + x + 311 \text{ en } g(x) = x^4$$

$$h'(x) = 2x + 1 \text{ en } g'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 4(x^2 + x + 311)^3 \cdot (2x + 1)$$

$$f'(x) = (8x + 4)(x^2 + x + 311)^3$$

b $g(x) = (3x^{2,7} - 19^{1,7})^3$

$$g(x) = k(h(x)) \text{ met}$$

$$h(x) = 3x^{2,7} - 19^{1,7} \text{ en } k(x) = x^3$$

$$h'(x) = 8,1x^{1,7} \text{ en } k'(x) = 3x^2$$

$$g'(x) = k'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$g'(x) = 3(3x^{2,7} - 19^{1,7})^2 \cdot 8,1x^{1,7}$$

$$g'(x) = 24,3x^{1,7}(3x^{2,7} - 19^{1,7})^2$$

20 a $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$$f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$$

$$f'(x) = -(x^2 + 1)^{-2} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1}$$

b $g(x) = \frac{5}{(2x^3 - 4x)^2}$

$$g(x) = 5(2x^3 - 4x)^{-2}$$

$$g'(x) = -10(2x^3 - 4x)^{-3} \cdot (6x^2 - 4)$$

$$g'(x) = \frac{-60x^2 + 40}{(2x^3 - 4x)^3}$$

$$\begin{aligned} \text{c } h(x) &= \frac{3}{(x+4)^2 - 4} \\ h(x) &= 3((x+4)^2 - 4)^{-1} \\ h'(x) &= -3((x+4)^2 - 4)^{-2} \cdot 2(x+4) \\ h'(x) &= \frac{-6x - 24}{((x+4)^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= \frac{-4}{(x^4 + 7x)^3} \\ k(x) &= -4 \cdot (x^4 + 7x)^{-3} \\ k'(x) &= 12(x^4 + 7x)^{-4} \cdot (4x^3 + 7) \\ k'(x) &= \frac{48x^3 + 84}{(x^4 + 7x)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{21 a } f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} - x \\ f(x) &= (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - x \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 1 \\ f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } g(x) &= x^2 + \sqrt{4 - x} \\ g(x) &= x^2 + (4 - x)^{\frac{1}{2}} \\ g'(x) &= 2x + \frac{1}{2}(4 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -1 \\ g'(x) &= 2x - \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } h(x) &= \sqrt{2x^3 - 4x} + 5x \\ h(x) &= (2x^3 - 4x)^{\frac{1}{2}} + 5x \\ h'(x) &= \frac{1}{2}(2x^3 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x^2 - 4) + 5 \\ h'(x) &= \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{2x^3 - 4x}} + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } k(x) &= 4x - \sqrt{4x - 4x^4} \\ k(x) &= 4x - (4x - 4x^4)^{\frac{1}{2}} \\ k'(x) &= 4 - \frac{1}{2}(4x - 4x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 - 16x^3) \\ k'(x) &= 4 - \frac{2 - 8x^3}{\sqrt{4x - 4x^4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{22 a } f(x) &= (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \\ f(x) &= (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\ f(x) &= (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \\ f'(x) &= \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ f'(x) &= 3x\sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } y &= \frac{12}{\sqrt{3x^4 - 2}} \\ y &= 12 \cdot (3x^4 - 2)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{dy}{dx} &= -6(3x^4 - 2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 12x^3 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-72x^3}{(3x^4 - 2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-72x^3}{(3x^4 - 2)\sqrt{3x^4 - 2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } g(a) &= 15a\sqrt{3a} \\ g(a) &= 15a \cdot \sqrt{3} \cdot a^{\frac{1}{2}} \\ g(a) &= 15\sqrt{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} \\ g'(a) &= \frac{3}{2} \cdot 15\sqrt{3} \cdot a^{\frac{1}{2}} \\ g'(a) &= 22\frac{1}{2}\sqrt{3a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } p &= \frac{6}{(3t^2 - 4t)^3} \\ p &= 6 \cdot (3t^2 - 4t)^{-3} \\ \frac{dp}{dt} &= -18 \cdot (3t^2 - 4t)^{-4} \cdot (6t - 4) \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{-108t + 72}{(3t^2 - 4t)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{23 a } x^2 - 11 &= 0 \\ x^2 &= 11 \\ x &= -\sqrt{11} \text{ of } x = \sqrt{11} \\ \text{Het domein van } f &\text{ is } \langle \leftarrow, -\sqrt{11} \rangle \cup \langle \sqrt{11}, \rightarrow \rangle. \end{aligned}$$

10 Kettingregel

$$b \quad f(6) = \frac{5}{\sqrt{6^2 - 11}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

De coördinaten van het raakpunt zijn (6, 1).

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 11}}$$

$$f(x) = 5(x^2 - 11)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -2\frac{1}{2}(x^2 - 11)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{-5x}{(x^2 - 11)\sqrt{x^2 - 11}}$$

$$f'(6) = \frac{-5 \cdot 6}{(6^2 - 11)\sqrt{6^2 - 11}} = \frac{-30}{25 \cdot \sqrt{25}} = \frac{-30}{125} = -\frac{6}{25}$$

De helling in het raakpunt is $-\frac{6}{25}$ dus een vergelijking van de raaklijn is $y = -\frac{6}{25}x + b$. De coördinaten van het raakpunt (6, 1) invullen geeft

$1 = -\frac{6}{25} \cdot 6 + b$ dit geeft $b = 2\frac{11}{25}$ en de vergelijking van de raaklijn is dan

$$y = -\frac{6}{25}x + 2\frac{11}{25}$$

$$24 \quad a \quad f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

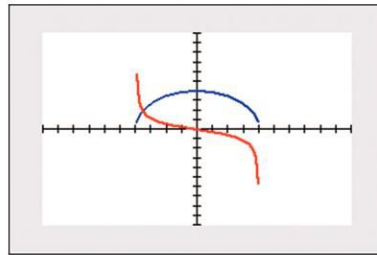
$$f(x) = (16 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

b Zie hiernaast.

Op deze plot is op het eerste gezicht niet te zien dat in het domein van f wel -4 en 4 zitten en bij f' niet. Maar als je in de grafiek naar de waarde $x = 4$ gaat, zie je het wel.



$$017 \quad a \quad k(x) = g(f(x)) \text{ met } g(x) = x^5 \text{ en } f(x) = 7x^3 - 9$$

$$b \quad g'(x) = 5x^4 \text{ dus } g'(f(x)) = 5(7x^3 - 9)^4$$

$$c \quad f(x) = 7x^3 - 9 \text{ dus } f'(x) = 3 \cdot 7x^{3-1} = 21x^2$$

$$d \quad k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ geeft}$$

$$k'(x) = 5(7x^3 - 9)^4 \cdot 21x^2$$

$$k'(x) = 105x^2(7x^3 - 9)^4$$

$$e \quad k(x) = (6x^3 + 1)^3$$

$$k(x) = g(f(x))$$

$$f(x) = 6x^3 + 1 \text{ en } g(x) = x^3$$

$$f'(x) = 18x^2 \text{ en } g'(x) = 3x^2$$

$$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$k'(x) = 3 \cdot (6x^3 + 1)^2 \cdot 18x^2$$

$$k'(x) = 54x^2(6x^3 + 1)^2$$

$$f \quad w(x) = (12 - 5x^2)^4$$

$$w(x) = g(f(x))$$

$$f(x) = 12 - 5x^2 \text{ en } g(x) = x^4$$

$$f'(x) = -10x \text{ en } g'(x) = 4x^3$$

$$w'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$w'(x) = 4 \cdot (12 - 5x^2)^3 \cdot -10x$$

$$w'(x) = -40x(12 - 5x^2)^3$$

$$g \quad m(p) = (4p^5 + 2)^4$$

$$m(p) = g(f(p))$$

$$f(p) = 4p^5 + 2 \text{ en } g(p) = p^4$$

$$f'(p) = 20p^4 \text{ en } g'(p) = 4p^3$$

$$m'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

$$m'(p) = 4 \cdot (4p^5 + 2)^3 \cdot 20p^4$$

$$m'(p) = 80p^4(4p^5 + 2)^3$$

$$h \quad h(x) = (2x^{1,4} + 2,5)^6$$

$$h(x) = g(f(x))$$

$$f(x) = 2x^{1,4} + 2,5 \text{ en } g(x) = x^6$$

$$f'(x) = 2,8x^{0,4} \text{ en } g'(x) = 6x^5$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$h'(x) = 6 \cdot (2x^{1,4} + 2,5)^5 \cdot 2,8x^{0,4}$$

$$h'(x) = 16,8x^{0,4}(2x^{1,4} + 2,5)^5$$

$$\begin{aligned}
 \text{i} \quad v(a) &= (\sqrt{a} + 8)^3 \\
 v(a) &= g(f(a)) \\
 f(a) &= \sqrt{a} + 8 = a^{\frac{1}{2}} + 8 \text{ en } g(a) = a^3 \\
 f'(a) &= \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ en } g'(a) = 3a^2 \\
 v'(a) &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \\
 v'(a) &= 3(\sqrt{a} + 8)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \\
 v'(a) &= \frac{3(\sqrt{a} + 8)^2}{2\sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{j} \quad f(x) &= \left(\frac{4}{x} + 2\right)^3 \\
 f(x) &= g(h(x)) \\
 h(x) &= \frac{4}{x} + 2 \text{ en } g(x) = x^3 \\
 h'(x) &= \frac{-4}{x^2} \text{ en } g'(x) = 3x^2 \\
 f'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x) \\
 f'(x) &= 3 \cdot \left(\frac{4}{x} + 2\right)^2 \cdot \frac{-4}{x^2} \\
 f'(x) &= \frac{-12}{x^2} \cdot \left(\frac{4}{x} + 2\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{020 a} \quad f'(x) = -24(3x^2 + 5x)^{-5} \cdot (6x + 5) \text{ dus } f'(x) = \frac{-24(6x + 5)}{(3x^2 + 5x)^5}$$

b Omdat beide waarden moeten worden vermenigvuldigd met $g'(h(x))$

$$\begin{aligned}
 \text{U3 a} \quad h(x) &= \sqrt{(4x - 2)^5 + 3} \\
 h(x) &= ((4x - 2)^5 + 3)^{\frac{1}{2}} \\
 h'(x) &= \frac{1}{2}((4x - 2)^5 + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5(4x - 2)^4 \cdot 4 \\
 h'(x) &= \frac{20(4x - 2)^4}{2\sqrt{(4x - 2)^5 + 3}} \\
 h'(x) &= \frac{10(4x - 2)^4}{\sqrt{(4x - 2)^5 + 3}} \\
 \text{d} \quad k(x) &= \frac{2x^2 + x + 6}{\sqrt{2x^2 + x}} \\
 k(x) &= \frac{2x^2 + x}{\sqrt{2x^2 + x}} + \frac{6}{\sqrt{2x^2 + x}} \\
 k(x) &= (2x^2 + x)^{\frac{1}{2}} + 6(2x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \\
 k'(x) &= \frac{1}{2}(2x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4x + 1) + \\
 &\quad -3(2x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4x + 1) \\
 k'(x) &= \frac{4x + 1}{2\sqrt{2x^2 + x}} - \\
 &\quad \frac{12x + 3}{(2x^2 + x)\sqrt{2x^2 + x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b} \quad g(x) &= \frac{16}{(3x - 1)\sqrt{3x - 1}} \\
 g(x) &= 16((3x - 1)\sqrt{3x - 1})^{-1} \\
 g(x) &= 16((3x - 1)^{\frac{1}{2}})^{-1} \\
 g(x) &= 16(3x - 1)^{-\frac{1}{2}} \\
 g'(x) &= -24(3x - 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3 \\
 g'(x) &= \frac{-72}{(3x - 1)^2\sqrt{3x - 1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c} \quad f(x) &= (18x^2 + 6)\sqrt{3x^2 + 1} \\
 f(x) &= 6(3x^2 + 1)\sqrt{3x^2 + 1} \\
 f(x) &= 6(3x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \\
 f'(x) &= 1\frac{1}{2} \cdot 6(3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 6x \\
 f'(x) &= 54x\sqrt{3x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e} \quad m(x) &= \frac{x + 8}{x + 2} \\
 m(x) &= \frac{(x + 2) + 6}{x + 2} \\
 m(x) &= \frac{x + 2}{x + 2} + \frac{6}{x + 2} \\
 m(x) &= 1 + 6(x + 2)^{-1} \\
 m'(x) &= -6(x + 2)^{-2} \\
 m'(x) &= \frac{-6}{(x + 2)^2} \\
 \text{f} \quad j(x) &= x\sqrt{x + 4} \\
 j(x) &= (x + 4)\sqrt{x + 4} - 4\sqrt{x + 4} \\
 j(x) &= (x + 4)^{\frac{3}{2}} - 4(x + 4)^{\frac{1}{2}} \\
 j'(x) &= 1\frac{1}{2}(x + 4)^{\frac{1}{2}} - 2(x + 4)^{-\frac{1}{2}} \\
 j'(x) &= 1\frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - \frac{2}{\sqrt{x + 4}}
 \end{aligned}$$

10 Kettingregel

U4 $f(x) = \frac{1}{2x-1} + x = (2x-1)^{-1} + x$

$$f'(x) = -2 \cdot (2x-1)^{-2} + 1 = \frac{-2}{(2x-1)^2} + 1$$

Er geldt: $f(x) = ax$ en $f'(x) = a$ dus

$$\frac{1}{2x-1} + x = ax \text{ en } \frac{-2}{(2x-1)^2} + 1 = a \text{ ofwel } \frac{-2x}{(2x-1)^2} + 1x = ax$$

Gelijkstellen geeft $\frac{1}{2x-1} + x = \frac{-2x}{(2x-1)^2} + 1x$

$$\frac{1}{2x-1} = \frac{-2x}{(2x-1)^2}$$

$$(2x-1)^2 = -2x(2x-1)$$

$$2x-1 = 0 \text{ of } 2x-1 = -2x$$

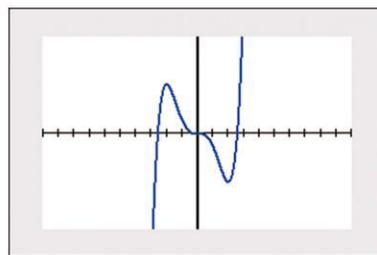
$$x = \frac{1}{2} \text{ (voldoet niet) of } x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ geeft } a = \frac{-2}{\left(2 \cdot \frac{1}{4} - 1\right)^2} + 1 = -7$$

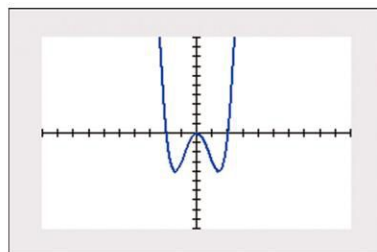
10.4 Extreme waarden

intro De functie heeft twee randpunten. In deze randpunten is de afgeleide niet gelijk aan 0, maar is er wel een maximum.

- 25 a** $g(x) = 2,4x^5 - 16x^3$
 $g'(x) = 12x^4 - 48x^2$
- b** $12x^4 - 48x^2 = 0$
 $12x^2(x^2 - 4) = 0$
 $12x^2 = 0$ of $x^2 - 4 = 0$
 $x = 0$ of $x = 2$ of $x = -2$
- c** Zie de plot hiernaast.
 De grafiek heeft een top bij $x = -2$ en $x = 2$.
 Bij $x = 0$ loopt de grafiek vlak, maar is er geen top.
- d** $g(-2) = 2,4 \cdot (-2)^5 - 16 \cdot (-2)^3 = 51,2$ dit is een maximum.
 $g(2) = 2,4 \cdot 2^5 - 16 \cdot 2^3 = -51,2$ dit is een minimum.



- 26 a** $f(x) = x^4 - 4x^2$
 $f'(x) = 4x^3 - 8x$
 $4x^3 - 8x = 0$
 $4x(x^2 - 2) = 0$
 $4x = 0$ of $x^2 - 2 = 0$
 $x = 0$ of $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$
- Zie de plot hiernaast.
- f heeft een minimum $f(-\sqrt{2}) = -4$
 f heeft een maximum $f(0) = 0$
 f heeft een minimum $f(\sqrt{2}) = -4$



$$\begin{aligned}
 \text{b } f(x) &= \sqrt{x^2 + 6x + 10} \\
 f(x) &= (x^2 + 6x + 10)^{\frac{1}{2}} \\
 f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 10)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 6) \\
 f'(x) &= \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} \\
 \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} &= 0 \\
 x + 3 &= 0 \\
 x &= -3
 \end{aligned}$$

Zie de plot hiernaast.

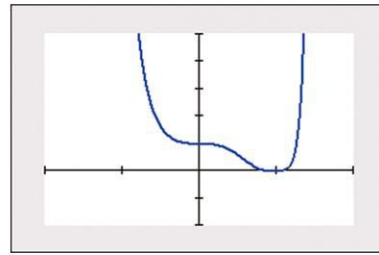
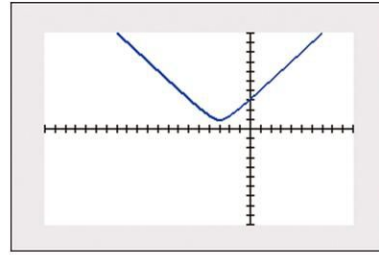
f heeft een minimum $f(-3) = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{c } f(x) &= (x^3 - 1)^4 \\
 f'(x) &= 4(x^3 - 1)^3 \cdot 3x^2 \\
 f'(x) &= 12x^2(x^3 - 1)^3 \\
 12x^2(x^3 - 1)^3 &= 0 \\
 12x^2 &= 0 \text{ of } (x^3 - 1)^3 = 0 \\
 x &= 0 \text{ of } x^3 - 1 = 0 \\
 x &= 0 \text{ of } x = 1
 \end{aligned}$$

Zie de plot hiernaast.

Bij $x = 0$ is er geen sprake van een extreme waarde.

f heeft een minimum $f(1) = 0$



- 27 a** De noemer van de breuk heeft een minimum bij $x = 2$ dus heeft functie f daar een maximum.

$$\begin{aligned}
 \text{b } f(x) &= \frac{20}{(x-2)^2 + 4} \\
 f(x) &= 20((x-2)^2 + 4)^{-1} \\
 f'(x) &= -20((x-2)^2 + 4)^{-2} \cdot 2(x-2) = 0 \\
 \frac{-40(x-2)}{((x-2)^2 + 4)^2} &= 0 \\
 x - 2 &= 0 \\
 x &= 2 \text{ is de enige oplossing, dus } f \text{ heeft maar één extreme waarde.}
 \end{aligned}$$

$$\text{c } f(2) = \frac{20}{(2-2)^2 + 4} = \frac{20}{4} = 5$$

Het maximum is $f(2) = 5$.

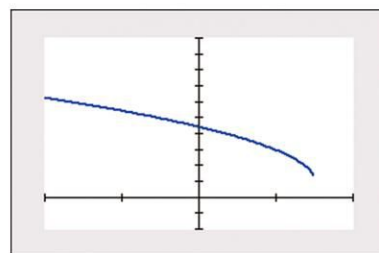
- 28 a** h bestaat alleen voor $3 - 2x \geq 0$ ofwel $-2x \geq -3$ dus $x \leq 1\frac{1}{2}$
Het domein is $\langle \leftarrow, 1\frac{1}{2} \right]$.

$h\left(1\frac{1}{2}\right) = 1 + 2\sqrt{3 - 2 \cdot 1\frac{1}{2}} = 1$, dus het randpunt van de grafiek van h is $\left(1\frac{1}{2}, 1\right)$ en het bereik $[1, \rightarrow)$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } h(x) &= 1 + 2\sqrt{3 - 2x} \\
 h(x) &= 1 + 2(3 - 2x)^{\frac{1}{2}} \\
 h'(x) &= \frac{1}{2} \cdot 2(3 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 \\
 h'(x) &= -\frac{2}{\sqrt{3 - 2x}} \\
 h'(x) &= -\frac{2}{\sqrt{3 - 2x}} = 0 \text{ heeft geen oplossingen.}
 \end{aligned}$$

- c** Zie de plot hiernaast.

h heeft bij het randpunt een randminimum $h\left(1\frac{1}{2}\right) = 1$.



10 Kettingregel

- 29 a** $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, voor het domein geldt

$$16 - x^2 \geq 0 \text{ dus } -4 \leq x \leq 4.$$

$$f(x) = (16 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$$

$$\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$$

$$x = 0$$

Zie de plot hiernaast.

f heeft een maximum $f(0) = 4$.

f heeft randminima $f(-4) = 0$ en $f(4) = 0$.

- b** $g(x) = (x^3 - 3x)^4$

$$g'(x) = 4(x^3 - 3x)^3 \cdot (3x^2 - 3)$$

$$12(x^3 - 3x)^3(x^2 - 1) = 0$$

$$(x^3 - 3x)^3 = 0 \text{ of } x^2 - 1 = 0$$

$$x^3 - 3x = 0 \text{ of } x^2 = 1$$

$$x(x^2 - 3) = 0 \text{ of } x^2 = 1$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 3 \text{ of } x^2 = 1$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt{3} \text{ of } x = -\sqrt{3} \text{ of } x = 1 \text{ of } x = -1$$

Zie de plot hiernaast.

De minima zijn $g(-\sqrt{3}) = 0$, $g(0) = 0$, $g(\sqrt{3}) = 0$.

De maxima zijn $g(-1) = 16$ en $g(1) = 16$.

- c** $h(x) = x^2 - 4x\sqrt{x}$, voor het domein geldt $x \geq 0$.

$$h(x) = x^2 - 4x^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = 2x - 6\sqrt{x}$$

$$2x - 6\sqrt{x} = 0$$

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) = 0$$

$$2\sqrt{x} = 0 \text{ of } \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\sqrt{x} = 0 \text{ of } \sqrt{x} = 3$$

$$x = 0 \text{ of } x = 9$$

Zie de plot hiernaast.

h heeft een minimum $h(9) = -27$.

h heeft een randmaximum $h(0) = 0$.

- d** $n(x) = 2x + \sqrt{12 - 2x^2}$, voor het domein geldt

$$12 - 2x^2 \geq 0 \text{ dus } -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}.$$

$$n(x) = 2x + (12 - 2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$n'(x) = 2 + \frac{1}{2}(12 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4x$$

$$n'(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{12 - 2x^2}}$$

$$2 - \frac{2x}{\sqrt{12 - 2x^2}} = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{12 - 2x^2}} = 2$$

$$2x = 2\sqrt{12 - 2x^2}$$

$$x = \sqrt{12 - 2x^2}$$

$$x^2 = 12 - 2x^2$$

$$3x^2 = 12$$

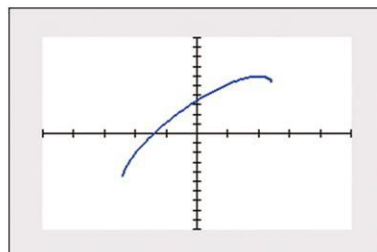
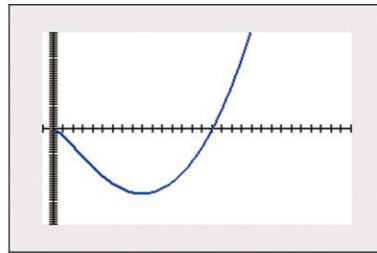
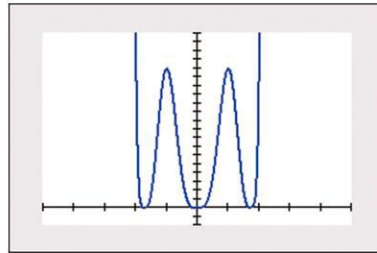
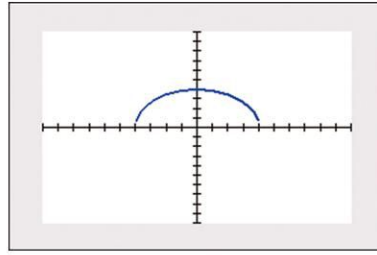
$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ (voldoet niet) of } x = 2$$

Zie de plot hiernaast.

n heeft een maximum $n(2) = 6$, een randminimum $n(-\sqrt{6}) = -2\sqrt{6}$ en een

randmaximum $n(\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$.



e $p(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$p(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$p'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

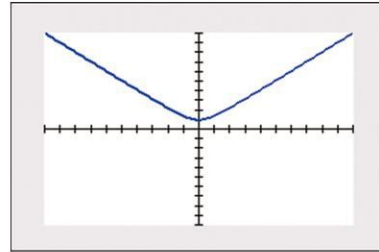
$$p'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

$$x = 0$$

Zie de plot hiernaast.

p heeft een minimum $p(0) = 1$.



f $q(x) = \frac{-5}{x^2 + 3}$

$$q(x) = -5 \cdot (x^2 + 3)^{-1}$$

$$q'(x) = -5 \cdot -(x^2 + 3)^{-2} \cdot 2x$$

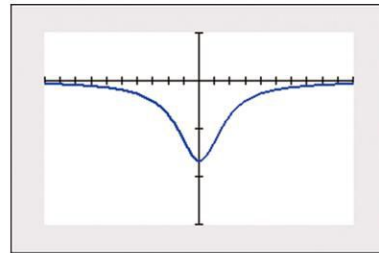
$$q'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 3)^2} = 0$$

$$10x = 0$$

$$x = 0$$

Zie de plot hiernaast.

q heeft een minimum $q(0) = -1\frac{2}{3}$



30 De oppervlakte van rechthoek $OPAQ = OP \cdot PA = x \cdot f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 16x$

Voor de maximale oppervlakte moet de afgeleide nul zijn, dus

$$-x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ of } x = -4$$

Alleen $x = 4$ voldoet.

De maximale oppervlakte is $-\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 16 \cdot 4 = 42\frac{2}{3}$

31 a $f(x) = \sqrt{12x - x^3}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(12x - x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (12 - 3x^2)$$

$$\frac{12 - 3x^2}{2\sqrt{12x - x^3}} = 0$$

$$12 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2 \text{ (voldoet niet)}$$

De top ligt bij $x = 2$.

$$\text{De } y\text{-waarde is } f(2) = \sqrt{12 \cdot 2 - 2^3} = \sqrt{24 - 8} = \sqrt{16} = 4$$

De coördinaten van de top zijn $(2, 4)$.

b Voor het domein geldt $12x - x^3 \geq 0$

$$12x - x^3 = 0$$

$$x(12 - x^2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 12 - x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt{12} \text{ of } x = -\sqrt{12}$$

De oplossing van $12x - x^3 \geq 0$ aflezen in de gegeven grafiek geeft $\langle \leftarrow, -\sqrt{12} \rangle \cup [0, \sqrt{12}]$.

10 Kettingregel

029 a De afgeleide van $32 - x^2$ is $-2x$

$$b \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{2}(32 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$$

$$f'(x) = 1 - x(32 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

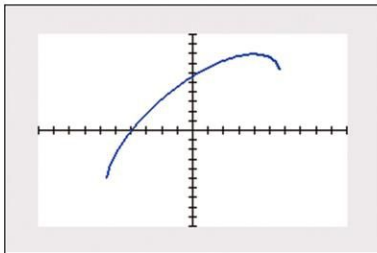
$$f'(x) = 1 - \frac{x}{(32 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{32 - x^2}}$$

$$c \quad f'(4) = 1 - \frac{4}{\sqrt{32 - 4^2}} = 1 - \frac{4}{\sqrt{16}} = 1 - 1 = 0, \text{ klopt } f'(4) = 0$$

$$f'(-4) = 1 - \frac{-4}{\sqrt{32 - (-4)^2}} = 1 - \frac{-4}{\sqrt{16}} = 1 - -1 = 2, \text{ klopt niet } f'(-4) \neq 0$$

d



De grafiek heeft een maximum $f(4) = 8$.

$$e \quad 32 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 32$$

$$x = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2} \text{ en } x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$f(-4\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} \text{ en } f(4\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

De coördinaten van de randpunten zijn $(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ en $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$$f \text{ heeft een maximum } f(4) = 8$$

$$f \text{ heeft een randminimum } f(-4\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

$$f \text{ heeft een randmaximum } f(4\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

$$U5 \quad a \quad f_2(x) = 2x + \frac{4}{2x - 7}$$

$$f_2(x) = 2x + 4(2x - 7)^{-1}$$

$$f_2'(x) = 2 + -4(2x - 7)^{-2} \cdot 2$$

$$f_2'(x) = 2 - \frac{8}{(2x - 7)^2}$$

$$2 - \frac{8}{(2x - 7)^2} = 0$$

$$\frac{8}{(2x - 7)^2} = 2$$

$$(2x - 7)^2 = 4$$

$$2x - 7 = -2 \text{ of } 2x - 7 = 2$$

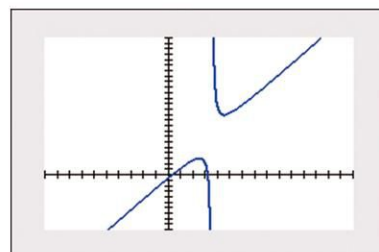
$$2x = 5 \text{ of } 2x = 9$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 4\frac{1}{2}$$

Zie de plot hiernaast.

$$f_2 \text{ heeft een maximum } f_2\left(2\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$f_2 \text{ heeft een minimum } f_2\left(4\frac{1}{2}\right) = 11$$



$$\begin{aligned} \text{b } f_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{4}{2x-7} \\ f_{\frac{1}{2}}'(x) &= \frac{1}{2} + 4(2x-7)^{-1} \\ f_{\frac{1}{2}}'(x) &= \frac{1}{2} - 4(2x-7)^{-2} \cdot 2 \\ f_{\frac{1}{2}}'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{8}{(2x-7)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{8}{(2x-7)^2} = 0$$

$$\frac{8}{(2x-7)^2} = \frac{1}{2}$$

$$(2x-7)^2 = 16$$

$$2x-7 = -4 \text{ of } 2x-7 = 4$$

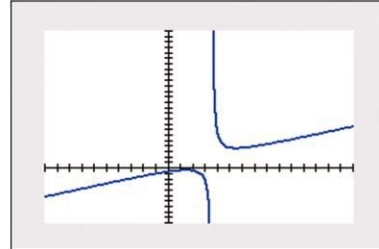
$$2x = 3 \text{ of } 2x = 11$$

$$x = 1\frac{1}{2} \text{ of } x = 5\frac{1}{2}$$

Zie de plot hiernaast.

$$f_{\frac{1}{2}} \text{ heeft een maximum } f_{\frac{1}{2}}\left(1\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f_{\frac{1}{2}} \text{ heeft een minimum } f_{\frac{1}{2}}\left(5\frac{1}{2}\right) = 3\frac{3}{4}$$



$$\begin{aligned} \text{c } f_a(x) &= ax + \frac{4}{2x-7} = ax + 4(2x-7)^{-1} \\ f_a'(x) &= a + -4(2x-7)^{-2} \cdot 2 = a - \frac{8}{(2x-7)^2} \end{aligned}$$

$$a - \frac{8}{(2x-7)^2} = 0 \text{ geeft } \frac{8}{(2x-7)^2} = a \text{ ofwel } (2x-7)^2 = \frac{8}{a}$$

Hieruit volgt dat er geen oplossingen zijn als $a \leq 0$.

$$\text{d } \text{Uitgaande van opdracht c moet hier gelden } \frac{8}{(2 \cdot 3 - 7)^2} = a, \text{ dit geeft } a = 8.$$

Om het andere punt te berekenen los je de vergelijking $\frac{8}{(2x-7)^2} = 8$ op.

$$\text{Dan moet } (2x-7)^2 = 1$$

$$2x-7 = -1 \text{ of } 2x-7 = 1$$

$$2x = 6 \text{ of } 2x = 8$$

$$x = 3 \text{ of } x = 4$$

Het minimum is $f_8(4) = 36$.

U6 Voor het randminimum moet $4x^2 - x^4 + b = 0$ met als oplossing $x = \sqrt{3}$.

$$4(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^4 + b = 0$$

$$4 \cdot 3 - 9 + b = 0 \text{ dit geeft } b = -3.$$

$$g(x) = a\sqrt{4x^2 - x^4 - 3}$$

$$g(x) = a(4x^2 - x^4 - 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot a(4x^2 - x^4 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8x - 4x^3)$$

$$g'(x) = \frac{a(4x - 2x^3)}{\sqrt{4x^2 - x^4 - 3}}$$

Voor de extreme waarden geldt $g'(x) = 0$, dus moet $a(4x - 2x^3) = 0$

$$4x - 2x^3 = 0$$

$$2x(2 - x^2) = 0$$

$$2x = 0 \text{ of } 2 - x^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } x^2 = 2$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ of } x = \sqrt{2}$$

$$g(-\sqrt{2}) = a\sqrt{4(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2})^4 - 3} = 5 \text{ ofwel } a\sqrt{8 - 4 - 3} = 5 \text{ ofwel } a\sqrt{1} = 5 \text{ dus } a = 5.$$

$$g(\sqrt{2}) = a\sqrt{4(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^4 - 3} = 5 \text{ ofwel } a\sqrt{8 - 4 - 3} = 5 \text{ ofwel } a\sqrt{1} = 5 \text{ dus } a = 5.$$

Conclusie: $a = 5$ en $b = -3$.

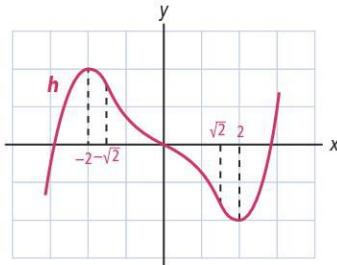
10 Kettingregel

10.5 Buigpunten

intro De snelheid van Sjoerd neemt eerst toe en later weer af. De snelheid bereikt dus ergens een maximum.

- 32 a** Op dat interval geldt dat $f'(x) < 0$.
b Op dat interval is sprake van toenemende daling.
 De afgeleide neemt af, zie de rechter figuur.
c Op het interval $[0, 1]$ vertoont f een afnemende daling.
 De afgeleide van f' neemt toe op dit interval, zie de rechter figuur.
 De afgeleide van f' is dan groter dan 0.
d Op het interval $[-2, -1]$ geldt f' is groter dan 0 en de afgeleide van f' is daar kleiner dan 0.
- 33 a** h is afnemend dalend als h' negatief is en stijgt, dus op de intervallen $\langle -\sqrt{2}, 0 \rangle$ en $\langle \sqrt{2}, 2 \rangle$.
 h is toenemend dalend als h' negatief is en daalt, dus op de intervallen $\langle -2, -\sqrt{2} \rangle$ en $\langle 0, \sqrt{2} \rangle$.
b h gaat over van toenemend dalend naar afnemend dalend bij $x = -\sqrt{2}$ en $x = \sqrt{2}$.

c



- 34 a** $f(x) = x - 4\sqrt{x}$, het domein is $x \geq 0$. $f(x) = x - 4x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Extreme waarden als $1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

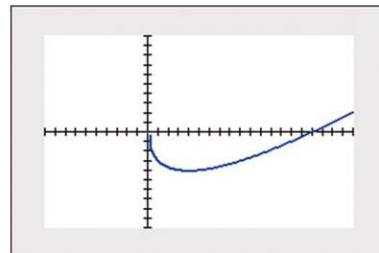
$$\frac{2}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\sqrt{x} = 2 \text{ dus } x = 4$$

Zie de plot hiernaast.

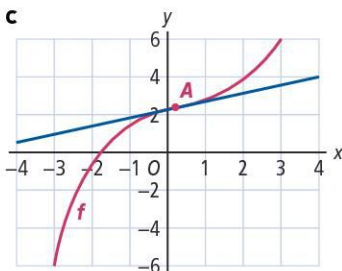
f heeft een minimum $f(4) = -4$.

f heeft een randmaximum $f(0) = 0$.



- b** $f'(x) = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}}$
 $f''(x) = x^{-\frac{3}{2}}$
 $f''(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
 Voor $x > 0$ is $\frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$, dus f' stijgt op het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
- c** Zie de plot bij opgave a: de daling wordt steeds minder, dus er is sprake van afnemende daling.
 De stijging wordt steeds meer, dus is er sprake van toenemende stijging.

- 35 a c**



- b Tot punt A neemt de helling af en na punt A neemt de helling toe, dus is er in punt A sprake van een minimale helling, dit wijst op een extreme waarde van de hellingfunctie $f'(x)$.

36 a $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$$

$$f''(x) = x^2 - x - 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = 3 \text{ of } x = -2$$

- b Zie de plot hiernaast.

Ja, de grafiek heeft buigpunten voor $x = -2$ en $x = 3$.

c $f(-2) = -9\frac{1}{3}$

$$f(3) = -24\frac{3}{4}$$

De coördinaten van de buigpunten zijn $(-2, -9\frac{1}{3})$ en $(3, -24\frac{3}{4})$.

d $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3$$

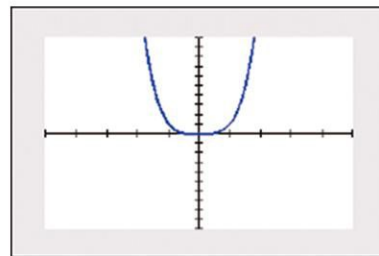
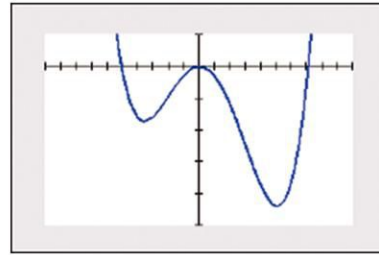
$$f''(x) = 12x^2$$

$$12x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Zie de plot hiernaast.

De grafiek heeft voor $x = 0$ geen buigpunt.



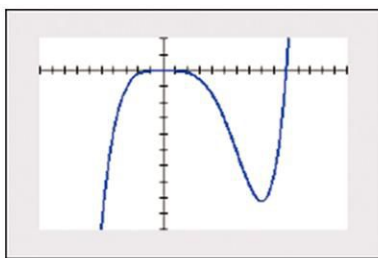
37 a $f(x) = x^5 - 10x^4$

$$f'(x) = 5x^4 - 40x^3$$

$$f''(x) = 20x^3 - 120x^2 = 0$$

$$20x^2(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 6$$



Een buigpunt voor $x = 6$

$$f(6) = -5184$$

Het buigpunt is $(6, -5184)$.

b $f(x) = \frac{6x - 4}{x^2}$

$$f(x) = \frac{6x}{x^2} - \frac{4}{x^2}$$

$$f(x) = 6x^{-1} - 4x^{-2}$$

$$f'(x) = -6x^{-2} + 8x^{-3}$$

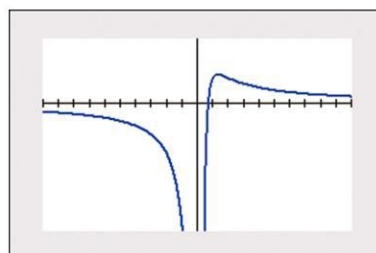
$$f''(x) = 12x^{-3} - 24x^{-4}$$

$$f''(x) = \frac{12}{x^3} - \frac{24}{x^4} = 0$$

$$\frac{12x - 24}{x^4} = 0$$

$$12x - 24 = 0$$

$$x = 2$$



Een buigpunt voor $x = 2$.

$$f(2) = 2$$

Het buigpunt is $(2, 2)$.

10 Kettingregel

c $f(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - x^3$

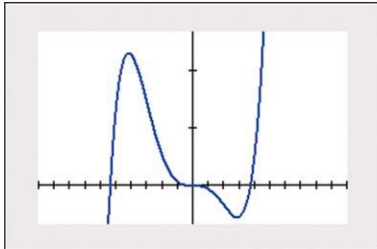
$$f'(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$$

$$f''(x) = x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } (x+3)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 2$$



Buigpunten voor $x = 0$ en $x = -3$
en $x = 2$

$$f(0) = 0, f(-3) = 21\frac{3}{5}, f(2) = -5\frac{1}{15}$$

De buigpunten zijn $(0,0)$, $(-3, 21\frac{3}{5})$
en $(2, -5\frac{1}{15})$

d $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 5}{10x}$

$$f(x) = \frac{3x^2}{10x} + \frac{2x}{10x} - \frac{5}{10x}$$

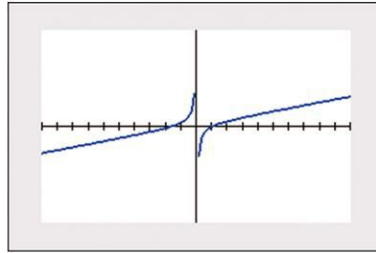
$$f(x) = \frac{3}{10}x + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}x^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{3}{10} + \frac{1}{2}x^{-2}$$

$$f''(x) = -1x^{-3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^3} = 0$$

Dit heeft geen oplossingen.



De grafiek heeft geen buigpunten.

38 a $\frac{1}{54}x^4 - x^2 = 0$

$$x^2(\frac{1}{54}x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ of } \frac{1}{54}x^2 - 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 54$$

De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = \sqrt{54}$ en $x = -\sqrt{54}$

b $f'(x) = \frac{4}{54}x^3 - 2x$

$$\frac{4}{54}x^3 - 2x = 0$$

$$4x^3 - 108x = 0$$

$$x(x^2 - 27) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 - 27 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \sqrt{27} \text{ of } x = -\sqrt{27}$$

Zie de plot hiernaast.

f heeft minima $f(-3\sqrt{3}) = -13\frac{1}{2}$ en $f(3\sqrt{3}) = -13\frac{1}{2}$

f heeft een maximum $f(0) = 0$

c $f''(x) = \frac{12}{54}x^2 - 2$

$$\frac{12}{54}x^2 - 2 = 0$$

$$12x^2 = 108$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ of } x = -3.$$

$$f(3) = -7\frac{1}{2} \text{ en } f(-3) = -7\frac{1}{2}$$

De buigraaklijn in $(3, -7\frac{1}{2})$: $f'(3) = -4$, dus $y = -4x + b$

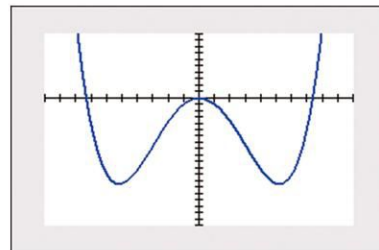
$$(3, -7\frac{1}{2}) \text{ invullen geeft } -7\frac{1}{2} = -4 \cdot 3 + b \text{ ofwel } b = -7\frac{1}{2} + 12 = 4\frac{1}{2}$$

Een vergelijking van de buigraaklijn in $(3, -7\frac{1}{2})$ is $y = -4x + 4\frac{1}{2}$

De buigraaklijn in $(-3, -7\frac{1}{2})$: $f'(-3) = 4$ dus $y = 4x + b$

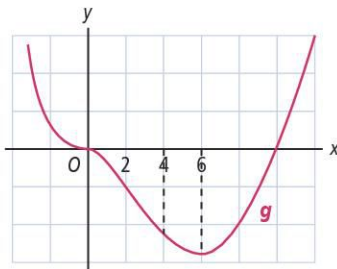
$$(-3, -7\frac{1}{2}) \text{ invullen geeft } -7\frac{1}{2} = 4 \cdot -3 + b \text{ ofwel } b = -7\frac{1}{2} + 12 = 4\frac{1}{2}$$

Een vergelijking van de buigraaklijn in $(-3, -7\frac{1}{2})$ is $y = 4x + 4\frac{1}{2}$



- 39** Stel dat $f(a)$ een maximum is, dan is de helling links van $x = a$ positief en rechts van $x = a$ negatief.
 Dus $f'(x) > 0$ links van $x = a$ en $f'(x) < 0$ rechts van $x = a$.
 De grafiek van f' loopt dus dalend door het nulpunt $x = a$, dus $f''(a) < 0$.
 Er is dus sprake van een maximum.

- 033** a Als $g'(x) \leq 0$ dan is g dalend.
 b g is afnemend dalend.
 c Dat is het geval op interval $[4, 6]$
 d In de grafiek van g' is er dan een minimum.
 e Zie hieronder. De grafiek heeft buigpunten bij $x = 0$ en $x = 4$ en een minimum bij $x = 6$.



- 037** a $f(x) = x^4 - 8x^3$
 $f'(x) = 4x^3 - 24x^2$
 b $f''(x) = 3 \cdot 4x^{3-1} - 2 \cdot 24x^{2-1}$
 $f''(x) = 12x^2 - 48x$
 c $12x^2 - 48x = 0$
 $12x(x - 4) = 0$
 $12x = 0$ of $x - 4 = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$
 d Bij $x = 0$ gaat f van afnemend dalend naar toenemend dalend.
 Bij $x = 4$ gaat f van toenemend dalend naar afnemend dalend.
 e $f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^3 = 0$ en $f(4) = 4^4 - 8 \cdot 4^3 = -256$

- U7** a Als je van links komt dan neemt de helling in de buurt van de top af en nadert naar nul.
 b Als $f''(a) < 0$ dan gaat de grafiek van f' dalend door het nulpunt $x = a$, dus f gaat bij $x = a$ over van stijgen in dalen. Je hebt dan te maken met een maximum.
 c Als $f''(b) > 0$ dan gaat de grafiek van f' stijgend door het nulpunt $x = b$, dus f gaat bij $x = b$ over van dalen in stijgen. Je hebt dan te maken met een minimum.
 d Als $f'''(c) = 0$ en $f'''(c) \neq 0$ dan is $(c, f(c))$ een buigpunt.
 e $g(x) = 2x^5 - 5x^2$
 $g'(x) = 10x^4 - 10x$
 $g''(x) = 40x^3 - 10$
 $g'''(x) = 120x^2$
 Buigpunten als $g''(x) = 0$ en $g'''(x) \neq 0$
 $40x^3 - 10 = 0$ en $120x^2 \neq 0$
 $x^3 = \frac{1}{4}$ en $x \neq 0$
 $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ en dit is inderdaad een buigpunt, want $g'''(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}) \neq 0$.

10 Kettingregel

10.6 Gemengde opdrachten

- 40 a** $f_a(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + a \cdot 0 = 0$.
 a heeft geen invloed op de uitkomst van $f_a(0)$.
- b** $f_a(x) = x^3 - 6x^2 + ax$
 $f_a'(x) = 3x^2 - 12x + a$
 $f_a''(x) = 6x - 12$
 $6x - 12 = 0$
 $6x = 12$
 $x = 2$ voor alle waarden van a .
 $f_a(2) = -16 + 2a$, dus de coördinaten van het buigpunt zijn $(2, -16 + 2a)$.
- c** Het punt $(2, -16 + 2a)$ is het buigpunt.
 $f_{12}'(x) = 3x^2 - 12x + 12$
 $f_{12}'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 12$
 $f_{12}'(2) = 12 - 24 + 12 = 0$
 f_{12} heeft dus voor $x = 2$ dus een horizontale raaklijn.
De coördinaten van het buigpunt zijn $(2, -16 + 2a)$ dus $(2, 8)$.
- d** Geen horizontale raaklijn als de afgeleide geen nul is.
 $f_a'(x) = 3x^2 - 12x + a$
 $3x^2 - 12x + a = 0$
 $f_a'(x) = 0$ heeft geen oplossingen als $D < 0$.
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a = 144 - 12a$
 $144 - 12a < 0$
 $-12a < -144$
 $a > 12$
Voor $a > 12$ heeft de grafiek geen horizontale raaklijn.
- 41 a** Voor m geldt $y = ax$ met $a = \frac{8-0}{4-0} = 2$, dus $m(x) = 2x$
 $l(x) = m(x) - f(x)$ dus $l(x) = 2x - x\sqrt{x}$ voor $0 \leq x \leq 4$.
- b** $l(x) = 2x - x^{\frac{1}{2}}$
Het lijnstukje is maximaal als $l'(x) = 0$.
 $l'(x) = 2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
 $2 - \frac{1}{2}\sqrt{x} = 0$
 $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 2$
 $\sqrt{x} = \frac{4}{3}$
 $x = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$ en de maximale lengte van het lijnstukje is $l\left(1\frac{7}{9}\right) = 1\frac{5}{27}$

c Voor m geldt $y = ax$ met $a = \frac{p\sqrt{p} - 0}{p - 0} = \sqrt{p}$, dus $m(x) = \sqrt{p} \cdot x$

$$l(x) = \sqrt{p} \cdot x - x\sqrt{x} \text{ voor } 0 \leq x \leq p$$

$$l(x) = \sqrt{p} \cdot x - x^{\frac{1}{2}} \text{ dus } l'(x) = \sqrt{p} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Het lijnstukje is maximaal als $l'(x) = 0$.

$$\sqrt{p} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 0 \text{ dit geeft } \frac{1}{2}\sqrt{x} = \sqrt{p} \text{ dus } \sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{p} \text{ en } x = \frac{4}{9}p$$

De lengte van het lijnstukje is 4 dus

$$l\left(\frac{4}{9}p\right) = \sqrt{p} \cdot \frac{4}{9}p - \frac{4}{9}p\sqrt{\frac{4}{9}p} = 4$$

$$\frac{4}{9}p\left(\sqrt{p} - \frac{2}{3}\sqrt{p}\right) = 4$$

$$\frac{4}{9}p \cdot \frac{1}{3}\sqrt{p} = 4$$

$$\frac{4}{27}p\sqrt{p} = 4$$

$$p\sqrt{p} = p^{\frac{3}{2}} = 27$$

$$p = (27)^{\frac{2}{3}} = 9$$

42 a Voor het domein geldt $3x^2 - 2x \geq 0$.

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{2}{3}$$

De grafiek van $y = 3x^2 - 2x$ is een dalparabool.

Het domein van g is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \left[\frac{2}{3}, \rightarrow \right)$

b De uitkomst van de wortel is nooit negatief, dus $g(x) \geq -2$

g heeft randminima $g(0) = -2$ en $g\left(\frac{2}{3}\right) = -2$

c $-2 + 2\sqrt{3x^2 - 2x} = 0$

$$\sqrt{3x^2 - 2x} = 1$$

$$3x^2 - 2x = 1$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = -\frac{1}{3}$$

De coördinaten zijn $A\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ en $B(1, 0)$.

d $g(x) = -2 + 2\sqrt{3x^2 - 2x}$

$$g(x) = -2 + 2(3x^2 - 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2(3x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x - 2)$$

$$g'(x) = \frac{6x - 2}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$$

Raaklijn in punt A :

$$y = ax + b \text{ met } a = g'\left(-\frac{1}{3}\right) = -4$$

$$A\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \text{ substitueren geeft } 0 = -4 \cdot -\frac{1}{3} + b \text{ dus } b = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

De vergelijking van de raaklijn in punt A is $y = -4x - 1\frac{1}{3}$

Raaklijn in punt B :

$$y = ax + b \text{ met } a = g'(1) = 4$$

$$B(1, 0) \text{ substitueren geeft } 0 = 4 \cdot 1 + b \text{ dus } b = -4$$

De vergelijking van de raaklijn in punt B is $y = 4x - 4$.

Voor het snijpunt C van de raaklijnen geldt:

$$4x - 4 = -4x - 1\frac{1}{3}$$

$$8x = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$y = 4 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2\frac{2}{3}$$

De coördinaten van het snijpunt zijn $C\left(\frac{1}{3}, -2\frac{2}{3}\right)$.

10 Kettingregel

43 a $f(4) = \sqrt{4^2 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$$g(4) = \frac{25}{\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

Beide grafieken gaan door $P(4, 5)$.

b $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

$$f(x) = (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$f'(4) = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

De helling van de grafiek van f in P is $\frac{4}{5}$

$$g(x) = \frac{25}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$g(x) = 25 \cdot (x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = -12\frac{1}{2}(x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$g'(x) = \frac{-25x}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$g'(4) = \frac{-25 \cdot 4}{(4^2 + 9)\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{-25 \cdot 4}{25\sqrt{25}} = -\frac{4}{5}$$

De helling van de grafiek van g in P is $-\frac{4}{5}$

c De raaklijn aan f heeft vergelijking $y = \frac{4}{5}x + b$ en gaat door $P(4, 5)$.

Substitueren van $P(4, 5)$ geeft $5 = \frac{4}{5} \cdot 4 + b$ dus $b = 5 - 3\frac{1}{5} = 1\frac{4}{5}$

De vergelijking van de raaklijn aan f is $y = \frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$

Deze raaklijn snijdt de y -as in het punt $(0, 1\frac{4}{5})$.

De raaklijn aan g heeft vergelijking $y = -\frac{4}{5}x + b$ en gaat door $P(4, 5)$.

Substitueren van $P(4, 5)$ geeft $5 = -\frac{4}{5} \cdot 4 + b$ dus $b = 5 + 3\frac{1}{5} = 8\frac{1}{5}$

De vergelijking van de raaklijn aan g is $y = -\frac{4}{5}x + 8\frac{1}{5}$

Deze raaklijn snijdt de y -as in het punt $(0, 8\frac{1}{5})$.

De zijde van de driehoek op de y -as heeft dus lengte $8\frac{1}{5} - 1\frac{4}{5} = 6\frac{2}{5}$

De hoogte van de driehoek is de afstand van de y -as tot P .

Dat is de x -coördinaat van P , dus 4.

De oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{5} \cdot 4 = 12\frac{4}{5}$

Onderzoeksopdrachten

44 Noem x de lengte van P tot lijnstuk AB , dan is

$$AP = BP = \sqrt{40^2 + x^2} = \sqrt{1600 + x^2}$$

de totale lengte $l(x)$ van de leidingen is $l(x) = TP + AP + BP$

$$l(x) = 100 - x + 2\sqrt{1600 + x^2}$$

$$l(x) = 100 - x + 2(1600 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

De totale lengte is minimaal als $l'(x) = 0$.

$$l'(x) = -1 + (1600 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$l'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{1600 + x^2}}$$

$$-1 + \frac{2x}{\sqrt{1600 + x^2}} = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1600 + x^2}} = 1$$

$$\sqrt{1600 + x^2} = 2x$$

$$1600 + x^2 = 4x^2$$

$$1600 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{1600}{3} = 533\frac{1}{3}$$

$$x = -\sqrt{533\frac{1}{3}} \text{ (voldoet niet) of } x = \sqrt{533\frac{1}{3}}$$

Punt P moet liggen op $100 - \sqrt{533\frac{1}{3}} = 76,905 \dots \approx 77$ meter vanaf T .

45 a $f_a(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + a}{x^2}$

$$f_a(x) = \frac{x^4}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} + \frac{a}{x^2}$$

$$f_a(x) = x^2 - 5 + ax^{-2}$$

$$f_a'(x) = 2x - 2ax^{-3}$$

$$f_a'(x) = 2x - \frac{2a}{x^3}$$

f_a heeft een top als $f_a'(x) = 0$

$$2x - \frac{2a}{x^3} = 0$$

$$2x = \frac{2a}{x^3}$$

$$2x^4 = 2a$$

$$x^4 = a$$

$$x = -\sqrt[4]{a} \text{ of } x = \sqrt[4]{a}$$

Hieruit volgt dat f_a twee oplossingen heeft als $a > 0$.

b $f_a(-\sqrt[4]{a}) = \frac{(-\sqrt[4]{a})^4 - 5(-\sqrt[4]{a})^2 + a}{(-\sqrt[4]{a})^2} = \frac{a - 5\sqrt{a} + a}{\sqrt{a}} = \frac{2a - 5\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a} - 5$

$$f_a(\sqrt[4]{a}) = \frac{(\sqrt[4]{a})^4 - 5(\sqrt[4]{a})^2 + a}{(\sqrt[4]{a})^2} = \frac{a - 5\sqrt{a} + a}{\sqrt{a}} = \frac{2a - 5\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a} - 5$$

$$g(-\sqrt[4]{a}) = 2(-\sqrt[4]{a})^2 - 5 = 2\sqrt{a} - 5 \text{ en } g(\sqrt[4]{a}) = 2(\sqrt[4]{a})^2 - 5 = 2\sqrt{a} - 5$$

De punten voldoen beide aan functie $g(x) = 2x^2 - 5$.

Samenvatting

S1 $f(x) = 2x + \sqrt{18 - 7x - x^2}$

$$18 - 7x - x^2 = 0$$

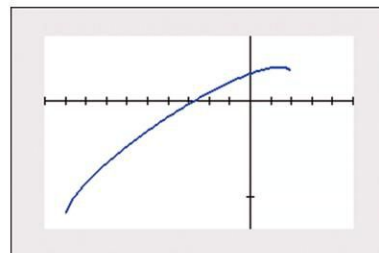
$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$(x + 9)(x - 2) = 0$$

$$x = -9 \text{ of } x = 2$$

Zie de plot hiernaast.

f heeft randminima $f(-9) = -18$ en $f(2) = 4$.



10 Kettingregel

S2 a f is toenemend stijgend op het interval $[7, \rightarrow)$.

b f is dalend op het interval $[1, 7]$.

c Bij $x = 4$ gaat de grafiek van f over van toenemend dalend naar afnemend dalend, dus de grafiek heeft bij $x = 4$ een buigpunt.

S3 a $f(x) = 8x\sqrt{x} = 8x^{1\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 1\frac{1}{2} \cdot 8x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 12\sqrt{x}$$

b $g(x) = \frac{x^3 + x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{x^3}{2\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$g'(x) = 1\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = 1\frac{1}{4}x\sqrt{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

c $h(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 + x) = x^{\frac{1}{3}}(x^2 + x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$

$$h'(x) = 2\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 1\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$h'(x) = 2\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x} + 1\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$$

S4 a $k(x) = g(f(x))$ met $f(x) = x^2 - 7$ en $g(x) = {}^3\log(x)$

b $k(x) = g(f(x))$ met $f(x) = \cos(x)$ en $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

S5 a $f(x) = 5(x^4 + 6x)^3$

$$f(x) = g(h(x)) \text{ met } h(x) = x^4 + 6x \text{ en } g(x) = 5x^3$$

$$h'(x) = 4x^3 + 6 \text{ en } g'(x) = 15x^2$$

$$f'(x) = 15 \cdot (x^4 + 6x)^2 \cdot (4x^3 + 6) \text{ ofwel } f'(x) = (60x^3 + 90)(x^4 + 6x)^2$$

b $g(x) = \sqrt{4x^3 + 8x^2 + 6}$

$$g(x) = h(f(x)) \text{ met } f(x) = 4x^3 + 8x^2 + 6 \text{ en } h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 12x^2 + 16x \text{ en } h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(4x^3 + 8x^2 + 6)^{-\frac{1}{2}} \cdot (12x^2 + 16x) \text{ ofwel } g'(x) = \frac{6x^2 + 8x}{\sqrt{4x^3 + 8x^2 + 6}}$$

S6 a $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 9} = (-x^2 + 10x - 9)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x - 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x + 10)$$

$$f'(x) = \frac{-x + 5}{\sqrt{-x^2 + 10x - 9}}$$

Extreme waarden als $f'(x) = 0$.

$$\frac{-x + 5}{\sqrt{-x^2 + 10x - 9}} = 0$$

$$-x + 5 = 0$$

$$x = 5$$

Zie de plot hiernaast.

f heeft een maximum $f(5) = 4$.

Randextremen zijn er als $-x^2 + 10x - 9 = 0$.

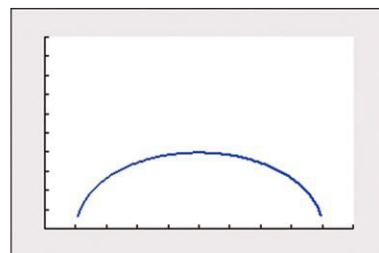
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x - 1)(x - 9) = 0$$

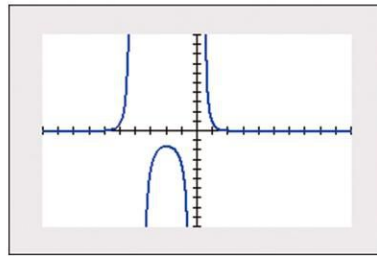
$$x = 1 \text{ of } x = 9$$

f heeft een randminimum $f(1) = 0$.

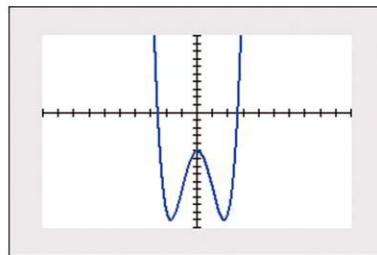
f heeft een randminimum $f(9) = 0$.



b $g(x) = \frac{100}{(x^2 + 4x)^3} = 100(x^2 + 4x)^{-3}$
 $g'(x) = -3 \cdot 100(x^2 + 4x)^{-4} \cdot (2x + 4)$
 $g'(x) = \frac{-600x - 1220}{(x^2 + 4x)^4}$
 Extreme waarden als $g'(x) = 0$.
 $\frac{-600x - 1220}{(x^2 + 4x)^4} = 0$
 $-600x - 1220 = 0$, dit geeft $x = -2$
 Zie de plot hiernaast.
 g heeft een maximum $g(-2) = -1\frac{9}{16}$



S7 $f(x) = x^4 - 6x^2 - 5$
 $f'(x) = 4x^3 - 12x$
 $f''(x) = 12x^2 - 12$
 $12x^2 - 12 = 0$
 $12x^2 = 12$
 $x^2 = 1$
 $x = -1$ of $x = 1$
 In de plot is te zien dat de grafiek bij $x = -1$ en $x = 1$ een buigpunt heeft.
 $f(-1) = -10$ en $f(1) = -10$
 De buigpunten zijn $(-1, -10)$ en $(1, -10)$.



Test jezelf

T1 a $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^2} = \frac{3x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2} = 3 + 5x^{-2}$
 $f'(x) = 5 \cdot -2x^{-3}$
 $f'(x) = \frac{-10}{x^3}$

b $g(x) = 4x^3 + \sqrt{x} = 4x^3 + x^{\frac{1}{2}}$
 $g'(x) = 12x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
 $g'(x) = 12x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c $h(x) = (\sqrt{x} + x) \cdot (x - 1)$
 $h(x) = x\sqrt{x} - \sqrt{x} + x^2 - x$
 $h(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^2 - x$
 $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x - 1$
 $h'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x - 1$

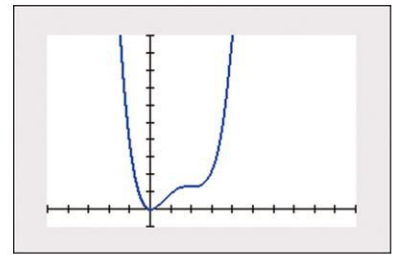
10 Kettingregel

T2 a $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$
 $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$
 $f'(x) = 0$ geeft $x(x^2 - 4x + 4) = 0$
 $x = 0$ of $x^2 - 4x + 4 = 0$
 $x = 0$ of $(x - 2)^2 = 0$
 $x = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x = 0$ of $x = 2$

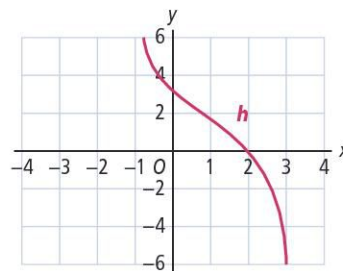
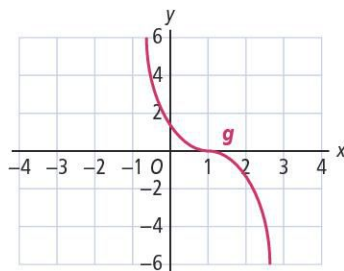
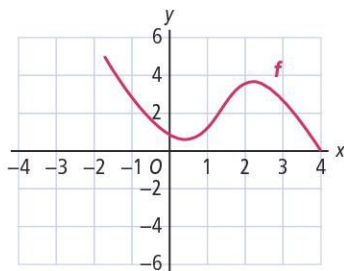
$$f(0) = 0 \text{ en } f(2) = 1\frac{1}{3}$$

De coördinaten zijn $(0, 0)$ en $(2, 1\frac{1}{3})$.

- b In de plot is te zien dat $(0, 0)$ een minimum is en $(2, 1\frac{1}{3})$ geen minimum en ook geen maximum is.



T3



T4 a $g(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^2} = x^{-3} - 4x^{-2}$

$$g'(x) = -3x^{-4} + 8x^{-3}$$

$$g'(x) = \frac{-3}{x^4} + \frac{8}{x^3}$$

De top vind je door $g'(x) = 0$ op te lossen.

$$\frac{-3}{x^4} + \frac{8}{x^3} = 0$$

$$3x^3 = 8x^4$$

$$x^3 = 0 \text{ of } 3 = 8x$$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } x = \frac{3}{8}$$

De x-coördinaat van de top is $x = \frac{3}{8}$

b $g''(x) = 12x^{-5} - 24x^{-4} = \frac{12}{x^5} - \frac{24}{x^4}$

Het buigpunt vind je door $g''(x) = 0$ op te lossen.

$$\frac{12}{x^5} - \frac{24}{x^4} = 0$$

$$\frac{12}{x^5} = \frac{24}{x^4}$$

$$24x^5 = 12x^4$$

$$x^4 = 0 \text{ of } 24x = 12$$

$$x = 0 \text{ (voldoet niet) of } x = \frac{1}{2}$$

$g(\frac{1}{2}) = -8$, dus de coördinaten van het buigpunt zijn $(\frac{1}{2}, -8)$.

c $g'(\frac{1}{2}) = 16$, dus de vergelijking van de buigraaklijn is $y = 16x + b$.

$$(\frac{1}{2}, -8) \text{ invullen in } y = 16x + b \text{ geeft } -8 = 16 \cdot \frac{1}{2} + b, \text{ dus } b = -16.$$

De vergelijking van de buigraaklijn is $y = 16x - 16$.

- T5 a** $g(x) = 3 + 2x^5$ en $f(x) = 4x - 9$
b $g(x) = \sqrt{x} - 7$ en $f(x) = 6x - 3x^2$
c $g(x) = x^{1,7}$ en $f(x) = 2x - x^2$
d $g(x) = \frac{2}{x^4}$ en $f(x) = x^3 - 7$

- T6 a** $f(x) = (x - 3)^{10} + 2$
 $f(x) = v(u(x))$ met
 $u(x) = x - 3$ en $v(x) = x^{10} + 2$
 $u'(x) = 1$ en $v'(x) = 10x^9$
 $f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$
 $f'(x) = 10(x - 3)^9 \cdot 1$
 $f'(x) = 10(x - 3)^9$

- b** $g(p) = (2 - p^2)^3$
 $g(p) = v(u(p))$ met
 $u(p) = 2 - p^2$ en $v(p) = p^3$
 $u'(p) = -2p$ en $v'(p) = 3p^2$
 $g'(p) = v'(u(p)) \cdot u'(p)$
 $g'(p) = 3(2 - p^2)^2 \cdot -2p$
 $g'(p) = -6p(2 - p^2)^2$

- c** $h(x) = \frac{1}{x^2 - x}$
 $h(x) = g(f(x))$ met
 $f(x) = x^2 - x$ en $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
 $f'(x) = 2x - 1$ en $g'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$
 $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
 $h'(x) = \frac{-1}{(x^2 - x)^2} \cdot (2x - 1)$
 $h'(x) = \frac{-2x + 1}{(x^2 - x)^2}$

- d** $k(x) = (2x - 3x^4)^2$
 $k(x) = v(u(x))$ met
 $u(x) = 2x - 3x^4$ en $v(x) = x^2$
 $u'(x) = 2 - 12x^3$ en $v'(x) = 2x$
 $k'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$
 $k'(x) = 2(2x - 3x^4) \cdot (2 - 12x^3)$
 $k'(x) = (4 - 24x^3)(2x - 3x^4)$

- e** $q(x) = \frac{2}{(x^3 - 7)^4}$
 $q(x) = v(u(x))$ met
 $u(x) = x^3 - 7$ en $v(x) = \frac{2}{x^4} = 2x^{-4}$
 $u'(x) = 3x^2$ en $v'(x) = -8x^{-5} = \frac{-8}{x^5}$
 $q'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$
 $q'(x) = \frac{-8}{(x^3 - 7)^5} \cdot 3x^2$
 $q'(x) = \frac{-24x^2}{(x^3 - 7)^5}$

- f** $m(t) = 3 + 2(4t - 9)^5$
 $m(t) = v(u(t))$ met
 $u(t) = 4t - 9$ en $v(t) = 3 + 2t^5$
 $u'(t) = 4$ en $v'(t) = 10t^4$
 $m'(t) = v'(u(t)) \cdot u'(t)$
 $m'(t) = 10(4t - 9)^4 \cdot 4$
 $m'(t) = 40(4t - 9)^4$

- T7 a** $f(x) = x\sqrt{x} - 3x - 1 = x^{\frac{1}{2}} - 3x - 1$,
 het domein van f is $x \geq 0$.
 $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3$
 $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 3$
 Extreme waarden vind je door $f'(x) = 0$ op te lossen.

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$$

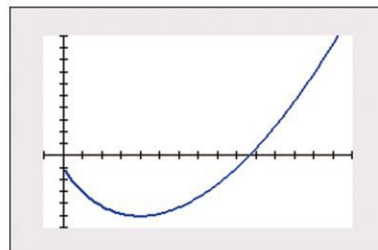
$$\sqrt{x} = 6$$

$$x = 36$$

Zie de plot hiernaast.

f heeft een minimum $f(36) = -5$.

f heeft een randmaximum $f(0) = -1$.



10 Kettingregel

b $g(x) = (4x^2 + px + 1)^3$

$$g'(x) = 3(4x^2 + px + 1)^2 \cdot (8x + p)$$

$$g'(x) = (24x + 3p)(4x^2 + px + 1)^2$$

Extremes waarden vind je door $g'(x) = 0$ op te lossen en gegeven is dat er een extreme waarde is voor $x = 1$. Er geldt dus $g'(1) = 0$.

$$(24 \cdot 1 + 3p)(4 \cdot 1^2 + p \cdot 1 + 1)^2 = 0$$

$$(24 + 3p)(5 + p)^2 = 0$$

$$24 + 3p = 0 \text{ of } 5 + p = 0$$

$$p = -8 \text{ of } p = -5$$

T8 a $g_a(x) = \frac{1}{3x-a} - \frac{1}{(3x-a)^2}$

$$g_a(x) = (3x-a)^{-1} - (3x-a)^{-2}$$

$$g_a'(x) = -(3x-a)^{-2} \cdot 3 + 2(3x-a)^{-3} \cdot 3$$

$$g_a'(x) = \frac{-3}{(3x-a)^2} + \frac{6}{(3x-a)^3}$$

Extremes waarden vind je door $g_a'(x) = 0$ op te lossen.

Gegeven is dat $g_a'(4)$ een extreme waarde is, dus

$$g_a'(4) = \frac{-3}{(3 \cdot 4 - a)^2} + \frac{6}{(3 \cdot 4 - a)^3} = 0$$

$$\frac{-3}{(12-a)^2} + \frac{6}{(12-a)^3} = 0$$

$$\frac{-3 \cdot (12-a)}{(12-a)^3} + \frac{6}{(12-a)^3} = 0$$

$$\frac{-3(12-a) + 6}{(12-a)^3} = 0 \text{ dit geeft } -36 + 3a + 6 = 0 \text{ dus } 3a = 30 \text{ en } a = 10$$

b $g_a''(x) = 6(3x-a)^{-3} \cdot 3 - 18(3x-a)^{-4} \cdot 3$

$$g_a''(x) = \frac{18}{(3x-a)^3} - \frac{54}{(3x-a)^4}$$

Een buigpunt vind je door $g_a''(x) = 0$ op te lossen en gegeven is dat $x = 2$

$$\text{buigpunt is, dus } g_a''(2) = \frac{18}{(3 \cdot 2 - a)^3} - \frac{54}{(3 \cdot 2 - a)^4} = 0$$

$$\frac{18}{(6-a)^3} - \frac{54}{(6-a)^4} = 0$$

$$\frac{18 \cdot (6-a)}{(6-a)^4} - \frac{54}{(6-a)^4} = 0$$

$$\frac{18 \cdot (6-a) - 54}{(6-a)^4} = 0$$

$$18(6-a) - 54 = 0$$

$$6-a = \frac{54}{18} = 3$$

$$a = 3$$

T9 a $f_{p,q}(x) = p(x+2)^3 + q$

$$(0,0) \text{ substitueren: } 0 = p(0+2)^3 + q \text{ ofwel } 0 = 8p + q \text{ dus } q = -8p$$

$$(-3,18) \text{ substitueren: } 18 = p(-3+2)^3 + q \text{ ofwel } 18 = -p + q \text{ dus } q = 18 + p$$

$$-8p = 18 + p \text{ dus } -9p = 18 \text{ en } p = -2$$

$$q = -8p = -8 \cdot -2 = 16$$

- b** $f_{p,q}'(x) = 3p(x+2)^2$
 $3p(-4+2)^2 = -6$
 $12p = -6$
 $p = -\frac{1}{2}$
 Invullen van $p = -\frac{1}{2}$ en $(-4, 12)$ in $f_{p,q}(x) = p(x+2)^3 + q$ geeft
 $12 = -\frac{1}{2}(-4+2)^3 + q$
 $12 = 4 + q$
 $q = 8$
- c** Van de functie $g(x) = x^3$ is $(0, 0)$ het buigpunt.
 Van de functie $h(x) = (x+2)^3$ is $(-2, 0)$ het buigpunt.
 Van de functie $k(x) = p(x+2)^3$ is $(-2, 0)$ het buigpunt.
 Van de functie $f_{p,q}(x) = p(x+2)^3 + q$ is $(-2, q)$ het buigpunt.
 Alle buigpunten van $f_{p,q}(x) = p(x+2)^3 + q$ liggen dus op de lijn $x = -2$.

Extra oefening

- E1 a** $p(x) = 2\sqrt[3]{x}$
 $p(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$
 $p'(x) = 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$
 $p'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- b** $g(x) = 2\sqrt{x} + 5x^2$
 $g(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + 5x^2$
 $g'(x) = x^{-\frac{1}{2}} + 10x$
 $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 10x$
- c** $k(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x^6} = \frac{3x^2}{2x^6} + \frac{1}{2x^6}$
 $k(x) = \frac{3}{2x^4} + \frac{1}{2x^6} = \frac{1}{2}x^{-4} + \frac{1}{2}x^{-6}$
 $k'(x) = -6x^{-5} - 3x^{-7}$
 $k'(x) = -\frac{6}{x^5} - \frac{3}{x^7}$
- d** $f(x) = 5x(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})$
 $f(x) = 5x^1(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}) = 5x^{1\frac{1}{2}} + 5x^{1\frac{1}{4}}$
 $f'(x) = 7\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 6\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}}$
 $f'(x) = 7\frac{1}{2}\sqrt{x} + 6\frac{1}{4}\sqrt[4]{x}$
- e** $h(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}}$
 $h(x) = x^{\frac{10}{3}}$
 $h'(x) = 3\frac{1}{3}x^{\frac{7}{3}}$
 $h'(x) = x^2\sqrt[3]{x}$
- f** $k(x) = \frac{2}{x^{1,3}} - \frac{4}{5x^{2,8}}$
 $k(x) = 2x^{-1,3} - \frac{4}{5}x^{-2,8}$
 $k'(x) = -2,6x^{-2,3} + 2,24x^{-3,8}$
 $k'(x) = \frac{-2,6}{x^{2,3}} + \frac{2,24}{x^{3,8}}$
- E2 a** $k(x) = 5 \cdot 2^{x^2+7}$
 $k(x) = g(f(x))$
 $f(x) = x^2 + 7$ en $g(x) = 5 \cdot 2^x$
- b** $k(x) = \sqrt{x^4 - 3}$
 $k(x) = g(f(x))$
 $f(x) = x^4 - 3$ en $g(x) = \sqrt{x}$

10 Kettingregel

E3 a $g(m) = (4m - 5)^3$

$$g'(m) = 3(4m - 5)^2 \cdot 4$$

$$g'(m) = 12(4m - 5)^2$$

c $Q(p) = \sqrt{2p^3 - 25p}$

$$Q(p) = (2p^3 - 25p)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q'(p) = \frac{1}{2}(2p^3 - 25p)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6p^2 - 25)$$

$$Q'(p) = \frac{6p^2 - 25}{2\sqrt{2p^3 - 25p}}$$

b $h(x) = \frac{4}{x^2 + 3}$

$$h(x) = 4(x^2 + 3)^{-1}$$

$$h'(x) = -4(x^2 + 3)^{-2} \cdot 2x$$

$$h'(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 3)^2}$$

d $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2x - \frac{1}{2}}}$

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} \cdot 2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right)^{-1\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{4(2x - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

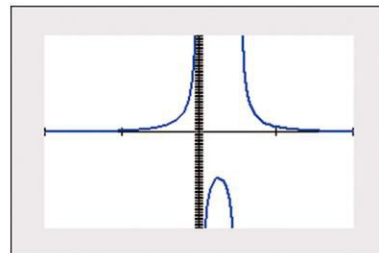
$$f'(x) = \frac{-1}{(8x - 2)\sqrt{2x - \frac{1}{2}}}$$

E4 a $f(x) = \frac{3}{2x^2 - x} = 3(2x^2 - x)^{-1}$

$$f'(x) = -3(2x^2 - x)^{-2} \cdot (4x - 1)$$

$$f'(x) = -\frac{12x - 3}{(2x^2 - x)^2} = 0 \text{ geeft } 12x - 3 = 0 \text{ dus } x = \frac{1}{4}$$

Zie de plot: bij $x = \frac{1}{4}$ is er een maximum, $f(\frac{1}{4}) = -24$



b $g(x) = 3 + 2\sqrt{4x - x^2} = 3 + 2(4x - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} (4x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 - 2x)$$

$$g'(x) = \frac{4 - 2x}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 \text{ geeft } 4 - 2x = 0 \text{ dus } x = 2$$

Voor het domein geldt $4x - x^2 \geq 0$.

$$4x - x^2 = 0$$

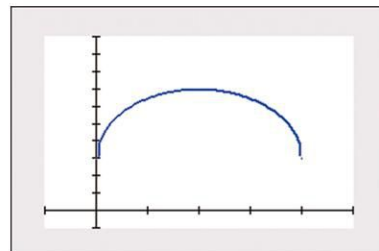
$$x(4 - x) = 0$$

$x = 0$ of $x = 4$, dus het domein is $0 \leq x \leq 4$.

Zie de plot: bij $x = 0$ en $x = 4$ zijn er randminima,

$g(0) = 3$ en $g(4) = 3$ en bij $x = 2$ is er een maximum,

$$g(2) = 7$$



c $h(x) = \frac{2}{\sqrt{2 - 2x}} = 2 \cdot (2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$

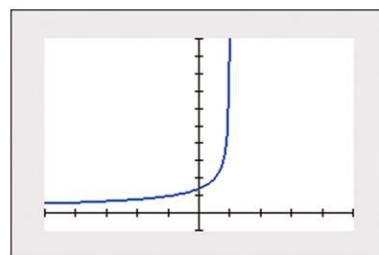
$$h'(x) = 2 \cdot -\frac{1}{2} (2 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2$$

$$h'(x) = \frac{2}{(2 - 2x)^{\frac{1}{2}}}$$

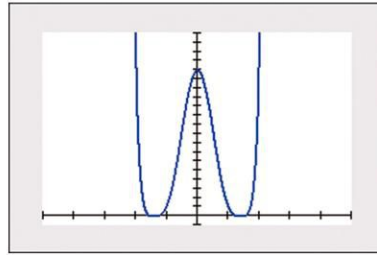
$$h'(x) = \frac{2}{(2 - 2x)\sqrt{2 - 2x}} = 0 \text{ heeft geen oplossingen.}$$

Voor het domein geldt $\sqrt{2 - 2x} \neq 0$ en $2 - 2x \geq 0$, dus het domein is $\langle -1, 1 \rangle$.

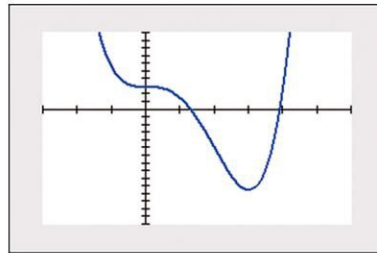
$x = 1$ is een verticale asymptoot en er zijn geen extremen.



- d** $k(x) = (x^2 - 2)^4$
 $k'(x) = 4(x^2 - 2)^3 \cdot 2x = 0$
 $8x = 0$ of $(x^2 - 2)^3 = 0$
 $x = 0$ of $x^2 = 2$
 $x = 0$ of $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$
 Zie de plot hiernaast.
 Bij $x = -\sqrt{2}$ en $x = \sqrt{2}$ zijn er minima, $k(-\sqrt{2}) = 0$
 en $k(\sqrt{2}) = 0$
 Bij $x = 0$ is er een maximum, $k(0) = 16$



- E5 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3$
 $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 = 0$
 $2x^2(x - 3) = 0$
 $2x^2 = 0$ of $x - 3 = 0$
 $x = 0$ of $x = 3$
 Zie de plot hiernaast.
 $f(0) = 3$ is geen extreme waarde.
 f heeft een minimum $f(3) = -10\frac{1}{2}$



- b** $f''(x) = 6x^2 - 12x = 0$
 $6x(x - 2) = 0$
 $6x = 0$ of $x - 2 = 0$
 $x = 0$ of $x = 2$
 $f(0) = 3$ en $f(2) = -5$
 De coördinaten van de buigpunten zijn dus $(0, 3)$ en $(2, -5)$.
- c** $f'(0) = 0$ en $f(0) = 3$
 Dit invullen in $y = ax + b$ geeft $3 = 0 \cdot 0 + b$ dus $b = 3$.
 De vergelijking van de buigraaklijn in $(0, 3)$ is $y = 3$.
 $f'(2) = -8$ en $f(2) = -5$
 Dit invullen in $y = ax + b$ geeft $-5 = -8 \cdot 2 + b$ dus $b = 11$.
 De vergelijking van de buigraaklijn in $(2, -5)$ is $y = -8x + 11$.
- d** f is toenemend dalend voor $0 < x < 2$.

- E6 a** Voor het domein geldt $9x - x^2 \geq 0$
 $9x - x^2 = 0$
 $x(9 - x) = 0$
 $x = 0$ of $x = 9$
 Het domein is $[0, 9]$.

10 Kettingregel

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) &= \frac{3}{4}x + \sqrt{9x - x^2} = \frac{3}{4}x + (9x - x^2)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(9x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (9 - 2x) \\ f'(x) &= \frac{3}{4} + \frac{9 - 2x}{2\sqrt{9x - x^2}} \end{aligned}$$

De extreme waarden vind je door $f'(x) = 0$ op te lossen.

$$\frac{3}{4} + \frac{9 - 2x}{2\sqrt{9x - x^2}} = 0$$

$$\frac{9 - 2x}{2\sqrt{9x - x^2}} = -\frac{3}{4}$$

$$36 - 8x = -6\sqrt{9x - x^2}$$

$$18 - 4x = -3\sqrt{9x - x^2}$$

$$(18 - 4x)^2 = 9(9x - x^2)$$

$$16x^2 - 144x + 324 = 81x - 9x^2$$

$$25x^2 - 225x + 324 = 0$$

$$D = (-225)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 324 = 18\,225$$

$$x = \frac{225 - \sqrt{18\,225}}{50} = 1\frac{4}{5} \text{ of } x = \frac{225 + \sqrt{18\,225}}{50} = 7\frac{1}{5}$$

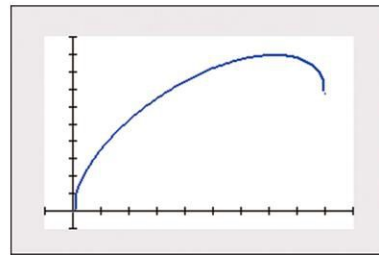
Alleen de oplossing $x = 7\frac{1}{5}$ voldoet.

Zie de plot hiernaast.

f heeft een maximum $f(7\frac{1}{5}) = 9$.

De randextremen vind je door $9x - x^2 = 0$ op te

lossen, zie opgave a. f heeft randminima $f(0) = 0$ en $f(9) = 6\frac{3}{4}$



$$\text{c } f(4\frac{1}{2}) = 7\frac{7}{8}$$

$$f'(4\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

Invullen in $y = ax + b$ geeft $7\frac{7}{8} = \frac{3}{4} \cdot 4\frac{1}{2} + b$ dus $b = 4\frac{1}{2}$

De vergelijking van de buigraaklijn in $x = 4\frac{1}{2}$ is $y = \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}$

$$\text{E7 a } f(x) = \frac{3}{(4x + 7)^2} = 3(4x + 7)^{-2}$$

$$f'(x) = -2 \cdot 3(4x + 7)^{-3} \cdot 4$$

$$f'(x) = \frac{-24}{(4x + 7)^3}$$

$$\text{b } f'(-2) = 24 \text{ dus voor de buigraaklijn geldt } y = 24x + b$$

$P(-2, 3)$ invullen in $y = 24x + b$ geeft $3 = 24 \cdot (-2) + b$ dit geeft $b = 51$.

De vergelijking van de buigraaklijn in $P(-2, 3)$ is $y = 24x + 51$, dus $a = 24$ en $b = 51$.

$$\begin{aligned} \text{E8 a } f(x) &= (8x - 4)^3 + 7 \\ f'(x) &= 3(8x - 4)^2 \cdot 8 \\ f'(x) &= 24(8x - 4)^2 \end{aligned}$$

$$\text{c } Q(p) = (3p + 2)\sqrt{3p + 2}$$

$$Q(p) = (3p + 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q'(p) = \frac{1}{2}(3p + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3$$

$$Q'(p) = \frac{3}{2}\sqrt{3p + 2}$$

$$\text{b } p(x) = \frac{10}{(x - 5)^2 - 25}$$

$$p(x) = \frac{10}{x^2 - 10x}$$

$$p(x) = 10(x^2 - 10x)^{-1}$$

$$p'(x) = -10(x^2 - 10x)^{-2} \cdot (2x - 10)$$

$$p'(x) = \frac{-20x + 100}{(x^2 - 10x)^2}$$

$$\text{d } g(p) = 2\sqrt{(4p)^3 - 7}$$

$$g(p) = 2\sqrt{64p^3 - 7}$$

$$g(p) = 2(64p^3 - 7)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(p) = \frac{1}{2} \cdot 2(64p^3 - 7)^{-\frac{1}{2}} \cdot 192p^2$$

$$g'(p) = \frac{192p^2}{\sqrt{64p^3 - 7}}$$

$$\text{E9 a } AQ = \sqrt{AP^2 + PQ^2} = \sqrt{15^2 + x^2} = \sqrt{225 + x^2}$$

$$QB = 20 - x$$

De aanlegkosten zijn $K = 1000 \cdot AQ + 400 \cdot QB$.

Invullen van AQ en QB in $K = 1000 \cdot AQ + 400 \cdot QB$ geeft

$$K = 1000\sqrt{225 + x^2} + 400(20 - x).$$

$$\text{b De kosten zijn minimaal als } \frac{dK}{dx} = 0$$

$$K = 1000(225 + x^2)^{\frac{1}{2}} + 8000 - 400x$$

$$\frac{dK}{dx} = 500(225 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 400$$

$$\frac{1000x}{\sqrt{225 + x^2}} - 400 = 0$$

$$\frac{10x}{\sqrt{225 + x^2}} = 4$$

$$10x = 4\sqrt{225 + x^2}$$

$$(10x)^2 = 16(225 + x^2)$$

$$100x^2 = 3600 + 16x^2$$

$$84x^2 = 3600$$

$$x^2 = \frac{3600}{84} = 42\frac{6}{7}$$

$$x = \sqrt{42\frac{6}{7}} \quad (x = -\sqrt{42\frac{6}{7}} \text{ is hier niet van toepassing})$$

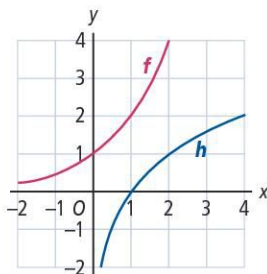
De aanlegkosten zijn minimaal voor $x = PQ = \sqrt{42\frac{6}{7}} = 6,5465 \dots \approx 6,547$ km.

9 Functies bewerken

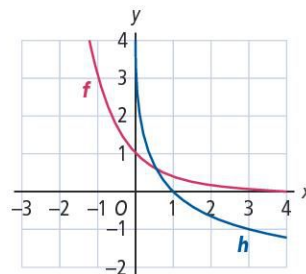
Voorkennis

- V1** plot A hoort bij $g(x) = \sqrt{x}$
 plot B hoort bij $q(x) = x^3$
 plot C hoort bij $k(x) = {}^2\log(x)$
 plot D hoort bij $m(x) = \frac{1}{x}$

V2 a



b



- c** f en h zijn stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.
d De grafieken van f en h zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.
e De x -as ($y = 0$) is de asymptoot van de grafiek van f .
 De y -as ($x = 0$) is de asymptoot van de grafiek van h .

V3 a $g_a(8) = 2$ dus $\frac{12}{a \cdot 8 - 6} = 2$

$$8a - 6 = 6$$

$$8a = 12$$

$$a = 1\frac{1}{2}$$

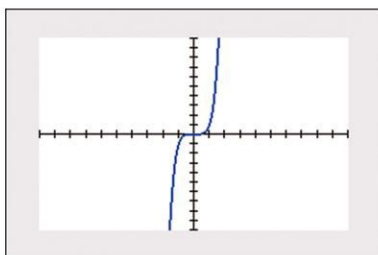
- b** Als de verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$ is, dan is de noemer 0 als $x = 1\frac{1}{2}$, dus
 $a \cdot 1\frac{1}{2} - 6 = 0$

$$1\frac{1}{2}a = 6$$

$$a = 4$$

- c** Voor x -waarden ver van 0 nadert $g_a(x)$ naar 0, dus de lijn $y = 0$.

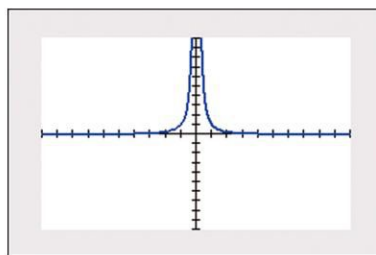
V4 a $n = 5$



Domein: $\mathbb{R}$

Bereik: $\mathbb{R}$

$n = -2$



Domein: $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$

Bereik: $\langle 0, \rightarrow \rangle$

- b** $2^n = \frac{1}{8}$ en $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ dus $n = -3$
c Dat is het punt $(1,1)$, want $1^n = 1$ voor elke waarde van n .
d Voor even waarden van n .

V5 a $h_p(4) = 20$ dus $4^3 + 4p + 8 = 20$
 $64 + 4p + 8 = 20$
 $4p = -52$
 $p = -13$

b $h_p'(x) = 3x^2 + p$
 $h_p'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + p = -3$
 $12 + p = -3$
 $p = -15$

V6 $f(x) = 3\sin(x - 2) + 5$ is een sinusoidale met evenwichtsstand 5 en amplitude 3, dus het bereik van $f(x) = 3\sin(x - 2) + 5$ is $[2, 8]$.

V7 a Het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $[5, \rightarrow)$.

b Het domein is $[2, \rightarrow)$ en het bereik is $[5, \rightarrow)$.

c Het domein is $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\langle \leftarrow, 5 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$.

d Het domein is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

e Het domein is $\langle 2, \rightarrow \rangle$ en het bereik is $\mathbb{R}$.

9.1 Transformaties

intro De grafiek van g is uit de grafiek van f ontstaan door spiegelen in de y -as.
 De grafiek van h is uit de grafiek van f ontstaan door puntspiegelen in $(0, 0)$.
 De grafiek van k is uit de grafiek van f ontstaan door spiegelen in de x -as.

1 a $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3 - 5$ ofwel $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

b $h(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$

c $j(x) = 4\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)$ ofwel $j(x) = 2x^2 + 12$

2 a $9 - x^2 = 0$

$x = -3$ of $x = 3$

De snijpunten van f met de x -as zijn $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.

b Deze punten liggen tweemaal zo ver van de y -as als $(-3, 0)$ en $(3, 0)$, dus dit zijn $(-6, 0)$ en $(6, 0)$.

c $g(4) = f(2)$, dus $g(4) = 5$

d $g(a) = f\left(\frac{1}{2}a\right)$, dus $g(a) = 9 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$ ofwel $g(a) = 9 - \frac{1}{4}a^2$

e $g(x) = 9 - \frac{1}{4}x^2$

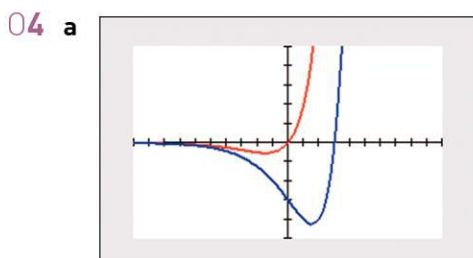
3 a Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = -2 \cdot 3^{x+4}$

b Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $h(x) = 3^{\frac{1}{-2}x} + 4$ ofwel $h(x) = 3^{-2x} + 4$

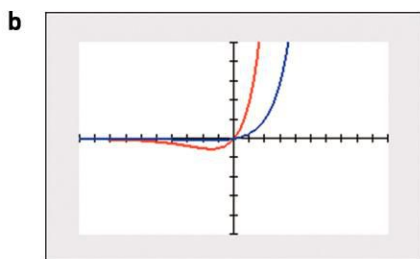
4 De variabele x moet worden vervangen door $x + 2$, dus het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $g(x) = 4(x + 2) + \sqrt{x + 2}$

9 Functies bewerken

- 5 a** Met een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor -1 .
b $g(x) = -1 \cdot 2^x$ ofwel $g(x) = -2^x$
c Met een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor -1 .
d $h(x) = 2^{\frac{1}{-1} \cdot x}$ ofwel $h(x) = 2^{-x}$
- 6** Spiegelen in de x -as geeft $g(x) = -(x^2 + 2x)$ ofwel $g(x) = -x^2 - 2x$
 5 naar rechts verschuiven geeft $h(x) = -(x - 5)^2 - 2(x - 5)$ ofwel
 $h(x) = -(x^2 - 10x + 25) - 2(x - 5)$
 Het functievoorschrift is $h(x) = -x^2 + 8x - 15$
- 7 a** Spiegelen in de y -as geeft $h(x) = \sqrt{-x}$
 3 naar rechts verschuiven geeft $g(x) = \sqrt{-(x - 3)}$ ofwel $g(x) = \sqrt{-x + 3}$
b 3 naar rechts verschuiven geeft $k(x) = \sqrt{x - 3}$
 Spiegelen in de y -as geeft $l(x) = \sqrt{-x - 3}$
 Je krijgt niet hetzelfde antwoord.
- 8 a** Dat is niet juist, omdat je x moet vervangen door $x + 5$.
 Het resultaat is dan $f(x) = \sin(2(x + 5))$ ofwel $f(x) = \sin(2x + 10)$.
b $f(x) = \sin(2x + 5)$ kan op twee manieren ontstaan uit $h(x) = \sin(x)$.
 Door $h(x) = \sin(x)$ eerst 5 naar links te verschuiven en daarna te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as.
 Of door $h(x) = \sin(x)$ eerst te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as en daarna $2\frac{1}{2}$ naar links te verschuiven.
- 9 a** Vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de y -as.
 Vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x -as.
 De volgorde maakt hierbij niet uit.
b 6 naar rechts en 8 omhoog verschuiven.
 De volgorde maakt hierbij niet uit.
c $\frac{1}{6}\pi$ naar links verschuiven en daarna vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de y -as. Ten slotte vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x -as.
 of:
 Vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de y -as en daarna $\frac{1}{3}\pi$ naar links verschuiven. Ten slotte vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x -as.
 In beide gevallen mag de vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x -as ook als eerste worden toegepast.



Nee, $g(x)$ is niet het functievoorschrift bij de beeldgrafiek.

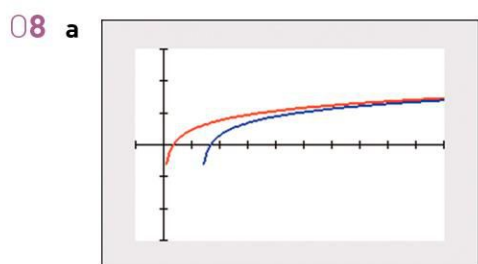


Nee, $g(x)$ is niet het functievoorschrift bij de beeldgrafiek.



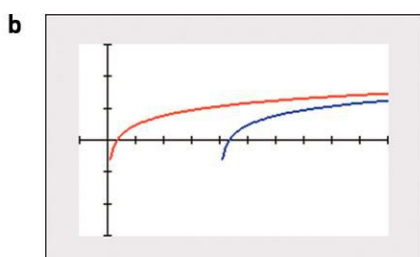
Ja, $g(x)$ is wel het functievoorschrift bij de beeldgrafiek.

- d** Bij een verschuiving van 3 naar rechts van de grafiek van f geldt $g(x) = f(x - 3)$. Dan moet je *elke* x in het functievoorschrift van f vervangen door $x - 3$.
- e** $h(x) = (x + 5) \cdot 2^{x+5}$



Nee, $g(x)$ is niet het juiste functievoorschrift.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \log(1) = 0, \text{ maar } g\left(4\frac{1}{3}\right) = \log(13 - 4) = \log(9) \neq 0$$



Ja, $g(x)$ is het juiste functievoorschrift.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \log(1) = 0 \text{ en } g\left(4\frac{1}{3}\right) = \log\left(3 \cdot 4\frac{1}{3} - 12\right) = \log(13 - 12) = \log(1) = 0$$

- c** Het functievoorschrift van h kun je schrijven als $h(x) = \log(3(x + 10))$.
Er is hier een verschuiving 10 naar links toegepast.
- d** $h(x) = \log(3x + 30)$ kan op twee manieren ontstaan uit $k(x) = \log(x)$.
Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{3}$, gevolgd door een verschuiving 10 naar links.
Of een verschuiving 30 naar links, gevolgd door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{3}$

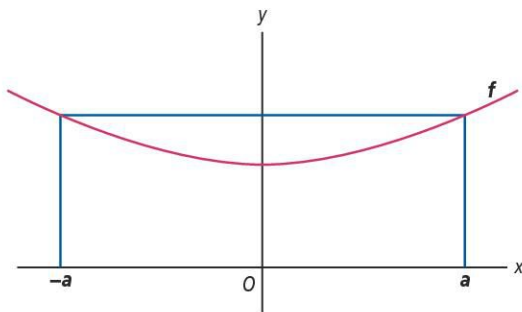
9 Functies bewerken

- U1** Ga 'terugwerken': $g(x) = 9\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ ofwel $g(x) = \frac{9}{x} + 9$ vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de y -as geeft $\frac{9}{\frac{1}{2}x} + 9 = \frac{18}{x} + 9$, dit vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de x -as geeft $\frac{6}{x} + 3$ en hierop een translatie 5 naar rechts geeft $\frac{6}{x-5} + 3$. Ten slotte dit 3 omlaag verschuiven geeft $f(x) = \frac{6}{x-5}$, dus $a = 6$ en $b = 5$.

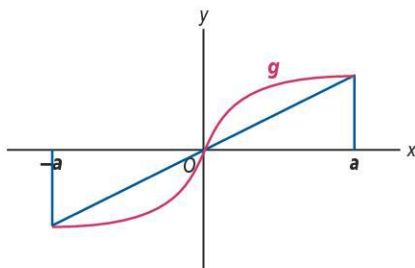
9.2 Symmetrie van grafieken

intro De grafieken van g en h (linker assenstelsel) zijn symmetrisch in de y -as. De grafieken van f en k (rechter assenstelsel) zijn puntsymmetrisch in de oorsprong.

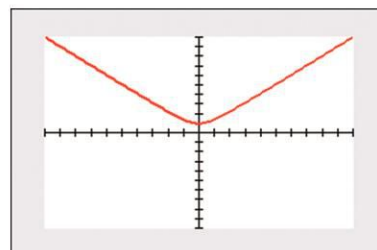
- 10 a** $f(-2) = 2$ en $g(-6) = -4$
b



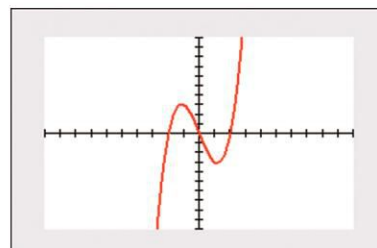
- c** $g(-2) = -2$ en $f(-6) = 4$
d



- 11 a** $f(a) = \sqrt{a^2 + 1}$
 $f(-a) = \sqrt{(-a)^2 + 1}$
 $f(-a) = \sqrt{a^2 + 1} = f(a)$
 De grafiek van f is symmetrisch in de y -as.

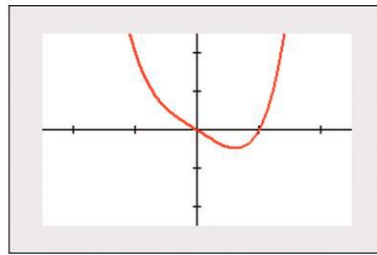


- b** $f(a) = a^3 - 4a$
 $f(-a) = (-a)^3 - 4(-a)$
 $f(-a) = -a^3 + 4a$
 $f(-a) = -(a^3 - 4a) = -f(a)$
 De grafiek is puntsymmetrisch in de oorsprong.



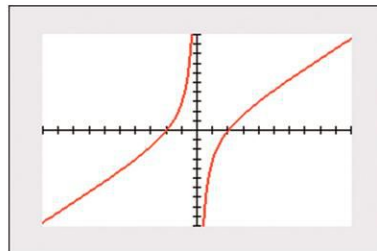
c $f(a) = a^4 - a$
 $f(-a) = (-a)^4 - (-a)$
 $f(-a) = a^4 + a$

De grafiek van f is niet symmetrisch in de y -as en ook niet puntsymmetrisch in de oorsprong.

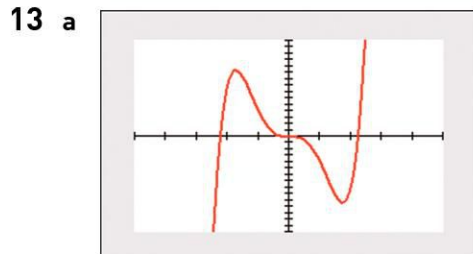


d $f(a) = \frac{a^4 - 4a^2}{a^3}$
 $f(-a) = \frac{(-a)^4 - 4(-a)^2}{(-a)^3}$
 $f(-a) = \frac{a^4 - 4a^2}{-a^3}$
 $f(-a) = -\frac{a^4 - 4a^2}{a^3} = -f(a)$

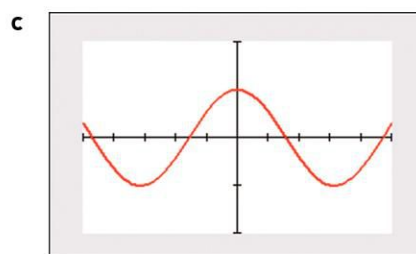
De grafiek is puntsymmetrisch in de oorsprong.



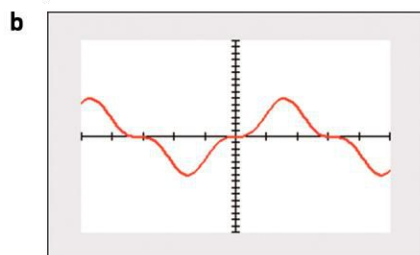
- 12 a Voor $n = 6$ geldt $f(-a) = (-a)^6 = (-1)^6 \cdot a^6 = a^6$ dus $f(-a) = f(a)$.
 b Voor $n = 7$ geldt $f(-a) = (-a)^7 = (-1)^7 \cdot a^7 = -a^7$ dus $f(-a) = -f(a)$.
 c Dit geldt voor even waarden van n .
 Voor even waarden van n is de grafiek van f lijnsymmetrisch in de y -as.
 d Dit geldt voor oneven waarden van n .
 Voor oneven waarden van n is de grafiek van f puntsymmetrisch in de oorsprong.



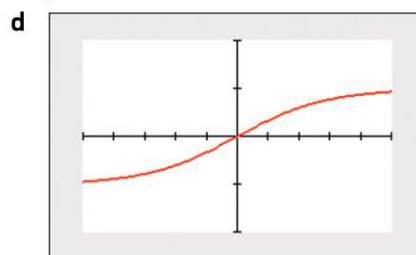
f is een oneven functie.



f is een even functie.



f is een oneven functie.



f is een oneven functie.

- 14 a $f(a) = \sqrt[3]{a}$
 $f(-a) = \sqrt[3]{-a}$
 $f(-a) = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{a}$
 $f(-a) = -1 \cdot \sqrt[3]{a} = -f(a)$, dus de grafiek is puntsymmetrisch in de oorsprong.
 b $f(-a) = -f(a)$, dus f is een oneven functie.
 c Door een verschuiving 2 omhoog.
 d Het punt van symmetrie is ook 2 omhoog verschoven, dus dat is $(0, 2)$.

9 Functies bewerken

- 15 a** Bij een verschuiving van 3 naar links wordt x vervangen door $x + 3$.

$$g(x) = f(x + 3)$$

$$g(x) = (x + 3)^2 - 6(x + 3) + 2$$

$$g(x) = x^2 + 6x + 9 - 6x - 18 + 2$$

$$g(x) = x^2 - 7$$

- b** $g(a) = a^2 - 7$ en $g(-a) = (-a)^2 - 7 = a^2 - 7$

$$g(a) = g(-a), \text{ dus } g \text{ is een even functie.}$$

- c** Omdat g een even functie is, is de symmetrie-as van de grafiek van g de y -as, ofwel de lijn $x = 0$.

Door de grafiek van g drie naar rechts te verschuiven krijg je de grafiek van f .

Dus krijg je de symmetrie-as van de grafiek van f door de lijn $x = 0$ drie naar rechts te verschuiven. De symmetrie-as van de grafiek van f is daarom $x = 3$.

- 16** Bij een verschuiving van 4 naar rechts wordt x vervangen door $x - 4$.

$$g(x) = f(x - 4)$$

$$g(x) = \frac{10(x - 4) + 40}{(x - 4)^2 + 8(x - 4) + 20}$$

$$g(x) = \frac{10x - 40 + 40}{x^2 - 8x + 16 + 8x - 32 + 20}$$

$$g(x) = \frac{10x}{x^2 + 4}$$

$$g(a) = \frac{10a}{a^2 + 4} \text{ en } g(-a) = \frac{10 \cdot -a}{(-a)^2 + 4} = -\frac{10a}{a^2 + 4}$$

Omdat $g(-a) = -g(a)$ is de grafiek van g puntsymmetrisch in de oorsprong, dus is de grafiek van f puntsymmetrisch in het punt $(-4, 0)$.

- 17 a** f en g zijn oneven functies, dus $f(-a) = -f(a)$ en $g(-a) = g(a)$

$$h(-a) = f(-a) + g(-a)$$

$$h(-a) = -f(a) + -g(a)$$

$$h(-a) = -(f(a) + g(a)) \text{ en } h(a) = f(a) + g(a)$$

$$h(-a) = -h(a), \text{ dus } h \text{ is een oneven functie.}$$

- b** $p(-a) = f(-a) \cdot g(-a)$

$$p(-a) = -f(a) \cdot -g(a)$$

$$p(-a) = f(a) \cdot g(a) \text{ en } p(a) = f(a) \cdot g(a)$$

$$p(-a) = p(a), \text{ dus } p \text{ is een even functie.}$$

011 a $f(-1) = \frac{1}{2} \cdot -1 - \frac{1}{(-1)^3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{-1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{(1)^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

b $f(-2) = \frac{1}{2} \cdot -2 - \frac{1}{(-2)^3} = -1 - \frac{1}{-8} = -1 + \frac{1}{8} = -\frac{7}{8}$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{(2)^3} = 1 - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

c $f(a) = \frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{a^3}$ en $f(-a) = \frac{1}{2} \cdot -a - \frac{1}{(-a)^3}$

d $f(-a) = \frac{1}{2} \cdot -a - \frac{1}{(-a)^3}$

$$f(-a) = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{-a^3}$$

$$f(-a) = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{a^3} \text{ en } f(a) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{a^3}$$

$$f(-a) = -\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{a^3}\right), \text{ dus } f(-a) = -f(a)$$

- 015 a** $g(x) = f(x+2) = (x+2)^2 - 4(x+2) + 5$
b $g(x) = x^2 + 4x + 4 - 4x - 8 + 5$
 $g(x) = x^2 + 1$
c $g(4) = 4^2 + 1 = 17$ en $g(-4) = (-4)^2 + 1 = 17$
d $g(-a) = (-a)^2 + 1$
 $g(-a) = a^2 + 1$ en $g(a) = a^2 + 1$
 $g(-a) = g(a)$, dus g is een even functie.
e Omdat g een even functie is, is de symmetrie-as van de grafiek van g de y -as, ofwel de lijn $x = 0$.
f Door de grafiek van g twee naar rechts te verschuiven krijg je de grafiek van f . Dus krijg je de symmetrie-as van de grafiek van f door de lijn $x = 0$ twee naar rechts te verschuiven. De grafiek van f is daarom symmetrisch in de lijn $x = 2$.

U2 a $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 16 = 8 - 24 + 16 = 0$ dus $(2, 0)$ ligt op de grafiek van f .

b Verschuif de grafiek van f twee naar links.

Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is dan

$$g(x) = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 16$$

$$g(x) = (x+2)(x+2)^2 - 6(x+2)^2 + 16$$

$$g(x) = (x+2)(x^2 + 4x + 4) - 6(x^2 + 4x + 4) + 16$$

$$g(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2x^2 + 8x + 8 - 6x^2 - 24x - 24 + 16$$

$$g(x) = x^3 - 12x$$

$$g(-a) = (-a)^3 - 12(-a)$$

$$g(-a) = -a^3 + 12a \text{ en } g(a) = a^3 - 12a$$

Omdat $g(-a) = -g(a)$ is de grafiek van g puntsymmetrisch in $(0, 0)$.

De grafiek van f is daarom puntsymmetrisch in $(2, 0)$.

9.3 Absolute waarde

intro De waarde van d is nooit kleiner dan 0, dus de grafiek ligt nergens onder de horizontale as.

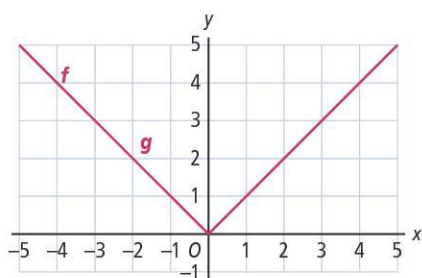
- 18 a** Ook het getal -3 ligt ook op een afstand 3 tot het getal 0.
b $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ liggen op een afstand $\sqrt{5}$ tot het getal 0.
c Voor alle getallen $a \geq 0$
d Voor alle getallen $a \leq 0$

- 19 a** $|3 - 28| = |-25| = 25$
b $3 - |-28| = 3 - 28 = -25$
c $\sqrt{|-100|} - \log(|-100|) = \sqrt{100} - \log(100) = 10 - 2 = 8$
d $|18 - |-24|| = |18 - 24| = |-6| = 6$

- 20 a** $f(-4) = |-4| = 4$, $f(-1) = |-1| = 1$
 $f(0) = |0| = 0$, $f(1) = |1| = 1$ en $f(4) = |4| = 4$

9 Functies bewerken

b c

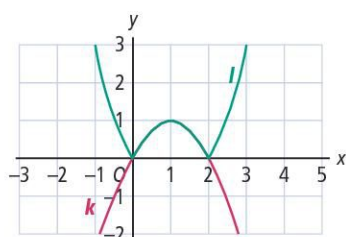


d De grafieken vallen samen, dus de functies f en g zijn hetzelfde.

21 a

	-2	-1	0	1	2	3	4
$k(x)$	-8	-3	0	1	0	-3	-8
$l(x)$	8	3	0	1	0	3	8

b



c De delen van de grafiek van k die onder de x -as liggen, worden gespiegeld in de x -as.

d minimum $l(0) = 0$, maximum $l(1) = 1$, minimum $l(2) = 0$

22 a De oplossing van ${}^2\log(x) = 0$ is $x = 2^0 = 1$

b Het minimum is $f(1) = 0$

c $f(x) = \begin{cases} {}^2\log(x) & \text{als } x \geq 1 \\ -{}^2\log(x) & \text{als } 0 < x < 1 \end{cases}$

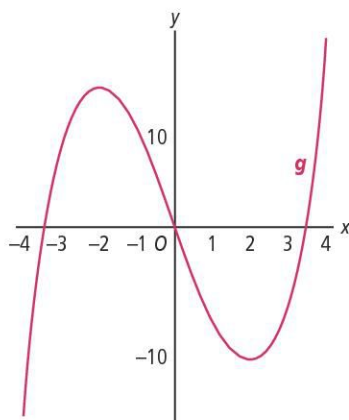
d Eerst $f(x) = 2$ oplossen:

${}^2\log(x) = 2$ geeft $x = 2^2 = 4$

$-{}^2\log(x) = 2$ geeft ${}^2\log(x) = -2$ dus $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Zie grafiek: de oplossing van $f(x) > 2$ is $\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$

23 a



b $x(x^2 - 12) = 0$

$x = 0$ of $x^2 - 12 = 0$

$x = 0$ of $x^2 = 12$

$x = 0$ of $x = -\sqrt{12}$ of $x = \sqrt{12}$

$$c \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x & \text{als } -\sqrt{12} \leq x \leq 0 \text{ of } x \geq \sqrt{12} \\ -x^3 + 12x & \text{als } x \leq -\sqrt{12} \text{ of } 0 \leq x \leq \sqrt{12} \end{cases}$$

$$d \quad f \text{ valt samen met } g \text{ als } -\sqrt{12} \leq x \leq 0 \text{ of } x \geq \sqrt{12}$$

$$e \quad g'(x) = 3x^2 - 12$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ of } x = 2$$

$$\text{maximum } g(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot -2 = 16 \text{ en minimum } g(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$$

De toppen zijn $(-2, 16)$ en $(2, -16)$.

$$f \quad \text{minimum } f(-\sqrt{12}) = 0, \text{ maximum } f(-2) = 16$$

$$\text{minimum } f(0) = 0, \text{ maximum } f(2) = 16 \text{ en minimum } f(\sqrt{12}) = 0$$

$$24 \quad a \quad g(x) = -x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 26$$

$$g'(x) = -3x^2 + 9x$$

$$g'(x) = 0 \text{ als } -3x^2 + 9x = 0$$

$$-3x(x - 3) = 0$$

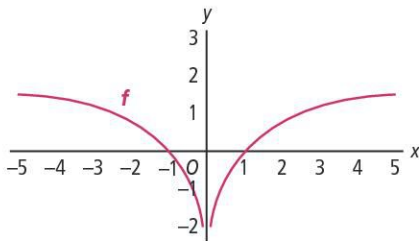
$$x = 0 \text{ of } x = 3$$

$$\text{minimum } g(0) = -26, \text{ maximum } g(3) = -12\frac{1}{2}$$

$$b \quad g(-2) = -(-2)^3 + 4\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 26 = 8 + 18 - 26 = 0, \text{ klopt.}$$

$$c \quad \text{minimum } f(-2) = 0, \text{ maximum } f(0) = 26, \text{ minimum } f(3) = 12\frac{1}{2}$$

25 a



$$b \quad {}^3\log |x| = 2$$

$$|x| = 3^2 = 9 \text{ dus } x = -9 \text{ of } x = 9$$

Zie grafiek: de oplossing van $f(x) > 2$ is $x < -9$ of $x > 9$

$$26 \quad a \quad 5x + 6 = 0 \text{ als } 5x = -6 \text{ dus } x = -1\frac{1}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - (5x + 6) = x^2 - 5x - 6 & \text{als } x \geq -1\frac{1}{5} \\ x^2 - (-5x - 6) = x^2 + 5x + 6 & \text{als } x < -1\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$b \quad f(-1\frac{1}{5}) = (-1,2)^2 - 5 \cdot -1,2 - 6 = 1\frac{11}{25} \text{ dus de knik zit bij het punt } (-1\frac{1}{5}, 1\frac{11}{25}).$$

$$c \quad x^2 - 5x - 6 = 0 \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$x = 6 \text{ of } x = -1$$

of

$$x = -2 \text{ of } x = -3$$

$$d \quad f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{als } x \geq -1\frac{1}{5} \\ 2x + 5 & \text{als } x < -1\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$2x - 5 = 0 \text{ als } x = 2\frac{1}{2} \text{ en } 2x + 5 = 0 \text{ als } x = -2\frac{1}{2}$$

Er is een minimum $f(-2\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, een maximum $f(-1\frac{1}{5}) = 1\frac{11}{25}$ en een

$$\text{minimum } f(2\frac{1}{2}) = -12\frac{1}{4}$$

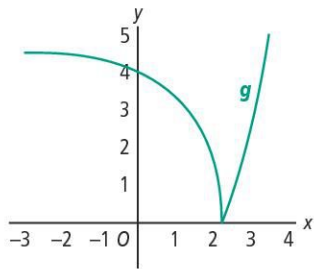
9 Functies bewerken

- 022 a** De delen van de grafiek van f die onder de x -as liggen, worden gespiegeld in de x -as.

b $2^x - 5 = 0$

$2^x = 5$ dus $x = {}^2\log(5)$

c



- d** Zie opgave b, dat is het punt $({}^2\log(5), 0)$

e $g(x) = \begin{cases} 2^x - 5 & \text{als } x \geq {}^2\log(5) \\ -2^x + 5 & \text{als } x < {}^2\log(5) \end{cases}$

- f** Het minimum van g is $g({}^2\log(5)) = 0$.

g $f(x) = 3$

$-f(x) = 3$

$2^x - 5 = 3$

$f(x) = -3$

$2^x = 8$

$2^x - 5 = -3$

$x = 3$

$2^x = 2$

$x = 1$

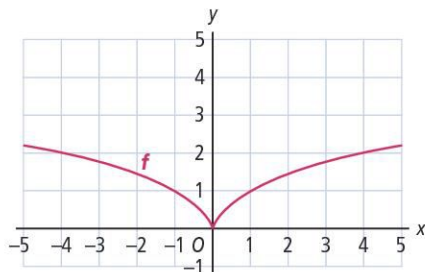
- h** Zie grafiek: de oplossing van $g(x) \leq 3$ is $[1, 3]$.

025 a $f(1) = \sqrt{1} = 1$ en $f(-1) = \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$

b $f(9) = \sqrt{9} = 3$ en $f(-9) = \sqrt{-9} = \sqrt{9} = 3$

c $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{als } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{als } x < 0 \end{cases}$

d

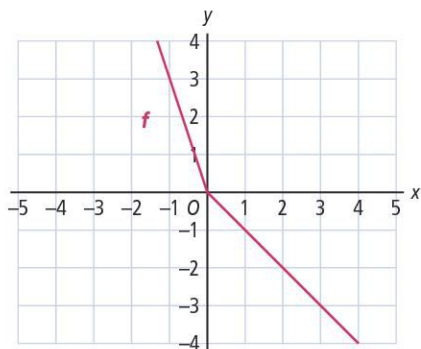


- e** De grafiek is symmetrisch in de y -as.

f $f(x) = 2$ heeft als oplossing $x = 4$ en $x = -4$.

- g** Zie grafiek: de oplossing van $f(x) > 2$ is $\langle -4, -2 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle$

U3 a



- b $f(x) = \begin{cases} x - 2x & \text{als } x \geq 0 \\ -x - 2x & \text{als } x < 0 \end{cases}$ ofwel $f(x) = \begin{cases} -x & \text{als } x \geq 0 \\ -3x & \text{als } x < 0 \end{cases}$
 $f(x) = -3$ als $x = 3$
 $f(x) = 3$ als $x = -1$
 Zie grafiek: de oplossing van $-3 \leq f(x) \leq 3$ is $[-1, 3]$

- U4 Stel dat $g(x) = |x| + ax + b$.
 Omdat $g(0) = 1$, moet b gelijk zijn aan 1.
 Als $x < 0$ is $g(x) = 1$, dus $g(x) = -x + ax + 1 = 1$
 Dit kan alleen kloppen als $a = 1$, dus $g(x) = |x| + x + 1$

9.4 Inverse functies

intro Je moet het aantal graden Celsius vermenigvuldigen met $\frac{4}{5}$, dus $R = \frac{4}{5}C$

27 a

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$g(x)$	-1	0	1	2

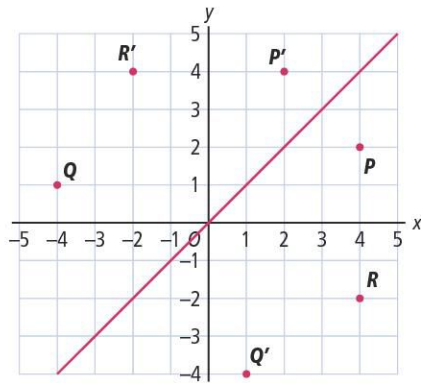
- b De waarden van x en de uitkomsten zijn verwisseld.
 c $g(9\sqrt{3}) = 2\frac{1}{2}$

- 28 $f(a) = 2a - 8 = b$
 Uit $2a - 8 = b$ volgt $2a = b + 8$ dus
 $a = \frac{1}{2}b + 4$ ofwel $g(b) = a$

- 29 a Het rekenschema van f is $x \rightarrow -4x \rightarrow -4x + 3$
 Het rekenschema van f^{inv} is $x \rightarrow x - 3 \rightarrow -\frac{1}{4}(x - 3)$
 $f^{inv}(x) = -\frac{1}{4}(x - 3) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ met domein $\mathbb{R}$.
- b Het rekenschema van f is $x \rightarrow 2x \rightarrow 2x + 5 \rightarrow \sqrt{2x + 5}$
 Het rekenschema van f^{inv} is $x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 - 5 \rightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 5)$
 $f^{inv}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5) = \frac{1}{2}x^2 - 2\frac{1}{2}$ met domein $[0, \rightarrow)$.
- c Het rekenschema van f is $x \rightarrow x - 3 \rightarrow \log(x - 3)$
 Het rekenschema van f^{inv} is $x \rightarrow 10^x \rightarrow 10^x + 3$
 $f^{inv}(x) = 10^x + 3$ met domein $\mathbb{R}$.
- d Het rekenschema van f is $x \rightarrow x - 2 \rightarrow \frac{1}{x - 2}$
 Het rekenschema van f^{inv} is $x \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} + 2$
 $f^{inv}(x) = \frac{1}{x} + 2$ met domein $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

9 Functies bewerken

30 a



b $P'(2, 4)$, $Q'(1, -4)$ en $R'(-2, 4)$

31 a De coördinaten van $P'(1, 3)$ voldoen aan de vergelijking $x = (y - 2)^3$, want $1 = (3 - 2)^3$.

b Als alle punten (x, y) voldoen aan de vergelijking $y = (x - 3)^3$, dan voldoen alle punten (y, x) aan de vergelijking $x = (y - 2)^3$.

c $x = (y - 2)^3$ ofwel $(y - 2)^3 = x$ geeft $y - 2 = \sqrt[3]{x}$ dus $y = 2 + \sqrt[3]{x}$

d $f^{\text{inv}}(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$

32 a $y = {}^2\log\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$ wordt $x = {}^2\log\left(\frac{1}{2}y + 3\right)$

$\frac{1}{2}y + 3 = 2^x$ dus $\frac{1}{2}y = 2^x - 3$ en $y = 2 \cdot 2^x - 6$
 $f^{\text{inv}}(x) = 2^{x+1} - 6$, het domein is $\mathbb{R}$.

b $y = 2 - \sqrt{x}$ wordt $x = 2 - \sqrt{y}$

$\sqrt{y} = 2 - x$ dus $y = (2 - x)^2$

$f^{\text{inv}}(x) = (2 - x)^2$, het domein is gelijk aan het bereik van f , dus $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.

c $y = \frac{3}{x+1}$ wordt $x = \frac{3}{y+1}$

$y + 1 = \frac{3}{x}$ dus $y = -1 + \frac{3}{x}$

$f^{\text{inv}}(x) = -1 + \frac{3}{x}$, het domein is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

d $y = 2^x - 3$ wordt $x = 2^y - 3$

$2^y = x + 3$ dus $y = {}^2\log(x + 3)$

$f^{\text{inv}}(x) = {}^2\log(x + 3)$, het domein is $\langle -3, \rightarrow \rangle$.

e $y = \sqrt[3]{1 - 2x}$ wordt $x = \sqrt[3]{1 - 2y}$

$1 - 2y = x^3$ dus $-2y = -1 + x^3$ en $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot x^3$

$f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot x^3$, het domein is $\mathbb{R}$.

f $y = \frac{2x-1}{x+3}$ wordt $x = \frac{2y-1}{y+3}$

$x(y+3) = 2y-1$ dus $xy - 2y = -3x - 1$

$y(x-2) = -3x-1$ dus $y = \frac{-3x-1}{x-2}$

$f^{\text{inv}}(x) = \frac{-3x-1}{x-2}$, het domein is $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

- 33** $y = x\sqrt{x}$ wordt $x = y\sqrt{y}$ ofwel $x = y \cdot y^{\frac{1}{2}}$
 dus $y^{\frac{3}{2}} = x$ en daaruit volgt $y = x^{\frac{2}{3}}$
 $f^{\text{inv}}(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ofwel $f^{\text{inv}}(x) = \sqrt[3]{x^2}$
 Het domein is $[0, \rightarrow)$

- 029** **a** De inverse bewerking van $2^{\dots}$ is ${}^2\log(\dots)$
b De inverse bewerking van $+5$ is -5
c ${}^2\log(x) - 5 \leftarrow {}^2\log(x) \leftarrow x$
 $f^{\text{inv}}(x) = {}^2\log(x) - 5$
d Het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$, dus het domein van f^{inv} is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
e $x \rightarrow x - 2 \rightarrow 3^{x-2}$ wordt ${}^3\log(x) + 2 \leftarrow {}^3\log(x) \leftarrow x$
 $f^{\text{inv}}(x) = {}^3\log(x) + 2$, het domein is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
f $x \rightarrow -2x \rightarrow -2x + 8$ wordt $-\frac{1}{2}(x - 8) \leftarrow x - 8 \leftarrow x$
 $f^{\text{inv}}(x) = -\frac{1}{2}(x - 8)$ of $f^{\text{inv}}(x) = -\frac{1}{2}x + 4$, het domein is $\mathbb{R}$.
g $x \rightarrow 5x \rightarrow 5x + 10 \rightarrow \sqrt{5x + 10}$ wordt
 $\frac{1}{5}(x^2 - 10) \leftarrow x^2 - 10 \leftarrow x^2 \leftarrow x$
 $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 10)$ ofwel $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2$, het domein is $[0, \rightarrow)$.
h $x \rightarrow x + 3 \rightarrow \frac{1}{x+3}$ wordt $\frac{1}{x} - 3 \leftarrow \frac{1}{x} \leftarrow x$
 $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{x} - 3$, het domein is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

- 032** **a** $y = \frac{x+1}{x-4}$
b $x = \frac{y+1}{y-4}$
c stap 1: links en rechts vermenigvuldigd met $y - 4$
 stap 2: haakjes weggewerkt
 stap 3: beide kanten $+4x$ en beide kanten $-y$
 het resultaat is $xy - y = 4x + 1$
 stap 4: y buiten haakjes gehaald; het resultaat is $y(x - 1) = 4x + 1$
 De laatste stap is dan dat $y = \frac{4x+1}{x-1}$
d $f^{\text{inv}}(x) = \frac{4x+1}{x-1}$
e Het bereik van f is $\langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.
f Het domein van f^{inv} is $\langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.

- U5** **a** Omdat er twee waarden van y zijn bij één waarde van x .
b Bij het domein $[-2, \rightarrow)$ hoort de rechter helft van de parabool,
 dus de grafiek van f^{inv} is de bovenste helft van de beeldgrafiek.
 $y = (x + 2)^2$ wordt $x = (y + 2)^2$
 $y + 2 = -\sqrt{x}$ of $y + 2 = \sqrt{x}$, in dit geval moet de rechter oplossing worden
 gekozen, dus $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt{x}$.
c In dit geval moet de linker oplossing worden gekozen, dus $f^{\text{inv}}(x) = -2 - \sqrt{x}$.

9 Functies bewerken

9.5 Gelijkwaardige formules

intro Door invullen van $F = 32$ en $C = 0$ en ook $F = 212$ en $C = 100$ kun je vaststellen wat de twee correcte formules zijn.

Dat zijn $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ en $F = \frac{9}{5}C + 32$.

34 a $x = 1$ en $y = 12$ invullen in $y = 2 \cdot 3^x + 6$ geeft $12 = 2 \cdot 3^1 + 6$, dat klopt.

$x = 1$ en $y = 12$ invullen in $x = {}^3\log\left(\frac{1}{2}y - 3\right)$ geeft

$1 = {}^3\log\left(\frac{1}{2} \cdot 12 - 3\right) = {}^3\log(3)$ en ook dat klopt.

b $x = 0$ en $y = 8$ invullen in $x = {}^3\log\left(\frac{1}{2}y - 3\right)$ geeft

$0 = {}^3\log\left(\frac{1}{2} \cdot 8 - 3\right) = {}^3\log(1)$ klopt, de getallen voldoen ook aan de tweede formule.

c Uit $x = {}^3\log\left(\frac{1}{2}y - 3\right)$ volgt $\frac{1}{2}y - 3 = 3^x$

$$\frac{1}{2}y = 3^x + 3$$

$$y = 2 \cdot 3^x + 6$$

35 Uit $2xy = 5y + 24$ volgt $2xy - 5y = 24$

$$y(2x - 5) = 24$$

$$y = \frac{24}{2x - 5}$$

De formule $2xy = 5y + 24$ is dus gelijkwaardig met de formules uit het voorbeeld.

36 a $p^3 + 2q = 5$

$$p^3 = 5 - 2q$$

$$p = \sqrt[3]{5 - 2q}$$

b $q = \frac{5}{p + 3}$

$$p + 3 = \frac{5}{q}$$

$$p = -3 + \frac{5}{q}$$

c $q + 3^p = 4$

$$3^p = -q + 4$$

$$p = {}^3\log(-q + 4)$$

d $q = {}^6\log(p + 20)$

$$p + 20 = 6^q$$

$$p = 6^q - 20$$

e $q = \sqrt[5]{p + 1} - 2$

$$\sqrt[5]{p + 1} = q + 2$$

$$p + 1 = (q + 2)^5$$

$$p = (q + 2)^5 - 1$$

f $q = \frac{-7}{6 + \sqrt[3]{p}}$

$$6 + \sqrt[3]{p} = \frac{-7}{q}$$

$$\sqrt[3]{p} = -6 - \frac{7}{q}$$

$$p = \left(-6 - \frac{7}{q}\right)^3$$

37 a stap 1: links en rechts vermenigvuldigd met $2p - 1$

stap 2: haakjes weggewerkt

stap 3: de termen met p links geplaatst, en de term zonder p rechts

stap 4: p buiten haakjes geschreven

$$p = \frac{q}{2q - 12}$$

$$\text{b } q = \frac{p-3}{p+4}$$

$$q(p+4) = p-3$$

$$pq + 4q = p-3$$

$$pq - p = -4q - 3$$

$$p(q-1) = -4q-3$$

$$p = \frac{-4q-3}{q-1}$$

$$\text{c } q = \frac{4p-12}{3p-5}$$

$$q(3p-5) = 4p-12$$

$$3pq - 5q = 4p - 12$$

$$3pq - 4p = 5q - 12$$

$$p(3q-4) = 5q-12$$

$$p = \frac{5q-12}{3q-4}$$

$$\text{38 a } b = 50 \text{ invullen geeft } \frac{1}{f} = \frac{1}{50} + \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{50}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{50}{50f} - \frac{f}{50f}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{50-f}{50f} \text{ dus } v = \frac{50f}{50-f}$$

$$\text{b } f = 10 \text{ invullen geeft } \frac{1}{10} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{10} - \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{v}{10v} - \frac{10}{10v} = \frac{v-10}{10v} \text{ dus } b = \frac{10v}{v-10}$$

- 39 a** $4-v$ is de snelheid stroomopwaarts en $4+v$ is de snelheid stroomafwaarts.
De tijden, nodig voor 10 km heen en 10 km terug varen zijn dus

$$\frac{10}{4-v} \text{ en } \frac{10}{4+v}, \text{ dus de totaal benodigde tijd is } T = \frac{10}{4-v} + \frac{10}{4+v}$$

- b** v moet waarden hebben tussen 0 en 4, want als $v \geq 4$ dan is Robert's snelheid kleiner dan of gelijk aan de stroomsnelheid van de rivier. In dat geval kan hij deze tocht niet maken.

$$\text{c } T = \frac{10}{4-v} + \frac{10}{4+v}$$

$$T = \frac{10(4+v)}{(4-v)(4+v)} + \frac{10(4-v)}{(4+v)(4-v)}$$

$$T = \frac{40 + 10v + 40 - 10v}{16 - v^2}$$

$$T = \frac{80}{16 - v^2}$$

$$\text{d } 16 - v^2 = \frac{80}{T}$$

$$v^2 = 16 - \frac{80}{T} \text{ dus } v = \sqrt{16 - \frac{80}{T}}$$

- 40 a** $p^2 + 4q = 5$ ofwel $p^2 = 5 - 4q$ en $p \geq 0$ dus $p = \sqrt{5 - 4q}$
b $p^2 + 4q = 5$ ofwel $p^2 = 5 - 4q$ en $p \leq 0$ dus $p = -\sqrt{5 - 4q}$
c $(p+2)^2 + 4q = 5$ ofwel $(p+2)^2 = 5 - 4q$ en $p-2 \leq 0$ dus $p-2 = -\sqrt{5 - 4q}$ en $p = 2 - \sqrt{5 - 4q}$

9 Functies bewerken

41 a $E = \frac{1}{2}mv^2$ ofwel $\frac{1}{2}m = \frac{E}{v^2}$ dus $m = \frac{2E}{v^2}$

b $v^2 = \frac{E}{\frac{1}{2}m} = \frac{2E}{m}$ en $v \geq 0$, dus $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

42 a $q = \sqrt{p+5}$ dus $p \geq -5$ en $q \geq 0$
 $q^2 = p+5$

$p = q^2 - 5$ voor $q \geq 0$

b $q = \frac{6}{1 + \sqrt{p-3}}$ dus $p \geq 3$

$\sqrt{p-3} \geq 0$, dus $1 + \sqrt{p-3} \geq 1$

daaruit volgt $0 < \frac{6}{1 + \sqrt{p-3}} \leq 6$

$1 + \sqrt{p-3} = \frac{6}{q}$

$\sqrt{p-3} = \frac{6}{q} - 1$

$p-3 = \left(\frac{6}{q} - 1\right)^2$

$p = 3 + \left(\frac{6}{q} - 1\right)^2$ voor $0 < q \leq 6$

036 a Op de puntjes moet $6 + \sqrt[3]{p+1}$ staan.

b $6 + \sqrt[3]{p+1} = \frac{12}{q}$

c $\sqrt[3]{p+1} = \frac{12}{q} - 6$

d In stap 4 wordt aan beide kanten tot de derde macht gedaan.

e $p+1 = \left(\frac{12}{q} - 6\right)^3$

$p = -1 + \left(\frac{12}{q} - 6\right)^3$

f $4p^3 = 9 - 2q$

$p^3 = 2\frac{1}{4} - \frac{1}{2}q$

$p = \sqrt[3]{2\frac{1}{4} - \frac{1}{2}q}$

g $p-1 = \frac{6}{q}$

$p = 1 + \frac{6}{q}$

j $2 + \sqrt[5]{p} = \frac{5}{q}$

$\sqrt[5]{p} = \frac{5}{q} - 2$

$p = \left(\frac{5}{q} - 2\right)^5$

h $10^p = 6 - 3q$

$p = \log(6 - 3q)$

i $2p - 7 = 4^q$

$2p = 7 + 4^q$

$p = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4^q$

k $q(4p - 8) = p$

$4pq - 8q = p$

$4pq - p = 8q$

$p(4q - 1) = 8q$

$p = \frac{8q}{4q - 1}$

039 a $q = \frac{6(1+p)}{(1-p)(1+p)} + \frac{6(1-p)}{(1-p)(1+p)} = \frac{6+6p+6-6p}{(1-p)(1+p)} = \frac{12}{(1-p)(1+p)}$

b $(1-p)(1+p) = 1-p^2$ dus $q = \frac{12}{1-p^2}$

c $1-p^2 = \frac{12}{q}$ dus $-p^2 = -1 + \frac{12}{q}$ en $p^2 = 1 - \frac{12}{q}$

d $p = \sqrt{1 - \frac{12}{q}}$ voor $p \geq 0$

U6 a $q \cdot {}^2\log(p) = 1 - {}^2\log(p)$
 $q \cdot {}^2\log(p) + {}^2\log(p) = 1$
 $(q+1) \cdot {}^2\log(p) = 1$
 ${}^2\log(p) = \frac{1}{q+1}$ dus $p = 2^{\frac{1}{q+1}}$

c $4pq - 3p = 2q + 1$
 $p(4q - 3) = 2q + 1$
 $p = \frac{2q+1}{4q-3}$

b $\sqrt[3]{3-3p^3} = q-3$
 $3-3p^3 = (q-3)^3$
 $3p^3 = 3 - (q-3)^3$
 $p^3 = 1 - \frac{1}{3}(q-3)^3$
 $p = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{3}(q-3)^3}$

d $p^2 - 4p = q - 4$
 $p^2 - 4p + 4 = q$
 $(p-2)^2 = q$
 $p-2 = \sqrt{q}$ (want $p \geq 2$)
 $p = 2 + \sqrt{q}$

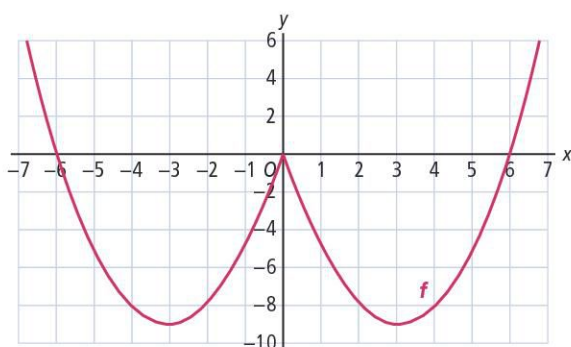
9.6 Gemengde opdrachten

43 a $f_p(-a) = \frac{1}{3}(-a)^3 - p(-a) = \frac{1}{3} \cdot -a^3 + pa = -(\frac{1}{3}a^3 - pa) = -f_p(a)$, dus voor elke waarde van p is f_p een oneven functie.

b $f_p'(x) = 0$ als $\frac{1}{3}x^3 - px = 0$ ofwel $\frac{1}{3}x(x^2 - 3p) = 0$
 Hieruit volgt $x = 0$ of $x = \sqrt{3p}$ of $x = -\sqrt{3p}$
 De laatste twee oplossingen bestaan alleen (en zijn niet gelijk aan 0) als $p > 0$. Er zijn dus alleen drie snijpunten met de x -as als $p > 0$.

c $f_p'(x) = x^2 - p = 0$ als $x = \sqrt{p}$ of $x = -\sqrt{p}$ ($p \geq 0$)
 $f_p(\sqrt{p}) = \frac{1}{3}(\sqrt{p})^3 - p \cdot \sqrt{p} = \frac{1}{3}p\sqrt{p} - p\sqrt{p} = -\frac{2}{3}p\sqrt{p}$
 $f_p(-\sqrt{p}) = \frac{1}{3}(-\sqrt{p})^3 - p \cdot -\sqrt{p} = -\frac{1}{3}p\sqrt{p} + p\sqrt{p} = \frac{2}{3}p\sqrt{p}$
 De coördinaten van de toppen zijn $(\sqrt{p}, -\frac{2}{3}p\sqrt{p})$ en $(-\sqrt{p}, \frac{2}{3}p\sqrt{p})$.
 $g(\sqrt{p}) = -\frac{2}{3}(\sqrt{p})^3 = -\frac{2}{3}p\sqrt{p}$ en $g(-\sqrt{p}) = -\frac{2}{3}(-\sqrt{p})^3 = \frac{2}{3}p\sqrt{p}$
 dus de toppen liggen op de grafiek van g .

44 a



9 Functies bewerken

b De grafiek van f is symmetrisch in de y -as.

$$\mathbf{c} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & \text{als } x \geq 0 \\ x^2 + 6x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

d De nulpunten van $y = x^2 - 6x$ zijn $x = 0$ en $x = 6$.

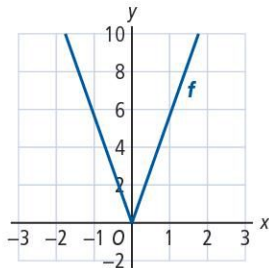
De nulpunten van $y = x^2 + 6x$ zijn $x = 0$ en $x = -6$.

De toppen liggen bij $x = 3$ en $x = -3$.

De extremen van f zijn:

minimum $f(-3) = -9$, maximum $f(0) = 0$, minimum $f(3) = -9$

e



De grafiek van f is symmetrisch in de y -as.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x & \text{als } x \geq 0 \\ x^2 - 6x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

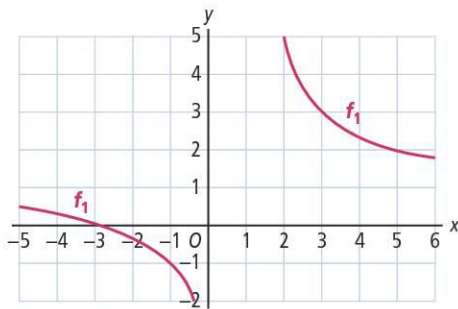
minimum $f(0) = 0$

45 Spiegelen van de grafiek van $f(x) = x - \frac{2}{x^2}$ in de x -as geeft de grafiek van $h(x) = -1 \cdot \left(x - \frac{2}{x^2}\right)$ ofwel $h(x) = -x + \frac{2}{x^2}$

De grafiek van h spiegelen in de y -as betekent de x in het functievoorschrift van h vervangen door $-x$. Dit geeft:

$h(-x) = -(-x) + \frac{2}{(-x)^2} = x + \frac{2}{x^2}$ en dat is inderdaad het functievoorschrift van g .

46 a



b De horizontale asymptoot is $y = 1$ en de verticale asymptoot is $x = 1$.

c $f'_p(0) = 0$. Dit substitueren geeft $p + \frac{4}{-p} = 0$

$$-p^2 + 4 = 0$$

$$p^2 = 4$$

$$p = -2 \text{ of } p = 2$$

d $y = 1 + \frac{4}{x-1}$ wordt $x = 1 + \frac{4}{y-1}$

$$x - 1 = \frac{4}{y-1} \text{ en daaruit volgt } y - 1 = \frac{4}{x-1} \text{ en } y = 1 + \frac{4}{x-1}$$

dus $f_1^{\text{inv}}(x) = 1 + \frac{4}{x-1}$ en dat is gelijk $f_1(x)$.

- e** $y = p + \frac{4}{x-p}$ wordt $x = p + \frac{4}{y-p}$
 $x - p = \frac{4}{y-p}$ en daaruit volgt $y - p = \frac{4}{x-p}$ en $y = p + \frac{4}{x-p}$
 dus $f_p^{\text{inv}}(x) = p + \frac{4}{x-p}$ en dat is gelijk $f_p(x)$.
- f** $y = x$ substitueren in $f_p(x) = p + \frac{4}{x-p}$ geeft $x = p + \frac{4}{x-p}$
 $x - p = \frac{4}{x-p}$
 $(x - p)^2 = 4$ en
 $x - p = -2$ of $x - p = 2$
 $x = p - 2$ of $x = p + 2$
 $P(p - 2, p - 2)$ en $Q(p + 2, p + 2)$ en met Pythagoras bereken je
 $PQ = \sqrt{((p + 2) - (p - 2))^2 + ((p + 2) - (p - 2))^2}$
 $PQ = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$ en dus onafhankelijk van p .

Onderzoeksopdrachten

- 47 a** Kies bijvoorbeeld translatie 5 naar rechts en translatie 3 omlaag.
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = \sqrt{x-5}$ wordt $h(x) = \sqrt{x-5} - 3$
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = \sqrt{x} - 3$ wordt $h(x) = \sqrt{x-5} - 3$
 Bij twee translaties na elkaar maakt de volgorde niet uit.
- b** Kies bijvoorbeeld een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x -as en een translatie 2 omhoog.
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = 3\sqrt{x}$ wordt $h(x) = 3\sqrt{x} + 2$
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = \sqrt{x} + 2$ wordt $h(x) = 3(\sqrt{x} + 2) = 3\sqrt{x} + 6$
 De volgorde maakt hierbij wel uit.
- c** Kies bijvoorbeeld een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x -as en een translatie 2 naar links.
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = 3\sqrt{x}$ wordt $h(x) = 3\sqrt{x+2}$
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = \sqrt{x+2}$ wordt $h(x) = 3\sqrt{x+2}$
 De volgorde maakt hierbij niet uit.
- d** Kies bijvoorbeeld een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de y -as en een translatie 2 naar links.
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x}$ wordt $h(x) = \sqrt{\frac{1}{3}(x+2)} = \sqrt{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}$
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = \sqrt{x+2}$ wordt $h(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x + 2}$
 De volgorde maakt hierbij wel uit.
- e** Kies bijvoorbeeld een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de y -as en een translatie 2 omhoog.
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x}$ wordt $h(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x} + 2$
 $f(x) = \sqrt{x}$ wordt $g(x) = \sqrt{x} + 2$ wordt $h(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x} + 2$
 De volgorde maakt hierbij niet uit.

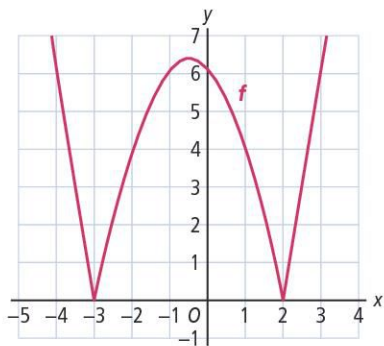
9 Functies bewerken

- 48 a** De lijn $y = x$ is symmetrie-as van de grafiek van f .
b Dit geldt voor de functie $f(x) = x$ en voor alle lineaire functies waarvan de grafiek loodrecht staat op de lijn $y = x$, dus alle functies $f(x) = -x + p$.
c Ja, bijvoorbeeld alle functies $f_a(x) = \frac{a}{x}$
- 49 a** $f_2(x) = |x - 2| + x + |x + 2|$
 De knikken zitten bij $x - 2 = 0$ en bij $x + 2 = 0$,
 dus de knikken zitten bij $x = 2$ en $x = -2$.
 $f_2(-2) = |-2 - 2| + -2 + |-2 + 2| = 4 - 2 + 0 = 2$ en
 $f_2(2) = |2 - 2| + 2 + |2 + 2| = 0 + 2 + 4 = 6$
 De knikpunten zijn $A(-2, 2)$ en $B(2, 6)$.
b Kies bijvoorbeeld $p = 5$ en $p = 10$:
 Als $p = 5$ vind je $A(-5, 5)$ en $B(5, 15)$.
 Als $p = 10$ vind je $A(-10, 10)$ en $B(10, 30)$.
c De knikpunten A liggen op de lijn $y = -x$.
 De knikpunten B liggen op de lijn $y = 3x$.

Samenvatting

- S1 a** $q = \frac{1}{2} \cdot \log(p - 5)$
 $\log(p - 5) = 2q$
 $p - 5 = 10^{2q}$
 $p = 5 + 10^{2q}$
- b** $q = \sqrt[5]{4p + 20} - 1$
 $q + 1 = \sqrt[5]{4p + 20}$
 $4p + 20 = (q + 1)^5$
 $4p = (q + 1)^5 - 20$
 $p = \frac{1}{4}(q + 1)^5 - 5$
- S2** Kies bijvoorbeeld $A(-3, -10)$ en $B(5, 22)$.
 De spiegelbeelden zijn $A'(-10, -3)$ en $B'(22, 5)$.
 $g(-10) = \frac{1}{4} \cdot -10 - \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -3$ en $g(22) = \frac{1}{4} \cdot 22 - \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 5$
 dus A' en B' liggen op de grafiek van g .
- S3 a** $x^2 \rightarrow (x - 6)^2 \rightarrow (2x - 6)^2 \rightarrow (2x - 6)^2 - 4$
 Het functievoorschrift bij de beeldgrafiek is $g(x) = (2x - 6)^2 - 4$ of
 $g(x) = 4x^2 - 24x + 32$
- b** $x^2 \rightarrow x^2 - 4 \rightarrow (2x)^2 - 4 \rightarrow (2(x - 6))^2 - 4$
 Het functievoorschrift van de beeldgrafiek is $h(x) = (2(x - 6))^2 - 4$ of
 $h(x) = 4x^2 - 48x + 140$
- S4 a** $f(a) = 3^a - 3^{-a}$
 $f(-a) = 3^{-a} - 3^{-(-a)}$
 $f(-a) = -3^a + 3^{-a} = -(3^a - 3^{-a})$
 dus $f(-a) = -f(a)$, f is een oneven functie.
- b** $f(a) = 3^a + 3^{-a}$
 $f(-a) = 3^{-a} + 3^{-(-a)} = 3^{-a} + 3^a = 3^a + 3^{-a}$
 dus $f(-a) = f(a)$, f is een even functie.

S5 a



b $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, dus de nulpunten van f zijn $x = -3$ en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{als } x \leq -3 \text{ en } x \geq 2 \\ -x^2 - x + 6 & \text{als } -3 < x < 2 \end{cases}$$

c De top van de parabool met vergelijking $y = x^2 + x - 6$ ligt bij $x = -\frac{1}{2}$
Extremen: minimum $f(-3) = 0$, maximum $f(-\frac{1}{2}) = 6\frac{1}{4}$, minimum $f(2) = 0$

S6 a $y = \frac{1}{2}x - 5$ wordt $x = \frac{1}{2}y + 5$

$\frac{1}{2}y = x + 5$ geeft $y = 2x + 10$ dus $f^{\text{inv}}(x) = 2x + 10$

b $y = 6^{2x+3}$ wordt $x = \frac{1}{2}y + 3$

$2y + 3 = {}^6\log(x)$ dus $2y = -3 + {}^6\log(x)$

$y = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^6\log(x)$ dus $f^{\text{inv}}(x) = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^6\log(x)$

Test jezelf

T1 a x vervangen door $\frac{x}{2}$ ofwel $\frac{1}{2}x$ geeft

$$g(x) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^4 = 100 \cdot \frac{1}{16}x^4 = 6,25x^4$$

b Een vermenigvuldiging met $\frac{1}{16}$ ten opzichte van de x -as geeft dezelfde beeldgrafiek.

c x vervangen door $\frac{x}{3}$ ofwel $3x$ geeft

$$h(x) = 100 \cdot (3x)^4 = 100 \cdot 81x^4 = 8100x^4$$

T2 a Eerst x vervangen door $-x$ geeft

$$g(x) = -(-x)^2 + 4 \cdot -x \text{ ofwel } g(x) = -x^2 - 4x$$

Daarna x vervangen door $x - 3$ geeft

$$h(x) = -(x - 3)^2 - 4(x - 3)$$

$$h(x) = -(x^2 - 6x + 9) - 4x + 12$$

$$h(x) = -x^2 + 2x + 3$$

b Eerst x vervangen door $x - 3$ geeft

$$k(x) = -(x - 3)^2 + 4(x - 3)$$

$$k(x) = -x^2 + 6x - 9 + 4x - 12$$

$$k(x) = -x^2 + 10x - 21$$

Daarna x vervangen door $-x$ geeft

$$l(x) = -(-x)^2 + 10 \cdot -x - 21$$

$$l(x) = -x^2 - 10x - 21$$

9 Functies bewerken

T3 a D is de grafiek van $f(x)$, B is de grafiek van $g(x)$

C is de grafiek van $h(x)$ en A is de grafiek van $k(x)$.

b $f(a) = 2 - \frac{1}{2}a^2$ en $f(-a) = 2 - \frac{1}{2}(-a)^2 = 2 - \frac{1}{2}a^2$, dus $f(-a) = f(a)$

$g(a) = \frac{8}{a^2 + 4}$ en $g(-a) = \frac{8}{(-a)^2 + 4} = \frac{8}{a^2 + 4}$, dus $g(-a) = g(a)$

$h(a) = 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi a\right)$ en $h(-a) = 2\cos\left(-\frac{1}{4}\pi a\right) = 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi a\right)$, dus $h(-a) = h(a)$

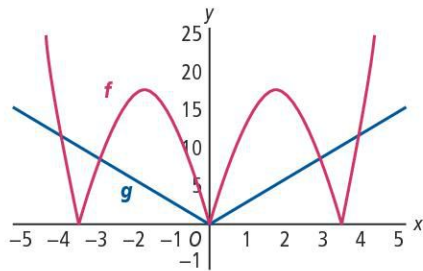
$k(a) = 2^a + 2^{-a}$ en $k(-a) = 2^{-a} + 2^{-(-a)} = 2^{-a} + 2^a$, dus $k(-a) = k(a)$

T4 a $-x^3 + 12x = 0$

$-x(x^2 - 12) = 0$

$x = 0$ of $x = -\sqrt{12}$ of $x = \sqrt{12}$

b



c
$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 12x & \text{als } x \leq -\sqrt{12} \text{ of } 0 \leq x \leq \sqrt{12} \\ x^3 - 12x & \text{als } -\sqrt{12} < x < 0 \text{ of } x > \sqrt{12} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x & \text{als } x \geq 0 \\ -3x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

d Stel $h(x) = x^3 - 12x$, dan is $h'(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0$ geeft $x^2 = 4$ dus $x = 2$ of $x = -2$

De extreme waarden van f zijn:

minima $f(-\sqrt{12}) = 0$, $f(0) = 0$ en $f(\sqrt{12}) = 0$

maxima $f(-2) = 16$ en $f(2) = 16$

e Los op $-x^3 + 12x = 3x$ en $-x^3 + 12x = -3x$

$-x^3 + 9x = 0$ of $-x^3 + 15x = 0$

$-x(x^2 - 9) = 0$ of $-x(x^2 - 15) = 0$

$x = 0$ of $x = -3$ of $x = 3$ of $x = -\sqrt{15}$ of $x = \sqrt{15}$

Zie grafiek: de oplossing van $f(x) < g(x)$ is $\langle -\sqrt{15}, -3 \rangle \cup \langle 3, \sqrt{15} \rangle$

T5 a $y = 8 - 4x$ wordt $x = 8 - 4y$

$4y = 8 - x$

$y = 2 - \frac{1}{4}x$, dus $f^{inv}(x) = 2 - \frac{1}{4}x$

Het domein van f^{inv} is $\mathbb{R}$.

b $y = \frac{10}{8 - 4x}$ wordt $x = \frac{10}{8 - 4y}$

$8 - 4y = \frac{10}{x}$ dus $-4y = -8 + \frac{10}{x}$

$y = 2 - \frac{2\frac{1}{2}}{x}$ dus $f^{inv}(x) = 2 - \frac{5}{2x}$

Het domein van f^{inv} is $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$.

c $y = 10^{8-4x}$ wordt $x = 10^{8-4y}$

$8 - 4y = \log(x)$ dus $4y = 8 - \log(x)$

$y = 2 - \frac{1}{4} \cdot \log(x)$ dus $f^{inv}(x) = 2 - \frac{1}{4} \cdot \log(x)$

Het domein van f^{inv} is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

- d** $y = \sqrt{8 - 4x}$ wordt $x = \sqrt{8 - 4y}$
 $8 - 4y = x^2$ dus $4y = 8 - x^2$
 $y = 2 - \frac{1}{4}x^2$ dus $f^{inv}(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$
 Het domein van f^{inv} is $[0, \rightarrow)$.

T6 a $q = 4 + 5^{p-6}$
 $5^{p-6} = q - 4$
 $p - 6 = {}^5\log(q - 4)$
 $p = 6 + {}^5\log(q - 4)$

c $q = \frac{4p}{2p-5}$
 $q(2p-5) = 4p$
 $2pq - 5q = 4p$
 $2pq - 4p = 5q$
 $p(2q-4) = 5q$
 $p = \frac{5q}{2q-4}$

b $q = \frac{4}{2p-5}$
 $2p-5 = \frac{4}{q}$
 $2p = 5 + \frac{4}{q}$
 $p = 2\frac{1}{2} + \frac{2}{q}$

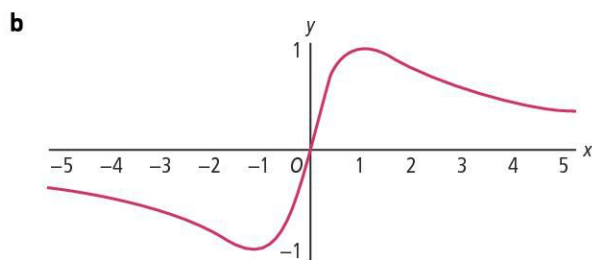
d $3p^2 - 6q = 5$ met $p \leq 0$
 $3p^2 = 6q + 5$
 $p^2 = 2q + 1\frac{2}{3}$
 $p = -\sqrt{2q + 1\frac{2}{3}}$

T7 a $y = \sqrt{12x - 27}$ wordt $x = \sqrt{12y - 27}$
 $12y - 27 = x^2$ dus $12y = x^2 + 27$
 $y = \frac{1}{12}x^2 + 2\frac{1}{4}$ met $x \geq 0$

- b** In een snijpunt (a, b) geldt $f(a) = b$ en $f^{inv}(a) = b$.
 Uit de definitie van f^{inv} volgt echter ook dat $f^{inv}(b) = a$.
 Dit betekent dat (a, b) en (b, a) de coördinaten van hetzelfde punt zijn, dus $a = b$, waaruit volgt dat het snijpunt op de lijn $y = x$ ligt.

- c** In een snijpunt moet gelden $x = \sqrt{12x - 27}$, dus
 $x^2 = 12x - 27$
 $x^2 - 12x + 27 = 0$
 $(x - 3)(x - 9) = 0$
 $x = 3$ of $x = 9$, de snijpunten zijn $(3, 3)$ en $(9, 9)$.

T8 a $x^2y = 2x - y$
 $x^2y + y = 2x$
 $y(x^2 + 1) = 2x$
 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$



- c** x kan elke waarde aannemen.
 $-1 \leq y \leq 1$

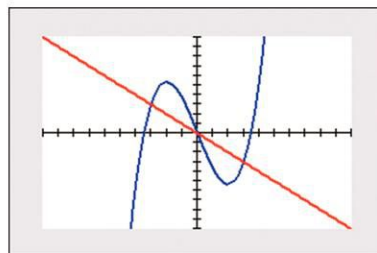
9 Functies bewerken

- T9 a** $x^2 - 8x = 0$ als $x(x - 8) = 0$ dus als $x = 0$ of $x = 8$.
De wortel uit een negatief getal bestaat niet en $x^2 - 8x < 0$ als $0 < x < 8$,
dus is het domein van f gelijk aan $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup [8, \rightarrow \rangle$.
- b** Bij één waarde van y horen twee waarden van x .
bij de inverse functie zouden er dan twee waarden van y zijn bij één waarde van x .
- c** $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 - 16} = \sqrt{(x - 4)^2 - 16}$
- d** $y = \sqrt{x^2 - 8x}$ wordt $x = \sqrt{y^2 - 8y}$ ofwel $x = \sqrt{(y - 4)^2 - 16}$
 $(y - 4)^2 - 16 = x^2$
 $(y - 4)^2 = x^2 + 16$
 $y - 4 = \sqrt{x^2 + 16}$
 $y = 4 + \sqrt{x^2 + 16}$ dus $f^{inv}(x) = 4 + \sqrt{x^2 + 16}$

Extra oefening

- E1 a** 9 naar rechts verschuiven, vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as en daarna 4 omhoog verschuiven.
Of:
vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as, 3 naar rechts verschuiven en daarna 4 omhoog verschuiven.
- b** Bij spiegelen in de y -as moet x vervangen worden door $-x$, dit geeft
 $g(x) = \sqrt{-3x - 9} + 4$.
 Bij 5 naar rechts verschuiven moet x vervangen worden door $x - 5$.
 Het functievoorschrift van de beeldgrafiek wordt dan
 $h(x) = \sqrt{-3(x - 5) - 9} + 4$ ofwel $h(x) = \sqrt{-3x + 6} + 4$.
- c** Eerst x vervangen door $x - 5$, dit geeft
 $k(x) = \sqrt{3(x - 5) - 9} + 4$ ofwel $k(x) = \sqrt{3x - 24} + 4$.
 Daarna moet x vervangen worden door $-x$, dit geeft $l(x) = \sqrt{-3x - 24} + 4$.

- E2 a** $f(a) = \frac{1}{3}a^3 - 4a$
 $f(-a) = \frac{1}{3}(-a)^3 - 4 \cdot -a$
 $f(-a) = -\frac{1}{3}a^3 + 4a$
 $f(-a) = -\left(\frac{1}{3}a^3 - 4a\right)$
 Omdat $f(-a) = -f(a)$ is de grafiek van f puntsymmetrisch in O.
- b** $\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$
 $\frac{1}{3}x(x^2 - 12) = 0$
 De nulpunten zijn $x = 0$, $x = \sqrt{12}$ en $x = -\sqrt{12}$.
- c** Los eerst op $f(x) = -x$, dus $\frac{1}{3}x^3 - 4x = -x$
 $\frac{1}{3}x^3 - 3x = 0$
 $\frac{1}{3}x(x^2 - 9) = 0$
 $x = 0$ of $x = 3$ of $x = -3$
 Zie de plot hiernaast.
 De oplossing van $f(x) < -x$ is
 $\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle 0, 3 \rangle$.



d $g(a) = \left| \frac{1}{3}a^3 - 4a \right|$

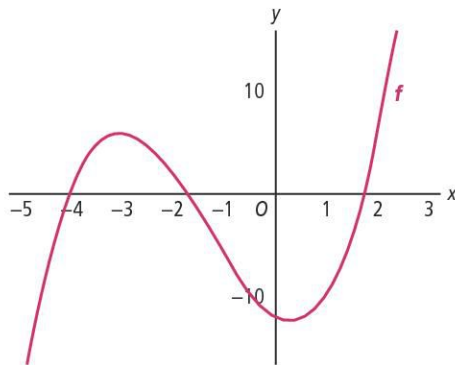
$$g(-a) = \left| \frac{1}{3}(-a)^3 - 4 \cdot -a \right|$$

$$g(-a) = \left| -\frac{1}{3}a^3 + 4a \right|$$

$$g(-a) = \left| -\left(\frac{1}{3}a^3 - 4a \right) \right|$$

Omdat $g(-a) = -g(a)$ is de grafiek van g symmetrisch in de y -as.

E3 a



b $x^2 = 3$ of $x = -4$

De nulpunten zijn $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ en $x = -4$

c $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$

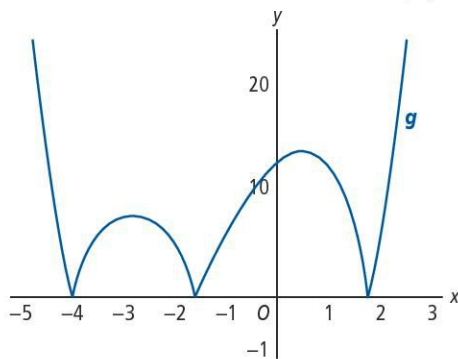
$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

$$3x^2 + 8x - 3 = 0 \text{ geeft } x = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{6}$$

$$\text{dus } x = -3 \text{ of } x = \frac{1}{3}$$

$$\text{maximum } f(-3) = 6, \text{ minimum } f\left(\frac{1}{3}\right) = -12\frac{14}{27}$$

d



e minima $g(-4) = 0$, $g(-\sqrt{3}) = 0$ en $g(\sqrt{3}) = 0$

$$\text{maxima } g(-3) = 6, g\left(\frac{1}{3}\right) = 12\frac{14}{27}$$

E4 $y = \frac{1}{2}(x^3 - 7)$ wordt $x = \frac{1}{2}(y^3 - 7)$

$$y^3 - 7 = 2x \text{ dus } y^3 = 2x + 7 \text{ en } y = \sqrt[3]{2x + 7} \text{ dus } f^{\text{inv}}(x) = \sqrt[3]{2x + 7}$$

b $y = 2^{x-4}$ wordt $x = 2^{y-4}$

$$y - 4 = {}^2\log(x) \text{ en } y = 4 + {}^2\log(x) \text{ dus } f^{\text{inv}}(x) = 4 + {}^2\log(x)$$

c $y = {}^3\log(2x) - 5$ wordt $x = {}^3\log(2y) - 5$

$${}^3\log(2y) = x + 5 \text{ dus } 2y = 3^{x+5} \text{ en } y = \frac{1}{2} \cdot 3^{x+5} \text{ dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x+5}$$

d $y = \frac{1}{3x+6}$ wordt $x = \frac{1}{3y+6}$

$$3y + 6 = \frac{1}{x} \text{ dus } 3y = \frac{1}{x} - 6 \text{ en } y = \frac{1}{3x} - 2 \text{ dus } f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{3x} - 2$$

9 Functies bewerken

E5 a $q = \log(10p - 6)$
 $10p - 6 = 10^q$
 $10p = 6 + 10^q$
 $p = 0,6 + \frac{1}{10} \cdot 10^q$
 $p = 0,6 + 10^{q-1}$

b $q = \frac{5p}{p-5}$
 $q(p-5) = 5p$
 $pq - 5q = 5p$
 $pq - 5p = 5q$
 $p(q-5) = 5q$
 $p = \frac{5q}{q-5}$

c $q = \sqrt[3]{\frac{1}{3}p} + 3 - 3$
 $\sqrt[3]{\frac{1}{3}p} + 3 = q + 3$
 $\frac{1}{3}p + 3 = (q+3)^3$
 $\frac{1}{3}p = (q+3)^3 - 3$
 $p = 3(q+3)^3 - 9$

d $q = \sqrt{p+15}$
 $q^2 = p+15$
 $p = q^2 - 15$ met $q \geq 0$

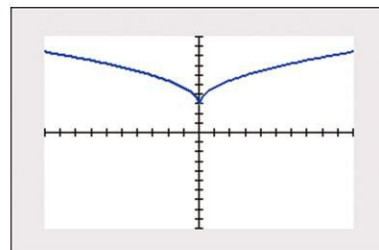
E6 a 6 naar rechts verschuiven, vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as en vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x -as.

Of:

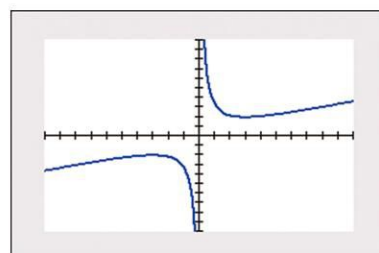
vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as en vermenigvuldigen met 3 ten opzichte van de x -as, en daarna 3 naar rechts verschuiven.

b vermenigvuldigen met 5 ten opzichte van de x -as, 1 naar rechts verschuiven, en daarna 2 omhoog verschuiven. De volgorde van de eerste twee en ook de laatste twee transformaties kunnen ook worden omgekeerd.

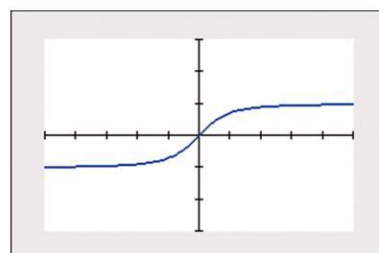
E7 a $f(a) = \sqrt{3a} + 3$
 $f(-a) = \sqrt{3 \cdot -a} + 3$
 $f(-a) = \sqrt{3a} + 3$
 $f(-a) = f(a)$
 f is een even functie.



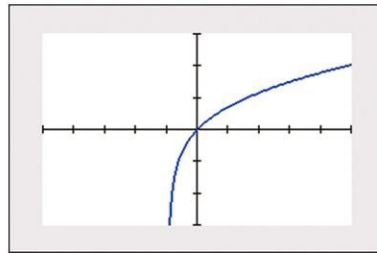
b $f(a) = \frac{1}{3}a + \frac{3}{a}$
 $f(-a) = \frac{1}{3} \cdot -a + \frac{3}{-a}$
 $f(-a) = -\frac{1}{3}a - \frac{3}{a}$
 $f(-a) = -\left(\frac{1}{3}a + \frac{3}{a}\right)$
 $f(-a) = -f(a)$
 f is een oneven functie.



c $f(a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
 $f(-a) = \frac{-a}{\sqrt{1+(-a)^2}}$
 $f(-a) = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
 $f(-a) = -f(a)$
 f is een oneven functie.



d f is geen even functie of oneven functie.



E8 a $\frac{40}{x}$ en $\frac{40}{y}$ zijn de aantallen uren die nodig zijn voor de heenweg en de terugweg.

Omdat de totale reis (80 km) met 100 km/uur wordt afgelegd, is $\frac{80}{100}$ de totaal benodigde tijd.

$$\begin{aligned} \text{b } \frac{40}{y} &= \frac{80}{100} - \frac{40}{x} \\ \frac{40}{y} &= \frac{80x}{100x} - \frac{4000}{100x} \\ \frac{40}{y} &= \frac{80x - 4000}{100x} \text{ dus} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{2x - 100}{100x} \text{ daaruit volgt } y = \frac{100x}{2x - 100} \text{ ofwel } y = \frac{50x}{x - 50}$$

c Als $x \leq 50$ is de noemer van het resultaat van opdracht b gelijk aan 0 of kleiner dan 0.

Je kunt niet door 0 delen.

Als de noemer negatief is zou y ook negatief zijn en dat is onmogelijk omdat het hier om een snelheid gaat.

E9 a Er moet gelden $f_p(6) = 6$ dus $p + \sqrt{6p + 4} = 6$

$$\sqrt{6p + 4} = 6 - p$$

$$6p + 4 = 36 - 12p + p^2$$

$$p^2 - 18p + 32 = 0$$

$$(p - 2)(p - 16) = 0$$

$p = 2$ of $p = 16$ (deze oplossing voldoet echter niet)

b De wortel uit een negatief getal bestaat niet, dus moet nu gelden $px + 4 \geq 0$ als $x \leq 3$.

$$\text{Uit } p \cdot 3 + 4 = 0 \text{ volgt } p = -1\frac{1}{3}$$

c De grafiek van $f_8(x) = 8 + \sqrt{8x + 4}$ ontstaat uit de grafiek van

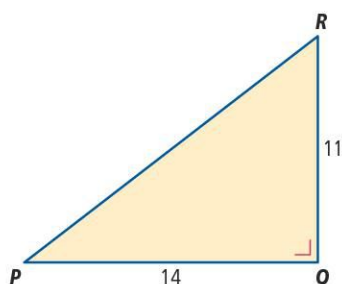
$f_4(x) = 4 + \sqrt{4x + 4}$ door de volgende transformaties:

vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as (want $\frac{4x}{\frac{1}{2}} = 8x$) en 4 omhoog verschuiven.

8 Vectoren

Voorkennis

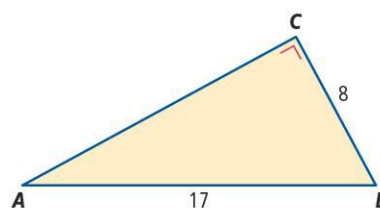
V1 a



zijde	kwadraat
$PQ = 14$	196
$QR = 11$	$\underline{121} +$
$PR = \dots$	317

$$PR = \sqrt{317}$$

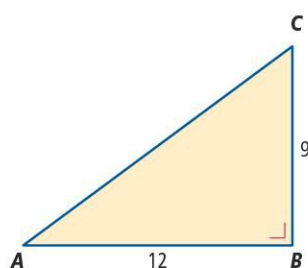
b



zijde	kwadraat
$BC = 8$	64
$AC = \dots$	$\underline{225} +$
$AB = 17$	289

$$AC = \sqrt{225} = 15$$

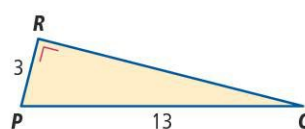
V2 a



zijde	kwadraat
$AB = 12$	144
$BC = 9$	$\underline{81} +$
$AC = \dots$	225

$$AC = \sqrt{225} = 15$$

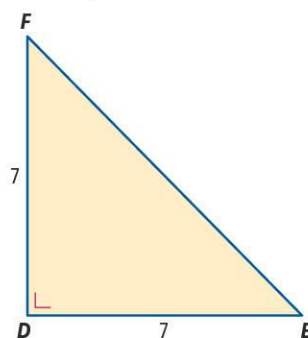
c



zijde	kwadraat
$PR = 3$	9
$QR = \dots$	$\underline{160} +$
$PQ = 13$	169

$$QR = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

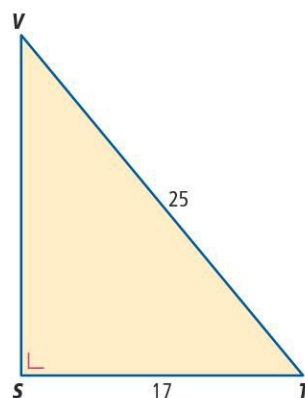
b



zijde	kwadraat
$DE = 7$	49
$DF = 7$	$\underline{49} +$
$EF = \dots$	98

$$EF = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

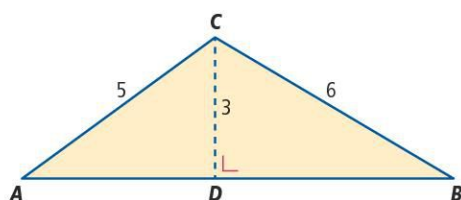
d



zijde	kwadraat
$ST = 17$	289
$SV = \dots$	$\underline{336} +$
$TV = 25$	625

$$SV = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$$

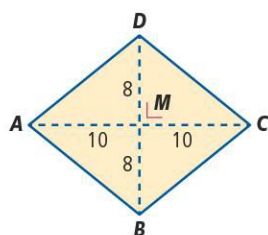
V3 a



zijde	kwadraat	zijde	kwadraat
$AD = \dots$	16	$BD = \dots$	27
$CD = 3$	$\frac{9}{+}$	$CD = 3$	$\frac{9}{+}$
$AC = 5$	25	$BC = 6$	36

$AD = \sqrt{16} = 4$
 $BD = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
 $AB = AD + BD = 4 + 3\sqrt{3}$

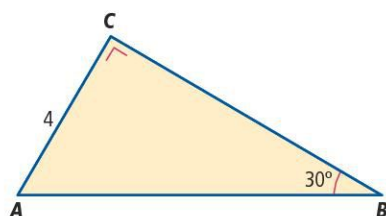
V4 a



zijde	kwadraat
$AM = 10$	100
$BM = 8$	$\frac{64}{+}$
$AB = \dots$	164

$AB = BC = CD = AD = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

V5 a



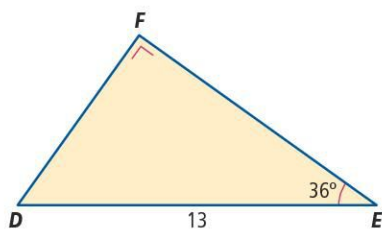
$$\sin(30^\circ) = \frac{4}{AB} \quad \cos(30^\circ) = \frac{BC}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{AB} \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{BC}{8}$$

$$AB = 8 \quad BC = 8 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\angle A = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

b



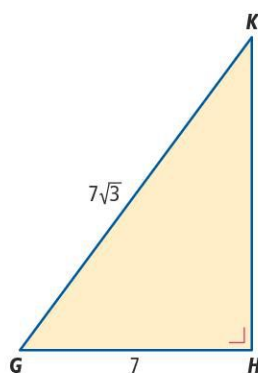
$$\sin(36^\circ) = \frac{DF}{13} \quad \cos(36^\circ) = \frac{EF}{13}$$

$$DF = 13 \times \sin(36^\circ) \approx 7,6 \quad EF = 13 \times \cos(36^\circ) \approx 10,5$$

$$\angle D = 180^\circ - 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

8 Vectoren

c



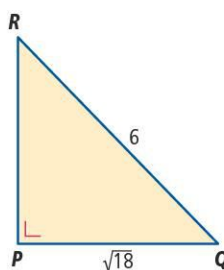
zijde	kwadraat
$GH = 7$	49
$HK = \dots$	$\frac{98}{\dots} +$
$GK = 7\sqrt{3}$	147

$$HK = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\cos(\angle G) = \frac{7}{7\sqrt{3}} \text{ dus } \angle G \approx 55^\circ$$

$$\angle K \approx 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

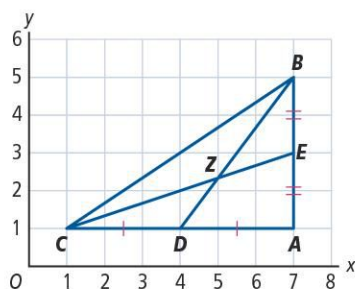
d



zijde	kwadraat
$PQ = \sqrt{18}$	18
$PR = \dots$	$\frac{18}{\dots} +$
$QR = 6$	36

$PR = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ en $\triangle PQR$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek, dus $\angle Q = \angle R = 45^\circ$.

V6 a



b

zijde	kwadraat
$AD = 3$	9
$AB = 4$	$\frac{16}{\dots} +$
$BD = \dots$	25

$$BD = \sqrt{25} = 5$$

zijde	kwadraat
$AC = 6$	36
$AE = 2$	$\frac{4}{\dots} +$
$CE = \dots$	40

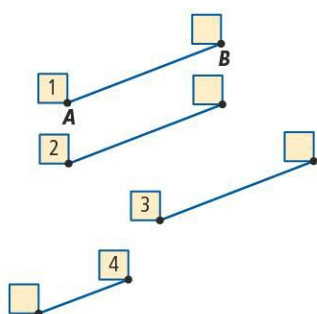
$$CE = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

c $CZ = \frac{2}{3} \cdot CE = 1\frac{1}{3}\sqrt{10}$ en $BZ = \frac{2}{3} \cdot BD = \frac{2}{3} \cdot 5 = 3\frac{1}{3}$

8.1 Vectoren

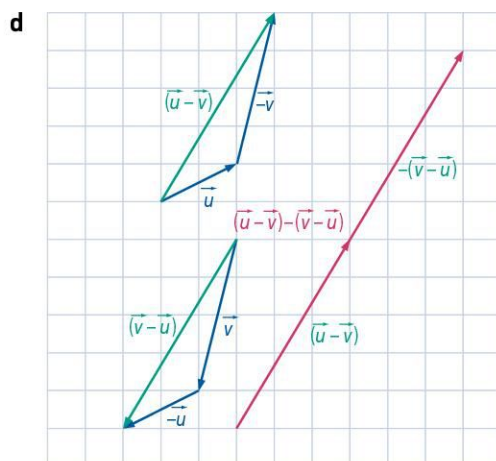
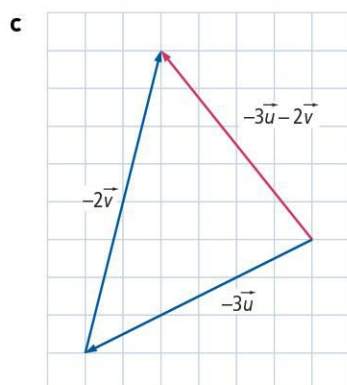
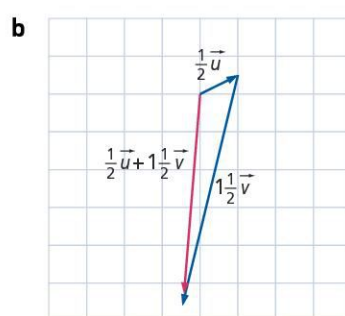
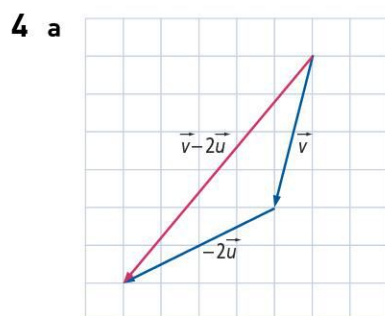
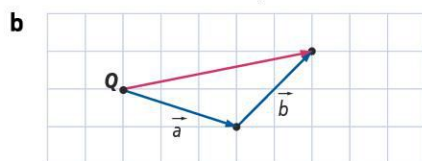
intro Ze moeten dan in dezelfde richting varen en met dezelfde kracht trekken.
Dan is er een grotere kracht nodig.

1 a b



2 De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{j}$, $\vec{c}$ en $\vec{i}$, en $\vec{d}$ en $\vec{h}$ horen bij dezelfde verplaatsing.

3 a Het resultaat had je ook kunnen bereiken door P in één keer over de vector $5\vec{a}$ te verplaatsen.



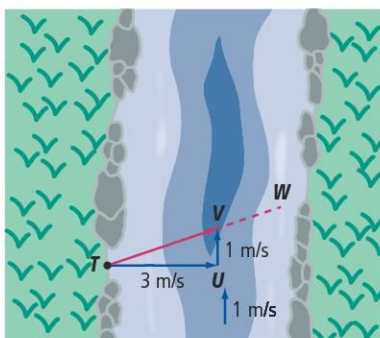
5 a De vector $\overrightarrow{OC}$ is gelijk aan $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

b $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ en $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

c $\overrightarrow{BA} = -\vec{b} + \vec{a}$ en $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$.

8 Vectoren

- 6 a De boot bevindt zich na één seconde in punt V .



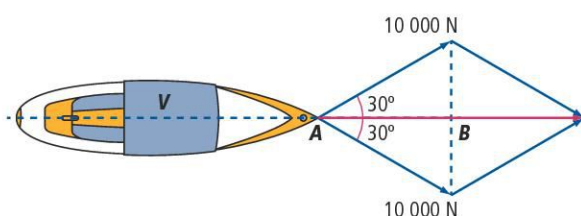
- b Tim zal de overkant in punt W bereiken.

zijde	kwadraat
$TU = 3$	9
$UV = 1$	$\frac{1}{10} +$
$TV = \dots$	10

$$TV = \sqrt{10}$$

In één seconde legt de boot $\sqrt{10} \approx 3,16$ meter af.

- 7 a



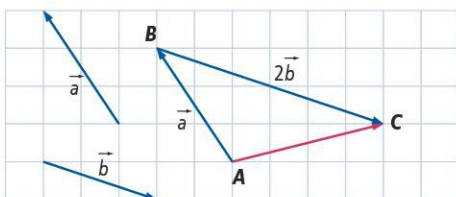
$$b \quad \cos(30^\circ) = \frac{AB}{10000}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{AB}{10000}$$

$$AB = 5000\sqrt{3}$$

Deze kracht is $2 \times 5000\sqrt{3} \approx 17321$ N.

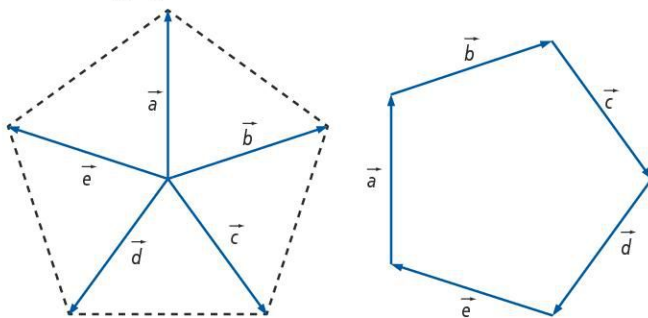
- 04 a b



$$c \quad \overrightarrow{AC} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

- U1 a Het eindpunt van elke vector valt samen met het beginpunt van de volgende vector en het eindpunt van de vijfde vector valt samen met het beginpunt van de eerste vector, dus de som van de vijf vectoren is de nulvector $\vec{0}$.

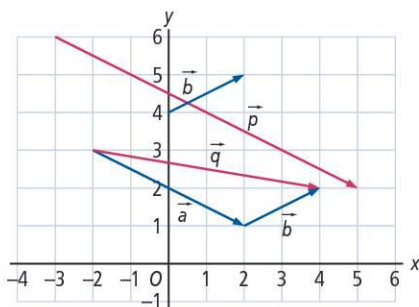
- b Noem de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ en $\vec{e}$. De rechter tekening toont aan dat de som van de vijf vectoren gelijk is aan $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{0}$.



8.2 Vectoren en kentallen

- intro** Je verplaatst driehoek B naar driehoek E door 10 hokjes naar rechts te schuiven.
 En je verplaatst driehoek A naar driehoek E door 13 hokjes naar rechts en 1 hokje omlaag te schuiven.
 Je verplaatst driehoek D naar driehoek B door 3 hokjes naar links en 2 hokjes omhoog te schuiven, naar driehoek C door 4 hokjes omhoog te schuiven en naar driehoek E door 7 hokjes naar rechts en 2 hokjes omhoog te schuiven.

8 a



- b De coördinaten van het eindpunt van de vector $\vec{p}$ zijn $(5, 2)$.
 c Zie de tekening bij opdracht 8a.
 De coördinaten van het eindpunt van de vector $\vec{q}$ zijn $(4, 2)$.

d

zijde	kwadraat
2	4
4	<u>16</u> +
...	20

De lengte van de vector $\vec{a}$ is $\sqrt{20}$.

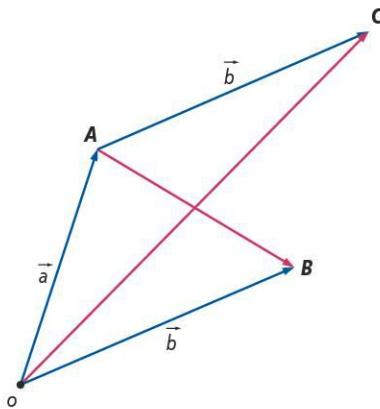
- 9 a $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$
 $3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8 Vectoren

$$\begin{aligned}
 \text{b } |\vec{a}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
 |\vec{b}| &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\
 |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \\
 \vec{a} - \vec{b} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \\
 3\vec{a} - 2\vec{b} &= 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } |3\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{58} \\
 \text{c } 3\vec{a} &= 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus } |3\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot |\vec{a}|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{10 a } \vec{a} + \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \vec{b} \\
 \overrightarrow{AB} &= \vec{b} - \vec{a}
 \end{aligned}$$

b



- c Vierhoek $OBCA$ is een parallellogram, omdat de zijden OB en AC even lang en evenwijdig zijn.
- d $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

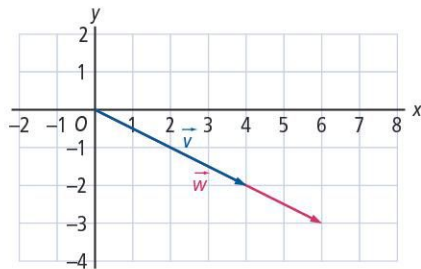
$$\begin{aligned}
 \text{11 a } \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{CA} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \\
 \text{b } |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \\
 |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{3^2 + (-9)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \\
 |\overrightarrow{CA}| &= \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \\
 \text{c } 5\overrightarrow{AB} &= 5\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{ dus } |5\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-25)^2 + (-10)^2} = \sqrt{725} = 5\sqrt{29} \\
 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} &= \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ dus } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

- d Voor het midden M van zijde AB geldt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van punt M zijn $(\frac{1}{2}, 6)$.

Voor het midden N van zijde BC geldt $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van punt N zijn $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

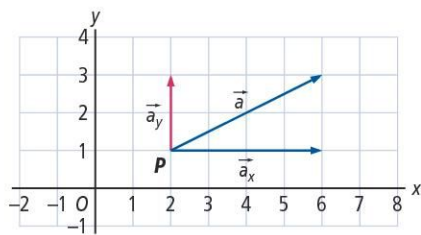
Voor het midden L van zijde AC geldt $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van punt L zijn $(2, 1\frac{1}{2})$.

12 a



- b $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ dus heeft $\vec{w}$ dezelfde richting als $\vec{v}$.
- c Drie vectoren die dezelfde richting hebben als $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn bijvoorbeeld $\vec{r} = 2\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$,
 $\vec{s} = 3\vec{v} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- d Drie vectoren waarvan de richting tegengesteld is aan de richting van $\vec{v}$ zijn bijvoorbeeld $\vec{p} = -2\vec{v} = -2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = -3\vec{v} = -3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\vec{r} = -\frac{1}{2}\vec{v} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- e De vectoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ of $\vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ hebben dezelfde lengte als $\vec{v}$, maar hebben niet dezelfde of een tegengestelde richting.

13



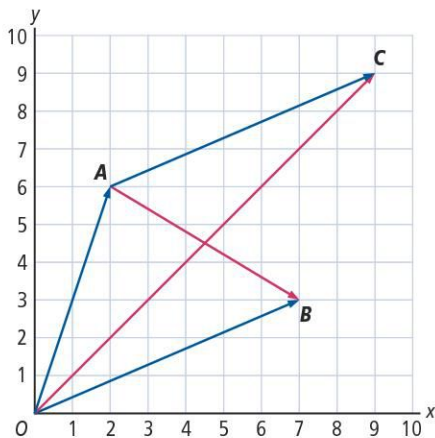
14 $\vec{u}_x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{u}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

15 Neem aan dat $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ p \end{pmatrix}$, dan geldt $|\vec{a}| = \sqrt{36 + p^2}$.

Gegeven is $|\vec{a}| = 3\sqrt{5}$, dus moet gelden $\sqrt{36 + p^2} = 3\sqrt{5}$, oftewel $36 + p^2 = 45$, dus $p^2 = 9$ en $p = 3$ of $p = -3$. Dus $\vec{a}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ of $\vec{a}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8 Vectoren

011 a



b $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

c $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ dus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

d $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

e Zie de tekening bij opdracht 011a.

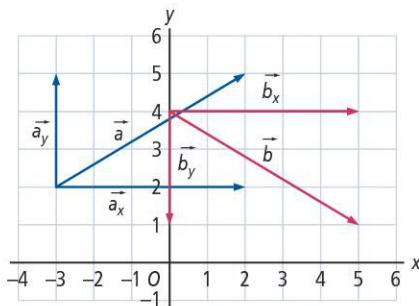
f $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van punt C zijn (9, 9).

g Voor punt M geldt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van punt M zijn $(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$.

014 a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b $\vec{a}_x + \vec{a}_y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{a}$

c d



e $\vec{b}_x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

U2 a De aangegeven hoek ten opzichte van het noorden is 290° , dus de hoek in de driehoek gevormd door de punten E, D en N is $360^\circ - 290^\circ = 70^\circ$.

In die driehoek is $\sin(70^\circ) = \frac{EN}{43}$, dus $EN = 43 \cdot \sin(70^\circ)$ en $\cos(70^\circ) = \frac{DN}{43}$ dus $DN = 43 \cdot \cos(70^\circ)$.

Daarom geldt $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -EN \\ DN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 \cdot \sin(70^\circ) \\ 43 \cdot \cos(70^\circ) \end{pmatrix}$.

b $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -43 \cdot \sin(70^\circ) \\ 43 \cdot \cos(70^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -40,41 \\ 14,71 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 55 \cdot \cos(53^\circ) \\ 55 \cdot \sin(53^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 33,10 \\ 43,92 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 23 \cdot \cos(9^\circ) \\ 23 \cdot \sin(9^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 22,72 \\ 3,60 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{c} \quad \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} \approx \begin{pmatrix} -22,72 - 33,10 + 40,41 \\ -3,60 - 43,92 - 14,71 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15,41 \\ -62,23 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{GD}| \approx \sqrt{(-15,41)^2 + (-62,23)^2} \approx 64,1$$

De lengte van de terugvlucht is ongeveer 64 kilometer.

$$\tan(\angle G) \approx \frac{15,41}{62,23} \text{ dus } \angle G \approx 14^\circ.$$

De koers van de terugvlucht is ongeveer $180^\circ + 14^\circ = 194^\circ$.

8.3 Zwaartepunten en evenwicht

intro Bekijk de driehoek die boven de x -as ligt. Door de zwaartelijnen in deze driehoek te tekenen krijg je het zwaartepunt $(2, 2)$. Door dit zelfde te doen met de driehoek die onder de x -as ligt, krijg je hier het zwaartepunt $(2, -2)$.

Hier precies tussen in ligt dan het zwaartepunt van de vlieger en dat is het punt $(0, 2)$.

Het ligt dus dicht bij Z_2 .

Ja, het antwoord op de vorige vraag klopt.

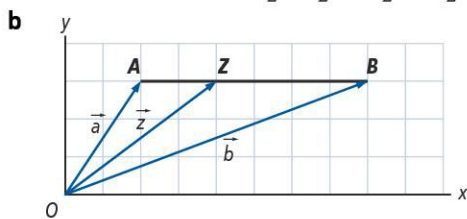
- 16 a** Invullen van $m_A = 4$ en $m_B = 2$ geeft $4 \cdot AZ = 2 \cdot BZ$. Rechts en links door 4 en door BZ delen geeft $AZ : BZ = 2 : 4$, oftewel $AZ : BZ = 1 : 2$.



Invullen van $m_A = 4$ en $m_B = 10$ geeft $4 \cdot AZ = 10 \cdot BZ$, oftewel $AZ : BZ = 10 : 4 = 5 : 2$.

Daaruit volgt dat $AZ = 5$ cm.

- 17 a** $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, oftewel $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
 $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$
 $\vec{z} = \vec{a} + \overrightarrow{AZ} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$



- c** $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, oftewel $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
 $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$
 $\vec{z} = \vec{a} + \overrightarrow{AZ} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

- 18 a** $\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{4}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{8}{12} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + 4\frac{2}{3} \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn $(5, 3)$.

b $\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{5}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{8}{13} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{13} + 4\frac{4}{13} \\ 3\frac{6}{13} - 1\frac{11}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{1}{13} \\ 1\frac{8}{13} \end{pmatrix}$

De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn $(5\frac{1}{13}, 1\frac{8}{13})$.

8 Vectoren

$$19 \text{ a } \vec{z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt Z_{AC} ligt in het punt (4, 2).

$$19 \text{ b } \vec{z} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} + 1 \\ 1\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + 1 + 2\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en dat klopt.}$$

$$20 \text{ a } \vec{z} = \frac{6}{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{10}{20} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{20} + \frac{16}{20} + 3\frac{10}{20} \\ \frac{12}{20} + 1 + 1\frac{10}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{12}{20} \\ 3\frac{2}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{3}{5} \\ 3\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

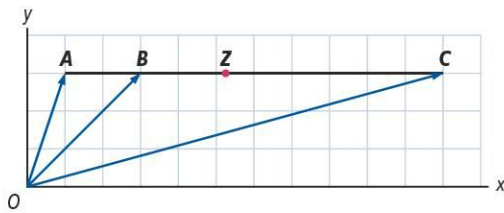
De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn $(4\frac{3}{5}, 3\frac{1}{10})$.

$$20 \text{ b } \vec{z} = \frac{10}{65} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{30}{65} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{6}{65} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{14}{65} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{65} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{30}{65} - \frac{30}{65} + 0 + \frac{70}{65} + \frac{15}{65} \\ -\frac{50}{65} + \frac{210}{65} + \frac{24}{65} + \frac{28}{65} - \frac{15}{65} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{65} \\ \frac{197}{65} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ 3\frac{2}{65} \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn $(\frac{5}{13}, 3\frac{2}{65})$.

21 a



$$21 \text{ b } \vec{z} = \frac{10}{60} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{30}{60} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{20}{60} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{60} + \frac{90}{60} + \frac{220}{60} \\ \frac{30}{60} + \frac{90}{60} + \frac{60}{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{320}{60} \\ \frac{180}{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn dan $(5\frac{1}{3}, 3)$.

Zie de tekening bij opdracht 21a.

$$22 \quad \vec{z} = \frac{4}{18}\vec{a} + \frac{6}{18}\vec{b} + \frac{8}{18}\vec{c}, \text{ oftewel } \vec{z} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}.$$

$$23 \text{ a } \text{ Er geldt } \vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

$$\text{Invullen van de gegeven coördinaten geeft } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}.$$

Er moet dus gelden $3 = 2\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_c$ en $4 = \frac{1}{3}y_c$ oftewel $\frac{1}{3}x_c = \frac{1}{3}$ en $y_c = 12$, dus $x_c = 1$ en $y_c = 12$.

De coördinaten van punt C zijn (1, 12).

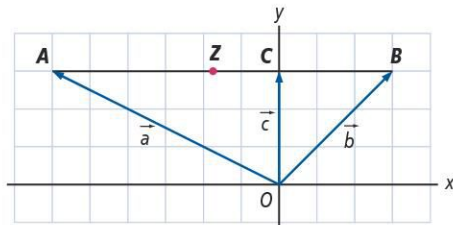
$$23 \text{ b } \text{ Er geldt } \vec{z} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{r}.$$

$$\text{Invullen van de gegeven coördinaten geeft } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}.$$

Er moet dus gelden $3 = 1\frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_r$ en $4 = \frac{3}{5}y_r$, oftewel $\frac{3}{5}x_r = 1\frac{2}{5}$ en $y_r = 6\frac{2}{3}$ dus $x_r = 2\frac{1}{3}$ en $y_r = 6\frac{2}{3}$.

De coördinaten van punt R zijn $(2\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3})$.

021 a



b De coördinaten zijn $A(-6, 3)$ en $B(3, 3)$.

c Zie de tekening bij opdracht O21a.

De plaatsvectoren zijn $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d De totale massa is $m = 4 + 3 + 1 = 8$.

$$\vec{z} = \frac{4}{8} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 1\frac{1}{8} + 0 \\ 1\frac{4}{8} + 1\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{7}{8} \\ 3 \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn dan $(-1\frac{7}{8}, 3)$.

f Zie de tekening bij opdracht O21a.

U3 a $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ (zie opdracht 17a)

b Er geldt $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, omdat het zwaartepunt elke zwaartelijns verdeelt in twee delen waarvan de lengtes zich verhouden als 2 : 1.

c $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$, dus $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OZ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} = \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

d Er geldt $\overrightarrow{Z_m} = \frac{m_A}{m} \cdot \vec{a} + \frac{m_B}{m} \cdot \vec{b} + \frac{m_C}{m} \cdot \vec{c}$, oftewel $\overrightarrow{Z_m} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$, dus het zwaartepunt Z_m van de puntmassa's valt samen met punt Z .

U4 a Driehoek ACD is even groot als driehoek ABC en symmetrisch ten opzichte van de lijn AC , dus het zwaartepunt Z van de vlieger ligt op de lijn AC .

$$\vec{z}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 4 + 0 \\ 0 + 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 4 + 0 \\ 0 + 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c De coördinaten zijn $Z(2, 0)$.

$$\vec{z}_m = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2} + 0 + 3 + 0 \\ 0 - 1\frac{1}{2} + 0 + 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nee, het zwaartepunt Z_m van de puntmassa's valt niet samen met het zwaartepunt Z van de vlieger.

8.4 Inwendig product

intro Er geldt $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{F}_s|}{|\vec{F}|}$, oftewel $|\vec{F}_s| = \cos(\alpha) \cdot |\vec{F}|$ en ook geldt $W = |\vec{F}_s| \cdot |\vec{s}|$.

Als $W = \frac{1}{2} \cdot |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$, dan moet gelden $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$, dus $\alpha = 60^\circ$.

24 a In driehoek OAC is $\cos(\alpha) = \frac{OC}{OA}$ en $OA = 1$, dus $OC = \cos(\alpha)$.

b In driehoek OAC is $OC^2 + AC^2 = OA^2$, dus $AC^2 = OA^2 - OC^2$. Invullen van $OA = 1$ en $OC = \cos(\alpha)$ geeft $AC^2 = 1 - \cos^2(\alpha)$.

8 Vectoren

c $OB = OC + BC$, dus $BC = OB - OC$

Invullen van $OB = 1$ en $OC = \cos(\alpha)$ geeft $BC = 1 - \cos(\alpha)$.

In driehoek ABC is $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Invullen van $AC^2 = 1 - \cos^2(\alpha)$ en $BC = 1 - \cos(\alpha)$ geeft $AB^2 = 1 - \cos^2(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))^2$

$AB^2 = 1 - \cos^2(\alpha) + 1 - 2\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)$, dus $AB^2 = 2 - 2\cos(\alpha)$

d Invullen van $AB = \frac{6}{5}$ geeft $\frac{36}{25} = 2 - 2\cos(\alpha)$, oftewel $2\cos(\alpha) = \frac{14}{25}$ dus $\cos(\alpha) = \frac{7}{25}$.

e $\alpha \approx 74^\circ$

25 a In driehoek OAC is $\cos(\alpha) = \frac{OC}{OA}$ en $OA = 1$, dus $OC = \cos(\alpha)$.

In driehoek OAC is $OC^2 + AC^2 = OA^2$, dus $AC^2 = OA^2 - OC^2$.

Invullen van $OA = 1$ en $OC = \cos(\alpha)$ geeft $AC^2 = 1 - \cos^2(\alpha)$.

$OB = OC + BC$, dus $BC = OB - OC$

Invullen van $OB = 1$ en $OC = \cos(\alpha)$ geeft $BC = 1 - \cos(\alpha)$.

In driehoek ABC is $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Invullen van $AC^2 = 1 - \cos^2(\alpha)$ en $BC = 1 - \cos(\alpha)$ geeft $AB^2 = 1 - \cos^2(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))^2$

$AB^2 = 1 - \cos^2(\alpha) + 1 - 2\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)$

$AB^2 = 2 - 2\cos(\alpha)$

b $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$

$AB^2 = b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2$

$AB^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2$

$AB^2 = 1 + 1 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

$AB^2 = 2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

c Uit opgave a en b volgt $2 - 2\cos(\alpha) = 2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

$2\cos(\alpha) = 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

$\cos(\alpha) = a_1b_1 + a_2b_2$

d Invullen geeft $\cos(\alpha) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot -\frac{3}{5} = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$ dus $\alpha \approx 74^\circ$ en dat klopt.

26 a $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ en $|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

$\vec{OC} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ en $\vec{OD} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$

b $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13}$

$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 14^\circ$

27 a $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot -12 = -33$

b $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ en $|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$

$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{-33}{5 \cdot 13} = \frac{-33}{65}$

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 121^\circ$

28 a $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + -2 \cdot 2 = 11$

$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ en

$\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$\cos(\alpha) = \frac{11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} = 0,5665 \dots$

$\alpha \approx 55^\circ$

b $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 5 \cdot -3 = -11$

$\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ en

$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

$\cos(\alpha) = \frac{-11}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{10}} = -0,5432 \dots$

$\alpha \approx 123^\circ$

$$\mathbf{c} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = 7 \cdot 2 + 2 \cdot -7 = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} \text{ en}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{0}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{53}} = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\mathbf{d} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + -2 \cdot 6 = -12$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \text{ en}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 6$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-12}{\sqrt{5} \cdot 6} = 0,8944 \dots$$

$$\alpha \approx 153^\circ$$

29 a Als $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, dan is $\cos(90^\circ) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ oftewel $0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ dus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

b Ja, het omgekeerde is ook waar, want als $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dan is $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{0}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ oftewel $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$, dus $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

30 a $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} = p \cdot q + q \cdot -p = pq - pq = 0$, dus $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$

b De kentallen van drie vectoren loodrecht op $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zijn bijvoorbeeld:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

c De kentallen van drie vectoren loodrecht op $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ zijn bijvoorbeeld $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

De kentallen van drie vectoren loodrecht op $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ zijn bijvoorbeeld $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

De kentallen van drie vectoren loodrecht op $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ zijn bijvoorbeeld $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

De kentallen van drie vectoren loodrecht op $\vec{e} = \begin{pmatrix} 17 \\ -43 \end{pmatrix}$ zijn bijvoorbeeld $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 43 \\ 17 \end{pmatrix}$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -43 \\ -17 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 215 \\ 85 \end{pmatrix}.$$

31 a $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 + -2 \cdot -3 = 0, \text{ dus } \angle C = 90^\circ.$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot -1 = 8$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{8}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{26}} = 0,5547 \dots$$

$$\angle A \approx 56^\circ$$

8 Vectoren

$$\text{b } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot -2 + 2 \cdot 4 = 0, \text{ dus } \angle P = 90^\circ.$$

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 \cdot -6 + -2 \cdot 2 = 20$$

$$\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

$$\cos(\angle Q) = \frac{20}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{40}} = 0,7071 \dots$$

$$\angle Q = 45^\circ$$

$$\angle R = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\text{32 a } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 60 \\ -24 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 60 \\ -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \end{pmatrix} = 60 \cdot 12 + -24 \cdot 30 = 0, \text{ dus } \angle A = 90^\circ.$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -60 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -33 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -60 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -33 \\ 48 \end{pmatrix} = -60 \cdot -33 + 24 \cdot 48 = 3132$$

$$\left| \begin{pmatrix} -60 \\ 24 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-60)^2 + 24^2} = \sqrt{4176} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} -33 \\ 48 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-33)^2 + 48^2} = \sqrt{3393}$$

$$\cos(\angle B) = \frac{3132}{\sqrt{4176} \cdot \sqrt{3393}} = 0,8320 \dots$$

$$\angle B \approx 34^\circ$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 33 \\ -48 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 33 \\ -48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \end{pmatrix} = 33 \cdot -15 + -48 \cdot 6 = -783$$

$$\left| \begin{pmatrix} 33 \\ -48 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{33^2 + (-48)^2} = \sqrt{3393} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-15)^2 + 6^2} = \sqrt{261}$$

$$\cos(\angle C) = \frac{-783}{\sqrt{3393} \cdot \sqrt{261}} = -0,8320 \dots$$

$$\angle C \approx 146^\circ$$

$$\angle D = 360^\circ - 90^\circ - 34^\circ - 146^\circ = 90^\circ$$

$$\text{b } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 27 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -48 \\ 54 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ 54 \end{pmatrix} = 27 \cdot -48 + 24 \cdot 54 = 0$$

Ja, de diagonalen AC en BD staan loodrecht op elkaar.

028 a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 12$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \text{ en } |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{12}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}} = 0,6$$

$$\alpha \approx 53^\circ$$

b $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 7 \cdot -4 = -24$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-24}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{32}} = -0,6$$

$$\alpha \approx 127^\circ$$

c $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot 4 + -2 \cdot 7 = 2$

$$\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{65}} \approx 0,0554 \dots$$

$$\alpha \approx 87^\circ$$

d $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = 4 \cdot 15 + -6 \cdot 10 = 0$

$$\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{15^2 + 10^2} = \sqrt{325}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{0}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{325}} = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 4 + 5 \cdot -3 = -15$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 5 \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-15}{5 \cdot 5} = -0,6$$

$$\alpha \approx 127^\circ$$

031 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot -3 + 1 \cdot 4 = -11$

c $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

d $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

e $\cos(\angle A) = \frac{-11}{\sqrt{26} \cdot 5} = -0,4314 \dots$

f $\angle A \approx 116^\circ$

8 Vectoren

- U5 a** De oppervlakte kun je met inlijsten berekenen door de oppervlakte van een rechthoek van 8 hokjes bij 6 hokjes te berekenen.

Hier moet je dan 4 driehoeken en 2 rechthoeken van aftrekken om de oppervlakte van het parallellogram te krijgen.

$$\text{oppervlakte} = 8 \times 6 - 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 1 - 2 \times 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 5$$

$$\text{oppervlakte} = 48 - 6 - 4 - 10 = 28$$

- b** $\text{oppervlakte} = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - 2 \times \frac{1}{2} \times a_1 \times a_2 - 2 \times b_1 \times a_2 - 2 \times \frac{1}{2} \times b_1 \times b_2$

$$\text{oppervlakte} = a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2 - a_1a_2 - 2a_2b_1 - b_1b_2$$

$$\text{oppervlakte} = a_1b_2 - a_2b_1$$

- c** Er geldt $\text{oppervlakte} = \text{basis} \times \text{hoogte}$, dus $\text{oppervlakte} = |\vec{a}| \cdot h$.

$$\text{Verder geldt } \sin(\alpha) = \frac{h}{|\vec{b}|} \text{ oftewel } h = |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha).$$

$$\text{Invullen geeft } \text{oppervlakte} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha).$$

- d** $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha) = a_1b_2 - a_2b_1$

$$\sin(\alpha) = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

8.5 Vectorvoorstelling van een lijn

intro Het jacht gaat door de punten (2, 2) bij Medemblik en (3, 5) bij de boei, en verder door de punten (4, 8), (5, 11) en (6, 14) bij de Afsluitdijk.

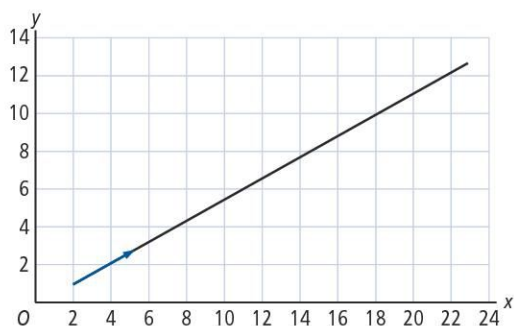
Het jacht bereikt de Afsluitdijk om 16 uur.

Als het jacht 1 naar rechts gaat, dan gaat het 3 omhoog. Als het jacht 75 naar rechts gaat, dan gaat het 225 omhoog. Vanuit het punt (2, 2) komt het jacht dan in het punt (77, 227).

Nee, het jacht bereikt het punt (77, 225) nooit.

- 33 a** In $1\frac{1}{2}$ uur fietst Anton van (2, 1) naar (23, 13), daarbij hoort de vector $\begin{pmatrix} 21 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Bij een kwartier fietsen hoort de vector $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.



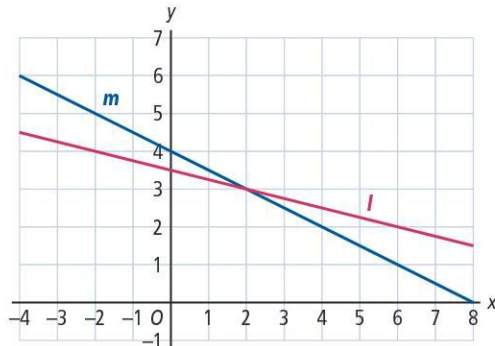
- b** Als $t = 0$, dan is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en dat is het startpunt. Bij een kwartier fietsen hoort de vector $\begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ en bij t kwartier fietsen hoort de vector $t \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, dus na t kwartier fietsen is Anton in het punt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

- c Bij 1 uur en 15 minuten hoort $t = 5$.

$$\text{Invullen geeft } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19\frac{1}{2} \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Na 1 uur en 15 minuten is hij in het punt $(19\frac{1}{2}, 11)$.

34 a b



- 35 a Bij $\mu = 5$ is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$

Bij $\mu = 5$ hoort het punt $(-7, 24)$.

$$\text{Bij } \mu = -2\frac{1}{2} \text{ is } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + -2\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Bij $\mu = -2\frac{1}{2}$ hoort het punt $(8, -13\frac{1}{2})$.

- b Je krijgt het punt $(1, 4)$ als $\mu = 1$, want $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- c Invullen van het punt $(-9, 16)$ in de vectorvoorstelling van de lijn geeft $\begin{pmatrix} 9 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
oftewel $\begin{pmatrix} 9 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\mu \\ -1 + 5\mu \end{pmatrix}$

$$\text{Er moet gelden } \begin{cases} 9 = 3 - 2\mu \\ -16 = -1 + 5\mu \end{cases} \text{ oftewel } \begin{cases} 2\mu = -6 \\ 5\mu = -15 \end{cases} \text{ dus } \mu = -3.$$

- d Invullen van het punt $(-33, 90)$ in de vectorvoorstelling van de lijn geeft $\begin{pmatrix} -33 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
oftewel $\begin{pmatrix} -33 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\mu \\ -1 + 5\mu \end{pmatrix}$

$$\text{Er moet gelden } \begin{cases} -33 = 3 - 2\mu \\ 90 = -1 + 5\mu \end{cases} \text{ oftewel } \begin{cases} 2\mu = 36 \\ 5\mu = 91 \end{cases} \text{ dus } \begin{cases} \mu = 18 \\ \mu = 18\frac{1}{5} \end{cases}$$

Dit geeft twee verschillende waarden voor μ en dat kan niet.

Het punt $(-33, 90)$ ligt niet op l .

- e Invullen van het punt $(31, p)$ in de vectorvoorstelling van de lijn geeft $\begin{pmatrix} 31 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
oftewel $\begin{pmatrix} 31 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\mu \\ -1 + 5\mu \end{pmatrix}.$

$$\text{Er moet gelden } \begin{cases} 31 = 3 - 2\mu \\ p = -1 + 5\mu \end{cases} \text{ oftewel } \begin{cases} 2\mu = -28 \\ p = -1 + 5\mu \end{cases} \text{ dus } \begin{cases} \mu = -14 \\ p = -1 + 5\mu \end{cases}$$

Invullen van $\mu = -14$ geeft $p = -1 + 5 \cdot -14 = -71$.

- 36 a Neem als steunvector bijvoorbeeld $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$

b $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

8 Vectoren

- c Er geldt $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en omdat $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dezelfde richting aangeeft is dat ook een richtingsvector van de lijn door de punten P en Q .
- d Een vectorvoorstelling van de lijn door de punten P en Q is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

37 a Een steunvector is $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ en een richtingsvector is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de lijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

b Een steunvector is $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en een richtingsvector is $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de lijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ of bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c Een steunvector is $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2020 \end{pmatrix}$ en een richtingsvector is $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 365 \\ 1540 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2020 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ -480 \end{pmatrix} = 120 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de lijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2020 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 360 \\ -480 \end{pmatrix}$ of bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2020 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

38 a $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-7) \cdot 3 = -19$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-19}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}} = -0,7452\dots$$

$$\alpha \approx 138^\circ$$

De hoek tussen de lijnen AB en CD is $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$.

b $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -6$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-6}{\sqrt{13} \cdot 5} = -0,3328\dots$$

$$\alpha \approx 109^\circ$$

De hoek tussen de lijnen CD en EF is $180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$.

39 a Een steunvector is $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ en een richtingsvector is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de lijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b Een richtingsvector is $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, want dat is een richtingsvector die loodrecht op lijn AB staat, omdat

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0.$$

Een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit O is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- c $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ en de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ staat daar loodrecht op.

Een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit A is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ en de vector $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ staat daar loodrecht op.

Een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit B is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- d Als $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan moet gelden $\begin{cases} -2 = 2\lambda \\ -3 = 3\lambda \end{cases}$ dus $\lambda = -1$. Ja, de hoogtelijn uit O gaat door het punt $(-2, -3)$.

Als $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ dan moet gelden $\begin{cases} -2 = -1 + \mu \\ -3 = 5 + 8\mu \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} \mu = -1 \\ 8\mu = -8 \end{cases}$ dus $\mu = -1$. Ja, de hoogtelijn uit A gaat door het punt $(-2, -3)$.

Als $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan moet gelden $\begin{cases} -2 = 8 + 5\nu \\ -3 = -1 + \nu \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} 5\nu = -10 \\ \nu = -2 \end{cases}$ dus $\nu = -2$. Ja, de hoogtelijn uit B gaat ook door het punt $(-2, -3)$.

- 40 Voor het snijpunt met de x -as geldt $y = 0$ en dat invullen geeft $7 + 2t = 0$ oftewel $2t = -7$, dus $t = -3\frac{1}{2}$. Dat invullen geeft $x = 2 - 3 \cdot -3\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$.
De coördinaten van het snijpunt van l met de x -as zijn $(12\frac{1}{2}, 0)$.
Voor het snijpunt met de y -as geldt $x = 0$ en dat invullen geeft $2 - 3t = 0$ oftewel $3t = 2$, dus $t = \frac{2}{3}$. Dat invullen geeft $y = 7 + 2 \cdot \frac{2}{3} = 8\frac{1}{3}$.
De coördinaten van het snijpunt van l met de y -as zijn $(0, 8\frac{1}{3})$.

- 41 a Een steunvector is $\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en een richtingsvector is $\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de lijn door K en L is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- b Als $\begin{pmatrix} 74 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan moet gelden $\begin{cases} 74 = -3 + 7\lambda \\ 23 = 1 + 2\lambda \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} 7\lambda = 77 \\ 2\lambda = 22 \end{cases}$ dus $\lambda = 11$. Ja, punt M ligt op de lijn KL .

- c Een vectorvoorstelling van de lijn door A en B is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Als $\begin{pmatrix} 42 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan moet gelden $\begin{cases} 42 = -3 + 5\mu \\ 41 = 5 + 4\mu \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} 5\mu = 45 \\ 4\mu = 36 \end{cases}$ dus $\mu = 9$.

Ja, de punten A , B en C liggen op één lijn.

Of:

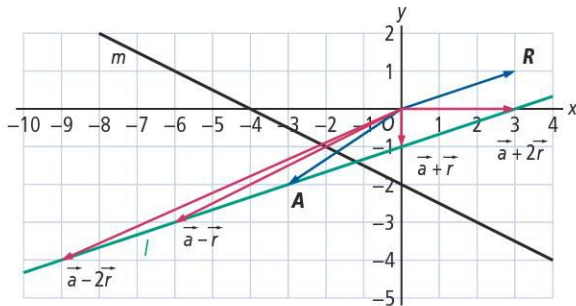
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 42 \\ 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 36 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 42 \\ 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 28 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De drie vectoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{BC}$ zijn een veelvoud van de richtingsvector $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus de punten A , B en C liggen op één lijn.

8 Vectoren

034 a b



$$\text{c} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d Zie lijn m in de tekening bij opdracht O34ab.

$$\text{039 a} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b De vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $\vec{r}$, want $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \cdot 6 + 6 \cdot -5 = 0$.

c Een vectorvoorstelling van de lijn door O die loodrecht op lijn l staat is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\text{U6 a} \quad |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

b De coördinaten van punt E zijn $(5, 0)$.

De bissectrice van hoek BOE gaat door het punt $D(8, 4)$, want $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling van de bissectrice van hoek BOE is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{c} \quad \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 40$$

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \text{ en } |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})) = \frac{40}{\sqrt{80} \cdot 5}$$

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 40$$

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \text{ en } |\overrightarrow{OE}| = 5$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})) = \frac{40}{\sqrt{80} \cdot 5}$$

Er geldt dat $\cos(\angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})) = \frac{40}{\sqrt{80} \cdot 5} = \cos(\angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}))$, dus $\angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}) = \angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$.

$$\text{d} \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{16^2 + 2^2} = \sqrt{260}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ en } |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

Voor de bissectrice van hoek P moet je een punt S op PQ kiezen zodat $|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{PR}|$.

Er geldt $\sqrt{260} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{65} = 2\sqrt{65}$, dus kies punt S zodat $\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Een vectorvoorstelling van de bissectrice van hoek P is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- e Voor de bissectrice van de hoek tussen de plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ moet je er voor zorgen dat de bijbehorende vectoren even lang zijn. Voor de vectoren $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ en $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ geldt $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = 1$ en $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = 1$.
De bissectrice van de hoek tussen de plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ heeft de vectorvorstelling $\vec{v} = \lambda \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$.

8.6 Vectorvorstelling en vergelijking

intro de vergelijking $x - 2y = 6$ hoort bij $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$,

de vergelijking $x + 2y = -6$ hoort bij $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

de vergelijking $x + 2y = 6$ hoort bij $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en

de vergelijking $x - 2y = -6$ hoort bij $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 42 a** De richtingsvector van lijn l is $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus de richtingscoëfficiënt is $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

De vergelijking is van de vorm $y = 2\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $x = 1$ en $y = -3$ geeft $-3 = 2\frac{1}{2} \cdot 1 + b$, dus $b = -5\frac{1}{2}$.

- b** De vergelijking is $y = 2\frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$, oftewel $2y = 5x - 11$, of $5x - 2y = 11$.

- c** De vector $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en de richtingsvector $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ van l staan loodrecht op elkaar.

- 43 a** Er geldt $\vec{OA} + \vec{AX} = \vec{OX}$, dus $\vec{AX} = \vec{OX} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y-3 \end{pmatrix}$.

- b** $\vec{n} \cdot \vec{AX} = 0$ geeft $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+3 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0$

$$-1 \cdot (x+3) + 2 \cdot (y-3) = 0$$

$$-x - 3 + 2y - 6 = 0$$

$$-x + 2y - 9 = 0$$

$$x - 2y = -9$$

- 44 a** $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de lijn is $2x + 3y = c$.

Invullen van $x = 2$ en $y = 9$ geeft $2 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = c$, dus $c = 31$.

Een vergelijking van de lijn is $2x + 3y = 31$.

- b** Er geldt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 3+5t \end{pmatrix}$ oftewel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

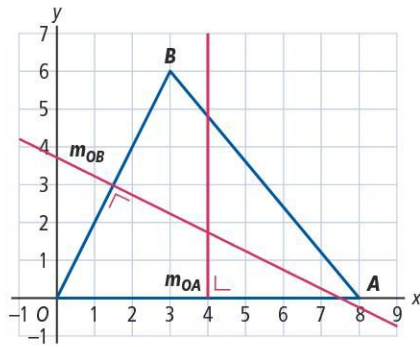
$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking van de lijn is $5x - 3y = c$.

Invullen van $x = 1$ en $y = 3$ geeft $5 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = c$, dus $c = -4$.

Een vergelijking van de lijn is $5x - 3y = -4$.

8 Vectoren

45 a



- b De middelloodlijn van lijnstuk OB staat loodrecht op OB , dus de normaalvector van m_{OB} is $\overrightarrow{OB}$.

Een vergelijking van m_{OB} is $3x + 6y = c$.

Invullen van $x = 1\frac{1}{2}$ en $y = 3$ geeft $3 \cdot 1\frac{1}{2} + 6 \cdot 3 = c$ dus $c = 22\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van m_{OB} is $3x + 6y = 22\frac{1}{2}$ of $x + 2y = 7\frac{1}{2}$.

- c Een vergelijking van m_{OA} is $x = 4$.

Invullen van $x = 4$ in m_{OB} geeft $3 \cdot 4 + 6y = 22\frac{1}{2}$ oftewel $12 + 6y = 22\frac{1}{2}$ dus $6y = 10\frac{1}{2}$

en $y = 1\frac{3}{4}$. De coördinaten van M zijn $(4, 1\frac{3}{4})$.

- d $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van m_{AB} is $-5x + 6y = c$.

Invullen van $x = 5\frac{1}{2}$ en $y = 3$ geeft $-5 \cdot 5\frac{1}{2} + 6 \cdot 3 = c$, dus $c = -9\frac{1}{2}$.

Een vergelijking van m_{AB} is $-5x + 6y = -9\frac{1}{2}$.

- e Invullen van $x = 4$ en $y = 1\frac{3}{4}$ geeft $-5 \cdot 4 + 6 \cdot 1\frac{3}{4} = -9\frac{1}{2}$ oftewel $-20 + 10\frac{1}{2} = -9\frac{1}{2}$ en dat klopt, dus M ligt ook op m_{AB} .

46 a $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = 10 \cdot -6 + 15 \cdot 4 = 0, \text{ dus } PR \perp QS$$

b $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

De lijn die loodrecht staat op lijnstuk PQ is van de vorm $9x + 7y = c$.

Invullen van $x = -1$ en $y = 13$ geeft $9 \cdot -1 + 7 \cdot 13 = c$, dus $c = 82$.

Een vergelijking van de lijn door punt S die loodrecht staat op lijnstuk PQ is $9x + 7y = 82$.

47 $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$

De hoogtelijn staat loodrecht op BC en is van de vorm $-6x - 5y = c$.

Invullen van $x = 4$ en $y = 0$ geeft $-6 \cdot 4 - 5 \cdot 0 = c$, dus $c = -24$.

Een vergelijking van de hoogtelijn uit A is $-6x - 5y = -24$.

48 a Er geldt $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$ en $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$, dus beide zijn te kiezen als richtingsvector van k .

- b Invullen van $x = 0$ en $y = 2$ geeft $7 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$ en dat klopt.

c Een vectorvoorstelling van k is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

$$49 \text{ a } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{c } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{f } y &= \frac{1}{2}x - 0,4 \\ 2y &= x - 0,8 \\ x - 2y &= 0,8 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0,4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$50 \text{ a } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 10$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 5$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA})) = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 8 = 20$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OB})) = \frac{20}{\sqrt{5} \cdot 10} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Er geldt $\cos(\angle(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA})) = \cos(\angle(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OB}))$, dus l maakt gelijke hoeken met de lijnen OA en OB .

- b** De richtingsvector van l is $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de normaalvector van l is $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en een vergelijking van l is van de vorm $x - 2y = c$.

Invullen van $x = 0$ en $y = 0$ geeft $0 - 2 \cdot 0 = c$, dus $c = 0$.

Een vergelijking van l is $x - 2y = 0$.

Er geldt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking van m is van de vorm $8x - y = c$.

Invullen van $x = 5$ en $y = 0$ geeft $8 \cdot 5 - 0 = c$, dus $c = 40$.

Een vergelijking van m is $8x - y = 40$.

- c** Een vergelijking van l is $x - 2y = 0$, oftewel $x = 2y$.

Invullen in de vergelijking van m geeft $8 \cdot 2y - y = 40$ oftewel $15y = 40$, dus $y = \frac{8}{3}$.

Invullen in $x = 2y$ geeft $x = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.

De coördinaten van het snijpunt S van l en m zijn $(\frac{16}{3}, \frac{8}{3})$.

$$\text{d } \overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Er geldt dat SA de lengte van de vector $\overrightarrow{SA}$ is en dat SB de lengte van de vector $\overrightarrow{SB}$ is, dus

$$SA : SB = \frac{1}{3} \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} \right| : \frac{2}{3} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 1 : 2.$$

$$|\overrightarrow{OA}| = 5 \text{ en } |\overrightarrow{OB}| = 10, \text{ dus } OA : OB = 5 : 10 = 1 : 2.$$

Maar dan geldt $SA : SB = OA : OB$.

8 Vectoren

- 045 a** De coördinaten van het midden M van zijn $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (1, 1)$.
- b** De middelloodlijn van lijnstuk PQ staat loodrecht op PQ , dus de normaalvector van m_{PQ} is $\overrightarrow{PQ}$.
- c** $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking van m_{PQ} is $8x - 2y = c$.
Invullen van $x = 1$ en $y = 1$ geeft $8 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = c$, dus $c = 6$.
Een vergelijking van m_{PQ} is $8x - 2y = 6$, of $4x - y = 3$.

- 049 a** Invullen van $x = 2$ geeft $6 \cdot 2 - 11y = 1$, oftewel $12 - 11y = 1$, dus $y = 1$.

- b** $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$
- c** Een richtingsvector van l is $\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- d** $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$
- e** $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
- f** $n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- g** $y = \frac{2}{3}x - 1$
 $3y = 2x - 3$
 $2x - 3y = 3$
 $q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- U7 a** $\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0+10+2 \\ 0+0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus de coördinaten van Z zijn $(4, 4)$.

- b** De lijn $x = 2$ is de hoogtelijn uit C .

Er geldt $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$, dus een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit A is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Er geldt $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$, dus een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit B is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Voor het snijpunt van de hoogtelijn uit C en de hoogtelijn uit A geldt $x = 2$

en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$. Er geldt $12\lambda = 2$, dus $\lambda = \frac{1}{6}$ en $y = \frac{1}{6} \cdot 8 = 1\frac{1}{3}$.

Voor het snijpunt van de hoogtelijn uit C en de hoogtelijn uit B geldt $x = 2$ en

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$. Er geldt $10 + 12\lambda = 2$, oftewel $12\lambda = -8$, dus

$$\lambda = -\frac{2}{3} \text{ en } y = -\frac{2}{3} \cdot -2 = 1\frac{1}{3}.$$

De coördinaten van het hoogtepunt H zijn $\left(2, 1\frac{1}{3}\right)$ en de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ gaan door één punt.

- c De lijn $x = 5$ is de middelloodlijn van lijnstuk AB .

Er geldt $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$ en het midden van lijnstuk BC is $(6, 6)$, dus een vectorvoorstelling

van de middelloodlijn van BC is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Er geldt $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ en het midden van lijnstuk AC is $(1, 6)$, dus een vectorvoorstelling

van de middelloodlijn van AC is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Voor het snijpunt van de middelloodlijn van lijnstuk AB en de middelloodlijn van lijnstuk BC geldt $x = 5$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$. Er geldt $6 + 12\lambda = 5$, oftewel $12\lambda = -1$, dus $\lambda = -\frac{1}{12}$ en $y = 6 - \frac{1}{12} \cdot 8 = 5\frac{1}{3}$.

Voor het snijpunt van de middelloodlijn van lijnstuk AB en de middelloodlijn van lijnstuk AC geldt $x = 5$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$. Er geldt $1 + 12\lambda = 5$, oftewel $12\lambda = 4$, dus $\lambda = \frac{1}{3}$

en $y = 6 + \frac{1}{3} \cdot -2 = 5\frac{1}{3}$.

De coördinaten van het snijpunt M van de middelloodlijnen zijn $(5, 5\frac{1}{3})$ en de middelloodlijnen van $\triangle ABC$ gaan door één punt.

- d Er geldt $\overrightarrow{ZH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{MZ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ dus

$$\overrightarrow{ZH} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{MZ}.$$

8.7 Gemengde opdrachten

- 51 a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -24 \\ 9 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebben een tegengestelde richting.
- b $\vec{p} \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \end{pmatrix} = 6 \cdot -25 + 15 \cdot 10 = 0$, dus de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ staan loodrecht op elkaar.
- c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ hebben niet dezelfde of een tegengestelde richting.
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + -8 \cdot 24 = -189$, de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ staan ook niet loodrecht op elkaar. Dus geen van de drie mogelijkheden.
- d $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $\vec{e}$ en $\vec{f}$ hebben een tegengestelde richting.

- 52 a Er geldt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ dus een vectorvoorstelling van lijn AB is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Als $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$, dan moet gelden $\begin{cases} -2 = 1 + 4\lambda \\ 8 = 2 - 8\lambda \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} 4\lambda = -3 \\ 8\lambda = -6 \end{cases}$ dus $\lambda = -\frac{3}{4}$.

Ja, punt C ligt op de lijn AB .

8 Vectoren

- b Er geldt $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 6 \cdot 4 + 4 \cdot -8 = -8$, dus lijn DA staat niet loodrecht op de lijn AB .

c $\overrightarrow{DQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ q+2 \end{pmatrix}$

Als $\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$, dan moet gelden $8 \cdot 6 + (q+2) \cdot 4 = 0$ oftewel $48 + 4q + 8 = 0$ dus $4q = -56$ en $q = -14$.

d $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = -10 \cdot -7 + 4 \cdot 14 = 126$$

$$\left| \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-10)^2 + 4^2} = \sqrt{116} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-7)^2 + 14^2} = \sqrt{245}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})) = \frac{126}{\sqrt{116} \cdot \sqrt{245}} = 0,7474 \dots$$

$$\angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) \approx 42^\circ$$

- 53 a Als $p = 4$ en $q = -2$, dan is $D(4, -2)$.

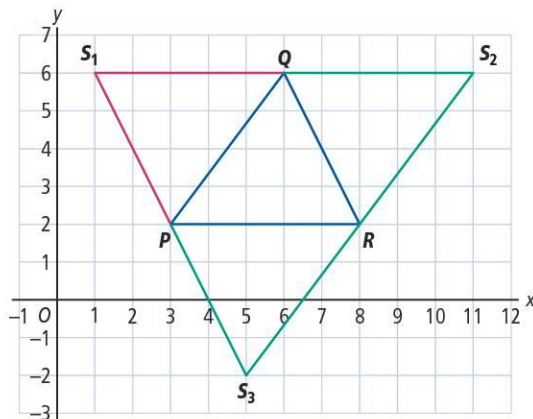
$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$.

b $\vec{z} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{10} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{10} - \frac{2}{10} + \frac{6}{10} + \frac{4}{10}p \\ -\frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{9}{10} + \frac{4}{10}q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} + \frac{4}{10}p \\ \frac{12}{10} + \frac{4}{10}q \end{pmatrix}$

Het zwaartepunt is $O(0, 0)$, dus moet gelden $\begin{cases} \frac{2}{10} + \frac{4}{10}p = 0 \\ \frac{12}{10} + \frac{4}{10}q = 0 \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} \frac{4}{10}p = -\frac{2}{10} \\ \frac{4}{10}q = -\frac{12}{10} \end{cases}$ dus $p = -\frac{1}{2}$ en $q = -3$.

- 54 a



b $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ en } |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } |\overrightarrow{PR}| = 5$$

Ja, de punten P , Q , R en S zijn de hoekpunten van een ruit als $S(11, 6)$, want dan is $PQ = PR = 5$ en zijn alle zijden even lang.

- c Als $S(1, 6)$ dan zijn PQ en RS de diagonalen.

De vectorvoorstelling van PQ is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en de

vectorvoorstelling van RS is dan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van PQ is van de vorm $4x - 3y = c$. Invullen van $x = 3$ en $y = 2$ geeft $4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = c$, dus $c = 6$. Een vergelijking van PQ is $4x - 3y = 6$.

Een vergelijking van RS is dan van de vorm $4x + 7y = c$. Invullen van $x = 8$ en $y = 2$ geeft $4 \cdot 8 + 7 \cdot 2 = c$, dus $c = 46$. Een vergelijking van RS is dan $4x + 7y = 46$.

Als $S(11, 6)$ dan zijn QR en PS de diagonalen.

De vectorvoorstelling van QR is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ en de

vectorvoorstelling van PS is dan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van QR is van de vorm $4x + 2y = c$. Invullen van $x = 6$ en $y = 6$ geeft $4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = c$, dus $c = 36$. Een vergelijking van QR is $4x + 2y = 36$ of $2x + y = 18$.

Een vergelijking van PS is dan van de vorm $4x - 8y = c$. Invullen van $x = 3$ en $y = 2$ geeft $4 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = c$, dus $c = -4$. Een vergelijking van PS is dan $4x - 8y = -4$ of $x - 2y = -1$.

Als $S(5, -2)$ dan zijn PR en QS de diagonalen.

De vectorvoorstelling van PR is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ en de

vectorvoorstelling van QS is dan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van PR is van de vorm $y = c$. Invullen van $x = 3$ en $y = 2$ geeft $c = 2$.

Een vergelijking van PR is $y = 2$.

Een vergelijking van QS is dan van de vorm $8x - y = c$. Invullen van $x = 6$ en $y = 6$ geeft $8 \cdot 6 - 6 = c$, dus $c = 42$. Een vergelijking van QS is dan $8x - y = 42$.

- 55 a** Er geldt $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus de hoogtelijn uit A is van de vorm $x + 4y = c$.

Invullen van $x = 7$ en $y = 1$ geeft $7 + 4 \cdot 1 = c$, dus $c = 11$.

Een vergelijking van de hoogtelijn uit A is $x + 4y = 11$.

Er geldt $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de hoogtelijn uit B is van de vorm $7x + y = c$.

Invullen van $x = 1$ en $y = 4$ geeft $7 \cdot 1 + 4 = c$, dus $c = 11$.

Een vergelijking van de hoogtelijn uit B is $7x + y = 11$.

Er geldt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus de hoogtelijn uit O is van de vorm $-6x + 3y = c$.

Invullen van $x = 0$ en $y = 0$ geeft $-6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = c$, dus $c = 0$.

Een vergelijking van de hoogtelijn uit O is $-6x + 3y = 0$ of $-2x + y = 0$.

- b** Voor het snijpunt moet gelden $7x + y = 11$ en $-2x + y = 0$, oftewel $y = 2x$.

Invullen van $y = 2x$ in $7x + y = 11$ geeft $7x + 2x = 11$, oftewel $9x = 11$, dus $x = 1\frac{2}{9}$.

Invullen in $y = 2x$ geeft $y = 2 \cdot 1\frac{2}{9} = 2\frac{4}{9}$. De coördinaten van het snijpunt S van de hoogtelijnen uit O en B zijn $(1\frac{2}{9}, 2\frac{4}{9})$.

- c** Invullen van $x = 1\frac{2}{9}$ en $y = 2\frac{4}{9}$ in $x + 4y = 11$ geeft $1\frac{2}{9} + 4 \cdot 2\frac{4}{9} = 11$, oftewel $1\frac{2}{9} + 9\frac{7}{9} = 11$ en dat klopt, dus S ligt ook op de hoogtelijn uit A .

8 Vectoren

d $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} = -6 \cdot -7 + 3 \cdot -1 = 39$$

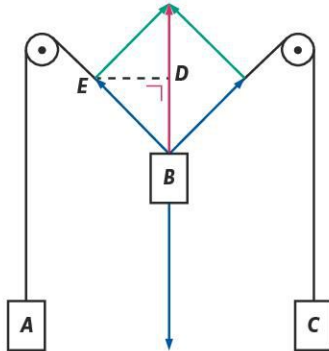
$$\left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{39}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{50}} = 0,8221 \dots$$

$$\angle A \approx 35^\circ$$

Onderzoeksoopdrachten

- 56 a De somvector van de twee naar boven gerichte krachten is kleiner dan de naar beneden gerichte vector, dus in de getekende situatie zakt B omlaag.



- b Als B stil hangt, dan is de somvector van de twee naar boven gerichte vectoren tegengesteld aan de naar beneden gerichte vector.
In de hierboven getekende driehoek BDE is dan $BE = 20 \text{ N}$ en $BD = 15 \text{ N}$.
 $\cos(\angle DBE) = \frac{15}{20}$
 $\angle DBE = 41,4096 \dots^\circ$
De hoek die de touwen bij B met elkaar maken is dan $2 \times 41,4096 \dots^\circ \approx 83^\circ$.

- 57 a De coördinaten van M zijn (2, 0), van D (3, 5) en van E (-1, 3).

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Er geldt $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0$, dus de lijnen MA en ED staan loodrecht op elkaar.

b $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-4 \\ q \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{AB}$, dus $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} q \\ -p+4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AE}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{OA}$, dus $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} q \\ -p+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ -2p+4 \end{pmatrix}$$

Er geldt $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} p-2 \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2q \\ -2p+4 \end{pmatrix} = (p-2) \cdot 2q + q \cdot (-2p+4) = 2pq - 4q - 2pq + 4q = 0$,
dus voor iedere waarde van p en q staan de lijnen MA en ED loodrecht op elkaar.

Samenvatting

S1



S2 a $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ en

$$7\overrightarrow{OP} + 6\overrightarrow{OQ} = 7\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 42 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \end{pmatrix}$$

b $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{1^2 + 9^2} = \sqrt{82}$ en $|7\overrightarrow{OP} + 6\overrightarrow{OQ}| = 56$

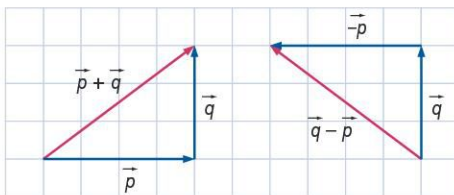
S3 a $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot -3 + 1 \cdot 3 = -6$

b Er geldt $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 17\frac{1}{2} + -5 \cdot 7 = 0$, dus $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 17\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$.

S4 a bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

b bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

S5 a



zijde	kwadraat
$ \vec{p} = 4$	16
$ \vec{q} = 3$	9 +
$ \vec{p} + \vec{q} = \dots$	25

$$|\vec{p} + \vec{q}| = \sqrt{25} = 5$$

S6 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -24 + 15 \\ -12 + -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\frac{1}{2} \\ -7\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van punt P zijn $(-4\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2})$.

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 + 0 \\ -3 + 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van punt Q zijn $(7\frac{1}{2}, 1)$.

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -24 + 0 \\ -12 + 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -24 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van punt R zijn $(-12, -3\frac{1}{2})$.

S7 $\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} + 1 + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{10}{6} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ dus de coördinaten van het zwaartepunt zijn $(1\frac{1}{3}, 3)$.

8 Vectoren

$$\text{S8} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -6$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50} \text{ en } |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) = \frac{-6}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}} = -0,6$$

$$\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \approx 127^\circ$$

$$\text{S9} \quad \text{Een steunvector van de lijn } AB \text{ is } \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en een richtingsvector}$$

$$\text{is } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een vectorvoorstelling van de lijn AB is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ of bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een steunvector van de lijn BC is $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en een richtingsvector is

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Een vectorvoorstelling van de lijn BC is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ of bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Een steunvector van de lijn AC is $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ en een richtingsvector is

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een vectorvoorstelling van de lijn AC is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ of bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\text{S10 a} \quad \text{Een normaalvector van } l \text{ is } \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus een richtingsvector van } l \text{ is } \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}. (-1, 1) \text{ is een}$$

willekeurig punt van l , dus een vectorvoorstelling van l is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$

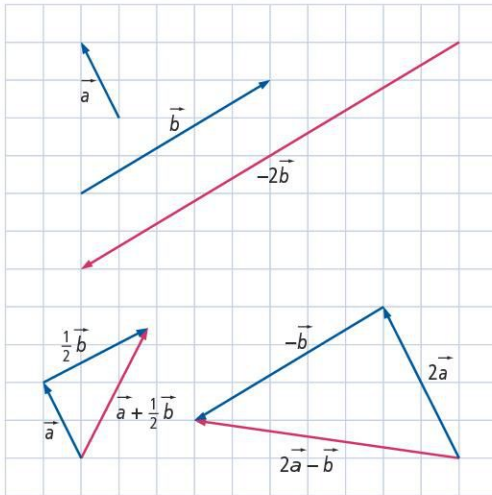
$$\text{b} \quad \vec{n}_m = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{ dus een vergelijking van lijn } m \text{ is } 11x - 10y = c.$$

Invullen van $x = 7$ en $y = -1$ geeft $11 \cdot 7 - 10 \cdot -1 = c$, dus $c = 87$.

Een vergelijking van lijn m is $11x - 10y = 87$.

Test jezelf

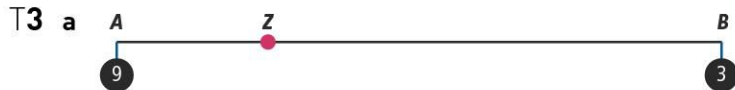
T1 a b c



T2 a $\vec{v} + 3\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -21 \end{pmatrix}$ en $2\vec{v} - \vec{w} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b $|\vec{v} + 3\vec{w}| = \sqrt{20^2 + (-21)^2} = \sqrt{841} = 29$ en $|2\vec{v} - \vec{w}| = 2$

c $2\vec{v} - 3\vec{w} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \end{pmatrix}$, dus de vector evenwijdig aan de x-as is $\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \end{pmatrix}$ en de vector evenwijdig aan de y-as is $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$.



b Invullen van $m_A = 9$ en $m_B = 3$ geeft $9 \cdot AZ = 3 \cdot BZ$, oftewel $BZ = 3 \cdot AZ$. Invullen in $AB = AZ + BZ$ geeft $8 = AZ + 3 \cdot AZ$, oftewel $4 \cdot AZ = 8$, dus $AZ = 2$ cm en $BZ = 6$ cm. Zie de tekening bij opdracht T3a.

T4 a $\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{5}{50}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10}{50}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{20}{50}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{15}{50}\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{30}{50} + \frac{60}{50} + 0 - \frac{30}{50} \\ 0 + \frac{30}{50} - \frac{80}{50} + \frac{150}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn (0, 2).

b $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{30}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10}{30}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{15}{30}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 + \frac{15}{30}p \\ 0 + 1 + \frac{15}{30}q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}p \\ 1 + \frac{1}{2}q \end{pmatrix}$

Er moet gelden $\begin{cases} 1 + \frac{1}{2}p = 2 \\ 1 + \frac{1}{2}q = 0 \end{cases}$ oftewel $\begin{cases} \frac{1}{2}p = 1 \\ \frac{1}{2}q = -1 \end{cases}$ dus $p = 2$ en $q = -2$.

De coördinaten van punt E zijn (2, -2).

T5 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

8 Vectoren

$$\mathbf{b} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 7 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 20$$

$$\cos(\angle A) = \frac{20}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{40}} = 0,4472\dots, \text{ dus } \angle A \approx 63^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = -7 \cdot -5 + -1 \cdot 5 = 30$$

$$\cos(\angle B) = \frac{30}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = 0,6, \text{ dus } \angle B \approx 53^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = -2 \cdot 5 + -6 \cdot -5 = 20$$

$$\cos(\angle C) = \frac{20}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{50}} = 0,4472\dots, \text{ dus } \angle C \approx 63^\circ$$

T6 a $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking van de lijn is van de vorm $5x + 4y = c$.

Invullen van $x = -4$ en $y = 3$ geeft $5 \cdot -4 + 4 \cdot 3 = c$, dus $c = -8$.

Een vergelijking van l is $5x + 4y = -8$.

b Er geldt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5t \\ 2 + 8t \end{pmatrix}$ oftewel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ dus een vergelijking van de lijn is $8x + 5y = c$.

Invullen van $x = 1$ en $y = 2$ geeft $8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = c$, dus $c = 18$.

Een vergelijking van m is $8x + 5y = 18$.

T7 a $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c $n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b $y = -5x - 4$

$5x + y = -4$

$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

d $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

T8 a Invullen van $y = 0$ geeft $8 - 2t = 0$, oftewel $2t = 8$, dus $t = 4$.

Invullen van $t = 4$ geeft $x = -3 - 5 \cdot 4 = -23$.

De coördinaten van het snijpunt met de x -as zijn $(-23, 0)$.

Invullen van $x = 0$ geeft $-3 - 5t = 0$, oftewel $5t = -3$, dus $t = -\frac{3}{5}$.

Invullen van $t = -\frac{3}{5}$ geeft $y = 8 - 2 \cdot -\frac{3}{5} = 9\frac{1}{5}$.

De coördinaten van het snijpunt met de y -as zijn $(0, 9\frac{1}{5})$.

b $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

c $k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

T9 a $P(\frac{-4+6}{2}, \frac{-2-3}{2}) = P(1, -2\frac{1}{2})$, $Q(\frac{6+4}{2}, \frac{-3+5}{2}) = Q(5, 1)$, $R(\frac{4-3}{2}, \frac{5+3}{2}) = R(\frac{1}{2}, 4)$

en $S(\frac{-3-4}{2}, \frac{3-2}{2}) = S(-3\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$$\mathbf{b} \quad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -3\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{28\frac{1}{4}} \text{ en } |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{\left(-4\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{29\frac{1}{4}}$$

De zijden zijn twee aan twee evenwijdig, maar ze zijn niet alle vier even lang, dus vierhoek $PQRS$ is een parallellogram.

$$\mathbf{T10 a} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2, \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 1$$

$$\cos(\angle(m, x\text{-as})) = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10, \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos(\angle(m, l)) = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Er geldt $\cos(\angle(m, x\text{-as})) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \cos(\angle(m, l))$, dus m deelt de hoek van l met de x -as middendoor.

$$\mathbf{b} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3, \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 1$$

$$\cos(\angle(q, x\text{-as})) = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot t = 3 + t, \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{10} \text{ en } \left| \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + t^2} = \sqrt{1 + t^2}$$

$$\cos(\angle(q, p)) = \frac{3 + t}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{1 + t^2}}$$

Gegeven is dat q de hoek van p met de x -as middendoor deelt, dus

$$\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3 + t}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{1 + t^2}}$$

$$\frac{3 + t}{\sqrt{1 + t^2}} = 3$$

$$3 + t = 3\sqrt{1 + t^2}$$

$$(3 + t)^2 = 9(1 + t^2)$$

$$9 + 6t + t^2 = 9 + 9t^2$$

$$6t = 8t^2$$

$$t = 0 \text{ of } 6 = 8t$$

$$t = 0 \text{ of } t = \frac{3}{4}$$

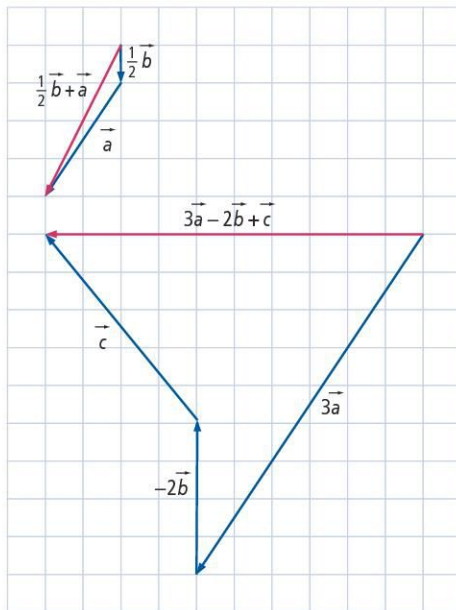
Voor $t = 0$ valt lijn p samen met de x -as en die voldoet niet.

Dus $t = \frac{3}{4}$ en lijn p is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8 Vectoren

Extra oefening

E1 a b



$$\text{E2 a } -\frac{1}{2}\vec{p} + 1\frac{1}{2}\vec{q} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left| -\frac{1}{2}\vec{p} + 1\frac{1}{2}\vec{q} \right| = \sqrt{(-13)^2 + (-3)^2} = \sqrt{178}$$

$$\text{b } M\left(\frac{2-8}{2}, \frac{6-0}{2}\right) = M(-3, 3)$$

$$\text{E3 a } \vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 30 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 31 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 35 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 + 0 \\ 7\frac{2}{4} + 7\frac{3}{4} + 8\frac{3}{4} + 8\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 32\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn $(1\frac{1}{2}, 32\frac{1}{2})$.

$$\text{b } \vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{3}{13}\begin{pmatrix} -1 \\ 30 \end{pmatrix} + \frac{10}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{13} + \frac{40}{13} \\ \frac{90}{13} + \frac{350}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{13} \\ \frac{440}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{11}{13} \\ 33\frac{11}{13} \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het zwaartepunt van deze puntmassa's zijn $(2\frac{11}{13}, 33\frac{11}{13})$.

$$\text{E4 a } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 11 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 52$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11^2 + 5^2} = \sqrt{146} \text{ en } |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) = \frac{52}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{40}} = 0,6804 \dots$$

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 47^\circ$$

$$\mathbf{b} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot 9 + -6 \cdot -1 = -12$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} \text{ en } |\overrightarrow{CB}| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})) = \frac{-12}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{82}} = -0,2095 \dots$$

$$\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \approx 102^\circ$$

$$\mathbf{c} \quad \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 45 \\ -99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} = 45 \cdot 11 + -99 \cdot 5 = 0$$

Ja, de vector $\vec{p}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{AB}$.

E5 a Een vectorvoorstelling van de lijn door B en C is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b De coördinaten van het midden M van lijnstuk BC zijn $M\left(\frac{8+(-1)}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = M\left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Een vectorvoorstelling van lijn l door A en het midden M van lijnstuk BC is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$.

E6 a $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

b Er geldt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5t \\ 6-t \end{pmatrix}$ oftewel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dus een vergelijking van de lijn is van de vorm } x + 5y = c.$$

Invullen van $x = 3$ en $y = 6$ geeft $3 + 5 \cdot 6 = c$, dus $c = 33$.

Een vergelijking van de lijn is $m: x + 5y = 33$.

c De lijn staat loodrecht op m , dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ is een richtingsvector.

Een vectorvoorstelling van de lijn door $P(2, 1)$ die loodrecht staat op lijn m is

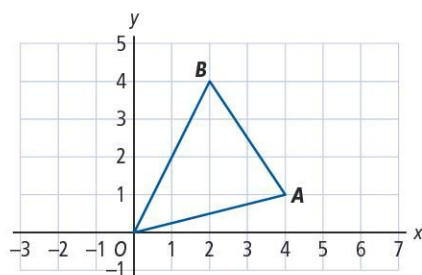
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Een vergelijking van de lijn is van de vorm $5x - y = c$.

Invullen van $x = 2$ en $y = 1$ geeft $5 \cdot 2 - 1 = c$, dus $c = 9$.

Een vergelijking van de lijn is $5x - y = 9$.

E7 a



8 Vectoren

$$\text{b } |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \text{ en } |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 12$$

$$\cos(\angle O) = \frac{12}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{20}} = 0,6507 \dots$$

$$\angle O \approx 49^\circ$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -4 \cdot -2 + -1 \cdot 3 = 5$$

$$\cos(\angle A) = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} = 0,3363 \dots$$

$$\angle A \approx 70^\circ$$

$$\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot 2 + -4 \cdot -3 = 8$$

$$\cos(\angle B) = \frac{8}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{13}} = 0,4961 \dots$$

$$\angle B \approx 60^\circ$$

$$\text{E8 } \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} p+2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p-4 \\ 4 \end{pmatrix} = (p+2)(p-4) + 2 \cdot 4 = p^2 - 2p - 8 + 8 = p^2 - 2p$$

Er moet gelden dat $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, oftewel $p^2 - 2p = 0$, of $p(p-2) = 0$ dus $p = 0$ of $p = 2$.

E9 a Als d de puntmassa in D is, dan is $m = 2 + 4 + 6 + d = 12 + d$.

$$\vec{z} = \frac{2}{12+d} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{12+d} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{6}{12+d} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{d}{12+d} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{12+d} + \frac{20}{12+d} + 0 + \frac{-2d}{12+d} \\ 0 + \frac{24}{12+d} + \frac{18}{12+d} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28-2d}{12+d} \\ \frac{42}{12+d} \end{pmatrix}$$

Er moet gelden dat $\frac{42}{12+d} = 1$, oftewel $12+d = 42$, dus $d = 30$.

$$\text{b Invullen van } d = 30 \text{ geeft } x_z = \frac{28 - 2 \cdot 30}{12 + 30} = \frac{-32}{42} = -\frac{16}{21}$$

$$\text{E10 a } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-80 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q-80 \\ -60 \end{pmatrix} = -80 \cdot (q-80) + -60 \cdot -60 = -80q + 6400 + 3600$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CQ} = -80q + 10000$$

Er moet gelden dat $-80q + 10000 = 0$, oftewel $80q = 10000$, dus $q = 125$.

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-80 \\ -60 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 224 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} p-80 \\ -60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 144 \\ -60 \end{pmatrix} = (p-80) \cdot 144 + -60 \cdot -60 = 144p - 11520 + 3600$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} = 144p - 7920$$

Er moet gelden dat $144p - 7920 = 0$, oftewel $144p = 7920$, dus $p = 55$.

b Invullen van $p = 55$ en $q = 125$ geeft $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -25 \\ -60 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} 45 \\ -60 \end{pmatrix}$.

$$|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(-25)^2 + (-60)^2} = \sqrt{4225} = 65, |\overrightarrow{CQ}| = \sqrt{45^2 + (-60)^2} = \sqrt{5625} = 75 \text{ en}$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} -25 \\ -60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ -60 \end{pmatrix} = -25 \cdot 45 + -60 \cdot -60 = 2475$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CQ})) = \frac{2475}{65 \cdot 75} = 0,5076 \dots$$

$$\angle(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CQ}) \approx 59^\circ$$

Nee, dat klopt niet.

7 Exponenten en logaritmen

Voorkennis

- V1 a** $\frac{156}{120} = 1,3$; $\frac{203}{156} \approx 1,301$; $\frac{263}{203} \approx 1,296$ en $\frac{342}{263} \approx 1,300$
De groeifactor per uur is ongeveer 1,3
- b** De groeifactor per dag is $1,3^{24} \approx 543$
- c** Twee uur ervoor waren er $120 \cdot 1,3^{-2} \approx 71$ bacteriën.
- d** $120 \cdot 1,3^t = 660$, dus $1,3^t = \frac{660}{120} = 5,5$. Met de rekenmachine vind je $t \approx 6,5$
Na ongeveer zes en half uur.
- V2 a** De groeifactor per week is $1,43^7 \approx 12,23$
- b** Per halve dag is de groeifactor $1,43^{0,5} \approx 1,20$
- V3 a** De beginhoeveelheid is de hoeveelheid op $t = 0$: $N(0) = 12 \cdot 1,09^{-2} \approx 10,10$
- b** De groeifactor per week is $1,09^7 \approx 1,83$
- c** De groeifactor per zes uur is $1,09^{\frac{1}{4}} \approx 1,02$
- V4 a** $\frac{1}{16} \sqrt[4]{8} = \frac{1}{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2^{-4} \cdot (2^{-3})^{\frac{1}{4}} = 2^{-4} \cdot 2^{-\frac{3}{4}} = 2^{-5\frac{1}{4}}$
- b** $2^{-4} \cdot \frac{1}{2^{-3}} = 2^{-4} \cdot (2^{-3})^{-1} = 2^{-4} \cdot 2^3 = 2^{-1}$
- c** $\frac{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[3]{4}}{\frac{1}{32}} = \frac{\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\frac{1}{2^5}} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{-5}} = 2^{1+\frac{2}{3}-(-5)} = 2^{6\frac{2}{3}}$
- d** $4^{-3} \cdot 8^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{2} = (2^2)^{-3} \cdot (2^3)^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-6} \cdot 2^{13\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^8$
- V5 a** $4 \cdot g^3 = 48$
 $g^3 = 12$
 $g = \sqrt[3]{12}$
- b** $g^{\frac{1}{4}} + 3 = 5$
 $g^{\frac{1}{4}} = 2$
 $g = 2^4$
 $g = 16$
- c** $g^{-2} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{g^2} = \frac{1}{4}$
 $g^2 = 4$
 $g = -2$ of $g = 2$
- d** $15g^{-\frac{1}{3}} = 3$
 $\frac{1}{g^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{5}$
 $g^{\frac{1}{3}} = 5$
 $g = 5^3 = 125$
- e** $\frac{1}{4} g^4 = 16$
 $g^4 = 64$
 $g = -\sqrt[4]{64}$ of $g = \sqrt[4]{64}$
- f** $\frac{1}{2} g^{-3} = 12$
 $\frac{1}{g^3} = 24$
 $g^3 = \frac{1}{24}$
 $g = \sqrt[3]{\frac{1}{24}}$
- g** $2 + \frac{1}{3} g^{-6} = 3$
 $g^{-6} = 3$
 $g^6 = \frac{1}{3}$
 $g = -\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$ of $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$
- h** $\frac{4}{g^2} = 64g^3$
 $4 = 64g^5$
 $g^5 = \frac{1}{16}$
 $g = \sqrt[5]{\frac{1}{16}}$

V6 a $2^x = \frac{1}{8}$

$$2^x = 2^{-3}$$

$$x = -3$$

b $3^{-x} = 3$

$$3^{-x} = 3^1$$

$$x = -1$$

c $5^{3-x} = 1$

$$5^{3-x} = 5^0$$

$$3 - x = 0$$

$$x = 3$$

d $2^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$

$$2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-1}$$

$$\frac{1}{2}x = -1$$

$$x = -2$$

e $5^{2x-2} = 125$

$$5^{2x-2} = 5^3$$

$$2x - 2 = 3$$

$$2x = 5$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

f $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 3\sqrt{3}$

$$(3^{-1})^{x-4} = 3^{1\frac{1}{2}}$$

$$3^{-x+4} = 3^{1\frac{1}{2}}$$

$$-x + 4 = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

V7 a Bij een verschuiving van 3 naar links vervang je x door $x + 3$.

Het functievoorschrift wordt dan $g(x) = 3^{2(x+3)}$ ofwel $g(x) = 3^{2x+6}$

b $h(x) = 5 \cdot f(x) = 5 \cdot 3^{2x}$

7.1 Exponentiële functies

intro Als je 10 keer dubbelvouwt, wordt het $2^{10} = 1024$, dus ongeveer 1000 keer zo dik. De dikte is dan ongeveer $1000 \times 0,1 = 100 \text{ mm} = 10 \text{ cm}$.

Nog eens 10 keer dubbelvouwen geeft een dikte van $1000 \times 10 \text{ cm} = 10\,000 \text{ cm} = 100 \text{ m}$.

Vouw je het nog eens vier keer, dan is de dikte $2^4 \cdot 100 = 1600 \text{ m} = 1,6 \text{ km}$.

Je moet dus 24 keer vouwen om een dikte van meer dan 1 km te krijgen.

1 a De functies h en i zijn stijgend en de functies j en k zijn dalend.

b Als x met 1 toeneemt, dan wordt bij $g > 1$ de functiewaarde met een getal groter dan 1 vermenigvuldigd, dus de functiewaarde wordt steeds groter: de functie is stijgend.

c De x -as is asymptoot van elk van de grafieken.

d grafiek van	h	i	j	k
snijpunt y -as	(0, 2)	(0; 0,5)	(0, 1)	(0, 10)

2 a De functies f , g en k zijn stijgend en de functie h is dalend.

b grafiek van	f	g	h	k
snijpunt verticale as	(0, 20)	(0, 1)	(0; 2,1)	(0, 1)

c De groeifactor van de functie g is $0,5^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$

$$h(x) = 3 \cdot 0,7^{2x+1} = 3 \cdot 0,7^{2x} \cdot 0,7^1 = 2,1 \cdot (0,7^2)^x = 2,1 \cdot 0,49^x$$

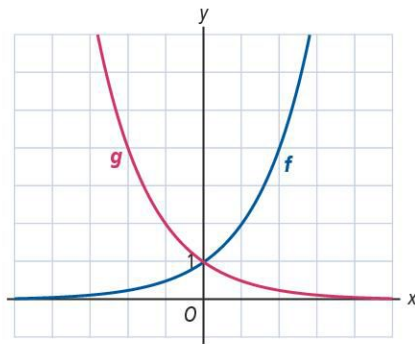
De groeifactor van de functie h is 0,49.

d Het domein van k is $\mathbb{R}$ en het bereik van k is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

e De x -as is asymptoot van beide grafieken, de vergelijking is $y = 0$.

7 Exponenten en logaritmen

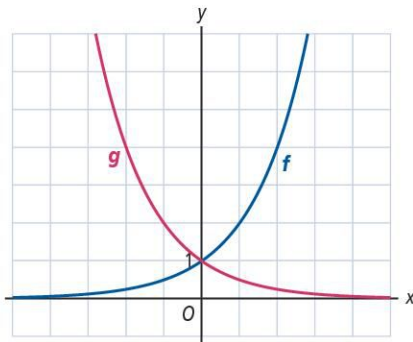
3 a



- b $g(-x) = 2^{-(-x)} = 2^x = f(x)$, dus zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de y -as.
- c $k(x) = h(-x) = 2 \cdot 3^{-x}$
- d $m(x) = -h(x) = -2 \cdot 3^x$
- 4 a Na de vermenigvuldiging ontstaat de grafiek van $p(x) = 3 \cdot f(x)$, dus $p(x) = 3 \cdot 1,5^x$. De spiegeling in de y -as geeft de grafiek van $a(x) = p(-x)$ dus $a(x) = 3 \cdot 1,5^{-x}$
- b Na de spiegeling in de x -as ontstaat de grafiek van $p(x) = -g(x)$, dus $p(x) = -4 \cdot 3^x$. De verschuiving geeft de grafiek van $b(x) = p(x) + 2$ dus $b(x) = -4 \cdot 3^x + 2$
- c Na de spiegeling in de y -as ontstaat de grafiek van $p(x) = h(-x)$, dus $p(x) = 2 \cdot 0,7^{-x}$. De verschuiving geeft de grafiek van $c(x) = p(x - 4)$, dus $c(x) = 2 \cdot 0,7^{-(x-4)}$ of ook $c(x) = 2 \cdot 0,7^{-x+4}$
- d Na de spiegeling in de x -as ontstaat de grafiek van $p(x) = -k(x)$, dus $p(x) = -100 \cdot 2^x$ en na de spiegeling in de y -as ontstaat de grafiek van $q(x) = p(-x)$, dus $q(x) = -100 \cdot 2^{-x}$. De verschuiving geeft de grafiek van $d(x) = q(x) - 6$, dus $d(x) = -100 \cdot 2^{-x} - 6$
- e De grafieken van a en c hebben de lijn $y = 0$ als asymptoot, de grafiek van b de lijn $y = 2$ en de grafiek van d de lijn $y = -6$.
- 5 a Door de grafiek van $f(x) = 0,5^x$ vier naar rechts en drie omhoog te verschuiven ontstaat de grafiek van $g(x) = 3 + 0,5^{x-4}$
- b Door de grafiek van $f(x) = 5^x$ eerst te spiegelen in de y -as, vervolgens met 3 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en tenslotte 2 omhoog te verschuiven ontstaat de grafiek van $g(x) = 3 \cdot 5^{-x} + 2$
- c Door de grafiek van $f(x) = 3^x$ eerst te spiegelen in de y -as, vervolgens 2 naar rechts te verschuiven, daarna te spiegelen in de x -as en tenslotte 2 omhoog te verschuiven ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 - 3^{2-x}$
- 6 a De grafiek van $g(x) = 8 \cdot 2^x$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 2^x$ door een vermenigvuldiging met 8 ten opzichte van de x -as.
De grafiek van $h(x) = 2^{x+3}$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 2^x$ door een verschuiving van 3 naar links.
- b De grafieken van g en h vallen samen.
- c $g(x) = 8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3} = h(x)$
- d De grafiek van $k(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^x$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 3^x$ door een vermenigvuldiging met $\frac{1}{9}$ ten opzichte van de x -as, en doordat $k(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^x = 3^{-2} \cdot 3^x = 3^{x-2}$ kan de grafiek van k ook ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 3^x$ door een verschuiving van 2 naar rechts.

- e De grafiek van $m(x) = 2 \cdot 4^x$ ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 4^x$ door een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x -as, en doordat $m(x) = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^x = 4^{x+\frac{1}{2}}$ kan de grafiek van m ook ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 4^x$ door een verschuiving van $\frac{1}{2}$ naar links.

7 a



b $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$

c $k(x) = h(-x) = 8 \cdot 1,5^{-x}$

$$1,5^{-x} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^x \text{ en } \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$k(x) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

- 8 Na spiegeling in de y -as ontstaat de grafiek van $f(x) = p(-x)$, dus $f(x) = \sqrt{3} \cdot 3^{-x}$. De verschuiving $\frac{1}{2}$ naar links geeft de grafiek van

$$q(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right), \text{ dus } q(x) = \sqrt{3} \cdot 3^{-(x+\frac{1}{2})} = \sqrt{3} \cdot 3^{-x-\frac{1}{2}}$$

$$q(x) = \sqrt{3} \cdot 3^{-x-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-x} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{-x} = (3^{-1})^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$q(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

- 05 a Een spiegeling in de y -as hoort daarbij.

- b $h(x) = 2^{-x} = f(-x)$, dus een spiegeling in de y -as.

$k(x) = 7 \cdot 2^{-x} = 7 \cdot h(x)$, dus een vermenigvuldiging met 7 ten opzichte van de x -as.

$$g(x) = 7 \cdot 2^{-x} + 6 = k(x) + 6, \text{ dus een verschuiving van 6 omhoog.}$$

- c $p(x) = 7 \cdot 2^{-(x-3)} + 6 = 7 \cdot 2^{-x+3} + 6 = 7 \cdot 2^3 \cdot 2^{-x} + 6$

- d Door de grafiek van $f(x) = 3^x$ twee naar links en vier omhoog te verschuiven ontstaat de grafiek van $g(x) = 4 + 3^{x+2}$

- e Door de grafiek van $f(x) = 3^x$ vier naar rechts te verschuiven en vervolgens te spiegelen in de x -as en tenslotte 8 omhoog te verschuiven ontstaat de grafiek van $g(x) = 8 - 3^{x-4}$

- f Door de grafiek van $f(x) = 3^x$ eerst te spiegelen in de y -as en vervolgens 5 naar rechts en 10 naar beneden te verschuiven ontstaat de grafiek van $g(x) = 3^{5-x} - 10$

- g Door de grafiek van $f(x) = 3^x$ te spiegelen in de y -as, vervolgens te vermenigvuldigen met -2 ten opzichte van de x -as en tenslotte 1 omhoog te verschuiven ontstaat de grafiek van $g(x) = 1 - 2 \cdot 3^{-x}$

- 06 a $5^{x+2} = 5^x \cdot 5^2 = 5^x \cdot 25 = 25 \cdot 5^x$, dus $h(x) = 25 \cdot 5^x$

- b De grafiek van $h(x) = 5^{x+2}$ ontstaat door de grafiek van $f(x) = 5^x$ twee naar links te verschuiven.

De grafiek van $h(x) = 25 \cdot 5^x$ ontstaat door de grafiek van $f(x) = 5^x$ met 25 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.

7 Exponenten en logaritmen

- U1 a** Uit 'asymptoot is $y = 4$ ' volgt $c = 4$.
 Uit $f(0) = 2$ volgt $b + 4 = 2$, dus $b = -2$
 Uit $f(6) = -50$ volgt $-2 \cdot g^6 + 4 = -50$
 $-2 \cdot g^6 = -54$
 $g^6 = 27 = 3^3$, dus $g = 3^{\frac{1}{2}}$
 Het functievoorschrift is $f(x) = -2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x} + 4$
- b** Uit 'asymptoot is $y = -2$ ' volgt $c = -2$
 Uit $f(0) = 0$ volgt $b - 2 = 0$, dus $b = 2$
 Uit $f(1) = 2$ volgt $2g - 2 = 2$, dus $g = 2$
 Het functievoorschrift is $f(x) = 2 \cdot 2^x - 2$
- c** Uit 'asymptoot is $y = -7$ ' volgt $c = -7$
 Uit $f(-1) = -8$ volgt $b \cdot g^{-1} - 7 = -8$ of ook $\frac{b}{g} = -1$, dus $b = -g$
 Uit $f(1) = -32$ volgt $-g \cdot g - 7 = -32$, dus $g^2 = 25$
 Omdat een groeifactor altijd positief is volgt hieruit $g = 5$.
 $b = -g = -5$
 Het functievoorschrift is $f(x) = -5 \cdot 5^x - 7$
- U2 a** Voor grote waarden van x wordt de noemer steeds groter, dus wordt $f(x)$ steeds kleiner en nadert naar 0. Een horizontale asymptoot is $y = 0$.
 Als de waarden van x steeds negatiever worden, nadert de noemer naar 1 en $f(x)$ nadert dan naar 4, dus ook $y = 4$ is een horizontale asymptoot.
- b** De grafiek van $g(x) = 2 + 2^x$ heeft een horizontale asymptoot $y = 2$.
 Dus de grafiek van f heeft een horizontale asymptoot $y = 2^2 = 4$.
- c** Zowel voor hele grote waarden van x als voor sterk negatieve waarden van x wordt de noemer heel groot, dus de horizontale asymptoot is $y = 0$.
- d** Voor grote waarden van x gaat 2^{-x} naar 0, dus dan is $f(x) \approx \frac{2^x}{2^x} = 1$, dus een horizontale asymptoot is $y = 1$.
 Voor sterk negatieve waarden van x gaat 2^x naar 0, terwijl 2^{-x} juist heel groot wordt, dus $f(x) \approx \frac{0}{2^{-x} + 0}$, dus een horizontale asymptoot is $y = 0$.

7.2 Exponentiële vergelijkingen

intro Het duurt drie weken om $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ keer zoveel te krijgen.
 Het duurt iets meer dan twee weken om vijf keer zoveel te krijgen.

- 9 a** Door links en rechts van het $=$ -teken te delen door 2.
b De rechterkant van de vergelijking kun je schrijven als
 $6 \cdot 36^x = 6^1 \cdot (6^2)^x = 6^{2x+1}$
c $6^{3+x} = 6^{2x+1}$ geeft $x + 3 = 2x + 1$, dus $x = 2$

- 10 a** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{2x-3}$
 $3^{-x} = (3^2)^{2x-3}$
 $3^{-x} = 3^{4x-6}$
 $-x = 4x - 6$
 $-5x = -6$
 $x = 1\frac{1}{5}$
- b** $3^x = \frac{1}{27}$
 $3^x = 3^{-3}$
 $x = -3$

$$\begin{aligned} \text{c } 0,25^x &= 16 \cdot 2^{x-1} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x &= 2^4 \cdot 2^{x-1} \\ (2^{-2})^x &= 2^{x+3} \\ -2x &= x+3 \\ -3x &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } \left(\frac{1}{7}\right)^{x+3} &= 1 \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{x+3} &= \left(\frac{1}{7}\right)^0 \\ x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 2^x &= 0,125^3 \\ 2^x &= \left(\frac{1}{8}\right)^3 \\ 2^x &= (2^{-3})^3 \\ 2^x &= 2^{-9} \\ x &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 0,1^{2x} &= 1000^{1-x} \\ (10^{-1})^{2x} &= (10^3)^{1-x} \\ 10^{-2x} &= 10^{3-3x} \\ -2x &= 3-3x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \text{ a } 36 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-1} &= 12 \\ 3^{\frac{1}{2}x-1} &= \frac{1}{3} \\ 3^{\frac{1}{2}x-1} &= 3^{-1} \\ \frac{1}{2}x-1 &= -1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } \text{Invoer: } y_1 &= 2^{4x-1} \text{ en } y_2 = 24 \\ \text{Venster: } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 30 \\ \text{Optie: snijpunt} \\ \text{de oplossing is } x &\approx 1,40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 3^x \cdot 4^x &= 6^x \\ 12^x &= 6^x \\ \text{delen door } 6^x &\text{ geeft } 2^x = 1 \\ 2^x &= 2^0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \text{ a } 27 \cdot 3^{2-x} &= (\sqrt{3})^x \\ 3^3 \cdot 3^{2-x} &= 3^{\frac{1}{2}x} \\ 3^{5-x} &= 3^{\frac{1}{2}x} \\ 5-x &= \frac{1}{2}x \\ 1\frac{1}{2}x &= 5 \\ 3x &= 10 \\ x &= 3\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g } 32 \cdot 2^x &= 4^{4x+3} \\ 2^5 \cdot 2^x &= (2^2)^{4x+3} \\ 2^{5+x} &= 2^{8x+6} \\ 5+x &= 8x+6 \\ -7x &= 1 \\ x &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h } 3 \cdot 0,5^x &= 24 \cdot 2^{4x-3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= 8 \cdot 2^{4x-3} \\ (2^{-1})^x &= 2^3 \cdot 2^{4x-3} \\ 2^{-x} &= 2^{4x} \\ -x &= 4x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i } 14 \cdot 4^x &= 7 \cdot 2^{3x} \\ 2 \cdot 4^x &= 2^{3x} \\ 2^1 \cdot 2^{2x} &= 2^{3x} \\ 2^{1+2x} &= 2^{3x} \\ 1+2x &= 3x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j } \sqrt{2^x} &= \frac{1}{64} \\ (2^x)^{\frac{1}{2}} &= 2^{-6} \\ 2^{\frac{1}{2}x} &= 2^{-6} \\ \frac{1}{2}x &= -6 \\ x &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 0,125^x &= \sqrt{2} \\ \left(\frac{1}{8}\right)^x &= 2^{\frac{1}{2}} \\ (2^{-3})^x &= 2^{\frac{1}{2}} \\ -3x &= \frac{1}{2} \\ x &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 2 \cdot 10^x &= 5^x \\ \text{delen door } 5^x &\text{ geeft } 2 \cdot 2^x = 1 \\ 2^x &= \frac{1}{2} \\ 2^x &= 2^{-1} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } \text{Invoer: } y_1 &= 6^x \text{ en } y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \\ \text{Venster: } -10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10 \\ \text{Optie: snijpunt} \\ \text{de oplossing is } x &\approx 0,28 \end{aligned}$$

7 Exponenten en logaritmen

- b** Plot de grafieken van beide functies in een standaard venster.
 Links van het snijpunt ligt de grafiek van f boven die van g .
 De oplossing van de ongelijkheid is $x < 3\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{13\ a} & 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = -4 & 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 11 \\
 & 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16 & 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 1 \\
 & \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 4 & \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = \frac{1}{4} \\
 & (2^{-1})^{x-3} = 2^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 & 2^{-x+3} = 2^2 & x-3 = 2 \\
 & -x+3 = 2 & x = 5 \\
 & x = 1 & \text{snijpunt } (5, 11) \\
 & \text{snijpunt } (1, -4) &
 \end{array}$$

- b** Uit de grafiek valt af te lezen dat de oplossing $[5, \rightarrow)$ is.

- c** Evenzo valt af te lezen dat de oplossing $\langle 1, 5 \rangle$ is.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{d} & 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 4 & 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 11\frac{1}{2} \\
 & 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 8 & 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = \frac{1}{2} \\
 & \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 2 & \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = \frac{1}{8} \\
 & (2^{-1})^{x-3} = 2 & \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
 & 2^{-x+3} = 2^1 & x-3 = 3 \\
 & -x+3 = 1 & x = 6 \\
 & x = 2 &
 \end{array}$$

De oplossing van de ongelijkheid is $2 \leq x \leq 6$ of $[2, 6]$.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{14\ a} \quad 2^{0,5x} = 2^{-x+3} \\
 0,5x = -x + 3 \\
 1,5x = 3 \\
 x = 2
 \end{array}$$

$f(2) = g(2) = 2$, dus de coördinaten van het snijpunt zijn $(2, 2)$.

- b** Uit de plot blijkt dat de grafiek van f links van het snijpunt onder de grafiek van g ligt, dus de oplossing van de ongelijkheid is $x \leq 2$ of $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{15\ a} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{12-2x} = 4^{4-x} \\
 (2^{-1})^{12-2x} = (2^2)^{4-x} \\
 2^{-12+2x} = 2^{8-2x} \\
 -12 + 2x = 8 - 2x \\
 4x = 20 \\
 x = 5
 \end{array}$$

$f(5) = g(5) = \frac{1}{4}$, dus de coördinaten van het snijpunt zijn $\left(5, \frac{1}{4}\right)$.
 De vergelijking van lijn k is $x = 5$.

- b** De grafiek van g ligt links van het snijpunt boven de grafiek van f .
 De oplossing van de ongelijkheid is $x \leq 5$.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{c} & \left(\frac{1}{2}\right)^{12-2x} = 4 & 4^{4-x} = 4 \\
 & 2^{-12+2x} = 2^2 & 4^{4-x} = 4^1 \\
 & -12 + 2x = 2 & 4 - x = 1 \\
 & 2x = 14 & x = 3 \\
 & x = 7 &
 \end{array}$$

De snijpunten zijn $(7, 4)$ en $(3, 4)$.

- d De punten liggen beide op dezelfde hoogte op afstand 2 van k .
- e Je moet aantonen dat P en Q even ver van de lijn k liggen.
 Stel P ligt op afstand p van k . De x -coördinaat van P is dan $5 - p$
 De x -coördinaat van Q moet dan $5 + p$ zijn.
 Er moet dus gelden $f(5 - p) = g(5 + p) = 10$

$$f(5 - p) = \left(\frac{1}{2}\right)^{12 - 2(5 - p)} = (2^{-1})^{2 + 2p} = 2^{-2 - 2p} = 10$$

$$g(5 + p) = 4^{4 - (5 + p)} = (2^2)^{-1 - p} = 2^{-2 - 2p}$$
. Dat is dus ook gelijk aan 10.
 Beide punten liggen even ver van k .

16 a

x	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	0,03125	1	8	16	8	1	0,03125

- b Als je voor x waarden invult die steeds verder van 0 liggen, wordt $4x - x^2$ steeds sterker negatief. Dan nadert $2^{4x - x^2}$ naar 0.

c $2^{4x - x^2} = 2^{-12}$

$$4x - x^2 = -12$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x + 2)(x - 6) = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = 6$$

De snijpunten zijn $(-2, 2^{-12})$ en $(6, 2^{-12})$.

d $2^{4x - x^2} = 1$

$$2^{4x - x^2} = 2^0$$

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = 4$$

$$2^{4x - x^2} = 8$$

$$2^{4x - x^2} = 2^3$$

$$4x - x^2 = 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 3$$

De oplossing van de ongelijkheid lees je nu af met behulp van de grafieken:

$$0 \leq x \leq 1 \text{ of } 3 \leq x \leq 4$$

e Invoer: $y_1 = 2^{4x - x^2}$ en $y_2 = 5$

Venster: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 20$

Optie: snijpunten

De snijpunten zijn bij $x \approx 0,70$ en $x \approx 3,30$.

De oplossing van de ongelijkheid lees je nu af met behulp van de grafieken:

$$0,70 \leq x \leq 3,30$$

010 a $2^{x-3} = 64$

$$2^{x-3} = 2^6$$

$$x - 3 = 6$$

$$x = 9$$

- b De getallen 25, 5 en $\sqrt{5}$ zijn bij stap 2 geschreven als macht van 5.

c $5^{2x} = 5^{1\frac{1}{2}}$

d $2x = 1\frac{1}{2}$

$$x = \frac{3}{4}$$

e $3 \cdot 8^{2x} = 12$

$$8^{2x} = 4$$

$$(2^3)^{2x} = 2^2$$

$$2^{6x} = 2^2$$

$$6x = 2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

7 Exponenten en logaritmen

$$\begin{aligned} \text{f } \sqrt{12 \cdot 27^x} &= 18 \\ 12 \cdot 27^x &= 324 \\ 27^x &= 27 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{012 a } f(x) &= 32 \cdot 2^{5-x} = 2^5 \cdot 2^{5-x} = 2^{10-x} \text{ en} \\ g(x) &= 2^x \cdot \sqrt{128} = 2^x \cdot \sqrt{2^7} = 2^x \cdot 2^{\frac{7}{2}} = 2^{x+3\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 2^{10-x} &= 2^{x+3\frac{1}{2}} \\ 10-x &= x+3\frac{1}{2} \\ -2x &= -6\frac{1}{2} \\ x &= 3\frac{1}{4} \end{aligned}$$

c De grafiek van f ligt lager dan die van g als $x > 3\frac{1}{4}$

d $f(x) \leq g(x)$ als $x \geq 3\frac{1}{4}$

U3 a f heeft bij tegengestelde x -waarden dezelfde functiewaarde.

b Het minimum van de functie $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ is $h(0) = -2$, dus het minimum van $f(0) = 2^{\frac{1}{2}x^2-2}$ is dan $f(0) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{c } 2^{\frac{1}{2}x^2-2} &= 2 & 2^{\frac{1}{2}x^2-2} &= 4 \\ 2^{\frac{1}{2}x^2-2} &= 2^1 & 2^{\frac{1}{2}x^2-2} &= 2^2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 &= 1 & \frac{1}{2}x^2 - 2 &= 2 \\ \frac{1}{2}x^2 &= 3 & \frac{1}{2}x^2 &= 4 \\ x^2 &= 6 & x^2 &= 8 \\ x &= -\sqrt{6} \text{ of } x = \sqrt{6} & x &= -\sqrt{8} \text{ of } x = \sqrt{8} \end{aligned}$$

Plot de grafiek van f en de lijnen $y = 2$ en $y = 4$ in een standaardvenster.

De oplossing is $-\sqrt{8} \leq x \leq -\sqrt{6}$ of $\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{8}$.

$$\begin{aligned} \text{d } g(x) &= (2\sqrt{2})^x = (2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^x = 2^{\frac{3}{2}x} \\ 2^{\frac{1}{2}x^2-2} &= 2^{\frac{3}{2}x} \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 &= \frac{3}{2}x \\ x^2 - 4 &= 3x \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x+1)(x-4) &= 0 \\ x &= -1 \text{ of } x = 4 \end{aligned}$$

U4 a Er is voor zes verschillende waarden van a de grafiek getekend.

b Voor grote positieve waarden van x wordt voor elke waarde van a de noemer heel groot, de functiewaarden naderen dan naar 0 en dat geeft een horizontale asymptoot $y = 0$.

Voor sterk negatieve waarden van x nadert 2^x voor elke waarde van a naar 0, de functiewaarden naderen dan tot $\frac{8}{2} = 4$ en dat geeft een horizontale asymptoot $y = 4$.

c $\frac{8}{2 + 1 \cdot 2^x} = 2^x$
 $8 = 2^x(2 + 2^x)$
 $8 = 2 \cdot 2^x + 2^x \cdot 2^x$
 substitueer $2^x = p$
 $8 = 2p + p^2$
 $p^2 + 2p - 8 = 0$
 $(p + 4)(p - 2) = 0$
 $p = -4$ of $p = 2$
 $2^x = -4$ (geen oplossing) of $2^x = 2$, dit geeft $x = 1$.

d $\frac{8}{2 - 2^x} = 4 \cdot 2^{-x}$
 $8 = 4 \cdot 2^{-x}(2 - 2^x)$
 $8 = 8 \cdot 2^{-x} - 4$
 $12 = 8 \cdot 2^{-x}$
 $2^{-x} = 1\frac{1}{2}$

Dit substitueren in $g(x) = 4 \cdot 2^{-x}$ geeft $g(x) = 4 \cdot 1\frac{1}{2} = 6$, dus de y -coördinaat van het snijpunt S is 6.

e Invoer: $y_1 = 2^{-x}$ en $y_2 = 1\frac{1}{2}$
 Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$
 Optie: snijpunt
 De x -coördinaat van het snijpunt S is $x \approx -0,58$

7.3 Logaritmen

intro $6 \cdot 3^t = 4374$

Links en rechts delen door 6 geeft $3^t = 729 = 3^6$, dus $t = 6$

$6 \cdot 3^t = 6000$

Links en rechts delen door 6 geeft $3^t = 1000$ en 1000 is niet te schrijven als een macht van 3.

17 a Je kunt de vergelijking $3^x = 18$ niet oplossen, omdat 18 niet te schrijven is als een macht van 3.

b $3^{2,63} \approx 17,98$ en dat is kleiner dan 18; $3^{2,64} \approx 18,18$ en dat is groter dan 18.
 $f(x) = 3^x$ is een stijgende functie, dus voor de oplossing van $3^x = 18$ geldt $2,63 < x < 2,64$

c $3^{2,631} \approx 18,0014$ en $3^{2,6309} \approx 17,9994$ en $3^{2,63095} \approx 18,0004$
 De oplossing van $3^x = 18$ in vier decimalen is dus $x = 2,6309$.

18 a niet exact op te lossen, want 10 is geen macht van 2.

b niet exact op te lossen, want 25 is geen macht van 3.

c $10^x = \frac{1}{10}$
 $10^x = 10^{-1}$, dus $x = -1$

d $5^x = \sqrt{5}$

$5^x = 5^{\frac{1}{2}}$, dus $x = \frac{1}{2}$

e $2^x = 256$

$2^x = 2^8$, dus $x = 8$

f niet exact op te lossen, want $\frac{1}{36}$ is geen macht van 3.

7 Exponenten en logaritmen

- 19 a** $3^2 = 9$ en $3^3 = 27$, dus voor $3^x = 25$ geldt $2 < x < 3$.
- b** De oplossing van $6^x = 38$ is iets groter dan 2, want $6^2 = 36$.
De oplossing van $3^x = 15$ is een stuk groter dan 2, want $3^2 = 9$.
Dus de oplossing van $3^x = 15$ is groter.
- 20 a** $7^x = 4$
 $x = {}^7\log(4)$
- b** $7^x = 10$
 $x = {}^7\log(10)$
- c** $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 13$
 $x = {}^{\frac{1}{7}}\log(13)$
- d** $3^{x-2} = 14$
 $x - 2 = {}^3\log(14)$
 $x = 2 + {}^3\log(14)$
- e** $5^{x+1} = 100$
 $x + 1 = {}^5\log(100)$
 $x = -1 + {}^5\log(100)$
- f** $5^{2x+5} = \frac{1}{2}$
 $2x + 5 = {}^5\log\left(\frac{1}{2}\right)$
 $x = -2\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{2}\right)$
- 21 a** $x = {}^3\log(5)$ is de oplossing van $3^x = 5$
- b** $x = {}^7\log\left(\frac{1}{2}\right)$ is de oplossing van $7^x = \frac{1}{2}$
- c** $x = {}^{\frac{1}{2}}\log(7)$ is de oplossing van $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$
- d** $x = {}^{10}\log(6)$ is de oplossing van $10^x = 6$
- e** $x = {}^4\log(8)$ is de oplossing van $4^x = 8$
- f** $x = {}^{0,1}\log(1000)$ is de oplossing van $0,1^x = 1000$
- 22 a** ${}^3\log(27) = 3$, want $27 = 3^3$
- b** ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = -3$, want $\frac{1}{8} = 2^{-3}$
- c** ${}^5\log(5\sqrt{5}) = 1\frac{1}{2}$ want $5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{1\frac{1}{2}}$
- d** ${}^7\log(1) = 0$ want $1 = 7^0$
- 23** Die getallen zijn de gehele machten van 5, dus: ${}^5\log(1) = 0$, ${}^5\log(5) = 1$
 ${}^5\log(25) = 2$, ${}^5\log(125) = 3$ en ${}^5\log(625) = 4$.
- 24 a** ${}^2\log(2\sqrt{2}) = 1\frac{1}{2}$, want $2^{1\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$
- b** ${}^7\log\left(\frac{1}{49}\right) = -2$, want $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$
- c** ${}^{10}\log(1\,000\,000) = 6$, want $10^6 = 1\,000\,000$
- d** ${}^{\frac{1}{3}}\log(9) = -2$, want $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$
- e** ${}^{25}\log(5) = \frac{1}{2}$, want $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$
- f** ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{64}\right) = 3$, want $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$
- 25 a** ${}^3\log(x) = 2$
 $x = 3^2$
 $x = 9$
- b** ${}^5\log(x) = -1$
 $x = 5^{-1}$
 $x = \frac{1}{5}$
- c** ${}^4\log(5x) = \frac{1}{2}$
 $5x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
 $x = \frac{2}{5}$
- d** ${}^3\log(x + 10) = 2$
 $x + 10 = 3^2$
 $x = -1$

$$\begin{array}{ll} \text{e} & {}^5\log(x^2 + 4) = 3 \\ & x^2 + 4 = 5^3 \\ & x^2 + 4 = 125 \\ & x^2 = 121, x = -11 \text{ of } x = 11 \\ \text{f} & {}^6\log(x^2 - 13) = 2 \\ & x^2 - 13 = 6^2 \\ & x^2 - 13 = 36 \\ & x^2 = 49 \\ & x = -7 \text{ of } x = 7 \end{array}$$

- 26 a** K_0 : elke zijde van de driehoek heeft lengte 9, dus de omtrek is $3 \cdot 9 = 27$.
 K_1 : elke zijde van K_0 wordt vervangen door vier lijnstukjes met lengte $9 : 3 = 3$. De figuur bestaat uit $3 \cdot 4 = 12$ lijnstukjes met lengte 3, dus de omtrek is $12 \cdot 3 = 36$.
- b** Bij elke volgende figuur wordt het aantal lijnstukjes 4 keer zo groot en de lengte van een lijnstukje 3 keer zo klein. De omtrek wordt dan $\frac{4}{3}$ keer zo groot. De omtrek is dus een exponentiële functie met startwaarde 27 en groeifactor $1\frac{1}{3}$ dus $\text{omtrek } K_n = 27 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^n$
- c** $27 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^n = 85\frac{1}{3}$
 $\left(1\frac{1}{3}\right)^n = 85\frac{1}{3} : 27 = \frac{256}{81} = \frac{4^4}{3^4} = \left(1\frac{1}{3}\right)^4, n = 4$, dus bij de vijfde figuur.
- d** Dan moet $27 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^n > 10^6$
 $27 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{36} \approx 849\,490$ en $27 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{37} \approx 1\,132\,653$
 Vanaf $n = 37$, dus vanaf de 38^e figuur is de omtrek groter dan 10^6 .
- e** Bij opdracht c : $n = {}^{1\frac{1}{3}}\log\left(\frac{256}{81}\right)$ en bij opdracht d: $n = {}^{1\frac{1}{3}}\log\left(\frac{10^6}{27}\right)$

024 a $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}$
 $(2^{-1})^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 $2^{-x} = 2^{2\frac{1}{2}}$
 $-x = 2\frac{1}{2}$
 $x = -2\frac{1}{2}$
 dus $\frac{1}{2}\log(4\sqrt{2}) = -2\frac{1}{2}$

b $x = {}^3\log\left(\frac{1}{81}\right)$ is de oplossing van de vergelijking $3^x = \frac{1}{81}$

c $3^x = \frac{1}{81}$
 $3^x = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$
 ${}^3\log\left(\frac{1}{81}\right) = -4$

d $x = {}^5\log(25\sqrt{5})$
 $5^x = 25\sqrt{5}$
 $5^x = 5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$
 $5^x = 5^{2\frac{1}{2}}$
 $x = 2\frac{1}{2}$
 ${}^5\log(25\sqrt{5}) = 2\frac{1}{2}$

e $x = {}^6\log\left(\frac{1}{216}\right)$
 $6^x = \frac{1}{216}$
 $6^x = 6^{-3}$
 $x = -3$
 ${}^6\log\left(\frac{1}{216}\right) = -3$

7 Exponenten en logaritmen

f $x = {}^{100}\log(10)$
 $100^x = 10$
 $(10^2)^x = 10$
 $10^{2x} = 10^1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
 ${}^{100}\log(10) = \frac{1}{2}$

h $x = {}^{49}\log(7)$
 $49^x = 7$
 $(7^2)^x = 7^1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
 ${}^{49}\log(7) = \frac{1}{2}$

g $x = {}^{\frac{1}{4}}\log(16\sqrt{8})$
 $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16\sqrt{8}$
 $(2^{-2})^x = 2^4 \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}}$
 $2^{-2x} = 2^{\frac{5}{2}}$
 $-2x = \frac{5}{2}$
 $x = -\frac{5}{4}$
 ${}^{\frac{1}{4}}\log(16\sqrt{8}) = -\frac{5}{4}$

i $x = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right)$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^4$
 $x = 4$
 ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right) = 4$

025 a uit ${}^3\log(x) = 2$ volgt $x = 3^2 = 9$
b uit ${}^5\log(x) = 4$ volgt $x = 5^4 = 625$
c ${}^3\log(5x - 4) = 4$
 $5x - 4 = 3^4$
 $5x - 4 = 81$
 $5x = 85$
 $x = 17$

U5 a $4 - {}^2\log(-x) = -2$
 ${}^2\log(-x) = 6$
 $-x = 2^6$, dus $x = -64$
b ${}^5\log(10 + \sqrt{x}) = 2$
 $10 + \sqrt{x} = 5^2$
 $\sqrt{x} = 15$, dus $x = 225$
c ${}^3\log({}^2\log(x)) = 4$
 $3^4 = {}^2\log(x)$
 $x = 2^{81}$

d ${}^{10}\log(90 + {}^2\log(x)) = 2$
 $10^2 = 90 + {}^2\log(x)$
 ${}^2\log(x) = 10$, dus $x = 2^{10} = 1024$
e ${}^2\log(4 + 4^x) = 4$
 $4 + 4^x = 2^4$
 $4^x = 12$, dus $x = {}^4\log(12)$
f $({}^3\log(x + 2))^2 = 9$
 ${}^3\log(x + 2) = 3$ of
 ${}^3\log(x + 2) = -3$
 $x + 2 = 3^3$ of $x + 2 = 3^{-3}$
 $x + 2 = 27$ of $x + 2 = \frac{1}{27}$
 $x = 25$ of $x = -1\frac{26}{27}$

U6 a ${}^2\log(5)$ is de groeitijd bij groeifactor 2 die nodig is om een hoeveelheid 5 keer zo groot te maken.
b Na ${}^2\log(7)$ tijdseenheden is de hoeveelheid 7 keer zo groot.
 Na nog eens ${}^2\log(5)$ tijdseenheden is die hoeveelheid 5 keer zo groot.
 Na ${}^2\log(7) + {}^2\log(5)$ tijdseenheden is de oorspronkelijke hoeveelheid dus $5 \times 7 = 35$ zo groot. Dat is ook zo na ${}^2\log(35)$ tijdseenheden, dus ${}^2\log(7) + {}^2\log(5) = {}^2\log(35)$.
c Na ${}^s\log(a)$ tijdseenheden is de hoeveelheid a keer zo groot.
 Na nog eens ${}^s\log(b)$ tijdseenheden is die hoeveelheid b keer zo groot.
 Na ${}^s\log(a) + {}^s\log(b)$ tijdseenheden is de oorspronkelijke hoeveelheid dus $a \times b = ab$ zo groot. Dat is ook zo na ${}^s\log(ab)$ tijdseenheden, dus ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(ab)$.

7.4 Logaritmen berekenen

intro Als $x = {}^5\log(-5)$, dan is $5^x = -5$ en dat heeft geen oplossing.
 Als $x = {}^3\log(0)$, dan is $3^x = 0$ en dat heeft geen oplossing.
 Als $x = {}^{-2}\log(8)$, dan is $(-2)^x = 8$ en dat heeft geen oplossing.
 Als $x = {}^1\log(4)$, dan is $1^x = 4$ en dat heeft geen oplossing.

- 27 a** $\log(2) \approx 0,3010$ $\log(25) \approx 1,3979$
 $\log(5) \approx 0,6990$ $\log(100) = 2$
 $\log(10) = 1$
b Voor $x = 1000$ is $\log(x) = 3$, want $10^3 = 1000$.
c 10 is het grondtal van de log-functie op de rekenmachine omdat de machten van 10 gehele getallen als antwoord geven.
d $\log(1\,000\,000) = 6$, want $10^6 = 1\,000\,000$
 $\log(0,0001) = -4$, want $10^{-4} = 0,0001$

- 28 a** $\log(3) \approx 0,48$ **b** $10^{2x+1} = 500$
 $\log\left(\frac{1}{1000}\right) = -3$ $2x + 1 = {}^{10}\log(500)$
 $\log(1) = 0$ $2x = -1 + {}^{10}\log(500)$
 $\log(123\,456) \approx 5,09$ $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^{10}\log(500) \approx 0,85$

- 29 a** $\log(7)$ is de oplossing van de vergelijking $10^x = 7$, dus $10^{\log(7)} = 7$.
b $10^{\log(564)} = 564$, $10^{\log(0,1)} = 0,1$ en $10^{\log(0,08)} = 0,08$
c $14 = 10^{\log(14)} \approx 10^{1,15}$
 $400 = 10^{\log(400)} \approx 10^{2,60}$
 $0,003 = 10^{\log(0,003)} \approx 10^{-2,52}$

- 30 a** $7^x = 20$
 $(10^{\log(7)})^x = 10^{\log(20)}$
 $10^{x \cdot \log(7)} = 10^{\log(20)}$
b $x \cdot \log(7) = \log(20)$
 $x = \frac{\log(20)}{\log(7)}$
c De oplossing van $7^x = 20$ is gelijk aan ${}^7\log(20)$ en is ook gelijk aan $\frac{\log(20)}{\log(7)}$

- 31 a** ${}^9\log(35) = \frac{\log(35)}{\log(9)} \approx 1,62$ **c** ${}^5\log(10) = \frac{\log(10)}{\log(5)} \approx 1,43$
b ${}^{\frac{1}{3}}\log(128) = \frac{\log(128)}{\log(\frac{1}{3})} \approx -4,42$ **d** ${}^4\log\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{\log(\frac{1}{13})}{\log(4)} \approx -1,85$

- 32 a** $15^x = 2$ **b** $4^{2x} = 6$
 $x = {}^{15}\log(2)$ $2x = {}^4\log(6)$
 $x = \frac{\log(2)}{\log(15)} \approx 0,26$ $x = \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(6)$
 $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(6)}{\log(4)} \approx 0,65$

7 Exponenten en logaritmen

- c** $3^x = \sqrt{5}$
 $x = {}^3\log(\sqrt{5})$
 $x = \frac{\log(\sqrt{5})}{\log(3)} \approx 0,73$
- e** $10^x = 50$
 $x = {}^{10}\log(50)$
 $x = \log(50) \approx 1,70$
- d** $10^x = 5$
 $x = {}^{10}\log(5)$
 $x = \log(5) \approx 0,70$
- f** $10^x = 500$
 $x = {}^{10}\log(500) \approx 2,70$

- 33** $7^x = 20$
 $(b^{\log(7)})^x = b^{\log(20)}$
 $b^{x \cdot \log(7)} = b^{\log(20)}$
 $x \cdot \log(7) = \log(20)$, dus $x = \frac{\log(20)}{\log(7)}$
 De oplossing van $7^x = 20$ is ook gelijk is aan ${}^7\log(20)$, dus
 $x = {}^7\log(20) = \frac{{}^b\log(20)}{{}^b\log(7)}$

- 34 a** ${}^8\log(128) = \frac{{}^2\log(128)}{{}^2\log(8)} = \frac{{}^2\log(2^7)}{{}^2\log(2^3)} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$
- b** ${}^4\log(32) = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(4)} = \frac{{}^2\log(2^5)}{{}^2\log(2^2)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
- c** ${}^{27}\log(9\sqrt{3}) = \frac{{}^3\log(9\sqrt{3})}{{}^3\log(27)} = \frac{{}^3\log(3^{2\frac{1}{2}})}{{}^3\log(3^3)} = \frac{2\frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{6}$
- d** ${}^{25}\log(125) = \frac{{}^5\log(125)}{{}^5\log(25)} = \frac{{}^5\log(5^3)}{{}^5\log(5^2)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
- e** ${}^{\frac{1}{8}}\log(16) = \frac{{}^2\log(16)}{{}^2\log(\frac{1}{8})} = \frac{{}^2\log(2^4)}{{}^2\log(2^{-3})} = \frac{4}{-3} = -1\frac{1}{3}$

- 35** ${}^3\log(18) \cdot {}^4\log(3) = a \cdot {}^2\log(b)$
 $\frac{{}^2\log(18)}{{}^2\log(3)} \cdot \frac{{}^2\log(3)}{{}^2\log(4)} = \frac{{}^2\log(18)}{{}^2\log(4)} = \frac{{}^2\log(18)}{2} = \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(18)$
 Dus $a = \frac{1}{2}$ en $b = 18$.

- 029 a b c d -**
- e** $29 = 10^{\log(29)} \approx 10^{1,46}$
 $600 = 10^{\log(600)} \approx 10^{2,78}$
 $0,2 = 10^{\log(0,2)} \approx 10^{-0,70}$

- 034 a** Dat is in dit geval handig omdat 128 en 4 beide machten van 2 zijn, namelijk $128 = 2^7$ en $4 = 2^2$.
- b** ${}^4\log(128) = \frac{{}^2\log(128)}{{}^2\log(4)} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$
- c** $b = 3$ is in dat geval een goede keuze, want $3\sqrt{3} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{1\frac{1}{2}}$ en $9 = 3^2$
- d** ${}^9\log(3\sqrt{3}) = \frac{{}^3\log(3\sqrt{3})}{{}^3\log(9)} = \frac{1\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

U7 a ${}^2\log(a) \cdot {}^a\log(2) = \frac{\log(a)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1$

b ${}^8\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(8)}$ en ${}^a\log(g) = \frac{\log(g)}{\log(a)}$, dus ${}^8\log(a) = \frac{1}{{}^a\log(g)}$

c ${}^8\log(a) = \frac{{}^2\log(a)}{{}^2\log(8)}$, dus ${}^8\log(a) = \frac{{}^2\log(a)}{3}$ en $3 \cdot {}^8\log(a) = {}^2\log(a)$, dus $\frac{{}^2\log(a)}{{}^8\log(a)} = 3$

d ${}^8\log(a^3) = \frac{{}^a\log(a^3)}{{}^a\log(g)} = \frac{3}{{}^a\log(g)}$, gebruik maken van de eigenschap bij opdracht b
geeft ${}^8\log(a^3) = \frac{3}{{}^a\log(g)} = \frac{3}{\frac{1}{{}^8\log(a)}} = 3 \cdot {}^8\log(a)$

e ${}^8\log(a^{-1}) = \frac{{}^a\log(a^{-1})}{{}^a\log(g)} = \frac{-1}{{}^a\log(g)}$, gebruik maken van de eigenschap bij opdracht b
geeft ${}^8\log(a^{-1}) = -{}^8\log(a)$

7.5 Grafieken van logaritmische functies

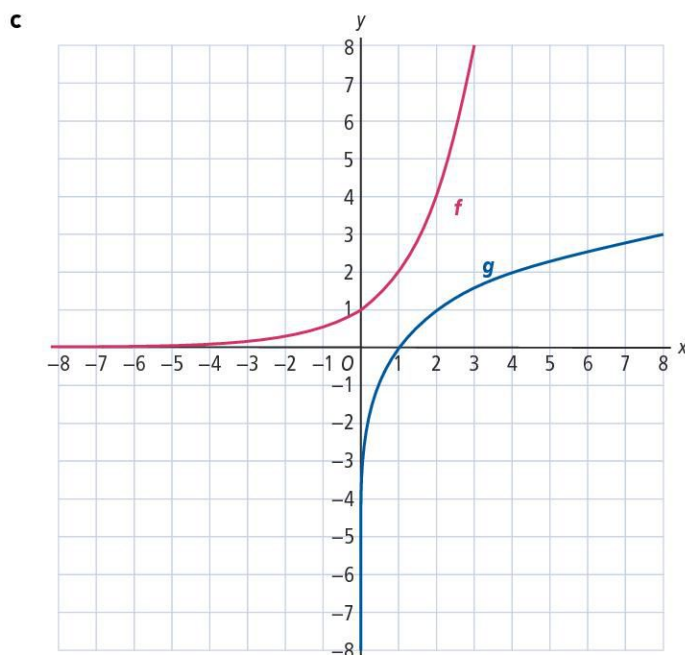
intro ${}^8\log(g) = 1$, dus kijk waar $y = 1$. Dat is voor $x = 3$, dus het grondtal is 3.

36 a

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3

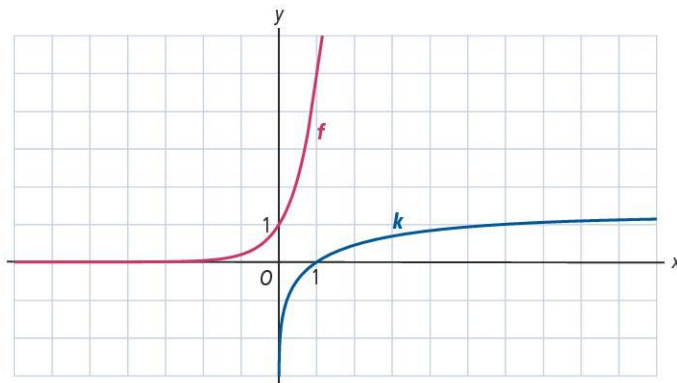


d Je moet de grafiek van f spiegelen in de lijn $y = x$ om de grafiek van g te krijgen.

e De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f en de lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek van g .

7 Exponenten en logaritmen

37 a



- b $f(0) = 5^0 = 1$, dus de grafiek van f snijdt de y -as in $(0, 1)$.
 c ${}^5\log(x) = 0$ geeft $x = 5^0 = 1$, dus de grafiek van k snijdt de x -as in $(1, 0)$.
 d Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 Het domein van k is $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en het bereik van k is $\mathbb{R}$.
 e De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .
 De lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot van de grafiek van k .

38 a Het punt $(1, 0)$ ligt op beide grafieken.

- b $h(x) = 1,2^x$ en $k(x) = 0,8^x$
 c De functie l is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.

39 a $f(x) = {}^2\log(5x)$ is stijgend, want het grondtal 2 is groter dan 1.

b Als x toeneemt, neemt $-x$ af.

$s(x) = {}^2\log(x)$ is stijgend, dus als $-x$ afneemt, neemt ${}^2\log(-x)$ ook af.

$f(x) = {}^2\log(-x)$ is dalend, want als x toeneemt, neemt ${}^2\log(-x)$ af.

c $g(x) = {}^{0,3}\log(x)$ is dalend, want het grondtal 0,3 ligt tussen 0 en 1.

d Als x toeneemt, neemt $-x$ af.

$t(x) = {}^{0,5}\log(x)$ is dalend, dus als $-x$ afneemt, neemt ${}^{0,5}\log(-x)$ toe.

$h(x) = {}^{0,5}\log(-x)$ is stijgend, want als x toeneemt, neemt ${}^{0,5}\log(-x)$ toe.

e Als x toeneemt, neemt $4 - x$ af.

$v(x) = {}^4\log(x)$ stijgend, dus als $4 - x$ afneemt, doet ${}^4\log(4 - x)$ dat ook.

$k(x) = 2 - {}^4\log(4 - x)$ is stijgend, want als x toeneemt, neemt $2 - {}^4\log(4 - x)$ toe.

f $q(x) = \log(x)$ is stijgend, omdat het grondtal 10 groter is dan 1.

$a(x) = \frac{1}{x}$ is voor $x > 1$ dalend, dus $p(x) = \frac{1}{\log(x)}$ is dalend.

40 a ${}^2\log(x + 3) = 0$ geeft $x + 3 = 2^0$ ofwel $x + 3 = 1$, dus $x = -2$.

b De grafiek van g is ontstaan door de grafiek van f drie eenheden naar links te verschuiven.

c Het domein van de functie g volgt uit $x + 3 > 0$, dus het domein is $\langle -3, \rightarrow \rangle$.

d $g(x) < 0$ voor $-3 < x < -2$

e De verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

f Bij spiegeling in de y -as vervang je x door $-x$

Je krijgt de grafiek van de functie $k(x) = g(-x) = {}^2\log(-x + 3)$

Bij een verschuiving van 2 naar rechts vervang je x door $x - 2$

Dan krijg je de grafiek van functie $m(x) = k(x - 2) = {}^2\log(-(x - 2) + 3)$, dus $m(x) = {}^2\log(-x + 5)$

Domein: $-x + 5 > 0$, dus $x < 5$. Het domein is $\langle \leftarrow, 5 \rangle$.

Nulpunt: $-x + 5 = 1$, dus het nulpunt is $x = 4$.

Asymptoot: $-x + 5 = 0$, dus de verticale asymptoot is $x = 5$.

41 a $f(x) = {}^3\log(x - 5)$

Domein: $x - 5 > 0$, dus het domein is $x > 5$ of ook $\langle 5, \rightarrow \rangle$

Nulpunt: ${}^3\log(x - 5) = 0$, dit geeft $x - 5 = 3^0$ ofwel $x - 5 = 1$, dus $x = 6$

Asymptoot: $x - 5 = 0$, dus de lijn $x = 5$

b $k(x) = {}^8\log(21 - 6x)$

Domein: $21 - 6x > 0$, dit geeft $6x < 21$ ofwel $x < 3\frac{1}{2}$ of ook $\langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle$

Nulpunt: ${}^8\log(21 - 6x) = 0$, dit geeft $21 - 6x = 1$ of ook $6x = 20$, dus $x = 3\frac{1}{3}$

Asymptoot: $21 - 6x = 0$, dus de lijn $x = 3\frac{1}{2}$

c $h(x) = {}^2\log(2x + 9) - 11$

Domein: $2x + 9 > 0$, dus het domein is $x > -4\frac{1}{2}$ of ook $\langle -4\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$

Nulpunt: ${}^2\log(2x + 9) - 11 = 0$, dit geeft ${}^2\log(2x + 9) = 11$ ofwel

$$2x + 9 = 2^{11} = 2048$$

$$2x = 2039, \text{ dus } x = 1019\frac{1}{2}$$

Asymptoot: $2x + 9 = 0$, dus de lijn $x = -4\frac{1}{2}$

d $g(x) = 4 + {}^{0.5}\log(x - 7)$

Domein: $x - 7 > 0$, dus het domein is $x > 7$ of ook $\langle 7, \rightarrow \rangle$

Nulpunt: $4 + {}^{0.5}\log(x - 7) = 0$, dit geeft ${}^{0.5}\log(x - 7) = -4$ ofwel

$$x - 7 = 0,5^{-4} = 16, \text{ dus } x = 23$$

Asymptoot: $x - 7 = 0$, dus de lijn $x = 7$

e $m(x) = -3 - \frac{1}{2}\log(-5x - 10)$

Domein: $-5x - 10 > 0$ ofwel $-5x > 10$, dus $x < -2$ of ook $\langle \leftarrow, -2 \rangle$

Nulpunt: $-3 - \frac{1}{2}\log(-5x - 10) = 0$, dit geeft $\frac{1}{2}\log(-5x - 10) = -3$ ofwel

$$-5x - 10 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8, \text{ dus } -5x = 18 \text{ en } x = -3\frac{3}{5}$$

Asymptoot: $-5x - 10 = 0$, dus de lijn $x = -2$

f $n(x) = x \cdot \log(5x - 1)$

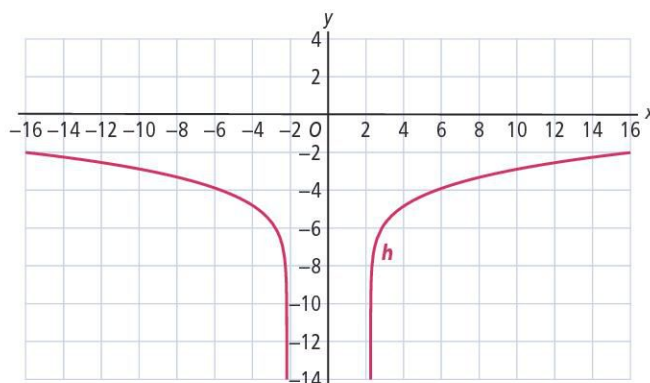
Domein: $5x - 1 > 0$ ofwel $5x > 1$, dus het domein is $x > \frac{1}{5}$ of ook $\langle \frac{1}{5}, \rightarrow \rangle$

Nulpunt: $x \cdot \log(5x - 1) = 0$ geeft $x = 0$ of $\log(5x - 1) = 0$

$$x = 0 \text{ zit niet in het domein; } 5x - 1 = 10^0 = 1 \text{ dus } 5x = 2 \text{ en } x = \frac{2}{5}$$

Asymptoot: $5x - 1 = 0$, dus de lijn $x = \frac{1}{5}$

42 a



b $x^2 - 5 > 0$, dus $x^2 > 5$

Hieruit volgt dat het domein $\langle \leftarrow, -\sqrt{5} \rangle \cup \langle \sqrt{5}, \rightarrow \rangle$ is.

c De asymptoten zijn de lijnen $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$.

d $-7 + {}^3\log(x^2 - 5) = 0$

$${}^3\log(x^2 - 5) = 7$$

$$x^2 - 5 = 3^7 = 2187$$

$$x^2 = 2192$$

De nulpunten zijn $x = -\sqrt{2192}$ en $x = \sqrt{2192}$.

7 Exponenten en logaritmen

- 039 a**
- $g(x) = 5 - x$ is dalend, want als x toeneemt, neemt $5 - x$ af.
 - $f(p) = {}^2\log(p)$ is stijgend, dus als p toeneemt, neemt ${}^2\log(p)$ toe en als p afneemt, neemt ${}^2\log(p)$ af.
 - $f(x) = {}^2\log(5 - x)$ is dalend, want als x toeneemt, neemt $5 - x$ af en dus neemt ${}^2\log(5 - x)$ af.
- b** $f(p) = {}^{0.5}\log(p)$ is dalend, dus als p toeneemt, neemt ${}^{0.5}\log(p)$ af en als p afneemt, neemt ${}^{0.5}\log(p)$ toe.
- c** $f(x) = {}^{0.5}\log(5 - x)$ is stijgend, want als x toeneemt, neemt $5 - x$ af en dus neemt ${}^{0.5}\log(5 - x)$ toe.
- d** Als x toeneemt, neemt $x + 6$ ook toe. $f(x)$ neemt toe, omdat het grondtal groter is dan 1, dus $f(x) = {}^3\log(x + 6)$ is stijgend.
- e** Als x toeneemt, neemt $-x$ af. $a(x) = {}^{0.5}\log(x)$ is een dalende functie, omdat het grondtal tussen 0 en 1 ligt, dus als $-x$ afneemt, neemt ${}^{0.5}\log(-x)$ toe. $f(x) = {}^{0.5}\log(-x)$ is stijgend, want als x toeneemt, neemt ${}^{0.5}\log(-x)$ toe.
- f** Als x toeneemt, neemt $2x$ ook toe. $g(x)$ neemt toe, omdat het grondtal groter is dan 1, dus $g(x) = {}^4\log(2x)$ is stijgend.
- g** Als x toeneemt, neemt $-x$ af. $d(x) = {}^{1.1}\log(x)$ is stijgend, dus als x toeneemt, neemt ${}^{1.1}\log(-x)$ af.
 $h(x) = {}^{1.1}\log(-x) + 8$ is dalend, want als x toeneemt, neemt ${}^{1.1}\log(-x) + 8$ af.
- h** Als x toeneemt, neemt ${}^7\log(4 + x)$ toe, want het grondtal 7 is groter dan 1, maar $-{}^7\log(4 + x)$ neemt af evenals $2 - {}^7\log(4 + x)$.
 $k(x) = 2 - {}^7\log(4 + x)$ is dalend, want als x toeneemt, neemt $2 - {}^7\log(4 + x)$ af.
- i** $s(x) = \log(x)$ is stijgend, maar $t(x) = \frac{1}{x}$ is dalend voor $x > 1$, dus
 $p(x) = \frac{5}{\log(x)}$ is dalend.

- 041 a** Voor het domein geldt $3x + 6 > 0$ ofwel $3x > -6$, dus het domein is $x > -2$ of ook $\langle -2, \rightarrow \rangle$.
- b** ${}^3\log(3x + 6) = 0$ geeft $3x + 6 = 3^0$ ofwel $3x + 6 = 1$ dus $3x = -5$ en $x = -1\frac{2}{3}$
Dus het nulpunt is $x = -1\frac{2}{3}$
- c** $3x + 6 = 0$ geeft $x = -2$, dus de lijn $x = -2$ is de verticale asymptoot.
- d** $g(x) = {}^5\log\left(8 - \frac{1}{2}x\right)$
Domein: $8 - \frac{1}{2}x > 0$ ofwel $-\frac{1}{2}x > -8$, dus domein: $x < 16$ of ook $\langle \leftarrow, 16 \rangle$
Nulpunt: ${}^5\log\left(8 - \frac{1}{2}x\right) = 0$ geeft $8 - \frac{1}{2}x = 5^0 = 1$ ofwel $-\frac{1}{2}x = -7$, dus $x = 14$
Asymptoot: $8 - \frac{1}{2}x = 0$, dus de lijn $x = 16$
- e** $h(x) = {}^2\log(2x - 4)$
Domein: $2x - 4 > 0$, ofwel $2x > 4$, dus het domein is $x > 2$ of ook $\langle 2, \rightarrow \rangle$
Nulpunt: ${}^2\log(2x - 4) = 0$ geeft $2x - 4 = 2^0 = 1$ ofwel $2x = 5$, dus $x = 2\frac{1}{2}$
Asymptoot: $2x - 4 = 0$, dus de lijn $x = 2$
- f** $k(x) = 2 + {}^5\log(25x)$
Domein: $x > 0$ of ook $\langle 0, \rightarrow \rangle$
Nulpunt: $2 + {}^5\log(25x) = 0$ ofwel ${}^5\log(25x) = -2$, dus $25x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$
en $x = \frac{1}{625}$
Asymptoot: $25x = 0$, dus de lijn $x = 0$
- g** $l(x) = 4 - {}^{0.5}\log(x - 6)$
Domein: $x - 6 > 0$, dus het domein is $x > 6$ of ook $\langle 6, \rightarrow \rangle$
Nulpunt: $4 - {}^{0.5}\log(x - 6) = 0$, ofwel ${}^{0.5}\log(x - 6) = 4$, dus $x - 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
en $x = 6\frac{1}{16}$
Asymptoot: $x - 6 = 0$, dus de lijn $x = 6$

U8 De lijn $x = -4$ is asymptoot, dus $q = 4$.
 De grafiek gaat door de oorsprong, dus $f(0) = p + {}^2\log(0 + 4) = 0$
 $p = -{}^2\log(4) = -2$
 Deze waarden voor p en q invullen geeft $f(x) = -2 + {}^2\log(x + 4)$.
 Als $f(12) = 2$, dan ligt het punt $(12, 2)$ op de grafiek van f .
 $f(12) = -2 + {}^2\log(12 + 4) = -2 + 4 = 2$, dus het punt $(12, 2)$ ligt op de grafiek van f .

U9 a Voor het domein geldt: $9x - x^2 > 0$
 $y = 9x - x^2$ is de vergelijking van een bergparabool.
 $x(9 - x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = 9$
 Voor $0 < x < 9$ ligt de bergparabool boven de x -as.
 Het domein is $0 < x < 9$ of ook $\langle 0, 9 \rangle$.
 Nulpunten: $9x - x^2 = 1$ ofwel $x^2 - 9x + 1 = 0$
 $D = 81 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 77$
 $x = \frac{9 - \sqrt{77}}{2} \approx 0,11$ of $x = \frac{9 + \sqrt{77}}{2} \approx 8,89$
 Asymptoten: $9x - x^2 = 0$, dus de lijnen $x = 0$ en $x = 9$.
b Voor het domein geldt: $x + 3 > 0$ en $3 - x > 0$ ofwel $x > -3$ en $x < 3$, dus het domein is $-3 < x < 3$ of ook $\langle -3, 3 \rangle$.
 Nulpunt: $\log(x + 3) - \log(3 - x) = 0$
 $\log(x + 3) = \log(3 - x)$
 $x + 3 = 3 - x$
 $2x = 0$, dus $x = 0$.
 Asymptoten: de lijnen $x = -3$ en $x = 3$.

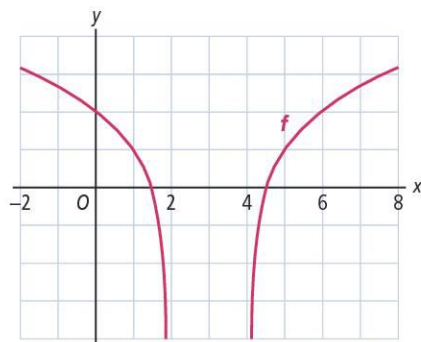
7.6 Gemengde opdrachten

- 43 a** fout, want $4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{x+2}$ en $8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$
b goed, want $4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{x+2}$
c goed, want $4^x \cdot 2^x = (4 \cdot 2)^x = 8^x$
d fout, want $8^x \cdot 2^x = (2^3)^x \cdot 2^x = 2^{3x} \cdot 2^x = 2^{4x}$
e fout, want $\frac{4}{2^x} = 2^2 \cdot 2^{-x} = 2^{2-x}$
f fout, kies bijvoorbeeld $x = 2$, dan is $2^2 + 4^2 = 20$ en $6^2 = 36$
g fout, kies bijvoorbeeld $x = 2$, dan is $4 + 2^2 = 8$ en $2^{2+2} = 16$
h fout, want $4^x \cdot 2^x = 2^{2x} \cdot 2^x = 2^{3x}$
i fout, want $4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{2+x}$
j goed, want $\frac{4^x}{2^x} = \left(\frac{4}{2}\right)^x = 2^x$
- 44 a** $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 2^2 \cdot (2^{-1})^{2x} = 2^2 \cdot 2^{-2x} = 2^{2-2x}$, dus $f(x) = g(x)$
b $4^{0,5(x+1)} = (2^2)^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} = 2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$, dus $f(x) = 2 \cdot 2^x$
c $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} = 1\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^x = 1\frac{1}{2} \cdot 4^x$, dus $f(x) = 1\frac{1}{2} \cdot 4^x$

7 Exponenten en logaritmen

- 45 a** Domein: $x^2 + 1 > 0$ geldt voor elke waarde van x , dus het domein is $\mathbb{R}$.
 Bereik: $x^2 + 1 \geq 1$, dus ${}^2\log(x^2 + 1) \geq 0$, dus het bereik is $[0, \rightarrow)$.
- b** $x^2 + 1$ is minimaal 1 voor $x = 0$ en $f(0) = {}^2\log(0^2 + 1) = {}^2\log(1) = 0$, dus de oorsprong is de top van f .
- c** Het domein van f is $\mathbb{R}$, er is dus geen asymptoot.
- d** ${}^2\log(x^2 + 1) = 6$
 $x^2 + 1 = 2^6$
 $x^2 + 1 = 64$
 $x^2 = 63$
 $x = -\sqrt{63}$ of $x = \sqrt{63}$
 $x = -3\sqrt{7}$ of $x = 3\sqrt{7}$

46 a



- b** Voor het domein geldt $x^2 - 6x + 8 > 0$
 $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x - 4)(x - 2) = 0$
 $x = 2$ of $x = 4$
 $y = x^2 - 6x + 8$ is de vergelijking van een dalparabool, dus
 $x^2 - 6x + 8 > 0$ als $x < 2$ of $x > 4$, dus het domein is $\langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$
 Het bereik van f is $\mathbb{R}$
- c** De asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = 4$
- d** $\log(x^2 - 6x + 8) = 0$, dus $x^2 - 6x + 8 = 1$
 $x^2 - 6x + 7 = 0$
 $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 36 - 28 = 8$
 $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
 $x = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2}$ of $x = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2}$

47 a $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$

$$2^4 \cdot 2^{x-6} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{x-2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$x - 2 = \frac{1}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

b $15 \cdot 3^{x+2} + 18 = 93$

$$15 \cdot 3^{x+2} = 75$$

$$3^{x+2} = 5$$

$$x + 2 = {}^3\log(5)$$

$$x = {}^3\log(5) - 2$$

c $1 - {}^2\log(4x + 1) = -4$

$${}^2\log(4x + 1) = 5$$

$$4x + 1 = 2^5$$

$$4x + 1 = 32$$

$$4x = 31$$

$$x = 7\frac{3}{4}$$

d ${}^4\log(2x) + {}^4\log(2x) = 6$

$$2 \cdot {}^4\log(2x) = 6$$

$${}^4\log(2x) = 3$$

$$2x = 4^3 = 64$$

$$x = 32$$

$$\begin{aligned}
 \text{e } 2 - {}^4\log(x+3) &= -\frac{1}{2} \\
 {}^4\log(x+3) &= 2\frac{1}{2} \\
 x+3 &= 4^{2\frac{1}{2}} \\
 x+3 &= 4^2 \cdot 4^{\frac{1}{2}} \\
 x+3 &= 16 \cdot \sqrt{4} \\
 x+3 &= 32 \\
 x &= 29
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f } \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x) &= -3 \\
 x^2 - 2x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\
 x^2 - 2x &= 8 \\
 x^2 - 2x - 8 &= 0 \\
 (x+2)(x-4) &= 0 \\
 x &= -2 \text{ of } x = 4
 \end{aligned}$$

Onderzoeksoopdrachten

- 48 a** 100 km komt overeen met $\frac{1}{400}$ cirkelboog, dus de hoek is $\frac{360}{400} = 0,9^\circ$

$D = 0,9^\circ$ en $U = 0,001$ invullen in de formule geeft

$$R = \log(0,001) + 1,66 \cdot \log(0,9) + 3,08 = 0,004042 \dots, \text{ dus } R \approx 0.$$

- b** $R = 9,0$ en $D = 84^\circ$ invullen geeft

$$9,0 = \log(U) + 1,66 \cdot \log(84) + 3,08$$

$$5,92 = \log(U) + 1,66 \cdot \log(84)$$

$$\log(U) = \frac{5,92}{1,66 \cdot \log(84)}$$

$$\log(U) = 1,8532 \dots$$

$$U = 10^{1,8532 \dots} \approx 71$$

De uitwijking in Nederland was ongeveer 71 millimeter.

- 49 a** zie grafiek.

- b** De grafiek is geen rechte lijn en wortelfuncties zijn afnemend stijgend.

- c** $N(0) = 3$, dus de functie is van de vorm

$$N_1 = 3 + t^a \text{ of van de vorm } N_2 = 3 \cdot g^t$$

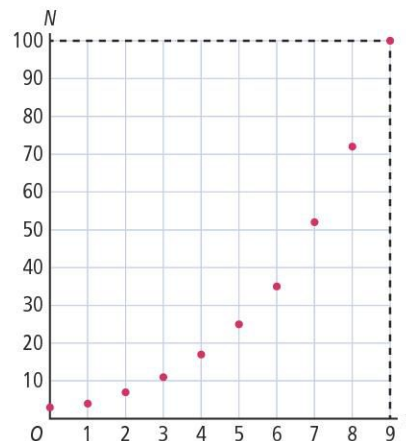
$$N(9) = 100 \text{ invullen geeft}$$

$$100 = 3 + 9^a \text{ of } 100 = 3 \cdot g^9$$

$$9^a = 97 \quad \text{of } g^9 = 33\frac{1}{3}$$

$$a = {}^9\log(97) \approx 2,08 \text{ of } g = \left(33\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{9}} \approx 1,48$$

$$\text{dus } N_1 = 3 + t^{2,08} \text{ of } N_2 = 3 \cdot 1,48^t$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	3	4	7	11	17	25	35	52	72	100
N_1	3	4	7	13	21	31	45	60	79	100
N_2	3	4	7	10	14	21	32	47	69	102

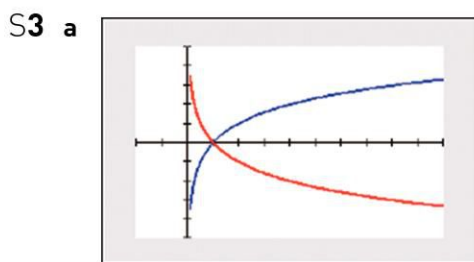
Uit de tabel blijkt dat N_2 het best voldoet.

7 Exponenten en logaritmen

Samenvatting

- S1** a g en h zijn stijgend, want het grondtal is groter dan 1.
 b Alleen voor g geldt $g(0) = 2, 1^0 = 1$
 c Van de functie f is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 Van de functie k is het domein $\mathbb{R}$ en het bereik $\langle \leftarrow, 0 \rangle$.

- S2** a ${}^3\log(7)$ is de exacte oplossing van de vergelijking $3^x = 7$.
 b De exacte oplossing van $2^x = 18$ is $x = {}^2\log(18)$



Het snijpunt is $(1, 0)$.

- b** $h(x) = 2^x$ en $k(x) = 0,5^x$
c De grafieken van f en g hebben de y -as als asymptoot;
 de grafieken van h en k hebben de x -as als asymptoot.
S4 a $g(x) = 6 \cdot 2^{3x}$
b spiegelen in de x -as geeft $p(x) = -3 \cdot 2^{3x}$ en
 daarna 3 omlaag verschuiven geeft $h(x) = -3 \cdot 2^{3x} - 3$
c 3 omlaag verschuiven geeft $p(x) = 3 \cdot 2^{3x} - 3$ en
 daarna spiegelen in de x -as geeft $k(x) = -(3 \cdot 2^{3x} - 3) = -3 \cdot 2^{3x} + 3$
d vermenigvuldigen met -4 ten opzichte van de x -as geeft $p(x) = -12 \cdot 2^{3x}$ en
 daarna spiegelen in de y -as geeft $m(x) = -12 \cdot 2^{-3x}$
e spiegelen in de y -as geeft $p(x) = 3 \cdot 2^{-3x}$ en
 daarna 4 naar links verschuiven geeft $n(x) = 3 \cdot 2^{-3(x+4)}$
 ofwel $n(x) = 3 \cdot 2^{-3x-12}$

- S5** a $2^{3t} = 4 \cdot 2^{3+t}$
 $2^{3t} = 2^2 \cdot 2^{3+t}$
 $2^{3t} = 2^{5+t}$
 $3t = 5 + t$
 $2t = 5$
 $t = 2\frac{1}{2}$
b $4^{2t-1} = 32^t$
 $(2^2)^{2t-1} = (2^5)^t$
 $2^{4t-2} = 2^{5t}$
 $4t - 2 = 5t$
 $t = -2$
c $6 \cdot 5^{t+8} = 36$
 $5^{t+8} = 6$
 $t + 8 = {}^5\log(6)$
 $t = {}^5\log(6) - 8$
d $\frac{1}{5} \cdot 25^{3t} = 10$
 $25^{3t} = 50$
 $3t = {}^{25}\log(50)$
 $t = \frac{1}{3} \cdot {}^{25}\log(50)$

- S6 a** ${}^8\log(x) = 2$
 $x = 8^2$
 $x = 64$
- b** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 9) = 3$
 $x + 9 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
 $x = -8\frac{7}{8}$
- c** ${}^3\log(4x) = 4$
 $4x = 3^4 = 81$
 $x = 20\frac{1}{4}$
- d** ${}^5\log(5x - 100) = 3$
 $5x - 100 = 5^3 = 125$
 $5x = 225$
 $x = 45$
- S7 a** ${}^5\log(90) = \frac{\log(90)}{\log(5)} \approx 2,796$
- b** ${}^{10}\log(12480) \approx 4,096$
- c** ${}^{12}\log(0,01) = \frac{\log(0,01)}{\log(12)} \approx -1,853$
- d** ${}^{0,78}\log(2) = \frac{\log(2)}{\log(0,78)} \approx -2,790$
- S8 a** ${}^4\log(32) = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(4)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
- b** ${}^9\log(243) = \frac{{}^3\log(243)}{{}^3\log(9)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
- c** ${}^{\frac{1}{4}}\log(32) = \frac{{}^2\log(32)}{{}^2\log(\frac{1}{4})} = \frac{5}{-2} = -2\frac{1}{2}$
- d** ${}^{16}\log(1024) = \frac{{}^2\log(1024)}{{}^2\log(16)} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$
- S9 a** Voor het domein geldt $2 - x > 0$ dus $x < 2$ of ook $\langle \leftarrow, 2 \rangle$, het bereik is $\mathbb{R}$
 Asymptoot: $2 - x = 0$, dus de lijn $x = 2$
 Nulpunt: $2 - x = 1$, dus $x = 1$
- b** Voor het domein geldt $x > 0$ of ook $\langle 0, \rightarrow \rangle$, het bereik is $\mathbb{R}$
 Asymptoot: de lijn $x = 0$
 Nulpunt: $2 - {}^3\log(x) = 0$ geeft ${}^3\log(x) = 2$, dus $x = 3^2 = 9$
- c** Voor het domein geldt $7 - 2x > 0$ dus $x < 3\frac{1}{2}$ of ook $\langle \leftarrow, 3\frac{1}{2} \rangle$, het bereik is $\mathbb{R}$.
 Asymptoot: $7 - 2x = 0$, dus de lijn $x = 3\frac{1}{2}$
 Nulpunt: ${}^{\frac{1}{3}}\log(7 - 2x) + 1 = 0$ geeft ${}^{\frac{1}{3}}\log(7 - 2x) = -1$
 $7 - 2x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$
 $2x = 4$, dus $x = 2$
- d** Voor het domein geldt $3x + 3 > 0$ dus $x > -1$ of ook $\langle -1, \rightarrow \rangle$, het bereik is $\mathbb{R}$
 Asymptoot: $3x + 3 = 0$, dus de lijn $x = -1$
 Nulpunt: $3 - {}^6\log(3x + 3) = 0$ geeft ${}^6\log(3x + 3) = 3$
 $3x + 3 = 6^3 = 216$
 $3x = 213$, dus $x = 71$

Test jezelf

- T1 a** g is stijgend, want het grondtal is groter dan 1.
 $p(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ is dalend, want het grondtal is kleiner dan 1,
 dus $h(x) = -p(x)$ is stijgend.
- b** Bij functie f hoort grafiek D.
 Bij functie g hoort grafiek C.
 Bij functie h hoort grafiek B.
 Bij functie j hoort grafiek A.
- c** De lijn $y = 3$ is asymptoot van de grafiek van f .
 De lijn $y = 0$ is asymptoot van de grafieken van g en h .
 De lijn $y = 1$ is asymptoot van de grafiek van j .

7 Exponenten en logaritmen

- d** $f(0) = -2,5^0 + 3 = -1 + 3 = 2$, dus het snijpunt van f met de y -as is $(0, 2)$.
 $-2,5^x + 3 = 0$ geeft $2,5^x = 3$, dus $x = {}^{2,5}\log(3)$.
 Het snijpunt van f met de x -as is $({}^{2,5}\log(3), 0)$

$g(0) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$, dus het snijpunt van g met de y -as is $(0, \frac{1}{3})$.
 De grafiek van g snijdt de x -as niet.

$h(0) = -3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 = -3 \cdot 1 = -3$, dus het snijpunt van h met de y -as is $(0, -3)$.
 De grafiek van h snijdt de x -as niet.

$j(0) = 3 \cdot 0,4^0 + 1 = 3 + 1 = 4$, dus het snijpunt van j met de y -as is $(0, 4)$.
 De grafiek van j snijdt de x -as niet.

- e** $f(x) = -2,5^x + 3$
 Een verschuiving 4 omlaag geeft $a(x) = -2,5^x + 3 - 4 = -2,5^x - 1$, daarna een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $-\frac{1}{2}$ geeft
 $b(x) = -\frac{1}{2}(-2,5^x - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2,5^x + \frac{1}{2}$
 Tenslotte geeft spiegelen in de y -as $c(x) = \frac{1}{2} \cdot 2,5^{-x} + \frac{1}{2}$

- T2 a** Het temperatuurverschil is $25 - 5 = 20$ graden.
 De groeifactor van het verschil is 0,925 per minuut.
 Na 1 minuut is het temperatuurverschil met de omgeving nog
 $20 \times 0,925 = 18,5^\circ$. De temperatuur van het blikje is dan $25 - 18,5 = 6,5^\circ$.
 Na 5 minuten is de temperatuur van het blikje $25 - 20 \times 0,925^5 \approx 11,5^\circ$.
 Na 10 minuten is de temperatuur van het blikje $25 - 20 \times 0,925^{10} \approx 15,8^\circ$.
- b** $T(t) = 25 - 20 \cdot 0,925^t$
- c** $25 - 20 \cdot 0,925^t = 10$, dus $20 \cdot 0,925^t = 15$ en $0,925^t = \frac{3}{4}$
 $t = {}^{0,925}\log\left(\frac{3}{4}\right) \approx 3,7$
 Dus na ongeveer 3,7 minuut is de temperatuur van 10° bereikt.

- T3** $\frac{1}{2}\log(2) = -1$, want en dat is negatief.
 ${}^2\log(4) = 2$ en dat is positief.
 $g(x) = \frac{1}{3}\log(x)$ is een dalende functie met $g(1) = 0$.
 Omdat $\frac{1}{4} < 1$ is $\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{4}\right)$ positief.
 ${}^2\log(1) = 0$ en dat is niet negatief.
 $h(x) = {}^2\log(x)$ is een stijgende functie met $h(1) = 0$.
 Omdat $\frac{1}{5} < 1$ is ${}^2\log\left(\frac{1}{5}\right)$ negatief.
 $k(x) = {}^5\log(x)$ is een stijgende functie met $k(1) = 0$.
 Omdat $\frac{1}{3} < 1$ is ${}^5\log\left(\frac{1}{3}\right)$ negatief.
 $l(x) = {}^3\log(x)$ is een stijgende functie met $l(1) = 0$.
 Omdat $0,9 < 1$ is ${}^3\log(0,9)$ negatief.

- T4 a** ${}^3\log(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$, want $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
- b** ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = -3$, want $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- c** $\frac{1}{5}\log(125) = -3$, want $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = (5^{-1})^{-3} = 5^3 = 125$
- d** $\frac{1}{3}\log(1) = 0$, want $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
- e** ${}^{16}\log\left(\frac{1}{32}\right) = \frac{{}^2\log\left(\frac{1}{32}\right)}{{}^2\log(16)} = \frac{{}^2\log(2^{-5})}{{}^2\log(2^4)} = \frac{-5}{4} = -1\frac{1}{4}$
- f** $\sqrt[125]{\log\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{{}^5\log\left(\frac{1}{5}\right)}{{}^5\log(\sqrt{125})} = \frac{{}^5\log(5^{-1})}{{}^5\log((5^3)^{\frac{1}{5}})} = \frac{{}^5\log(5^{-1})}{{}^5\log(5^{\frac{3}{5}})} = \frac{-1}{1\frac{3}{5}} = -\frac{2}{3}$

$$\text{T5 a } 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,3-x} - 4 = 2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{0,3-x} = 3$$

$$(3^{-1})^{0,3-x} = 3$$

$$3^{x-0,3} = 3^1$$

$$x - 0,3 = 1$$

$$x = 1,3$$

b f is een stijgende functie, dus $1,3 < x < 2,3$

$$\text{c } 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,3-x} - 4 = 50$$

$$(3^{-1})^{0,3-x} = 27$$

$$(3^{-1})^{0,3-x} = 3^3$$

$$x - 0,3 = 3$$

$$x = 3,3$$

f is een stijgende functie, dus $x \geq 3,3$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,3-x} - 4 = 14$$

$$(3^{-1})^{0,3-x} = 9$$

$$3^{x-0,3} = 3^2$$

$$x - 0,3 = 2$$

$$x = 2,3$$

$$\text{T6 a } 3^{4k} = 5$$

$$4k = {}^3\log(5)$$

$$k = \frac{1}{4} \cdot {}^3\log(5) \approx 0,37$$

$$\text{b } \frac{1}{3} \cdot 2^{2x} = 42\frac{2}{3}$$

$$2^{2x} = 128$$

$$2^{2x} = 2^7$$

$$2x = 7$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

$$\text{d } \left(\frac{1}{3}\right)^p = 3\sqrt{2}$$

$$p = {}^{\frac{1}{3}}\log(3\sqrt{2}) \approx -0,90$$

$$\text{e } \sqrt[3]{3^x} \geq \frac{1}{27}$$

$$(3^x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^3}$$

$$3^{\frac{1}{3}x} = 3^{-3}$$

$$x = -6$$

$f(x) = 3^{\frac{1}{3}x}$ is een stijgende functie, dus $x \geq -6$

$$\text{c } 3^{-x} = 81\sqrt{27}$$

$$3^{-x} = 3^4(3^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{-x} = 3^{5\frac{1}{2}}$$

$$x = -5\frac{1}{2}$$

$$\text{f } 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 4^{3t}$$

$$2^4 \cdot 2^{-t} = (2^2)^{3t}$$

$$2^{4-t} = 2^{6t}$$

$$4 - t = 6t$$

$$7t = 4$$

$$t = \frac{4}{7}$$

Als t toeneemt, wordt $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

kleiner en 4^{3t} groter, dus $t \geq \frac{4}{7}$

T7 a Als x toeneemt, neemt $6 - 3x$ af en omdat $a(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(x)$ dalend is, neemt $f(x)$ dan toe. Dus f is een stijgende functie.

b Als x toeneemt, neem $\frac{1}{x}$ af en omdat $b(x) = {}^2\log(x)$ een stijgende functie is, neemt $g(x)$ ook af. Dus g is een dalende functie.

c Als x toeneemt, neemt $-x$ af en omdat $c(x) = \log(x)$ een stijgende functie is, neemt $d(x) = \log(-x)$ ook af. Omdat $e(x) = \frac{1}{x}$ een dalende functie is, neemt $h(x)$ dan toe. Dus h is een stijgende functie.

7 Exponenten en logaritmen

- T8 a** De drie grafieken hebben dezelfde asymptoot omdat $2x - 1$ en $1 - 2x$ beide nul zijn voor $x = \frac{1}{2}$.
- b** De functies g en h hebben hetzelfde domein. In beide gevallen volgt het domein uit de ongelijkheid $1 - 2x > 0$ ofwel $x < \frac{1}{2}$.
- c** Het domein van f volgt uit $2x - 1 > 0$ en is $\langle \frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$, dus bij f hoort grafiek B. Van de andere twee is g een dalende functie, want als x toeneemt, neemt $1 - 2x$ af, en omdat $a(x) = {}^3\log(x)$ een stijgende functie is, neemt g ook af. Dus bij g hoort grafiek A en dus hoort grafiek C bij h .

T9 a ${}^3\log(3x + 3) = 3$
 $3x + 3 = 3^3$
 $3x + 3 = 27$
 $3x = 24$
 $x = 8$

d ${}^3\log(3x^2 + 4x) = 0$
 $3x^2 + 4x = 1$
 $3x^2 + 4x - 1 = 0$
 $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 28$
 $\sqrt{28} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

$$x = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{6} \text{ of } x = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{6}$$

$$x = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \text{ of } x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

b ${}^2\log(2x - 6) = 4$
 $2x - 6 = 2^4 = 16$
 $2x = 22$
 $x = 11$

e ${}^2\log(3x - 4) = 7$
 $3x - 4 = 2^7 = 128$
 $3x = 132$
 $x = 44$

c $3 - \log(x + 2) = 2\frac{1}{3}$
 $\log(x + 2) = \frac{2}{3}$
 $x + 2 = 10^{\frac{2}{3}}$
 $x = \sqrt[3]{100} - 2$

f ${}^{\frac{1}{2}}\log(8 - x^2) = -1$
 $8 - x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
 $x^2 = 6$
 $x = -\sqrt{6} \text{ of } x = \sqrt{6}$

- T10 a** $\frac{1}{3}x + 4 > 0$ ofwel $\frac{1}{3}x > -4$, dus $x > -12$. Het domein is $x > -12$ of ook $\langle -12, \rightarrow \rangle$.
- b** De verticale asymptoot is de lijn $x = -12$.
- c** ${}^3\log\left(\frac{1}{3}x + 4\right) = 2$
 $\frac{1}{3}x + 4 = 3^2$
 $\frac{1}{3}x + 4 = 9$
 $\frac{1}{3}x = 5$
 $x = 15$
 uit een plot blijkt dat $f(x) \leq 2$ als $-12 < x < 15$

Extra oefening

- E1 a** Na de verschuiving 2 omhoog krijg je $p(x) = 2 \cdot 5^x + 2$ en na de vermenigvuldiging: $g(x) = 3(2 \cdot 5^x + 2)$ ofwel $g(x) = 6 \cdot 5^x + 6$.
- b** Na de spiegeling in de x -as krijg je $p(x) = -(2 \cdot 5^x + 2) = -2 \cdot 5^x - 2$ en na de verschuiving 3 naar links $h(x) = -2 \cdot 5^{x+3} - 2$.
- c** Na de spiegeling in de x -as krijg je $p(x) = -(2 \cdot 5^x + 2) = -2 \cdot 5^x - 2$ en na de spiegeling in de y -as $k(x) = -2 \cdot 5^{-x} - 2$.

$$\begin{aligned} \text{E2 a } 9^t &= 3 \cdot 3^{2+t} \\ (3^2)^t &= 3^1 \cdot 3^{2+t} \\ 3^{2t} &= 3^{3+t} \\ 2t &= 3+t \\ t &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t} &= 2^{-t+2} \\ (2^{-1})^{1-t} &= 2^{-t+2} \\ 2^{-1+t} &= 2^{-t+2} \\ -1+t &= -t+2 \\ 2t &= 3 \\ t &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 4^{t-1} &= 8^t \\ (2^2)^{t-1} &= (2^3)^t \\ 2^{2t-2} &= 2^{3t} \\ 2t-2 &= 3t \\ t &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 45 \cdot 3^{t+7} &= 90 \\ 3^{t+7} &= 2 \\ t+7 &= {}^3\log(2) \\ t &= {}^3\log(2) - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E3 a } \log(3-2x) &= -1 \\ 3-2x &= 10^{-1} \\ 3-2x &= \frac{1}{10} \\ 2x &= 2\frac{9}{10} \\ x &= 1\frac{9}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } {}^{\frac{1}{3}}\log(2x) &= 3 \\ 2x &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ 2x &= \frac{1}{8} \\ x &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } {}^3\log(6+3x) &= 4 \\ 6+3x &= 3^4 \\ 6+3x &= 81 \\ 3x &= 75 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } {}^{\frac{1}{4}}\log(5x-1) &= -2 \\ 5x-1 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \\ 5x-1 &= 16 \\ 5x &= 17 \\ x &= 3\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{E4 a } {}^{100}\log(175) = \frac{\log(175)}{\log(100)} \approx 1,122$$

$$\text{c } {}^{0,3}\log(23,78) \approx -2,632$$

$$\text{b } {}^{1,5}\log(75) \approx 10,648$$

$$\text{d } {}^{\frac{1}{4}}\log(15) \approx -1,953$$

$$\text{E5 a } {}^5\log(125\sqrt{5}) = {}^5\log(5^3 \cdot 5^{\frac{1}{2}}) = {}^5\log(5^{3\frac{1}{2}}) = 3\frac{1}{2}$$

$$\text{b } {}^{\frac{1}{3}}\log(9) = \frac{{}^3\log(9)}{{}^3\log(\frac{1}{3})} = \frac{{}^3\log(3^2)}{{}^3\log(3^{-1})} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\text{c } {}^{25}\log(125) = \frac{{}^5\log(125)}{{}^5\log(25)} = \frac{{}^5\log(5^3)}{{}^5\log(5^2)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{d } {}^{32}\log(64) = \frac{{}^2\log(64)}{{}^2\log(32)} = \frac{{}^2\log(2^6)}{{}^2\log(2^5)} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

$$\text{E6 a } f(x) = {}^3\log(12-3x)$$

Voor het domein geldt $12-3x > 0$ ofwel $-3x > -12$ dus $x < 4$ of ook $\langle \leftarrow, 4 \rangle$

Het bereik is $\mathbb{R}$

Asymptoot: $12-3x = 0$, dus de asymptoot is de lijn $x = 4$

Nulpunt: ${}^3\log(12-3x) = 0$, dus $12-3x = 1$ ofwel $3x = 11$, dus $x = 3\frac{2}{3}$

7 Exponenten en logaritmen

b $g(x) = 3 + \frac{1}{3}\log(4x - 28)$

Voor het domein geldt $4x - 28 > 0$, dus $4x > 28$ ofwel $x > 7$ of ook $\langle 7, \rightarrow \rangle$

Het bereik is $\mathbb{R}$

Asymptoot: $4x - 28 = 0$, dus de asymptoot is de lijn $x = 7$

Nulpunt: $3 + \frac{1}{3}\log(4x - 28) = 0$

$$\frac{1}{3}\log(4x - 28) = -3$$

$$4x - 28 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \text{ dus } 4x = 36, \text{ ofwel } x = 9$$

c $h(x) = \frac{1}{5}\log(-5x)$

Voor het domein geldt $-5x > 0$, dus het domein is $x < 0$ of ook $\langle \leftarrow, 0 \rangle$.

Het bereik is $\mathbb{R}$

Asymptoot: de lijn $x = 0$

Nulpunt: $-5x = 1$, dus $x = -\frac{1}{5}$

d $k(x) = \log(x^2 - 100)$

Voor het domein geldt $x^2 - 100 > 0$ ofwel $x^2 > 100$, dus het domein is

$x < -10$ of $x > 10$ of ook $\langle \leftarrow, -10 \rangle \cup \langle 10, \rightarrow \rangle$.

Het bereik is $\mathbb{R}$

Asymptoten: de lijnen $x = -10$ en $x = 10$

Nulpunten: $x^2 - 100 = 1$, dus $x^2 = 101$ en dit geeft $x = -\sqrt{101}$ en $x = \sqrt{101}$

E7 a $3^{1-2t} = 15$

$$1 - 2t = {}^3\log(15)$$

$$-2t = {}^3\log(15) - 1$$

$$t = -\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(15) + \frac{1}{2} \approx -0,73$$

c $(2,7)^{3t+2} = 127$

$$3t + 2 = {}^{2,7}\log(127)$$

$$3t = {}^{2,7}\log(127) - 2$$

$$t = \frac{1}{3} \cdot {}^{2,7}\log(127) - \frac{2}{3} \approx 0,96$$

b $\left(\frac{1}{3}\right)^{3t} = 26$

$$3t = \frac{1}{3}\log(26)$$

$$t = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\log(26) \approx -0,99$$

d $\left(\frac{3}{2^t}\right)^3 = 64 = 4^3$

$$\frac{3}{2^t} = 4$$

$$2^t = \frac{3}{4}$$

$$t = {}^2\log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,42$$

E8 a $5^{2t} = 125^{1-t}$

$$5^{2t} = (5^3)^{1-t}$$

$$5^{2t} = 5^{3-3t}$$

$$2t = 3 - 3t$$

$$5t = 3$$

$$t = \frac{3}{5}$$

d $16 \cdot 0,5^x \geq 0,125$

$$2^4 \cdot 2^{-x} \geq 2^{-3}$$

$$2^{4-x} \geq 2^{-3}$$

Omdat $f(x) = 2^x$ een stijgende

functie is, geldt $4 - x \geq -3$ dus

$$-x \geq -7 \text{ ofwel } x \leq 7$$

b $32 \cdot 2^t = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$$2^5 \cdot 2^t = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{5+t} = 2^{-1\frac{1}{2}}$$

$$5 + t = -1\frac{1}{2}$$

$$t = -6\frac{1}{2}$$

e $0,25^{t-3} < 7$

Omdat $f(x) = 0,25^x$ een dalende

functie is, geldt $t - 3 > {}^{0,25}\log(7)$

$$\text{ofwel } t > {}^{0,25}\log(7) + 3$$

c $3^{2x+3} = 44$

$$2x + 3 = {}^3\log(44)$$

$$2x = {}^3\log(44) - 3$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(44) - 1\frac{1}{2}$$

f $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{16}$

$$2^4 \cdot (2^{-2})^x \geq 2^{-4}$$

$$2^{4-2x} \geq 2^{-4}$$

omdat $f(x) = 2^x$ een stijgende

functie is, geldt $4 - 2x \geq -4$, dus

$$-2x \geq -8 \text{ ofwel } x \leq 4$$

- E9 a** Voor het domein geldt $-x^2 + 12x - 27 > 0$, dus $x^2 - 12x + 27 < 0$ of ook $(x - 3)(x - 9) < 0$
 Uit de grafiek volgt dat het domein is $3 < x < 9$ of ook $\langle 3, 9 \rangle$.
- b** $-x^2 + 12x - 27 = 1$
 $x^2 - 12x + 28 = 0$
 $D = 12^2 - 4 \cdot 28 = 32$ en $\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
 $x = \frac{12 - 4\sqrt{2}}{2} = 6 - 2\sqrt{2}$ of $x = \frac{12 + 4\sqrt{2}}{2} = 6 + 2\sqrt{2}$
- c** De nulpunten van g zijn 3 en 9, zie opgave a.
 De x -coördinaat van de top van de grafiek van g is dus 6.
 $g(6) = -36 + 72 - 27 = 9$, dus de maximale waarde die functie g heeft is 9.
- d** Het maximum van f is $f(6) = {}^3\log(9) = 2$.
- E10 a** Als x toeneemt, neemt $1 - 3x$ af. Omdat $p(x) = {}^{1/2}\log(x)$ stijgend is, neemt ${}^{1/2}\log(1 - 3x)$ ook af. Dus f is een dalende functie.
- b** Als x toeneemt, neemt $x - 8$ ook toe en omdat $p(x) = {}^4\log(x)$ een stijgende functie is, neemt ${}^4\log(x - 8)$ ook toe. Dan neemt $25 - {}^4\log(x - 8)$ af.
 Dus g is een dalende functie.
- E11 a** Bij $t = 0$ is $S = 1000$, dus $b - a \cdot 2,7^0 = 1000$ ofwel $b - a = 1000$.
 Als t heel groot wordt, nadert S naar 5000.
 $2,7^{-t}$ nadert dan tot 0. Dus $S = b = 5000$.
 Omdat $b - a = 1000$ is $a = 4000$.
- b** $5000 - 4000 \cdot 2,7^{-t} = 4000$
 $5 - 4 \cdot 2,7^{-t} = 4$
 $4 \cdot 2,7^{-t} = 1$
 $2,7^{-t} = \frac{1}{4}$
 $-t = {}^{2,7}\log\left(\frac{1}{4}\right)$
 $t = -{}^{2,7}\log\left(\frac{1}{4}\right) \approx 1,4$
 Na ongeveer 1,4 maanden werden er 4000 producten verkocht.
- E12 a** $(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 5^{1-x}$
 $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}x} = 5^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{1-x}$
 $5^{\frac{1}{4}x} = 5^{\frac{1}{2}-x}$
 $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2} - x$
 $1\frac{1}{4}x = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{2}{5}$
- b** Uit de plot van de grafieken van f en g lees je af dat $f(x) \leq g(x)$ als $x \leq \frac{2}{5}$