

FLEX

MODERNE WISKUNDE

B


$$W = \frac{L}{1 + (L-1) \cdot g^t}$$



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo B deel 4

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 5	A 3	B 3			
			A 3	C 3	B 3
klas 6			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 22

© 2022 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u [her]gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89205-0

© Noordhoff Uitgevers bv

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo B deel 4

Jeroen van den Boom

Bert Boon

Ferdi Doddema

Wim Doekes

Colin Roll

Geertrui Schaberg

Ron Sinkeldam

Carolijn Tacken

Moderne Wiskunde

vwo B deel 4

19 Bewegingsvergelijkingen 6

- Voorkennis 8
- 19.1 Bewegen langs een lijn of een cirkel 10
- 19.2 Werken met bewegingsvergelijkingen 14
- 19.3 Snelheid en raaklijn 18
- 19.4 Versnelling 22
- 19.5 Gemengde opdrachten 26
 - Onderzoeksopdrachten 27
 - Samenvatting 28
 - Test jezelf 32
 - Extra oefening 34

20 Goniometrische formules 36

- Voorkennis 38
- 20.1 Somformules 40
- 20.2 Vergelijkingen 44
- 20.3 Goniometrische functies onderzoeken 48
- 20.4 Parametervoorstellingen 52
- 20.5 Gemengde opdrachten 56
 - Onderzoeksopdrachten 57
 - Samenvatting 58
 - Test jezelf 62
 - Extra oefening 64
- Vaardigheden 10 66**
 - Tweedegraads functies 68
 - Formules herleiden 69
 - Vergelijkingen en ongelijkheden 71
 - Limieten en asymptoten 73

21 Afsluiting analyse 74

- Voorkennis 76
- 21.1 Limieten en perforaties 78
- 21.2 Functies met absolute waarden 82
- 21.3 Extreme waarden en buigpunten 86
- 21.4 Scheve asymptoten 90
- 21.5 Functies onderzoeken 94
- 21.6 Gemengde opdrachten 98
 - Onderzoeksopdrachten 99
 - Samenvatting 100
 - Test jezelf 104

22 Afsluiting meetkunde 106

- Voorkennis 108
- 22.1 Lijnen en cirkels 110
- 22.2 Afstanden en hoeken 114
- 22.3 Zwaartepunten 118
- 22.4 Redeneren en rekenen 122
- 22.5 Gemengde opdrachten 126
 - Onderzoeksopdrachten 127
 - Samenvatting 128
 - Test jezelf 132

Vaardigheden 11 134

- Inverse functies 136
- Differentiëren 136
- Integreren 138
- Transformaties 140
- Symmetrie 141

Examenvorbereiding 142

- Functies, grafieken en vergelijkingen 144
- Differentiëren 158
- Integreren 164
- Exponentiële functies en logaritmische functies 170
- Goniometrie 176
- Meetkunde en vectoren 182
- Lijnen en cirkels 192
- Bewegingsvergelijkingen 207
- Hints bij de examenopdrachten 212
- Formuleblad 215
- Examenwerkwoorden 216

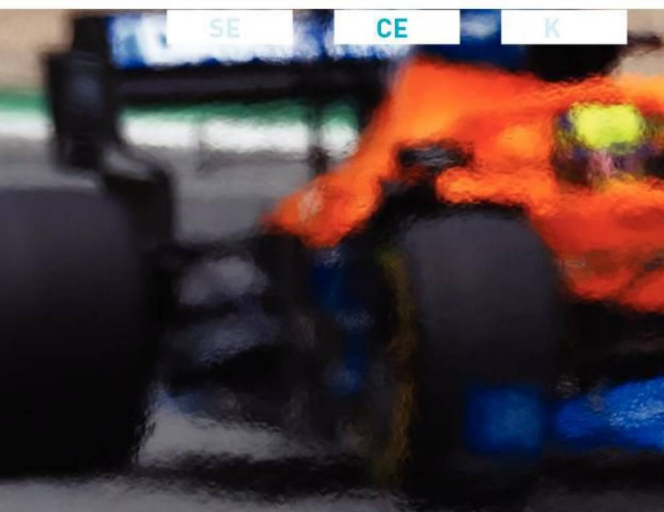
Extra 218

- Meer oefenen 220
- Oefenproefwerken 224

Werkbladen 232

Trefwoorden 234

Bewegingsvergelijkingen 19



In dit hoofdstuk

In hoofdstuk 8 heb je geleerd te werken met vectorvoorstellingen. In vectorvoorstellingen wordt de plaats van een punt bepaald door een combinatie van twee vergelijkingen, waarin een parameter voorkomt.

In dit hoofdstuk worden bewegingen in het platte vlak beschreven door middel van twee vergelijkingen, met als parameter de tijd. Begonnen wordt met bewegingen langs een rechte lijn of een cirkel, en daarna wordt dit uitgebreid naar andere krommen. Je leert ook de snelheid en de versnelling van een bewegend punt te berekenen.

In hoofdstuk 20 wordt de kennis van dit hoofdstuk toegepast op meer bewegingsvergelijkingen, waarin vooral goniometrische functies een rol spelen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Formules manipuleren* opdracht 14
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 18
- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 34



Theorie

Bij het differentiëren maak je onder andere gebruik van de productregel, de quotiëntregel en de kettingregel:

Als $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ dan is $f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$

Als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ dan is $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Als $k(x) = g(f(x))$ dan is $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

De afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.

De afgeleide van $g(x) = \cos(x)$ is $g'(x) = -\sin(x)$.

Voorbeeld 1

Differentieer $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$.

Oplossing

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2$$

Voorbeeld 2

Differentieer $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$

Oplossing

$$g'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot x - \cos(x) \cdot 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-x\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$$

Voorbeeld 3

Differentieer $h(x) = 4\cos^3(x)$.

Oplossing

$$h'(x) = 4 \cdot 3\cos^2(x) \cdot -\sin(x)$$

$$h'(x) = -12\sin(x) \cdot \cos^2(x)$$

V1 Differentieer.

a $f(x) = (3x^2 - 6) \cdot \sin(x)$ **c** $h(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)^4$

b $g(x) = \sqrt{3x^2 + x}$ **d** $k(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

V2 Differentieer.

a $f(x) = (4x - 3) \cdot \ln(x)$ **d** $k(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

b $g(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$ **e** $m(x) = \sqrt{4\cos^2(x) + 3}$

c $h(x) = \frac{\ln(x)}{2x}$ **f** $n(x) = (4x - 5)\sqrt{4x - 5}$

V3 Gegeven is de functie $f(x) = -4 + \sqrt{-x^2 + 6x + 8}$.

- a** Bereken exact het maximum van f .
b Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan de grafiek van f in de snijpunten met de x -as.

V4 Gegeven is de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- a** Bereken de coördinaten van de punten die horen bij $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ en $\lambda = -2$.
b De vectorvoorstelling beschrijft een rechte lijn. Stel een vergelijking van deze lijn op.

Theorie

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is een **vectorvoorstelling** van een lijn.

De **plaatsvector** $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een **steunvector** en de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is een

richtingsvector van de lijn. λ is een **parameter**.

De hoek α tussen twee vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

kun je berekenen met behulp van het **inwendig product**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$$\text{Er geldt } \cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ ofwel } \cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Voorbeeld

Gegeven is lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bereken de hoek die deze lijn maakt met

lijn $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Oplossing

Het inwendig product van de richtingsvectoren is $-3 \cdot 3 + 5 \cdot -1 = -14$.

$$\cos(\alpha) = \frac{-14}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{10}} = -0,7592\dots$$

$$\alpha \approx 139^\circ, \text{ dus } \angle(l, m) \approx 41^\circ.$$

- V5** Gegeven zijn de punten $C(-3, 4)$ en $D(5, -2)$.
- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door C en D .
 - Op l ligt een punt P met y -coördinaat 100. Bereken de x -coördinaat van P .
 - Op l ligt een punt Q met gelijke coördinaten. Bereken de coördinaten van Q .
 - Bereken de coördinaten van het punt R op l waarvan de y -coördinaat 70 groter is dan de x -coördinaat.

- V6** Bereken de hoek tussen de lijnen in graden nauwkeurig.

- $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

- V7** Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$, $B(0, 6)$ en $C(-3, 4)$.
- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door de punten A en B .
 - Stel een vectorvoorstelling op van de lijn m door punt C loodrecht op l .
 - Stel een vectorvoorstelling op van de middelloodlijn van lijnstuk AC .

19.1 Bewegen langs een lijn of een cirkel

Je leert

- wat een bewegingsvergelijking is
- wat de baan van een punt is
- hoe je uit de bewegingsvergelijkingen van een lijn of een cirkel een vergelijking van die lijn of cirkel afleidt

Leerroutes

- ondersteunend: 1–02–3–4–5–6–7–8
- doorlopend: 1–2–3–4–5–6–7–8
- uitdagend: 1–2–4–6–7–8–U1–U2

Een boot vaart in noordelijke richting over een groot meer met een snelheid van 5 km/u. Een sterke westelijke wind zorgt ervoor dat de boot per uur 2 km naar het oosten afdrijft.

Neem aan dat het vertrekpunt in $(0, 0)$ ligt en dat y de verplaatsing naar het noorden is.

- Druk x en y uit in de tijd t in uren.
- Welk verband is er tussen x en y ?



- 1 Een punt P verplaatst zich in een assenstelsel. De coördinaten van punt P op tijdstip t worden gegeven door de vergelijkingen $x = -4 + 2t$ en $y = 5 - t$.
 - a In welke punten bevindt P zich op de tijdstippen $t = 0$, $t = 1$ en $t = 10$?
 - b Teken de baan die P aflegt.
 - c Stel een vergelijking op voor de baan van P .

Theorie

Een **parametervoorstelling** legt de positie van een punt P vast met behulp van een hulpvariabele of **parameter**. Als die parameter de tijd is, spreek je ook wel over de **bewegingsvergelijkingen** van P . Als de functies $x(t)$ en $y(t)$ beide lineaire functies van t zijn, is de **baan** van P een rechte lijn.

Voorbeeld

Een punt P verplaatst zich met de bewegingsvergelijkingen $x(t) = 25 - 3t$ en $y(t) = 10 + t$.

- a In welk punt bevindt P zich op tijdstip $t = 10$?
- b Stel een vergelijking op voor de baan van P .

Oplossing

- a $x(10) = -5$ en $y(10) = 20$, dus op tijdstip $t = 10$ bevindt P zich in $(-5, 20)$.
- b Uit $y = 10 + t$ volgt $t = y - 10$, substitueer $t = y - 10$ in $x = 25 - 3t$.
 $x = 25 - 3(y - 10)$
 $x = -3y + 55$ ofwel $x + 3y = 55$

Ondersteunende route → maak opdracht 02

- 2** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = -1 + 3t$ en $y(t) = 4 - t$ met $-5 \leq t \leq 5$.
- H**
- De baan van P is een deel van een rechte lijn.
Bereken de coördinaten van enkele punten van de baan van punt $P(x(t), y(t))$ en teken de baan.
 - Stel een vergelijking op van de baan van P in x en y .
 - Beantwoord de opdrachten a en b ook voor de bewegingsvergelijkingen $x(t) = \frac{1}{2}t$ en $y(t) = 12 - 2t$ met $0 \leq t \leq 6$.

- 3** De bewegingsvergelijkingen van twee punten P en Q zijn

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Laat zien dat de banen van P en Q samenvallen.
 - Er is een verschil in snelheid waarmee P en Q de baan doorlopen.
Hoe verhouden zich de snelheden van P en Q ?
 - Wat verandert er aan de beweging van Q als je de kentallen van de richtingsvector twee keer zo groot maakt?
- 4** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}$
- Plot en schets de baan van P .
 - Toon aan dat de baan van P een cirkel is door te laten zien dat $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 4$ voor elke waarde van t .
 - Hoe veranderen de bewegingsvergelijkingen als de baan een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 10 is?
 - Hoe veranderen de bewegingsvergelijkingen als de baan een cirkel met middelpunt $(-2, 5)$ en straal 7 is?

→ Instructie rekenmachine | Parametervoorstelling

- 5** De banen van de punten P en Q worden beschreven

met de parametervoorstellingen $\begin{cases} x(t) = 5 + 3\cos(t) \\ y(t) = 2 + 3\sin(t) \end{cases}$ en $\begin{cases} x(t) = 5 + 3\cos(2t) \\ y(t) = 2 + 3\sin(2t) \end{cases}$

Welk verschil is er tussen de baan van Q en die van P ?

19.1 Bewegen langs een lijn of een cirkel

Theorie

De baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

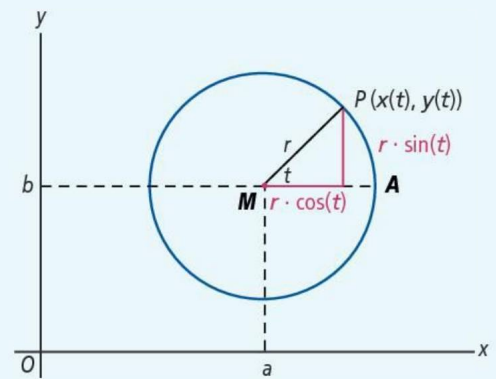
$$\begin{cases} x(t) = a + r\cos(t) \\ y(t) = b + r\sin(t) \end{cases}$$

is een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r .

Uit de bewegingsvergelijkingen leid je een vergelijking van de cirkel af:

$$r\cos(t) = x - a \text{ en } r\sin(t) = y - b, \text{ dus}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = r^2 \cdot 1 = r^2.$$



Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 2 + 5\cos(t)$ en $y(t) = 3 + 5\sin(t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$. Laat zien dat P een cirkel doorloopt en stel een vergelijking op van deze cirkel.

Oplossing

De bewegingsvergelijkingen hebben de vorm $x(t) = a + r\cos(t)$ en $y(t) = b + r\sin(t)$, dus de baan van P is een cirkel met middelpunt $(2, 3)$ en straal 5.

Een vergelijking van deze cirkel is $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

- 6** Stel een vergelijking in x en y op van de baan van een punt P met de gegeven bewegingsvergelijkingen.

H

- a** $x(t) = 4 + 2\cos(t)$ en $y(t) = -3 + 2\sin(t)$
b $x(t) = 6\sin(t)$ en $y(t) = 6 + 6\cos(t)$

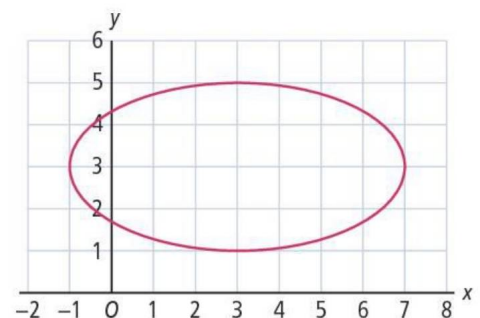
- 7** Stel bewegingsvergelijkingen op voor

- a** een cirkel met middelpunt $(4, -1)$ en straal 1.
b een cirkel met middelpunt $(-2, -4)$ en straal 5.

- 8** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 4\cos(t) \\ y(t) = 3 + 2\sin(t) \end{cases}$$

- a** De baan van P is een *ellips*. Welk verband is er tussen de ellips en een cirkel met middelpunt $(3, 3)$ en straal 4?
b Hoe moet je de bewegingsvergelijkingen aanpassen als de ellips 90° om het punt $(3, 3)$ wordt gedraaid?



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten**02** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = 2 - 1\frac{1}{2}t \text{ en } y(t) = 6 + 2t \text{ met } 0 \leq t \leq 10.$$

- a** Bereken de coördinaten van P voor $t = 0$, $t = 1$, $t = 5$ en $t = 10$ en teken de baan van P .
- b** De baan lijkt een rechte lijn te zijn.
Op het blaadje is een begin gemaakt met het vinden van een vergelijking van de baan van P .
Vul de stappen 1 tot en met 4 op het blaadje verder in.
- c** Schrijf de vergelijking van stap 4 in de vorm $ax + by = c$.
- d** Stel met behulp van dezelfde stappen een vergelijking op van de lijn die hoort bij de bewegingsvergelijkingen $x(t) = 3 - 2t$ en $y(t) = -3 + \frac{1}{2}t$.

$y = 6 + 2t$	
$2t = y - 6$	1
$t = \dots y - \dots$	2
$x = 2 - 1\frac{1}{2}(\dots y - \dots)$	3
$x = \dots$	4

Uitdagende opdrachten

U1 Een punt P beweegt zich over de lijn met vergelijking $3x - 4y + 8 = 0$. Op $t = 0$ bevindt P zich in het punt $(0, 2)$ en op $t = 12$ in het punt $(24, 20)$.
Stel een parametervoorstelling op voor de baan van P met parameter t .

U2 Voor een punt P en voor een punt Q gelden respectievelijk de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 10 - 2t \\ y(t) = 8 + t \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x(t) = -30 + 8t \\ y(t) = 28 - 4t \end{cases}$$

- a** Laat met berekeningen zien dat de punten P en Q dezelfde rechte lijn doorlopen.
- b** Bereken exact de waarde van t waarvoor P en Q zich in hetzelfde punt bevinden en bereken de coördinaten van dat punt.



19.2 Werken met bewegingsvergelijkingen

Je leert

- hoe je de coördinaten van de toppen van de baan van een punt berekent
- hoe je de symmetrie van de baan van een punt kunt aantonen

Leerroutes

- ondersteunend: 9—010—10—11—12—13—14—015
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 9—10—11—12—14—15—16—U3

Kevin voert de bewegingsvergelijkingen

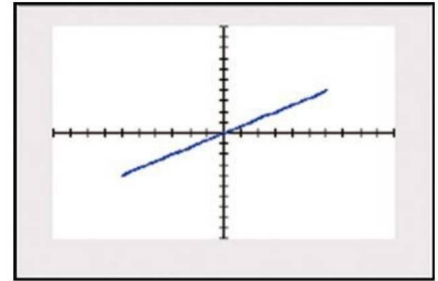
$$x(t) = 6\cos(t) \text{ en } y(t) = 4\cos(t) \text{ in op zijn rekenmachine.}$$

Joost voert de bewegingsvergelijkingen

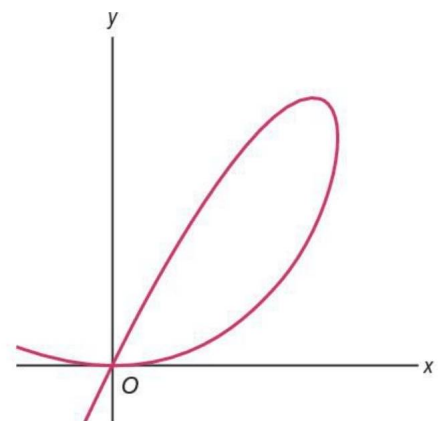
$$x(t) = 6\sin(t) \text{ en } y(t) = 4\sin(t) \text{ in.}$$

Ze krijgen hetzelfde plaatje.

- Toch is er een verschil. Kun je dat verschil omschrijven?



- 9 Voor de beweging van een punt $P(x, y)$ geldt $x(t) = -t^2 + 6t$ en $y(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2$. Een deel van de baan van P is hier afgebeeld.
- Voor welke waarden van t bevindt P zich in de oorsprong?
 - Bereken de waarde van t waarvoor x een maximum heeft. In welk punt bevindt P zich dan?
 - Bereken de waarden van t waarvoor y een extreme waarde heeft. Welke punten van de baan horen daarbij?
 - Als P de getekende lus doorloopt is op zeker moment de afstand van P tot de beide assen gelijk. In welk punt (buiten de oorsprong) bevindt P zich dan?



Theorie

De **toppen** van de baan van een punt $P(x(t), y(t))$ vind je door na te gaan in welke punten x of y een extreme waarde heeft. Daartoe bereken je de waarde(n) van t waarvoor $x'(t) = 0$ of $y'(t) = 0$.

$y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$: de baan heeft een horizontale raaklijn.

$x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$: de baan heeft een verticale raaklijn.

In plaats van $x'(t)$ en $y'(t)$ worden ook de notaties $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ gebruikt.

Als de baan van een punt P geen rechte lijn is, wordt ook vaak gesproken van een kromme. Neem verder aan dat t ook negatieve waarden kan aannemen.

Voorbeeld

De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t \text{ en } y(t) = 1 - t^2.$$

Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de raaklijn verticaal is.

Oplossing

$$x'(t) = t^2 - 2t - 3 \text{ en } y'(t) = -2t$$

$$x'(t) = 0 \text{ als } t = 1 \text{ of } t = 3.$$

Er is een verticale raaklijn in $(\frac{2}{3}, 0)$ en in $(-9, -8)$.

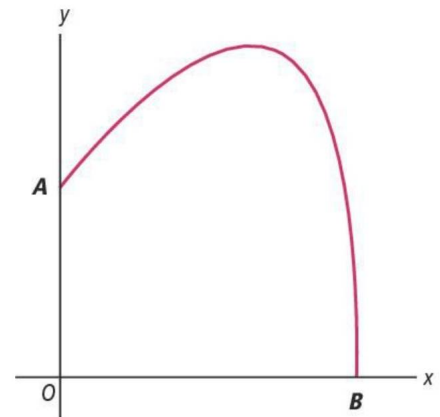
Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10** Een punt P gaat van punt A op de y -as naar punt B op de x -as. De bewegingsvergelijkingen van P zijn

H

$$\begin{cases} x(t) = 5t - \frac{1}{3}t^2 \\ y(t) = 6t + 12 - t^2 \end{cases}$$

- Bereken exact de coördinaten van A .
- Bereken in één decimaal de x -coördinaat van B .
- Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de baan een horizontale of een verticale raaklijn heeft.



- 11** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 3t + 2t^2$ en $y(t) = 1 + t^2$.
- Plot en schets de baan van P .
 - Welke waarden hebben $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ als $t = 2$?
 - Welke conclusie kun je uit de antwoorden van opdracht b trekken over de richting waarin het punt P zich beweegt?
 - Vul $x(t) = 3t + 2t^2$ en $y(t) = 1 + t^2$ in bij de vergelijking $(x - 2y)^2 + 4x - 17y = -13$ en bewijs daarmee dat de punten van de baan van P voldoen aan deze vergelijking.
- 12** Een kromme is gegeven door de vergelijkingen $x(t) = \sqrt{1 + t^2}$ en $y(t) = \frac{1}{2}t - 1$.
- Bereken de coördinaten van het punt op de kromme met een verticale raaklijn.
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de kromme met de lijn $y = -x$.
 - Bewijs dat de punten van de kromme voldoen aan de vergelijking $x^2 - 4y^2 - 8y = 5$.
- 13** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - t^2$ en $y(t) = \frac{1}{3}t^3 - 9t$.
- Bereken de coördinaten van alle punten van de baan van P met een horizontale of verticale raaklijn.

19.2 Werken met bewegingsvergelijkingen

- 14** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t \text{ en } y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 18.$$

- a** Bij $t = a$ hoort punt A en bij $t = 6 - a$ hoort punt B .
Druk de coördinaten van A en van B uit in a .
b Leg uit dat A en B elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$.

Theorie

Om de symmetrie van de baan van een punt P aan te tonen, laat je zien dat het spiegelbeeld van een willekeurig punt van de baan ook weer op de baan ligt.

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 9t$ en $y(t) = t^2 - 4$.
Bewijs dat de baan van P symmetrisch is in de y -as.

Oplossing

$t = a$ geeft het punt $A(\frac{1}{3}a^3 - 9a, a^2 - 9)$

$t = -a$ geeft het punt $B(\frac{1}{3}(-a)^3 - 9(-a), (-a)^2 - 9)$ ofwel $B(-\frac{1}{3}a^3 + 9a, a^2 - 9)$.

$x_B = -x_A$ en $y_B = y_A$ dus de punten A en B zijn elkaars spiegelbeeld in de y -as.

Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

H $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ en $y(t) = 4t - \frac{1}{6}t^3$.

Bewijs dat de baan van P symmetrisch is in de x -as.

- 16** Een punt P beweegt langs een kromme met parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = (t - 1)^2 \end{cases}$$

- a** Stel $t = q$ en druk de coördinaten van de plaats van P uit in q .
b Stel $t = 1 - q$ en druk de coördinaten van de plaats van P uit in q .
c Leg uit dat uit de antwoorden op de opdrachten a en b volgt dat de kromme symmetrisch is in de lijn $y = x$.

Uitdagende route → maak opdracht U3

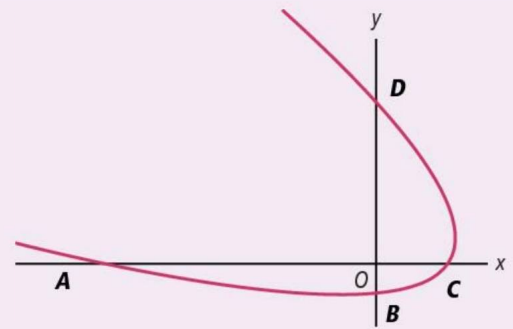
Ondersteunende opdrachten

010 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = 10 - 3t - t^2 \text{ en } y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t.$$

De baan van P snijdt de assen in de punten A , B , C en D .

- Los exact op $x(t) = 0$.
- Welke punten horen bij de waarden van t die je in opdracht a hebt berekend?
- Los exact op $y(t) = 0$. Welke punten horen bij de gevonden waarden van t ?
- Bereken $x'(t)$ en $y'(t)$.
- Los op $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$
- Bereken met behulp van het antwoord op opdracht e de coördinaten van de punten waar de baan een horizontale of verticale raaklijn heeft.



015 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = t^3 - 3t \text{ en } y(t) = 2t.$$

Je gaat bewijzen dat de baan van P symmetrisch is in de oorsprong.

- Druk x en y bij stap 1 uit in a .
Je hebt nu de coördinaten van een punt A .
- Druk x en y bij stap 2 uit in $-a$.
Je hebt nu de coördinaten van een punt B .
- Welk verband is er tussen de coördinaten van A en de coördinaten van B ? Vul stap 3 in.
- Leg uit dat je nu hebt aangetoond dat de baan van P symmetrisch is in de oorsprong.

●	Vul in $t = a$			1
●	$x(a) = a^3 - 3a$			
●	$y(a) = \dots$			
●	dus $A(\dots, \dots)$			
●	Vul in $t = -a$			2
●	dus $B(\dots, \dots)$			
●	$x_B = \dots x_A$ en $y_B = \dots y_A$			3
●				

Uitdagende opdrachten

U3 Je hebt gezien dat in sommige gevallen een kromme zichzelf snijdt. In zo'n geval moeten er getallen a en b zijn, waarvoor geldt $x(a) = x(b)$ en $y(a) = y(b)$.

- Onderzoek met een berekening in welk punt de kromme

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}$$

zichzelf snijdt.

- Een andere kromme is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t^2 \\ y(t) = t^3 - 3t^2 + 4t \end{cases}$$

Toon met berekeningen aan dat deze kromme zichzelf niet snijdt.

19.3 Snelheid en raaklijn

Je leert

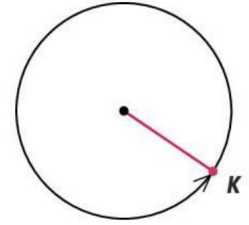
- wat de snelheidsvector en de (baan)snelheid van een punt op een baan zijn
- hoe je de (baan) snelheid van een punt op een baan berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 17—18—019—20—21—22—23
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 18—19—20—22—23—U4—U5

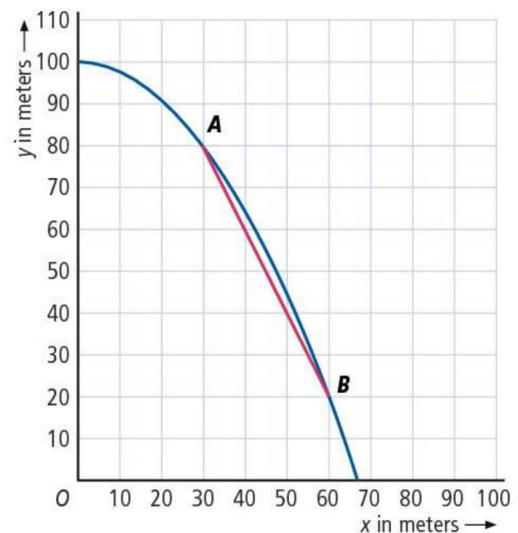
Al vanaf de prehistorie wordt de slinger als wapen gebruikt. Een kogel of steenklompje K wordt snel rondgedraaid en op een gegeven moment losgelaten.

- Geef in de schets aan op welk punt van de cirkel de kogel moet worden losgelaten om een voorwerp in punt P te treffen.

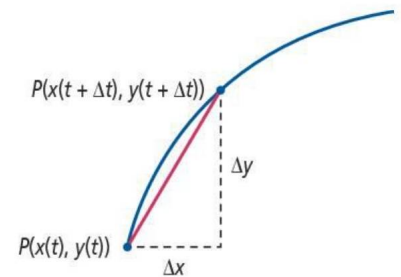


P

- 17** Een bal wordt vanaf een 100 meter hoge toren geworpen. De bewegingsvergelijkingen zijn $x(t) = 15t$ en $y(t) = 100 - 5t^2$ met t in seconden en $x(t)$ en $y(t)$ in meters. Op $t = 2$ is de bal in $A(30, 80)$ en op $t = 4$ in $B(60, 20)$.
- Over welke vector heeft de bal zich in die twee seconden verplaatst?
 - Bereken de kentallen van de vector van de gemiddelde verplaatsing per seconde over het tijdsinterval $[2, 4]$.
 - Bereken ook kentallen van de vector bij de gemiddelde verplaatsing per seconde over de tijdsintervallen $[2, 3]$, $[2; 2,1]$ en $[2; 2,01]$.
 - Deze vectoren benaderen de snelheidsvector op $t = 2$. Welke kentallen zal de snelheidsvector $\vec{v}$ op $t = 2$ hebben?
 - Bereken de lengte van $\vec{v}$.
 - Geef de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A .



- 18** Als de tijd t toeneemt met Δt , verplaatst het punt $P(x(t), y(t))$ zich naar het punt $P(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$. x en y nemen dan toe met $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ en $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$.
- Druk de verplaatsingsvector van P uit in Δx en Δy .
 - Over welke vector vindt de gemiddelde verplaatsing per tijdseenheid plaats?
 - Beredeneer dat de snelheidsvector $\vec{v}$ gelijk is aan $\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.
 - Druk de lengte van $\vec{v}$ uit in $x'(t)$ en $y'(t)$.



Theorie

Is t de tijd, dan is de **snelheidsvector** of **vectoriële snelheid** van een punt $P(x(t), y(t))$ de vector $\vec{v}$ met beginpunt P .

De snelheidsvector ligt op de lijn die in P raakt aan de baan.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y'(t) \end{pmatrix} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

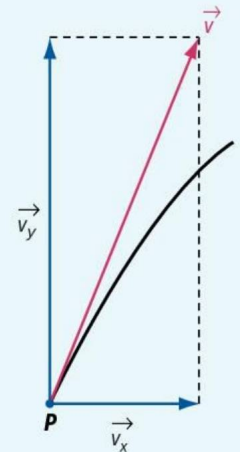
De snelheid in de x -richting is $v_x = x'(t)$;

de snelheid in de y -richting is $v_y = y'(t)$.

De **(baan)snelheid** van P is $v = |\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P aan de baan is

$\frac{y'(t)}{x'(t)}$, mits $x'(t) \neq 0$.

**Voorbeeld**

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = t^2 - 1 \text{ en } y(t) = t^3 - 3t.$$

Bereken de coördinaten en de snelheid van P op $t = 2$.

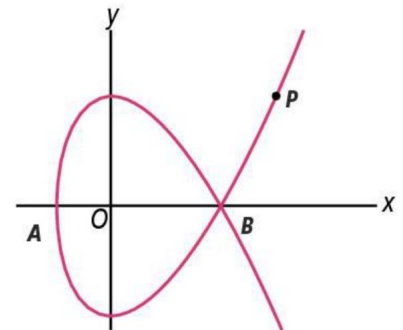
Oplossing

$x(2) = 3$ en $y(2) = 2$, dus P bevindt zich in het punt $(3, 2)$.

$$x'(t) = 2t, \text{ dus } v_x = x'(2) = 4;$$

$$y'(t) = 3t^2 - 3, \text{ dus } v_y = y'(2) = 9.$$

$$v = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97} \approx 9,85$$

**Ondersteunende route → maak opdracht 019**

- 19** In het voorbeeld passeert P de x -as één keer in A en twee keer in B .

H

- Bereken exact de waarden van t die horen bij de snijpunten met de x -as.
- Bereken exact de coördinaten van A en B .
- Bereken exact de kentallen van de snelheidsvectoren van P op die tijdstippen.
- Bereken in hele graden de hoek die de snelheidsvectoren in B maken met de x -as.
- Bereken exact de snelheden waarmee P de y -as passeert.

19.3 Snelheid en raaklijn

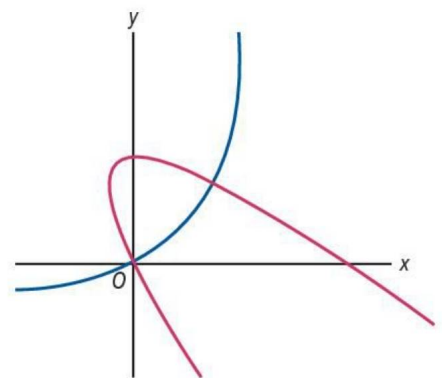
- 20** Een punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2t^2 - 3t$ en $y(t) = 1 + t^2$.
Een punt A ligt op de baan van P . De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A aan de baan van P is gelijk aan -1 .
Stel een vergelijking op van deze raaklijn.

- 21** Punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = 4\cos(t)$ en $y(t) = 4\sin(t)$.
Punt Q heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = 4\cos(t)$ en $y(t) = 6\sin(t)$.
a Welke vorm heeft de baan van P ? En die van Q ?
b Toon aan dat de snelheid van P constant is.
c Bereken exact de minimale en maximale snelheid van Q .

- 22** Twee krommen zijn gegeven door de parametervoorstellingen

H $\begin{cases} x(t) = t^2 - 6t + 8 \\ y(t) = 4t - t^2 \end{cases}$ en $\begin{cases} x(t) = -t^2 + 8t - 12 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

Bewijs dat deze krommen elkaar in het punt $(3, 3)$ loodrecht snijden.



- 23** Een kromme is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 10 \ln(t^2 + 1) \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$
- a** Bewijs dat de kromme symmetrisch is in de x -as.
b Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de kromme met de assen.
c Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de raaklijn aan de kromme evenwijdig is met de x -as of de y -as.

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

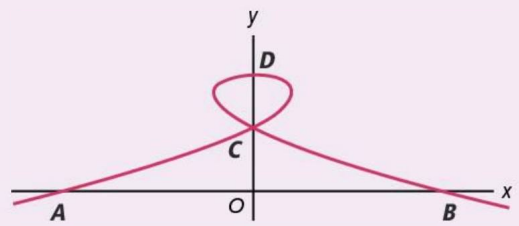
Ondersteunende opdrachten

019 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = t^3 - 4t$ en $y(t) = 9 - t^2$. De punten A , B , C en D zijn de snijpunten van de baan met de assen.

- Welke waarden van t horen bij de punten A en B ?
- Welke waarden van t horen bij de punten C en D ?
- Bereken $x'(t)$ en $y'(t)$.
- Laat met een exacte berekening zien dat de

snelheidsvector in punt A gelijk is aan $\begin{pmatrix} 23 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- Bereken exact de snelheidsvector van P in punt B .
- Gebruik het gegeven in opdracht d om de hoek die de snelheidsvector in A maakt met de x -as te berekenen in graden.
- Vul de stappen op het blaadje in en druk $|\vec{v}|$ uit in t .
- Bereken exact de snelheden waarmee P de x -as passeert.
- Bereken exact de waarden van t waarvoor de snelheidsvector evenwijdig is aan de y -as.



●	Snelheidsvector:
●	$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
●	Baansnelheid:
●	$ \vec{v} = \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2} = \dots$
●	
●	

Uitdagende opdrachten

U4 Een kromme is gegeven door $\begin{cases} x(t) = 5\ln(t^2 + 1) \\ y(t) = t^3 - 3t^2 + 4 \end{cases}$

- Bereken de coördinaten van het punt op de kromme met een horizontale raaklijn.
- Er is een waarde van t waarvoor geldt $x'(t) = 0$ én $y'(t) = 0$.
Welke punt hoort daarbij en welke bijzonderheid heeft de kromme in dat punt?

U5 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}(2t - 1)\sqrt{2t - 1} \\ y(t) = \frac{1}{3}(9 - 2t)\sqrt{9 - 2t} \end{cases}$$

- Voor welke waarden van t zijn er punten van de baan van P gedefinieerd?
- Plot en schets de baan van P .
- Bewijs dat de snelheid van P constant is.
- Bewijs dat voor alle punten op de baan geldt

$$\sqrt[3]{9x^2} + \sqrt[3]{9y^2} = 8.$$

Je leert

- wat de (baan)versnelling van een punt op een baan is
- hoe je de (baan)versnelling van een punt op een baan berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 24—25—026—26—27—28—29
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 24—26—28—29—30—U6—U7

Satellieten bewegen zich in een cirkelvormige of elliptische baan om de aarde. De snelheid van de satelliet in een elliptische baan verandert steeds. In die baan is een zogenaamd perigeum (laagste punt boven de aarde) en een apogeum (hoogste punt boven de aarde). De baansnelheid is niet constant. In welk punt zal de baansnelheid het grootst zijn? En in welk punt het kleinst?



- 24** De bewegingsvergelijkingen van een projectiel dat wordt weggeschoten zijn $x(t) = 25t$ en $y(t) = 30 + 15t - 5t^2$ met t in seconden en $x(t)$ en $y(t)$ in meters.
- Geef een formule voor de snelheid v van het projectiel.
 - Bereken de snelheid waarmee het projectiel de grond treft.
 - Bereken $\frac{dv}{dt}$ voor $t = 2$ en voor $t = 4$.

Theorie

Verandert de grootte van de snelheid, dan is er sprake van een versnelling. De verandering van de baansnelheid heet de **(baan)versnelling** en is gelijk aan $\frac{dv}{dt}$, waarin $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Voorbeeld

Een punt P beweegt zich over een ellips met bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2\cos(t)$ en $y(t) = \sin(t)$. Geef een formule voor de baanversnelling.

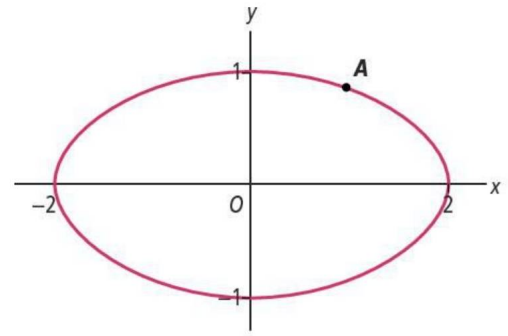
Oplossing

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \text{ dus de snelheid van } P \text{ is } v = \sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)} = (4\sin^2(t) + \cos^2(t))^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{De baanversnelling is } \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}(4\sin^2(t) + \cos^2(t))^{-\frac{1}{2}} \cdot (8\sin(t)\cos(t) - 2\cos(t)\sin(t))$$

$$\text{ofwel } \frac{dv}{dt} = \frac{8\sin(t)\cos(t) - 2\cos(t)\sin(t)}{2\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}} = \frac{3\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}}$$

- 25** De ellips uit het voorbeeld is hier getekend.
 P bevindt op $t = \frac{1}{3}\pi$ in punt A .
- Teken met beginpunt A de snelheidsvector in A .
 - Bereken exact de baanversnelling in A .
 - De bewegingsvergelijkingen van een punt Q zijn $x(t) = 2\cos(t)$ en $y(t) = 2\sin(t)$.
 Teken de baan van Q en maak de opdrachten a en b voor punt Q .



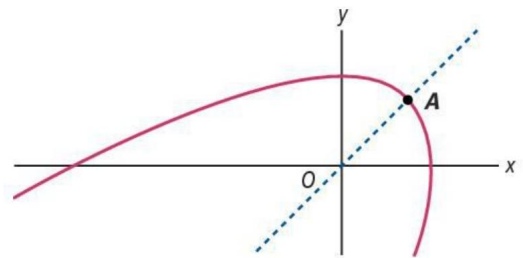
Ondersteunende route → maak opdracht 026

- 26** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn
- H**
$$\begin{cases} x(t) = 6 + 5t - t^2 \\ y(t) = t^2 + 4t \end{cases}$$
- De baan van P snijdt de lijn met vergelijking $y = x$ in de punten A en B .
 Bereken exact de coördinaten van A en van B .
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de baan van P in het snijpunt met de negatieve y -as.
 - Druk de baansnelheid en de baanversnelling uit in t .
 - Bereken de coördinaten van het punt waarin de baansnelheid een extreme waarde heeft.

- 27** Punt P heeft bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2 \end{cases}$$

Lijn l : $y = x$ snijdt de baan van P in punt A .

- Bereken exact de coördinaten van A .
- Toon aan dat de raaklijn in A loodrecht op l staat.
- Toon aan dat de baanversnelling in A gelijk is aan 0. Wat betekent dat voor de snelheid van P in A ?



19.4 Versnelling

28 De kromme hoort bij de parametervoorstelling

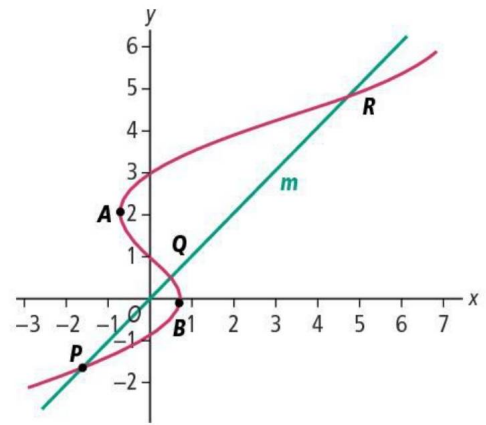
$$\begin{cases} x(t) = t - 2\sin(t) \\ y(t) = t + 1 \end{cases} \quad \text{met } -\pi \leq t \leq 1\frac{1}{2}\pi.$$

Verder is getekend lijn m met vergelijking $y = x$.

P , Q en R zijn snijpunten van m met de kromme.

A en B zijn punten waarin de raaklijn aan de kromme verticaal is.

- Bereken exact de coördinaten van P , Q en R .
- Bereken exact de coördinaten van A en B .
- Neem aan dat de kromme de baan is van een bewegend punt.
Toon aan dat in de punten A en B de versnelling gelijk is aan 0.



29 De bewegingsvergelijkingen van een punt zijn $\begin{cases} x(t) = 5\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}$

H

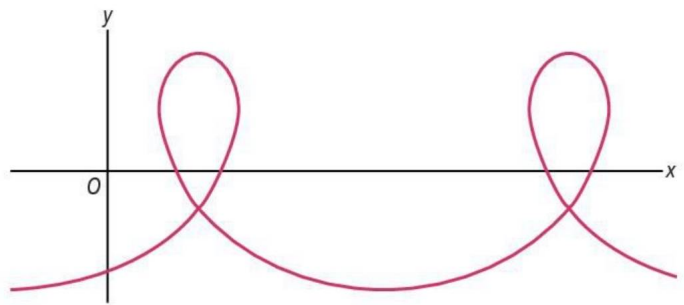
- Toon aan dat $v(t) = \sqrt{4 + 21\sin^2(t)}$.
- Bereken exact de coördinaten van de punten waar de baanversnelling gelijk is aan 0.
- In welke punten is de baansnelheid maximaal?

30 De baan van een punt P is gegeven door de

bewegingsvergelijkingen $x = t + 2\cos(t)$ en

$y = 2\sin(t)$ met $-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq 3\frac{1}{2}\pi$.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x -as.
- Bereken exact de punten van de baan met een verticale raaklijn.
- Bewijs dat voor de snelheid v van P geldt $v = \sqrt{5 - 4\sin(t)}$.
- Bereken de maximale en de minimale waarde van v en de bijbehorende punten van de baan.
- Bewijs dat de versnelling in het punt met $t = \frac{1}{6}\pi$ gelijk is aan -1 .



Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

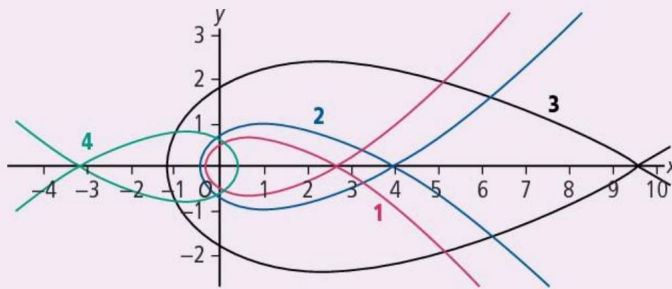
Ondersteunende opdrachten

- 026** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = t^2 - 9$ en $y(t) = t^2 - 6t$.
- Vul de stappen op het blaadje in en laat zien dat je het resultaat kunt herleiden tot $v = \sqrt{8t^2 - 24t + 36}$.
 - Differentieer de formule van opdracht a.
 - Voor welke waarde van t geldt $\frac{dv}{dt} = 0$?
 - Welk punt hoort bij de waarde van t die je in opdracht c hebt gevonden?
 - Heeft v in dat punt een maximale of een minimale waarde?

	$x'(t) = \dots$
	$y'(t) = \dots$
	$v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
	$v = \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2}$
	$v = \sqrt{\dots + \dots - \dots + \dots}$

Uitdagende opdrachten

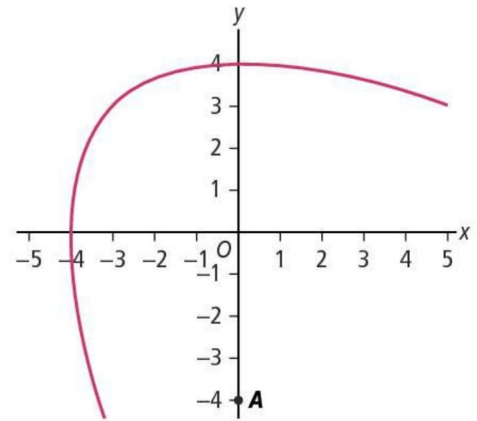
- U6** Een punt P beweegt langs een baan die gegeven wordt door $x(t) = 6\sqrt{t}$ en $y(t) = t - 6\sqrt{t}$.
- Bereken de baansnelheid van P als $t = 1$.
 - Wat kun je zeggen over de baansnelheid als t een waarde dicht bij 0 heeft?
 - Bewijs dat de baansnelheid minimaal is in het punt waar de baan de x -as snijdt.



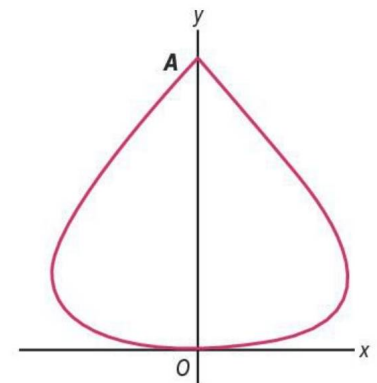
- U7** De krommen horen bij de bewegingsvergelijkingen $x(t) = a(3t^2 - 1)$ en $y(t) = at(t^2 - 3)$ met $a \neq 0$, waarbij de waarden $a = -\frac{2}{5}$, $a = \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{2}$ en $a = 1\frac{1}{5}$ zijn gekozen.
- Leg met een berekening uit dat er geen waarde van a is waarbij de kromme door de oorsprong gaat.
 - Elke kromme heeft twee punten gemeenschappelijk met de x -as.
Bewijs dat de verhouding van de afstanden van deze punten tot de oorsprong $1 : 8$ is.
 - Toon aan dat de punten van de krommen waarin de raaklijn horizontaal is, op een van de lijnen $y = x$ of $y = -x$ liggen.
 - Bewijs dat alle krommen de x -as onder een hoek van 30° snijden.
 - Neem $a = 1$.
Toon aan dat de baanversnelling gelijk is aan $6t$.

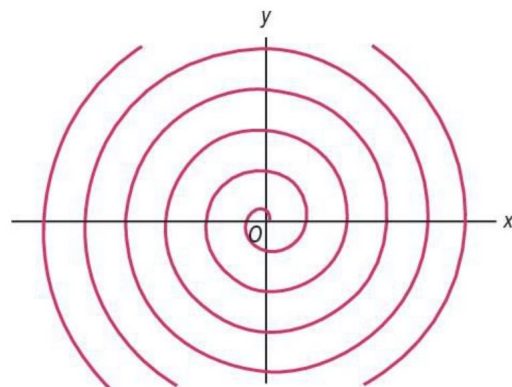
19.5 Gemengde opdrachten

- 31** Een punt P heeft bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 4 - t^2 \end{cases}$
- Bereken exact de coördinaten van snijpunten van de baan met de assen.
 - Bereken exact de coördinaten van de punten op de baan waarin de raaklijn aan de baan evenwijdig is met een van de assen.
 - Bereken exact de coördinaten van het punt van de baan waarvoor de afstand van P tot het punt $A(0, -4)$ minimaal is.
 - Toon aan dat de coördinaten van de punten van de baan voldoen aan de vergelijking $(x + y)^2 - 8x + 8y = 48$.



- 32** Een kromme is gegeven door de parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2 + 4t + 15} \\ y(t) = 7 + 6t - t^2 \end{cases}$
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de kromme met de x -as.
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de kromme in het punt met $t = -7$.
 - Bereken exact de coördinaten van het punt van de kromme waarin de raaklijn evenwijdig is met de x -as.
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de kromme met de lijn $y = 12$.
- 33** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 5\sin(t)$ en $y(t) = t^2$ met $-\pi \leq t \leq \pi$.
- Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de raaklijn aan de baan van P evenwijdig is aan de y -as.
 - Bewijs dat de baan van P symmetrisch is in de y -as.
 - De beweging start op $t = -\pi$ in punt A .
Bereken exact de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan bij vertrek van P uit A .
 - Bereken ook exact de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de baan bij aankomst van P in A .
 - Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in O .





- 34** Van boven naar beneden zijn drie verschillende spiralen afgebeeld: de *spiraal van Archimedes*, de *spiraal van Fermat* en een *logaritmische spiraal*.

De bijbehorende parametervoorstellingen zijn

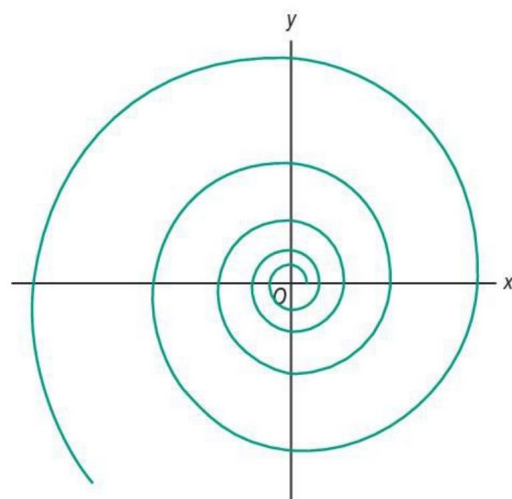
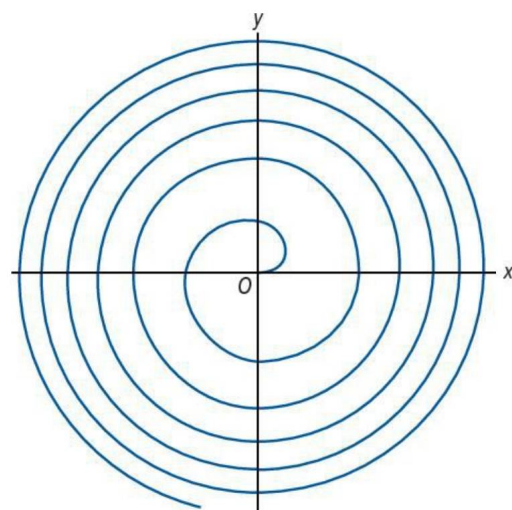
$$\begin{cases} x(t) = t \cdot \cos(t) \\ y(t) = t \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \cdot \cos(t) \\ y(t) = \sqrt{t} \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = e^{0,1t} \cdot \cos(t) \\ y(t) = e^{0,1t} \cdot \sin(t) \end{cases}$$

steeds met $t \geq 0$.

- De eerste spiraal lijkt de x -as en de y -as op regelmatige afstanden te snijden. Onderzoek of dit inderdaad het geval is.
- Onderzoek hoe je de parametervoorstelling van de spiraal van Archimedes zo kunt aanpassen, dat de spiraal door alle roosterpunten op de positieve x -as gaat.
- Toon aan dat voor de spiraal van Archimedes geldt $v = \sqrt{1 + t^2}$.
- Leid een formule af voor de baanversnelling voor de spiraal van Archimedes.
- Neem aan dat de parametervoorstellingen de bewegingsvergelijkingen zijn van een punt P . Bij de logaritmische spiraal geldt dat de hoek tussen de snelheidsvector $\vec{v}$ en de vector $\overrightarrow{OP}$ constant is. Geef hiervoor een bewijs.
- Een algemene parametervoorstelling voor logaritmische spiralen kan gegeven worden in de vorm

$$\begin{cases} x(t) = e^{bt} \cdot \cos(t) \\ y(t) = e^{bt} \cdot \sin(t) \end{cases}$$

Onderzoek welke invloed het getal b heeft op de vorm van de spiraal.



Samenvatting

Theorie

Parametervoorstelling, bewegingsvergelijkingen, baan

Een parametervoorstelling legt de positie van een punt P vast met behulp van een hulpvariabele of parameter. Als die parameter de tijd is, spreek je ook wel over de bewegingsvergelijkingen van P . Als de baan van een punt P geen rechte lijn is, wordt ook vaak gesproken van een kromme. Daarbij kan t ook negatieve waarden aannemen.

- S1** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = t^2 + 3t + 4$ en $y(t) = 2t - t^2$.
- Bereken de coördinaten van de plaats van P voor $t = 0$, $t = -2$ en $t = 4$.
 - Leg uit waarom alle punten van de baan van P rechts van de y -as liggen.
 - Plot en schets de baan van P .

Theorie

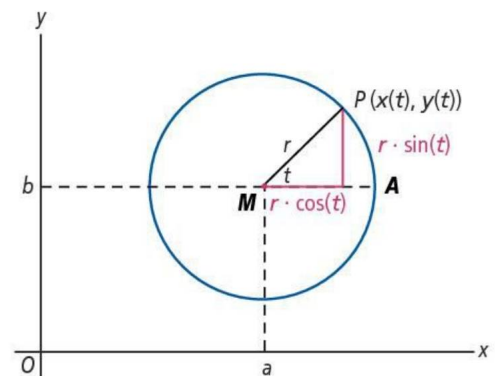
Lijnen en cirkels

De baan met een parametervoorstelling waarin zowel $x(t)$ als $y(t)$ lineaire functies van de tijd t zijn, is (een deel van) een rechte lijn.

De baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = a + r\cos(t) \\ y(t) = b + r\sin(t) \end{cases}$$

is een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r .



- S2**
- | | |
|---|---|
| A: $\begin{cases} x(t) = 5 + 3\cos(t) \\ y(t) = 17 - 12t \end{cases}$ | C: $\begin{cases} x(t) = 5 + 3t \\ y(t) = 7 - 2t \end{cases}$ |
| B: $\begin{cases} x(t) = 15 + 3\cos(t) \\ y(t) = 12 + 3\sin(t) \end{cases}$ | D: $\begin{cases} x(t) = 5 + 3t \\ y(t) = 9 + 3t^2 \end{cases}$ |

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn voor vier situaties gegeven.

Vermeld voor elke situatie of de baan van P een rechte lijn of een cirkel of geen van beide is.

Vaardigheid

Je kunt uit de bewegingsvergelijkingen van een lijn of cirkel een vergelijking van die lijn of cirkel afleiden.

Druk voor het opstellen van een vergelijking van een lijn t uit in x of y en vul dit in bij de andere vergelijking.

Voorbeeld 1

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x = 7 - 5t$ en $y = 12 + 2t$.
Stel een vergelijking op van de baan van P .

Oplossing

Uit $x = 7 - 5t$ volgt $5t = 7 - x$ ofwel $t = 1\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x$.

Substitutie in $y = 12 + 2t$ geeft

$$y = 12 + 2(1\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x) = -\frac{2}{5}x + 14\frac{4}{5}.$$

Een vergelijking van de baan van P is

$$y = -\frac{2}{5}x + 14\frac{4}{5} \text{ ofwel } 2x + 5y = 74.$$

Voorbeeld 2

De bewegingsvergelijkingen van een punt Q zijn $x = 2 + 4 \cos(t)$ en $y = -1 + 4 \sin(t)$.
Stel een vergelijking op van de baan van Q .

Oplossing

Q doorloopt een cirkel met middelpunt $(2, -1)$ en straal 4. Een vergelijking van de baan van Q is

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16.$$

- S3** Stel een vergelijking op van de baan van een punt P met de gegeven bewegingsvergelijkingen.

$$\text{a} \quad \begin{cases} x(t) = 7 + 3\cos(t) \\ y(t) = -5 + 3\sin(t) \end{cases} \quad \text{b} \quad \begin{cases} x(t) = -3 - t \\ y(t) = 2t + 4 \end{cases}$$

Vaardigheid

Je kunt de symmetrie van de baan van een punt aantonen.

Om de symmetrie van de baan van een punt P aan te tonen, laat je zien dat het spiegelbeeld van een willekeurig punt van de baan ook weer op de baan ligt.

Voorbeeld

De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $x(t) = t^2 - 2t$ en $y(t) = t^2 + 2t$.
Bewijs dat de baan symmetrisch is in de lijn $y = x$.

Oplossing

$t = a$ geeft het punt $A(a^2 - 2a, a^2 + 2a)$.

$t = -a$ geeft het punt $B((-a)^2 - 2(-a), (-a)^2 + 2(-a))$ ofwel $B(a^2 + 2a, a^2 - 2a)$.

$x_B = y_A$ en $y_B = x_A$ dus de punten A en B zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

Samenvatting

- S4** De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $x(t) = t^3 - 2t$ en $y(t) = t^2 + \sqrt{t^2 + 9}$. Bewijs dat de baan symmetrisch is in de y -as.

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de toppen van de baan van een punt berekenen.

De toppen van de baan van een punt $P(x(t), y(t))$ vind je door na te gaan in welke punten x of y een extreme waarde heeft.

Daartoe bereken je de waarde(n) van t waarvoor $x'(t) = 0$ of $y'(t) = 0$.

Is $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dan heeft de baan een horizontale raaklijn.

Is $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dan heeft de baan een verticale raaklijn.

Voorbeeld

De baan van een punt P wordt gegeven door
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 5t - 14 \\ y(t) = \ln(t^2 + 3t + 5) \end{cases}$$

Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan met een horizontale of verticale raaklijn.

Oplossing

$$x'(t) = 2t - 5 \text{ en } y'(t) = \frac{2t + 3}{t^2 + 3t + 5}$$

Er is een horizontale raaklijn als $2t + 3 = 0$ en $x'(t) \neq 0$ dus als $t = -1\frac{1}{2}$.

Er is een verticale raaklijn als $2t - 5 = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dus als $t = 2\frac{1}{2}$.

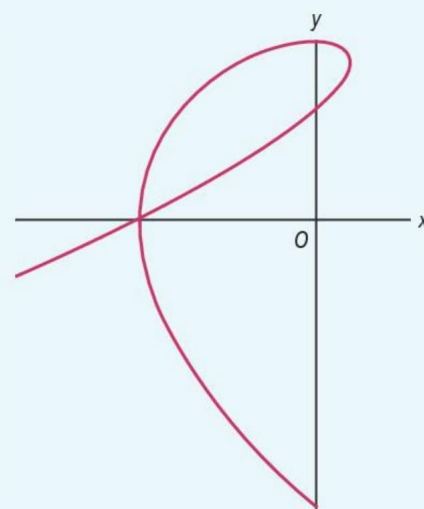
Er is een horizontale raaklijn in $(-4\frac{1}{4}, \ln(2\frac{3}{4}))$ en een verticale raaklijn in $(-20\frac{1}{4}, \ln(18\frac{3}{4}))$.

- S5** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t \text{ en } y(t) = 9 - t^2.$$

De baan van P is hier getekend.

Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan van P met een horizontale raaklijn of een verticale raaklijn.



Vaardigheid

Je kunt de (baan)snelheid van een punt op een baan berekenen.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ is de snelheidsvector van punt $P(x(t), y(t))$.

$x'(t)$ is de snelheid in de x -richting; $y'(t)$ is de snelheid in de y -richting.

De snelheidsvector $\vec{v}$ raakt in P aan de baan van P .

De (baan)snelheid van P is $v = |\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = t^2 + 1$ en $y(t) = 3t + t^3$.
Bereken exact de baansnelheid van P voor $t = 1$.

Oplossing

$$x'(t) = 2t \text{ en } y'(t) = 3 + 3t^2$$

$$\text{Als } t = 1 \text{ geldt } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ en } v = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}.$$

- S6** De baan van een punt P is gegeven door $x(t) = t + 4\sqrt{t}$ en $y(t) = t - 4\sqrt{t}$.
Bereken exact de baansnelheid voor $t = 9$.

Vaardigheid

Je kunt de (baan)versnelling in een punt op een baan berekenen.

De baanversnelling van P is gelijk aan $\frac{dv}{dt}$.

Voorbeeld

Bereken de baanversnelling voor $t = 1$ bij de bewegingsvergelijkingen van het vorige voorbeeld.

Oplossing

$$\text{De baansnelheid is } v = \sqrt{(2t)^2 + (3 + 3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9 + 18t^2 + 9t^4} \text{ ofwel } v = \sqrt{9t^4 + 22t^2 + 9}.$$

$$\text{De baanversnelling is } \frac{dv}{dt} = \frac{36t^3 + 44t}{2\sqrt{9t^4 + 22t^2 + 9}}; \text{ op } t = 1 \text{ geldt } \frac{dv}{dt} = \frac{80}{2\sqrt{40}} = \sqrt{40}.$$

- S7** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 5 + 4\cos(t)$ en $y(t) = 2 + 3\sin(t)$.
- Toon aan dat $|\vec{v}| = \sqrt{9 + 7\sin^2(t)}$.
 - Bereken exact de baanversnelling in het punt met $t = \frac{1}{4}\pi$.

T1 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 3t \\ y(t) = 6t - t^2 \end{cases}$$

- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de assen.
- b** Bereken de baansnelheid en de baanversnelling in het punt met $t = -2$. Rond af op één decimaal.
- c** Er is een raaklijn aan de baan van P met richtingscoëfficiënt 1. Stel een vergelijking op van deze raaklijn.
- d** Bewijs dat de punten van de baan van P voldoen aan de vergelijking $(x + y)^2 = 18x + 9y$.

T2 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 4 + 3t$ en $y(t) = 6 - 2t$.

- a** Geef een vectorvoorstelling en een vergelijking van de baan van P .

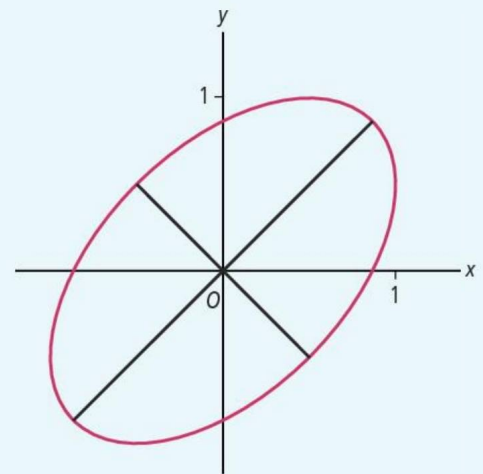
Een punt Q heeft bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 4 + 3\sin(t) \\ y(t) = 6 - 2\sin(t) \end{cases}$

- b** Toon aan dat de baan van Q samenvalt met een deel van de baan van P .
- c** Bereken de coördinaten van de eindpunten van de baan van Q .

T3 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases}$$

- a** De baan is een ellips. De eindpunten van de assen van de ellips worden bereikt op de tijdstippen $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $1\frac{1}{6}\pi$ en $1\frac{2}{3}\pi$. Bereken exact de lengte van de beide assen.
- b** Toon met een berekening aan dat de baanversnelling in de eindpunten van de assen gelijk is aan 0.
- c** Bereken exact de snelheid van P in de eindpunten van de assen.
- d** Bereken de hoek waaronder de ellips de x -as snijdt. Rond af op hele graden.



T4 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = (t-1)^2 \\ y(t) = 2t^2 - 4t \end{cases}$$

- Plot en schets de baan van P .
- De baan lijkt een deel van een rechte lijn te zijn. Stel een vergelijking op van deze lijn en bewijs dat de coördinaten van de punten van de baan aan de vergelijking voldoen.
- Bereken de waarde van t waarvoor de baansnelheid gelijk is aan 0.

T5 De baan van een punt P wordt gegeven door

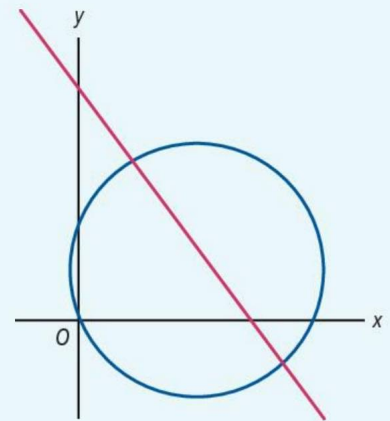
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 5t - 14 \\ y(t) = \ln(t^2 + 4t + 5) \end{cases}$$

- Bereken exact de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de baan van P met de x -as en met de y -as.
- Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan met een horizontale of verticale raaklijn.
- Bereken de baansnelheid voor $t = -3$.

T6 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = 12 - 3t \text{ en } y(t) = 7 + 4t.$$

- Stel een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ op voor de baan van P .
- De bewegingsvergelijkingen van een punt Q zijn $x(t) = 12 + 13\cos(t)$ en $y(t) = c - 13\sin(t)$. De oorsprong is een punt van de baan van Q . Bereken de waarden die c kan hebben en stel voor elk van die waarden een vergelijking op van de baan van Q .



T7 Een kromme is gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2 + 6t + 21} \\ y(t) = \sqrt{4t^2 + 4t + 16} \end{cases}$$

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van deze kromme met de lijn $y = x$.
- Bereken exact de coördinaten van de punten op de kromme met een horizontale of verticale raaklijn.
- Toon aan dat de kromme slechts één punt gemeenschappelijk heeft met de lijn $y = 2x$ en bereken exact de waarde van t voor dit punt.
- Bereken exact de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme in het punt met $t = -1$.

Extra oefening

Je kunt uit de bewegingsvergelijkingen van een lijn of cirkel een vergelijking van die lijn of cirkel afleiden.

- E1**
- a** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 13 - 4t$ en $y(t) = -1 + 5t$.
Stel een vergelijking op voor de baan van P .
- b** De bewegingsvergelijkingen van een punt Q zijn $x(t) = -5 + 7\cos(t)$ en $y(t) = 3 + 7\sin(t)$.
Stel een vergelijking op voor de baan van Q .

Je kunt de coördinaten van de toppen van de baan van een punt berekenen.

- E2** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = t^4 - 4t^3 + 3$ en $y(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$.
Bereken exact de coördinaten van de toppen van de baan van P .

Je kunt de symmetrie van de baan van een punt aantonen.

- E3** Een kromme is gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^4 - 2t^2 - 1 \\ y(t) = t^3 + 5t \end{cases}$$

Bewijs dat de kromme symmetrisch is in de x -as.

Je kunt de (baan)snelheid van een punt op een baan berekenen.

- E4** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$ en $y(t) = t^3 - 2t^2 + 3$.
- a** Het punt $(0, 3)$ ligt op de baan van P .
Bereken exact de baansnelheid in dit punt.
- b** Bereken exact de baansnelheid in het punt met $t = 2$.

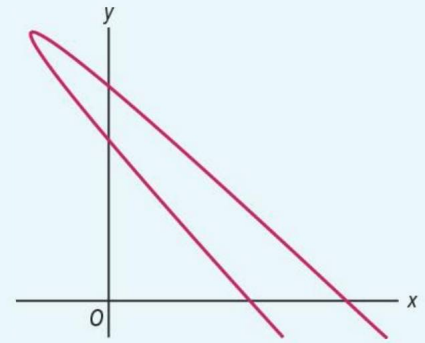
Je kunt de (baan)versnelling in een punt op een baan berekenen.

- E5** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = -t^2 + 3t$ en $y(t) = t^2 - 2t + 3$.
- a** Druk de baansnelheid $|\vec{v}|$ uit in t .
- b** Druk de baanversnelling uit in t .
- c** Bereken exact de baanversnelling in het punt met $t = 2$.
- d** Bereken exact de kleinste waarde die de baansnelheid kan aannemen.

E6 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t \text{ en } y(t) = -t^2 + 5t + 24.$$

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de x -as en met de y -as.
- Bereken exact de coördinaten van de punten op de baan met een horizontale of een verticale raaklijn.
- Bereken exact de baansnelheid en de versnelling in het punt met $t = 1$.
- Een lijn met richtingscoëfficiënt -3 raakt de baan van P . Bereken exact de coördinaten van het raakpunt.



E7 Een kromme is gegeven door de parametervoorstelling

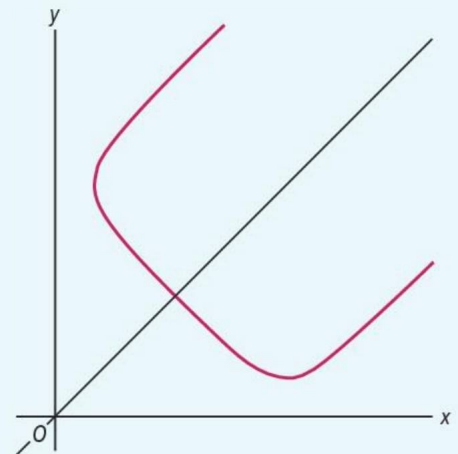
$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t^2 - 4t \\ y(t) = 2t^2 - 2t \end{cases}$$

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de kromme met de x -as en met de y -as.
- Bereken exact de coördinaten van het punt op de kromme waar de raaklijn evenwijdig is met de x -as.
- De kromme snijdt zichzelf in het punt $(-12, 12)$. Bewijs dat de twee raaklijnen in dat punt loodrecht op elkaar staan.
- Op de kromme liggen twee punten waar de raaklijn evenwijdig is met de lijn $y = \frac{1}{2}x$. Bereken exact de waarden van t voor deze punten.

E8 Een kromme is gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2 - 6t + 10} \\ y(t) = \sqrt{t^2 + 6t + 10} \end{cases}$$

- Leg uit dat t elke waarde kan aannemen.
- Bereken exact de coördinaten van de punten op de kromme met een horizontale of een verticale raaklijn.
- Bewijs dat de kromme symmetrisch is in de lijn $y = x$.
- Toon aan dat de kromme de lijn $y = x$ loodrecht snijdt.



Goniometrische formules 20

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In eerdere hoofdstukken heb je geleerd wat goniometrische functies zijn en hoe je deze functies differentieert en primitiveert. Ook heb je goniometrische vergelijkingen leren oplossen.

In dit hoofdstuk leer je de somformules en verdubbelingsformules te gebruiken.

De verdubbelingsformules worden veel toegepast bij herleiden, bij het exact oplossen van vergelijkingen en bij het exact berekenen van integralen. Daarnaast gebruik je sinus- en cosinusfuncties in bewegingsvergelijkingen.

Na dit hoofdstuk heb je alle examenstof met betrekking tot goniometrische functies gezien.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|--|-------------|
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 7 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 24 |
| • <i>Ordenen en structureren</i> | opdracht 39 |



Theorie**Goniometrische formules**

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

$$\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(x)$$

$$\cos(x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Ook geldt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Voorbeeld

Schrijf $f(x) = \sin(1\frac{1}{2}\pi - x)$ zo eenvoudig mogelijk.

Oplossing

$$f(x) = \sin(-\frac{1}{2}\pi - x)$$

$$f(x) = -\sin(\frac{1}{2}\pi + x)$$

$$f(x) = -\cos(x)$$

V1 Herleid de volgende functievoorschriften tot $\sin(x)$, $\cos(x)$, $-\sin(x)$ of $-\cos(x)$.

a $f(x) = \sin(7\pi + x)$

b $g(x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$

c $h(x) = \sin(x + 3\frac{1}{2}\pi)$

d $k(x) = \cos(-x - 23\pi)$

V2 Gebruik de goniometrische formules en schrijf

a $\cos(\frac{1}{3}\pi + x)$ in de vorm $\sin(px + q)$.

b $\sin(x - 2\frac{1}{4}\pi)$ in de vorm $\cos(px + q)$.

c $-\sin(-\frac{1}{3}\pi + 2x)$ in de vorm $\cos(px + q)$.

Theorie

Uit $\sin(A) = \sin(B)$ volgt $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$.

Uit $\cos(A) = \cos(B)$ volgt $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = -B + k \cdot 2\pi$.

Uit $\tan(A) = \tan(B)$ volgt $A = B + k \cdot \pi$.

Voorbeeld 1

Los exact op $\sin(3x) = \sin(1\frac{1}{2}\pi - x)$.

Oplossing

$$3x = 1\frac{1}{2}\pi - x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = \pi - (1\frac{1}{2}\pi - x) + k \cdot 2\pi$$

$$4x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = \pi - 1\frac{1}{2}\pi + x + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad \text{of} \quad 2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Voorbeeld 2

Los exact op $\cos(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Oplossing

$$\cos(3x) = \cos(\frac{1}{4}\pi)$$

$$3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

V3 Los exact op.

a $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

c $\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -\sqrt{3}$

b $\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

d $2\sin\left(3x - \frac{1}{6}\pi\right) = -1$

V4 Los exact op.

a $\cos(\pi - x) = \cos(2x)$

c $\cos(4x) = \cos\left(3\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)\right)$

b $\sin(2x) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$

d $\tan(4x) = \tan\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$

TheorieDe afgeleide van $f(x) = \sin(x)$ is $f'(x) = \cos(x)$.De afgeleide van $g(x) = \cos(x)$ is $g'(x) = -\sin(x)$.**Voorbeeld 1**Differentieer $f(x) = 3\sin^2(x)$.**Oplossing**

$$f'(x) = 3 \cdot 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = 6\sin(x) \cdot \cos(x)$$

Voorbeeld 2Differentieer $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ **Oplossing**

$$g'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot x - \cos(x) \cdot 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-x\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$$

V5 Differentieer.

a $f(x) = \cos(x^2)$

d $k(x) = \sqrt{1 + \sin(4x)}$

b $g(x) = 2\cos^3(x)$

e $m(x) = \ln(\sin(x))$

c $h(x) = \frac{\sin(x)}{2x}$

f $n(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)}$

V6 Op het interval $[0, 9\pi^2]$ is gegeven is de functie $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.**a** Plot en schets de grafiek van f .**b** Bereken exact de nulpunten van f .**c** Bereken exact de extreme waarden van f .

Je leert

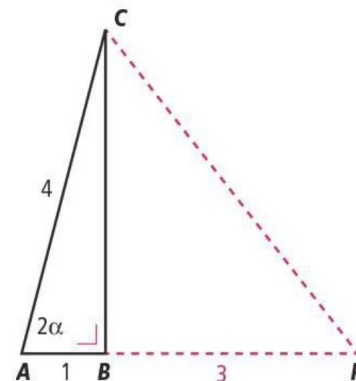
- wat de som- en verschilformules zijn
- wat de verdubbelingsformules zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 1-2-3-4-5-6-7-8-09-9-10
- doorlopend: 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11
- uitdagend: 1-2-3-5-6-7-8-9-10-11-U1

In de rechthoekige driehoek ABC geldt $\cos(2\alpha) = \frac{1}{4}$.
Om $\cos(\alpha)$ en $\sin(\alpha)$ te berekenen kun je op het verlengde van zijde AB een punt P tekenen waarvoor geldt $AP = 4$.
Zo ontstaat een gelijkbenige driehoek.

- Hoe kun je met behulp van de gelijkbenige driehoek APC de exacte waarde van $\cos(\alpha)$ en $\sin(\alpha)$ berekenen?
- Werkt deze methode voor elke waarde van α ?



- 1 Op de eenheidscirkel ligt een punt A met draaihoek α en een punt B met draaihoek β .

- a Neem $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ en $\beta = \frac{1}{4}\pi$.

Geef de exacte coördinaten van A en B .

- b De hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ is $\frac{5}{12}\pi$.

Bereken met behulp van het inproduct de exacte waarde van $\cos(\frac{5}{12}\pi)$.

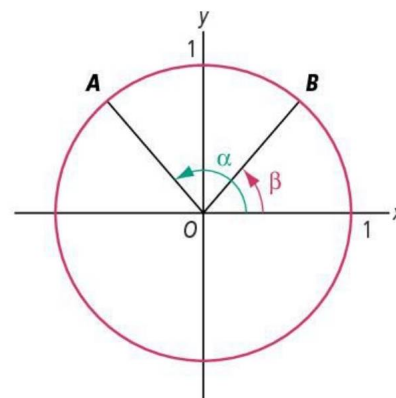
- c Op de manier van de opdrachten a en b kun je een formule afleiden voor $\cos(\alpha - \beta)$.

Druk de coördinaten van A en B uit in α en β .

- d Gebruik het inproduct om een formule voor $\cos(\alpha - \beta)$ af te leiden.

- e Er geldt $\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta - \frac{1}{2}\pi) = \cos(\alpha - (\beta + \frac{1}{2}\pi))$.

Gebruik het antwoord van opdracht d om een formule voor $\sin(\alpha - \beta)$ af te leiden.

**Theorie**

Voor goniometrische functies gelden de zogenaamde **verschilformules**.

$$\cos(t - u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$$

Door u te vervangen door $-u$ kun je ook de **somformules** voor goniometrische functies afleiden:

$$\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$$

Voorbeeld

Bereken exact $\sin(\frac{7}{12}\pi)$.

Oplossing

$$\sin(\frac{7}{12}\pi) = \sin(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi)$$

$$= \sin(\frac{3}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) - \cos(\frac{3}{4}\pi) \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

2 Bereken exact.

H a $\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \dots$
 b $\cos\left(\frac{11}{12}\right)$

3 Gegeven $\sin(t) = \frac{3}{5}$ en $\sin(u) = \frac{7}{25}$ met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi < u < \pi$.
 Bereken exact $\sin(t + u)$ en $\cos(t - u)$.

4 Gebruik de somformules en schrijf zo eenvoudig mogelijk.

a $\sin(2t) = \sin(t + t) = \dots$

b $\cos(2t) = \cos(t + t) = \dots$

5 Gebruik de formule $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ om te laten zien dat uit de formule $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ volgt dat $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ en ook dat $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

Theorie

De volgende formules heten **verdubbelingsformules**.

$$\sin(2t) = 2\sin(t) \cdot \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) \text{ of}$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 \text{ of}$$

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$$

Voorbeeld

Bereken exact $\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)$.

Oplossing

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$$

$$\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2\cos^2\left(\frac{1}{12}\pi\right) - 1$$

$$\cos^2\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}}$$

6 a Bereken exact $\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right)$.

Gebruik daarbij de formule $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

b Bereken exact $\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)$.

7 a Bewijs dat $\tan(t + u) = \frac{\tan(t) + \tan(u)}{1 - \tan(t)\tan(u)}$

Gebruik de somformules voor sinus en cosinus.

b Bewijs dat $\tan(t - u) = \frac{\tan(t) - \tan(u)}{1 + \tan(t)\tan(u)}$

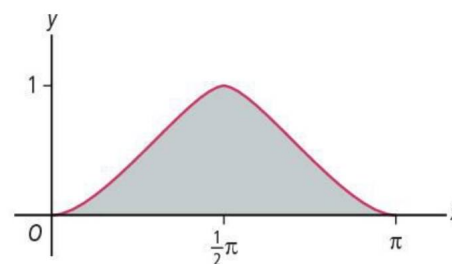
c Bewijs dat $\tan(2t) = \frac{2\tan(t)}{1 - \tan^2(t)}$

Dit is de verdubbelingsformule voor de tangens.

8 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x)$ op het interval $[0, \pi]$.

H G is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x -as.

- a** Toon aan dat $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$.
b Geef een primitieve van $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ en bereken daarmee exact de oppervlakte van G .
c Bereken exact $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2(x) dx$.



Ondersteunende route → maak opdracht O9

9 Primitiveer.

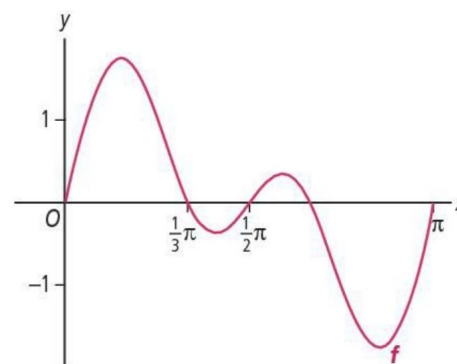
- a** $f(x) = 6\sin(x)\cos(x)$ **c** $h(x) = 3\sin^2(4x) - 3\cos^2(4x)$
b $g(x) = \frac{1}{2} \cos^2(3x)$ **d** $k(x) = 3\sin^2(4x) + 3\cos^2(4x)$

10 Bereken exact.

- a** $\int_{-\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{8}\pi} (\cos^2(2x) - \sin^2(2x)) dx$
b $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx$
c $\int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{1}{3}x\right) dx$

11 a Toon aan dat $\sin(t+u) + \sin(t-u) = 2\sin(t)\cos(u)$.

- b** Bereken exact $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} 2\sin(3x)\cos(x) dx$.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 09** a Geef een primitieve van $f(x) = \sin(x)$ en van $g(x) = \cos(x)$.
 b Primitiveer $h(x) = -\sin(4x)$.

Om functies waarin kwadraten of producten van sinus en cosinus voorkomen te kunnen primitiveren, moet je deze eerst herleiden.

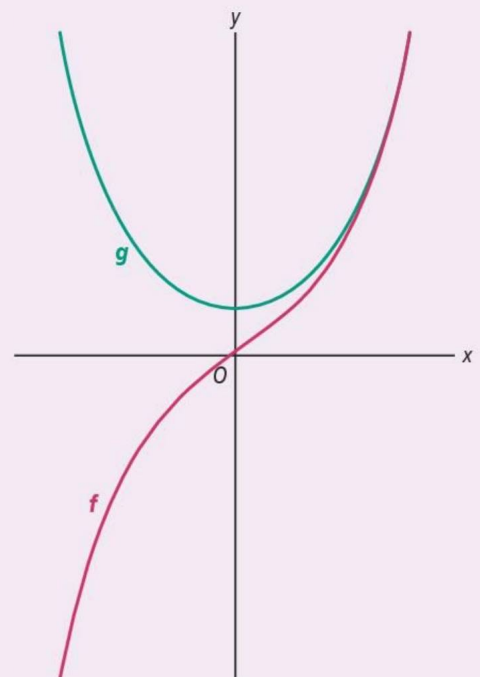
- c Leg uit dat $k(x) = \sin(3x)\cos(3x)$ te herleiden is tot
 $k(x) = \frac{1}{2} \sin(6x)$.
 d Geef een primitieve van k .
 e Leg uit dat $m(x) = 4\cos^2(3x) - 4\sin^2(3x)$ te herleiden is tot $m(x) = 4\cos(6x)$.
 f Geef een primitieve van m .

Uitdagende opdrachten

- U1** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en
 $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Hoewel de functies f en g niet op goniometrische functies lijken, hebben ze zoveel eigenschappen met de functies van de sinus en de cosinus gemeen, dat ze een verwante naam hebben gekregen: de functie f heet de cosinus hyperbolicus, kortweg $f(x) = \cosh(x)$ en g de sinus hyperbolicus, $g(x) = \sinh(x)$.

- a Toon aan:
 $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$.
 b Leid zelf een soortgelijke formule af voor $\cosh(x + y)$.
 c Differentieer $f(x) = \cosh(x)$ en $g(x) = \sinh(x)$.
 d Geef ook een primitieve van f en van g .



Je herhaalt • hoe je goniometrische vergelijkingen oplost

Leerroutes • ondersteunend: 12-13-14-15-016-017-17-18-19
 • doorlopend: 12-13-14-15-16-17-18-19-20
 • uitdagend: 12-14-15-16-17-18-19-20-U3

Op het bord staan enkele vergelijkingen.

- Welke kun je exact oplossen en voor welke vergelijkingen heb je je rekenmachine nodig?

$$\sin(2x) = \cos(3x)$$

$$\sin(2x) = -\sin(3x)$$

$$2\sin(x) = \sqrt{3}\cos(x)$$

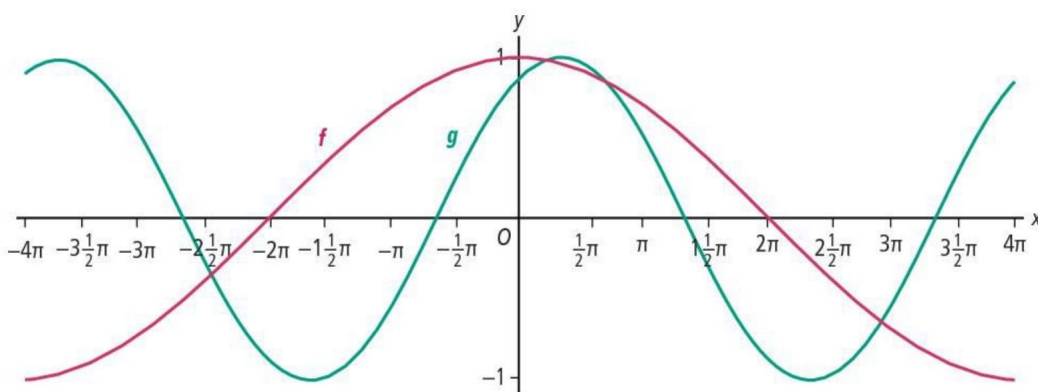
$$\sin(2x) = \sin(3x)$$

$$\sqrt{3}\sin(x) = \cos(3x)$$

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\cos(3x - \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x)\cos(x) = \cos(x)$$



- 12** Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos(\frac{1}{4}x)$ en $g(x) = \cos(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi))$ op het interval $[-4\pi, 4\pi]$.

Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

$$\cos(A) = \cos(B)$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \text{ of } A = -B + k \cdot 2\pi$$

- 13** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x)$ en $g(x) = \sin(3x - \frac{1}{6}\pi)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

$$\sin(A) = \sin(B)$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \text{ of } A = \pi - B + k \cdot 2\pi$$

- 14** Los exact op.

a $\sqrt{3}\sin(x) = \cos(x)$

b $\sin(3x) = -\cos(3x)$

c $2\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = -2\cos(x - \frac{1}{3}\pi)$

$$p \sin(A) = q \cos(A) \text{ geeft } \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{q}{p}$$

$$\text{en dus } \tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{q}{p}$$

- 15** Gegeven is de vergelijking $\sin(2x) = \cos(3x)$.
- a** Waarom kun je de vergelijking niet exact oplossen met de tangens?
- b** Leg uit dat je de vergelijking kunt herleiden tot $\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(3x)$ en los de vergelijking op.

$$\sin(A) = \cos(B) \text{ geeft}$$

$$\cos\left(A - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(B)$$

$$A - \frac{1}{2}\pi = B + k \cdot 2\pi \text{ of } A - \frac{1}{2}\pi = -B + k \cdot 2\pi$$

Theorie

Goniometrische vergelijkingen kun je oplossen door deze te herleiden tot de vorm $\cos(A) = \cos(B)$ of $\sin(A) = \sin(B)$. Bij het oplossen van vergelijkingen met $\sin^2(A)$ of $\cos^2(A)$ kun je vaak de substitutie $\sin(A) = p$ of $\cos(A) = p$ gebruiken.

Voorbeeld 1

Los exact op $\cos(\pi - x) = -\sin(3x)$.

Oplossing

$$\cos(\pi - x) = \sin(3x + \pi)$$

$$\cos(\pi - x) = \cos\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\pi - x = 3x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \pi - x = -3x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$-4x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 2x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi - k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Voorbeeld 2

Los exact op $3\sin(x) - \sin^2(x) = 2$.

Oplossing

$$\text{Stel } \sin(x) = p.$$

$$3p - p^2 = 2$$

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$(p - 2)(p - 1) = 0$$

$$p = 2 \text{ of } p = 1$$

$$\sin(x) = 2 \text{ (geen oplossingen) of } \sin(x) = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Los exact op.
- H** **a** $\sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) = \cos(2x)$ **c** $3 - 2\cos^2(x) = -5\cos(x)$
- b** $\cos(x + \pi) = -\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$ **d** $2\sin^2(x) + 5\cos(x) = 4$

Ondersteunende route → maak opdracht 017

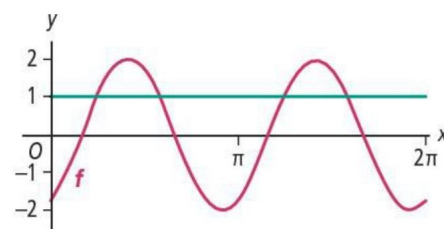
- 17** Los exact op.
- a** $2\sin(x) \cdot \cos(x) = -\frac{1}{2}$ **c** $\cos(2x) - 2\cos(x) + 1 = 0$
- b** $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(x)$ **d** $2\cos^2(2x) = \cos(2x) + 1$

20.2 Vergelijkingen

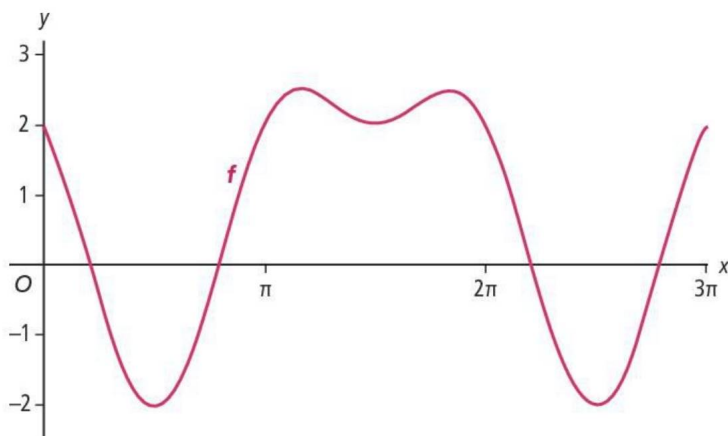
18 Op het interval $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie

H $f(x) = 2\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$ en de lijn $y = 1$.

- a** Los exact op $f(x) = 1$.
- b** Voor welke waarden van x geldt $f(x) > 1$?
- c** Los exact op $f(x) \leq -\sqrt{2}$.



- 19** Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
 - b** Bewijs dat $f'(x) = 2\sin(2x)$.
 - c** Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn $\sqrt{3}$ is.
 - d** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = \pi$.



- 20** Gegeven is de functie $f(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin(x)$ op het interval $[0, 3\pi]$.
- a** Los exact op $2\cos^2(x) - 2\sin(x) \geq \frac{1}{2}$.
 - b** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}$.
 - c** Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
 - d** Geef het bereik van f .

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

016 Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.

- a Welke goniometrische formule is toegepast in stap 1?
- b Welke formule kun je gebruiken om $\sin(x + \frac{3}{4}\pi)$ te herschrijven tot $\cos(\dots)$?
- c Vul stap 2 in.
- d Gebruik $\cos(A) = \cos(B)$ dus $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = -B + k \cdot 2\pi$ om de vergelijking verder op te lossen.

Los op.

- e $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = -\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$ g $\sin(2x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(3x + \frac{1}{2}\pi)$
- f $\cos^2(x) + 3\sin(x) = 3$ h $6\sin^2(x) - 5\cos(x) = 2$

•	$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\sin(x - \frac{1}{4}\pi)$	
•	$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(x + \frac{3}{4}\pi)$	1
•	$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(\dots)$	2
•		

017 a Om de vergelijking $4\sin(x)\cos(x) = \sqrt{3}$ op te lossen heb je een verdubbelingsformule nodig. Welke is dat?

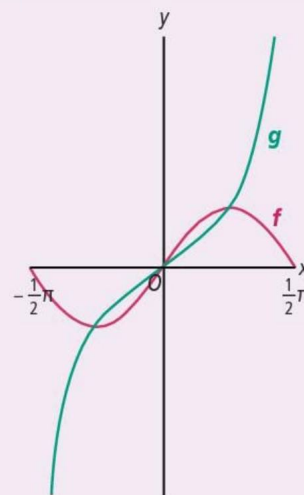
- b Los de vergelijking verder op.
- c Voor de vergelijking $\cos(2x) = 5\sin(x) - 2$ kun je een verdubbelingsformule voor de cosinus gebruiken. Waarom is het in dit geval handig om te kiezen voor $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$?
- d Pas deze verdubbelingsformule toe en los de vergelijking verder op.

•	$4\sin(x)\cos(x) = \sqrt{3}$	
•	$2\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	
•	$\dots = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	
•		

Uitdagende opdrachten

U2 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x)$ en $g(x) = \tan(x)$ op het interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

- a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
- b Bewijs dat $G(x) = -\ln(|\cos(x)|)$ een primitieve is van g .
- c V is het gebied rechts van de y -as dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g . Bereken exact de oppervlakte van V .
- d Primitieveer $h(x) = \tan^2(x)$. Bedenk dat je $h(x)$ kunt schrijven als $h(x) = \tan^2(x) + 1 - 1$.
- e Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V te wentelen om de x -as.



Je leert

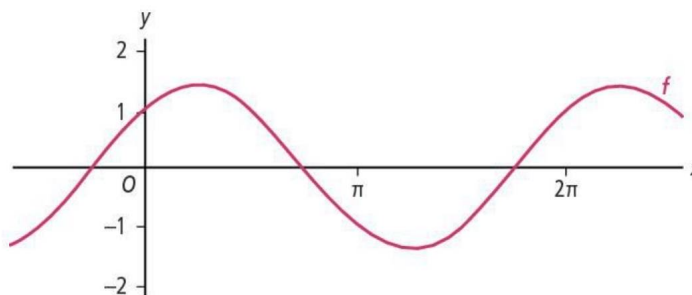
- hoe je eigenschappen van goniometrische functies vindt

Leerroutes

- ondersteunend: 21-022-22-23-24-25-26
- doorlopend: 21-22-23-24-25-26-27
- uitdagend: 21-22-24-25-26-27-U3

De grafiek van de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ lijkt een sinusoïde te zijn.

- Als gegeven is dat de grafiek van f een sinusoïde is, hoe kun je dan de waarden van a , b , c en d in de formule $y = a\sin(b(x - c)) + d$ bepalen?
- Hoe zou je kunnen bewijzen dat de grafiek een sinusoïde is?



21 Gegeven is de functie $f(x) = \cos^4(x) - \sin^4(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

- Bereken exact de nulpunten van f .
- Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
- De grafiek van een functie g is een sinusoïde met dezelfde periode, nulpunten en toppen als de grafiek van f .
Stel een functievoorschrift op voor g .
- Laat zien dat het functievoorschrift van f te herleiden is tot dat van g .

Theorie

Met behulp van wiskundige technieken kun je eigenschappen van goniometrische functies en grafieken berekenen of bewijzen. Denk daarbij bijvoorbeeld aan:

- De coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de assen.
- De coördinaten van de toppen en buigpunten van de grafiek.
- Een vergelijking van een raaklijn aan de grafiek.
- Vergelijkingen van asymptoten.
- Bewijzen dat twee functies hetzelfde zijn.
- Bewijzen dat een grafiek symmetrisch is.

Voorbeeld 1

Bewijs dat de functies $f(x) = (\cos(x) - \sin(x))^2$ en $g(x) = 1 - \sin(2x)$ hetzelfde zijn.

Oplossing

$$\begin{aligned} (\cos(x) - \sin(x))^2 &= \\ &= \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x) \\ &= 1 - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - \sin(2x) \\ f(x) &= g(x) \text{ dus } f \text{ en } g \text{ zijn hetzelfde.} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bereken exact de nulpunten van $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$.

Oplossing

$$f(x) = 0 \text{ geeft } \sin(x) = -\sin(2x).$$

$$\sin(x) = \sin(2x + \pi)$$

$$x = 2x + \pi + k \cdot 2\pi$$

$$-x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\pi - k \cdot 2\pi$$

$$x = -\pi - k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } x = \pi - (2x + \pi) + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } x = \pi - 2x - \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } 3x = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Ondersteunende route → maak opdracht 022

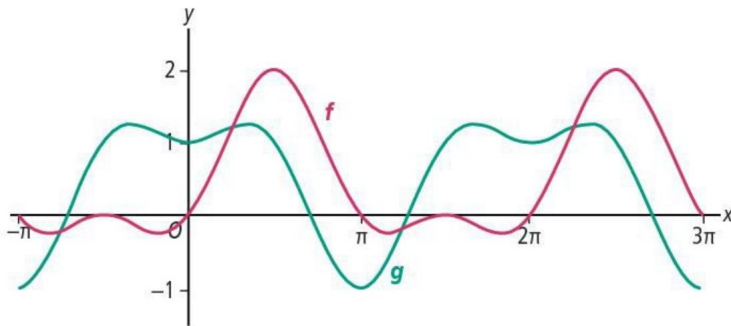
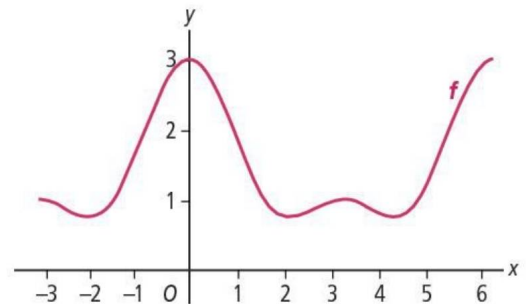
22**H**Gegeven zijn de functies $f(x) = \cos(3x)$ en

$$g(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

- Plot de grafieken van f en g . Vallen de grafieken samen?
- Schrijf $\cos(3x)$ als $\cos(2x + x)$ en pas een somformule toe op $\cos(2x + x)$.
- Gebruik de verdubbelingsformules om aan te tonen dat f en g dezelfde functie zijn.

23Gegeven zijn de functies $f(x) = 1 + \cos(x) + \cos^2(x)$ en $g(x) = 1 - \cos(x)$. Getekend is de grafiek van f .

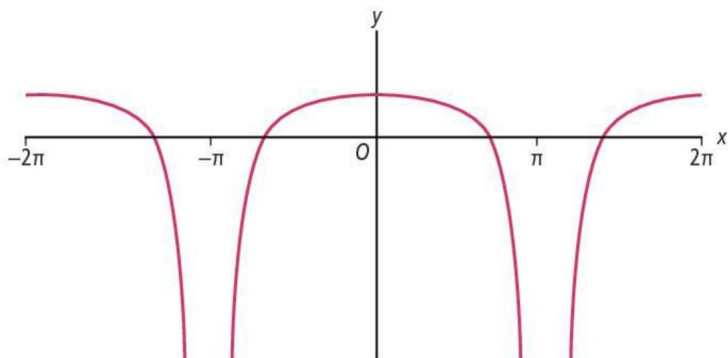
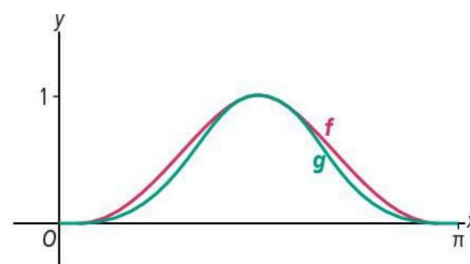
- Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f op het interval $[0, 2\pi]$.
- Voor de productfunctie p geldt: $p(x) = f(x) \cdot g(x)$. Schrijf het functievoorschrift van p zonder haakjes.
- Verklaar uit het functievoorschrift van p dat de grafiek van p de x -as raakt.

**24**Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$ en

$$g(x) = \sin^2(x) + \cos(x).$$

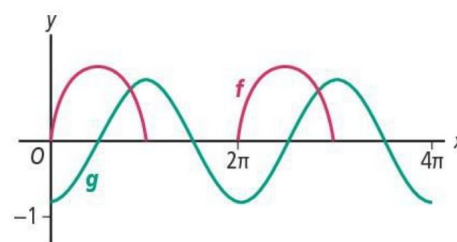
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g op het interval $[-\pi, 3\pi]$.
- Bewijs dat de grafiek van f de x -as raakt.
- Bewijs dat de grafiek van g symmetrisch is in de y -as.
- De grafiek van g is het beeld van de grafiek van f bij het uitvoeren van een aantal transformaties. Onderzoek welke transformaties nodig zijn en stel met behulp van deze transformaties een nieuw functievoorschrift voor g op.
- Toon aan dat het nieuwe functievoorschrift voor g gelijkwaardig is met het gegeven functievoorschrift.

- 25** De grafieken van de functies $f(x) = \sin^3(x)$ en $g(x) = \sin^4(x)$ vallen op het interval $[0, \pi]$ praktisch samen.
- Bewijs dat de maximale verticale afstand tussen de twee grafieken wordt bereikt als $\sin(x) = \frac{3}{4}$.
 - Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van g .
 - De functie $F(x) = a\cos^3(x) + b\cos(x)$ is een primitieve van f .
Bereken de waarden van a en b .
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.



- 26** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\frac{1}{2} + \cos(x)}{1 + \cos(x)}$ op $[-2\pi, 2\pi]$.
- H**
- Bereken exact de nulpunten van f .
 - Bereken exact de extreme waarden.
 - Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f .
 - Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de grafiek van f de x -as snijdt.

- 27** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{6\sin(x)}$ en $g(x) = -2\cos(x)$ op het interval $[0, 4\pi]$.
- Bepaal het domein van f .
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Onderzoek met exacte berekeningen of de grafieken van f en g elkaar loodrecht snijden.



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

022

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(3x)$ en $g(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

- Plot de grafieken van f en g . Vallen de grafieken samen?
- Op het blaadje is een begin gemaakt met het herschrijven van $\sin(3x)$.
Leg uit wat er in stap 1 is gedaan.
- Gebruik in stap 2 de verdubbelingsformule voor $\sin(2x)$ om het eerste gedeelte in te vullen.
- In stap 2 heb je ook de verdubbelingsformule voor $\cos(2x)$ nodig. Daarbij heb je de keuze uit drie mogelijkheden.
Je werkt toe naar de formule van g , welke mogelijkheid voor $\cos(2x)$ is dan handig om te gebruiken? Vul die in bij stap 3 en werk de haakjes weg.
- In $g(x)$ komt geen cosinus voor.
Welke formule kun je gebruiken om $\cos^2(x)$ uit stap 3 te herschrijven tot een vorm met alleen sinus?
- Maak de herleiding verder af.

●	$\sin(3x) = \sin(2x + x) =$	
●	$= \sin(2x) \cdot \cos(x) + \cos(2x) \cdot \sin(x)$	1
●	$= \dots \cdot \cos(x) + (\dots) \cdot \sin(x)$	2
●	$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \dots$	3
●	$= \dots$	
●	$= g(x)$ dus f en g zijn hetzelfde.	

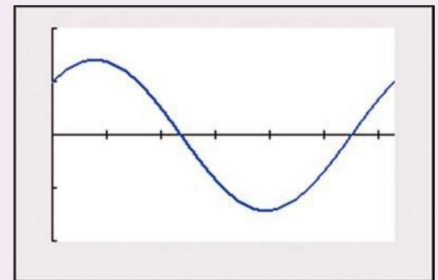
Uitdagende opdrachten

U3

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

Het vermoeden is dat de grafiek puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{3}{4}\pi, 0)$. Om dat vermoeden te bewijzen, verschuif je de grafiek eerst $\frac{3}{4}\pi$ naar links.

- Geef een functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek.
- Toon aan dat de grafiek van g puntsymmetrisch is in de oorsprong.
- Waarom heb je nu bewezen dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{3}{4}\pi, 0)$?
- Je kunt ook bewijzen dat de grafiek van f puntsymmetrisch is door het functievoorschrift anders te schrijven.
Laat zien dat je het functievoorschrift van f kunt herschrijven als $f(x) = -\sqrt{2}\sin(x - \frac{3}{4}\pi)$.
- Hoe zie je aan dit functievoorschrift dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{3}{4}\pi, 0)$?



Je leert

- hoe je de periode berekent van een periodieke beweging
- hoe je eigenschappen van de baan bij een periodieke beweging kunt vinden

Leerroutes

- ondersteunend: 28-29-30-31-32-033-33
- doorlopend: 28-29-30-31-32-33-34
- uitdagend: 28-30-31-32-33-34-U4

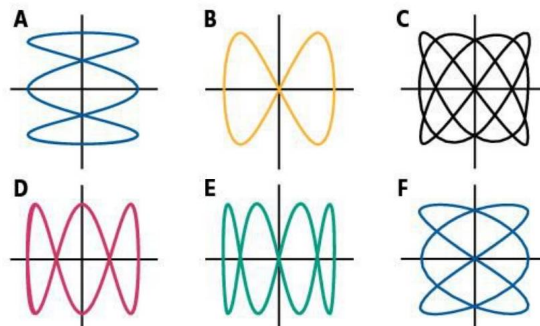
De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(at) \\ y(t) = 3\sin(bt) \end{cases}$$

Een baan met dergelijke bewegingsvergelijkingen heet een Lissajous-figuur.

Als $a = b$ dan is de baan van P een cirkel met straal 3.

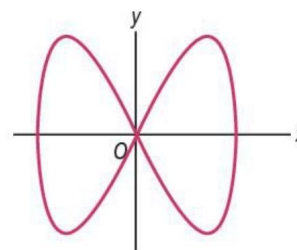
- Onderzoek welke waarden van a en b bij de verschillende figuren kunnen horen.



- 28** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi t\right)$ en $y(t) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)$ met t in seconden.

De beweging start op $t = 0$.

- Welke waarden kunnen $x(t)$ en $y(t)$ aannemen?
- Bereken de periode van x en de periode van y .
- Na hoeveel seconden heeft P de baan één keer doorlopen?

**Theorie**

Zijn x en y periodieke functies en is ook de beweging van punt $P(x, y)$ periodiek, dan is de **periode** van die beweging gelijk aan het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de periodes van x en y .

Voorbeeld

Punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right)$ en $y(t) = \sin\left(\frac{2}{5}\pi t\right)$. Bereken exact de periode.

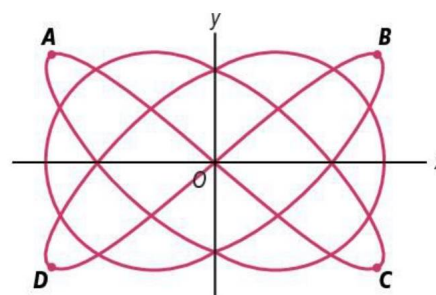
Oplossing

De periode van x is 6.
De periode van y is 5. Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud is 30, dus de periode van de baan is 30.

- 29** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 3\cos\left(\frac{1}{4}\pi t\right)$ en $y(t) = 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi t\right)$.

De beweging start op $t = 0$.

- Bereken exact de periode van de beweging.
- Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de raaklijn aan de baan evenwijdig is aan de y -as.

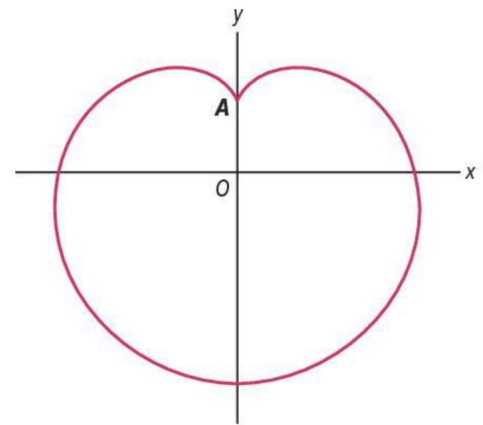


- 30** De *cardioïde* (hartkromme) is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2\sin(t) + \sin(2t)$ en $y(t) = -2\cos(t) - \cos(2t)$.

A is het punt van de baan op de positieve y -as.

- Bereken de periode van de beweging.
- Bereken welke waarden x en y kunnen aannemen.
- Op welk tijdstip zal P zich in A bevinden?
- Bereken exact de snelheid van P in A .
- Op $t = \frac{1}{2}\pi$ bevindt P zich in B .

Stel een vergelijking op van de raaklijn in B aan de baan.



Theorie

De baan van een punt P wordt bepaald door de bewegingsvergelijkingen van P . Eigenschappen van de baan die je met behulp van wiskundige technieken kunt berekenen zijn onder andere:

- De periode van de beweging.
- Het bereik van $x(t)$ en $y(t)$.
- De coördinaten van de toppen van de baan.
- De coördinaten van de snijpunten met de assen of met andere lijnen.
- Vergelijkingen van raaklijnen aan de baan.
- De snelheid en de baanversnelling in een punt van de baan.

Voorbeeld 1

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

gegeven door
$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan van P met de lijn $y = x$.

Oplossing

Substitueer $x(t)$ en $y(t)$ in $y = x$.

$$\sin(t) = \cos(2t)$$

$$\cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2t)$$

$$t - \frac{1}{2}\pi = 2t + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad t - \frac{1}{2}\pi = -2t + k \cdot 2\pi$$

$$-t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = -\frac{1}{2}\pi - k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x\left(-\frac{1}{2}\pi - k \cdot 2\pi\right) = -1 \quad \text{en} \quad x\left(\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

De snijpunten zijn $(-1, -1)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Voorbeeld 2

De bewegingsvergelijkingen van een punt Q zijn

gegeven door
$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(3t) \end{cases}$$

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de baan in het punt waarin Q zich bevindt op $t = \frac{1}{6}\pi$.

Oplossing

$x(\frac{1}{6}\pi) = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $y(\frac{1}{6}\pi) = 0$ dus Q bevindt zich in $(1\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$.

$$x'(t) = 6\cos(2t) \text{ geeft } x'(\frac{1}{6}\pi) = 3.$$

$$y'(t) = -6\sin(3t) \text{ geeft } y'(\frac{1}{6}\pi) = -6.$$

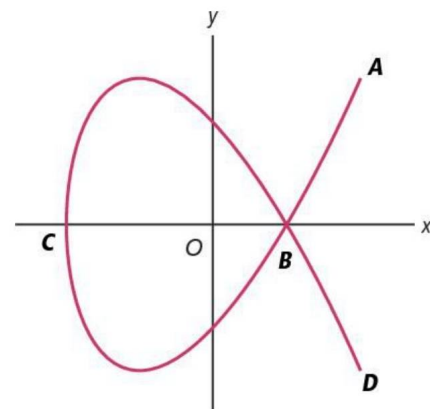
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $-\frac{6}{3} = -2$.

Dus $y = -2x + b$.

$(1\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ invullen geeft $y = -2x + 3\sqrt{3}$.

20.4 Parametervoorstellingen

- 31** De baan van het punt $P(\cos(2t), \cos(3t))$ met $0 \leq t \leq \pi$ snijdt de x -as in de punten B en C .
- In welk punt start de beweging? En waar eindigt de beweging?
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de assen.
 - Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waar de raaklijn aan de baan evenwijdig is met de x -as of de y -as.
 - Toon aan dat de baan symmetrisch is in de x -as.
 - Bewijs dat de baansnelheid van P in B groter is dan in C .

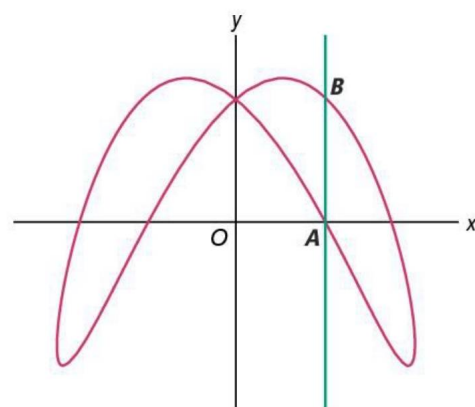


- 32** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 2\cos^2(t)$ en $y(t) = 1 - 2\cos(2t)$.
- Plot de baan van P en stel een vergelijking op van de rechte lijn waar de baan op ligt.
 - Bewijs met behulp van de bewegingsvergelijkingen dat alle punten van de baan op de lijn uit opdracht a liggen.
 - Voor welke waarden van x valt de baan van P samen met de lijn?

Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 2 + \frac{1}{2}\sin(2t)$ en $y(t) = 4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t)$.
- Plot de baan van P en bereken exact de coördinaten van het gemeenschappelijk punt met de x -as.
 - Bewijs dat de baan van P op een deel van de grafiek van de functie $f(x) = 4x^2 - 16x + 16$ ligt.
 - Door een beperkt domein te kiezen voor f , vallen de grafiek van f en de baan van P precies samen. Bereken exact welk domein dat is.

- 34** Gegeven is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 5\cos(t) \\ y(t) = 5\sin(2t - \frac{2}{3}\pi) \end{cases}$
- Punt P passeert de y -as steeds met dezelfde snelheid. Bereken de exacte waarde van deze snelheid.
 - De lijn $x = 2\frac{1}{2}$ snijdt de baan achtereenvolgens in A en in B . Bewijs dat de helling van de baan in A twee keer zo groot is als de helling van de baan in B .



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

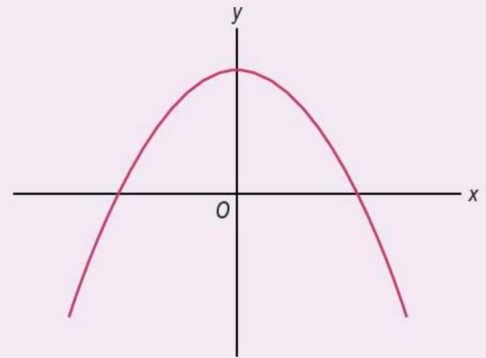
033 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 3\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $y(t) = 3\sin(2t)$ met t in het interval $[0, 2\pi]$.

De baan lijkt een deel van de parabool met vergelijking $y = 3 - \frac{2}{3}x^2$ te zijn. In deze opdracht ga je dit bewijzen.

- Substitueer $x(t) = 3\cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ en $y(t) = 3\sin(2t)$ in de vergelijking $y = 3 - \frac{2}{3}x^2$ in stap 1 op het blaadje.
- Toon aan dat de vergelijking die je dan krijgt te herleiden is tot $\sin(2t) = 1 - 2\cos^2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$.

Je moet nu laten zien dat er links en rechts van het $=$ -teken voor elke waarde van t hetzelfde staat.

- Voor de volgende stap kun je een verdubbelingsformule van de cosinus gebruiken. Welke formule is dat?
- Vul stap 3 in.
- Welke goniometrische formule kun je in stap 4 gebruiken om het minteken voor de cosinus weg te werken? Vul stap 4 in.
- Welke formule heb je nodig in stap 5 om een cosinus te herschrijven tot een sinus?
- Voor welke waarden van x valt de parabool bij $y = 3 - \frac{2}{3}x^2$ samen met de baan van P ?



☐	$y = 3 - \frac{2}{3}x^2$	
☐	$3\sin(2t) = 3 - \dots$	1
☐	$\sin(2t) = 1 - 2\cos^2\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$	2
☐	$\sin(2t) = -\cos(\dots)$	3
☐	$\sin(2t) = \cos(\dots)$	4
☐	$\sin(2t) = \sin(\dots)$	5
☐	Dit klopt voor elke waarde van t	
☐	dus de baan van P is	
☐	een deel van de parabool	
☐	$y = 3 - \frac{2}{3}x^2$.	

Uitdagende opdrachten

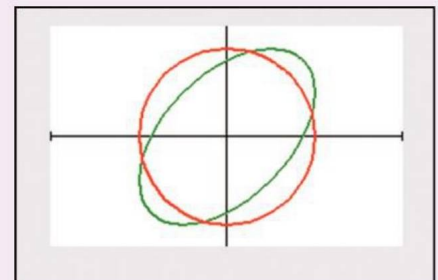
- U4** **a** Toon aan dat de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen $x(t) = \sin(t)$ en $y(t) = \sin\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)$ voldoet aan de vergelijking $4x^2 + 4y^2 - 4xy = 3$.

De baan van P is een ellips (groene baan). Een ellips heeft een lange en een korte as.

- Bereken de lengte van de lange as en van de korte as van de ellips.

De oppervlakte van een ellips kun je berekenen met de formule $O = \pi \cdot \frac{1}{2} \text{korte as} \cdot \frac{1}{2} \text{lange as}$.

- In de plot is naast de ellips ook de eenheidscirkel te zien (rode baan). Laat met een berekening zien dat de cirkel een grotere oppervlakte heeft dan de ellips.

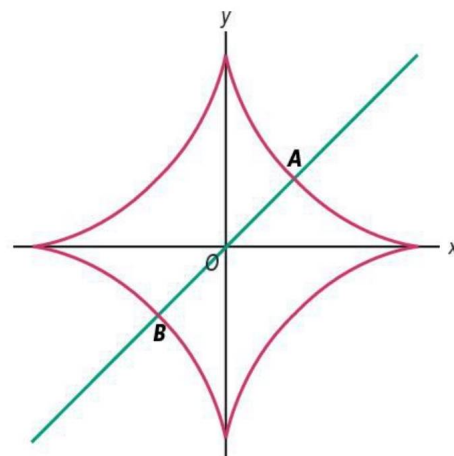


- 35** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos^3(t) \\ y(t) = 4\sin^3(t) \end{cases} \text{ met } t \geq 0 \text{ in seconden.}$$

De baan van P heet een astroïde (sterkromme).

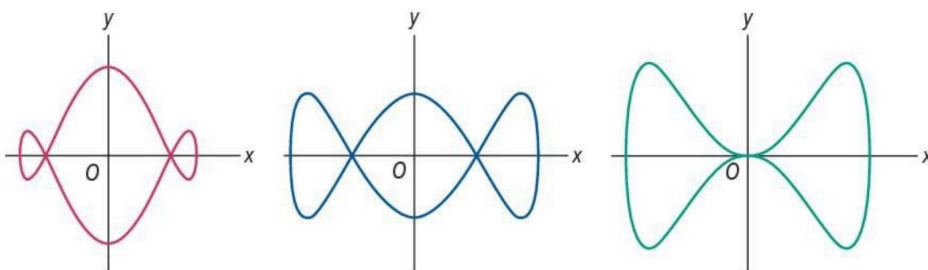
- Welke waarden kunnen $x(t)$ en $y(t)$ aannemen?
- In hoeveel seconden legt P de baan één keer af?
- De punten A en B zijn de snijpunten van de astroïde met de lijn $y = x$.
Bereken exact de coördinaten van A en B .
- Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de baan in A .
- Bewijs dat $v(t) = 6|\sin(2t)|$.
- Bewijs dat de snelheid van punt P maximaal is in A .



- 36** Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \cos(x) - \cos^2(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

- Los exact op $f(x) = 2$.
- Bereken exact alle extreme waarden van f .
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.

- 37** Voor elke waarde van a zijn de bewegingsvergelijkingen van punt P gegeven door $x(t) = 2\cos(t)$ en $y(t) = 4\sin^3(t) - a\sin(t)$.



Voor $a = 2$, $a = 3$ en $a = 4$ is de baan van P getekend.

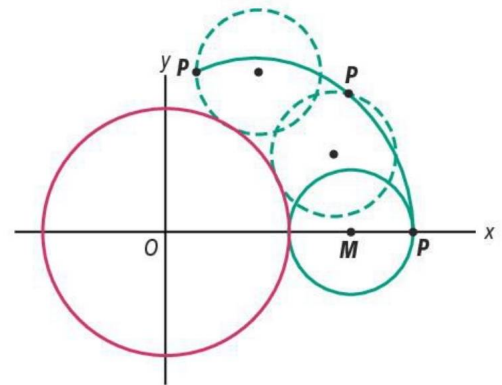
- Bereken in gehele graden de hoek waaronder de baan voor $a = 2$ zichzelf snijdt.
- Bereken exact voor welke waarden van a de baan vier punten gemeenschappelijk heeft met de x -as.

- 38** Gegeven is de functie $f(x) = 6\cos(x) + \cos(2x) - 2\frac{1}{2}$ op het interval $[0, 2\pi]$.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as.
- Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.

- 39** De groene cirkel met middelpunt M en straal 1 rolt over de rode cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$. Punt P ligt op de groene cirkel en op $t = 0$ bevindt P zich in $(r + 2, 0)$. Tijdens het rollen beweegt M zich over de cirkel met middelpunt O en straal $r + 1$.

- a** Leg uit dat voor M geldt $\begin{cases} x(t) = (r + 1)\cos(t) \\ y(t) = (r + 1)\sin(t) \end{cases}$
- b** P draait $r + 1$ keer om M als de groene cirkel één keer om de rode draait.
Controleer dat voor $r = 2$ en voor $r = 4$.
- c** Gebruik $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$ om aan te tonen dat $\begin{cases} x(t) = (r + 1)\cos(t) + \cos((r + 1)t) \\ y(t) = (r + 1)\sin(t) + \sin((r + 1)t) \end{cases}$ de bewegingsvergelijkingen van P zijn.
- d** De baan van P heet een epicycloïde.
Onderzoek hoe de baan van P eruitziet voor verschillende gehele waarden van r . Plot telkens de baan en de cirkel.
Wat is het verband tussen r en het aantal hoekpunten van de baan?
- e** Onderzoek hoe de baan van P eruitziet als r een rationaal getal is. Neem bijvoorbeeld voor r achtereenvolgens de waarden $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{5}$.
Kun je een verband ontdekken tussen r en het aantal hoekpunten van de baan?

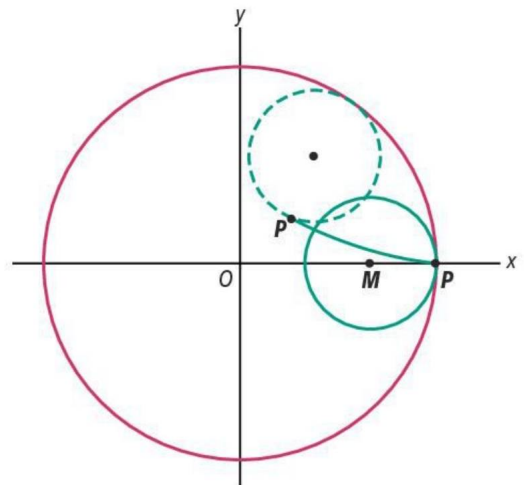


Je kunt ook een cirkel binnen een grotere cirkel laten rollen. De banen die je zo krijgt noem je hypocycloïden. Op soortgelijke manier als hierboven kun je de bewegingsvergelijkingen voor die banen afleiden.

Er geldt: $\begin{cases} x(t) = (r - 1)\cos(t) + \cos((r - 1)t) \\ y(t) = (r - 1)\sin(t) - \sin((r - 1)t) \end{cases}$

De astroïde uit opdracht 35 is een hypocycloïde.

- f** Onderzoek voor welke waarde van r je een astroïde krijgt.



Samenvatting

Theorie

Som- en verschilformules

$$\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$$

Verdubbelingsformules

$$\sin(2t) = 2\sin(t) \cdot \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) \text{ of}$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 \text{ of}$$

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$$

Je kunt de som-, verschil- en verdubbelingsformules gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen en bij het herleiden van functievoorschriften.

Voorbeeld

Bereken exact $\sin(\frac{1}{12}\pi)$.

Oplossing

Uit $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ volgt

$$\cos(\frac{1}{6}\pi) = 1 - 2\sin^2(\frac{1}{12}\pi)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - 2\sin^2(\frac{1}{12}\pi)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 = -2\sin^2(\frac{1}{12}\pi)$$

$$\sin^2(\frac{1}{12}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

$$\sin(\frac{1}{12}\pi) > 0, \text{ dus } \sin(\frac{1}{12}\pi) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}.$$

- S1** Gegeven $\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ met $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$.
Bereken exact $\cos(t - \frac{1}{6}\pi)$.

Vaardigheid

Je kunt goniometrische vergelijkingen oplossen.

Goniometrische vergelijkingen kun je oplossen door deze te herleiden tot de vorm $\cos(A) = \cos(B)$ of $\sin(A) = \sin(B)$.

Uit $\sin(A) = \sin(B)$ volgt $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$.

Uit $\cos(A) = \cos(B)$ volgt $A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = -B + k \cdot 2\pi$.

Uit $\sin(A) = \cos(B)$ volgt $\cos(A - \frac{1}{2}\pi) = \cos(B)$ en dus

$$A - \frac{1}{2}\pi = B + k \cdot 2\pi \text{ of } A - \frac{1}{2}\pi = -B + k \cdot 2\pi.$$

Uit $\tan(A) = \tan(B)$ volgt $A = B + k \cdot \pi$.

Uit $p\sin(A) = q\cos(A)$ volgt $\frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{q}{p}$ en dus

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{q}{p}$$

Bij het oplossen van vergelijkingen met $\sin^2(A)$ of $\cos^2(A)$ gebruik je vaak de substitutie $\sin(A) = p$ of $\cos(A) = p$.

Voorbeeld

Los exact op $\sin(2x) = \cos(x + \frac{1}{4}\pi)$.

Oplossing

$$\cos(2x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x + \frac{1}{4}\pi)$$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = x + \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } 2x - \frac{1}{2}\pi = -x - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

S2 Los exact op.

- a** $\sin(3x) = -\sin(2x)$
b $\sin\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$
c $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
d $3\cos(2x - \pi) = \sqrt{3}\sin(2x)$
e $2\cos^2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 4 + 7\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

$$\begin{aligned} -\sin(A) &= \sin(A + \pi) \\ \sin(A) &= \cos\left(A - \frac{1}{2}\pi\right) \\ -\cos(A) &= \cos(A + \pi) \\ \cos(A) &= \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

Vaardigheid

Je kunt eigenschappen van goniometrische functies vinden.

Voorbeelden daarvan zijn onder andere:

- De coördinaten van de snijpunten met de assen.
- De coördinaten van de toppen en buigpunten van de grafiek.
- Een vergelijking van een raaklijn aan de grafiek.
- Vergelijkingen van asymptoten.
- Aantonen dat twee functies gelijkwaardig zijn.
- Aantonen dat een grafiek symmetrisch is.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.
 Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .

Oplossing

$$f'(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x)$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2\cos(x) + 2\cos(2x) = 0.$$

$$\cos(x) = -\cos(2x)$$

$$\cos(x) = \cos(2x + \pi)$$

$$x = 2x + \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -2x - \pi + k \cdot 2\pi$$

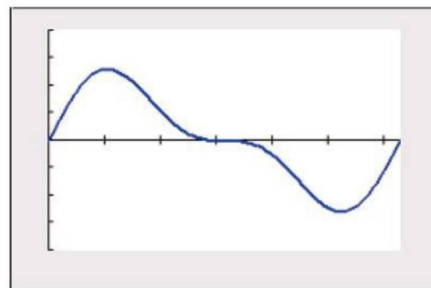
$$-x = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\pi - k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{Op het interval } [0, 2\pi]: x = \frac{1}{3}\pi \text{ of } x = \pi \text{ of } x = \frac{2}{3}\pi.$$

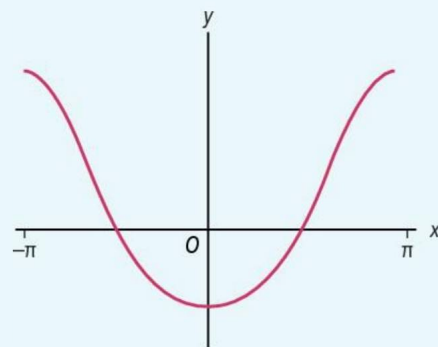
In de plot zie je dat de grafiek een top heeft bij $x = \frac{1}{3}\pi$ en bij $x = \frac{2}{3}\pi$.

De coördinaten van de toppen zijn $(\frac{1}{3}\pi, 1\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\frac{2}{3}\pi, -1\frac{1}{2}\sqrt{3})$.



Samenvatting

- S3** Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3\cos(x) - \sin^2(x)$ op het interval $[-\pi, \pi]$.
- Bereken exact de nulpunten van f .
 - Bereken exact het bereik van f .
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.



Vaardigheid

Je kunt de periode berekenen van een periodieke beweging.

Zijn x en y periodieke functies en is ook de beweging van punt $P(x, y)$ periodiek, dan is de periode van die beweging gelijk aan het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de periodes van x en y .

Voorbeeld

Punt P heeft bewegingsvergelijkingen $x(t) = \sin(\pi t)$ en $y(t) = \sin(\frac{3}{5}\pi t)$. Bereken exact de periode.

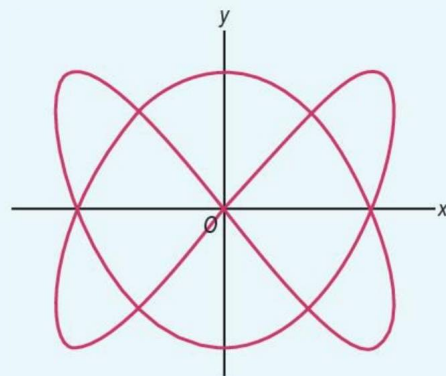
Oplossing

De periode van x is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

De periode van y is $\frac{2\pi}{\frac{3}{5}\pi} = 3\frac{1}{3}$.

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud is 10, dus de periode van de baan is 10.

- S4** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = 2\sin(\frac{1}{3}t)$ en $y(t) = 2\cos(\frac{1}{2}t)$. Bereken exact de periode van de beweging van P .



Vaardigheid

Je kunt eigenschappen van de baan bij een periodieke beweging vinden.

De baan van een punt P wordt bepaald door de bewegingsvergelijkingen van P . Eigenschappen van de baan zijn onder andere:

- De periode van de beweging.
- Het bereik van $x(t)$ en $y(t)$.
- De coördinaten van de toppen van de baan.
- De coördinaten van de snijpunten met de assen of met andere lijnen.
- Vergelijkingen van raaklijnen aan de baan.
- De snelheid en de baanversnelling in een punt van de baan.

Voorbeeld 1

Gegeven is de baan van een punt P met

$$\text{bewegingsvergelijkingen } \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(4t) \end{cases}$$

Door de oorsprong gaat een raaklijn met positieve richtingscoëfficiënt aan de baan van punt P .

Bereken de hoek die deze raaklijn maakt met de x -as.

Oplossing

Uit $\cos(t) = 0$ en $\sin(4t) = 0$ volgt $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

$$x'(t) = -\sin(t) \text{ en } y'(t) = 4\cos(4t)$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft } \frac{y'(\frac{1}{2}\pi)}{x'(\frac{1}{2}\pi)} = \frac{4\cos(2\pi)}{-\sin(\frac{1}{2}\pi)} = -4.$$

$$t = 1\frac{1}{2}\pi \text{ geeft } \frac{y'(1\frac{1}{2}\pi)}{x'(1\frac{1}{2}\pi)} = \frac{4\cos(6\pi)}{-\sin(1\frac{1}{2}\pi)} = 4.$$

De richtingscoëfficiënt van de gevraagde raaklijn is 4.

Uit $\tan(\alpha) = 4$ volgt $\alpha \approx 76^\circ$.

Voorbeeld 2

De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn $x(t) = \sin(2t)$ en $y(t) = 2\cos^2(t)$.

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan van punt P met de lijn $y = x$.

Oplossing

Substitueer $x(t) = \sin(2t)$ en $y(t) = 2\cos^2(t)$ in $y = x$.

$$2\cos^2(t) = \sin(2t)$$

$$2\cos^2(t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$2\cos(t) = 0 \text{ of } \cos(t) = \sin(t)$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ of } t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

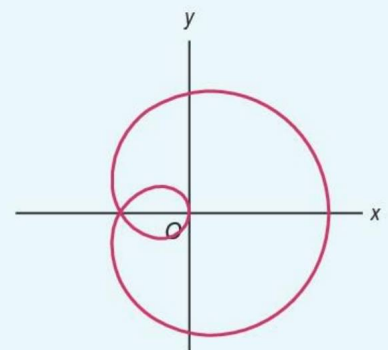
$$x(\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi) = 0 \text{ en } x(\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi) = 1$$

De snijpunten zijn $(0, 0)$ en $(1, 1)$.

S5 De baan van een punt P is gegeven door de

$$\text{bewegingsvergelijkingen } \begin{cases} x(t) = \cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(t) + \sin(2t) \end{cases}$$

- Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waar de raaklijn verticaal is.
- Bereken de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt op de x -as.



T1 Gegeven is de functie $f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

- a** Bewijs dat het functievoorschrift van f te herleiden is tot $f(x) = -\sqrt{2}\sin(x)$.
- b** Los exact op $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = \sin(2x)$.

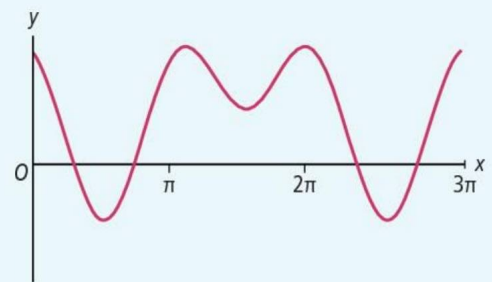
T2 Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

- a** $\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ **c** $6 \cdot \sin\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right) = 2\sqrt{3} \cdot \cos\left(1\frac{1}{2}\pi + x\right)$
- b** $\cos(2x) - 2\sin^2(x) = 0$ **d** $\frac{1}{2}\sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

T3 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 2\cos^2(x) - \sin(x)$ op het interval $[0, 3\pi]$.

De grafiek lijkt symmetrisch te zijn in de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

- a** Verschuif de grafiek van f over een afstand $1\frac{1}{2}\pi$ naar links en stel een functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek.
- b** Toon aan dat de grafiek van g symmetrisch is in de y -as.
- c** Waarom heb je nu bewezen dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = 1\frac{1}{2}\pi$?

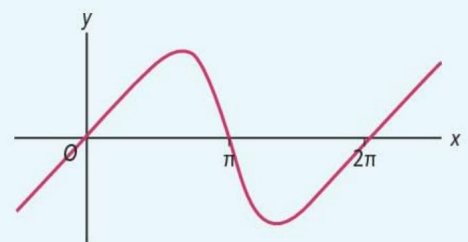


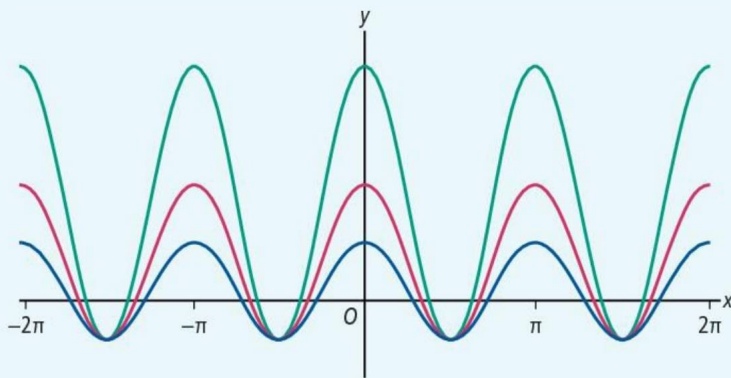
T4 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$ op het interval $[0, 2\pi]$.

- a** Los exact op $f(x) > 1$.
- b** Bereken de nulpunten van f .
- c** Bereken exact de oppervlakte van het gebied onder de x -as dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.
- d** Bereken exact de y -coördinaten van de toppen van de grafiek van f .

T5 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$ op het interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi\right]$.

- a** Bereken exact de extreme waarden van f .
- b** Bewijs dat $f''(x) = \frac{-2\sin(x) + \sin(2x)}{(2 + \cos(x))^3}$
- c** Bewijs dat de buigpunten van de grafiek van f op de x -as liggen.





- T6** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = a \cdot \cos^2(x) - \sin^2(x)$ met $a \neq -1$. Voor enkele waarden van a is de grafiek van f_a getekend.
- Bewijs dat de x -coördinaten van de toppen onafhankelijk zijn van a .
 - Bewijs dat het functievoorschrift van f_3 te herleiden is tot $f_3(x) = 2\cos(2x) + 1$.

c Bereken exact $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (3\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx$.

- T7** Gegeven is de baan van een punt P met

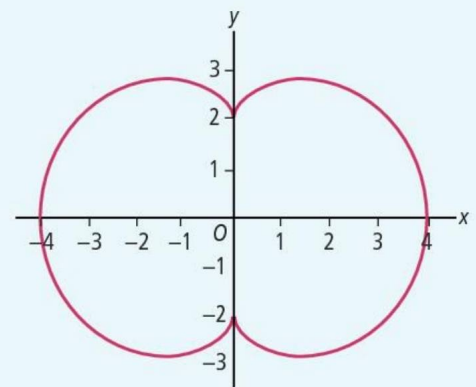
$$\text{bewegingsvergelijkingen} \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

Toon aan dat alle punten van de baan van punt P op de kromme met vergelijking $y^2 = 4x^2 - 4x^4$ liggen.

- T8** Gegeven is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin(t) - \sin(3t) \\ y(t) = 3\cos(t) - \cos(3t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Bereken de baansnelheid op $t = 0$ en $t = \frac{1}{2}\pi$.
- Bewijs dat $v(t) = |6\sin(t)|$.
- Bereken exact de coördinaten van de punten waar de baansnelheid maximaal is.



Je kunt goniometrische vergelijkingen oplossen.

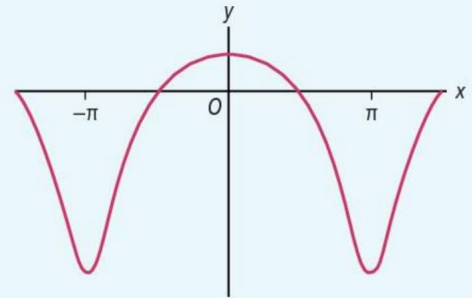
E1 Los exact op voor $0 \leq t \leq 2\pi$.

- a $\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{4}$
- b $2\cos^2(t) - 2\sin^2(t) = 1$
- c $\sin\left(1\frac{1}{2}\pi + t\right) = \cos(3t)$

Je kunt eigenschappen van goniometrische functies vinden.

E2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2\cos(x)}{3 + 2\cos(x)}$ op het interval $\left[-1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\right]$.

- a Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in de y -as.
- b Los exact op $f(x) < 0$.
- c Bereken exact de extreme waarden van f .



Je kunt de periode berekenen van een periodieke beweging.

E3 De bewegingsvergelijkingen van punt P zijn gegeven door

$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \text{ en } y(t) = \sin\left(\frac{1}{a}\pi t\right).$$

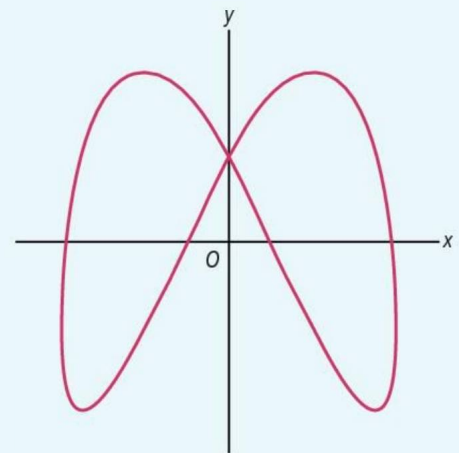
Bereken exact de periode van de beweging voor $a = 1, 2, 3$ en 4 .

Je kunt eigenschappen van de baan van een periodieke beweging vinden.

E4 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 4\sin\left(t + \frac{1}{6}\pi\right) \\ y(t) = 4\cos(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de x -as.
- b Bereken exact de waarden van t waarvoor de baan van P de lijn $y = x$ snijdt.
- c Bereken exact de coördinaten van de toppen van de baan.
- d De baan snijdt zichzelf in een punt op de y -as. Bereken de hoek die de raaklijnen aan de baan in dit snijpunt met elkaar maken.



E5 Gegeven is de baan van een punt P met

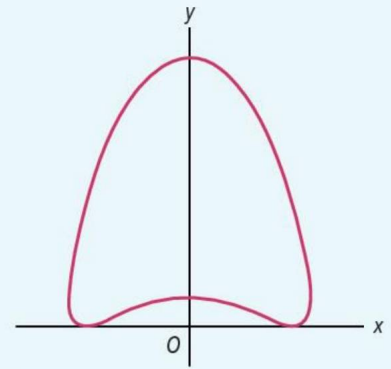
$$\text{bewegingsvergelijkingen } \begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

- a Toon aan dat de baan een deel van de parabool $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ is.
- b Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in het punt met $t = \frac{1}{6}\pi$.

E6 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven

$$\text{door } \begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = 4\cos^2(t) - 4\cos(t) + 1 \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Bewijs dat de baan van P de x -as raakt in twee punten.
- Bewijs dat de baan van P de y -as loodrecht snijdt in twee punten.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de parabool met vergelijking $y = x^2 + 1$.



E7 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$.

- Bewijs dat f periodiek is met een periode van $\frac{1}{2}\pi$.
- Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van f op het interval $[0, \pi]$.
- Stel een functievoorschrift $g(x)$ op bij een sinusoïde met dezelfde periode en dezelfde toppen als f .
- Bewijs dat f en g dezelfde functies zijn.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de assen en de lijn $x = \pi$.

E8 Binnen een cirkel met straal 4 bekijk je gebieden die bestaan uit een rechthoek (met de hoekpunten op de cirkel), aan de rechterkant aangevuld met een cirkelsegment. Zo'n gebied heeft dan de vorm van een rechthoek met een buik. Zie figuur 1.

In figuur 2 is het gebied verdeeld in twee cirkelsectoren, beide met een middelpuntshoek van t radialen, en zes gelijke rechthoekige driehoeken. Deze driehoeken hebben ook een hoek met grootte t radialen.

De oppervlakte O van het gebied is een functie van t , met $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.

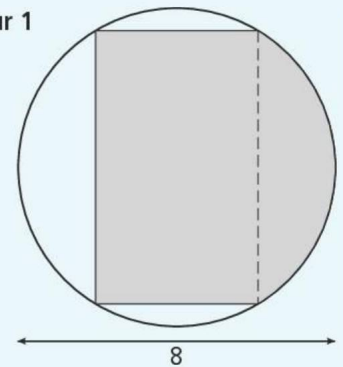
Er geldt $O(t) = 16t + 24 \cdot \sin(2t)$.

- Toon de juistheid van deze formule aan.

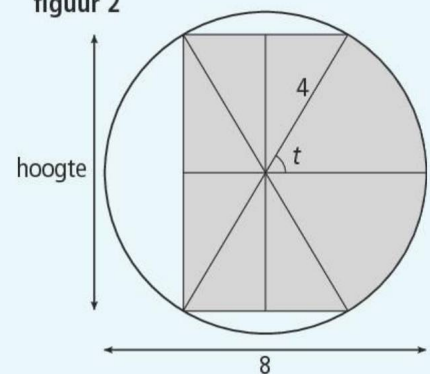
Bij een bepaalde hoogte is de oppervlakte O maximaal.

- Bereken de exacte waarde van deze hoogte.
(Ontleend aan examen vwo B1,2 2009, tijdvak 2)

figuur 1



figuur 2



Christiaan Huygens en de skatebaan

Christiaan Huygens (1629 – 1695) was een vooraanstaande Nederlandse wis-, natuur- en sterrenkundige en uitvinder.

Als uitvinder heeft Huygens onder meer het slingeruurwerk, het principe van de stoommachine en een buskruitmotor op zijn naam staan.

Huygens onderzocht hoe je een slingeruurwerk regelmatig kon laten lopen. Het probleem was dat bij een grotere uitwijking een grotere slingertijd hoort. Huygens ontdekte dat het gewicht van een slinger beter langs een cycloïde kon worden geleid, omdat dan de slingertijd onafhankelijk van de uitwijking werd.

Hierom heet de cycloïde ook wel een isochrone kromme (Grieks: *iso* gelijk en *chronos* tijd). In zijn boek *Horologium Oscillatorium* besprak hij de slingerklok en de theorie waarop deze gebaseerd was.

In het depot van het Universiteitsmuseum Utrecht is recent een oude slingerklok ontdekt uit 1657. Bij het ophangpunt van de slinger zijn twee metalen boogjes te zien, dat zijn delen van een cycloïde.

Huygens hing de klepel op aan een zijden draadje, zodat de draadjes de boogjes kon volgen.



Opdracht

Punt P beweegt over een cycloïde met bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 + \cos t \end{cases} \text{ met } -\pi \leq t \leq \pi$$

a Bereken $v = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ en laat zien dat v te schrijven is als $v = \sqrt{2(1 - \cos(t))}$.

b Toon aan dat $1 - \cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)$.

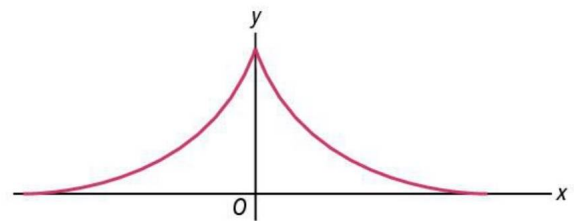
c De lengte van de linker boog wordt beschreven met de integraal $\int_{-\pi}^0 v dt$. Bereken deze lengte.

Hiermee is de lengte van het zijden draadje bekend.

Moderne toepassing

Als je een skateboardhelling in de vorm van een cycloïde maakt, bereik je dat een skateboarder de hele tijd een regelmatig ritme aan kan houden.

De slingertijd is immers tijdens het gangmaken en het uitvoeren van allerlei kunstjes gelijk.



Afsluiting analyse 21

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de afgelopen jaren heb je heel wat analyse bestudeerd. Je hebt kennis gemaakt met allerlei aspecten van functies en hun grafieken.

In dit hoofdstuk wordt de analyse uit het examenprogramma wiskunde B vwo afgesloten met het herhalen en verdiepen van enkele onderwerpen die eerder behandeld zijn zoals functies met absolute waarden en het berekenen van extreme waarden van functies. Ook komen enkele nieuwe onderdelen aan bod: scheve asymptoten en perforaties in grafieken. De afsluitende paragraaf bevat opdrachten waarin de verschillende aspecten van functies een rol spelen.

Je zult in dit hoofdstuk geen leerroutes vinden, dus ook geen ondersteunende of uitdagende opdrachten. In plaats daarvan bevat elke paragraaf een bladzijde met opdrachten op examenniveau.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 14
- *Formules manipuleren* opdracht 28
- *Ordenen en structureren* opdracht 43

V1 Bepaal van elke functie het domein en bereken exact de nulpunten.

a $f(x) = \frac{2x+7}{3x-1}$

d $i(x) = \frac{5x}{x^2+3}$

b $g(x) = \frac{3x-4}{2x}$

e $j(x) = \frac{x-2}{7-x^2}$

c $h(x) = \frac{1-x^2}{2x-x^2}$

f $k(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$

Theorie

Grafieken van gebroken functies of quotiëntfuncties kunnen **asymptoten** hebben. Dat zijn lijnen waar de grafiek willekeurig dicht naar nadert.

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heeft een **verticale**

asymptoot $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

De grafiek van f heeft een **horizontale asymptoot** $y = c$ als

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$. Bij het berekenen van deze

limieten kun je gebruikmaken van de **standaardlimieten**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad (n > 0).$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x^2}{\frac{1}{2}x^2 - 8}$

Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f .

Oplossing

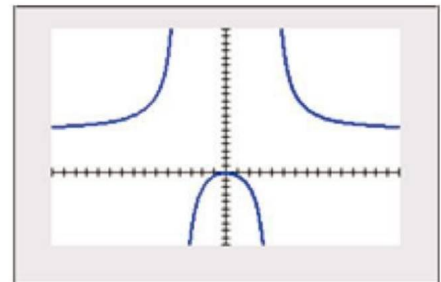
Voor een verticale asymptoot geldt $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$ én $3x^2 \neq 0$.

$\frac{1}{2}x^2 = 8$ geeft $x^2 = 16$ dus $x = -4$ of $x = 4$.

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = -4$ en $x = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{\frac{1}{2}x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{1}{2} - \frac{8}{x^2}} = \frac{3}{\frac{1}{2} - 0} = 6$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 6$.



V2 Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafieken van deze functies.

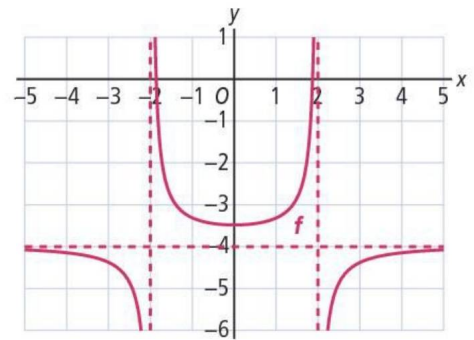
a $f(x) = \frac{12-3x}{x^2-5}$

c $h(x) = \frac{(2x-1)^2}{2x^2-1}$

b $g(x) = \frac{x^2-3x-4}{2x^2+6x-8}$

d $k(x) = \frac{x(3x-2)}{(x-1)^2}$

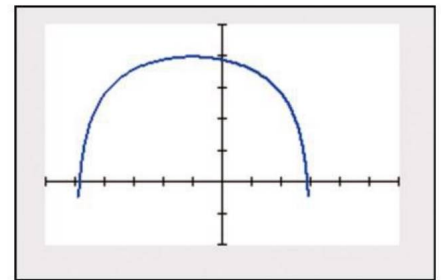
- V3** Gegeven is de functie $f(x) = -3 + \frac{2 - x^2}{x^2 - 4}$
- Stel vergelijkingen op van de verticale asymptoten van de grafiek van f .
 - Toon aan dat je $f(x)$ kunt schrijven als $f(x) = \frac{-4x^2 + 14}{x^2 - 4}$
 - Bereken exact de nulpunten van f .
 - Stel een vergelijking op van de horizontale asymptoot en noteer de bijbehorende limiet.



- V4** Niet alleen grafieken van gebroken functies kunnen asymptoten hebben. Ook bij de grafieken van exponentiële, logaritmische en tangensfuncties kunnen asymptoten voorkomen.
Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafieken van deze functies.

- | | |
|--------------------------------|---|
| a $f(x) = 2e^{3x-1}$ | c $h(x) = \frac{1}{2^{-x} - 1}$ |
| b $g(x) = \ln(10 - 4x)$ | d $q(x) = \tan\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right)$ met $-\pi < x < \pi$ |

- V5** Gegeven is de functie $f(x) = {}^2\log(15 - 2x - x^2)$.
- Bepaal het domein van deze functie.
 - Leg uit waarom de grafiek twee verticale asymptoten heeft.
 - Bereken exact het maximum van f .
 - Bepaal het bereik van f .



- V6**
- Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 3\right|$.
 - Voor welke waarden van x geldt $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$?
 - Stel een functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen op voor de overige waarden van x .

- V7** Gegeven is de functie $g(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6\right|$.
- Plot en schets de grafiek van g .
 - Voor welke waarden van x geldt $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$?
 - Bereken exact het maximum van g .
 - Bereken exact het minimum van g .

Je leert

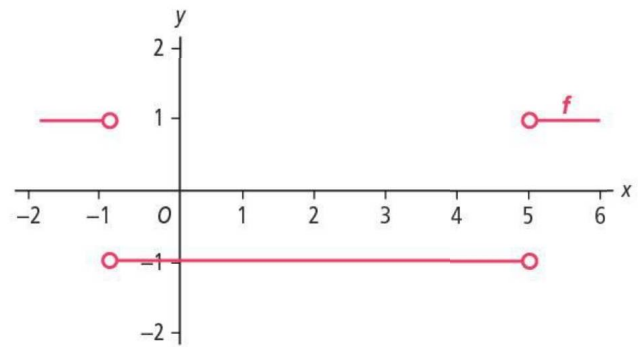
- wat een linker- en een rechterlimiet is
- wat een perforatie en een sprong is

Gegeven is de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{|x^2 - 4x - 5|}$$

De grafiek van f maakt op twee plaatsen een sprong.

- Kun je verklaren waarom de grafiek er zo uitziet?

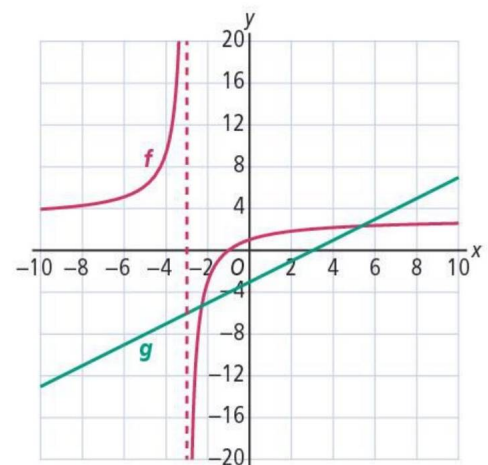


1 Gegeven zijn de grafieken van de functies

$$f(x) = 1 + \frac{2x}{x+3} \text{ en } g(x) = \frac{x^2 - 9}{x+3}$$

Het domein van f en van g is $\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle -3, \rightarrow \rangle$.

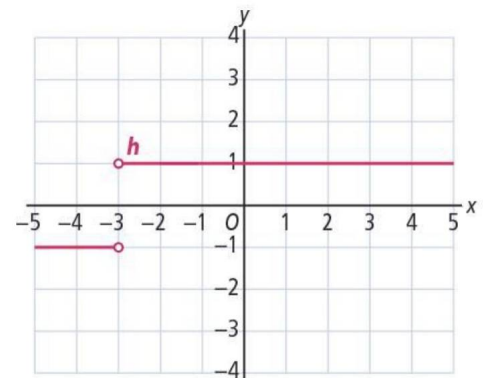
- Wat gebeurt er met de waarde van $f(x)$ als x van de rechterkant tot -3 nadert? En als x van de linkerkant tot -3 nadert?
- Wat betekent je antwoord bij opdracht a voor de grafiek van f ?
- Vereenvoudig het functievoorschrift van g .
- Wat gebeurt er met de waarde van $g(x)$ als x van de rechterkant tot -3 nadert? En als x van de linkerkant tot -3 nadert?
- Wat betekent je antwoord bij opdracht d voor de grafiek van g ?



2 Gegeven is de grafiek van de functie $h(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$

Het domein van h is $\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle -3, \rightarrow \rangle$.

- Schrijf $h(x)$ zonder absolute waarde-strepen.
- Wat gebeurt er met de waarde van $h(x)$ als x van de rechterkant tot -3 nadert? En als x van de linkerkant tot -3 nadert?
- Wat betekent je antwoord bij opdracht b voor de grafiek van h ?



Theorie

Als een functiewaarde van een functie f niet bestaat voor $x = a$, kun je vaak wel iets zeggen over het gedrag van f als x tot a nadert. Je moet daarbij soms onderscheid maken tussen 'x daalt naar a ' en 'x stijgt naar a '. De notaties daarvoor zijn $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow a} f(x)$. In die gevallen spreek je van de **rechterlimiet** $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ en de **linkerlimiet** $\lim_{x \uparrow a} f(x)$.

Als $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ (of $-\infty$) en/of $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty$ (of $-\infty$), dan heeft de grafiek van f een verticale asymptoot $x = a$.

Als de linker- en rechterlimiet beide niet ∞ of $-\infty$ zijn, dan zijn er twee mogelijkheden:

- Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$, dan heeft de grafiek van f een **perforatie** bij $x = a$.
- Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) \neq \lim_{x \downarrow a} f(x)$, dan heeft de grafiek van f een **sprong** bij $x = a$.

Voorbeeld 1

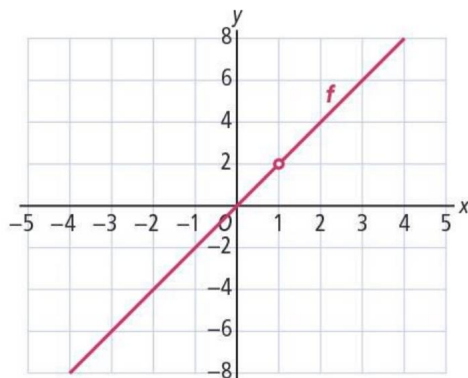
Onderzoek het gedrag van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$ bij $x = 1$.

Oplossing

$$f(x) = \frac{2x(x-1)}{x-1} \text{ dus } f(x) = 2x \text{ mits } x \neq 1$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 2 \text{ en } \lim_{x \downarrow 1} f(x) = 2$$

De grafiek heeft een perforatie (1, 2).



Voorbeeld 2

Onderzoek het gedrag van de grafiek van de functie

$$g(x) = \frac{x|x-1|}{x^2-1} \text{ bij } x = -1 \text{ en } x = 1.$$

Oplossing

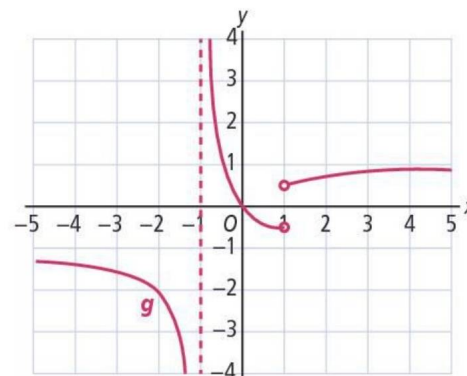
Bij $x = -1$ is de noemer gelijk aan 0 en de teller ongelijk aan 0. De grafiek heeft bij $x = -1$ een verticale asymptoot.

$$g(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1} \text{ als } x > 1 \text{ en}$$

$$g(x) = \frac{x(-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x}{x+1} \text{ als } x < 1$$

$$\lim_{x \downarrow 1} g(x) = \frac{1}{2} \text{ en } \lim_{x \uparrow 1} g(x) = -\frac{1}{2}$$

De grafiek heeft een sprong bij $x = 1$.



21.1 Limieten en perforaties

- 3** a Bereken $\lim_{x \uparrow 5} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 5} f(x)$ voor de functie $f(x) = \frac{|x^2 - 25|}{x - 5}$
- b Bereken $\lim_{x \uparrow 5} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 5} f(x)$ voor de functie $g(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$
- c Hebben de grafieken van f en g bij $x = 5$ een verticale asymptoot, een perforatie of een sprong?

Als bij een gebroken functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ voor $x = a$ geldt $t(a) = 0$ én $n(a) = 0$, dan zijn er drie situaties mogelijk:

- De grafiek van f heeft een verticale asymptoot $x = a$.
- De grafiek van f heeft een perforatie bij $x = a$.
- De grafiek heeft een sprong bij $x = a$.

- 4** Onderzoek of de grafieken van de gegeven functies een verticale asymptoot hebben, een perforatie of een sprong. Vermeld indien van toepassing een vergelijking van de asymptoot, de coördinaten van een perforatie en de waarde van x waarbij een sprong optreedt.

a $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2}$

c $h(x) = \frac{2x^2 - 8x}{|x - 4|}$

b $g(x) = \frac{2x - 1}{4x^2 - 2x}$

d $k(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - 2}$

- 5** De grafieken van de gegeven functies hebben een perforatie. Bereken de coördinaten van de perforatie en verklaar steeds je antwoord.

a $f(x) = \frac{3x + 18}{x^2 - 3x - 54}$

b $g(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x - 2}$

c $h(x) = \frac{2x^2 + 2x - 12}{3x - 6}$

d $k(x) = \cos(x) \cdot \tan(x)$ op het interval $\langle -\pi, \pi \rangle$

- 6** Gegeven is de functie $f(x) = 2e^{\frac{1}{x-1}}$.

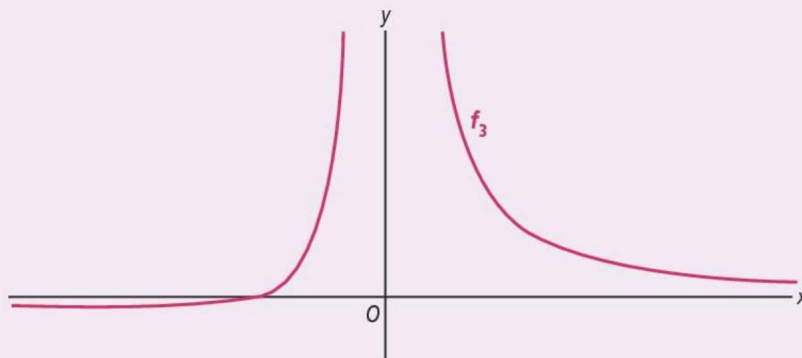
Bereken $\lim_{x \uparrow 1} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 1} f(x)$ en beschrijf wat de uitkomsten betekenen voor de grafiek van f .

Opdrachten op examenniveau

X1 Raaklijn door perforatie

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{9 - x^2}{ax^2 - x^3}$

Voor $a = 3$ is de grafiek getekend. De grafiek heeft een perforatie.



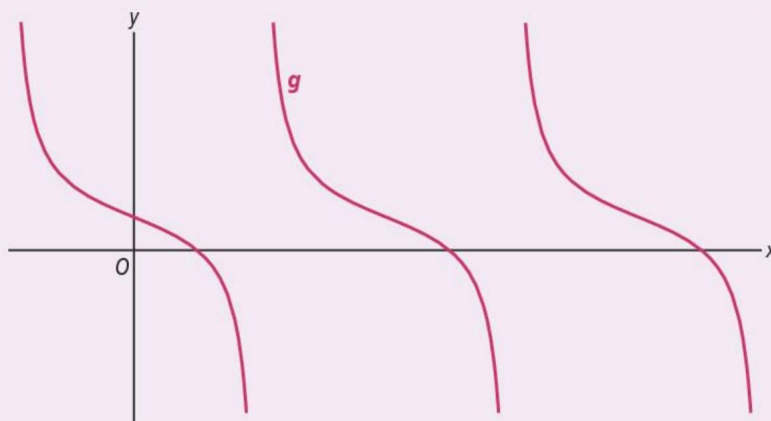
- De grafiek van f_3 snijdt de x -as in een punt P . De raaklijn in P aan de grafiek gaat door de perforatie. Toon dit aan met behulp van differentiëren.
- Behalve $a = 3$ is er nog een waarde van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft. Bereken exact deze waarde van a en de coördinaten van de perforatie.

X2 Perforaties en asymptoten

Op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi]$ is gegeven de functie

$$g(x) = \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(2x)} + 1.$$

- De grafiek van g heeft vier asymptoten. Stel van elke asymptoot een vergelijking op.
- De grafiek van g heeft enkele perforaties. Bereken exact de coördinaten van de perforaties.



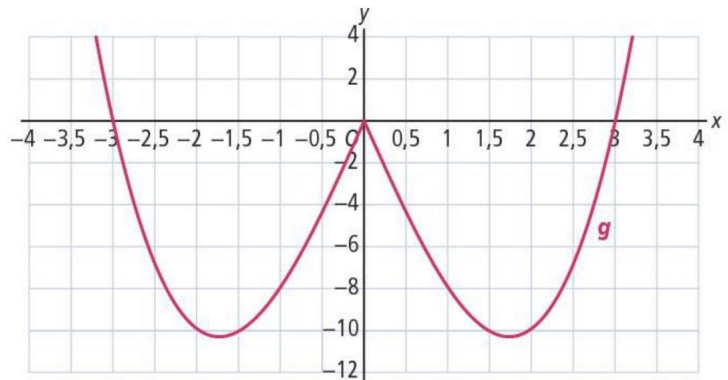
21.2 Functies met absolute waarden

Je leert

- hoe je een functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen schrijft
- hoe je bij een knik in de grafiek de helling van het linkerdeel en het rechterdeel van de grafiek berekent

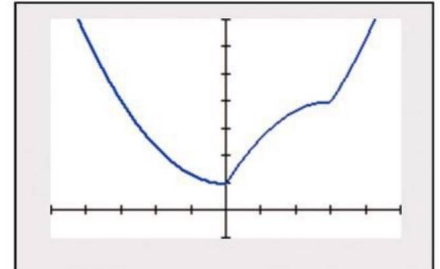
Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 9x$.
Door in het functievoorschrift enkele absolute waarde-strepen te plaatsen ontstaat het functievoorschrift van de functie g , waarvan de grafiek getekend is.

- Zoek uit waar je de absolute waarde-strepen in het functievoorschrift van f moet plaatsen.



- 7 Gegeven is de functie $g(x) = 2x - |3x| + 5$.
- Schrijf het functievoorschrift van g voor $x \geq 0$ zo eenvoudig mogelijk.
 - Doe hetzelfde voor $x < 0$.
 - Plot en schets de grafiek van g .
 - Bij $x = 0$ vertoont de grafiek een knik.
Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van het deel van de grafiek links van de knik? En van het deel rechts van de knik?
 - Bereken exact het maximum van g .

- 8 Gegeven is de functie $g(x) = |\frac{1}{2}x^2 - 4x| - 3x$.
- Voor welke waarden van x geldt $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x$?
 - Voor welke waarden van x geldt $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$?



Aanpak

Hoe schrijf je een functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen?

- Onderzoek voor welke waarden de uitdrukking tussen de absolute waarde-strepen positief en voor welke waarden de uitdrukking negatief is.
- Voor het gedeelte van het domein waar de uitdrukking tussen de strepen positief of gelijk aan nul is, vervang je de strepen door haakjes. Schrijf daarna het functievoorschrift zo eenvoudig mogelijk.
- Voor het gedeelte van het domein waar de uitdrukking tussen de strepen negatief is doe je hetzelfde, maar neem je van de uitdrukking tussen de strepen het tegengestelde.

Voorbeeld

Schrijf het functievoorschrift $f(x) = x + 1 + \left| \frac{1}{3}x^2 - x \right|$ zonder absolute waarde-strepen.

Oplossing

1 $\frac{1}{3}x^2 - x = \frac{1}{3}x(x - 3) = 0$ als $x = 0$ of $x = 3$

$\frac{1}{3}x^2 - x \geq 0$ als $x \leq 0$ of $x \geq 3$

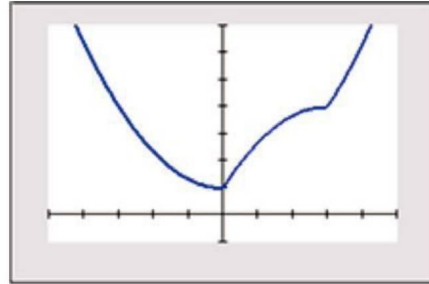
en $\frac{1}{3}x^2 - x < 0$ als $0 < x < 3$.

2 Als $x \leq 0$ of $x \geq 3$ geldt

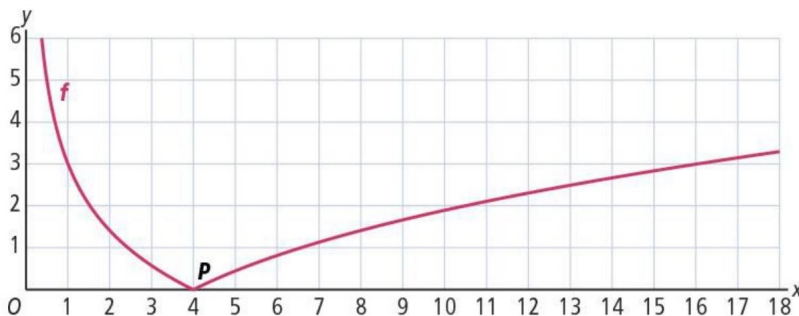
$f(x) = x + 1 + \left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)$ ofwel $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$.

3 Als $0 < x < 3$ geldt

$f(x) = x + 1 + \left(-\frac{1}{3}x^2 + x\right)$ ofwel $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$.



- 9 Gegeven is de functie $f(x) = 2x|x - 3| + 1$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Schrijf het functievoorschrift van f zonder absolute waarde-strepen.
 - Voer de opdrachten a en b nogmaals uit, nu voor de functie $g(x) = |x^3 - 2x^2 - 8x| - 2$.



- 10 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{|x - 4|}{\sqrt{x}}$
- Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.
 - Hoe groot is het minimum van f ?
 - De grafiek van f heeft een knik in punt P .
 P verdeelt de grafiek in twee delen.
Bepaal de afgeleide voor elk van deze delen.
 - Bewijs met behulp van de afgeleide functie dat de twee delen van de grafiek van f bij $x = 4$ verschillende raaklijnen hebben.

21.2 Functies met absolute waarden

Theorie

Als de grafiek van een functie f een knik vertoont in het punt $P(a, f(a))$, dan kun je met behulp van limieten de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de twee delen van de grafiek in P berekenen.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x - |x^3 - 1|$.

$$f(x) = x - x^3 + 1 \text{ voor } x \geq 1 \text{ en } f(x) = x + x^3 - 1 \text{ voor } x < 1$$

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \text{ voor } x > 1 \text{ en } f'(x) = 1 + 3x^2 \text{ voor } x < 1$$

$$\lim_{x \downarrow 1} f'(x) = \lim_{x \downarrow 1} (1 - 3x^2) = -2 \text{ en } \lim_{x \uparrow 1} f'(x) = \lim_{x \uparrow 1} (1 + 3x^2) = 4$$

De raaklijn in $(1, 1)$ aan het linkerdeel van de grafiek heeft richtingscoëfficiënt 4 en aan het rechterdeel richtingscoëfficiënt -2 .

- 11** Functie f uit het voorbeeld heeft een extreme waarde voor $x = 1$.

- Plot en schets de grafiek van f .
- Is de extreme waarde een maximum of een minimum?

- 12** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - |1\frac{1}{3}x^2 - 4x|$.

- De grafiek van f vertoont een knik in het punt P met $x = 0$. Bereken de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de beide delen van de grafiek in dit punt.
- De grafiek van f vertoont ook een knik in een punt Q . Bereken de coördinaten van Q en stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan elk van de twee delen van de grafiek in Q .

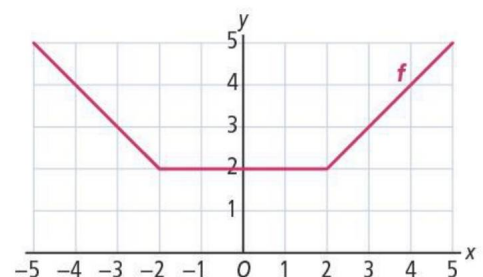
- 13** **a** Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = |2x - 1| + |x - 3|$.

- In welke punten heeft de grafiek van f een knik?
- De grafiek van f bestaat uit drie delen van rechte lijnen. Schrijf het functievoorschrift van f voor elk van deze drie delen zonder absolute waarde-strepen en vermeld op welk deel van het domein elk van deze functievoorschriften geldt.
- Bereken exact de extreme waarde(n) van f .

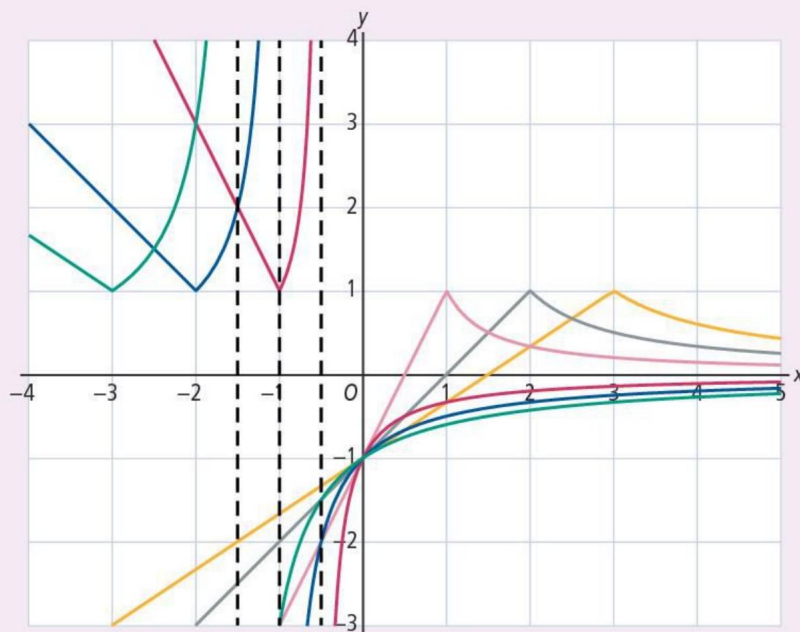
- 14** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = |ax + b| + |ax - b|$.

a en b zijn positieve getallen.

Bereken de waarde van a en de waarde van b .



Opdrachten op examenniveau



X3 Een bundel grafieken

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{x - |x - a|}{x + |x - a|}$ met $a \neq 0$.

De grafiek van f_a is getekend voor $a = -3, -2, -1, 1, 2$ en 3 .

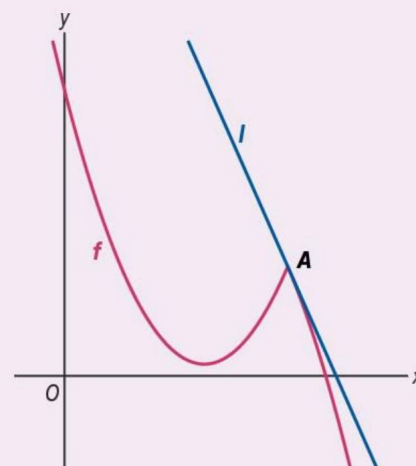
- Toon aan dat voor $x < a$ de grafiek van f_a een rechte lijn is.
- Voor $a < 0$ heeft de grafiek van f_a een verticale asymptoot.
Druk de vergelijking van de verticale asymptoot uit in a .
- De grafiek van een functie f_a vertoont een knik.
Toon aan dat deze knik op de lijn $y = 1$ ligt.
- Een punt $P(p, q)$ met $p > 0$ ligt op de grafiek van f_a .
Toon aan dat $q \leq 1$.

X4 Een grafiek met een knik

Gegeven is de functie $f(x) = 5 + \left|\frac{1}{2}x - 4\right| \cdot (2 - x)$.

De grafiek van f heeft een knik in punt A . Dit punt verdeelt de grafiek in twee delen. Lijn l is de raaklijn in A aan het rechterdeel van de grafiek.

- Stel op exacte wijze een vergelijking op van l .
- Behalve punt A hebben l en de grafiek van f nog een gemeenschappelijk punt.
Bereken exact de coördinaten van dat punt.



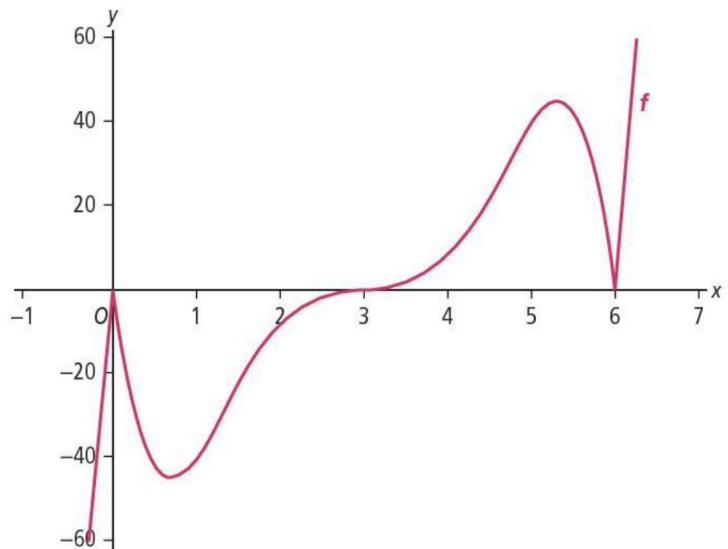
21.3 Extreme waarden en buigpunten

Je herhaalt

- hoe je de extreme waarden van een functie berekent
- hoe je de coördinaten van een buigpunt berekent

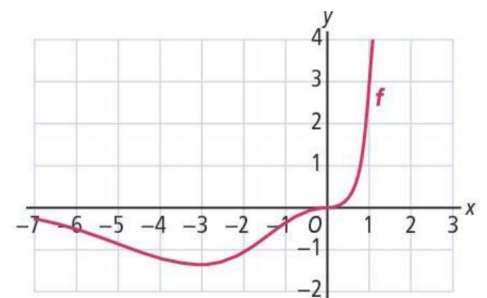
Gegeven is de grafiek van de functie f .

- Voor hoeveel waarden van x geldt $f'(x) = 0$?
- Hoeveel maxima heeft f ? En hoeveel minima?
- Voor welke waarden van x geldt niet: f heeft een extreme waarde én $f'(x) = 0$?



15 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^3 e^x$.

- Los exact op $f'(x) = 0$.
- Bij welke waarde van x is $f'(x) = 0$ en heeft f geen extreme waarde?
- Los exact op $f''(x) = 0$.
- Welke betekenis hebben de oplossingen van opdracht c voor de grafiek van f ?



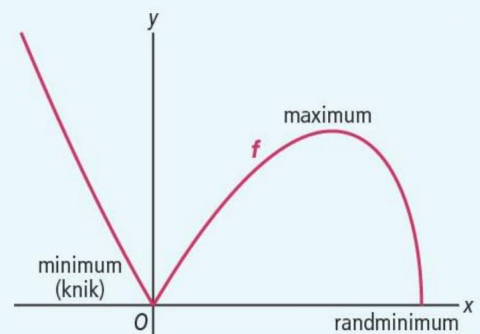
- 16
- Plot en schets de grafieken van $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $g(x) = x$.
 - Waarom zijn $f'(0)$ en $g'(0)$ niet te berekenen?
 - Wat is de minimale waarde die f en g kunnen aannemen?

Theorie

Als een functie f overgaat van stijgen in dalen, dan heeft f een maximum. Als f overgaat van dalen in stijgen, dan heeft f een minimum.

Extreme waarden kun je vinden door te onderzoeken waar de grafiek een horizontale raaklijn heeft, maar je kunt extreme waarden ook vinden aan de rand van een domein of bij een waarde van x waarvoor de grafiek een knik heeft of een verticale raaklijn.

Als in het vervolg naar extreme waarden gevraagd wordt, worden ook deze laatste bedoeld.



Voorbeeld

Geplot is de grafiek van de functie $f(x) = |x\sqrt{4-x}|$.
Bereken exact alle extreme waarden van f .

Oplossing

$f(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = 4$.

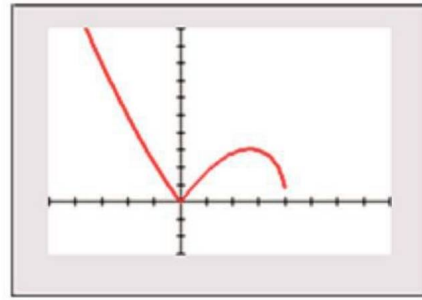
Het domein van f is $\langle \leftarrow, 4 \rangle$.

Voor $0 \leq x \leq 4$ is $f(x) = x\sqrt{4-x}$ en

$$f'(x) = \sqrt{4-x} - \frac{x}{2\sqrt{4-x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \sqrt{4-x} = \frac{x}{2\sqrt{4-x}}$$

$$2(4-x) = x \text{ geeft } 3x = 8 \text{ ofwel } x = 2\frac{2}{3}$$

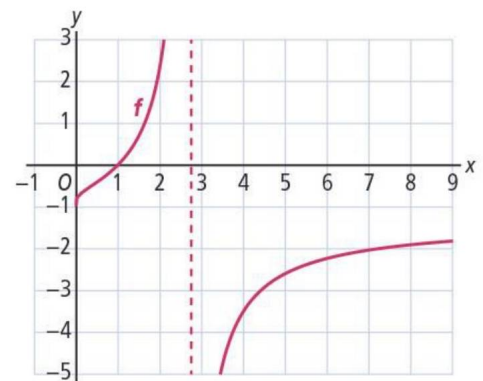


f heeft een maximum $f(2\frac{2}{3}) = 2\frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{3}}$.

f heeft een minimum $f(0) = 0$ (knik).

f heeft een randminimum $f(4) = 0$.

- 17** Gegeven is de functie $f(x) = x + \sqrt{5-4x^2}$.
- Bepaal het domein van f .
 - Plot en schets de grafiek van f .
 - Stel het functievoorschrift $f'(x)$ op.
 - Bereken exact de extreme waarden van f .
- 18** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}$
- Bepaal het domein van f .
 - Bereken $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}$. Deel daartoe teller en noemer door $\ln(x)$.
 - De grafiek van f heeft twee asymptoten. Stel een vergelijking op van elke asymptoot.
 - Toon met de afgeleide aan dat f geen extreme waarden heeft.
- 19** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - 5x^4$.
- Los exact op $f'''(x) = 0$.
 - Niet elke oplossing van $f'''(x) = 0$ levert een buigpunt van de grafiek van f .
Plot de grafiek van f en ga na welke oplossing van $f'''(x) = 0$ géén buigpunt oplevert.
 - Bereken exact de coördinaten van de buigpunten.



21.3 Extreme waarden en buigpunten

Theorie

De grafiek van een functie f heeft een **buigpunt** als de afgeleide f' een extreme waarde heeft. De raaklijn in een buigpunt ligt links en rechts van het buigpunt aan verschillende kanten van de grafiek. Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen. Het is mogelijk dat niet bij elke oplossing van $f''(x) = 0$ een buigpunt hoort. Omgekeerd is het ook mogelijk dat er een buigpunt is als $f''(x) = 0$ geen oplossing heeft.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Onderzoek of de grafiek van f een buigpunt heeft.

Oplossing

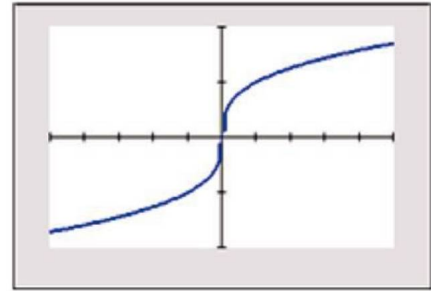
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \text{ dus } f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \text{ ofwel } f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \text{ (voor } x \neq 0\text{)}.$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \text{ ofwel } f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}} \text{ (voor } x \neq 0\text{)}.$$

$f''(x) = 0$ heeft geen oplossing.

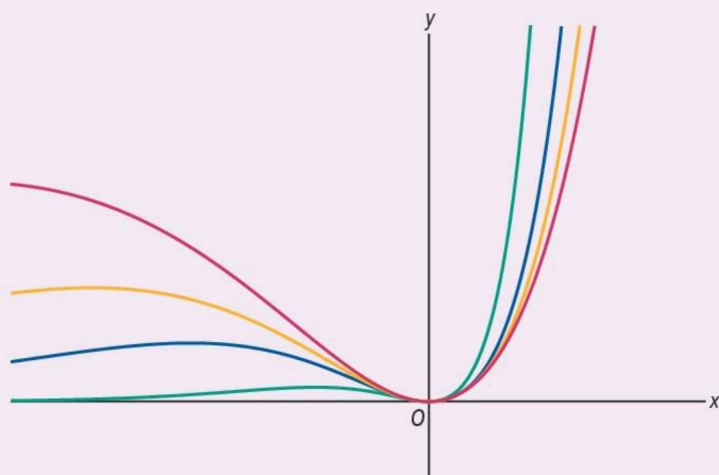
$\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \infty$, dus de raaklijn in $(0, 0)$ is verticaal.

De grafiek heeft een buigpunt $(0, 0)$.



- 20** Gegeven is de functie $g(x) = 2 + \sqrt[5]{x-1}$.
- Toon aan dat de grafiek van g een buigpunt heeft.
 - Stel een vergelijking op van de buigraaklijn.
- 21** Gegeven is de functie $f(x) = x^5 - 5x^4$.
- Bereken exact de extreme waarden van f .
 - Los exact op $f''(x) = 0$.
 - Slechts een van de twee oplossingen die je in opdracht b vindt, hoort bij een buigpunt.
Leg dit uit met behulp van een plot van f' .
- 22** Gegeven is de functie $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
- Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .
 - Stel van elke buigraaklijn een vergelijking op.

Opdrachten op examenniveau

**X5 Rakend in de oorsprong**

Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = x^2 e^{ax}$ met $a > 0$. Voor een aantal waarden van a is de grafiek getekend.

- Toon aan dat voor elke waarde van $a > 0$ de grafiek de x -as raakt in $(0, 0)$.
- Neem $a = 2$ en bereken exact de extreme waarden van f_2 .
- Voor elke waarde van $a > 0$ heeft de grafiek van f_a naast $(0, 0)$ precies nog één top.

Bewijs dat deze top op de parabool met vergelijking

$$y = \frac{1}{e^2} \cdot x^2 \text{ ligt.}$$

Verder is voor elke waarde van $a > 0$ de functie $g_a(x) = x e^{ax}$ gegeven. Voor elke waarde van $a > 0$ heeft de grafiek van g_a precies één buigpunt. Deze buigpunten liggen op een rechte lijn.

- Toon dat aan en stel een vergelijking op van deze lijn.

X6 Een sinusgrafiek met knikken

Gegeven is de functie $f(x) = x + |2\sin(x)|$.

Bereken exact alle extreme waarden van f op het interval $[0, 3\frac{1}{2}\pi]$.



21.4 Scheve asymptoten

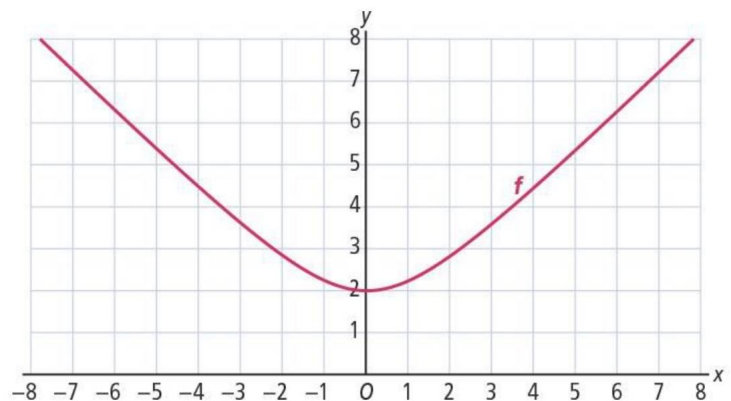
Je leert

- hoe je aantoonst dat een lijn een scheve asymptoot is van de grafiek van een functie
- hoe je een vergelijking van een scheve asymptoot opstelt

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

De grafiek van f lijkt te naderen naar twee rechte lijnen.

- Welke lijnen zijn dat?

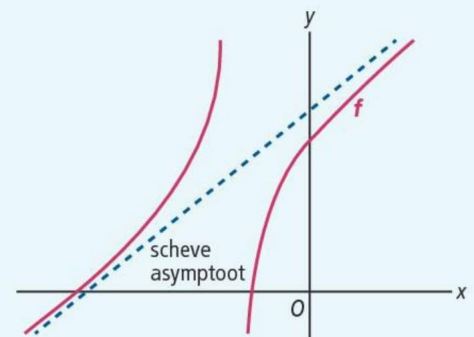


- 23** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{x+2}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.
- Plot en schets de grafieken van f en g in één figuur.
 - Als $x \rightarrow \infty$ en als $x \rightarrow -\infty$ nadert de grafiek van f tot de grafiek van g . Geef hiervoor een verklaring.
- 24** Gegeven is de functie $f(x) = 6x - 5 + e^{-x}$.
Als $x \rightarrow \infty$ nadert de grafiek van f tot een rechte lijn.
Toon dat aan en stel een vergelijking op van deze lijn.
- 25** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 10}{x + 2}$ en $g(x) = x + 3$.
- Bewijs dat $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x+2}$
 - Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x))$.
 - De grafiek van f nadert voor $x \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow -\infty$ tot een rechte lijn. Geef een vergelijking van deze lijn.

Theorie

Als van een functie f het functievoorschrift te schrijven is als $f(x) = ax + b + g(x)$ met $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, dan is de lijn met vergelijking $y = ax + b$ een **scheve asymptoot** van de grafiek van f .

In dat geval moet dus gelden: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 4}{x - 1}$

Toon aan dat $y = 3x + 5$ een vergelijking is van de scheve asymptoot van de grafiek van f .

Oplossing

$$f(x) - (3x + 5) =$$

$$\frac{3x^2 + 2x - 4}{x - 1} - \frac{(3x + 5)(x - 1)}{x - 1} =$$

$$\frac{3x^2 + 2x - 4 - (3x^2 - 3x + 5x - 5)}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 \text{ dus}$$

$y = 3x + 5$ is een vergelijking van de scheve asymptoot.

- 26** Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van de grafiek van f .

a $f(x) = e^{2x+1} + 8 - 12x$

b $f(x) = 9x + \frac{x^2}{4x^3 - 1}$

- 27** **a** Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = 3x - 16$ de scheve asymptoot is van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 11}{x + 3}$

- b** Voer dezelfde opdracht uit voor de lijn met vergelijking

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \text{ en de functie } g(x) = \frac{15 - x^2}{2x + 3}$$

- 28** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x^2 + 11x - 5}{x + 4}$

Om vast te stellen of de grafiek van f een scheve asymptoot heeft, ga je het functievoorschrift herleiden tot de vorm $f(x) = ax + b + g(x)$. Je gaat daartoe stap voor stap de teller delen door $x + 4$. Op het blaadje is daarmee een begin gemaakt.

- a** Leg uit waar in stap 1 de term $-8x$ vandaan komt.
b Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd.
c In stap 3 wordt $3x$ geschreven als $3(x + 4) - \dots$. Welk getal moet er op de puntjes staan?
d Vul in de stappen 4 en 5 de ontbrekende getallen in.
e Welke lijn is de scheve asymptoot van de grafiek van f ?

●	$\frac{2x^2 + 11x - 5}{x + 4} =$		
●	$\frac{2x(x + 4) - 8x + 11x - 5}{x + 4} =$	1	
●	$2x + \frac{3x - 5}{x + 4} =$	2	
●	$2x + \frac{3(x + 4) - \dots - 5}{x + 4} =$	3	
●	$2x + 3 - \frac{\dots}{x + 4}$	4	
●	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\dots}{x + 4} = \dots$	5	

Theorie

Voor een gebroken functie f met in de teller en de noemer veeltermfuncties, geldt: als de graad van de teller 1 hoger is dan de graad van de noemer, dan heeft de grafiek van f een scheve asymptoot. Voor het opstellen van een vergelijking van de scheve asymptoot schrijf je het functievoorschrift door uitdelen van de noemer in de vorm $f(x) = ax + b + g(x)$ met $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x + 2}$

Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van de grafiek van f .

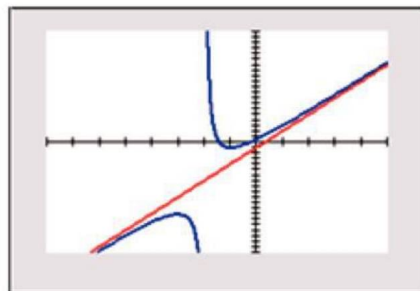
Oplossing

$f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 1}{x + 2}$ is te schrijven als $f(x) = \frac{3x(x + 2) - 6x + 5x + 1}{x + 2}$

$f(x) = 3x + \frac{-x + 1}{x + 2}$ ofwel $f(x) = 3x + \frac{-(x + 2) + 2 + 1}{x + 2}$

$f(x) = 3x - 1 + \frac{3}{x + 2}$ met $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x + 2} = 0$

De lijn $y = 3x - 1$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f .



- 29** Stel bij elke functie een vergelijking op van de scheve asymptoot van de grafiek.

a $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 4}$

c $h(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$

b $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$

d $k(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2x^2 + 1}$

- 30** De grafiek van $f(x) = \frac{3x^2}{x + 1}$ heeft een scheve asymptoot met vergelijking $y = ax + b$.

a Waarom geldt $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$?

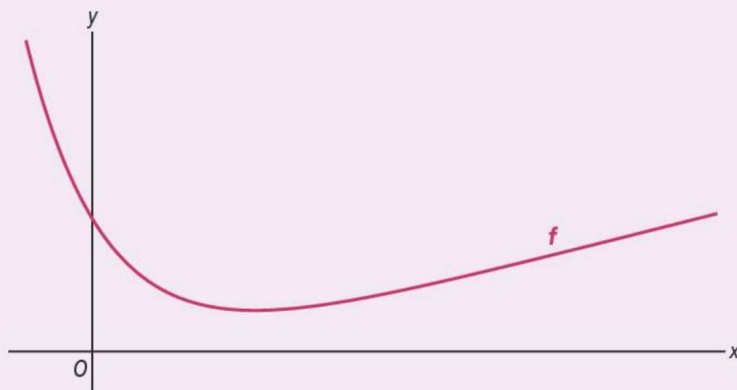
b Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ en leg uit waarom het resultaat gelijk is aan b .

- 31** Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \ln(x)$.

a Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.

b Ga na of de grafiek van f een scheve asymptoot heeft.

Opdrachten op examenniveau

**X7 Een scheve asymptoot**

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + e^{2-\frac{1}{2}x} - 1$.

- a Bereken exact het minimum van f .
- b De grafiek van f heeft een scheve asymptoot.
Bepaal op exacte wijze een vergelijking van deze asymptoot.

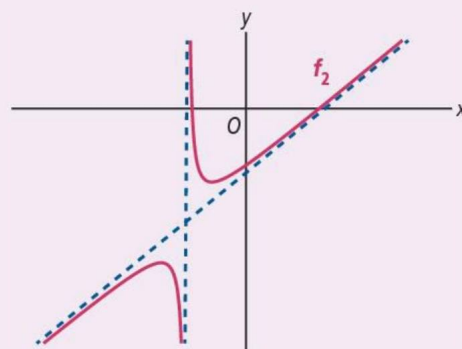
Gegeven is verder voor $a \neq 0$ de familie van functies $g_a(x) = ax + e^{2-ax} - 3$. Voor elke waarde van a heeft de grafiek van g_a een scheve asymptoot.

- c Bereken de waarde(n) van a waarvoor de scheve asymptoot de verticale as onder een hoek van 30° snijdt.

X8 Twee snijdende asymptoten

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \frac{3x^2 - 2x - 14}{px + 4}$

- a Neem $p = 2$. De grafiek van f_2 heeft een verticale en een scheve asymptoot.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de asymptoten van de grafiek van f_2 met elkaar maken.
- b Neem $p = -3$. De grafiek van f_{-3} heeft een verticale en een scheve asymptoot.
Bereken exact de coördinaten van het punt waarin de scheve asymptoot de y -as snijdt.
- c Er is een waarde van p waarvoor de scheve asymptoot van de grafiek van f_p door de oorsprong gaat.
Onderzoek voor welke waarde van p dit het geval is.

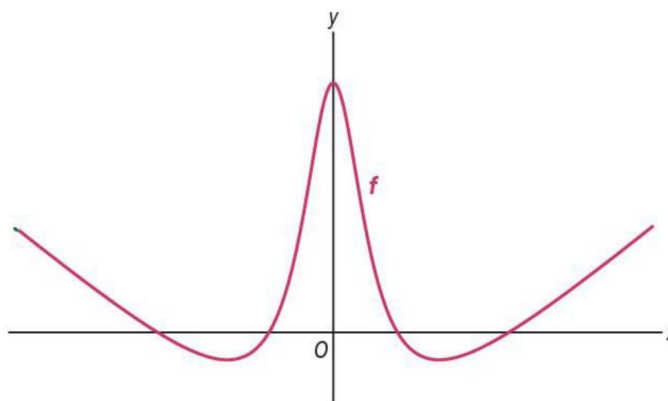


Je herhaalt • hoe je allerlei aspecten van functies vaststelt of bewijst

Gegeven is de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{100}{x^2 + 4} + |x| - 10.$$

- Noem zo veel mogelijk bijzonderheden op van de functie of de grafiek die je kunt bewijzen of berekenen (exact of met je rekenmachine).



- 32** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$
- Toon met behulp van $f'(x)$ aan dat f geen extreme waarden heeft.
 - Toon aan dat $(0, 0)$ het buigpunt is van de grafiek van f .
 - De grafiek van f heeft twee verschillende horizontale asymptoten.
Toon dit aan met behulp van limieten.
 - Toon aan dat $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a .
Wat betekent dit voor de grafiek van f ?

Theorie

Je kunt de grafiek van elke willekeurige functie plotten met je rekenmachine. Daarmee krijg je een beeld van het verloop van de grafiek. Aspecten van een functie of een grafiek die je met behulp van wiskundige technieken kunt vaststellen of bewijzen zijn onder andere:

- Het domein bepalen, met name bij gebroken functies, wortelfuncties en logaritmische functies.
- Nulpunten berekenen door het oplossen van de vergelijking $f(x) = 0$.
- Extreme waarden berekenen, vaak met behulp van differentiëren, maar ook bij een knik in de grafiek of als er sprake is van een randextreem.
- Coördinaten van buigpunten berekenen met behulp van differentiëren.
- Perforaties opsporen en aantonen met behulp van limieten.
- Asymptoten opsporen en aantonen met behulp van limieten.
- Aantonen dat de grafiek van een functie symmetrisch is.

De grafiek is symmetrisch in de y -as als geldt $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f .

De grafiek is symmetrisch in de oorsprong als geldt $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f .

Voorbeeld

Bereken exact de extreme waarden van de functie $f(x) = \sqrt{-16 + 17x^2 - x^4}$ en toon aan dat de grafiek symmetrisch is in de y -as.

Oplossing

$$-16 + 17x^2 - x^4 = 0$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0$$

De nulpunten zijn $x = 1, x = -1, x = 4$ en $x = -4$.

Het domein is $[-4, -1] \cup [1, 4]$.

$$f'(x) = \frac{34x - 4x^3}{2\sqrt{-16 + 17x^2 - x^4}}$$

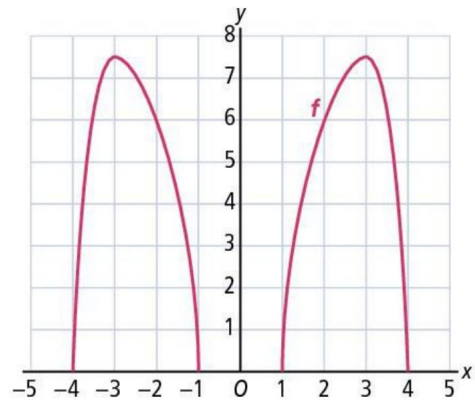
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 34x - 4x^3 = 0.$$

$$2x(17 - 2x^2) = 0$$

$$x = 0 \text{ (buiten het domein) of } x = \sqrt{8\frac{1}{2}} \text{ of } x = -\sqrt{8\frac{1}{2}}$$

$$\text{Maxima: } f(-\sqrt{8\frac{1}{2}}) = f(\sqrt{8\frac{1}{2}}) = 7\frac{1}{2} \text{ en randminima: } f(-4) = f(-1) = f(1) = f(4) = 0$$

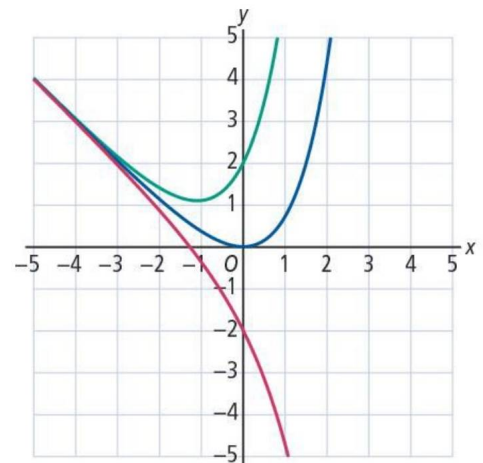
$f(a) = \sqrt{-16 + 17a^2 - a^4}$ en $f(-a) = \sqrt{-16 + 17(-a)^2 - (-a)^4} = \sqrt{-16 + 17a^2 - a^4}$ dus $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van a uit $[-4, -1] \cup [1, 4]$. Dus de grafiek is symmetrisch in de y -as.



- 33** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$.
- Bereken exact de nulpunten van f op het interval $[-\pi, 2\pi]$.
 - Bereken exact de extreme waarden van f op het interval $[-\pi, 2\pi]$.
 - Toon aan dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in de oorsprong.
- 34** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt[3]{4x - x^2}$.
- Wat is het domein van deze functie? Verklaar je antwoord.
 - Bereken exact de coördinaten van de top van de grafiek van f .
 - Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan de grafiek van f in de snijpunten met de x -as.
 - Toon aan dat $f(2 - p) = f(2 + p)$ voor elke waarde van p .
 - Welke symmetrie volgt uit de bewering in opdracht d voor de grafiek van f ?

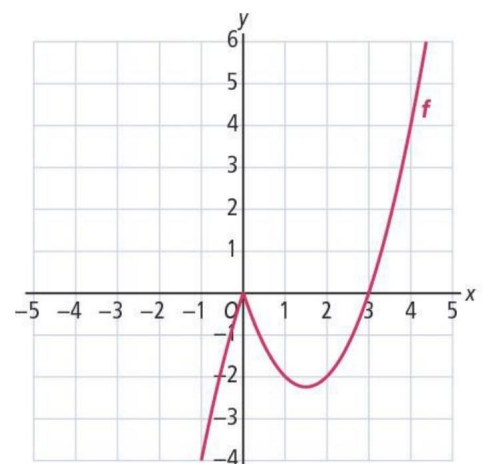
21.5 Functies onderzoeken

- 35** Voor elke waarde van $p \neq 0$ is gegeven de functie $f_p(x) = p \cdot e^x - x - 1$.
Voor enkele waarden van p is de grafiek van f_p getekend.
- Voor welke waarden van p heeft de functie f_p geen extreme waarde?
 - Voor welke waarde van p raakt de grafiek van f_p de x -as?
 - Toon aan dat de grafieken van alle functies f_p dezelfde scheve asymptoot hebben en stel een vergelijking op van deze asymptoot.
 - Toon aan dat de grafiek van een functie f_p geen buigpunt kan hebben.

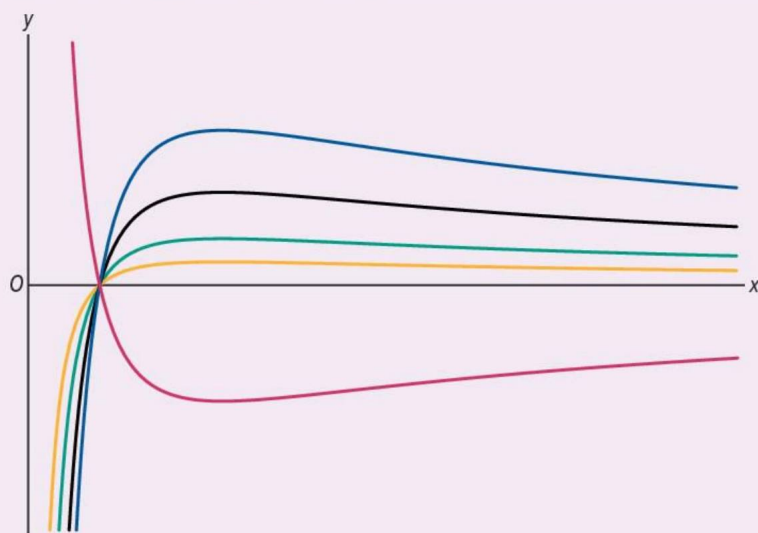


- 36** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = -2x + \ln(e^x - p)$.
- Voor welke waarden van p is $\mathbb{R}$ het domein van f_p ?
 - Toon aan dat de functie f_e een maximum heeft bij $x = 1 + \ln(2)$.
 - De grafiek van f_p is een rechte lijn als $p = 0$.
Geef hiervoor een bewijs.
 - Voor alle waarden van $p \neq 0$ is de lijn met vergelijking $y = -x$ een scheve asymptoot van de grafiek van f_p .
Toon dit aan.

- 37** Gegeven is de functie $f(x) = |x|(x - 3)$.
Onderzoek met behulp van berekeningen voor welke waarden van p een lijn met vergelijking $y = px$ één punt, respectievelijk twee punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van f .



Opdrachten op examenniveau

**X9 Natuurlijke logaritme**

Voor elke waarde van $p \neq 0$ is gegeven de functie

$$f_p(x) = \frac{\ln(x)}{p \cdot x}$$

Voor enkele waarden van p is de grafiek getekend.

- Bereken exact voor welke waarde van p de maximale y -coördinaat van een punt op de grafiek van f_p gelijk is aan 2.
- Bereken exact de waarden van p waarvoor de grafiek van f_p de x -as snijdt onder een hoek van 60° .
- Neem $p = -2$.
De lijn $y = a$ snijdt de y -as in punt A en de grafiek van f_{-2} in de punten B en C zo dat $AC = 3AB$.
Bereken exact de waarde van a .

X10 e-machten en symmetrie

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$

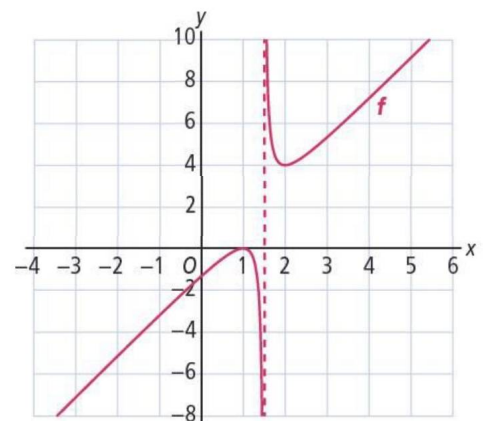
- Leg zonder berekeningen uit waarom de grafiek van g geheel boven de x -as ligt.
- Bereken exact het maximum van g .
- Toon aan dat de grafiek van g symmetrisch is in de y -as.
- Verder is gegeven de functie $f(x) = e^{-x}$.
Bewijs dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

21.6 Gemengde opdrachten

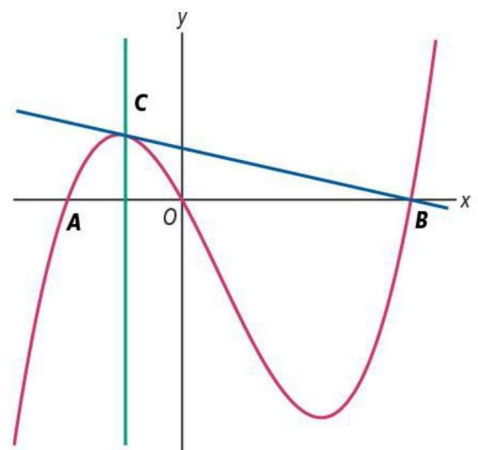
- 38** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = e^x - ax$.
- Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van f_a een top heeft. Druk de coördinaten van de top uit in a .
 - Bereken voor welke waarde van a de top van de grafiek op de y -as ligt.
 - Bereken exact voor welke waarde van a de grafiek van f_a de x -as raakt.

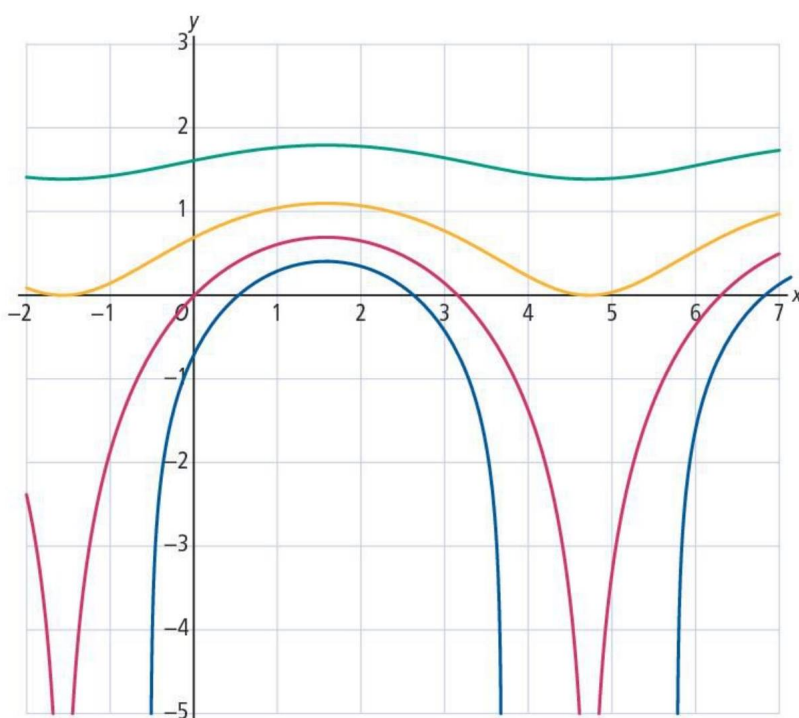
- 39** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{(x-a)(x-9a)}{x-10a}$
- Hoe ziet de grafiek van f_a eruit als $a = 0$? Verklaar je antwoord.
 - Voor $a \neq 0$ heeft de grafiek van f_a altijd twee toppen. Druk de coördinaten van deze toppen uit in a .
 - De toppen liggen op twee rechte lijnen. Stel van beide lijnen een vergelijking op.

- 40** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 3}$
- Bewijs dat de grafiek van f de x -as raakt.
 - De grafiek van f heeft een verticale en een scheve asymptoot. Stel van beide asymptoten een vergelijking op.
 - De grafiek van f sluit met beide assen een gebied G in. Bereken exact de oppervlakte van G .
 - Verder is gegeven de functie $g(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - a}$. De grafiek van g heeft een perforatie. Bereken exact de waarde van a .



- 41** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x$. De grafiek van f heeft een buigpunt P .
- Bereken exact de coördinaten van P .
 - Bewijs dat de grafiek van f symmetrisch is in P . Verschuif daartoe de grafiek van f zó dat het buigpunt in de oorsprong komt te liggen en toon vervolgens aan dat de beeldgrafiek symmetrisch is in de oorsprong.
 - De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A , O en B . De middelloodlijn van lijnstuk OA snijdt de grafiek in punt C . Bewijs dat de raaklijn in C aan de grafiek van f door B gaat.





- 42** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \ln(a + \sin(x))$.
 Voor vier waarden van a is de grafiek van f_a getekend.
- Voor welke waarden van a bestaat $f_a(x)$ voor geen enkele waarde van x ?
 - Onderzoek voor welke waarde van a de grafiek van f_a de x -as raakt.
 - Er zijn waarden van a waarvoor de grafiek van f_a buigpunten heeft en er zijn waarden waarvoor de grafiek van f_a verticale asymptoten heeft.
 Onderzoek voor welke waarden van a de grafiek van f_a :
 - buigpunten heeft
 - verticale asymptoten heeft.

- 43** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x - a}$
- Onderzoek voor welke waarden van a de grafiek van f_a
- een verticale asymptoot heeft;
 - een scheve asymptoot heeft;
 - een perforatie heeft.

Samenvatting

Theorie

Linkerlimiet, rechterlimiet, perforatie en sprong

Als een functiewaarde van een functie f niet bestaat voor $x = a$, kun je vaak wel iets zeggen over het gedrag van f als x tot a nadert. Je moet daarbij soms onderscheid maken tussen 'x daalt naar a ' en 'x stijgt naar a '. De notaties

daarvoor zijn $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow a} f(x)$. In die gevallen spreek je van de rechterlimiet $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ en de linkerlimiet $\lim_{x \uparrow a} f(x)$.

Als $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ (of $-\infty$) en/of $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty$ (of $-\infty$), dan

heeft de grafiek van f een verticale asymptoot $x = a$.

Als de linker- en rechterlimiet beide niet ∞ of $-\infty$ zijn, dan zijn er twee mogelijkheden:

- Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x)$, dan heeft de grafiek van f een perforatie bij $x = a$.
- Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) \neq \lim_{x \downarrow a} f(x)$, dan heeft de grafiek een sprong bij $x = a$.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = \frac{2x^2 - 10x - 12}{x^2 - 36}$

Bereken exact de coördinaten van de perforatie(s) van de grafiek van f .

Oplossing

$f(x)$ bestaat niet als $x = 6$ of $x = -6$.

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 5x - 6)}{x^2 - 36} \text{ ofwel}$$

$$f(x) = \frac{2(x+1)(x-6)}{(x+6)(x-6)} = \frac{2(x+1)}{(x+6)}$$

mits $x \neq 6$

$$\lim_{x \uparrow 6} f(x) = \lim_{x \downarrow 6} f(x) = \frac{2 \cdot 7}{12} = 1\frac{1}{6},$$

de perforatie is $(6, 1\frac{1}{6})$.

$$\lim_{x \uparrow -6} f(x) = \infty \text{ en } \lim_{x \downarrow -6} f(x) = -\infty,$$

dus $x = -6$ is een verticale asymptoot van de grafiek van f .

S1 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ en $g(x) = \frac{|2x - 1|}{2 - 4x}$

- Bereken exact de coördinaten van de perforatie(s) van de grafiek van f .
- Onderzoek of de grafiek van g een sprong of een perforatie heeft.

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen schrijven.

- Onderzoek voor welke waarden de uitdrukking tussen de absolute waarde-strepen positief en voor welke waarden de uitdrukking negatief is.
- Voor het gedeelte van het domein waar de uitdrukking tussen de strepen positief of gelijk aan nul is, vervang je de strepen door haakjes. Schrijf daarna het functievoorschrift zo eenvoudig mogelijk.
- Voor het gedeelte van het domein waar de uitdrukking tussen de strepen negatief is doe je hetzelfde, maar neem je van de uitdrukking tussen de strepen het tegengestelde.

Voorbeeld

Schrijf het functievoorschrift van $f(x) = x|9 - x^2|$ zonder absolute waarde-strepen.

Oplossing

Voor $-3 \leq x \leq 3$ is $9 - x^2 \geq 0$, dus is $f(x) = 9x - x^3$.

Voor $x < -3$ of $x > 3$ is $9 - x^2 < 0$, dus is $f(x) = -9x + x^3$.

S2 Schrijf het functievoorschrift van $f(x) = |x + 3| - |2 - 4x|$ zonder absolute waarde-strepen.

Vaardigheid

Je kunt bij een knik in de grafiek de helling van het linkerdeel en het rechterdeel van de grafiek berekenen.

Als de grafiek van een functie f een knik vertoont in het punt met $x = a$, dan kun je met behulp van limieten de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de twee delen van de grafiek bij $x = a$ berekenen.

- S3** De grafiek van de functie $f(x) = x|x^2 - x - 2|$ heeft twee knikken.
Bereken in beide knikken de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de grafiek.

Voorbeeld

Gegeven is $f(x) = x^2 - |3x - 6|$.

$$f(x) = x^2 - 3x + 6 \text{ voor } x \geq 2 \text{ en}$$

$$f(x) = x^2 + 3x - 6 \text{ voor } x < 2$$

$$f'(x) = 2x - 3 \text{ voor } x > 2 \text{ en}$$

$$f'(x) = 2x + 3 \text{ voor } x < 2$$

$$\lim_{x \downarrow 2} f'(x) = \lim_{x \downarrow 2} (2x - 3) = 1 \text{ en}$$

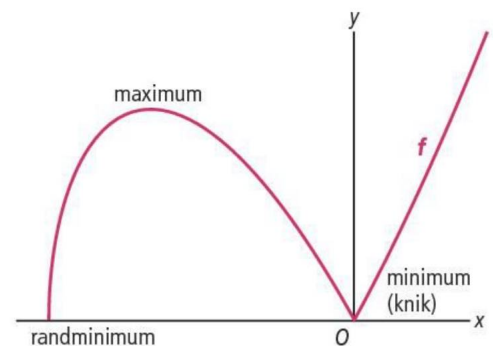
$$\lim_{x \uparrow 2} f'(x) = \lim_{x \uparrow 2} (2x + 3) = 7$$

De raaklijn in $(2, 4)$ aan het linkerdeel van de grafiek heeft richtingscoëfficiënt 7 en aan het rechterdeel richtingscoëfficiënt -2 .

Vaardigheid

Je kunt extreme waarden van een functie berekenen.

Als een functie overgaat van stijgen in dalen, dan heeft de functie een maximum. Als de functie overgaat van dalen in stijgen, dan heeft de functie een minimum. Extreme waarden kun je vinden door te onderzoeken waar de grafiek een horizontale raaklijn heeft, maar je kunt extreme waarden ook vinden aan de rand van een domein of bij een waarde van x waarvoor de grafiek een knik heeft of een verticale raaklijn.

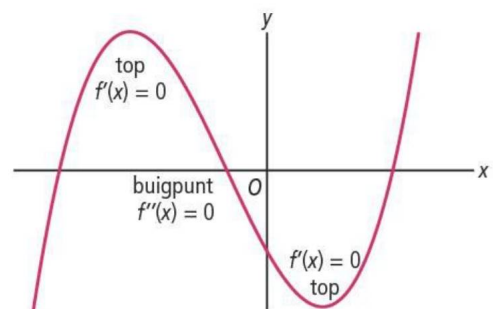


- S4** Gegeven is de functie $f(x) = |x|\sqrt{x+6}$.
Bereken alle extreme waarden van f .

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van een buigpunt berekenen.

De grafiek van een functie f heeft een buigpunt als de afgeleide f' een extreme waarde heeft. De raaklijn in een buigpunt ligt links en rechts van het buigpunt aan verschillende kanten van de grafiek. Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen. Het is mogelijk dat de oplossingen van $f''(x) = 0$ niet altijd bij een buigpunt horen. Omgekeerd is het ook mogelijk dat er een buigpunt is als $f''(x) = 0$ geen oplossing heeft.



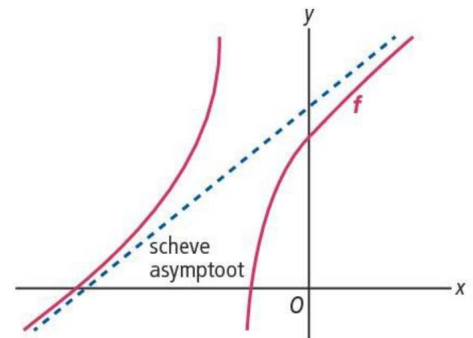
- S5** Gegeven is de functie $f(x) = (x+1)(x-3)(x+5)$.
Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .

Vaardigheid

Je kunt aantonen dat een lijn een scheve asymptoot is van de grafiek van een functie.

Als van een functie f het functievoorschrift te schrijven is als $f(x) = ax + b + g(x)$ met $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, dan is de lijn met vergelijking $y = ax + b$ een scheve asymptoot van de grafiek van f .

In dat geval moet dus gelden: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.



S6 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{-2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

Toon aan dat $y = 1 - 2x$ een vergelijking is van de scheve asymptoot van de grafiek van f .

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking $y = ax + b$ opstellen van de scheve asymptoot van de grafiek van een functie f .

Voor een gebroken functie f met in de teller en de noemer veeltermfuncties, geldt: als de graad van de teller 1 hoger is dan de graad van de noemer, dan heeft de grafiek van f een scheve asymptoot. Voor het opstellen van een vergelijking van de scheve asymptoot schrijf je het functievoorschrift door uitdelen van de noemer in de vorm $f(x) = ax + b + g(x)$ met $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ of $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van de grafiek van $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$

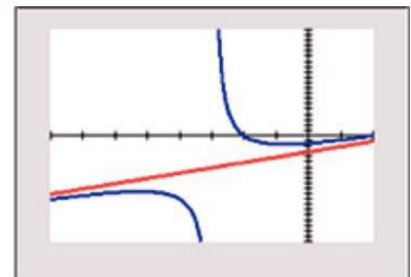
Oplossing

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3} \text{ is te schrijven als } f(x) = \frac{x(x + 3) - 3x - 4}{x + 3}$$

$$f(x) = x + \frac{-3x - 4}{x + 3} \text{ ofwel } f(x) = x + \frac{-3x(x + 3) + 9 - 4}{x + 3}$$

$$f(x) = x - 3 + \frac{5}{x + 3} \text{ met } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x + 3} = 0$$

De lijn $y = x - 3$ is een scheve asymptoot van de grafiek van f .

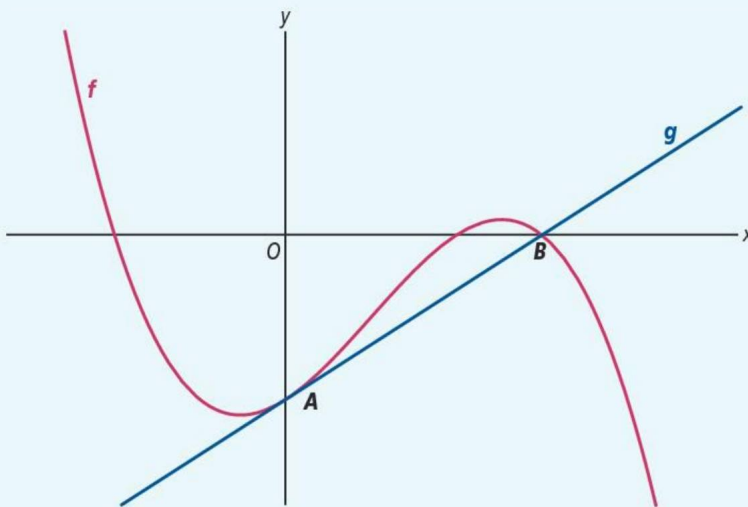


- S7** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x^3 + 5x - 1}{7 - 2x^2}$.
Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van de grafiek van f .

Vaardigheid

Je kunt allerlei aspecten van functies vaststellen of bewijzen.

Aspecten van functies die je met behulp van wiskundige technieken kunt vaststellen of bewijzen zijn onder andere: domein, nulpunten, extreme waarden, asymptoten en symmetrie.

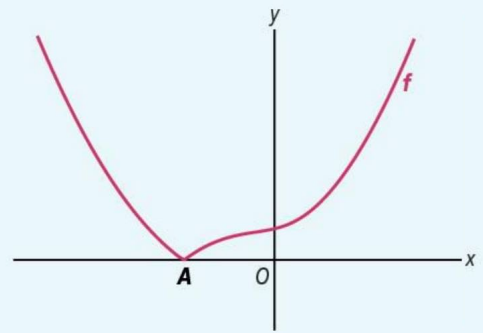


- S8** Gegeven zijn de functies $f(x) = (x^2 - 4)(3 - x)$ en $g(x) = 4x - 12$. De grafieken van f en g hebben de punten A en B gemeen.
- Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar raken in punt A .
 - Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van f en g elkaar snijden in punt B .
 - Bereken algebraïsch de extreme waarden van f . Rond af op twee decimalen.
 - Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .
 - Bewijs dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in het buigpunt van de grafiek.

Gegeven is verder de functie $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

- De grafiek van h heeft een perforatie. Bereken exact de coördinaten van de perforatie.
- Stel een vergelijking op van elke asymptoot van de grafiek van h .

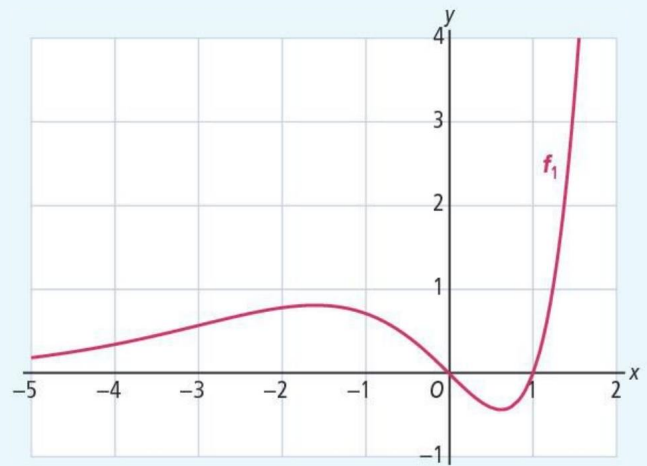
- T1** Gegeven is de functie $f(x) = |x + 2|\sqrt{x^2 + 1}$.
De grafiek van f heeft een knik in punt A .
- Bereken exact de coördinaten van A .
 - Bereken exact de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in A aan beide takken van de grafiek.



- T2** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9}$ en $g(x) = \sqrt[3]{2x - 10}$.
- Bereken exact de extreme waarde van f .
 - Toon aan dat de grafiek van g een buigpunt heeft.
 - Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van g en stel een vergelijking op van de buigraaklijn.
- T3** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{2x - 1}$ en $g(x) = \frac{1 - 3x + x^2}{x + 5}$
- Toon aan dat de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}$ een scheve asymptoot is van de grafiek van f .
 - Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot van de grafiek van g .
- T4** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x|x + 3|}{2x^2 - 18}$
Onderzoek met behulp van berekeningen of de grafiek van f een sprong, een verticale asymptoot en/of een perforatie heeft.
- T5** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 12}$.
- Bereken exact de nulpunten van f .
 - Geef het domein van f .
 - Stel het functievoorschrift op van de functie $g(x) = f(x - 4)$.
 - Welke symmetrie heeft de grafiek van g ?
 - Welke symmetrie heeft de grafiek van f ?

- T6** Gegeven is de functie $f(x) = 4x + 1 + \frac{12}{e^x + 1}$
- Toon met behulp van de afgeleide functie aan dat f geen extreme waarde heeft.
 - Toon met behulp van limieten aan dat de grafiek van f twee verschillende scheve asymptoten heeft en stel een vergelijking op van elk van deze asymptoten.

- T7** Gegeven zijn de functies $f_p(x) = (x^2 - px)e^x$.
Voor $p = 1$ is de grafiek van f_p getekend.
- Bereken exact de x -coördinaten van de toppen van de grafiek van f_1 .
 - Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f_1 .
 - Er is een waarde van p waarbij de functie f_p een extreme waarde heeft bij $x = 1$. Bereken deze waarde van p .
 - Toon met behulp van de tweede afgeleide van f_p aan dat de grafiek van f_p voor elke waarde van p twee buigpunten heeft.



- T8** Gegeven is de functie $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.
- Toon aan dat $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$ het domein van f is.
 - Toon aan dat f geen nulpunten heeft.
 - Toon aan dat f geen extreme waarden heeft.
 - Bereken $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow 1} f(x)$.
 - Stel een vergelijking op van elke asymptoot van de grafiek van f .

- T9** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ en de lijnen met vergelijking $y = x$ en $y = -x$. Om aan te tonen dat $y = x$ een scheve asymptoot is moet je bewijzen dat

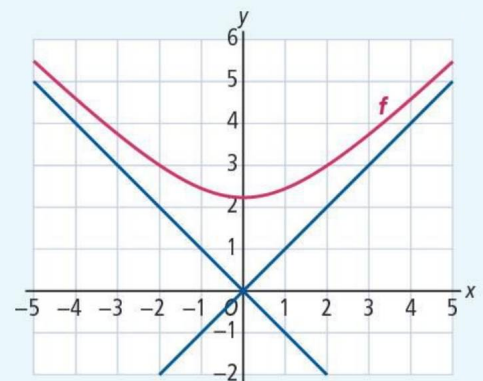
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0.$$

- a** Je kunt deze limiet berekenen door $f(x) - x$ te

vermenigvuldigen met de breuk $\frac{\sqrt{x^2 + 5} + x}{\sqrt{x^2 + 5} + x}$

Werk deze vermenigvuldiging uit en bereken de limiet.

- b** Toon ook aan dat $y = -x$ een scheve asymptoot van de grafiek van f is.



Afsluiting meetkunde 22

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de afgelopen jaren heb je heel wat meetkunde bestudeerd. Je hebt kennis gemaakt met stellingen zoals de raaklijnstelling en de stelling van Thales. Je gebruikt stellingen of gelijkvormigheid om daarna berekeningen te kunnen maken met bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras, de vectormetkunde of de goniometrie.

In dit hoofdstuk sluit je de meetkunde af. Naast een herhaling van de belangrijkste onderdelen van de meetkunde leer je een formule om de afstand van een punt tot een lijn te berekenen.

Je zult in dit hoofdstuk geen leerroutes vinden, dus ook geen ondersteunende of uitdagende opdrachten. In plaats daarvan bevat elke paragraaf een bladzijde met opdrachten op examenniveau.

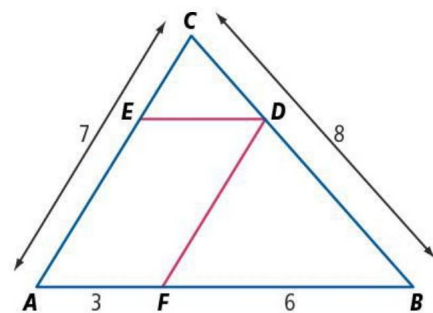
Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk:

- | | |
|---|-------------|
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 11 |
| • <i>Probleem oplossen en analytisch denken</i> | opdracht 42 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 33 |



Voorkennis

- V1 Op de zijden van $\triangle ABC$ liggen de punten D , E en F met $AF = 3$, $FB = 6$, $BC = 8$ en $AC = 7$. De lijnstukken ED en DF zijn evenwijdig aan de zijden van $\triangle ABC$.
- Bereken de lengten van de zijden van $\triangle EDC$.
 - De driehoeken ABC en FBD zijn gelijkvormig. Hoe groot is de vergrotingsfactor?



Theorie

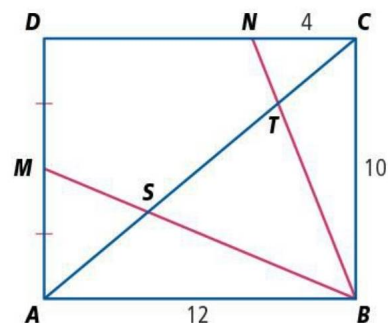
Twee driehoeken zijn **gelijkvormig** als je kunt aantonen dat aan een van de twee volgende voorwaarden is voldaan:

- De overeenkomstige hoeken zijn gelijk.
- De overeenkomstige zijden zijn met dezelfde factor vermenigvuldigd.

Voor gelijkvormige figuren gebruik je het teken $\sim$.

- V2 Van twee gelijkbenige driehoeken ABC en DEF zijn de tophoeken gelijk.
Bewijs dat $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

- V3 Gegeven is rechthoek $ABCD$ met $AB = 12$ en $BC = 10$. Het midden van zijde AD is punt M en op zijde DC ligt punt N met $CN = 4$. Diagonaal AC snijdt lijnstuk BM in punt S en lijnstuk BN in punt T .
- Bereken exact BS .
 - Bereken exact AT .



Theorie

Zijn in $\triangle ABC$ α , β , γ de grootten van de hoeken en a , b en c de lengten van de tegenoverliggende zijden, dan luidt de

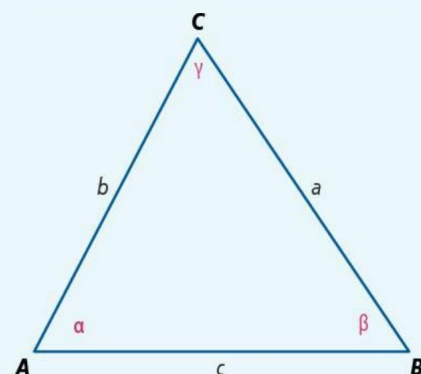
sinusregel: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ en de

cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma).$$

Je gebruikt de sinusregel als de gegevens van minstens één zijde en een overstaande hoek bekend zijn. In overige gevallen gebruik je de cosinusregel.



V4 Maak een tekening en bereken de lengte van de onbekende zijden in één decimaal en de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$ in hele graden.

- a** $a = 6$, $\alpha = 50^\circ$ en $\gamma = 80^\circ$ **c** $a = 12$, $b = 7$ en $c = 6$
b $b = 45$, $\alpha = 60^\circ$ en $\beta = 56^\circ$ **d** $a = 8$, $c = 9$ en $\beta = 45^\circ$

V5 Van $\triangle ABC$ met zwaartelijijn CD is gegeven:
 $AB = 8$, $AC = 6$ en $\angle A = 50^\circ$.

- a** Bereken BC en CD in twee decimalen.
b Bereken $\angle B$ en $\angle ACD$ in hele graden.

Theorie

Voor de hoek φ tussen twee vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ geldt

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $l: y = 3x - 4$ en $m: y = -x + 5$.
 Bereken $\angle(l, m)$ in hele graden.

Oplossing

Richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m)) = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{-2}{\sqrt{20}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \text{ geeft}$$

$$\angle(\vec{r}_l, \vec{r}_m) \approx 117^\circ, \text{ dus } \angle(l, m) \approx 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ.$$

V6 Bereken in hele graden de hoek tussen de lijnen l en m .

- a** $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
b $l: y = 4x - 3$ en $m: y = -3x + 4$
c $l: 2x - 3y = 6$ en $m: 3x + 6y = 2$
d $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ en $m: \frac{x}{3} - \frac{y}{12} = 1$

V7 Gegeven zijn de lijnen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a** Toon aan dat het snijpunt van l en m op de y -as ligt.
b Bereken in hele graden de hoek tussen l en m .

22.1 Lijnen en cirkels

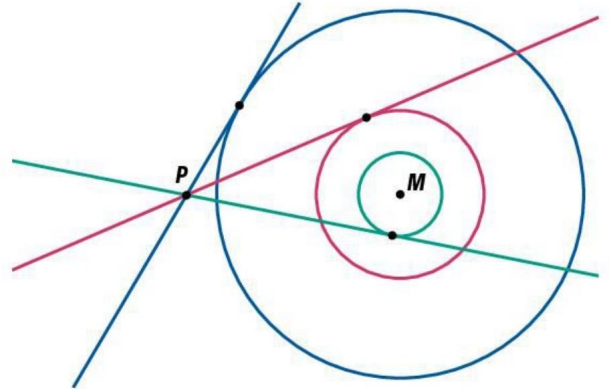
Je herhaalt

- hoe je de coördinaten van de snijpunten van een lijn met een cirkel exact berekent
- hoe je de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels exact berekent
- hoe je een vergelijking opstelt van de raaklijn aan een cirkel in een punt van die cirkel
- hoe je een vectorvoorstelling opstelt van de raaklijnen aan een cirkel vanuit een punt buiten die cirkel

Gegeven zijn twee punten P en M .

Bij elke lijn door P die niet door M gaat, hoort een cirkel met middelpunt M die de lijn raakt.

- Wat kun je zeggen over de ligging van de raakpunten?



- 1 De lijnen $l: 3x + 4y = 38$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ snijden

elkaar in punt S .

Voor elk punt van m geldt $x = 4 + \lambda$ en $y = 2 - 3\lambda$.

Substitueer x en y in de vergelijking van l en bereken zo exact de coördinaten van S .

- 2 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 7$ en de lijn

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bereken met behulp van substitutie exact de coördinaten van de snijpunten van l en c .

Theorie

Als je de coördinaten van de snijpunten van een lijn met een cirkel berekent, krijg je een tweedegraads vergelijking.

Omdat een raaklijn aan een cirkel precies één punt met die cirkel gemeenschappelijk heeft, moet in dat geval de discriminant D van die vergelijking gelijk zijn aan 0.

Om een vergelijking of vectorvoorstelling van de raaklijn in een punt P van een cirkel met middelpunt M op te stellen, gebruik je de raaklijnstelling: de vector $\overrightarrow{MP}$ is de normaalvector van de raaklijn in P .

Raaklijnstelling

Een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Voorbeeld 1

Bereken voor welke waarden van p de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ raakt aan de cirkel met vergelijking $x^2 + (y + 3)^2 = 17$.

Oplossing

Substitutie van $x = p + 2\lambda$ en $y = -3 - \lambda$ in de cirkelvergelijking geeft $(p + 2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 = 17$.

$$p^2 + 4p\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 = 17$$

$$5\lambda^2 + 4p\lambda + p^2 - 17 = 0$$

$$D = (4p)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (p^2 - 17)$$

$$= 16p^2 - 20p^2 + 340 = 340 - 4p^2$$

$$D = 0 \text{ geeft } p = -\sqrt{85} \text{ of } p = \sqrt{85}.$$

Voorbeeld 2

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in het punt $P(1, 0)$ aan de cirkel $c: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

Oplossing

Het middelpunt van c is $M(-2, 1)$.

De vector $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ is

een normaalvector van l , dus een vergelijking van l is $3x - y = b$.

Substitutie van de coördinaten van P geeft $3 - 0 = b$.

Een vergelijking van l is $3x - y = 3$ of ook $y = 3x - 3$.

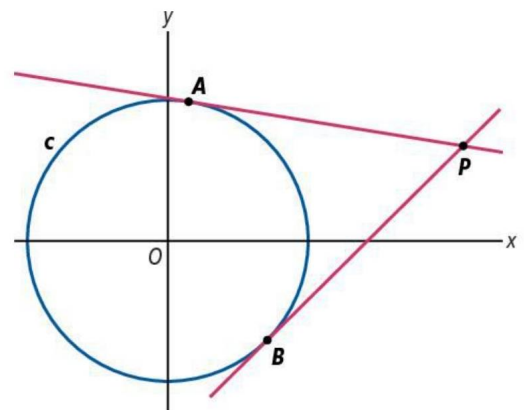
- 3 Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt $P(7, 1)$ aan de cirkel $c: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

- 4 Gegeven zijn cirkel $c: x^2 + y^2 = 50$ en punt $P(15, 5)$.
De raaklijnen door P aan c raken de cirkel in de punten A en B .

- a Leg uit dat een lijn door P met richtingscoëfficiënt m voldoet aan een vectorvoorstelling van de vorm

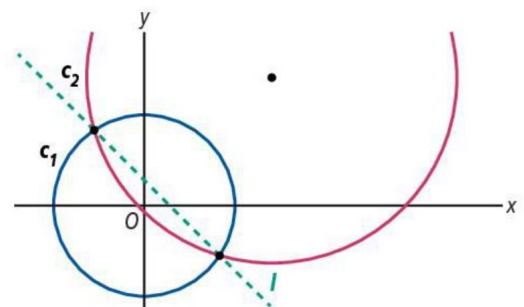
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

- b Druk x en y uit in m en λ .
c Stel vectorvoorstellingen op van deze raaklijnen.
d Bereken exact de coördinaten van de beide raakpunten.



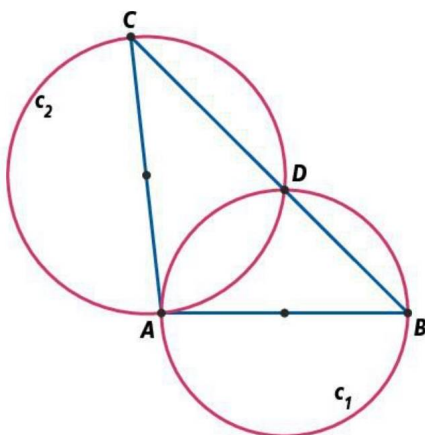
- 5 Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 13$ en $c_2: x^2 + y^2 - 10x - 10y = 3$.

- a Stel een vergelijking op van lijn l door de snijpunten van c_1 en c_2 door de vergelijkingen van c_1 en c_2 van elkaar af te trekken.
b Bereken de coördinaten van de snijpunten door l te snijden met c_1 of c_2 .

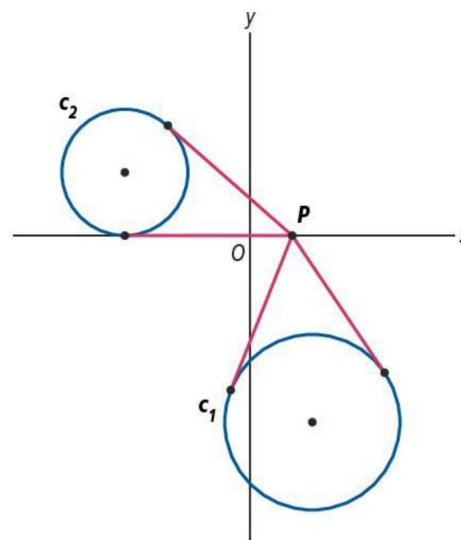


22.1 Lijnen en cirkels

- 6** De coördinaten van de raakpunten A en B uit opdracht 4 zijn ook te berekenen door cirkel c te snijden met de cirkel met middelpunt P en straal PA . Noem deze cirkel c_2 .
- Waarom geldt $\angle OAP = 90^\circ$?
 - Bereken PA en stel een vergelijking op van c_2 .
 - Bereken exact de coördinaten van A en B .
- 7** Het middelpunt van cirkel c ligt op de x -as. c raakt lijn $l: 2x + 3y = 17$ in het punt $R(4, 3)$.
- Maak een schets bij deze gegevens.
 - Stel de middelpuntsvergelijking op van c .



- 8** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ en $C(-5, 9)$. De cirkel c_1 met middellijn AB snijdt de cirkel c_2 met middellijn AC behalve in A ook nog in punt D . Bewijs dat D op zijde BC ligt.
- 9** Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 6x + 18y + 72 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 + 12x - 6y + 36 = 0$.
- Bereken van beide cirkels de coördinaten van het middelpunt en de straal.
 - Op de x -as ligt een punt $P(p, 0)$ zo dat de raaklijnstukken vanuit P naar c_1 even lang zijn als de raaklijnstukken van P naar c_2 . Bereken exact de waarde van p .



Opdrachten op examenniveau

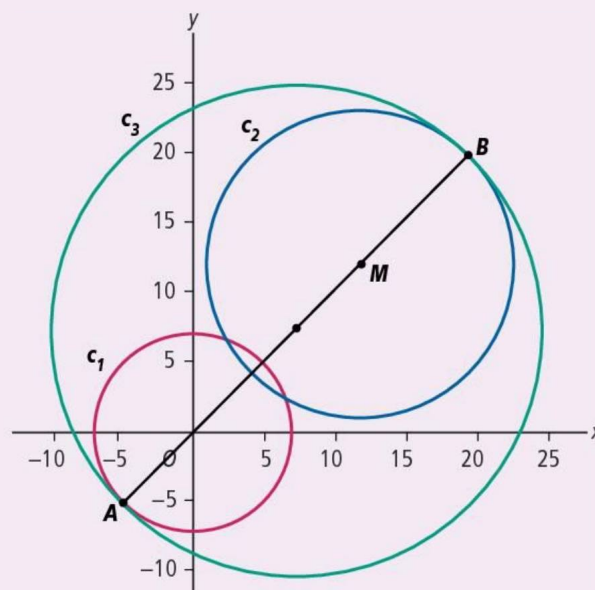
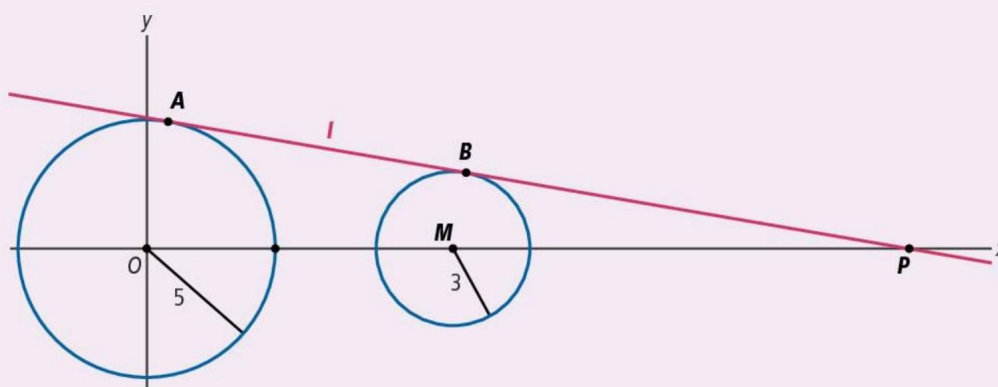
X1 Drie cirkels

Gegeven zijn de cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 50$ en

$$c_2: (x - 12)^2 + (y - 12)^2 = 128.$$

De cirkels c_1 en c_2 raken inwendig aan cirkel c_3 waarvan het middelpunt op de lijn met vergelijking $y = x$ ligt.

Stel een vergelijking op van c_3 .

**X2 Raaklijnen aan cirkels**

De middelpunten van de cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 25$ en

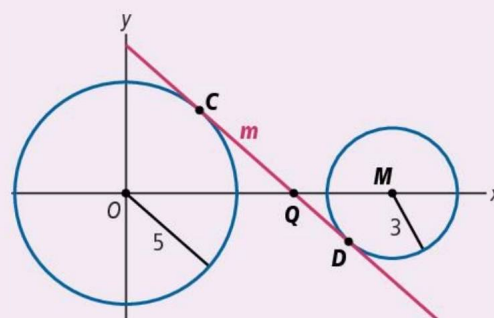
$$c_2: (x - 12)^2 + y^2 = 9$$

zijn respectievelijk O en M . De gemeenschappelijke raaklijn l snijdt de x -as in punt P rechts van M en raakt de cirkels c_1 en c_2 in de punten A en B .

- Bereken exact de coördinaten van P .
- Bereken exact de lengte van lijnstuk AB .

De gemeenschappelijke raaklijn m snijdt de x -as in punt Q tussen O en M en raakt de cirkels c_1 en c_2 in de punten C en D .

- Bereken exact de coördinaten van Q .
- Bereken exact CD .



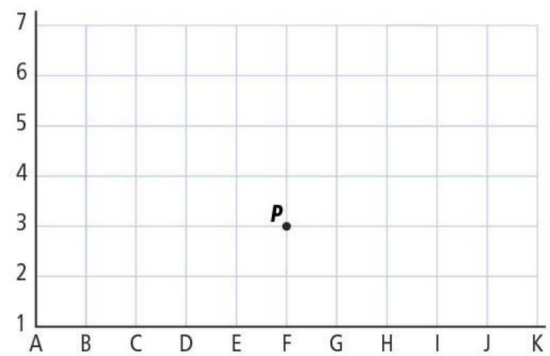
22.2 Afstanden en hoeken

Je leert

- hoe je met een formule de afstand van een punt tot een lijn berekent
- hoe je in verschillende situaties de grootte van een hoek berekent

Op het spelbord kun je op een aantal roosterpunten een pion plaatsen zo, dat de afstand van de pion tot punt P even groot is als de afstand van de pion tot de onderrand.

- Welke roosterpunten zijn dat?



- 10** Gegeven zijn lijn $l: 2x + 3y = 15$ en punt $P(7, 6)$. In deze opdracht bereken je $d(P, l)$, de afstand van P tot l .

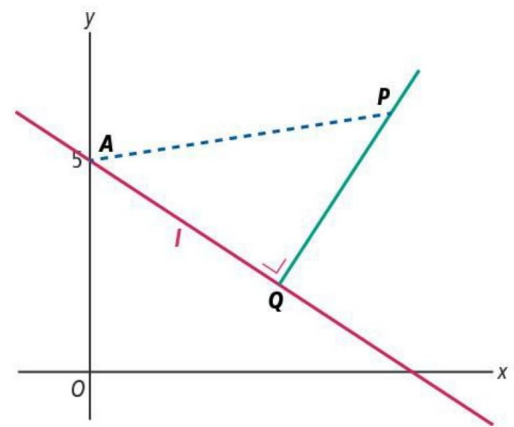
Kies $A(0, 5)$ op l .

- Leg uit dat $PQ = PA \cdot \cos(\angle APQ)$.
- Een richtingsvector van de lijn door P en Q is de normaalvector $\vec{n}_l$ van l .

Leg uit dat $\cos(\angle APQ) = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}_l|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{13}}$ en waarom er

absolute waarde-strepen in de teller staan.

- Controleer dat $d(P, l) = PQ = \frac{17}{\sqrt{13}}$



- 11** Met de aanpak van de vorige opdracht kun je een formule voor de afstand PQ van punt $P(p, q)$ tot lijn $l: ax + by + c = 0$ afleiden.

- Kies een punt $A(r, s)$ op l en geef de kentallen van de richtingsvectoren van de lijnen PA en PQ .

- Toon aan dat $d(P, l) = \frac{|ap + bq - ar - bs|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Gebruik daarbij dat $PQ = PA \cdot \cos(\angle P)$ en de formule

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}$$

- Omdat A op l ligt, geldt $ar + bs + c = 0$.

Laat zien dat daaruit volgt $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Theorie

De afstand van een punt $P(p, q)$ tot een lijn l met vergelijking $ax + by + c = 0$ kun je berekenen met de

$$\text{formule } d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

In woorden: je vindt de afstand van P tot l door de coördinaten van P in te vullen in het linker deel van de op nul herleide vergelijking van l en de absolute waarde daarvan te delen door de lengte van de normaalvector van l .

Voorbeeld

Bereken de afstand van punt $P(-3, 4)$ tot lijn $l: 5x - 2y = 6$.

Oplossing

$$d(P, l) = \frac{|5 \cdot -3 - 2 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

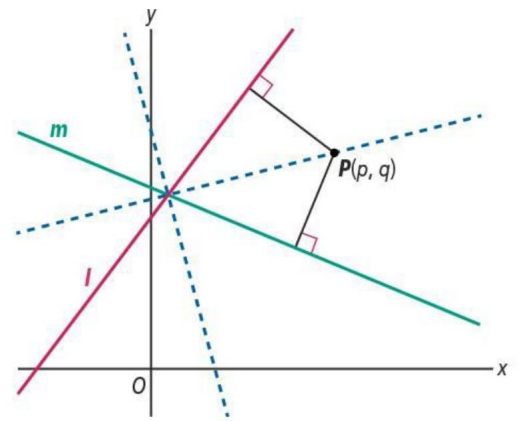
12 Bereken $d(P, l)$.

a $P(7, -3)$ en $l: y = 2x - 4$ **c** $P(-1, 6)$ en $l: x + y = 5$

b $P(0, 0)$ en $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{12} = 1$ **d** $P(-4, 2)$ en $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

13 Gegeven zijn de lijnen $l: 4x - 3y + 12 = 0$ en $m: 5x + 12y = 60$. Punt $P(p, q)$ ligt op een bissectrice van de hoeken die l en m met elkaar maken.

- a** Druk de afstand van P tot l uit in p en q .
- b** Druk de afstand van P tot m uit in p en q .
- c** Gebruik dat $d(P, l) = d(P, m)$ en stel vergelijkingen op van de beide bissectrices.



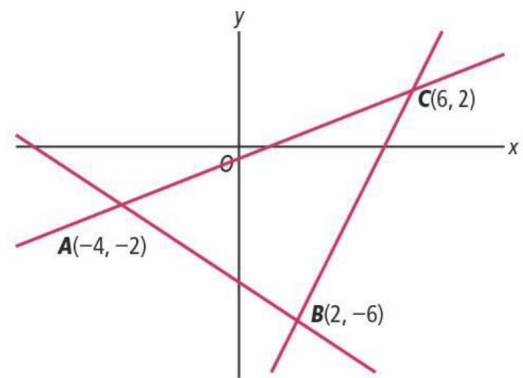
14 Van cirkel c is gegeven dat het middelpunt op de y -as ligt en dat lijn $l: y = \frac{1}{2}x$ een raaklijn is. Verder ligt het punt $P(-8, 14)$ op c .

- a** Maak een schets bij deze gegevens.
- b** Stel de middelpuntsvergelijking op van c .
(Er zijn twee oplossingen.)

15 Gegeven zijn punt $A(0, 2)$ en lijn $l: y = -2$. Toon aan dat de punten die gelijke afstand hebben tot A en l op de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{8}x^2$ liggen.

22.2 Afstanden en hoeken

- 16** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-4, -2)$, $B(2, -6)$ en $C(6, 2)$. Geef je antwoorden in hele graden.
- Bereken de hoek tussen de lijnen AB en BC met behulp van de richtingscoëfficiënten en de tangens.
 - Bereken de hoek tussen de lijnen BC en AC met behulp van de richtingsvectoren en het inproduct.
 - Bereken de hoek tussen de lijnen AB en AC met behulp van de cosinusregel.

**Theorie**

Om de grootte van een hoek te berekenen, kun je gebruikmaken van

- $\sin$, $\cos$ en $\tan$
- de sinusregel en de cosinusregel
- het inproduct van (richtings)vectoren

Voorbeeld

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $l: 4x + 5y = 20$ en $m: 4x - 3y = 12$.

Oplossing

Richtingsvectoren van l en m zijn

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{15 - 16}{\sqrt{41} \cdot 5} = -0,031\dots, \text{ dus}$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 91,79^\circ \text{ en } \angle(l, m) \approx 88^\circ.$$

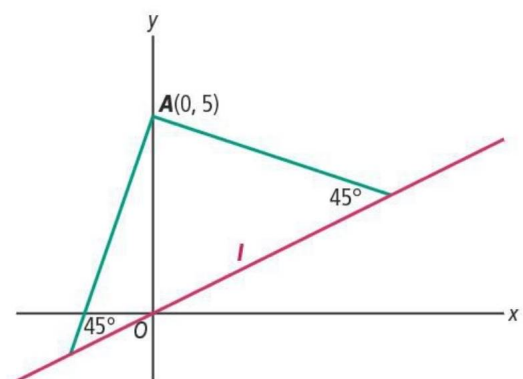
- 17** De lijnen $l: x - y = 2$, $m: x + 2y = 4$ en $n: x + 5y = 18$ sluiten een driehoek in. Bereken in graden nauwkeurig de grootte van de hoeken van de driehoek.

- 18** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de raaklijnen uit het punt $P(15, 5)$ aan de cirkel $c: x^2 + y^2 = 50$.

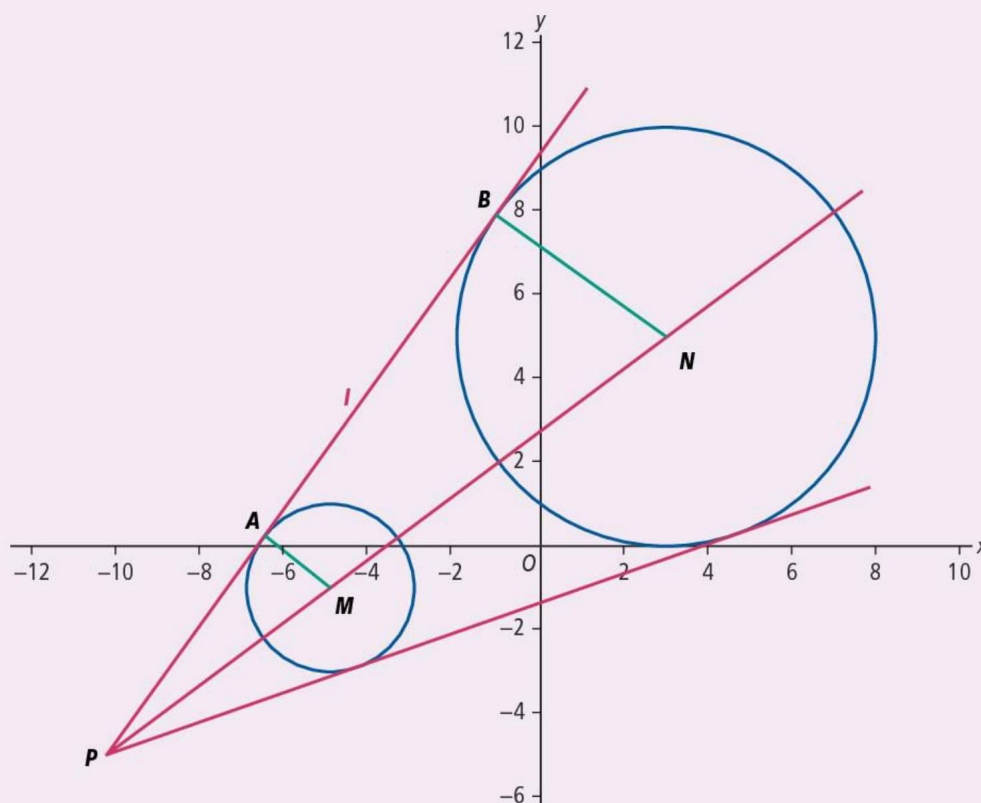
- 19** Gegeven zijn lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en punt $A(0, 5)$.

Lijn $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ maakt een hoek van 45° met lijn l .

Bereken exact de waarden van a .



Opdrachten op examenniveau

X3 De hoek tussen gemeenschappelijke raaklijnen

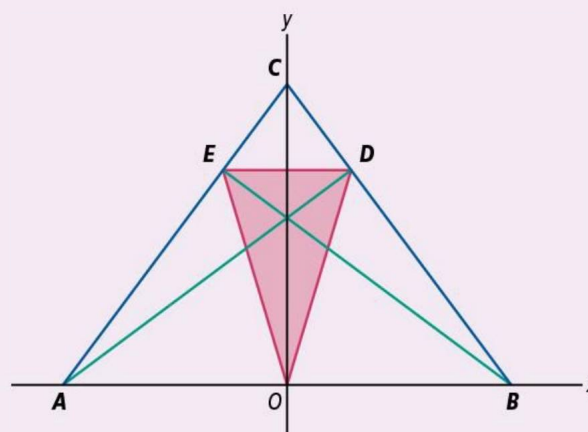
Gegeven zijn de cirkels $c_1: (x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 4$ en $c_2: (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. De gemeenschappelijke raaklijnen l en m aan de cirkels snijden elkaar in punt P .

- Bereken exact $d(c_1, c_2)$.
- Bereken in graden nauwkeurig $\angle(l, m)$.
- Bereken exact de coördinaten van P .

X4 Hoogtelijnen en bissectrices

Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-15, 0)$, $B(15, 0)$ en $C(0, 20)$. De hoogtelijnen van $\triangle ABC$ snijden de zijden in de punten D , E en O .

Toon aan dat de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ de bissectrices van $\triangle ODE$ zijn.

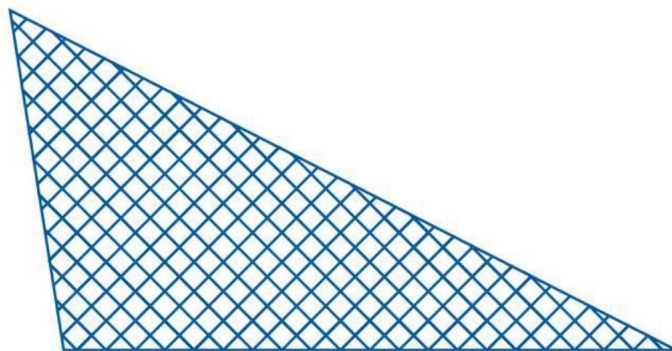


Je leert

- hoe je het zwaartepunt van een veelhoek bepaalt

Boaz en Joep mogen een overgebleven stuk taart, waarvan je hier de bovenkant ziet, delen.

- Hoe moeten zij snijden zodat beiden precies de helft krijgen?



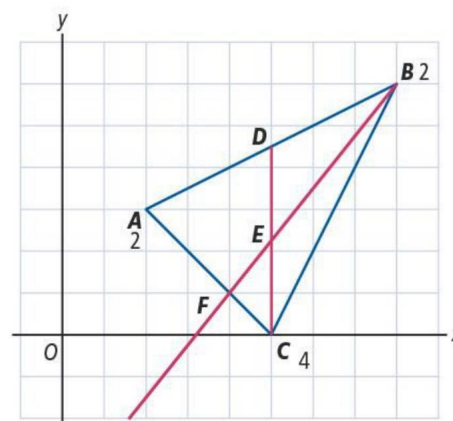
Theorie

Als zich in de punten $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de massa's $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ bevinden, dan geldt voor het zwaartepunt Z van die puntmassa's:

$$\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{a}_3 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n,$$

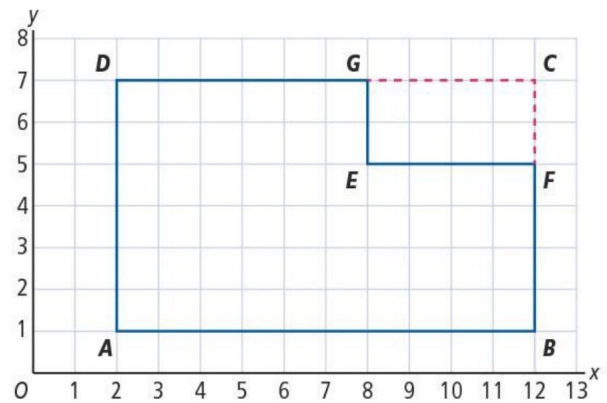
waarbij $m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$.

- 20** Gegeven zijn de punten $A(2, 4)$, $B(6, -4)$ en $C(10, 12)$. In deze punten bevinden zich achtereenvolgens massa's ter grootte van 3, 6 en 9. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de massa's in A , B en C .
- 21** Gegeven zijn de punten $A(-2, -2)$, $B(1, 3)$ en $C(6, 0)$. In deze punten bevinden zich achtereenvolgens massa's ter grootte van 1, 4 en 2.
- Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de massa's in A , B en C .
 - In een punt $D(p, q)$ wordt een massa ter grootte van 3 geplaatst, zodat het punt $(2, 1)$ het zwaartepunt van de massa's in A , B , C en D is. Bereken p en q .
- 22** Gegeven zijn de punten $A(2, 3)$, $B(8, 6)$ en $C(5, 0)$. De respectievelijke massa's in deze punten zijn 2, 2 en 4.
- Het zwaartepunt van de massa's in A en B is D . Bereken de coördinaten van D .
 - Het zwaartepunt van de massa's in A , B en C is E . Bereken de coördinaten van E .
 - Je kunt de massa's in A en B vervangen door de som van die massa's in D te plaatsen. Laat met een berekening zien dat E dan ook het zwaartepunt van de massa's in D en C is.
 - De lijn door B en E snijdt zijde AC in F . Bereken de coördinaten van F .
 - Van welke twee massa's is F het zwaartepunt?



- 23** In een assenstelsel is gegeven rechthoek $ABCD$ met zijden 10 en 6. Uit deze rechthoek is rechthoek $EFCG$ met zijden 2 en 4 weggelaten.

- Verdeel veelhoek $ABFEGD$ in twee of drie rechthoeken en bereken van elke rechthoek het zwaartepunt, dat is het snijpunt van de diagonalen.
- Bereken de oppervlakte van elke rechthoek.
- Je kunt een systeem van puntmassa's maken door elke rechthoek te vervangen door een puntmassa in het zwaartepunt van die rechthoek. De grootte van zo'n puntmassa komt dan overeen met de oppervlakte van die rechthoek. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van dit systeem.



Aanpak

Hoe bereken je de coördinaten van het zwaartepunt (of massamiddelpunt) van een veelhoek?

- Verdeel de veelhoek in rechthoeken en driehoeken. De zwaartepunten van die driehoeken en rechthoeken kun je dan opvatten als puntmassa's met als massa de oppervlakte van de driehoek of rechthoek.
- Bereken de coördinaten van de zwaartepunten en de oppervlakten van de rechthoeken en driehoeken. Het zwaartepunt van een rechthoek is het snijpunt van de diagonalen. Voor het zwaartepunt Z van een driehoek ABC geldt $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$
- Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van dit systeem.

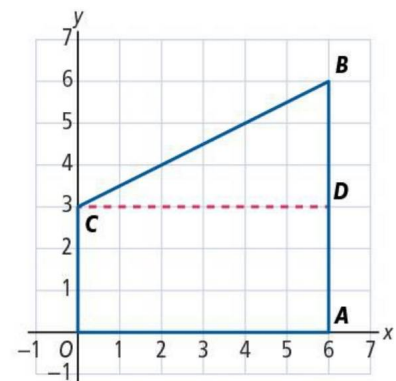
Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van vierhoek $OABC$ met $A(6, 0)$, $B(6, 6)$, $C(0, 3)$.

Oplossing

- De lijn CD met punt $D(6, 3)$ verdeelt de vierhoek in een rechthoek en een driehoek.
- Het zwaartepunt van de rechthoek is punt $E(3, 1\frac{1}{2})$ en de oppervlakte is 18. Het zwaartepunt van de driehoek is $F(4, 4)$ en de oppervlakte is 9.
- Voor het zwaartepunt Z van de veelhoek geldt

$$\vec{z} = \frac{9}{27} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{18}{27} \begin{pmatrix} 3 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{3} \\ 2\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ dus } Z(3\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}).$$



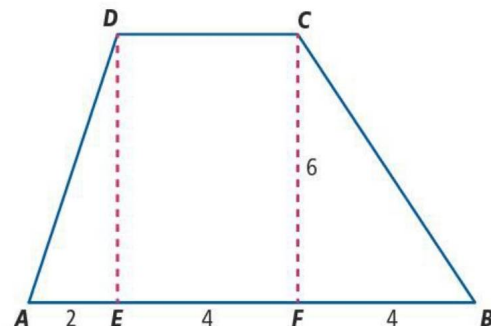
22.3 Zwaartepunten

- 24** Gegeven zijn de punten $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(6, 3)$, $D(3, 5)$, $E(0, 3)$ en $F(3, 12)$.
- Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van vijfhoek $ABCDE$.
 - Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van vijfhoek $ABCFE$.

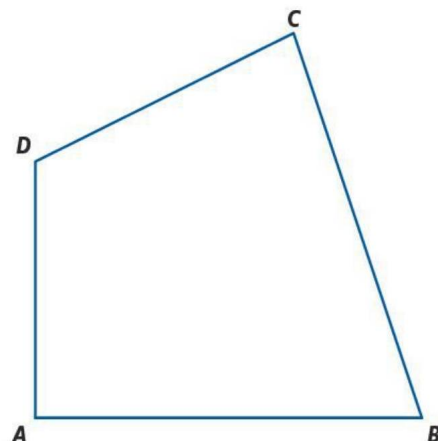
- 25** In trapezium $ABCD$ snijden de loodlijnen uit D en C zijde AB in de punten E en F .

Er geldt: $AE = 2$, $EF = CD = 4$, $FB = 4$ en $DE = 6$.

- Plaats de figuur in een assenstelsel met A in de oorsprong.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van het trapezium met behulp van de zwaartepunten en de oppervlakten van rechthoek $EFCD$ en de driehoeken AED en FBC .
- Verdeel het trapezium met de diagonaal AC in twee driehoeken en bereken het zwaartepunt van het trapezium opnieuw met behulp van de zwaartepunten van deze driehoeken.

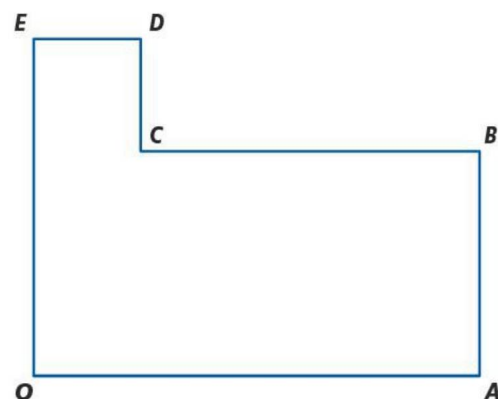


- Teken in vierhoek $ABCD$ de zwaartepunten E en F van de driehoeken ABD en BCD .
- Leg uit dat het zwaartepunt Z van vierhoek $ABCD$ op lijn EF ligt.
- Teken de zwaartepunten G en H van de driehoeken ABC en ACD .
- Van welke lijnen is Z het snijpunt?
- Teken het zwaartepunt Z van vierhoek $ABCD$.

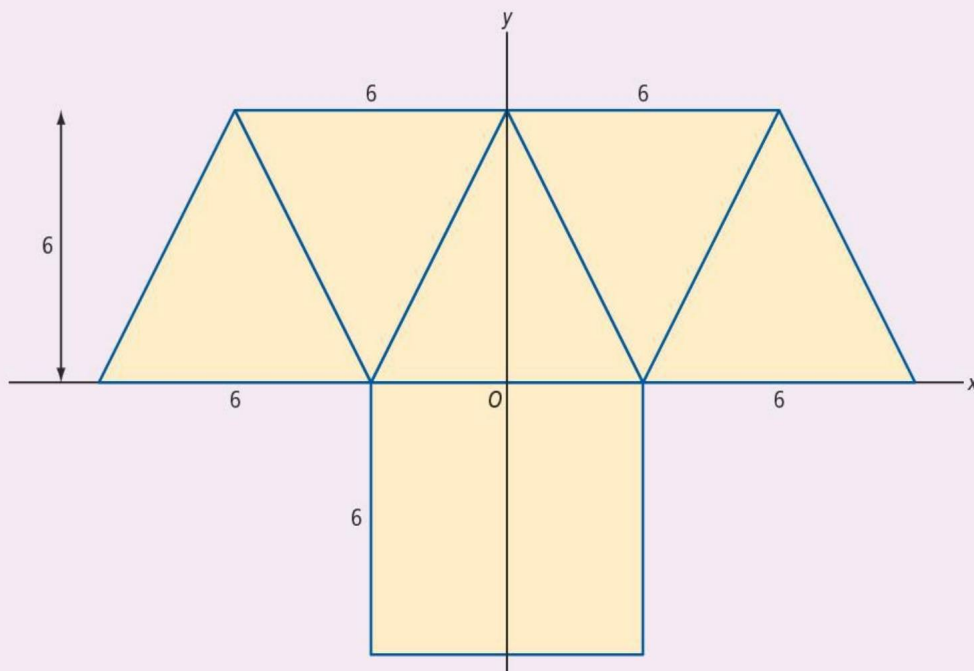


- 27** Gegeven is $OABCDE$ met $O(0, 0)$, $A(12, 0)$, $B(12, 6)$, $C(3, 6)$, $D(3, 9)$ en $E(0, 9)$.

- Verdeel de figuur in twee rechthoeken en teken van elke rechthoek het zwaartepunt.
- Maak een andere verdeling in twee rechthoeken en teken weer de zwaartepunten.
- Teken het zwaartepunt Z van deze zeshoek zonder de coördinaten te berekenen.
- Controleer je tekening van opdracht c door de coördinaten van Z te berekenen.



Opdrachten op examenniveau

X5 Het zwaartepunt van een veelhoek

In een assenstelsel is een vierkant met zijde 6 getekend met daarop een trapezium dat bestaat uit vijf gelijkbenige driehoeken met hoogte 6. De y -as is de symmetrieas van de figuur en de x -as is de scheidingslijn tussen het vierkant en het trapezium.

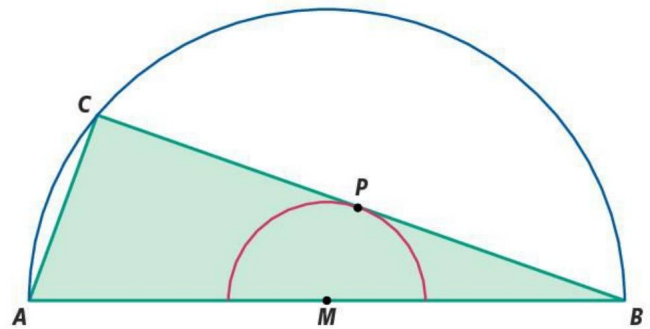
- Toon aan dat het punt $(0, 2\frac{4}{5})$ het zwaartepunt van het trapezium is.
- Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de hele figuur.
- De opstaande zijden van het vierkant worden naar beneden verlengd, zodat een rechthoek met zijden 6 en p ontstaat en het zwaartepunt van de zo ontstane figuur in de oorsprong ligt. Bereken p exact.

22.4 Redeneren en rekenen

Je herhaalt • hoe je met behulp van een redenering of een berekening een meetkundig bewijs geeft

intro Gegeven zijn twee halve cirkels met middelpunt M en stralen 2 en 6.
De raaklijn uit B aan de kleine halve cirkel snijdt de grote halve cirkel in punt C .

- Hoe zou je de lengten van de zijden van $\triangle ABC$ kunnen berekenen?
- Welke meetkundige stellingen gebruik je daarbij?



28 Gegeven is een vierkant $ABCD$ met zijde 4 en in het vierkant een halve cirkel met middellijn AB . De raaklijn uit D aan de halve cirkel raakt deze in punt P en snijdt zijde BC in punt E . In deze opdracht bereken je de oppervlakte van $\triangle ECD$ op drie verschillende manieren.

Manier 1 (algebraïsch)

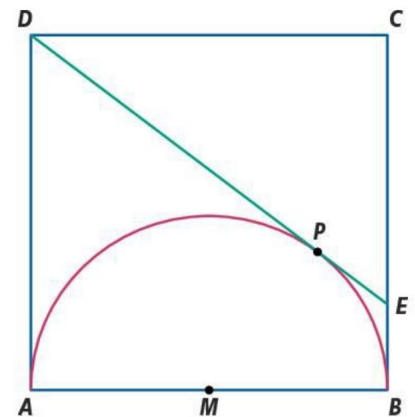
- Plaats het vierkant in een assenstelsel met A in de oorsprong en stel een vergelijking op van lijn DE .
- Bereken de coördinaten van E .
- Bereken exact CE en de oppervlakte van $\triangle ECD$.

Manier 2 (gelijkvormigheid)

- Trek de hulplijnstukken DM en ME en MP en bewijs dat $\angle DME = 90^\circ$.
- Bewijs dat de driehoeken DAM en MBE gelijkvormig zijn.
- Bereken BE , CE en de oppervlakte van $\triangle ECD$.

Manier 3 (Pythagoras)

- Stel $BE = x$, druk PE en CE uit in x en gebruik de stelling van Pythagoras in $\triangle ECD$ om x te berekenen.
- Bereken de oppervlakte van $\triangle ECD$.

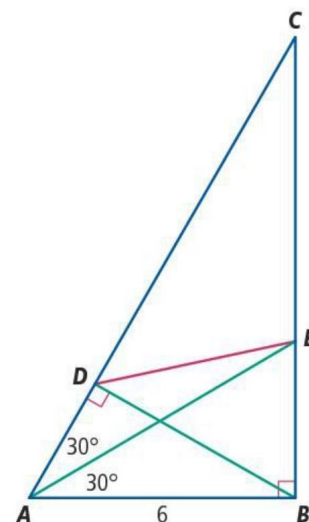


Aanpak

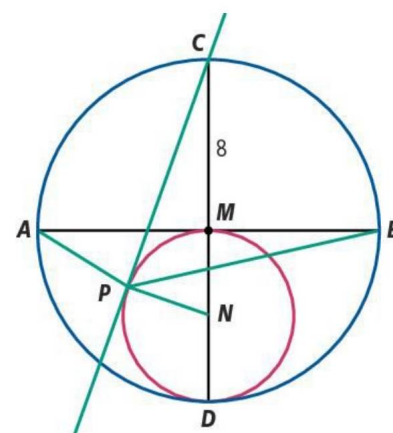
Je kunt een meetkundig bewijs met behulp van een redenering of een berekening geven.

- Meetkundig: met bijvoorbeeld gelijkvormigheid, evenwijdigheid en stellingen, zoals die van Pythagoras en Thales, maar ook met oppervlakte of de sinusregel en de cosinusregel.
- Algebraïsch: in een assenstelsel met vectorvoorstellingen of vergelijkingen. Daartoe moet je soms zelf een assenstelsel kiezen.

- 29** Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ en $AB = 6$.
De hoogtelijn uit B snijdt zijde AC in punt D . De bissectrice van hoek A snijdt zijde BC in punt E .
Toon aan dat de oppervlakte van $\triangle DEC$ de helft is van de oppervlakte van $\triangle ABC$.

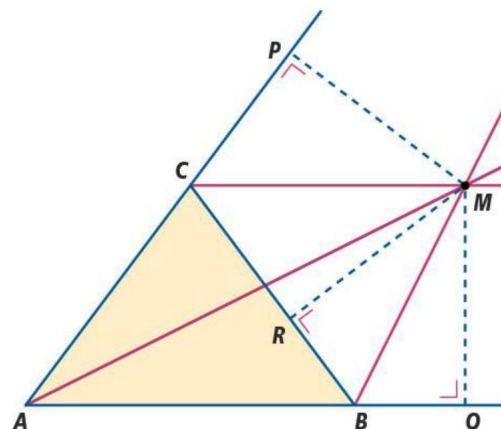


- 30** Gegeven is een cirkel met middelpunt M en straal 8. De middellijnen AB en CD staan loodrecht op elkaar. Vanuit C is een raaklijn getrokken aan de cirkel met middelpunt N en middellijn MD . Het raakpunt is P .
- a** Toon met een berekening aan dat $CA = CB = CP$.
- b** Gebruik dat de driehoeken CAP en CBP gelijkbenig zijn om aan te tonen dat $\angle APB = 135^\circ$.



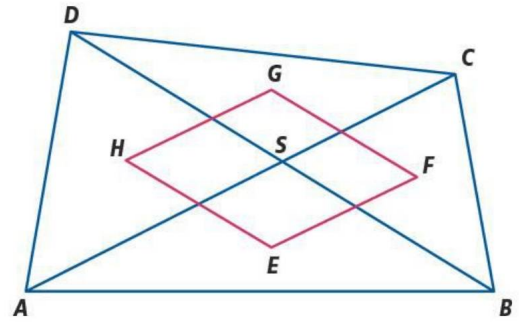
- 31** Er zijn twee cirkels die door de punten $A(6, 8)$ en $B(0, -10)$ gaan en raken aan de lijn met vergelijking $3x + 4y = 60$.
Stel van elk van beide cirkels de middelpuntsvergelijking op.

- 32** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-2, 2)$, $B(4, 2)$ en $C(1, 6)$ en punt $M(6, 6)$. De loodlijnen uit M op de lijnen AC en AB snijden deze lijnen in de punten P en Q .
- a** Toon aan dat M het snijpunt is van de bissectrices van de hoeken PCB en CBQ .
 - b** Beredeneer dat de lijn AM de bissectrice is van hoek CAB .
 - c** De loodlijn uit M op zijde BC snijdt deze in punt R . De omgeschreven cirkel van $\triangle PQR$ heet ook wel een *aangeschreven cirkel* van $\triangle ABC$.
Stel een vergelijking op van deze cirkel.



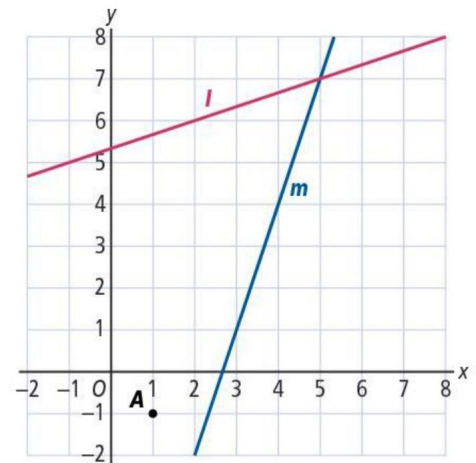
22.4 Redeneren en rekenen

- 33** In vierhoek $ABCD$ snijden de diagonalen AC en BD elkaar in punt S . De punten E, F, G en H zijn de zwaartepunten van respectievelijk de driehoeken ABS, BCS, CDS en ADS . De plaatsvectoren van A, B, C, D en S zijn respectievelijk $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ en $\vec{s}$.
- Druk de vier zwaartepunten uit in $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ en $\vec{s}$.
 - Toon aan dat vierhoek $EFGH$ een parallellogram is.
 - Toon aan dat de zijden van $EFGH$ twee aan twee evenwijdig zijn aan de diagonalen van vierhoek $ABCD$.
 - Bereken de verhouding van de oppervlaktes van de vierhoeken $EFGH$ en vierhoek $ABCD$.



- 34** Gegeven zijn de punten $A(3, 0)$ en $S(0, p)$ met plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{s}$.
- Er is een vector $\vec{b}$ met $|\vec{b}| = 5$ zodat $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$. Bereken exact de waarde van p .
 - Bereken p ook als $|\vec{b}| = 7$.

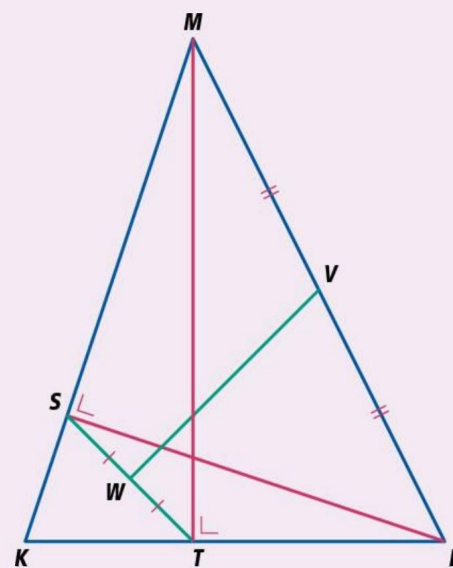
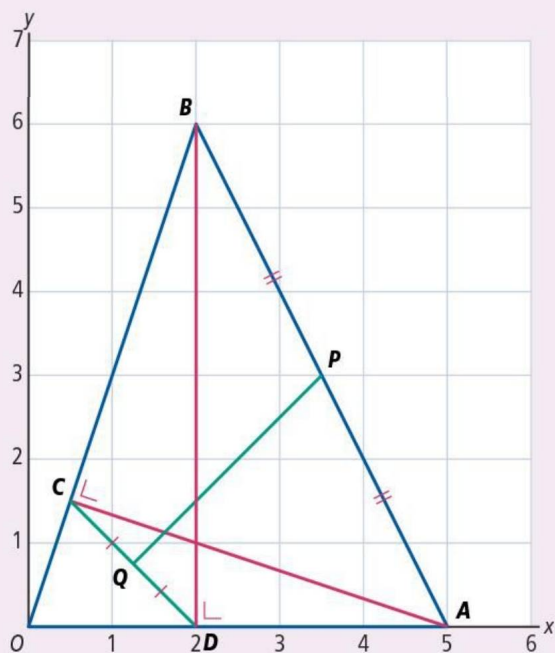
- 35** In het assenstelsel zijn de lijnen $l: x - 3y + 16 = 0$ en $m: 3x - y - 8 = 0$ en het punt $A(1, -1)$ getekend.
- Stel vergelijkingen op van de bissectrices van de hoeken gevormd door l en m .
 - Stel de middelpuntsvergelijkingen op van de cirkels die aan de lijnen l en m raken en door het punt $A(1, -1)$ gaan.



- 36** Gegeven de punten $A(1, 0)$ en $B(7, 0)$.
- Toon aan dat voor het punt $P(9, 4)$ geldt: $AP = 2 \cdot BP$.
 - Er zijn nog meer punten P waarvoor geldt $AP = 2 \cdot BP$. Stel $P(x, y)$ en toon aan dat deze punten op een cirkel liggen en stel de middelpuntsvergelijking van de cirkel op.

Opdrachten op examenniveau

X6 Hoogtelijnen



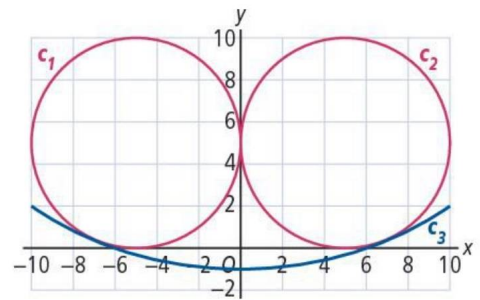
Gegeven is $\triangle OAB$ met $O(0, 0)$, $A(5, 0)$ en $B(2, 6)$.

De hoogtelijnen uit A en B snijden de zijden OB en OA in de punten C en D . Punt P is het midden van lijnstuk AB en punt Q is het midden van lijnstuk CD .

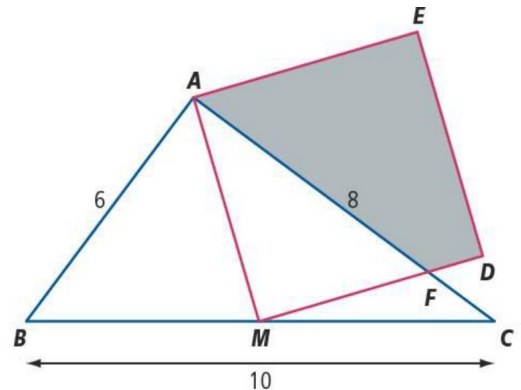
- Bereken de coördinaten van C en Q en bewijs dat $PQ \perp CD$.
- In $\triangle KLM$ snijden de hoogtelijnen uit L en M de zijden KM en KL in de punten S en T . Punt V is het midden van zijde LM en punt W is het midden van lijnstuk ST . Bewijs meetkundig dat $VW \perp ST$.

22.5 Gemengde opdrachten

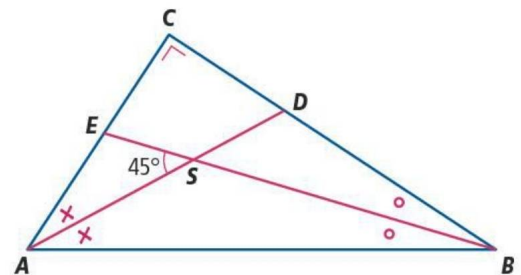
- 37** De cirkels $c_1: (x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ en $c_2: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ raken inwendig aan de rode cirkel c_3 , die ook door het punt $(0, -1)$ gaat. Bereken exact de coördinaten van het middelpunt M en de straal r van c_3 .



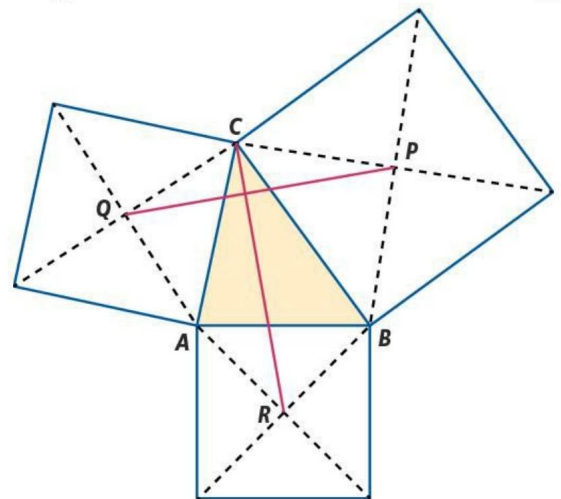
- 38** Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $AC = 8$ en $BC = 10$. Punt M is het midden van lijnstuk BC . Op lijnstuk AM is een vierkant $AMDE$ geplaatst, waarvan zijde MD lijnstuk AC in punt F snijdt.
- Toon aan dat $\triangle AMC$ gelijkbenig is.
 - Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $AFDE$.

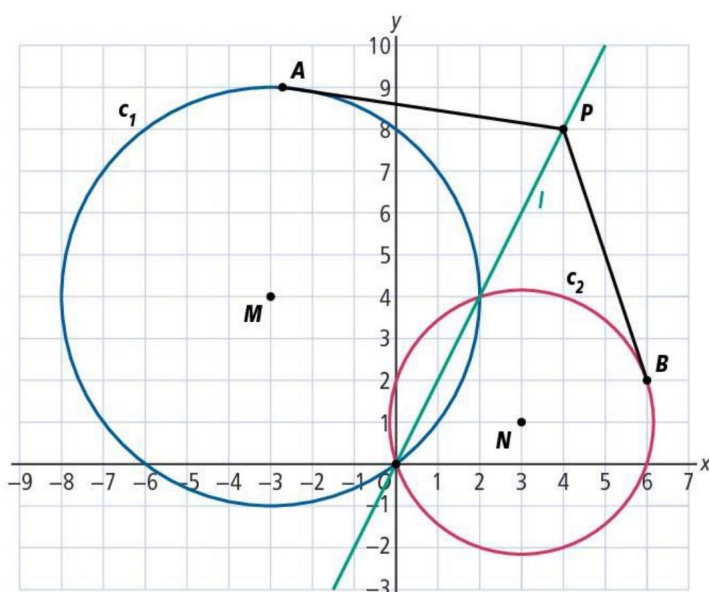


- 39** Bewijs dat in een rechthoekige driehoek de bissectrices van de scherpe hoeken een hoek van 45° met elkaar maken.



- 40** Op de zijden van $\triangle ABC$ worden vierkanten geplaatst. De middelpunten van die vierkanten zijn P , Q en R . Volgens een stelling uit de meetkunde geldt dan dat $PQ = CR$ en $PQ \perp CR$. Bewijs de stelling voor het geval dat $A(0, 0)$, $B(8, 0)$ en $C(2, 8)$.



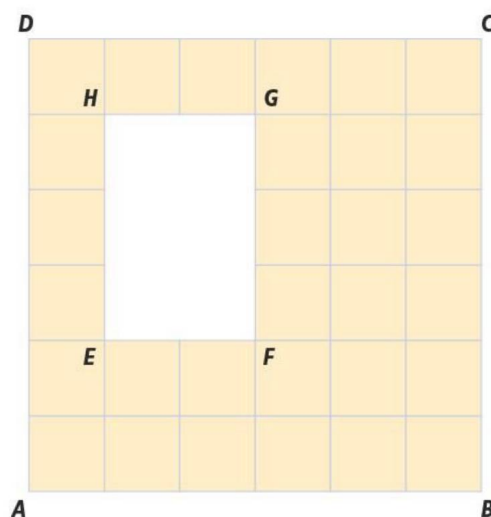


- 41** Gegeven zijn de cirkels $c_1: (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ en $c_2: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$ en de lijn $l: y = 2x$.
- Toon met een berekening aan dat de snijpunten van de cirkels op l liggen.
 - Op l ligt punt $P(4, 8)$.
Toon aan dat de raaklijnstukken uit P aan beide cirkels even lang zijn.
 - Onderzoek of de bewering uit opdracht b geldt voor elk punt P op l dat buiten de cirkels ligt.

- 42** Uit het vierkant $ABCD$ met zijde 6 is een rechthoek $EFGH$ gesneden.
- Plaats de zo ontstane figuur in een assenstelsel met A in de oorsprong en bereken de coördinaten van het zwaartepunt.

Noah beweert dat je de coördinaten van het zwaartepunt ook kunt berekenen met behulp van de zwaartepunten en oppervlaktes van vierkant $ABCD$ en rechthoek $EFGH$.

- Onderzoek op welke manier dat kan en laat zien dat die manier correct is door het resultaat te vergelijken met het antwoord op opdracht a.



Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van een lijn l en een cirkel c exact berekenen.

Bij een vergelijking van l herleid je de vergelijking eerst tot de vorm $y = \dots$ of $x = \dots$

Bij een vectorvoorstelling van l druk je x en y uit in de parameter.

Substitueer y , x of de parameter in de vergelijking van c en los de tweedegraads vergelijking op.

- Is $D < 0$, dan zijn er geen snijpunten.
- Is $D = 0$, dan raakt l aan c .
- Is $D > 0$, dan zijn er twee snijpunten.

Substitueer de gevonden waarden in de vergelijking of vectorvoorstelling van l .

Voorbeeld

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn $l: x + 3y = 5$ en de cirkel $c: x^2 + y^2 = 65$.

Oplossing

$$x = 5 - 3y$$

$$(5 - 3y)^2 + y^2 = 65$$

$$25 - 30y + 9y^2 + y^2 = 65$$

$$10y^2 - 30y - 40 = 0$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$(y + 1)(y - 4) = 0$$

$$y = -1 \text{ of } y = 4$$

$$x = 5 - 3 \cdot -1 = 8 \text{ of } x = 5 - 3 \cdot 4 = -7$$

De snijpunten zijn $(8, -1)$ en $(-7, 4)$.

S1 Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ met de cirkel } c: x^2 + y^2 = 65.$$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van de snijpunten van twee cirkels exact berekenen.

- 1 Elimineer $x^2 + y^2$ door de vergelijkingen van de cirkels van elkaar af te trekken. Zo vind je een vergelijking van de lijn door de snijpunten van de cirkels.
- 2 Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze lijn met een van de cirkels.

Voorbeeld

Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de cirkels $c_1: x^2 + y^2 = 25$ en $c_2: x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$.

Oplossing

$$1 \quad -16x + 64 = 0 \text{ geeft } x = 4.$$

$$2 \quad 16 + y^2 = 25 \text{ geeft } y = 3 \text{ of } y = -3.$$

De snijpunten zijn $(4, 3)$ en $(4, -3)$.

S2 Bereken exact de coördinaten van snijpunten van de cirkels $c_1: x^2 + (y - 1)^2 = 4$ en $c_2: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 17$.

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking opstellen van de raaklijn l aan een cirkel met middelpunt M in een punt P van die cirkel.

- 1 Bereken de kentallen van de vector $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- 2 $\overrightarrow{MP}$ is de normaalvector van de raaklijn in P .
Een vergelijking van l is dus $ax + by = c$.
Vul de coördinaten van P in om c te berekenen.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn l in het punt $P(5, 1)$ aan de cirkel $c: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$.

Oplossing

- 1 $M(2, -1)$ en $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 2 $l: 3x + 2y = c$
 $c = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17$
Een vergelijking van l is $3x + 2y = 17$.

- S3** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de cirkel $c: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 65$ in het punt $(5, 5)$.

Vaardigheid

Je kunt een vectorvoorstelling opstellen van de raaklijnen vanuit een gegeven punt $P(a, b)$ buiten de cirkel.

- 1 Neem als vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ en ga met een schets na of een van de raaklijnen verticaal is.
- 2 Substitueer $x = a + \lambda$ en $y = b + \lambda m$ in de vergelijking van de cirkel en herleid het resultaat op 0.
- 3 Stel met behulp van de discriminant vast voor welke waarden van m de vergelijking één oplossing heeft.
- 4 Schrijf van elke raaklijn een vectorvoorstelling op.

Voorbeeld

Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen uit het punt $(1, 5)$ aan de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 13$.

Oplossing

$$1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Uit een schets blijkt dat geen van de raaklijnen verticaal is.

$$2 \quad (1 + \lambda)^2 + (5 + \lambda m)^2 = 13$$

$$(1 + m^2)\lambda^2 + (2 + 10m)\lambda + 13 = 0$$

$$3 \quad D = (2 + 10m)^2 - 52(1 + m^2)$$

$$D = 48m^2 + 40m - 48$$

$$D = 0 \text{ geeft } 6m^2 + 5m - 6 = 0.$$

$$m = \frac{-5 + \sqrt{169}}{12} \text{ of } m = \frac{-5 - \sqrt{169}}{12}$$

$$m = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ of } m = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2}$$

- 4 Vectorvoorstellingen van de raaklijnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- S4** Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen uit het punt $P(7, 17)$ aan de cirkel $c: x^2 + y^2 = 169$.

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt met een formule de afstand van een punt tot een lijn berekenen.

De formule voor de afstand van een punt $P(p, q)$ tot een lijn l met vergelijking $ax + by + c = 0$ is $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

In woorden: je vindt de afstand van P tot l door de coördinaten van P in te vullen in de (op nul herleide) vergelijking van l en de absolute waarde daarvan te delen door de lengte van de normaalvector van l .

Voorbeeld

Bereken de afstand van het punt $P(2, 3)$ tot de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Oplossing

Een vergelijking van l is $3x + 4y = 22$.

$$d(P, l) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

- S5** Bereken de afstand van het punt $(-6, -16)$ tot de lijn $l: 8x + 15y = 1$.

Vaardigheid

Je kunt in verschillende situaties de grootte van een hoek berekenen.

Je kunt daarbij gebruikmaken van

- sin, cos en tan
- de sinusregel en de cosinusregel
- het inproduct van (richtings)vectoren

Voorbeeld

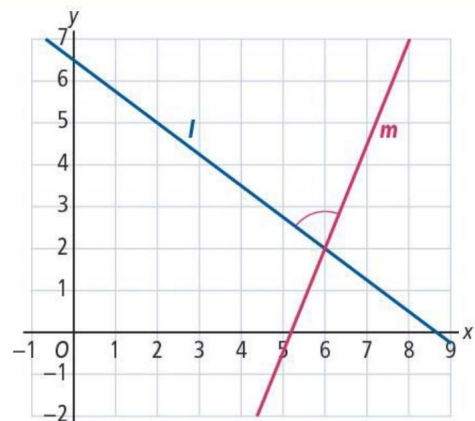
Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen $l: 3x + 4y = 26$ en $m: 5x - 2y = 26$.

Oplossing

Richtingsvectoren van l en m zijn $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{8 - 15}{5 \cdot \sqrt{29}} = -0,2599\dots,$$

dus $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 105^\circ$ en $\angle(l, m) \approx 75^\circ$.



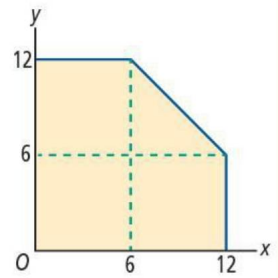
- S6** Bereken de hoek tussen de lijnen uit het voorbeeld ook met behulp van de richtingscoëfficiënten van de lijnen l en m .

Vaardigheid**Je kunt het zwaartepunt van een veelhoek bepalen.**

- 1 Verdeel de veelhoek in rechthoeken en driehoeken. De zwaartepunten van die driehoeken en rechthoeken kun je dan opvatten als puntmassa's met als massa de oppervlakte van de driehoek of rechthoek.
- 2 Bereken de coördinaten van de zwaartepunten en de oppervlakten van de rechthoeken en driehoeken. Het zwaartepunt van een rechthoek is het snijpunt van de diagonalen en voor het zwaartepunt z van een driehoek ABC geldt $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$.
- 3 Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van dit systeem met de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{a}_3 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n$, waarin $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ de massa's zijn in de punten $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ en $m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$.

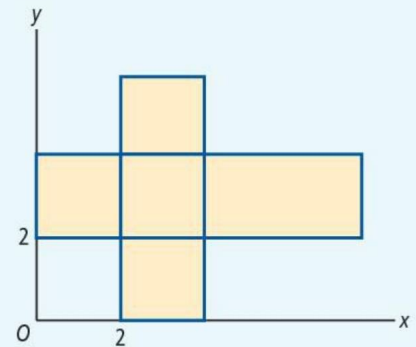
Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de figuur.

**Oplossing**

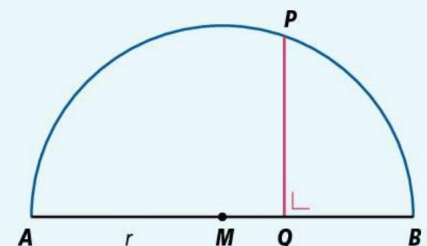
- 1 Zie de stippellijnen.
- 2 De zwaartepunten zijn de punten $(3, 9)$, $(6, 3)$ en $(8, 8)$.
De oppervlakten zijn 36, 72 en 18.
- 3 $\vec{z} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{3}{7} \\ 5\frac{3}{7} \end{pmatrix}$,
dus $Z(5\frac{3}{7}, 5\frac{3}{7})$.

- S7** Gegeven is de uitslag van een kubus in een assenstelsel. De uitslag bestaat uit zes vierkanten met zijde 2. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de uitslag.

**Vaardigheid****Je kunt een meetkundig bewijs met behulp van een redenering of met een berekening geven.**

- Meetkundig: met bijvoorbeeld gelijkvormigheid, evenwijdigheid en stellingen, zoals die van Pythagoras en Thales, maar ook met oppervlakte of de sinusregel en de cosinusregel.
- Algebraïsch: in een assenstelsel met vectorvoorstellingen of vergelijkingen. Daartoe moet je soms zelf een assenstelsel kiezen.

- S8** Punt P ligt op een halve cirkel met middelpunt M en middellijn AB . Punt Q ligt op de middellijn AB met $PQ \perp AB$. Je gaat op verschillende manieren bewijzen dat $PQ^2 = AQ \cdot BQ$.
- a Plaats de figuur in een assenstelsel druk PQ , AQ en BQ uit in de straal r en de x -coördinaat van P .
 - b Bewijs dat $\angle PAQ = \angle BPQ$ en gebruik de tangens.

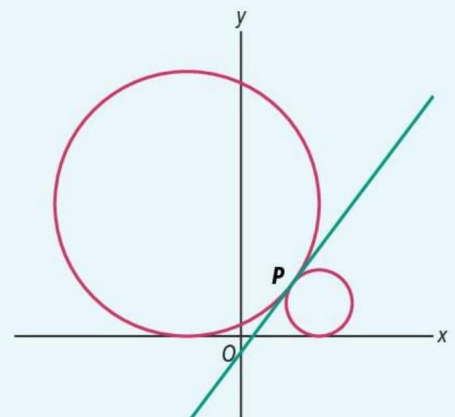


T1 Gegeven is cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 16 = 0$.
Twee cirkels snijden elkaar loodrecht als de raaklijnen in het snijpunt van die cirkels loodrecht op elkaar staan.
Stel een vergelijking op van de cirkel die door het punt $O(0, 0)$ gaat en c in het punt $A(2, 2)$ loodrecht snijdt.

T2 Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 260$.
Stel vergelijkingen op van de raaklijnen uit het punt $P(20, 20)$ aan de cirkel.

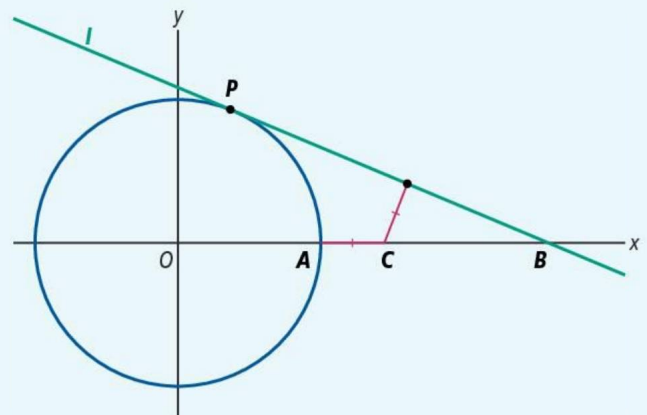
T3 Gegeven is lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Er zijn twee cirkels c_1 en c_2 die de x -as raken en in het punt $P(1, 1)$ ook l raken.
Stel de middelpuntsvergelijkingen op van c_1 en c_2 .

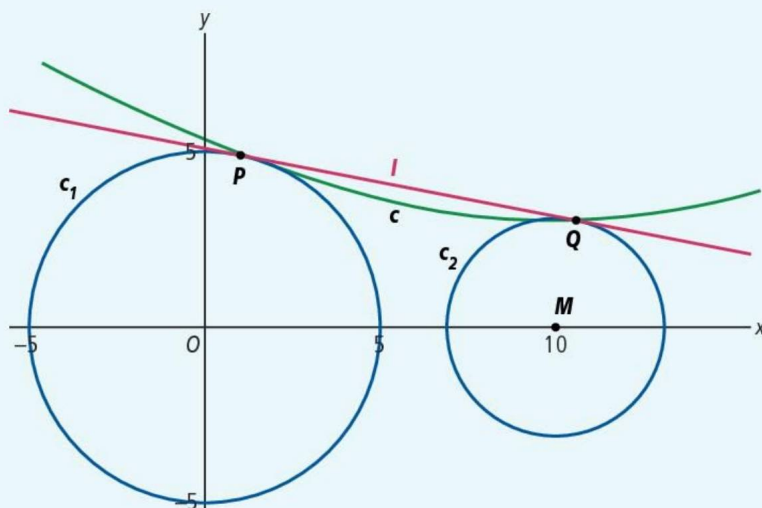


T4 Gegeven zijn lijn $l: 4x + 3y = 72$ en cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$.
Bereken exact $d(c, l)$.

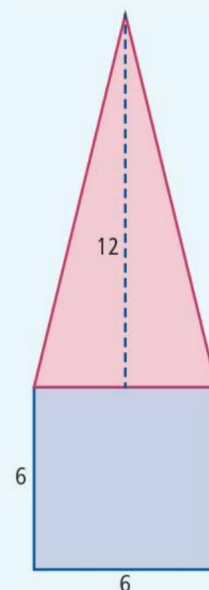
T5 Gegeven is cirkel c met middelpunt O en straal 13.
 c snijdt de x -as in punt A . Lijn l raakt de cirkel in punt $P(5, 12)$ en snijdt de x -as in punt B . Op lijnstuk AB ligt een punt C dat gelijke afstand heeft tot l en c .
Bereken exact de coördinaten van C .



- T6** In een assenstelsel zijn gegeven cirkel c_1 met middelpunt O en straal 5 en cirkel c_2 met middelpunt $M(10, 0)$ en straal 3.
- Een lijn l raakt beide cirkels in de punten P en Q boven de x -as.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van l met de x -as.
 - Bereken exact de richtingscoëfficiënt van l .
 - Een cirkel c met middelpunt op de lijn $x = 10$ raakt beide cirkels.
Stel een vergelijking op van c .



- T7** Gegeven is een vierkant met zijde 6 met daar bovenop een gelijkbenige driehoek met als basis de bovenste zijde van het vierkant en hoogte 12.
- Omdat het vierkant en de driehoek dezelfde oppervlakte hebben, denkt Erik dat het zwaartepunt van de figuur het midden is van de gemeenschappelijke zijde.
- Laat met redenering en/of een berekening zien dat Erik geen gelijk heeft.
 - Bereken exact bij welke hoogte van de driehoek het zwaartepunt van de figuur wel het midden is van de gemeenschappelijke zijde.



Schroefbewegingen

Een helix (meervoud helices; van het Griekse *élix*, gedraaid) of schroeflijn is een speciale vorm van een drie-dimensionale spiraalachtige figuur met een constante straal.

Bekende toepassingen van de helix zijn de leuning van een wenteltrap, de veer van een balpen en de kurkentrekker.

De spiraal van een goede kurkentrekker is open, er kan een lucifer in gestoken worden.

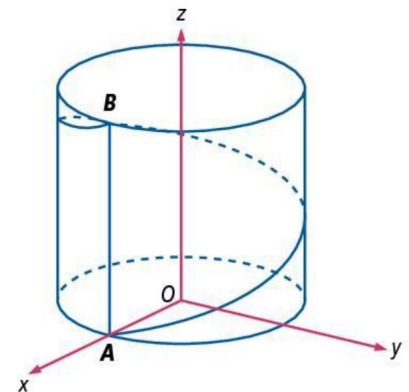
Rechts staat de uitvinding van Archimedes (287-212 v. Chr.) waarmee vloeistoffen of poeders kunnen worden getransporteerd. Wat is de achterliggende wiskunde?



De bewegingsvergelijkingen van een punt P op een schroeflijn op een cilinder zijn:

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \\ z(t) = \frac{5}{2\pi}t \end{cases} \text{ met } t \text{ in seconden en } x, y \text{ en } z \text{ in cm.}$$

Hiernaast is één omwenteling getekend.



Opdracht

- Hoelang duurt een omwenteling?
- De spoed van de schroeflijn is de afstand tussen twee windingen gemeten in de richting van de as van de cilinder waar hij op ligt. Anders geformuleerd: de spoed is het verschil in hoogte tussen het beginpunt en het eindpunt van één omwenteling.
Hoe groot is de spoed van deze schroeflijn?
- Eén omwenteling is te tekenen als diagonaal van de uitslag van een cilindermantel. Zo'n uitslag is een rechthoek van $2\pi r$ bij h .
Vul de juiste waarden voor r en h in en bereken de lengte van de kromme.

De dubbele helix

Links de DNA-dubbele helix, rechts de wenteltrap in het Vaticaanse museum in de vorm van een dubbele helix.



Examenvoorbereiding

SE

CE

K

In dit hoofdstuk vind je een overzicht van de stof voor het examen wiskunde B. In elke paragraaf komt een aantal onderwerpen aan bod, telkens gevolgd door een of meerdere korte oefeningen. Elke paragraaf sluit af met examenopdrachten die aansluiten op de stof in de paragraaf.

De examenopdrachten zijn veelal uit recente examens afkomstig. Vaak betreft het een deel van een opdracht uit een examen. Op het examen gaat een opdracht meestal over meerdere onderwerpen.

Bij elke examenopdracht staat de verwijzing naar een hint. De lijst met hints staat aan het eind van dit blok examenvoorbereiding. Gebruik een hint alleen als je niet weet hoe je de opdracht moet beginnen.

- Hoe goed ben jij voorbereid op het examen?



Functies, grafieken en vergelijkingen

Domein en bereik

Alle waarden van x waarvoor een functiewaarde $f(x)$ bestaat, vormen samen het domein van de functie. Alle functiewaarden die kunnen voorkomen, vormen het bereik van de functie.

Voorbeeld

Geef het domein en het bereik van de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ in intervalnotatie.

Oplossing

$\sqrt{x^2 - 1}$ bestaat voor $x^2 - 1 \geq 0$ dus het domein is $x \leq -1$ of $x \geq 1$ ofwel $D_f = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup [1, \rightarrow \rangle$.

Voor elke waarde van x is $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ en $\sqrt{x^2 - 1}$ kan willekeurig groot worden. Dus het bereik is $y \geq 0$ ofwel $B_f = [0, \rightarrow \rangle$.

- 1 Geef het domein en het bereik van de functies in intervalnotatie.

a $f(x) = 10 + \sqrt{6x - 4}$ c $h(x) = 4 + {}^3\log(9 - x^2)$
 b $g(x) = 4(x - 3)^2 - 8$ d $k(x) = -1 + \frac{5}{x^2 - 2x - 3}$

Maak zo nodig een plot om een indruk te krijgen van het verloop van de grafiek.

Limieten

De wiskundige notatie voor 'x ver van 0' is $x \rightarrow \infty$ als $x > 0$ en $x \rightarrow -\infty$ als $x < 0$. Het symbool ∞ betekent 'oneindig'.

Notatie: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Er gelden de volgende standaardlimieten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ (n geheel en } n > 0).$$

Als een functie f geen waarde heeft voor $x = a$, kun je vaak wel iets zeggen over het gedrag van f in de buurt van $x = a$. Je kunt daarbij onderscheid maken tussen 'x daalt naar a ' en 'x stijgt naar a '.

Notatie: $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ (rechterlimiet) en $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ (linkerlimiet)

Voorbeeld 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-100}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 6x^{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0,02}{x^8} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 250x^{-100} = 0$$

Voorbeeld 2

$$\lim_{x \downarrow 3} \frac{5}{x - 3} = \infty$$

$$\lim_{x \uparrow 3} \frac{5}{x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \uparrow 2} \frac{4x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \uparrow 2} 4x = 8$$

Als bij een quotiëntfunctie f de teller en noemer beide veeltermfuncties zijn, dan kun je het functievoorschrift herleiden tot een vorm waarmee $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ exact te berekenen zijn. Deel daarvoor teller en noemer door de hoogste macht van x die in de noemer voorkomt. Gebruik vervolgens standaardlimieten.

2 Bereken exact.

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x - 7}{4 - 8x}$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^4 - 3x^2 + 2}{6x^3 - x^4}$

c $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(4x^2 + x - 10)}{5x^4 + 2x}$

d $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 3)(3x^2 + 5)}{x^2(1 - 3x)}$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x^2 + 1}$

f $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2 + 4x)^2}{12x - 3x^4}$

Asymptoten en perforaties

Een asymptoot van een grafiek is een lijn waar de grafiek op den duur willekeurig dicht bij komt. Je kunt de grafiek van een functie onderzoeken op horizontale, verticale en scheve asymptoten.

- Horizontale asymptoot

De grafiek van een functie f heeft een horizontale asymptoot $y = c$ als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = c$ en/of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = c$.

- Verticale asymptoot

De grafiek van een functie f heeft een verticale asymptoot $x = a$ als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty$ of $\lim_{x \uparrow a} f(x) = -\infty$ en/of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ of $\lim_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$.

De grafiek van de gebroken functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ heeft een verticale asymptoot $x = a$ als geldt $n(a) = 0$ én $t(a) \neq 0$.

- Scheve asymptoot

De grafiek van een functie f heeft een scheve asymptoot als het functievoorschrift te schrijven is als $f(x) = ax + b + g(x)$ met $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ en/of $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

- Perforatie

De grafiek van een functie f heeft een perforatie bij $x = a$ als $f(a)$ niet bestaat en $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x) = c$.
De perforatie is het punt (a, c) .

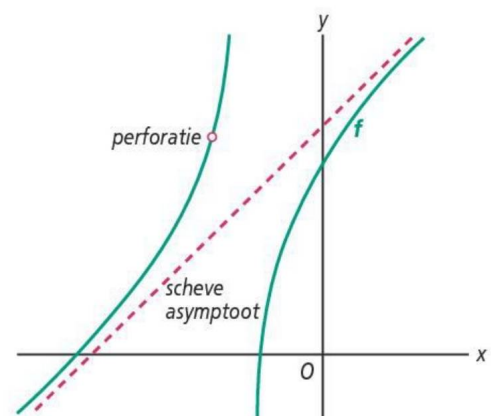
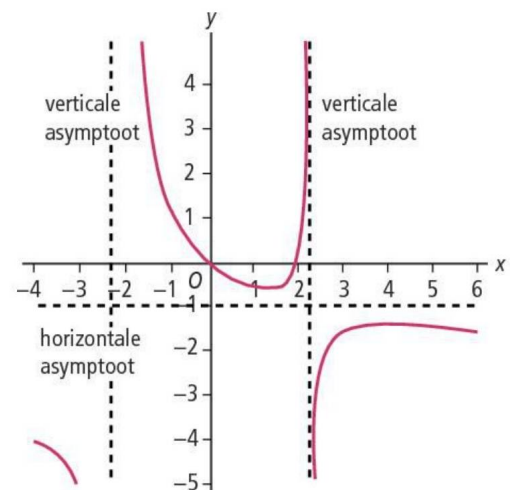
Voorbeeld

Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 10x^2}{8x^2 + 4x^3}$

Oplossing

Deel elke term in de teller en noemer door x^3 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 10x^2}{8x^2 + 4x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{10}{x}}{\frac{8}{x} + 4} \\ &= \frac{2 - 0}{0 + 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Voorbeeld 1

Stel vergelijkingen op van de asymptoten van

de grafiek van $f(x) = -3 + \frac{1}{\sqrt{10-5x}}$

Oplossing

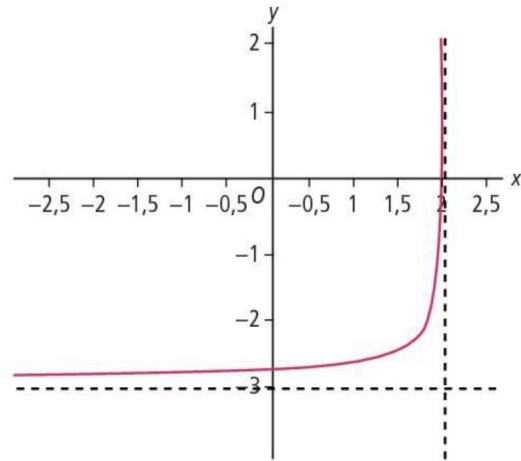
Het domein van f is $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.

$$\lim_{x \uparrow 2} \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{10-5x}} \right) = \infty, \text{ dus}$$

de verticale asymptoot is $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{10-5x}} \right) = -3 + 0 = -3, \text{ dus}$$

de horizontale asymptoot is $y = -3$.



Voorbeeld 2

De grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4x + 3}$ heeft een scheve asymptoot en een perforatie.

Bereken de coördinaten van de perforatie en stel een vergelijking op van de scheve asymptoot.

Oplossing

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} \text{ dus } f(x) = \frac{x(x+1)}{x-3} \text{ voor } x \neq 1.$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \frac{2}{-2} = -1 \text{ en } \lim_{x \downarrow 1} f(x) = \frac{2}{-2} = -1 \text{ dus de perforatie is } (1, -1).$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x-3} = \frac{x(x-3) + 3x + x}{x-3} = x + \frac{4x}{x-3} = x + \frac{4(x-3) + 12}{x-3}$$

$$\text{dus } f(x) = x + 4 + \frac{12}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{x-3} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12}{x-3} = 0 \text{ dus een vergelijking van de scheve asymptoot is } y = x + 4.$$

- 3** Geef van de functies aan of de bijbehorende grafiek asymptoten heeft. Stel, indien van toepassing, een vergelijking op van elke asymptoot.

a $f(x) = x^2 + 4$

c $h(x) = 25 + 16 \cdot 0,45^x$

b $g(x) = \frac{5x^2 + 1}{3x^2 - 6x}$

d $k(x) = \frac{1}{|x| + 1}$

- 4** De grafieken van deze functies hebben een scheve asymptoot. Stel een vergelijking op van de scheve asymptoot.

a $f(x) = 3x + 1 + \frac{4}{x-1}$

b $g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 4}$

- 5 De grafieken van deze functies hebben één of meer perforaties. Geef de coördinaten van elke perforatie en verklaar steeds je antwoord.

a $f(x) = \frac{5x - 20}{x^2 - 3x - 4}$

c $k(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{e^x - 1}$

b $h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 + 6x + 8}$

d $m(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x}$

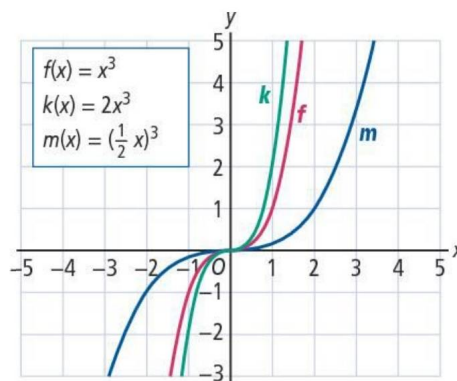
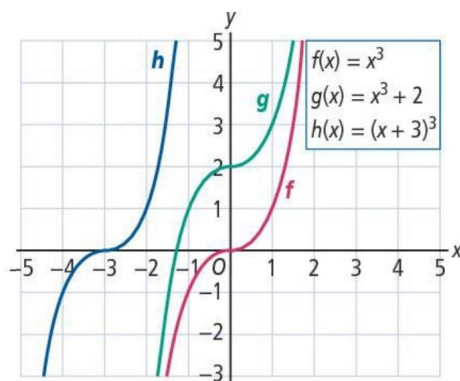
Transformaties

De grafiek van een functie kun je verschuiven of vermenigvuldigen. Daarbij verandert het functievoorschrift. De grafiek van functie g ontstaat uit de grafiek van functie f door:

- verschuiving over een afstand d omhoog: $g(x) = f(x) + d$
- verschuiving over een afstand c naar rechts: $g(x) = f(x - c)$
- vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met factor a : $g(x) = a \cdot f(x)$. Als $a = -1$ wordt de grafiek gespiegeld in de x -as.
- vermenigvuldiging met factor b ten opzichte van de y -as:

$$g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right). \text{ Als } b = -1 \text{ wordt de grafiek gespiegeld}$$

in de y -as.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 3 + 2^{x+4}$. De grafiek van f wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met 2,5 en daarna over een afstand van 6 naar rechts verschoven. Stel een functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

Oplossing

Voor de beeldgrafiek geldt $g(x) = 2,5 \cdot f(x - 6)$

dus $g(x) = 2,5(3 + 2^{(x-6)+4})$ ofwel $g(x) = 7,5 + 2,5 \cdot 2^{x-2}$.

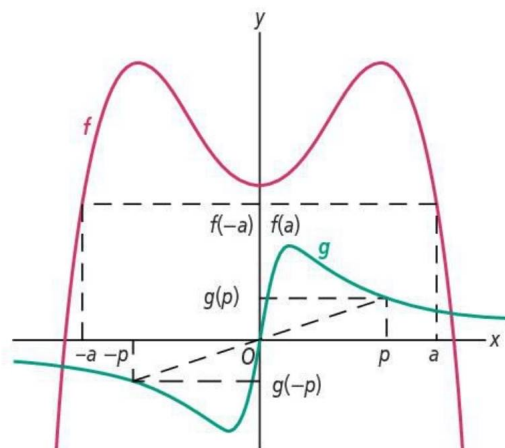
- 6** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 6x + 1$.
 Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
- De grafiek van f wordt eerst over een afstand 4 omhoog verschoven en vervolgens ten opzichte van de y -as vermenigvuldigd met 0,5.
 - De grafiek van f wordt eerst over een afstand 3 naar rechts verschoven en vervolgens ten opzichte van de x -as vermenigvuldigd met -4 .

Symmetrie van grafieken

De grafiek van een functie f is lijnsymmetrisch in de y -as, als voor elke waarde van p geldt: $f(-p) = f(p)$.

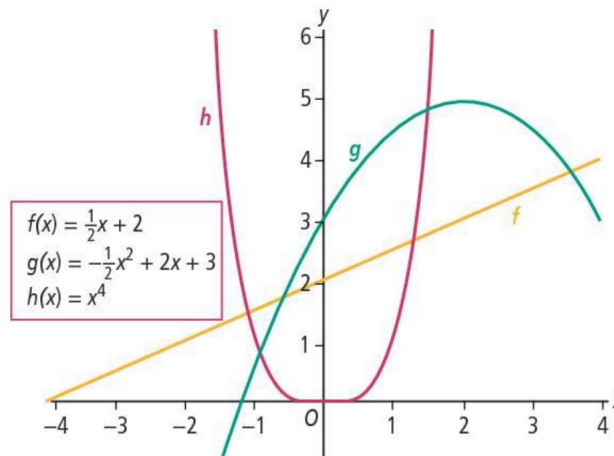
De grafiek van een functie g is puntsymmetrisch in de oorsprong, als voor elke waarde van p geldt: $g(-p) = -g(p)$.

- 7** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^4 + \frac{3}{8 - 6x^2}$ en $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
- Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is in de y -as.
 - Een plot van de grafiek van g doet vermoeden dat deze grafiek symmetrisch is in het punt $(2, 0)$.
 Verschuif de grafiek van g over een afstand 2 naar links en stel een functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.
 - Toon aan dat de beeldgrafiek van g puntsymmetrisch is in de oorsprong en doe daarmee een uitspraak over de symmetrie van de grafiek van g .

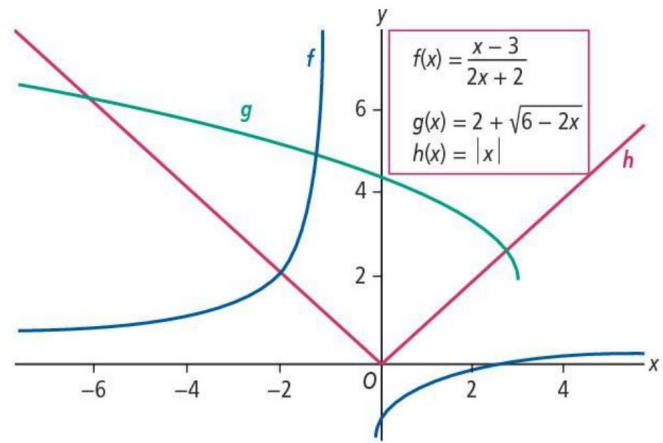


Soorten functies

- Lineaire functies of eerstegraadsfuncties:
 $f(x) = ax + b$.
 a is de richtingscoëfficiënt en de grafiek gaat door $(0, b)$.
- Machtsfuncties: $f(x) = x^a$.
 Bij gehele waarden van a geldt: Als a even is, is de grafiek symmetrisch in de y -as.
 Als a oneven is, dan is de grafiek puntsymmetrisch in de oorsprong.
- Kwadratische functies of tweedegraadsfuncties: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 De grafiek is een parabool.
 Van een kwadratische functie ken je drie vormen het functievoorschrift:
 $f(x) = ax^2 + bx + c$, de grafiek snijdt de y -as in $(0, c)$.
 $f(x) = a(x - p)^2 + q$, de grafiek heeft als top (p, q) .
 $f(x) = a(x - s)(x - t)$, de grafiek snijdt de x -as in $(s, 0)$ en $(t, 0)$.
 Je kunt elk van de drie vormen herleiden naar een van de andere vormen.



- Gebroken functies: $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$
De functie heeft een nulpunt als $t(x) = 0$ en $n(x) \neq 0$.
De grafiek heeft een verticale asymptoot als $n(x) = 0$ en $t(x) \neq 0$.
- Wortelfuncties: $f(x) = \sqrt{g(x)}$.
Het domein bestaat uit de waarden van x waarvoor geldt: $g(x) \geq 0$.
- Absolute waarde functie $f(x) = |g(x)|$.
Daarbij geldt $|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{als } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{als } g(x) < 0 \end{cases}$
- Exponentiële, logaritmische en goniometrische functies worden verderop apart behandeld.



- 8** Herschrijf in de vorm $f(x) = a(x - p)^2 + q$.
- a** $f(x) = x^2 + 8x - 17$ **c** $f(x) = -x^2 - 15x + 18$
b $f(x) = 3x^2 + 12x + 20$ **d** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 24$
- 9** Bereken van de grafiek van elke functie exact de coördinaten van de snijpunten met de assen en de coördinaten van de top.
- a** $f(x) = 2(x - 8)(x + 2)$
b $g(x) = -3(x + 4)^2 + 15$
c $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 12$
- 10** **a** Gegeven is de functie $g(x) = 5 - \sqrt{3x - 8}$.
Bepaal op algebraïsche wijze het domein van deze functie.
b Dezelfde opdracht voor de functies $h(x) = 3\sqrt{x^2 - 15}$ en $k(x) = 12 + 6\sqrt{x^2 + 15}$.
- 11** Gegeven is de functie $m(x) = \frac{10}{1 + x^2}$
a Geef het bereik van deze functie.
b Dezelfde opdracht voor de functies $n(x) = 2\sqrt{x^2 + 5}$ en $p(x) = 30 - 6\sqrt{4 - 9x}$.
- 12** De grafiek van de machtsfunctie $h(x) = a \cdot x^b$ gaat door de punten $(2, 96)$ en $(-1, -3)$.
Bereken exact de waarde van a en van b .

- 13 a** Van de variabelen p , q en r is gegeven:
- p is evenredig met de wortel van q en het kwadraat van r .
 - Als $q = 64$ en $r = \frac{1}{2}$, dan is $p = 16$.
- Stel een formule op voor het verband tussen p , q en r .
- b** Van de variabelen m , t en w is gegeven:
- m is evenredig met de derde macht van t en omgekeerd evenredig met het kwadraat van w .
 - Als $t = 10$ en $w = 5$ is $m = 20$.
- Stel een formule op voor het verband tussen m , t en w .

Als P (recht)evenredig is met Q , dan is $P = c \cdot Q$.

Als P evenredig is met een macht van Q , dan is $P = c \cdot Q^n$.

Vergelijkingen

Lineaire vergelijkingen los je op door de term met de variabele aan één kant van het $=$ -teken te brengen en de term die alleen een getal bevat aan de andere kant.

Kwadratische vergelijkingen los je op door:

- Het gebruiken van een van de regels hiernaast.
- Ontbinden in factoren.
- De abc -formule.

Bij vergelijkingen met breuken moet je vaak eerst de linkerkant en/of de rechterkant van een vergelijking herleiden tot één breuk. Verder kun je de regels hiernaast toepassen.

Uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$

Uit $A^2 = B^2$ volgt $A = B$ of $A = -B$

Uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt $A = 0$ of $B = C$

Uit $\frac{A}{B} = C$ volgt $A = B \cdot C$ mits $B \neq 0$

Uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ volgt $A \cdot D = B \cdot C$
mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.

Voorbeeld 1

Los exact op: $(2x + 1)^2 = 6$

Oplossing

$(2x + 1)^2 = (\sqrt{6})^2$ dus

$2x + 1 = \sqrt{6}$ of $2x + 1 = -\sqrt{6}$

$2x = -1 + \sqrt{6}$ of $2x = -1 - \sqrt{6}$

$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$ of $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Voorbeeld 2

Los exact op: $x^5 - 4x^2 = 0$

Oplossing

$x^5 - 4x^2 = x^2(x^3 - 4) = 0$

$x^2 = 0$ of $x^3 - 4 = 0$

$x = 0$ of $x^3 = 4$

dus $x = 0$ of $x = \sqrt[3]{4}$

Voorbeeld 3

Los exact op:

$$\frac{6}{x+3} + \frac{2x}{x+1} = 2\frac{1}{2}$$

Oplossing

$$\frac{6(x+1)}{(x+3)(x+1)} + \frac{2x(x+3)}{(x+1)(x+3)} = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x^2 + 12x + 6}{x^2 + 4x + 3} = \frac{5}{2}$$

$$4x^2 + 24x + 12 = 5x^2 + 20x + 15$$

$$0 = x^2 - 4x + 3$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ of } x = 3$$

Vaak staat er bij een vergelijking dat deze exact of algebraïsch moet worden opgelost. Alleen als dat niet is vermeld, mag je de vergelijking met de rekenmachine oplossen.

- 14** Los indien mogelijk exact op. Als dat niet mogelijk is, geef dan een oplossing in twee decimalen.

a $4x^3 - 7x^2 = -3x$

c $\frac{12}{x+1} - \frac{2x}{x-3} = -3$

b $(-3x + 5)^2 = 16x^2$

d $\frac{1}{2}x^4 + x = 0$

Wortelvergelijkingen

Een wortelvergelijking vereenvoudig je tot de vorm $\sqrt{A} = B$ door links en rechts van het $=$ -teken dezelfde bewerkingen uit te voeren. Vervolgens gebruik je de regel:

Uit $\sqrt{A} = B$ volgt $A = B^2$.

Door het kwadrateren kunnen er oplossingen bij komen die niet voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking. Controleer daarom bij wortelvergelijkingen altijd de oplossingen door deze in te vullen bij de oorspronkelijke vergelijking.

- 15** Los exact op.

a $4 + \sqrt{1 - 2x} = 7$

d $-x + \sqrt{x^2 - 3} = 3$

b $4x + \sqrt{1 - 2x} = 1$

e $6 - \sqrt{x} = \sqrt{x + 6}$

c $-1 + \sqrt{x^2 + 7} = x$

f $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{7x - x^2}$

Ongelijkheden

Bij het oplossen van ongelijkheden los je eerst de bijbehorende vergelijking op. Vervolgens gebruik je een schets of een plot waaruit je de oplossing van de ongelijkheid kunt aflezen. Houd vooral rekening met het domein van de functies die in de ongelijkheid voorkomen!

Voorbeeld

Los exact op: $\frac{12}{x-1} \geq \frac{1}{2}x + 2$

Oplossing

$$\frac{12}{x-1} = \frac{1}{2}x + 2 \text{ geeft } 12 = (x-1)\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x - 2.$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x - 14 = 0 \text{ ofwel } x^2 + 3x - 28 = 0,$$

$$\text{ontbinden: } (x+7)(x-4) = 0 \text{ dus } x = -7 \text{ of } x = 4.$$

De oplossing van de ongelijkheid is $x \leq -7$ of $1 < x \leq 4$ of in intervalnotatie $\langle \leftarrow, -7 \rangle \cup \langle 1, 4 \rangle$.

Voorbeeld

Los exact op:

$$-2 + \sqrt{4x-1} = -2x + 6$$

Oplossing

$$\sqrt{4x-1} = -2x + 8$$

$$4x - 1 = (-2x + 8)^2$$

$$4x - 1 = 4x^2 - 32x + 64$$

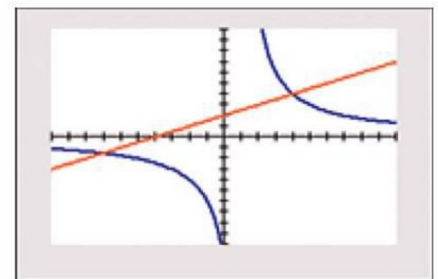
$$4x^2 - 36x + 65 = 0$$

Met de *abc*-formule vind je

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x = 6\frac{1}{2}.$$

Controle: $x = 6\frac{1}{2}$ voldoet niet.

De oplossing is $x = 2\frac{1}{2}$.



- 16** Los exact op.

a $3x - 4 \leq 2\frac{1}{3}x + 5$

c $x^3 - 2x^2 \geq 8x$

b $|x^2 - 5x| > \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

d $1 + \sqrt{6-x} < \frac{1}{2}x + 2$

Uitdrukken in, schrijven als functie van

In de formule $q = -3p + 22$ is q uitgedrukt in p .
 Een dergelijke formule is handig om bij waarden van p de bijbehorende waarden van q te berekenen.
 Door p uit te drukken in q krijg je een formule waarmee je bij waarden van q de bijbehorende waarden van p kunt berekenen.
 In plaats van 'druk q uit in p ' zeg je ook wel 'schrijf q als functie van p '.

17 Herleid de vergelijkingen waarbij je p uitdrukt in q .

- a $q = -0,2p + 1,3$
- b $3p + 12q = 16 - p$
- c $\frac{2p-3}{8p} = \frac{4q+5}{7}$
- d $13p - 4(q+2) = pq$
- e $0,3q + 1,2pq - 4,5 = 0$
- f $\frac{7q-3p}{p+8} = \frac{4}{3}$

Substitutie

In een formule kun je een variabele vervangen door een getal of een andere formule. Je noemt dit substitueren.
 Na het substitueren vereenvoudig je indien mogelijk de ontstane formule.

Voorbeeld

Herleid de vergelijking $\frac{2q}{8q+1} = \frac{p}{p-1}$
 waarbij je p uitdrukt in q .

Oplossing

$$\begin{aligned}
 p(8q+1) &= 2q(p-1) && \text{(kruislings vermenigvuldigd)} \\
 8pq + p &= 2pq - 2q && \text{(haakjes weggewerkt)} \\
 6pq + p &= -2q && \text{(vereenvoudigd)} \\
 p(6q+1) &= -2q && \text{(p buiten haakjes)} \\
 p &= \frac{-2q}{6q+1} && (: (6q+1))
 \end{aligned}$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de vergelijkingen $ab^2 - 3b = -2a$
 en $b = 3p$.
 Druk a uit in p .

Oplossing

$$\begin{aligned}
 a \cdot (3p)^2 - 3 \cdot 3p &= -2a && \text{(substitutie van } b = 3p) \\
 9ap^2 - 9p &= -2a && \text{(vereenvoudigd)} \\
 9ap^2 + 2a &= 9p && \text{(links en rechts } + 2a \text{ en } + 9p) \\
 a(9p^2 + 2) &= 9p && \text{(a buiten haakjes gehaald)} \\
 a &= \frac{9p}{9p^2 + 2} && \text{(links en rechts : } (9p^2 + 2))
 \end{aligned}$$

18 Gegeven zijn telkens twee vergelijkingen.
 Druk a uit in p en vereenvoudig het resultaat.

- a $a + 3b = 6$ en $b = 8 - 2p$
- b $\frac{a}{b} = 10 + 3b$ en $b = 5p + 1$
- c $2b + 3ab = 20$ en $b = 6p$
- d $b - a = b^2$ en $b = p - 1$

Inverse functies en inverse bewerkingen

De functies f en g heten inverse functies van elkaar als geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd), voor elk getal a uit het domein van f en voor elk getal b uit het domein van g .

Voor de inverse van een functie f gebruik je de notatie f^{inv} .

De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegelen in de lijn $y = x$.

Voorbeeld

Geef de inverse functie van $f(x) = 3 - 2x^3$.

Oplossing

$$\begin{aligned} f: & y = 3 - 2x^3 \\ f^{inv}: & x = 3 - 2y^3 \\ & 2y^3 = 3 - x \\ & y^3 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \\ & y = \sqrt[3]{1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

De inverse functie is $f^{inv}(x) = \sqrt[3]{1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}$.

19 Geef de inverse functie.

a $f(x) = -2 + 4x$

c $h(x) = 2 + \sqrt[3]{4 - x}$

b $g(x) = \frac{12}{3x - 2}$

d $k(x) = \frac{5x - 1}{2x + 3}$

Rekenregels gebruiken

Je kent de rekenregels voor het rekenen met machten en met wortels. Soms heb je die rekenregels nodig bij het herleiden van formules en vergelijkingen.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$(g^a)^b = g^{ab}$$

$$\frac{1}{g^n} = g^{-n}$$

$$g^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{g^p}$$

$$g^0 = 1$$

Voorbeeld 1

Gegeven is de vergelijking $p^2q = \frac{\sqrt{p^7}}{p\sqrt{q}}$

voor $p > 0$ en $q > 0$.

Druk p uit in q en schrijf het resultaat zo eenvoudig mogelijk.

Oplossing

$$p^3q\sqrt{q} = p^{\frac{7}{2}}$$

$$q\sqrt{q} = p^{\frac{7}{2}-3}$$

$$q^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}$$

$$q^3 = p \text{ ofwel } p = q^3$$

Voorbeeld 2

Laat zien dat de vergelijking

$$3\sqrt{4a} + \sqrt{9a} - 4 = b$$

te herleiden is tot $a = \left(\frac{1}{9}b + \frac{4}{9}\right)^2$.

Oplossing

$$3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} = b + 4$$

$$6\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = b + 4$$

$$9\sqrt{a} = b + 4$$

$$\sqrt{a} = \frac{1}{9}b + \frac{4}{9}$$

$$a = \left(\frac{1}{9}b + \frac{4}{9}\right)^2$$

- 20** Druk b uit in a .
- a** $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 25$ **c** $a + 4 = 0,4b^2 \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$
b $2ab^3 + 1 = 5$ **d** $3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$

- 21** Laat zien dat formule A te herleiden is tot formule B.

a A: $(4q - 3)^{\frac{1}{2}} = p$ en B: $q = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sqrt[3]{p^2}$
b A: $(q - 6) \cdot \sqrt[5]{2p} = 1$ en B: $p = \frac{1}{2(q - 6)^5}$

- 22** Herleid tot de vorm $b = p \cdot a + q$.

a $9^a \cdot (\sqrt{3})^b = \frac{1}{3}$ **c** $\frac{1}{2} \sqrt{b} - \sqrt{a + 3} = 0$
b $2^a \cdot 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \cdot 4^a$ **d** $\sqrt{3a} - 2\sqrt{b} = 0$

Examenopdrachten

23 Perforatie

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2017, tijdvak 1)

Voor elke waarde van p , met $p \neq 0$, is de functie f_p gegeven

door: $f_p(x) = \frac{px^2 + 4px + 6}{(x^2 + 1)(x - 2)}$

Er is één waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft.

Bereken exact de coördinaten van die perforatie.

Hint 1

24 Vierkant onder een grafiek

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2018, tijdvak 1)

Voor $x > 0$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$

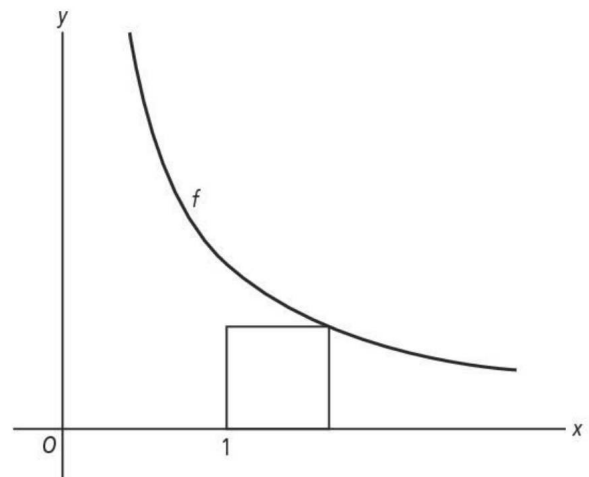
In de figuur is de grafiek van f getekend.

Onder de grafiek is een vierkant getekend met twee zijden evenwijdig aan de x -as en twee zijden evenwijdig aan de y -as.

Het vierkant heeft linksonder hoekpunt $(1, 0)$. Het hoekpunt rechtsboven ligt op de grafiek van f .

Bereken exact de lengte van de zijde van het vierkant.

Hint 2



25 Een gebroken functie en zijn inverse*(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2014, tijdvak 2)*

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$ en $g(x) = \frac{x}{4-x}$

De functie g is de inverse van f .

Bewijs dit.

Hint 3

26 Een eivorm*(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 1)*

De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{6} \sqrt{87x - 3x^2 - 2x^3}.$$

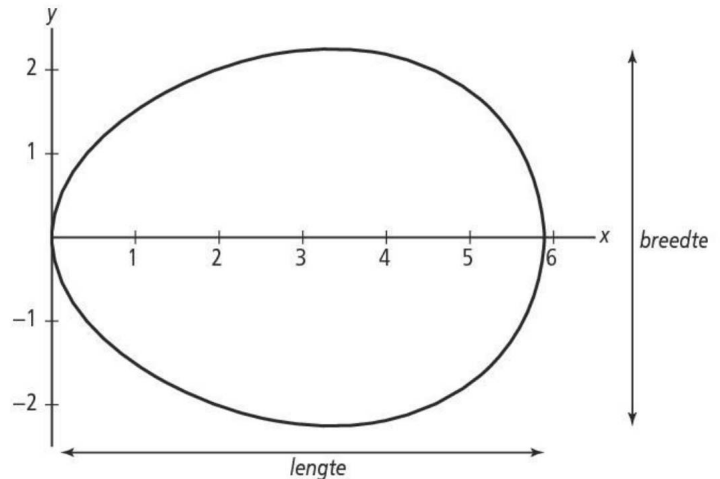
In de figuur is de grafiek van f getekend en ook het spiegelbeeld hiervan in de x -as. De twee grafieken vormen samen een figuur die lijkt op de doorsnede van een ei.

Op de x -as en de y -as is de eenheid 1 cm.

In de figuur is aangegeven wat bedoeld wordt met de lengte en de breedte van het ei.

De lengte van het ei is ongeveer 5,9 cm.

Bereken op algebraïsche wijze de lengte van het ei in cm. Rond je antwoord af op twee decimalen.



Hint 4

27 Verticale verbindingslijnstukken*(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 2)*

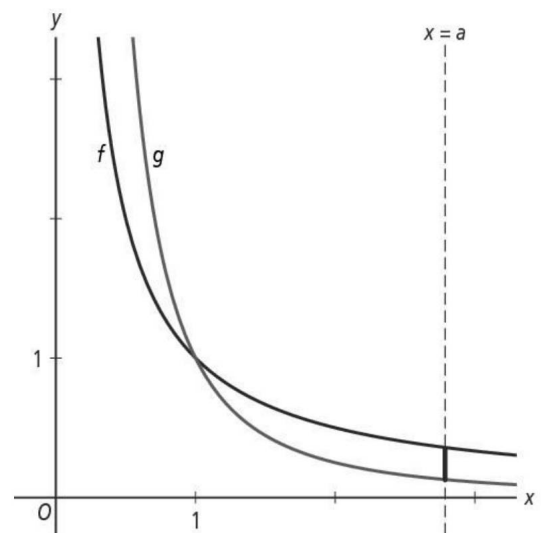
De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$

met $x > 0$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $(1, 1)$.

Voor $a > 1$ bekijken we bij $x = a$ het verticale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g .

Bereken op algebraïsche wijze de exacte waarden van a waarvoor de lengte van het verticale verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.



Hint 5

28 Stuiterende bal

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2015, tijdvak 2)

Een bal wordt vanaf een bepaalde hoogte boven een vloer losgelaten en begint vervolgens te stuiteren. In deze opgave bekijken we een wiskundig model van deze situatie.

Op het moment van loslaten bevindt de onderkant van de bal zich h_0 meter boven de vloer. De maximale hoogte van de onderkant van de bal tussen twee keer stuiteren noemen we de stuihoogte. De stuihoogte na de eerste keer stuiteren noemen we h_1 , die na de tweede keer stuiteren h_2 , enzovoorts.

Aan de linkerkant van de figuur is de bal getekend op verschillende stuihoogtes. Rechts daarvan is de hoogte h van de stuiterende bal (in meters) uitgezet tegen de tijd t (in seconden).

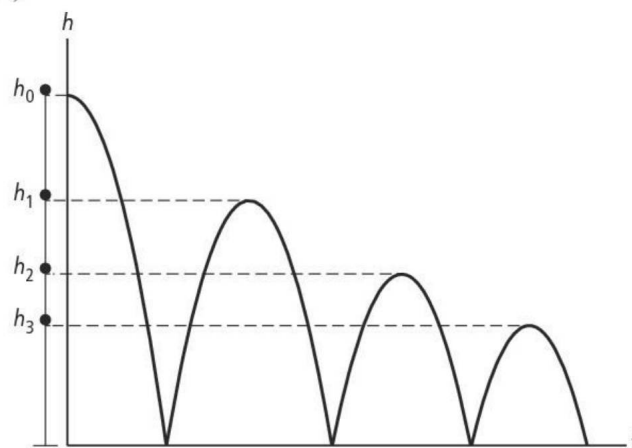
In deze opgave gaan we ervan uit dat de verhouding tussen twee opeenvolgende stuihoogtes constant is, dus $h_1 : h_0$ is gelijk aan $h_2 : h_1$ enzovoorts. Deze verhouding noemen we a . Voor de stuihoogte na n keer stuiteren geldt dan:

$$h_n = h_0 \cdot a^n$$

De waarde van a hangt af van het soort bal.

- a** Bereken de waarde van a voor een bal waarvan na 7 keer stuiteren de stuihoogte 5 keer zo klein is als de hoogte waarop de bal is losgelaten.

Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.



Hint 6

De hoogte van de onderkant van de bal tussen twee opeenvolgende keren stuiteren is een functie van de tijd. De grafiek van deze functie is een bergparabool. De tijd in seconden tussen de n -de en de $(n+1)$ -ste keer stuiteren noemen we de stui tijd T_n . In de figuur zijn drie stui tijden aangegeven.

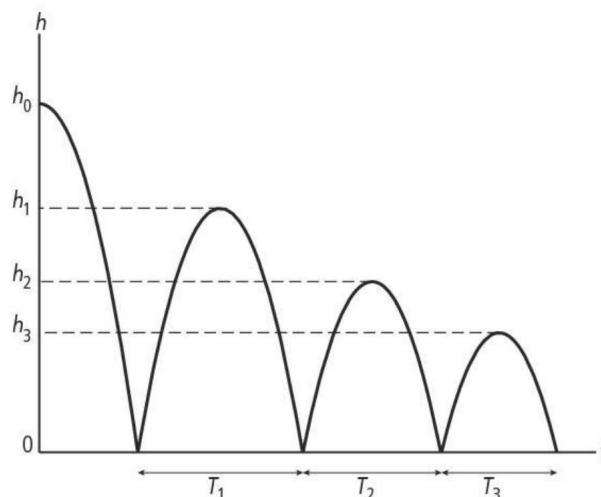
De stui tijd T_n kan worden uitgedrukt in de stuihoogte h_n .

$$\text{Er geldt: } T_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{h_n}{4,9}}$$

Een bal wordt losgelaten vanaf hoogte h_0 .

De stui tijd T_1 is 1,11 seconden en de stui tijd T_4 is 0,68 seconden.

- b** Bereken h_0 . Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.



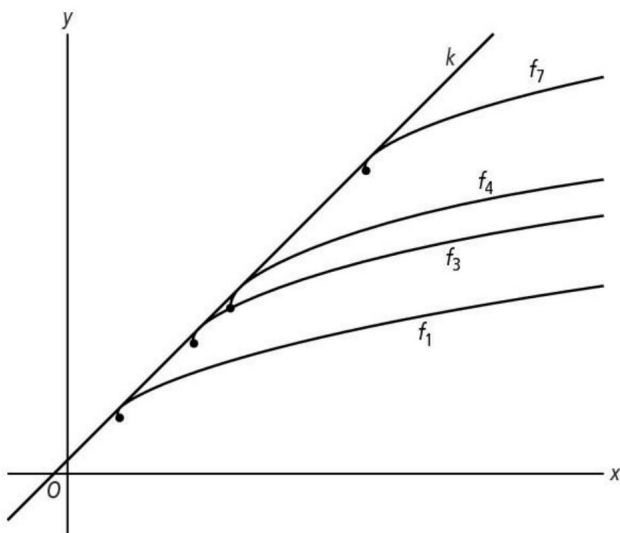
Hint 7

29 Altijd raak

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 1)

Voor $p \geq 1$ is de functie f_p gegeven door: $f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$

In de figuur is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p weergegeven en ook lijn k met vergelijking $y = x + \frac{1}{4}$.



Lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke waarde van $p \geq 1$.

a Bewijs dit.

Hint 8

Voor $p \geq 1$ heeft de grafiek van f_p een randpunt, ook wel beginpunt genoemd. De randpunten van de grafieken in figuur 1 zijn met een stip aangegeven.

Er geldt voor elke $p \geq 1$: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1} .

b Bewijs dat inderdaad voor $p \geq 1$ geldt: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1} .

Hint 9

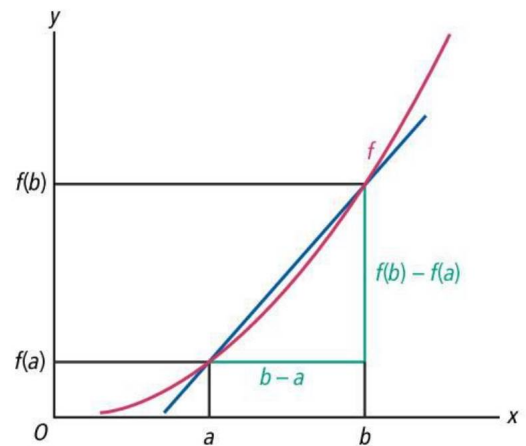
Differentiequotiënt en afgeleide functie

Om veranderingen aan te geven gebruik je het symbool Δ (delta).

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ is de gemiddelde verandering

van de functie f over een interval $[a, b]$ en heet een differentiequotiënt.

De helling van een grafiek van een functie f in het punt $(a, f(a))$ kun je benaderen door het differentiequotiënt op een heel klein interval te berekenen.



- 30** Benader de helling van de grafiek van de functie $f(x) = 2^x + x$ in het punt $(1, 3)$ met een differentiequotiënt op een klein interval. Geef je antwoord in twee decimalen.

De functie waarmee je de hellingen van de grafiek van een functie f berekent, noem je de hellingfunctie van f .

De bijbehorende grafiek heet de hellinggrafiek.

De hellingfunctie heet de afgeleide functie f' .

Het functievoorschrift van f' stel je op door te differentiëren.

Regels voor het differentiëren

Als $h(x) = f(x) + c$ dan is $h'(x) = f'(x)$.

Als $h(x) = c \cdot f(x)$ dan is $h'(x) = c \cdot f'(x)$.

Somregel: als $s(x) = f(x) + g(x)$ dan is $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Kettingregel: als $k(x) = f(g(x))$ dan is

$$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Productregel: als $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ dan is

$$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x).$$

Quotiëntregel: als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$, dan is

$$f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

functie	afgeleide
$f(x) = x^a$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

Handig om te onthouden:

$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$

Oplossing

De functie differentieer je met de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 1) - (2x - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \text{ ofwel}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $k(x) = (x^2 - 4x)^3$. Geef $k'(x)$.

Oplossing

De functie is een kettingfunctie met als schakels $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^2 - 4x$.

Er geldt:

$$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3(x^2 - 4x)^2(2x - 4)$$

31 Differentieer de functies. Je hoeft het resultaat niet te herleiden.

a $f(x) = 2x^2 - 8\sqrt{x}$

e $m(x) = 1 - x + 2x^3$

b $g(x) = \frac{-5}{3x^4}$

f $n(x) = 2 + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{2x^3}$

c $h(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^3}$

g $p(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^4}$

d $k(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x - 1}$

h $q(x) = (x - 2)^5 \sqrt{x^2 - 5x}$

Stijgen en dalen, maximum en minimum, buigpunten

Als op een interval $[a, b]$ geldt:

- als x toeneemt, dan neemt $f(x)$ toe, dan zeg je dat f stijgt op dat interval.
Dan is $f'(x) \geq 0$ op $[a, b]$.
- als x toeneemt, dan neemt $f(x)$ af, dan zeg je dat f daalt op dat interval.
Dan is $f'(x) \leq 0$ op $[a, b]$.

Is het punt $T(a, b)$ een top van de grafiek van f en gaat f bij $x = a$ over van stijgen in dalen, dan heeft f een maximum $f(a) = b$.

Gaat f bij $x = a$ over van dalen in stijgen dan heeft f een minimum $f(a) = b$.

Maximale en minimale functiewaarden heten extreme waarden.

Als de afgeleide f' van een functie f een extreme waarde heeft, is er een punt op de grafiek van f waar de helling een maximale of minimale waarde heeft. Zo'n punt heet een buigpunt.

Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen en met een plot te onderzoeken of de grafiek voor die waarden van x een buigpunt heeft. De raaklijn in het buigpunt heet ook wel de buigraaklijn.

Voorbeeld

Bereken exact de extreme waarden en de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van de functie

$$f(x) = x^3 - 4\frac{1}{2}x^2 - 12x + 5.$$

Oplossing

$$f'(x) = 3x^2 - 9x - 12 = 3(x^2 - 3x - 4) = 3(x + 1)(x - 4)$$

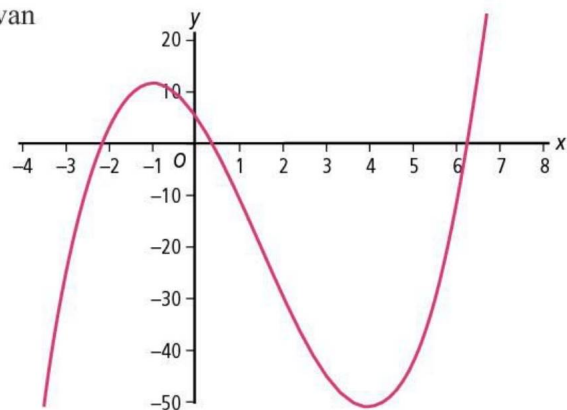
dus $f'(x) = 0$ als $x = -1$ of $x = 4$.

Uit de grafiek blijkt dat de extremen zijn:

maximum $f(-1) = 11\frac{1}{2}$ en minimum $f(4) = -51$.

$$f''(x) = 6x - 9, \text{ dus } f''(x) = 0 \text{ als } x = 1\frac{1}{2}$$

Het buigpunt is $(1\frac{1}{2}, -19\frac{3}{4})$.



32 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

- Op welk interval is f toenemend stijgend?
- Bereken de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .

Raaklijn aan een grafiek, twee grafieken raken elkaar

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is gelijk aan $f'(a)$.

De grafieken van twee functies f en g raken elkaar in (a, b) als geldt: $f'(a) = g'(a)$ en $f(a) = g(a) = b$.

Voorbeeld

Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + p$ en de functie $g(x) = 7x$.
Bereken exact de waarden van p waarvoor de grafiek van de functie f_p raakt aan de grafiek van g .

Oplossing

$f'_p(x) = x^2 - 2$ en $g'(x) = 7$. Uit $f'_p(x) = g'(x)$ volgt $x^2 - 2 = 7$ dus $x^2 = 9$.

Hieruit volgt $x = -3$ of $x = 3$.

Uit $f_p(-3) = g(-3)$ volgt $-9 + 6 + p = -21$ dus $p = -18$.

Uit $f_p(3) = g(3)$ volgt $9 - 6 + p = 21$ dus $p = 18$.

De grafieken raken elkaar als $p = -18$ of $p = 18$.

- 33** Gegeven is de functie $g(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$
- a** Plot en schets de grafiek van g en toon algebraïsch aan dat de functie geen nulpunten heeft.
 - b** Op de grafiek van g ligt het punt $P(4, 17)$.
Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de raaklijn in P aan de grafiek van g .
 - c** Bereken exact de coördinaten van de punten van de grafiek van g waarin de raaklijn horizontaal loopt.
- 34** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = x + 6\sqrt{2x + a}$.
Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f_a raakt aan de lijn met vergelijking $y = 3x + 19$.
Bereken exact deze waarde van a .
- 35** Gegeven zijn de functies $f_a(x) = 3x + \frac{a}{x}$ met $a > 0$.
Er is een waarde van a waarvoor de extreme waarde van $f_a(x)$ gelijk is aan 18.
Bereken exact deze waarde van a .

Examenopdrachten**36 Raaklijn in knikpunt***(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 2)*

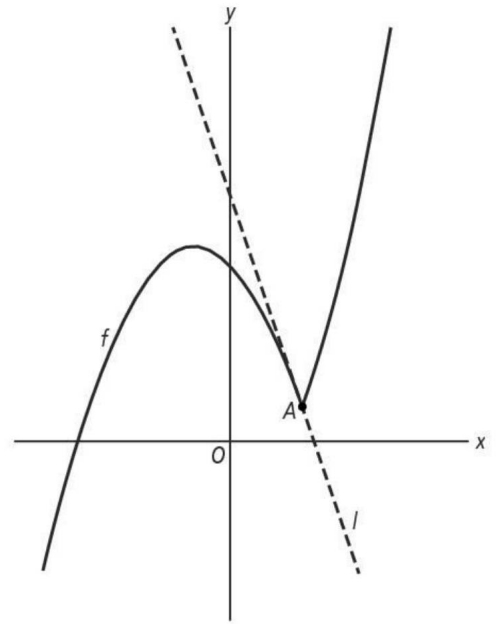
De functie f wordt gegeven door: $f(x) = |x - 2| \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 1$

De grafiek van f heeft een knik in het punt A . Dit punt verdeelt de grafiek in twee delen. De lijn l is de raaklijn in A aan het linkerdeel van de grafiek.

Zie de figuur.

Stel op exacte wijze een vergelijking van lijn l op.

Hint 10

**37 Driehoek bij een vierdegraadsfunctie***(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 1)*

Voor elke positieve waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 2x^2 - px^4$.

De grafiek van f_p heeft de y -as als symmetrieas. Verder heeft deze grafiek drie toppen: het punt $O(0, 0)$ en de punten A en B . Zie de figuur.

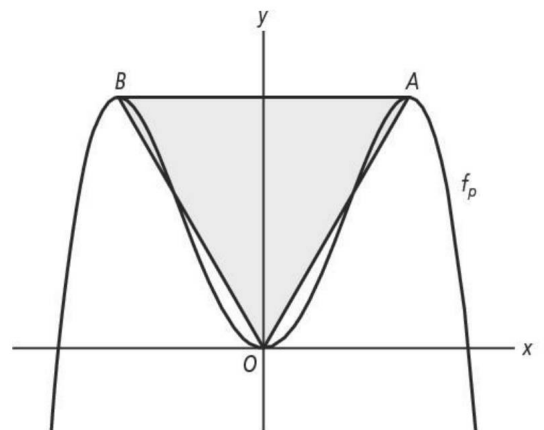
Deze drie punten zijn de hoekpunten van driehoek OAB , waarbij de coördinaten van de punten A en B afhankelijk zijn van de waarde van p .

Driehoek OAB is in de figuur grijs gemaakt.

Er is één waarde van p waarbij de lengte van lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van lijnstuk AB .

Bereken exact deze waarde van p .

Hint 11



38 Loodrecht in de perforatie

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2018, tijdvak 2)

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x}$

Ook is gegeven de functie h door $h(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}}$

Voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$.

a Bewijs dat voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$.

Hint 12

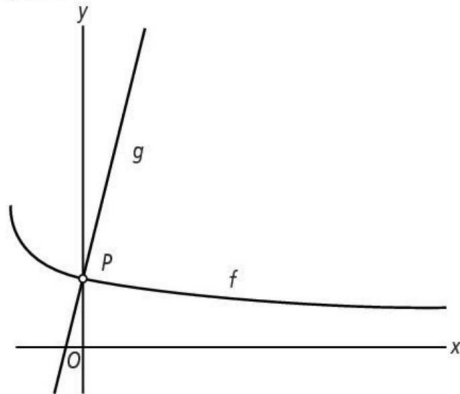
Verder is de functie g gegeven door $g(x) = \frac{4x^2 + x}{x}$

Er is een lijn k die voor $x \neq 0$ samenvalt met de grafiek van g .

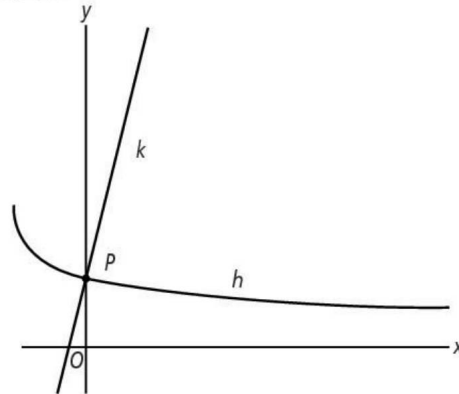
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.

Punt $P(0, 1)$ is de perforatie van beide grafieken. In figuur 2 zijn de grafiek van h en lijn k weergegeven en ook hun snijpunt P .

figuur 1



figuur 2



Er geldt: de grafieken van f en g staan in hun perforatie P loodrecht op elkaar als de grafiek van h en lijn k in hun snijpunt P loodrecht op elkaar staan.

b Bewijs dat de grafieken van f en g in hun perforatie P loodrecht op elkaar staan.

Hint 13

39 Raaklijn door perforatie

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2012, tijdvak 2)

De functie f wordt gegeven door:

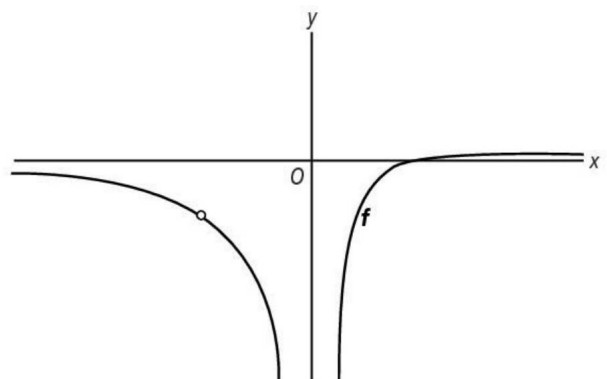
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2} \text{ met } x \neq -2 \text{ en } x \neq 0$$

De grafiek van f heeft een perforatie. In de figuur is de grafiek van f met de perforatie getekend.

De raaklijn aan de grafiek in het snijpunt van de grafiek met de x -as gaat door de perforatie.

Toon dit aan door middel van differentiëren.

Hint 14



40 Tussen twee grafieken

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 1)

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Hiernaast zijn op het interval $[0, 1]$ de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend.

De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in het punt T .

Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.

De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q .

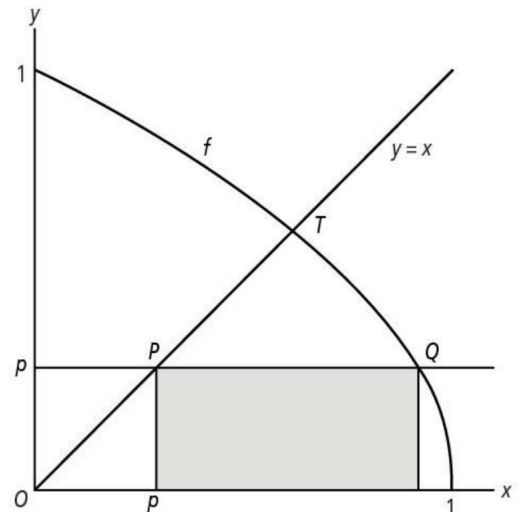
De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de tegenoverliggende zijde op de x -as ligt, is in de figuur voor een waarde van p grijs gemaakt.

De x -coördinaat van Q is $1 - p^2$.

Er is een waarde van p waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

Bereken exact deze waarde van p .

Hint 15

**41 Horizontale verbindingslijnstukken**

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 2)

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$ en

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $x > 0$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $(1, 1)$.

Voor $b > 1$ bekijken we bij $y = b$ het horizontale verbindingslijnstuk tussen de grafieken van f en g .

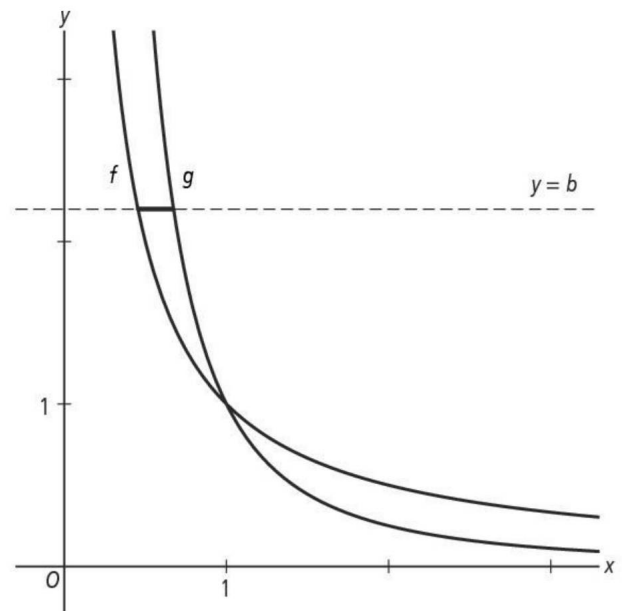
Zie de figuur.

De x -coördinaten van de eindpunten van dit verbindingslijnstuk zijn respectievelijk $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Voor een zekere waarde van b is de lengte van dit lijnstuk maximaal.

Bereken met behulp van differentiëren de maximale lengte van het horizontale verbindingslijnstuk.

Hint 16



Integreren

Integraal en de hoofdstelling van de integraalrekening

Als de grafiek van een functie f op het interval $[a, b]$ boven de x -as ligt, dan is de exacte oppervlakte tussen de grafiek

van f en de x -as op het interval $[a, b]$ gelijk aan $\int_a^b f(x) dx$.

Dit is de integraal van f op het interval $[a, b]$.

De functie f heet de integrand.

De hoofdstelling van de integraalrekening luidt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ waarbij } F'(x) = f(x).$$

F heet een primitieve functie van f .

In plaats van $F(b) - F(a)$ wordt vaak $[F(x)]_a^b$ genoteerd.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = (x-6)(2-x)$.

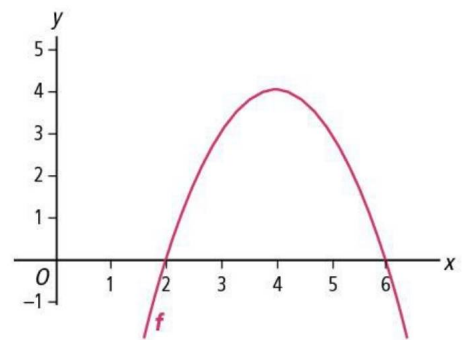
Bereken exact $\int_2^6 f(x) dx$ en leg uit wat de betekenis is.

Oplossing

$$\int_2^6 (x-6)(2-x) dx = \int_2^6 (-x^2 + 8x - 12) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x\right]_2^6 = (-72 + 144 - 72) - \left(-\frac{2^3}{3} + 16 - 24\right) = 10\frac{2}{3}$$

De oppervlakte, ingesloten tussen de grafiek van f en de x -as, is $10\frac{2}{3}$.



Variabele grenzen

Als in een integraal een boven- of ondergrens p variabel is, dan is de integraal te schrijven als een functie van p .

$$g(p) = \int_a^p f(x) dx = [F(x)]_a^p = F(p) - F(a)$$

Primitieve van een machtsfunctie

De primitieven van $f(x) = x^n$ zijn $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ met $n \neq -1$.

Als $n = -1$ geldt: $F(x) = \ln|x| + C$.

Rekenregels voor integralen

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$$

42 Stel een primitieve op van de functies.

a $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ **d** $k(x) = (7x + 1)^5$
b $g(x) = 2\sqrt{x}$ **e** $m(x) = x^2(x^3 - 1)$
c $h(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$ **f** $n(x) = \frac{2x + 1}{x^3}$

43 a Gegeven is de functie $f(x) = 3x\sqrt{x^2 + 1}$.

Controleer door middel van differentiëren dat de functie

$F(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$ een primitieve functie is van f .

b Dezelfde opdracht als opdracht a voor de functies

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^5} \text{ en } F(x) = \frac{-1}{8(x^2 - 1)^4}$$

c Bereken voor welke waarde van a de functie

$G(x) = a(x^2 + 6x + 1)^4$ een primitieve is van de functie

$$g(x) = (x + 3)(x^2 + 6x + 1)^3.$$

Berekenen van de oppervlakte van een gebied

Voor het exact berekenen van de oppervlakte van een gebied, dat wordt ingesloten door de grafieken van twee functies is het nodig dat je de x -coördinaten van eventuele snijpunten exact berekent en dat je de onderlinge ligging van de grafieken weet.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ en $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$

Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .

Oplossing

Eerst de snijpunten berekenen: $-\frac{1}{2}x^2 + 3x = \frac{1}{2}x - 3$.

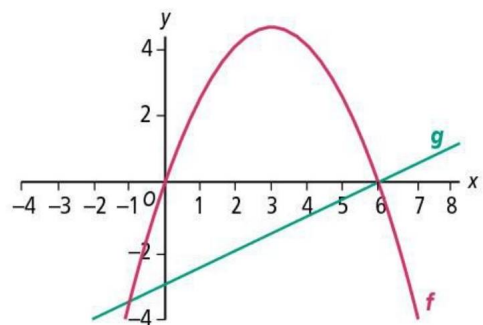
Uit $-\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x + 3 = 0$ volgt $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Uit $(x - 6)(x + 1) = 0$ volgt $x = -1$ of $x = 6$.

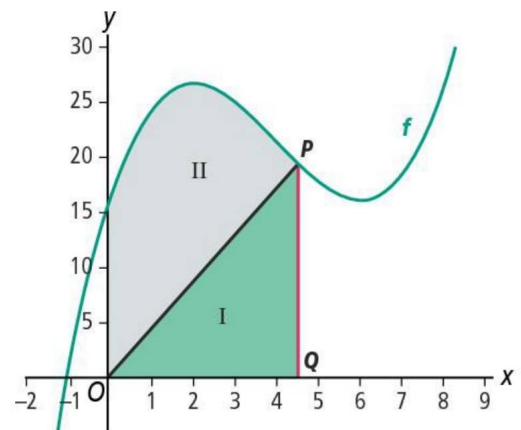
De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_{-1}^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \left(\frac{1}{2}x - 3 \right) \right) dx = \int_{-1}^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x + 3 \right) dx =$$

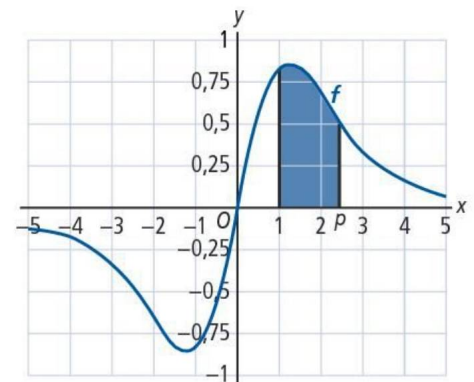
$$\left[-\frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_{-1}^6 = (-36 + 45 + 18) - \left(-\frac{1}{6} + 1\frac{1}{4} - 3 \right) = 28\frac{7}{12}$$



- 44** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ en $h(x) = 4x - 1\frac{1}{2}x^2$.
- Bereken exact de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x -as op het interval $[2, 8]$.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van h en de x -as.
 - Door de grafieken van f en h worden twee gebieden ingesloten.
Bereken exact de oppervlakte van elk van deze gebieden.
- 45** De grafieken van de functies $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ sluiten een gebied V in.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Bereken exact de oppervlakte van V .
- 46** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 16$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3$. De grafiek van f is getekend.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g en schets vervolgens de grafieken van f en g op het interval $[-2, 10]$.
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat rechts van de y -as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van f , de grafiek van g en de y -as.
 - Op de grafiek van f ligt een punt $P(p, f(p))$ met $2 < p < 6$. Punt Q is de projectie van P op de x -as. Druk de oppervlakte van driehoek OPQ uit in p .
 - Bereken de waarde van p waarvoor geldt dat de oppervlakten van I en II gelijk zijn.



- 47** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{20x}{(x^2 + 4)^2}$
- Toon aan dat $F(x) = \frac{-10}{x^2 + 4}$ een primitieve is van f .
- De functie A wordt gedefinieerd door
- $$A(p) = \int_1^p \frac{20x}{(x^2 + 4)^2} dx, \text{ met } p > 1.$$
- Bereken exact $A(4)$.
 - Bereken exact de waarde van p waarvoor $A(p) = 1\frac{9}{10}$.
 - Leg uit waarom de functie A stijgend is voor elke waarde van $p > 1$.



Inhoudsberekeningen

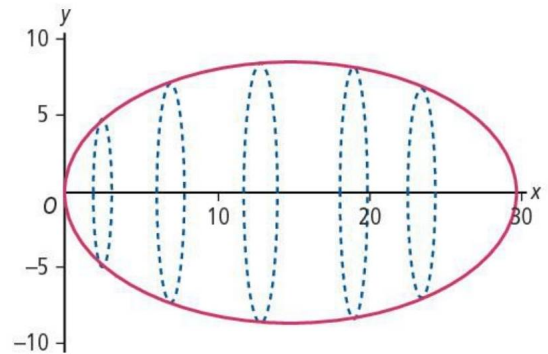
Een omwentelingslichaam ontstaat wanneer een gebied, ingesloten door de grafiek van een functie f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ wordt gewenteld om de x -as.

De inhoud I van dat omwentelingslichaam is dan gelijk aan

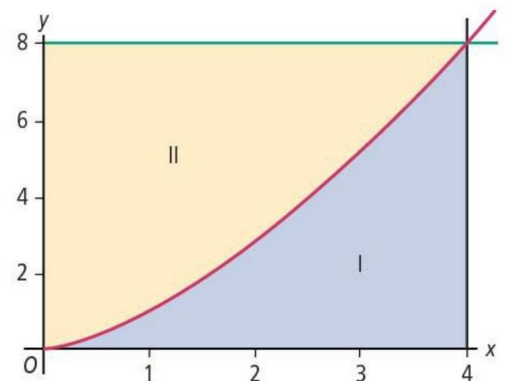
$$I = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx \text{ of } I = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Als een gebied om de y -as wordt gewenteld, spiegel je het gebied in de lijn $y = x$ en daarna wentel je het gespiegelde gebied om de x -as. Daarbij gebruik je de inverse functie.

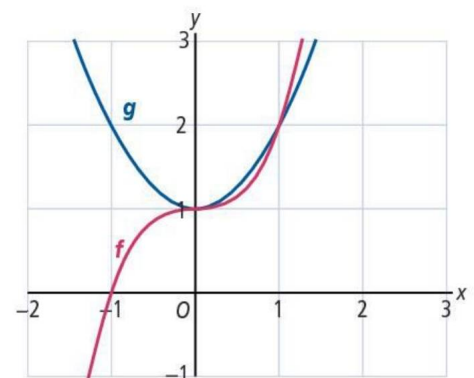
- 48** Een ellips wordt om de x -as gewenteld waardoor een lichaam ontstaat dat de vorm van rugbybal heeft. De lengte van dit omwentelingslichaam is 30 cm. De bovenste helft van de ellips voldoet aan de formule $y = 0,564\sqrt{x(30 - x)}$ met x en y in cm en $x = 0$ aan de linkerzijde van het lichaam. Bereken de inhoud van dit lichaam in cm^3 .



- 49** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x}$ met domein $[0, 4]$. In de figuur is de grafiek van f getekend met de lijnen $y = 8$ en $x = 4$. Als het gebied I om de x -as wordt gewenteld ontstaat het omwentelingslichaam R. Als het gebied II om de y -as wordt gewenteld ontstaat het omwentelingslichaam G.
- Bereken exact de inhoud van beide omwentelingslichamen.
 - Als gebied II wordt gewenteld om de x -as ontstaat het omwentelingslichaam A. Als gebied I om de y -as wordt gewenteld ontstaat het omwentelingslichaam B. Bereken het verschil in inhoud tussen A en B.



- 50** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 + 1$ en $g(x) = x^2 + 1$. Het gebied dat ingesloten wordt door de grafieken van f en g noem je V .
- Bereken exact de coördinaten van de punten waarin de grafieken elkaar snijden.
 - Het gebied V wordt gewenteld om de x -as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat daarbij ontstaat.



Examenopdrachten

51 Anderhalf keer zo groot

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2018, tijdvak 2)

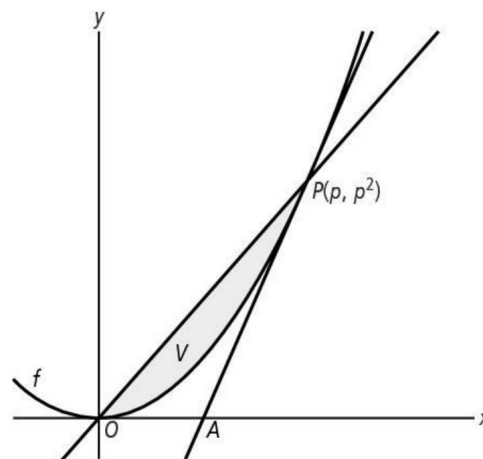
De functie f is gegeven door $f(x) = x^2$.

De raaklijn aan de grafiek van f in een punt $P(p, p^2)$ met $p > 0$ snijdt de x -as in een punt A .

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn OP . Zie de figuur.

Bewijs dat de oppervlakte van driehoek OAP anderhalf keer zo groot is als de oppervlakte van V .

Hint 17

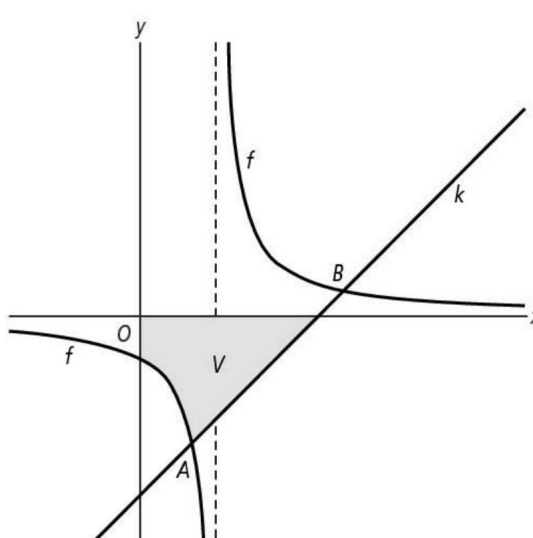
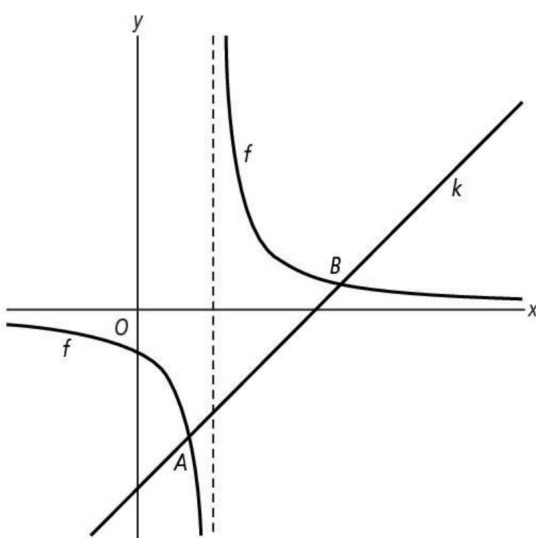


52 Gebroken functie

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2017, tijdvak 1)

figuur 1

figuur 2



De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{5}{4x-6}$

De lijn k met vergelijking $y = x - 3\frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in twee punten, A en B . Zie figuur 1.

De coördinaten van punt A zijn $(1, -2\frac{1}{2})$.

a Bereken exact de coördinaten van punt B .

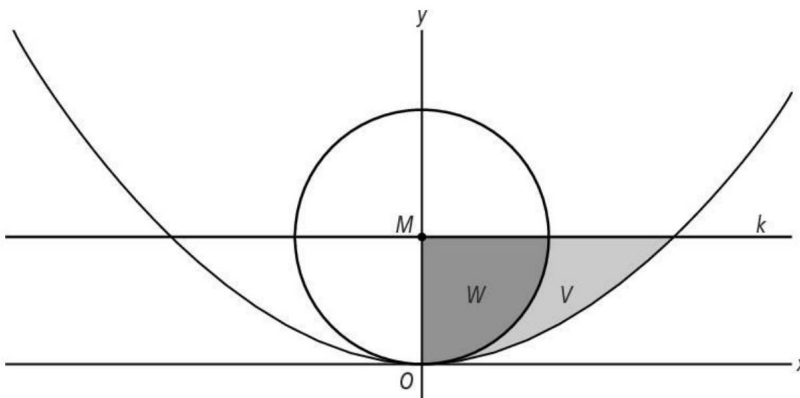
Hint 18

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn k . In figuur 2 is dit vlakdeel grijs gemaakt. V wordt gewenteld om de x -as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam.

b Bereken exact de inhoud van dit omwentelingslichaam.

Hint 19

53 Parabool en cirkel met variabele straal
(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 2)



Gegeven is de parabool met vergelijking $y = x^2$ en een punt $M(0, r)$ op de positieve y -as. We gaan uit van de situatie waarin de cirkel en de parabool alleen punt O gemeenschappelijk hebben. De lijn k gaat door M en is evenwijdig aan de x -as.

V is het gebied rechts van de y -as dat wordt ingesloten door de cirkel, de parabool en lijn k . In de figuur is dit gebied lichtgrijs gemaakt.

W is het gebied rechts van de y -as dat wordt ingesloten door de cirkel, de y -as en lijn k . In de figuur is dit gebied donkergrijs gemaakt.

Wanneer de cirkel wordt gewenteld om de y -as, ontstaat een bol met inhoud $\frac{4}{3}\pi r^3$.

De gebieden V en W worden gewenteld om de y -as.

Er is een waarde van r waarvoor de inhoud van de omwentelingslichamen van V en W aan elkaar gelijk zijn. Bereken exact deze waarde van r .

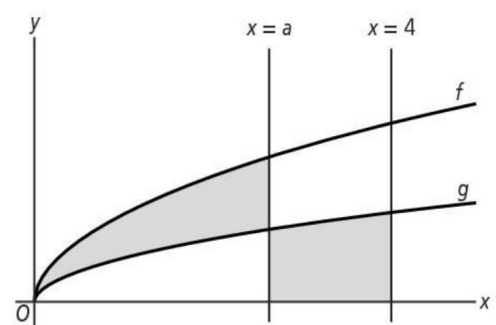
Hint 20

54 Wortelfuncties
(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2015, tijdvak 1)

In de figuur zijn de grafieken getekend van de functies f en g gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Verder zijn de lijnen getekend met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$, met $0 < a < 4$.

In de figuur zijn twee vlakdelen grijs gemaakt. Het ene grijze vlakdeel wordt begrensd door de grafieken van f en g en de lijn met vergelijking $x = a$.

Het andere grijze vlakdeel wordt begrensd door de grafiek van g , de x -as en de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$. Bereken exact voor welke waarde van a deze vlakdelen gelijke oppervlakte hebben.



Hint 21

Exponentiële functies en logaritmische functies

Exponentiële functies

Exponentiële functies hebben een functievoorschrift van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Rekenregels voor machten

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

Verder geldt:

$$g^0 = 1$$

$$g^{-1} = \frac{1}{g} \text{ en } g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g} \text{ en } g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$$

Logaritmen

De logaritme van a voor het grondtal g is de exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$.
Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$.

Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$.

Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Rekenregels voor logaritmen

(voor $g > 0$, $g \neq 1$ en $a > 0$ en $b > 0$)

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

$${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$$

Verder geldt:

$${}^g\log(1) = 0$$

$${}^g\log(g) = 1$$

$${}^g\log(\sqrt{g}) = \frac{1}{2}$$

$${}^g\log(g^n) = n$$

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme:

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9)$$

Oplossing

$$3 \cdot {}^5\log(2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(9) =$$

$${}^5\log(2^3) + {}^5\log(9^{\frac{1}{2}}) =$$

$${}^5\log(8) + {}^5\log(3) = {}^5\log(24)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme:

$${}^4\log(3+p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) \text{ met } p > 0$$

Oplossing

$${}^4\log(3+p) + 2 \cdot {}^4\log(5p) =$$

$${}^4\log(3+p) + {}^4\log(25p^2) =$$

$${}^4\log(25p^2(3+p)) =$$

$${}^4\log(75p^2 + 25p^3)$$

55 Schrijf als één logaritme.

- a** ${}^2\log(36) - {}^2\log(9) + {}^2\log(5)$ **d** $-3 + 2 \cdot {}^4\log(9p)$
b $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(49) + 2 \cdot {}^5\log(3)$ **e** ${}^8\log(2a) + {}^8\log(a+3)$
c $2 + {}^6\log(x)$ **f** $4 \cdot {}^{0,1}\log(x) - {}^{0,1}\log(x^2)$

Voorbeeld

Gegeven is ${}^3\log(p) + 2 \cdot {}^3\log(5) = q + 1$.
Druk p uit in q .

Oplossing

$${}^3\log(p) + {}^3\log(25) = q + 1$$

$${}^3\log(25p) = q + 1$$

$$25p = 3^{q+1}$$

$$p = \frac{1}{25} \cdot 3^{q+1}$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + {}^2\log(3x + 8)$.
Stel het voorschrift op van de inverse functie f^{inv} .

Oplossing

$$f: y = -1 + {}^2\log(3x + 8)$$

$$f^{inv}: x = -1 + {}^2\log(3y + 8)$$

$$x + 1 = {}^2\log(3y + 8) \text{ ofwel } 2^{x+1} = 3y + 8$$

$$3y = 2^{x+1} - 8 \text{ ofwel } y = \frac{1}{3}(2^{x+1} - 8)$$

$$\text{De inverse functie is } f^{inv}(x) = \frac{1}{3}(-8 + 2^{x+1}).$$

56 Druk b uit in a .

- a** ${}^2\log(a) + {}^2\log(b) = 3$ **c** $a + 4 = 2b^2\sqrt{b}$
b $a + \frac{1}{2} \cdot {}^3\log(b) = 5$ **d** $3\sqrt{a} + \sqrt{16a} - 2b = 0$

57 Stel een functievoorschrift op van de inverse functie.

- a** $f(x) = {}^2\log(18 - 3x)$ **c** $h(x) = 2 \cdot 3^{5-x}$
b $g(x) = -2 + {}^3\log(2x - 1)$ **d** $k(x) = 10 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

Exponentiële en logaritmische vergelijkingen

Sommige exponentiële vergelijkingen kun je exact oplossen door de linker- en rechterkant van de vergelijking te schrijven als machten met hetzelfde grondtal. Je gebruikt de regels voor het rekenen met machten.

Andere exponentiële vergelijkingen en ook logaritmische vergelijkingen los je exact op door de definitie van een logaritme toe te passen.

Voorbeeld 1

Los exact op: $9 \cdot 3^{x+4} = 3\sqrt{3}$

Oplossing

$$3^2 \cdot 3^{x+4} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{x+6} = 3^{1\frac{1}{2}}$$

$$x = -4\frac{1}{2}$$

Voorbeeld 2

Los exact op: $4 \cdot 5^{x-3} = 24$

Oplossing

$$5^{x-3} = 6$$

$$x - 3 = {}^5\log(6)$$

$$x = 3 + {}^5\log(6)$$

Voorbeeld 3

Los exact op:
 $1 + {}^4\log(2x - 6) = 0$

Oplossing

$${}^4\log(2x - 6) = -1$$

$$2x - 6 = 4^{-1}$$

$$2x - 6 = \frac{1}{4}$$

$$2x = 6\frac{1}{4} \text{ dus } x = 3\frac{1}{8}$$

58 Los exact op.

a $8 \cdot 4^{x+2} = 1$

d $2 + 5 \cdot 7^{4x} = 17$

b $\frac{1}{25} \cdot 5^{x+3} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

e $6 - {}^3\log(x+4) = 5\frac{1}{2}$

c $3^{2x+1} = 7$

f $3 \cdot {}^4\log(x-4) = 6$

Machten van e en natuurlijke logaritmen

Een bijzonder grondtal is het getal $e \approx 2,718281828\dots$

Voor de functie $f(x) = e^x$ geldt $f'(x) = e^x$.

De logaritme met grondtal e wordt genoteerd als $\ln(x)$.

Voor de functie $f(x) = \ln(x)$ geldt $f'(x) = \frac{1}{x}$

Voorbeeld

Los exact op: $5e^{2x+3} = 8$

Oplossing

$$e^{2x+3} = 1\frac{3}{5} \quad \text{dus } 2x+3 = \ln(1\frac{3}{5})$$

$$2x = -3 + \ln(1\frac{3}{5})$$

$$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{3}{5})$$

59 Los exact op.

a $\ln(2x-1) = 3$

c $\sqrt{\ln(x)} = 1\frac{1}{2}$

b $2e^{5-x} = 3$

d $e^{2-x^3} = 4$

60 Druk a uit in b .

a $b = 3e^{2a-1}$

c $b = \ln(2a) + \ln(3a)$

b $b = 2\ln(a-5)$

d $b = e^{3a+1}$

Afgeleiden en primitieven van exponentiële en logaritmische functies

functie	afgeleide	primitieve
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = g^x$	$f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	-
$f(x) = {}^g\log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$	-
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \ln x $

61 Differentieer.

a $f(x) = {}^2\log(3x+5)$

d $h(x) = x\ln^2(x)$

b $g(t) = 1500 \cdot 0,94^t$

e $k(x) = 3^{x^2+1}$

c $s(u) = \frac{2}{1 - \ln(u)}$

f $j(t) = \frac{250}{1 + 15 \cdot e^{-0,18t}}$

62 Primitiveer.

a $f(x) = 5e^{3x+2}$

c $h(x) = 1\frac{1}{2} \cdot 3^{5-x}$

b $g(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

d $k(x) = \frac{12}{3x-5}$

63 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^x$.

- a** Plot en schets de grafiek van f .
- b** Bereken exact de nulpunten van f .
- c** Welke asymptoot heeft de grafiek van f ?
- d** Los exact op $f'(x) = 0$.
- e** Bereken in twee decimalen de extreme waarden van f .
- f** De functie $F(x) = (x^2 + bx + c) \cdot e^x$ is een primitieve van f . Bereken exact de waarden van b en c .
- g** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.

- 64** Een medicijn wordt in het spierweefsel van een patiënt geïnjecteerd. De concentratie C van het middel in mg per liter bloed kan worden benaderd met de formule $C(t) = 160(e^{-0,2t} - e^{-t})$ met t de tijd in uren na de injectie.
- a** Toon door differentiëren aan dat de concentratie meteen na het injecteren van het medicijn gaat stijgen.
 - b** $t_{\max}$ is het tijdstip waarop de concentratie maximaal is. Bereken exact de waarde van $t_{\max}$.

Examenopdrachten

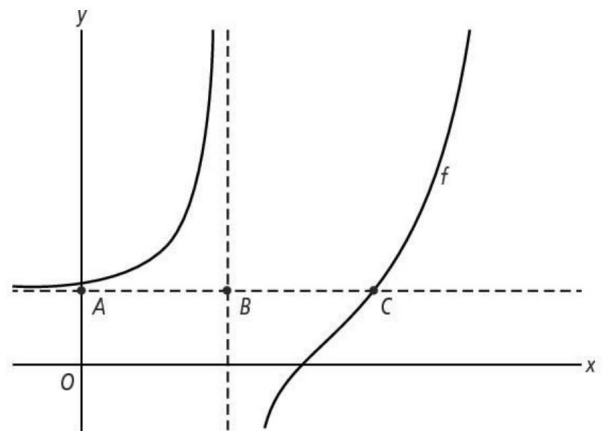
65 Horizontale en verticale asymptoot

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 2)

De functie f wordt gegeven door: $f(x) = \frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10}$

De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot en een verticale asymptoot. In de figuur is de grafiek van f met de beide asymptoten weergegeven. De twee asymptoten snijden elkaar in het punt B . Het punt A is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de y -as. Het punt C is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de grafiek van f .

Bewijs dat B het midden is van lijnstuk AC .



Hint 22

66 Een logaritmische functie en haar afgeleide
 (Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 1)

De functies f en g worden gegeven door:

$$f(x) = x \ln(x) - x + 1$$

$$g(x) = f'(x)$$

- a** Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

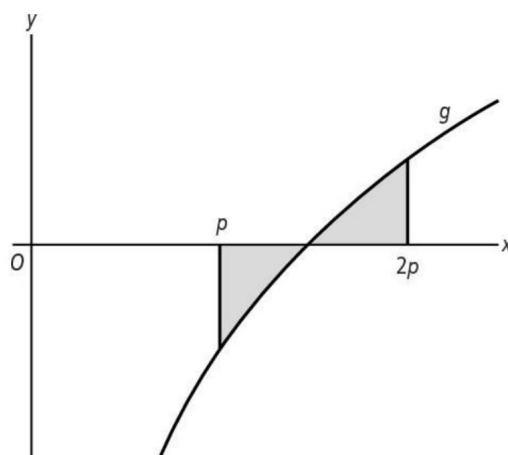
Hint 23

Er is één waarde van p waarvoor geldt: $\int_p^{2p} g(x) dx = 0$.

Voor deze waarde van p is de situatie in de figuur geschetst.

- b** Bereken exact deze waarde van p . Schrijf je eindantwoord in de vorm $p = ae$, waarbij a een getal is.

Hint 24



67 Lijn door de toppen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2018, tijdvak 1)

Voor elke waarde van a met $a > 0$ wordt de

functie f_a gegeven door $f_a(x) = xe^{ax}$.

De afgeleide functie f'_a wordt gegeven door

$$f'_a(x) = e^{ax} + axe^{ax}.$$

In figuur 1 zie je voor een aantal waarden van a de grafiek van f_a . Ook is de lijn l met vergelijking

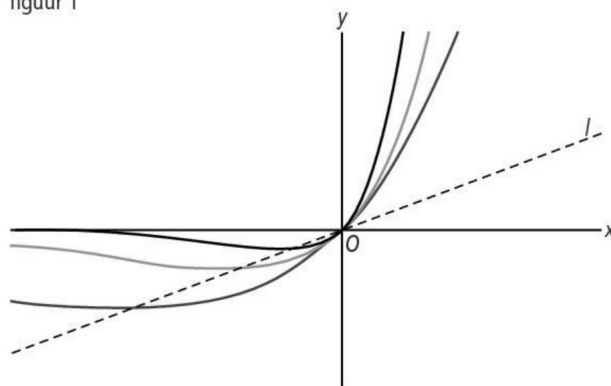
$y = \frac{1}{e}x$ weergegeven. Voor elke waarde van a met

$a > 0$ heeft de grafiek van f_a precies één top.

- a** Bewijs dat deze top op lijn l ligt.

Hint 25

figuur 1



De functie F_a is gegeven door: $F_a(x) = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$.

F_a is een primitieve van f_a .

- b** Bewijs F_a inderdaad een primitieve van f_a is.

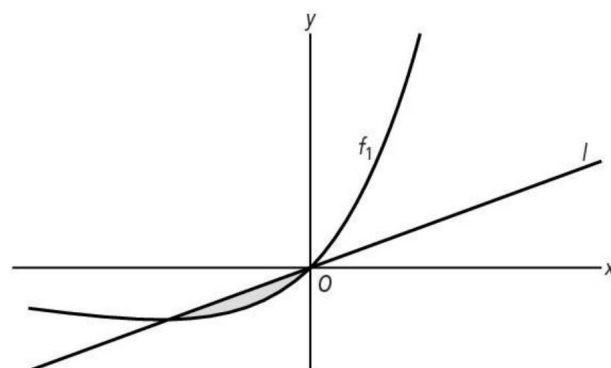
Hint 26

Voor f_1 geldt $f_1(x) = xe^x$. In figuur 2 is de grafiek van f_1 getekend, en ook lijn l . Het vlakdeel tussen lijn l en de grafiek van f_1 is grijs gemaakt.

- c** Bereken exact de oppervlakte van het grijze vlakdeel.

Hint 27

figuur 2



68 Twee machten van 2

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2017, tijdvak 2)

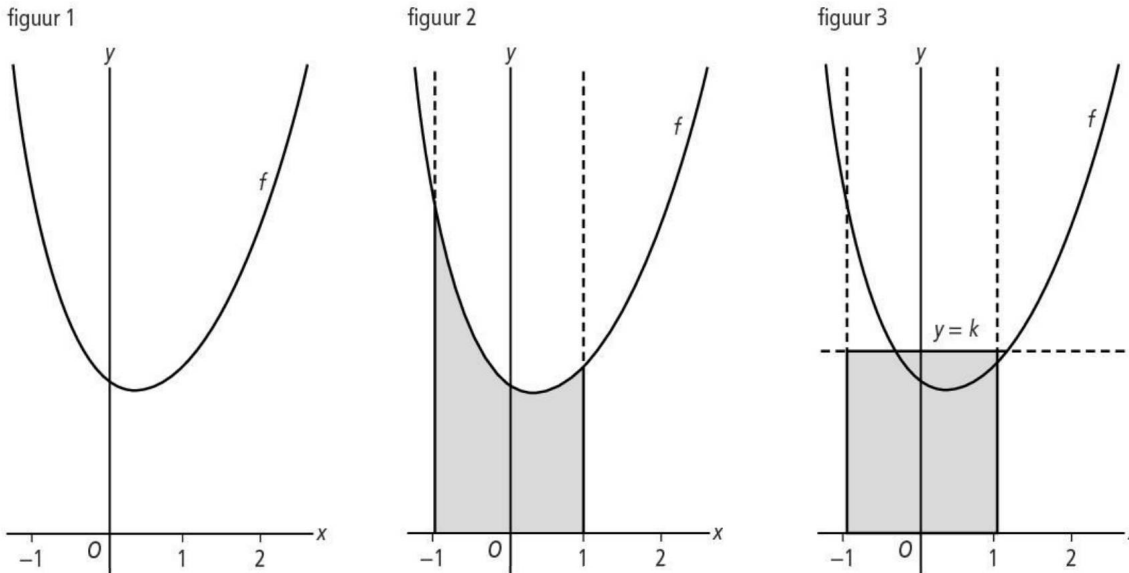
De functie f is gegeven door: $f(x) = 2^x + 2^{-2x}$.

In figuur 1 is een deel van de grafiek van f weergegeven.

De functie heeft één extreme waarde en dat is een minimum.

a Bereken exact de waarde van x waarvoor $f(x)$ minimaal is.

Hint 28



In figuur 2 is het gebied grijs gemaakt dat wordt begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijnen met vergelijkingen $x = -1$ en $x = 1$.

In figuur 3 is het rechthoekige gebied grijs gemaakt dat wordt begrensd door de x -as en de lijnen met vergelijkingen $x = -1$, $x = 1$ en $y = k$.

De waarde van k is zo gekozen dat het grijze gebied uit figuur 2 en het grijze gebied uit figuur 3 dezelfde oppervlakte hebben.

b Bereken algebraïsch de waarde van k . Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

Hint 29

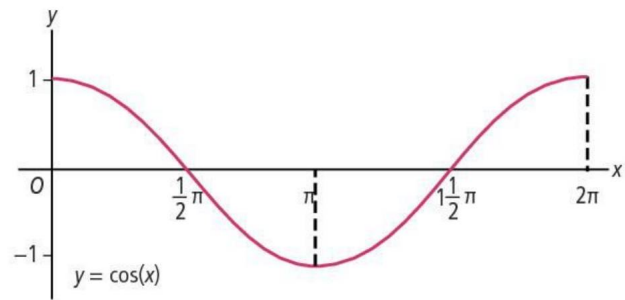
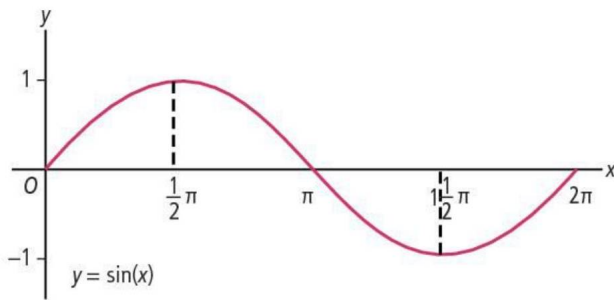
Op de grafiek van f liggen de punten $A(1, 2\frac{1}{4})$ en $Q(2, 4\frac{1}{16})$.

Ook ligt op de grafiek van f het punt P . Gegeven is dat de vectoren $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{AQ}$ loodrecht op elkaar staan.

c Bereken de x -coördinaat van P in twee decimalen nauwkeurig.

Hint 30

Goniometrische functies



Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Beide grafieken zijn sinusoiden, en x wordt gegeven in radialen. De periode van beide functies is 2π .

Symmetrie-eigenschappen, bijvoorbeeld:

$$\sin(\pi - t) = \sin(t) \quad \cos(\pi - t) = -\cos(t)$$

$$\sin(\pi + t) = -\sin(t) \quad \cos(\pi + t) = -\cos(t)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t) \quad \cos(-t) = \cos(t)$$

$$\sin(t) = \cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) \quad \cos(t) = \sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\text{Ook geldt: } \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

De functie $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ heet de tangensfunctie.

De tangensfunctie heeft periode π . De grafiek heeft verticale asymptoten $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ met k geheel.

Exacte waarden

In de tabel staan voor $x = 0$, $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{1}{2}\pi$ de exacte waarden van $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$.

Bij het exact berekenen van functiewaarden of het oplossen van vergelijkingen gebruik je deze waarden, vaak in combinatie met symmetrie-eigenschappen.

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

69 Bereken exact.

a $\sin\left(23\frac{1}{2}\pi\right)$

d $\sin\left(1\frac{2}{3}\pi\right)$

b $\cos\left(3\frac{3}{4}\pi\right)$

e $\cos\left(7\frac{1}{6}\pi\right)$

c $\tan\left(-2\frac{3}{4}\pi\right)$

f $\cos\left(-3\frac{2}{3}\pi\right)$

70 Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

a $2\sin(x) = -\sqrt{3}$

c $1 + 2\sin(x) = 0$

b $\sin(x) + \cos(x) = 0$

d $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$

Functievoorschrift bij een sinusoïde

Bij elke sinusoïde kan een functievoorschrift worden opgesteld

van de vorm $g(x) = d + a \sin(b(x - c))$. De evenwichtsstand is de lijn $y = d$, de amplitude is $|a|$, de periode p is $p = \frac{2\pi}{b}$ en er is een verschuiving van c naar rechts.

71 Van een sinusoïde zijn drie opeenvolgende toppen gegeven:

$A(5, 8)$, $B(9, 16)$ en $C(13, 8)$.

a Stel een bijpassende sinusfunctie op.

b Stel een bijpassende cosinusfunctie op.

Vergelijkingen met sinus, cosinus en tangens

De oplossingen van de vergelijking $\sin(A) = \sin(B)$ zijn:

$A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$ met k geheel.

De oplossingen van de vergelijking $\cos(A) = \cos(B)$ zijn:

$A = B + k \cdot 2\pi$ of $A = -B + k \cdot 2\pi$ met k geheel.

De oplossingen van de vergelijking $\tan(A) = \tan(B)$ zijn:

$A = B + k \cdot \pi$ met k geheel.

De vergelijking $\sin(A) = \cos(B)$ los je op door gebruik je

maken van de eigenschap $\sin(A) = \cos(A - \frac{1}{2}\pi)$ zodat je de

vergelijking kunt herleiden tot $\cos(A - \frac{1}{2}\pi) = \cos(B)$.

Voorbeeld

Los exact op $\sin(2x) = \cos(3x)$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

Oplossing

Omdat $\sin(2x) = \cos(2x - \frac{1}{2}\pi)$ wordt de vergelijking $\cos(2x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(3x)$.

$$2x - \frac{1}{2}\pi = 3x + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x - \frac{1}{2}\pi = -3x + k \cdot 2\pi$$

$$-\frac{1}{2}\pi = x + k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{2}\pi - k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$$

De oplossingen zijn $x = \frac{1}{10}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{9}{10}\pi$, $x = 1\frac{3}{10}\pi$, $x = 1\frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{7}{10}\pi$.

72 Los exact op voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

a $2\cos(3x) = 1$

d $2\cos^2(x) - \sin(x) = 1$

b $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(3x)$

e $\tan(2x) = \tan(x - \frac{1}{3}\pi)$

c $2\sin^2(x) = 1$

f $\sqrt{3} \cdot \sin(2x) = 3\cos(2x)$

Afgeleiden en primitieven

De afgeleide van $h(x) = \sin(x)$ is $h'(x) = \cos(x)$.

De afgeleide van $k(x) = \cos(x)$ is $k'(x) = -\sin(x)$.

De afgeleide van $m(x) = \tan(x)$ is $m'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

De primitieve van $f(x) = \sin(x)$ is $F(x) = -\cos(x)$.

De primitieve van $g(x) = \cos(x)$ is $G(x) = \sin(x)$.

73 Differentieer.

- | | |
|---|---|
| a $f(x) = 3\sin(2x)$ | d $k(x) = \tan(3x^2 + 2)$ |
| b $g(x) = 3\cos^2(x)$ | e $m(x) = \ln(2 + \sin(4x))$ |
| c $h(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)}$ | f $n(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$ |

74 Primitiveer.

- | | |
|--|--|
| a $f(x) = 3\sin(2x)$ | c $h(x) = 4 - 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ |
| b $g(x) = 3\cos\left(\frac{1}{3}\pi - x\right)$ | d $k(x) = 2x - 5\sin(6 - 3x)$ |

Som en verschilformules

$$\sin(u + v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)$$

$$\sin(u - v) = \sin(u) \cdot \cos(v) - \cos(u) \cdot \sin(v)$$

$$\cos(u + v) = \cos(u) \cdot \cos(v) - \sin(u) \cdot \sin(v)$$

$$\cos(u - v) = \cos(u) \cdot \cos(v) + \sin(u) \cdot \sin(v)$$

De acht formules
hiernaast worden op het
Centraal Examen gegeven.

Verdubbelingsformules

$$\sin(2t) = 2\sin(t) \cdot \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$$

$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$$

75 Druk uit in $\sin(x)$ of $\cos(x)$.

- | | |
|--|---|
| a $\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ | c $\cos\left(1\frac{1}{2}\pi - x\right)$ |
| b $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ | d $\sin\left(x + 1\frac{1}{4}\pi\right)$ |

76 Gegeven is $f(x) = 4\sin(x) \cdot \cos^3(x) - 4\sin^3(x) \cdot \cos(x)$.

- Toon aan dat het functievoorschrift geschreven kan worden als $f(x) = 2\sin(2x) \cdot \cos(2x)$.
- Bewijs dat $f(x) = \sin(4x)$.
- Bereken exact $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} f(x) dx$.

Voorbeeld

Druk $\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ uit in $\sin(x)$ en/of $\cos(x)$.

Oplossing

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) &= \sin(x)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \\ &= \sin(x) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \cos(x) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) \end{aligned}$$

Examenopdrachten

77 Gebroken goniometrische functie

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 1)

De functie f is gegeven door: $f(x) = \frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}$

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = \sqrt{2}$.

Lijn k en de grafiek van f hebben oneindig veel snijpunten.

De punten A en B zijn de twee snijpunten met de kleinste positieve x -coördinaten. Deze zijn in figuur 1 aangegeven.

a Bereken exact de x -coördinaten van A en B .

Hint 31

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$$

b Onderzoek of er waarden van p zijn waarvoor de grafiek van f_p perforaties heeft.

Hint 32

In de rest van de opgave beperken we ons tot waarden van p waarvoor geldt: $p \neq 0$.

De punten op de grafiek van f_p met x -coördinaten

0 , π en 2π noemen we respectievelijk P , Q en R .

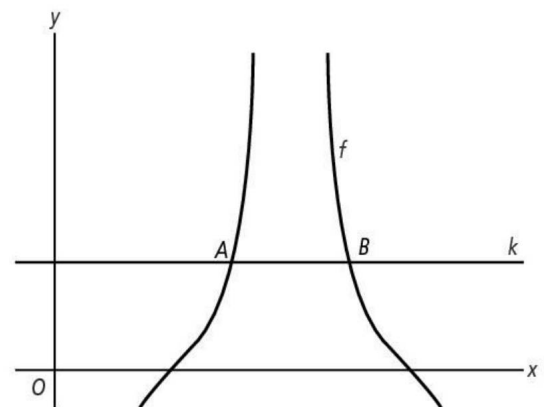
In figuur 2 is voor een waarde van p de grafiek van f_p weergegeven. Ook zijn de lijnstukken PQ en QR weergegeven.

Er zijn waarden van p waarvoor PQ en QR loodrecht op elkaar staan.

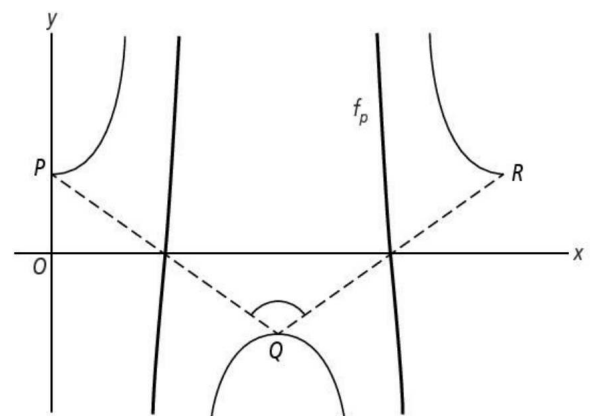
c Bereken exact deze waarden van p .

Hint 33

figuur 1



figuur 2



78 Maxima en minima

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2018, tijdvak 1)

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sin(x) - \cos(2x)$.

De grafiek van f heeft oneindig veel toppen.

- a** Bereken exact de x -coördinaten van alle toppen van de grafiek van f .

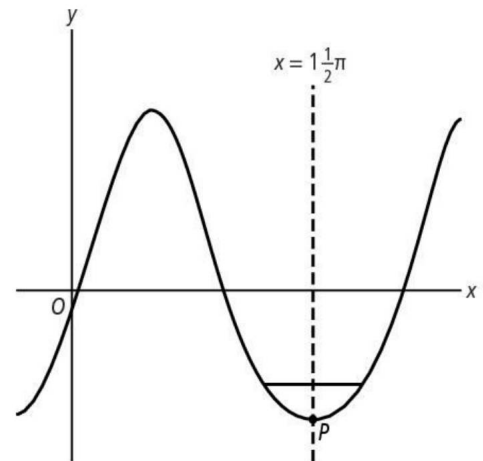
Hint 34

Een van de toppen is het punt $P(1\frac{1}{2}\pi, -5)$.

De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de verticale lijn door P . Boven P wordt een horizontaal lijnstuk van lengte 2 geplaatst, waarvan de eindpunten op de grafiek van f liggen. Zie de figuur.

- b** Bereken de afstand van P tot het horizontale lijnstuk.
 Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

Hint 35



79 Sinusoïde met perforaties

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2016, tijdvak 2)

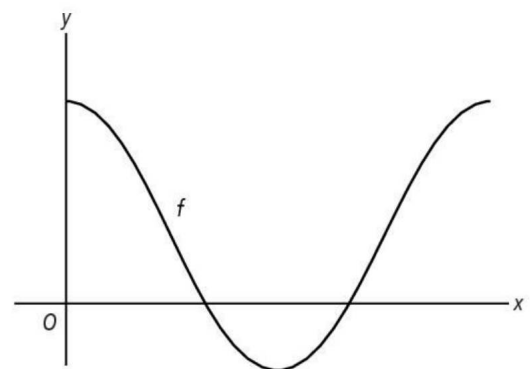
De functie f wordt gegeven door: $f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1$.

We bekijken in deze opgave alleen het deel van de grafiek van f waarvoor $x \geq 0$ en $x \leq 2\pi$.

De grafiek van f is een sinusoïde met perforaties. In de figuur is de grafiek van f weergegeven. De perforaties van de grafiek zijn in de figuur niet aangegeven.

Bereken exact de coördinaten van de perforaties van de grafiek van f .

Hint 36



80 Goniometrische functies

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2011, tijdvak 1)

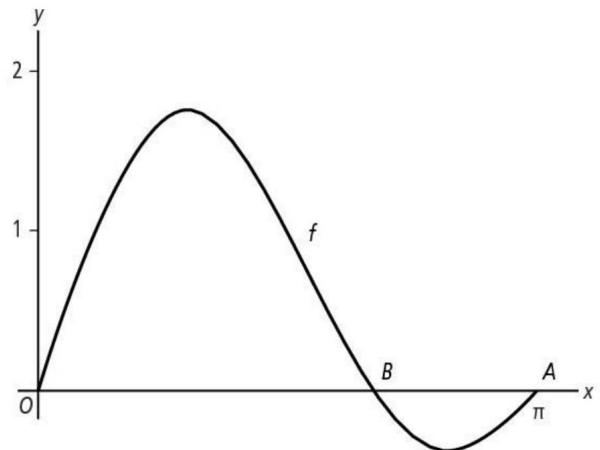
De functie f is gegeven door $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.

In de figuur hiernaast is de grafiek van f getekend.

Deze grafiek snijdt de x -as tussen $O(0, 0)$ en $A(\pi, 0)$ in het punt B .

- a** Bereken exact de x -coördinaat van punt B .

Hint 37



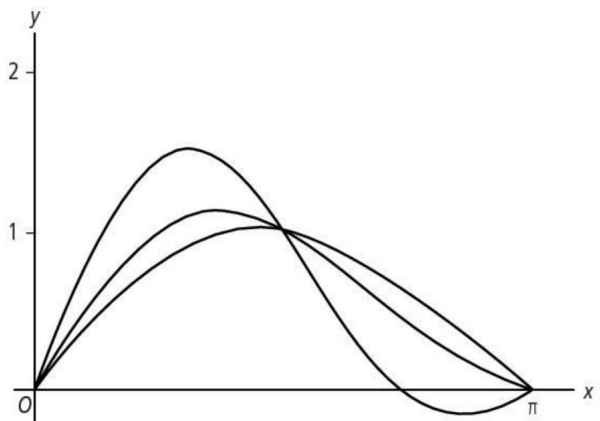
Voor elke positieve waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \sin(x) + a \cdot \sin(2x)$ op het domein $[0, \pi]$.

In de figuur hiernaast is voor enkele waarden van a de grafiek van f_a getekend.

Voor een bepaalde waarde van a heeft de grafiek van f_a twee toppen en is de x -coördinaat van een van deze toppen $\frac{5}{6}\pi$.

- b** Bereken in twee decimalen de x -coördinaat van de andere top bij deze waarde van a .

Hint 38

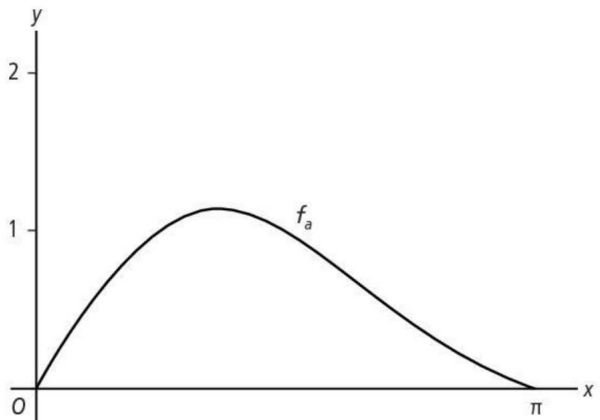


Voor elke waarde van a waarvoor geldt $0 < a < \frac{1}{2}$ ligt de grafiek van f_a tussen $(0, 0)$ en $(\pi, 0)$ geheel boven de x -as.

In de figuur hiernaast is een dergelijke grafiek getekend.

- c** Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de x -as, onafhankelijk is van a .

Hint 39



Driehoeken

In elke driehoek zijn de drie hoeken samen 180° .

In een rechthoekige driehoek is één hoek 90° .

In een scherphoekige driehoek zijn alle hoeken scherp, dus minder dan 90° .

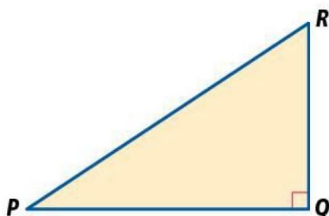
In een stomphoekige driehoek is één hoek stomp, dus meer dan 90° .

Een driehoek met twee gelijke zijden noem je een gelijkbenige driehoek.

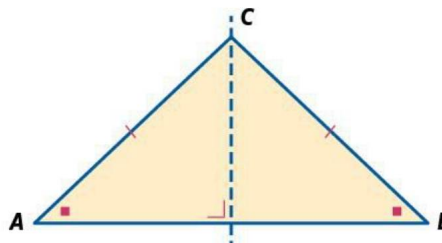
In een gelijkbenige driehoek zijn de twee basishoeken even groot.

Een driehoek met drie gelijke zijden noem je een gelijkzijdige driehoek.

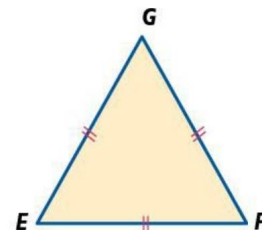
In een gelijkzijdige driehoek zijn de drie hoeken even groot, namelijk 60° .



$\angle Q = 90^\circ$
rechthoekige driehoek

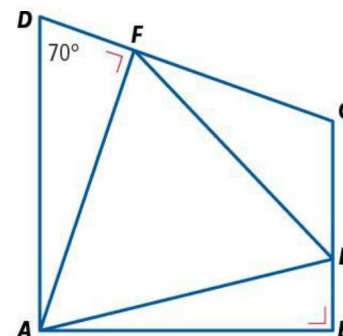


$AC = BC$ en $\angle A = \angle B$
gelijkbenige driehoek



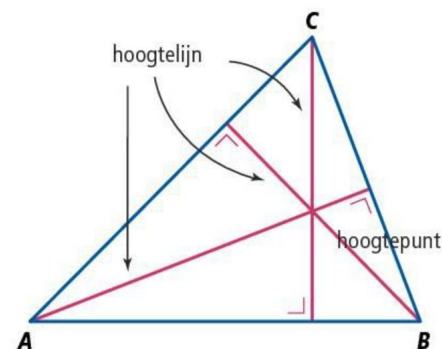
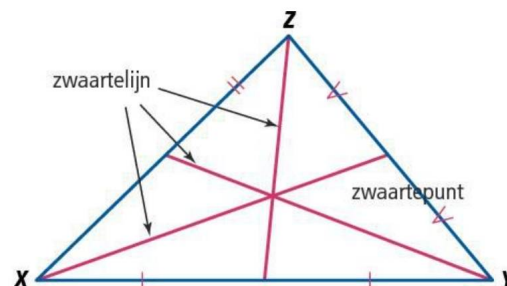
$EF = FG = EG$ en $\angle E = \angle F = \angle G = 60^\circ$
gelijkzijdige driehoek

- 81** In de figuur geldt:
 $\triangle ABE$ en $\triangle AFD$ zijn rechthoekig en $\triangle AEF$ is gelijkzijdig.
 Verder is $\angle D = 70^\circ$ en is $\angle BAD = 90^\circ$.
 Bereken de grootte van alle overige hoeken in deze figuur.

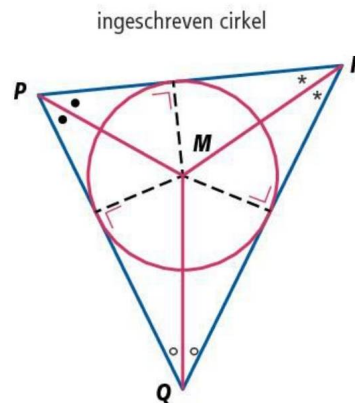
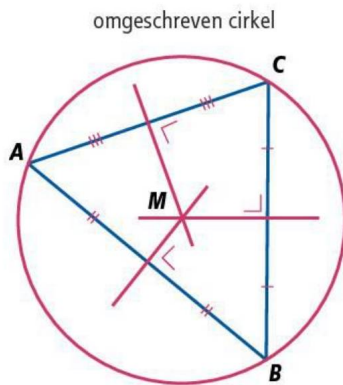


Bijzondere lijnen in driehoeken

- Een zwaartelijn in een driehoek is een lijnstuk dat een hoekpunt verbindt met het midden van de zijde er tegenover. De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in het zwaartepunt van de driehoek. Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in stukken die zich verhouden als 2 : 1.
- Een hoogtelijn uit een hoekpunt in een driehoek is een loodlijn uit een hoekpunt naar de tegenoverliggende zijde. De drie hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar één punt, het hoogtepunt.
- Een deellijn of bissectrice van een hoek is een lijn die een hoek in twee gelijke hoeken verdeelt. De drie deellijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.



- De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de lijn die door het midden van het lijnstuk AB gaat en er loodrecht op staat. De drie middelloodlijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt.
- De omgeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel door de hoekpunten van de driehoek. Het middelpunt M van de cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.



- De ingeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die raakt aan de zijden van de driehoek. Het middelpunt M van die cirkel is het snijpunt van de deellijnen van de hoeken van de driehoek. De straal van de cirkel is gelijk aan de afstand van punt M tot de zijden.

82 Gegeven zijn de punten $A(1, 1)$, $B(9, 3)$ en $C(2, 8)$.

- Teken $\triangle ABC$ in een assenstelsel en teken het zwaartepunt Z .
- Bereken exact de lengte van de zwaartelijn uit punt A en daarmee de exacte lengte van AZ .
- Teken in een nieuw assenstelsel opnieuw $\triangle ABC$ en teken de omgeschreven cirkel van de driehoek.
- Teken in een nieuw assenstelsel opnieuw $\triangle ABC$ en teken de ingeschreven cirkel van de driehoek.

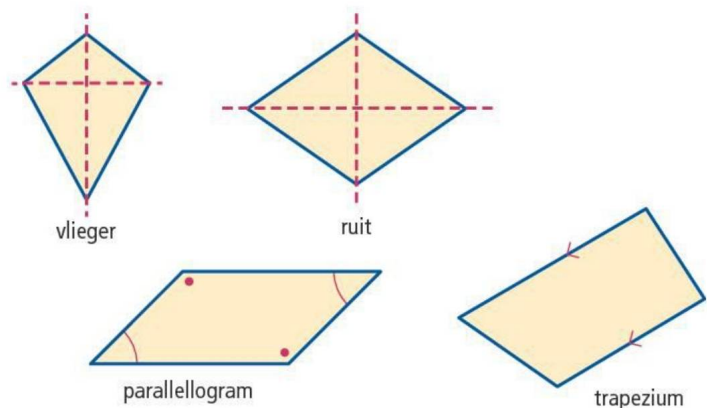
Vierhoeken

Een vierhoek waarvan een diagonaal symmetrieas is, heet een vlieger.

Een vierhoek waarvan beide diagonalen symmetrieassen zijn, heet een ruit.

Een vierhoek die draaisymmetrisch is over 180° , heet een parallellogram. Van een parallellogram zijn de tegenover elkaar liggende zijden evenwijdig en even lang.

Een vierhoek waarvan twee zijden evenwijdig lopen, heet een trapezium.



- 83** Zeg van de beweringen of ze waar zijn of niet waar. Licht je antwoord toe.
- a** Elke ruit is een vlieger, maar een vlieger hoeft geen ruit te zijn.
 - b** Een rechthoek is een parallellogram waarvan alle vier hoeken even groot zijn.
 - c** Een ruit waarvan de hoeken recht zijn, is een vierkant.
 - d** Een trapezium kan alleen een vlieger zijn als het een ruit is.

Berekeningen in driehoeken

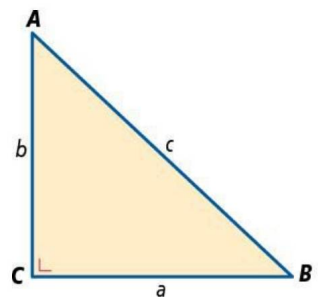
Om berekeningen te maken in driehoekige figuren kun je gebruikmaken van:

- **Gelijkvormigheid:** Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze een vergroting (of verkleining) zijn van elkaar. Bij gelijkvormige driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken even groot en er is een vaste verhouding tussen de overeenkomstige zijden. Bij berekeningen met gelijkvormige driehoeken kun je gebruikmaken van een verhoudingstabel.
- **Stelling van Pythagoras:** in de rechthoekige driehoek geldt $c^2 = a^2 + b^2$ dus $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Goniometrische verhoudingen:** in een rechthoekige driehoek geldt

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A}{\text{langste zijde}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van hoek } A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van hoek } A} = \frac{a}{b}$$



Voorbeeld

In het trapezium zijn AB en CD evenwijdig en is $\angle DCB = 90^\circ$. Bereken $\angle CAB$ en de lengte van AC , BD , DS en BS .

Oplossing

Omdat $AB \parallel CD$ geldt $\angle ABC = 90^\circ$.

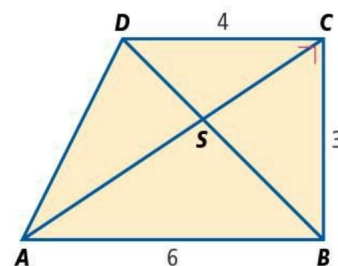
In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle CAB) = \frac{3}{6}$ dus $\angle CAB \approx 27^\circ$.

$$AC = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \quad (= 3\sqrt{5})$$

$$BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

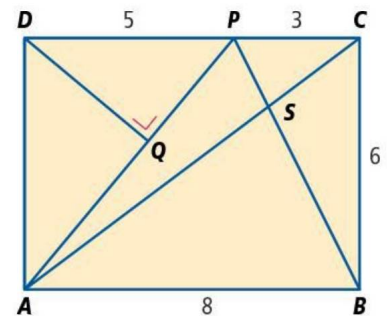
$\triangle ABS \sim \triangle CDS$ dus $DS : BS = CD : AB = 2 : 3$.

Daaruit volgt $DS = \frac{2}{5} \cdot DB = 2$ en $BS = \frac{3}{5} \cdot DB = 3$.



- 84 Bereken in de figuur van het voorbeeld op de vorige bladzijde.
- AS exact
 - CS exact
 - $\angle DBA$ afgerond op hele graden
 - $\angle BSC$ afgerond op hele graden

- 85 In rechthoek $ABCD$ is $AB = 8$ en $BC = 6$.
Op zijde DC ligt punt P zodat $DP = 5$ en $PC = 3$.
- Toon met een exacte berekening aan dat $BP = 3\sqrt{5}$.
 - Bereken AP exact.
 - Bereken AS exact.
 - Toon met een exacte berekening aan dat $DQ = \frac{30}{61}\sqrt{61}$.
 - Bereken $\angle PAD$. Rond af op hele graden.
 - Bereken $\angle DPQ$. Rond af op hele graden.
 - Bereken $\angle ASP$. Rond af op hele graden.



Sinus- en cosinusregel

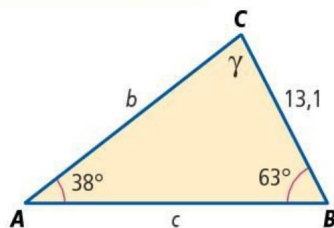
In elke driehoek geldt de sinusregel:

Als α , β , γ de hoeken zijn van een driehoek en de lengten van de tegenoverliggende zijden zijn a , b en c , dan geldt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Om de sinusregel te kunnen gebruiken moet je ten minste de lengte van één zijde en de grootte van de tegenoverliggende hoek weten.

Voorbeeld



Bereken b en c .

Oplossing

$$\gamma = 180^\circ - 63^\circ - 38^\circ = 79^\circ$$

$$\frac{13,1}{\sin(38^\circ)} = \frac{b}{\sin(63^\circ)} = \frac{c}{\sin(79^\circ)}$$

$$b = \frac{13,1 \cdot \sin(63^\circ)}{\sin(38^\circ)} \approx 19,0$$

$$c = \frac{13,1 \cdot \sin(79^\circ)}{\sin(38^\circ)} \approx 20,9$$

In elke driehoek geldt de cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Je kunt met de cosinusregel een lengte van een onbekende zijde berekenen als je de lengte van de andere zijden en de grootte van de tegenoverliggende hoek kent. Je kunt met de cosinusregel ook de grootte van de hoeken berekenen als je van een driehoek de lengte van alle drie zijden kent.

Voorbeeld

Van $\triangle PQR$ is gegeven $QR = 16$, $PQ = 13$ en $\angle Q = 62^\circ$.
 Bereken PR .

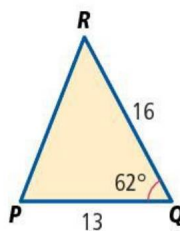
Oplossing

een schets:

$$PR^2 = 16^2 + 13^2 - 2 \cdot 16 \cdot 13 \cdot \cos(62^\circ)$$

$$PR^2 \approx 229,70$$

$$\text{dus } PR \approx \sqrt{229,70} \approx 15,2.$$



- 86** Bereken de lengtes van de onbekende zijden en de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$. Rond lengtes af op één decimaal en hoeken op hele graden.

- a $\alpha = 60^\circ$, $\gamma = 75^\circ$ en $c = 8,2$
- b $\alpha = 45^\circ$, $a = 15$ en $b = 18,3$
- c $\beta = 30^\circ$, $a = 9,3$ en $c = 5,7$
- d $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 100^\circ$ en $b = 12,5$
- e $\angle A = 120^\circ$, $AB = 4,1$ en $AC = 8,3$
- f $\angle A = 120^\circ$, $AB = 4,1$ en $BC = 8,3$

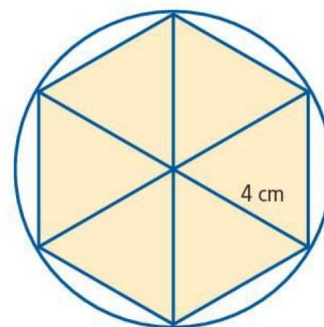
Oppervlakte

Bij het berekenen van de oppervlakte gebruik je de formules:

figuur	oppervlakte A	formule
rechthoek	$A = \text{lengte} \times \text{breedte}$	$A = l \cdot b$
driehoek	$A = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$	$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$
vierkant	$A = \text{zijde} \times \text{zijde}$	$A = z^2$
parallellogram	$A = \text{basis} \times \text{hoogte}$	$A = b \cdot h$
cirkel	$A = \pi \times \text{straal} \times \text{straal}$	$A = \pi \cdot r^2$

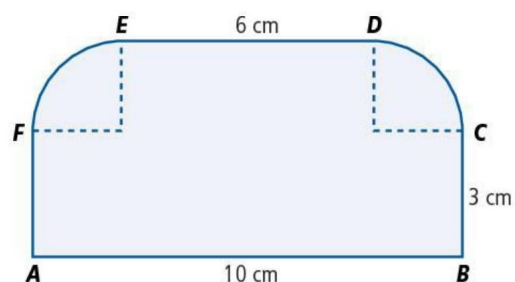
- 87** Van de regelmatige zeshoek liggen de hoekpunten op een cirkel met straal 4 cm.
 Bereken hoeveel procent van de oppervlakte van de cirkel door de zeshoek wordt bedekt. Rond af op één decimaal.

- 88** Deze opdracht gaat over de figuur naast opdracht 85.
- a Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCP$.
 - b Bereken de oppervlakte van driehoek APC .
 - c Bereken de oppervlakte van driehoek ABS .
 - d Bereken de oppervlakte van vierhoek $ASPD$.



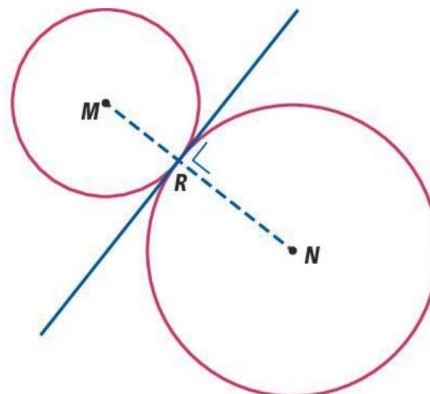
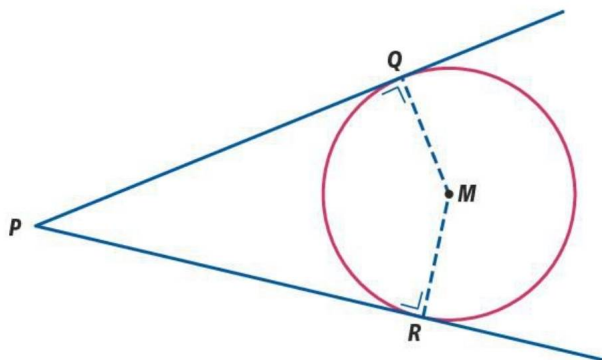
- 89** De figuur is ontstaan door van een rechthoek twee hoeken af te ronden.

- Bereken de omtrek van de figuur in cm. Rond je antwoord af op één decimaal.
- Bereken de oppervlakte van de figuur in cm^2 . Rond af op hele cm^2 .

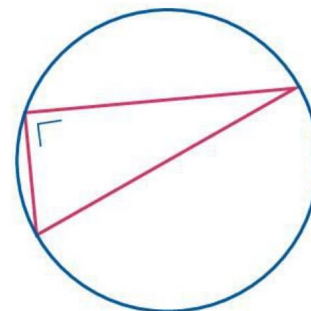


Stellingen over cirkels

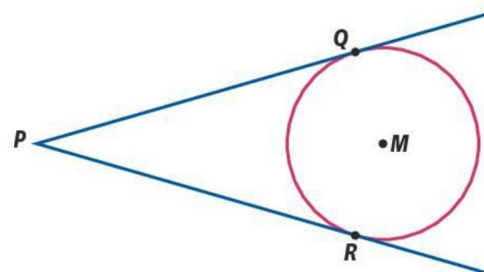
- Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk. (*Raaklijnstukken*)
- Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. (*Raaklijn*)
- De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindinglijn van de twee middelpunten. (*Rakende cirkels*)

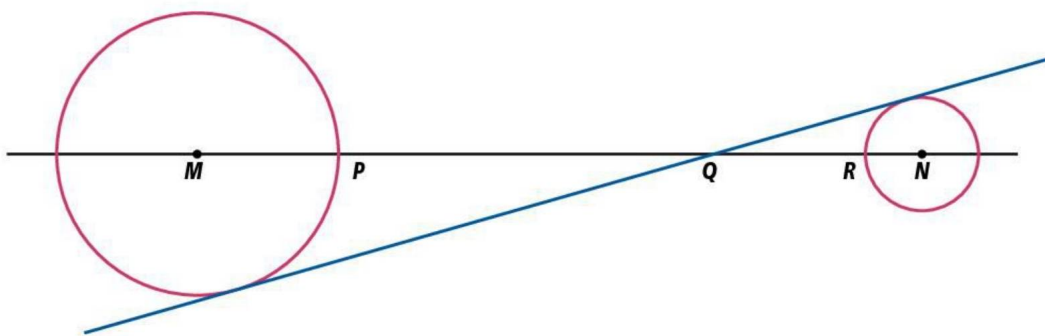


- Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omschreven cirkel is, is rechthoekig. (*Thales*)
- Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omschreven cirkel. (*Thales*)



- 90** Vanuit een punt P zijn de raaklijnen getekend aan een cirkel met middelpunt M . De raakpunten zijn Q en R . Toon aan dat de punten P , Q , M en R op de cirkel met middellijn MP liggen.





- 91** De linker cirkel in de tekening heeft straal 8.
 De rechter cirkel heeft straal 3.
 De afstand PR tussen de twee cirkels is 22.
 De blauwe lijn raakt beide cirkels.
 Bereken PQ en QR .

Vectoren

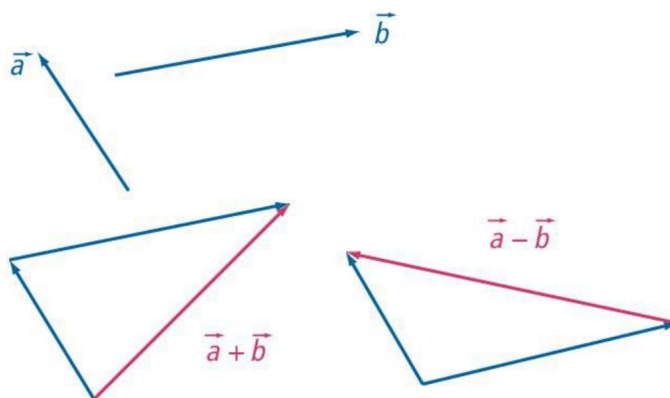
Met een vector wordt een verplaatsing aangegeven, bijvoorbeeld $\overrightarrow{AB}$ is de vector met beginpunt A en eindpunt B . Een vector kan worden ook aangegeven met een kleine letter, bijvoorbeeld $\vec{a}$.

De somvector $\vec{a} + \vec{b}$ krijg je door deze twee vectoren kop aan staart te leggen.

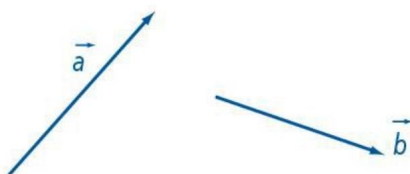
De verschilvector $\vec{a} - \vec{b}$ is de som van $\vec{a}$ en $-\vec{b}$, de tegengestelde vector van $\vec{b}$.

De som van $\vec{a}$ en $-\vec{a}$ is de nulvector $\vec{0}$.

De lengte van een vector wordt aangegeven met $|\overrightarrow{AB}|$ of $|\vec{a}|$.



- 92** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
 Teken in de figuur de vectoren $2\vec{a} + \vec{b}$ en $\vec{a} - 2\vec{b}$.



Vectoren en kentallen, inproduct

Vectoren in een assenstelsel kun je beschrijven met behulp van

kentallen. De vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ betekent: 3 naar links en 5 omhoog.

Voor de lengte van de vector $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ geldt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Een vector die in de oorsprong begint heet een plaatsvector.

Je kunt vectoren optellen of met een getal vermenigvuldigen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \text{ en } k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Het inwendig product of inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van de vectoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is gelijk aan $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$ en ook

gelijk aan $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

α is de hoek tussen de vectoren, deze hoek kun je berekenen

met $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ ofwel $\cos(\alpha) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(-2, 5)$, $B(7, 3)$ en $C(3, 6)$.
Bereken $\angle ACB$ in hele graden.

Oplossing

$$\angle ACB = \angle(\vec{CA}, \vec{CB}) \text{ met } \vec{CA} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Voor de hoek α tussen $\vec{CA}$ en $\vec{CB}$ geldt:

$$\cos(\alpha) = \frac{-5 \cdot 4 + -1 \cdot -3}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{25}} = \frac{-17}{5\sqrt{26}} = -0,666...$$

$$\angle ACB = \alpha \approx 132^\circ$$

93 Gegeven zijn de punten $A(-3, 7)$, $B(5, 1)$ en $C(10, 4)$.

Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{AB}$ en $\vec{AC}$.

Examenopdrachten

94 Wind aan zee

W

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 2)

Wind heeft een richting en een snelheid. Daarom kan wind als een vector worden weergegeven.

Op een warme zomerdag worden aan de kust de windrichting en de windsnelheid door twee processen bepaald:

- de luchtstroming van een gebied met hoge luchtdruk naar een gebied met lage luchtdruk: dit is wind $\vec{w}_d$.
- de luchtstroming die ontstaat doordat de temperatuur boven zee anders is dan boven land: dit is wind $\vec{w}_z$. We gaan er in deze opgave van uit dat deze wind loodrecht op de kustlijn staat en richting het land waait.

In figuur 1 is een voorbeeldsituatie getekend waarbij wind $\vec{w}_d$ in westelijke richting waait.

De resulterende wind $\vec{w}_r$ is de wind zoals die wordt ervaren door iemand die zich aan de kust in punt O bevindt. Er geldt: $\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d$.

Op het werkblad is een deel van een kust getekend. In de figuren op het werkblad wordt een wind met een snelheid van 1 m/s weergegeven als een vector van 1 cm. Er geldt:

- De wind $\vec{w}_z$ waait met een snelheid van 4 m/s landinwaarts.
- De wind $\vec{w}_d$ waait met een snelheid van 6 m/s.
- De resulterende wind $\vec{w}_r$ waait evenwijdig met de kustlijn.

Op basis van bovenstaande drie gegevens zijn er twee mogelijkheden voor $\vec{w}_d$.

- a** Teken op de uitwerkbijlage deze twee vectoren $\vec{w}_d$. Neem daarbij punt O als beginpunt van $\vec{w}_d$. Licht je aanpak toe.

Hint 40

Op een plek langs de Nederlandse kust (in figuur 2 het punt O) maakt de kustlijn een hoek van 30° met het noorden. Op zekere dag waait de wind $\vec{w}_d$ met een snelheid van 5 m/s in zuidwestelijke richting. De wind $\vec{w}_z$ heeft een snelheid van 3 m/s en staat loodrecht op de kustlijn.

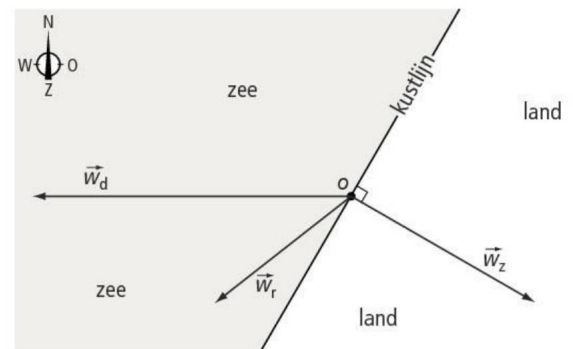
In figuur 2 zijn de lijn noord-zuid en de lijn oost-west de assen van het assenstelsel. De lijn door O waar vector $\vec{w}_d$ op ligt, is gestippeld getekend; die maakt dus een hoek van 45° met het noorden.

Figuur 2 is ook op het werkblad opgenomen.

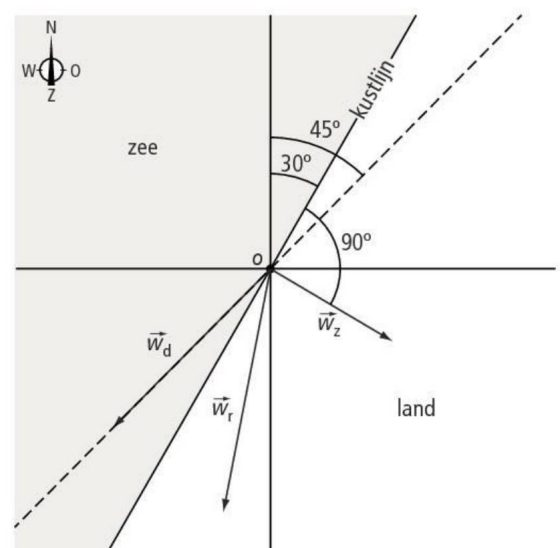
- b** Bereken algebraïsch de snelheid in m/s van de resulterende wind. Geef je eindantwoord in één decimaal. Je kunt bij deze vraag het werkblad gebruiken.

Hint 41

figuur 1



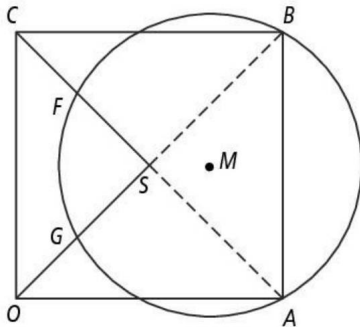
figuur 2



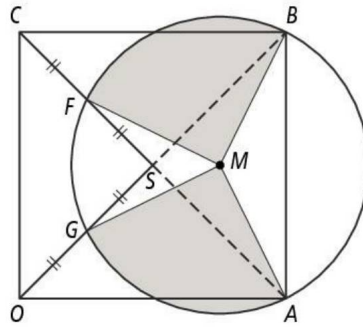
95 Buiten een vierkant*(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2018, tijdvak 2)*Gegeven is het vierkant $OABC$ met $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ en $C(0, 4)$.Het snijpunt van OB en AC is het punt S .Het punt $M(3, 2)$ is het middelpunt van een cirkel door A en B .De punten F en G zijn de snijpunten van deze cirkel met CS respectievelijk OS . Zie figuur 1.Er geldt: F is het midden van CS .**a** Bewijs dat F inderdaad het midden is van CS .

Hint 42

figuur 1



figuur 2

Verder geldt: G is het midden van OS .In figuur 2 zijn de cirkelsectoren BMF en GMA grijs gemaakt.

De oppervlakte van deze twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

b Bewijs dit.

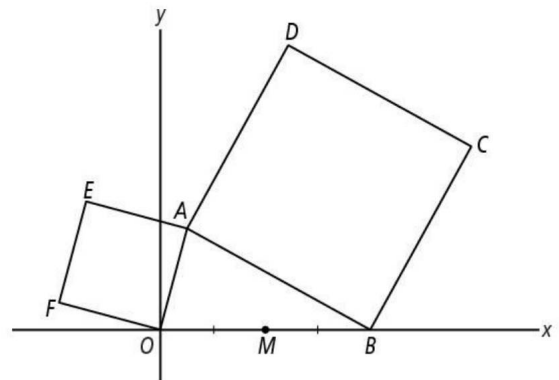
Hint 43

96 Twee vierkanten tegen een driehoek*(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)*Voor positieve waarden van p en q is gegeven de driehoek OAB met $O(0, 0)$, $A(p, q)$ en $B(2, 0)$. Tegen de zijden OA en OB liggen de vierkanten $OAEF$ en $ABCD$. Dezevierkanten liggen buiten driehoek OAB . Het midden van lijnstuk OB is punt M . In de figuur is een mogelijke situatie weergegeven.Er geldt: $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$.**a** Toon dit aan.

Hint 44

Verder geldt: $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix}$.**b** Toon aan dat de lijn MA loodrecht staat op de lijn ED .

Hint 45



Lijnen en cirkels

Vergelijkingen van lijnen

Lijnen kun je op verschillende manieren met vergelijkingen weergeven.

- Een vergelijking van een lijn kun je schrijven in de vorm $ax + by = c$.
- Als de lijn niet evenwijdig is aan de verticale as, kun je de vergelijking ook schrijven als $y = mx + n$ waarbij m de richtingscoëfficiënt en n het startgetal is. Als voor twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dan staan k en l loodrecht op elkaar. Het omgekeerde is ook waar: Als twee lijnen k en l met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, dan geldt $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- Een lijn die de assen snijdt in de punten $(p, 0)$ en $(0, q)$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$ heeft een vergelijking $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
- Een vergelijking van een horizontale lijn is $y = c$ en een vergelijking van een verticale lijn is $x = c$.

Voorbeeld

Gegeven zijn lijn l met vergelijking $y = -1\frac{3}{5}x + 8$ en lijn m met vergelijking $10x - 16y = -3$. Toon aan dat $l \perp m$.

Oplossing

$10x - 16y = -3$ geeft $-16y = 10x - 3$ ofwel $y = \frac{5}{8}x + \frac{3}{16}$.

De richtingscoëfficiënt van l is $-1\frac{3}{5}$.

De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{5}{8}$.

$-1\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{8} = -1$ dus $l \perp m$.

97 Gegeven zijn de vier lijnen:

$$l: y = -3x + 5$$

$$r: 3x + 6y = -5$$

$$k: 10x - 5y = 7$$

$$s: 3x + y = 10$$

- Schrijf de vergelijkingen van de lijnen k en r in de vorm $y = mx + n$.
- Schrijf de vergelijkingen van l en s in de vorm $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.
- Onderzoek welke van deze lijnen loodrecht op elkaar staan.

98 Gegeven is punt $P(4, -3)$ en lijn $l: 8x - 4y = 7$.

- Geef de richtingscoëfficiënt van een lijn die loodrecht op l staat.
- Geef een vergelijking van de loodlijn uit P op l .

Vectorvoorstelling van een lijn

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ heet een vectorvoorstelling van een lijn, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is een steunvector en $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van de lijn. Voor elke waarde van de parameter λ wijst de vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ een punt van de lijn aan. Een vectorvoorstelling heet ook wel een parametervoorstelling.

De vector $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ staat loodrecht op de lijn en heet een normaalvector van de lijn. $qx - py = c$ is een vergelijking van de lijn.

Voorbeeld

Stel een vectorvoorstelling, een normaalvector en een vergelijking op van de lijn door de punten $A(6, -1)$ en $B(-2, 5)$.

Oplossing

Een richtingsvector is $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een normaalvector is $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking is $3x + 4y = c$. Door invullen van de coördinaten van A of van B vind je de vergelijking $3x + 4y = 14$.

99 Gegeven is de lijn m met vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- Stel een vergelijking van m op.
- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van m met de x -as.

Afstand tot een lijn

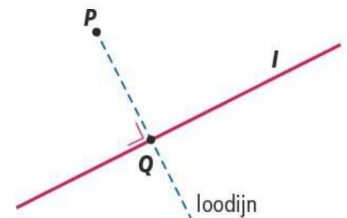
Om de afstand van een punt P tot een lijn l te berekenen, stel je eerst een vergelijking op van de loodlijn door punt P op lijn l . Vervolgens bereken je de coördinaten van het snijpunt Q van de loodlijn met lijn l . De lengte van lijnstuk PQ is de gevraagde afstand. De notatie voor deze afstand is $d(P, l)$.

De afstand tussen twee punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ kun je berekenen met de formule $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is de afstand van een willekeurig punt op de ene lijn tot de andere lijn.

Als $ax + by + c = 0$ de vergelijking van een lijn l is, dan kun je de afstand van het punt $P(p, q)$ tot de lijn l ook

berekenen met de formule $d(P, l) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



Voorbeeld

Bereken exact de afstand van het punt $P(3, -1)$ tot de lijn $l: y = 1\frac{1}{2}x - 7$.

Oplossing

De vergelijking van l kan worden herleid tot $1\frac{1}{2}x - y = 7$ of

$$3x - 2y - 14 = 0.$$

$$d(P, l) = \frac{|3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 14|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

- 100**
- a** Bereken exact de afstand van het punt $P(0, 9)$ tot de lijn $l: 2x - 3y = -1$.
 - b** Bereken exact de afstand tussen de evenwijdige lijnen $m: y = 3x - 2$ en $n: 3x - y = -2$.
- 101** Gegeven zijn de lijnen l en m met vergelijkingen $8x - y = 34$ en $4x + 7y = 2$.
- a** Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en m .
 - b** Een punt $P(p, q)$ ligt op gelijke afstand van de lijnen l en m . Leg uit dat moet gelden $|8p - q - 34| = |4p + 7q - 2|$.
 - c** De vergelijking in opdracht b kan worden herleid tot twee lineaire vergelijkingen. Welke meetkundige eigenschap hebben deze lijnen?
 - d** Geef de vergelijkingen van de twee lijnen en toon aan dat de lijnen loodrecht op elkaar staan.

Hoek tussen twee lijnen

Twee snijdende lijnen maken vier hoeken met elkaar die twee aan twee gelijk zijn. Met de hoek tussen twee lijnen wordt bedoeld de scherpe of rechte hoek die de lijnen met elkaar maken.

De hoek tussen twee snijdende lijnen bereken je door middel van het inproduct van de beide richtingsvectoren.

Voorbeeld

Bereken de hoek α tussen de lijnen $l: y = 2x - 8$ en $m: y = 4 - x$.

Oplossing

De richtingsvectoren zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot -1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} \approx -0,316 \text{ dus } \alpha \approx 108^\circ$$

De scherpe hoek tussen de lijnen is $180 - 108 = 72^\circ$.

- 102** Bereken de hoek tussen de lijnen in hele graden.
- a** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - b** $6y + x = 1$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - c** $y = -2x + 8$ en $x = 2y - 8$

Stelsel lineaire vergelijkingen

Bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen kun je gebruikmaken van

- herleiden van vergelijkingen en substitutie
- eliminatie van een van de variabelen

De oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen geeft de coördinaten van het snijpunt van de lijnen die bij de vergelijkingen horen.

Voorbeeld 1

Los op:
$$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Oplossing

Uit $x - y = 1$ volgt $x = y + 1$.

Substitutie in de eerste vergelijking geeft:

$$5(y + 1) - 2y = 8$$

$$5y + 5 - 2y = 8$$

$$3y = 3$$

$$y = 1 \quad \text{Invullen in } x - y = 1 \text{ geeft}$$

$$x - 1 = 1, \text{ dus } x = 2.$$

De oplossing is $x = 2$ en $y = 1$.

Voorbeeld 2

Los op:
$$\begin{cases} 4x - 3y = 34 \\ 3x + y = 19 \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{cases} 4x - 3y = 34 \\ 9x + 3y = 57 \end{cases} \quad (\text{tweede vergelijking} \times 3)$$

$$\hline 13x = 91 \quad (\text{vergelijkingen opgeteld})$$

$$x = 7$$

$$3x + y = 19 \quad (\text{vergelijking opgeteld})$$

$$21 + y = 19 \quad \text{dus } y = -2.$$

Je kunt bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen uitkomen op een vergelijking van de vorm $0 \cdot x = a$ (of $0 \cdot y = a$).

Als $a = 0$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en vallen de bijbehorende lijnen samen. Zo'n stelsel heet een afhankelijk stelsel.

Als $a \neq 0$ dan heeft het stelsel géén oplossingen en zijn de bijbehorende lijnen evenwijdig. Zo'n stelsel heet een strijdig stelsel.

$0 \cdot x = 0$
oneindig veel
oplossingen



$0 \cdot x = a$ met $a \neq 0$
géén oplossingen



103 Los exact de stelsels vergelijkingen op.

a
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x - 2y = 13 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 7a + 3b = -10 \\ a = \frac{1}{2}b - 7 \end{cases}$$

104 Onderzoek het aantal oplossingen bij elk van de stelsels.

a
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5(x - 1) = 2(x - y) \end{cases}$$

c
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} y = 1\frac{3}{4}x - 7 \\ x = \frac{4}{7}y + 4 \end{cases}$$

d
$$\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

- 105** Gegeven is het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 5x + py + q = 0 \end{cases}$
- a Voor welke waarden van p en q is dit stelsel afhankelijk?
 - b Voor welke waarden van p en q is dit stelsel strijdig?

Vergelijkingen van cirkels

De vergelijking van een cirkel kan worden gegeven in de vorm van de middelpuntsvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Hierin is (a, b) het middelpunt van de cirkel en is r de straal.

De vergelijking van een cirkel kan ook worden gegeven in de vorm $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$.

Door twee keer kwadraat afsplitsen toe te passen op $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$ kun je de middelpuntsvergelijking krijgen.

- 106** Bereken de straal en de coördinaten van het middelpunt.
- a $(x + 4)^2 + y^2 = 25$
 - b $(x - 12)^2 + y^2 - 8y = 0$
 - c $x^2 + y^2 + 10x + 4y = 1$
 - d $x^2 + y^2 - 5x - 7y = 10$
 - e Waarom is $x^2 + y^2 + 5x - 6y + 16 = 0$ geen vergelijking van een cirkel?

Snijpunten van een lijn met een cirkel

Om de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel te berekenen, maak je gebruik van substitutie. Je kunt kiezen of je bij de vergelijking van de lijn y in x uitdrukt of x in y uitdrukt, maar je kunt ook werken met een vectorvoorstelling van de lijn.

Voorbeeld

Gegeven zijn de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 33 = 0$ en de lijn met vergelijking $x - 2y = 3$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn en de cirkel.

Oplossing

$x - 2y = 3$ geeft $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Substitutie van $x = 3 + 2\lambda$ en $y = \lambda$ geeft
 $(3 + 2\lambda)^2 + \lambda^2 - 14(3 + 2\lambda) - 4\lambda + 33 = 0$
 $9 + 12\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 42 - 28\lambda - 4\lambda + 33 = 0$
 $5\lambda^2 - 20\lambda = 0$
 $5\lambda(\lambda - 4) = 0$ dus $\lambda = 0$ of $\lambda = 4$
 De snijpunten zijn $(3, 0)$ en $(11, 4)$.

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 10$. Bereken de straal en de coördinaten van het middelpunt van de cirkel.

Oplossing

$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 10$
 $(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 = 10$
 $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 35$
 De straal van de cirkel is $\sqrt{35}$ en het middelpunt is $(-4, 3)$.

107 Bereken de coördinaten van de snijpunten van cirkel c en lijn l .

a $c: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 40$ en $l: x = -3$

b $c: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 13$ en $l: x + 5y = 1$

c $c: x^2 + y^2 = 9$ en $l: y = x + 3$

108 Gegeven zijn de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ en de lijn met vergelijking $y = 2x + 3$.
Toon met een berekening aan dat de lijn en de cirkel geen punt gemeenschappelijk hebben.

Snijpunten van twee cirkels

Als je de snijpunten van twee cirkels moet berekenen, trek je de vergelijkingen van de twee cirkels van elkaar af. Het resultaat is de vergelijking van de lijn die door de beide snijpunten gaat. Vervolgens bereken je de snijpunten van deze lijn met één van beide cirkels.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkels $c_1: x^2 + (y-4)^2 = 17$ en $c_2: (x-10)^2 + (y+2)^2 = 85$.

Oplossing

$$c_1: x^2 + y^2 - 8y + 16 = 17 \text{ of } x^2 + y^2 - 8y = 1$$

$$c_2: x^2 - 20x + 100 + y^2 + 4y + 4 = 85 \text{ of } x^2 - 20x + y^2 + 4y = -19$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y = 1 \\ x^2 + y^2 - 20x + 4y = -19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y = 1 \\ x^2 + y^2 - 20x + 4y = -19 \end{cases}$$

Vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $20x - 12y = 20$.

De lijn door de snijpunten is $20x - 12y = 20$ of $5x - 3y = 5$ of

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Substitutie in c_1 geeft $(1 + 3\lambda)^2 + (5\lambda - 4)^2 = 17$ en daaruit volgt

$34\lambda^2 - 34\lambda = 0$ dus $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$. De snijpunten zijn $(1, 0)$ en $(4, 5)$.

109 Bereken exact de snijpunten van de cirkels c_1 en c_2 .

a $c_1: x^2 - 8x + y^2 - 12y - 22 = 0$ en

$c_2: x^2 - 14x + y^2 + 24y + 8 = 0$

b $c_1: (x+3)^2 + (y-12)^2 = 100$ en $c_2: (x-1)^2 + y^2 = 20$

Lijnen en cirkels

Raaklijn aan een cirkel

De raaklijn aan een cirkel in R staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Deze eigenschap kun je gebruiken om een vergelijking van de raaklijn in een gegeven punt van een cirkel te vinden.

Voorbeeld

Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$ en punt $P(2, 3)$ op de cirkel. Geef een vergelijking van de raaklijn in P aan cirkel c .

Oplossing

Het middelpunt M van de cirkel is $(-3, 1)$. De lijn MP heeft richtingscoëfficiënt $\frac{3-1}{2-(-3)} = \frac{2}{5}$.

De raaklijn in P heeft richtingscoëfficiënt $-2\frac{1}{2}$, want $\frac{2}{5} \cdot -2\frac{1}{2} = -1$.

$x = 2$ en $y = 3$ invullen bij $y = -2\frac{1}{2}x + b$ geeft $3 = -2\frac{1}{2} \times 2 + b$ ofwel $b = 8$.

Een vergelijking van de raaklijn is $y = -2\frac{1}{2}x + 8$.

Om te controleren of een gegeven lijn een gegeven cirkel raakt, kun je gebruikmaken van de eigenschap dat een kwadratische vergelijking één oplossing heeft als de discriminant $D = b^2 - 4ac$ gelijk is aan 0.

Voorbeeld

Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 45 = 0$ en de lijn $l: y = ax$. Bereken exact voor welke waarden van a lijn l cirkel c raakt.

Oplossing

$$x^2 + (ax)^2 - 4x - 8ax + 45 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (-8a - 4)x + 45 = 0$$

$$D = (-8a - 4)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 45 = -116a^2 + 224a + 16$$

$$D = 0 \text{ als } -116a^2 + 224a + 16 = 0$$

De abc -formule geeft vervolgens $a = 2$ of $a = -\frac{2}{29}$.

- 110** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan c in het punt P op de cirkel.

a $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ en $P(-1, 2)$

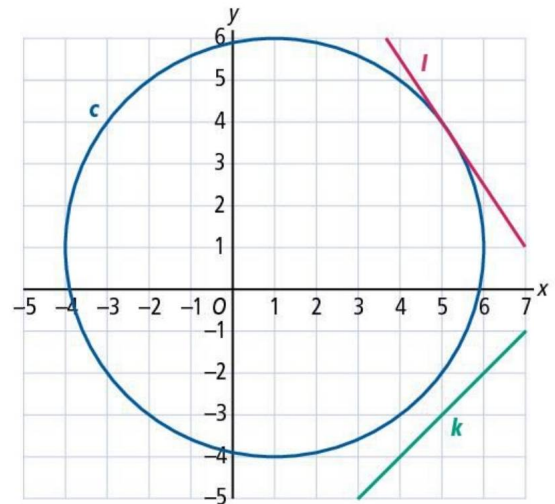
b $c: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$ en $P(5, 5)$

- 111** Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$ en lijn l met vergelijking $y = ax$. Bereken exact de waarden van a waarvoor lijn l cirkel c raakt.

- 112** Gegeven is cirkel c met vergelijking $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ en lijn l met vergelijking $3x + 2y = 23$. De lijn lijkt de cirkel te raken.

Ga met een berekening na of lijn l cirkel c raakt of snijdt of dat l en c geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.

- 113** In de tekening van opdracht 112 is ook lijn k met vergelijking $x - y = 8$ getekend. Cirkel c wordt vergroot zodat de vergrote cirkel de lijn k raakt. Het middelpunt van de cirkel verandert daarbij niet. Bereken exact de straal van de vergrote cirkel.



- 114** Gegeven is cirkel c_1 met middelpunt $M(5, 3)$ en straal $\sqrt{52}$.
- Stel een vergelijking van c_1 op.
 - Vanuit het punt $P(-5, 1)$ worden de raaklijnen aan c_1 getekend.
Leg uit waarom de raakpunten A en B op de cirkel c_2 met middellijn PM liggen.
 - Stel een vergelijking op van cirkel c_2 .
 - Bereken de coördinaten van de punten A en B en geef een vergelijking van elk van de twee raaklijnen.

Om vectorvoorstellingen op te stellen van de raaklijnen aan een cirkel vanuit een punt P buiten de cirkel, neem je als vectorvoorstelling voor de raaklijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ en ga je met een schets na of een van de raaklijnen verticaal is. Vervolgens substitueer je $x = a + \lambda$ en $y = b + \lambda m$ in de vergelijking van de cirkel en herleid je het resultaat op 0. Met behulp van de discriminant stel je vast voor welke waarden van m de vergelijking één oplossing heeft.

Voorbeeld

Stel vectorvoorstellingen op van de raaklijnen vanuit $P(6, 13)$ aan $c: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

Oplossing

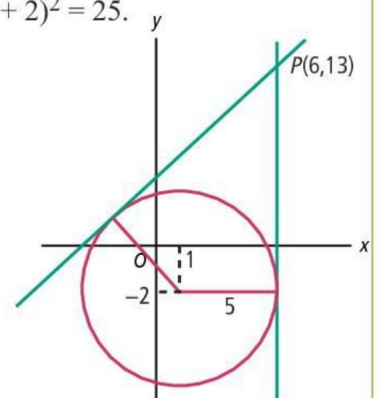
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Uit de schets blijkt dat een van de raaklijnen verticaal is.

$$(5 + \lambda)^2 + (15 + \lambda m)^2 = 25 \text{ geeft } \lambda^2 + 10\lambda + 25 + 225 + 30\lambda m + \lambda^2 m^2 = 25.$$

$$(m^2 + 1)\lambda^2 + (30m + 10)\lambda + 225 = 0$$

$$D = (30m + 10)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 225 = 0 \text{ geeft } m = \frac{4}{3}.$$

De raaklijnen zijn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.



- 115** a Stel vergelijkingen op van de raaklijnen uit punt $O(0, 0)$ aan cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 10$.
 b Stel vergelijkingen op van de raaklijnen uit punt $P(12, -2)$ aan cirkel $c: (x - 1)^2 + y^2 = 25$.

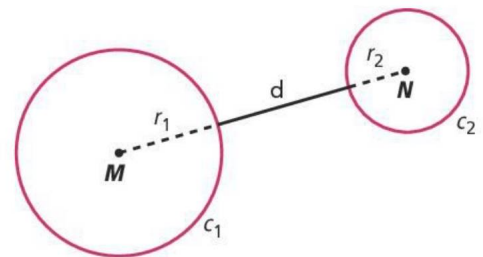
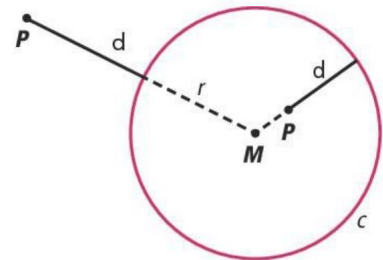
Afstand van een punt tot een cirkel en tussen twee cirkels

De afstand d van een punt P tot een cirkel met middelpunt M en straal r is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van dat punt met de cirkel.

- als $PM > r$, dan ligt P buiten c en is $d(P, c) = PM - r$,
- als $PM = r$, dan ligt P op c en is $d(P, c) = 0$,
- als $PM < r$, dan ligt P binnen c en is $d(P, c) = r - PM$.

De afstand tussen twee cirkels is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die twee cirkels.

- $d(c_1, c_2) = MN - r_1 - r_2$ als alle punten van cirkel c_2 buiten cirkel c_1 liggen;
- $d(c_1, c_2) = r_1 - MN - r_2$ als alle punten van cirkel c_2 binnen cirkel c_1 liggen.



- 116** Bereken exact de afstand van punt Q tot cirkel c .
 a $Q(2, 10)$ en $c: (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20$
 b $Q(9, 8)$ en $c: x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$
- 117** De cirkels c_1 en c_2 zijn gegeven door de vergelijkingen $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ en $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 8$.
 Bereken exact de afstand tussen de cirkels c_1 en c_2 .

Afstand van een lijn tot een cirkel

Voor de afstand tussen een lijn l en een cirkel c stel je eerst het middelpunt M en de straal r van de cirkel vast.

Vervolgens bereken je afstand $d(M, l)$. De gevraagde afstand is gelijk aan $d(M, l) - r$, mits $d(M, l) > r$.

Voorbeeld

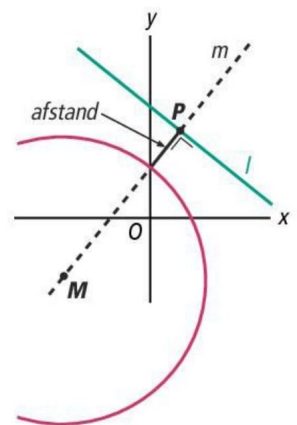
Gegeven is cirkel $c: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ en lijn $l: y = -x + 5$.
 Bereken de afstand tussen lijn l en cirkel c .

Oplossing

Het middelpunt M van de cirkel is $(1, -2)$ en de straal is $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$l: x + y - 5 = 0 \text{ dus } d(M, l) = \frac{|1 + (-2) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

De gevraagde afstand is $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.



- 118** Bereken exact de afstand tussen cirkel c en lijn l .
- a** $c: x^2 + y^2 = 20$ en $l: x + 2y = 15$
- b** $c: (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$ en $l: y = \frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}$
- 119** Gegeven is de cirkel $c: x^2 + 6x + y^2 - 8y - 75 = 0$ en de lijnen l_p met vergelijking $y = 2x + p$.
- a** Voor welke waarde van p gaat de lijn l_p door het middelpunt van de cirkel?
- b** Bereken exact de waarden van p , waarvoor de afstand tussen c en l_p gelijk is aan 5.

Meetkundig of analytisch

Bij sommige meetkundige problemen kun je kiezen tussen een aanpak met redeneren of een aanpak met coördinaten en vectoren.

De volgende twee opdrachten gaan over dezelfde stelling.

- 120** In de cirkel is lijnstuk AB een middellijn en is lijnstuk AC een koorde. De loodlijn uit punt C op middellijn AB snijdt middellijn AB in punt D .

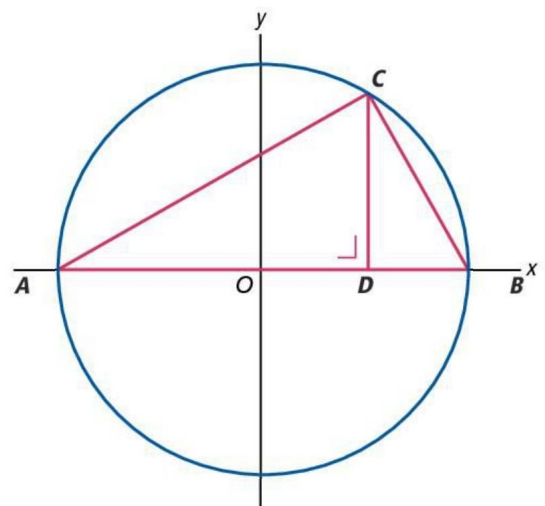
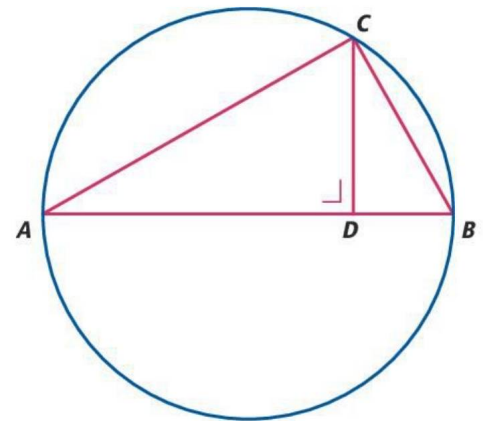
Voor deze situatie geldt de stelling:

Als een koorde en een middellijn in een cirkel een gemeenschappelijk eindpunt hebben, dan is het kwadraat van die koorde gelijk aan het product van de middellijn en de projectie van de koorde op die middellijn

Er moet dus gelden: $AC^2 = AB \cdot AD$.

Je kunt dit bewijzen door gebruik te maken van gelijkvormige driehoeken.

- a** Welke gelijkvormige driehoeken komen voor in de figuur?
- b** Geef het bewijs van de stelling.
- 121** Een aanpak met coördinaten voor het bewijs van de stelling in opdracht 120 is als volgt:
- Ga uit van een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal r . Kies een willekeurig punt $C(p, q)$ op de cirkel.
- a** Welk verband is er tussen p , q en r ?
- b** Druk AB , AD en AC uit in p , q en r .
- c** Gebruik de antwoorden bij de opdrachten a en b om de stelling te bewijzen.



Zwaartepunten

Voor een systeem van puntmassa's $m_1, m_2, \dots, m_n$ die zich bevinden in de punten $A_1, A_2, \dots, A_n$, vind je het zwaartepunt Z door $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n$ waarbij $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Zwaartepunt van een driehoek en van een rechthoek

De zwaartelijnen van een driehoek ABC gaan door één punt: het zwaartepunt. De zwaartelijnen worden door het zwaartepunt Z verdeeld in de verhouding $1 : 2$. Er geldt $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$. Het zwaartepunt van een rechthoek is het snijpunt van de diagonalen.

Zwaartepunt van een veelhoek

Om het zwaartepunt van een veelhoek te vinden, verdeel je de veelhoek in driehoeken en rechthoeken. Vervolgens bepaal je van de driehoeken en rechthoeken de zwaartepunten en de oppervlakten. De zwaartepunten van die driehoeken en rechthoeken kun je dan opvatten als puntmassa's met als massa de oppervlakte van de driehoek of rechthoek. Het zwaartepunt van dit systeem van puntmassa's is het zwaartepunt van de veelhoek.

Voorbeeld

In de punten $A(-2, 5)$, $B(7, 3)$ en $C(1, 7)$ bevinden respectievelijk zich puntmassa's $m_1 = 3$, $m_2 = 5$ en $m_3 = 6$. Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z .

Oplossing

$$\vec{z} = \frac{3}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{14} \\ \frac{72}{14} \end{pmatrix}$$

dus het zwaartepunt is $Z\left(2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{7}\right)$.

Voorbeeld

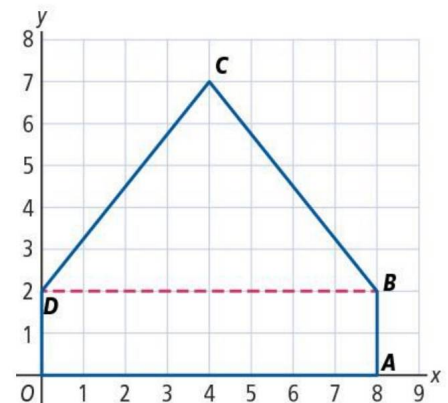
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van vijfhoek $OABCD$ met $A(8, 0)$, $B(8, 2)$, $C(4, 7)$ en $D(0, 2)$.

Oplossing

De lijn BD verdeelt de vijfhoek in een rechthoek en een driehoek. Het zwaartepunt van de rechthoek is punt $E(4, 1)$ en de oppervlakte is 16.

Het zwaartepunt van de driehoek is $F(4, 3\frac{2}{3})$ en de oppervlakte is 20. Voor het zwaartepunt Z van de vijfhoek geldt

$$\vec{z} = \frac{16}{36} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{20}{36} \begin{pmatrix} 4 \\ 3\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\frac{13}{27} \end{pmatrix}, \text{ dus } Z(4, 2\frac{13}{27}).$$



- 122** In een assenstelsel ligt het vierkant $ABCD$ met $A(1, 3)$ en $B(5, 1)$.

a Bereken de coördinaten van C en van D .

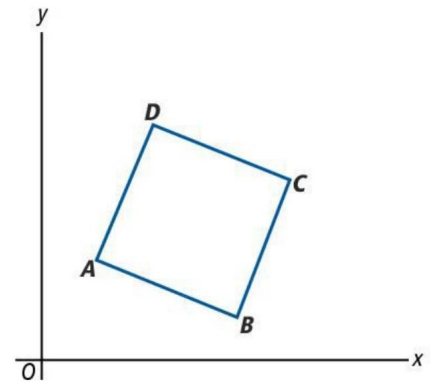
In de punten A , B , C en D bevinden zich de puntmassa's m_1 , m_2 , m_3 en m_4 .

b Stel $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ en $m_4 = 6$.

Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z .

c Bereken m_4 als gegeven is dat $m_1 = m_2 = m_3 = 1$

en het zwaartepunt is $Z(3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$.



- 123** Gegeven zijn de punten $A(5, 2)$, $B(8, -2)$ en $C(11, 9)$.

a Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van $\triangle ABC$.

b De zwaartelijns uit C snijdt zijde AB in punt S .

Bereken exact CS en CZ .

- 124** Gegeven zijn de punten $A(0, 6)$ en $B(4, 0)$.

Verder is gegeven een punt $C(p, 9)$.

Z is het zwaartepunt van driehoek ABC .

a Toon aan dat Z voor elke waarde van p op dezelfde lijn ligt en geef een vergelijking van die lijn.

b Bereken exact de waarden van p waarvoor geldt: $CZ = 6\frac{2}{3}$.

Examenopdrachten

125 Driehoek in cirkel

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2017, tijdvak 2)

In een assenstelsel liggen de punten $A(4, 0)$ en $B(0, -2)$ op de cirkel met vergelijking $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

We bekijken in deze opgave driehoeken ABC met punt C op de grote cirkelboog AB .

Er zijn twee plaatsen van C op de cirkel waarbij driehoek ABC een rechthoekige driehoek is.

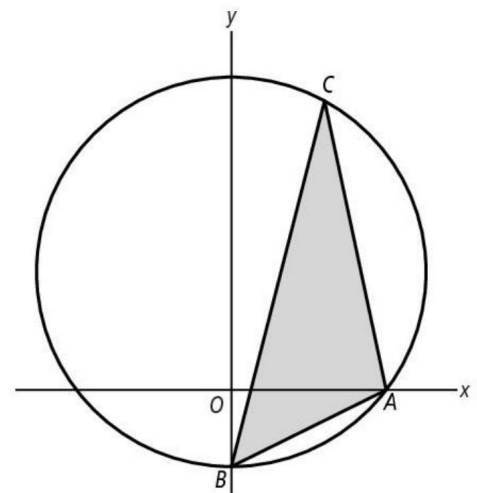
a Bereken exact voor een van deze twee plaatsen de coördinaten van C .

Hint 46

b Voor een bepaalde plaats van C op de cirkel is driehoek ABC een gelijkbenige driehoek met top A , dus met $AB = AC$.

Bereken exact de coördinaten van C waarvoor dat het geval is.

Hint 47



126 Lijnen door de oorsprong en een cirkel

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 1)

Gegeven is cirkel c met middelpunt $(1, 7)$ en straal 5.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van een lijn k door de oorsprong. Lijn k snijdt cirkel c in twee punten. Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

Hint 48

127 Driehoek met bewegend hoekpunt

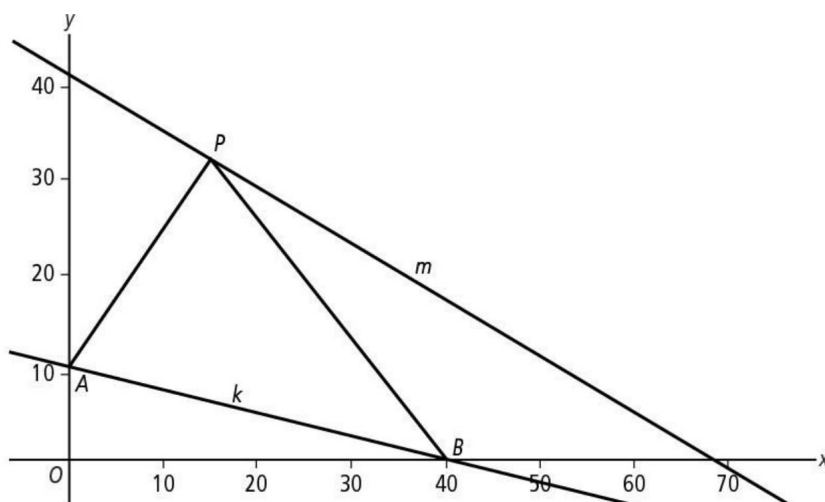
(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 1)

Lijn k gaat door de punten $A(0, 10)$ en $B(40, 0)$.

De baan van een punt P is gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$$

De baan van punt P is de lijn m . Zie de figuur.



Bij bijna elke positie van punt P vormen de punten A , B en P een driehoek ABP . Er is één uitzondering.

a Bereken de coördinaten van P zodat A , B en P niet de hoekpunten van een driehoek vormen.

Hint 49

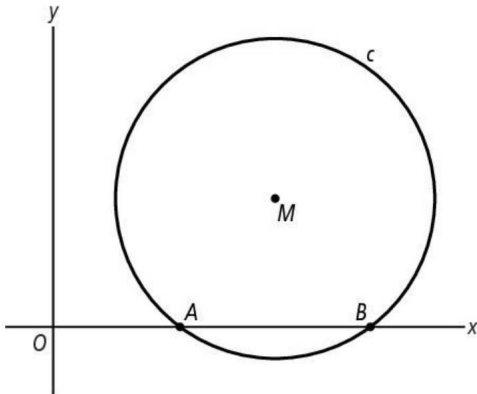
b Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is.

Hint 50

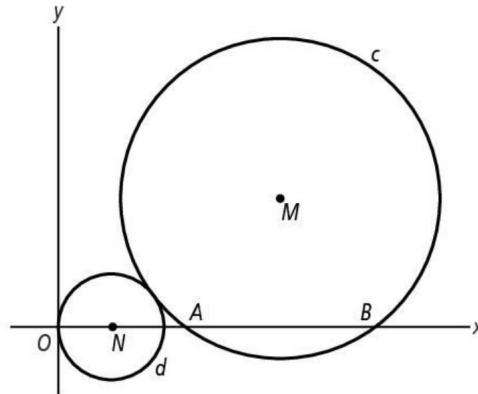
128 Zwaartepunt en rakende cirkels*(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2018, tijdvak 1)*Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(14, 8)$ en straal 10.Deze cirkel snijdt de x -as in de punten A en B met $x_A < x_B$.

Zie figuur 1.

figuur 1



figuur 2



In A bevindt zich een puntmassa met massa 3, in B een puntmassa met massa 1 en in M een puntmassa met massa 2.

- a** Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt van deze drie puntmassa's.
- b** De cirkel d met middelpunt N raakt de y -as in de oorsprong en raakt cirkel c zoals weergegeven in figuur 2. Bereken exact de straal van cirkel d .

Hint 51

Hint 52

129 Zwaartepunt*(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 1)*

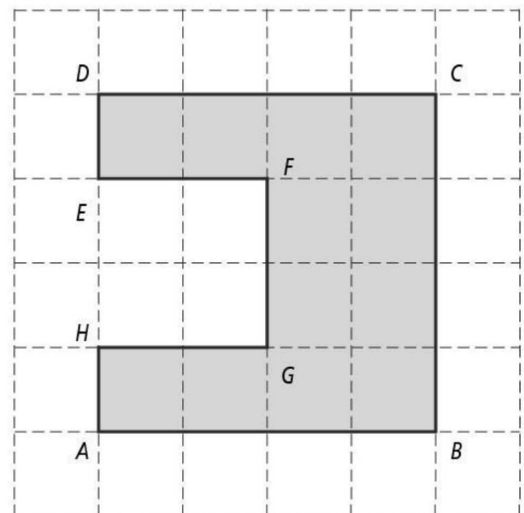
Gegeven is een veelhoek $ABCDEFGH$. Deze veelhoek is ontstaan door uit vierkant $ABCD$ met zijde 4, het vierkant $HGFE$ met zijde 2 weg te laten. Hierbij liggen E en H beide op AD met $AH = DE$.

Om het zwaartepunt van deze veelhoek te vinden, kan de veelhoek bijvoorbeeld worden verdeeld in drie rechthoeken die vervolgens worden opgevat als drie puntmassa's. Het zwaartepunt van deze drie puntmassa's valt dan samen met het zwaartepunt van de veelhoek.

Teken in de figuur met behulp van vectoren de plaats van het zwaartepunt van de veelhoek.

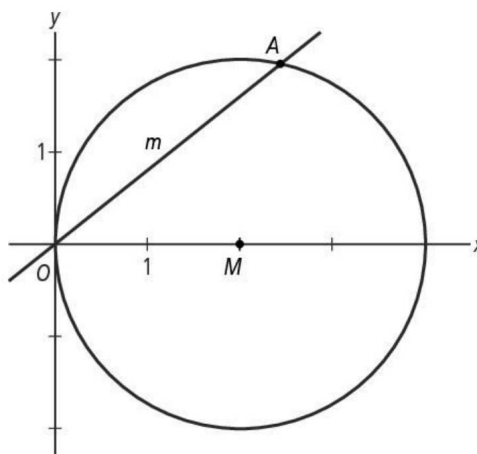
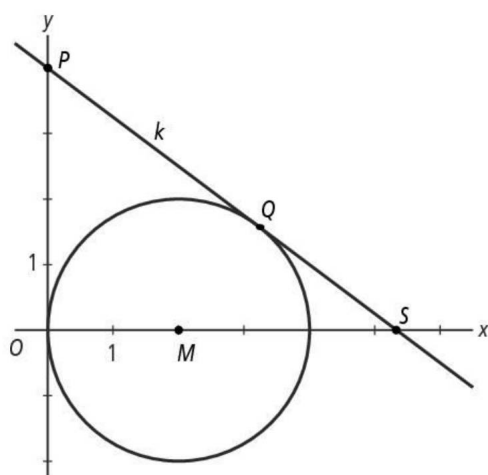
Licht je werkwijze toe.

Hint 53



130 Lijn en cirkel

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2012, tijdvak 1)



Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2, 0)$ en straal 2.
 De niet-verticale lijn k gaat door het punt $P(0, 4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x -as in het punt S .
 Zie de linker figuur.

- a** Bereken exact de x -coördinaat van S .

Hint 54

- b** De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p > 0$ snijdt de cirkel behalve in O in een punt A , zodanig dat $OA = 3$.
 Zie de rechter figuur.
 Bereken exact de waarde van p .

Hint 55

131 Raakcirkel en raaklijnen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2013, tijdvak 2)

Gegeven zijn de cirkel c_1 met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ en de cirkel c_2 met vergelijking $(x - 15)^2 + y^2 = 144$.
 Cirkel c_3 met middelpunt op de positieve y -as raakt de beide cirkels c_1 en c_2 .

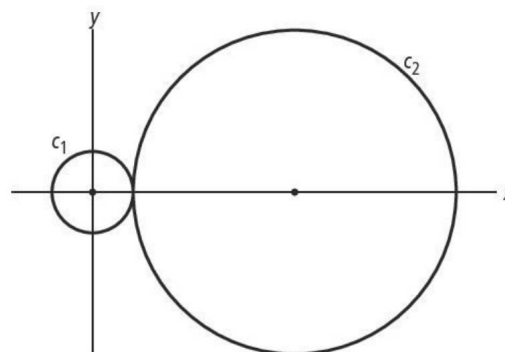
- a** Stel een vergelijking op van c_3 .

Hint 56

De cirkels c_1 en c_2 hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.

- b** Stel van elk van deze gemeenschappelijke raaklijnen een vergelijking op.

Hint 57



Bewegingsvergelijkingen

De beweging van een punt in het platte vlak kan worden

beschreven met bewegingsvergelijkingen van de vorm
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Als f en g beide lineaire functies van t zijn, dan beweegt het punt langs een rechte lijn.

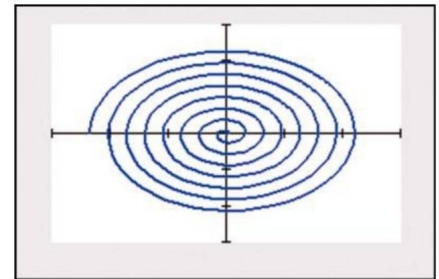
Voor een cirkel gelden de bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = a + r \cdot \cos(pt) \\ y(t) = b + r \cdot \sin(pt) \end{cases}$$

In plaats van de bewegingsvergelijkingen van een bewegend punt wordt ook wel gesproken over de parametervoorstelling van de baan.

- 132** Stel bewegingsvergelijkingen op voor een cirkel met middelpunt $(-3, 5)$ en straal 4.

- 133** De spiraal is de baan van een punt P met bewegingsvergelijkingen
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t \cdot \cos(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}t \cdot \sin(t) \end{cases} \text{ en } 0 \leq t \leq 15\pi.$$

- a** De afstand tussen twee opeenvolgende snijpunten van de baan met de positieve x -as is steeds gelijk. Bereken de exacte waarde van deze afstand.
- b** Voor welke waarde van t doorsnijdt de baan van P de cirkel met middelpunt O en straal 10?



Toppen, snelheid en versnelling

De toppen van de baan van een punt $P(x(t), y(t))$ vind je door na te gaan in welke punten x of y een extreme waarde heeft.

Daartoe bereken je de waarde(n) van t waarvoor $x'(t) = 0$ of $y'(t) = 0$.

Is $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$, dan heeft de baan een horizontale raaklijn.

Is $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$, dan heeft de baan een verticale raaklijn.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ is de snelheidsvector van punt $P(x(t), y(t))$.

$x'(t)$ is de snelheid in de x -richting; $y'(t)$ is de snelheid in de y -richting.

De snelheidsvector $\vec{v}$ raakt in P aan de baan van P .

De (baan)snelheid van P is $v = |\vec{v}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

De baanversnelling van P is gelijk aan $\frac{dv}{dt}$.

Voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen van een

punt P zijn $\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(3t) \end{cases}$ met $t \geq 0$.

Bereken exact de snelheidsvector, de baansnelheid en de baanversnelling op het tijdstip $t = \frac{1}{2}\pi$.

Oplossing

De snelheidsvector is $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 6\cos(3t) \end{pmatrix}$.

De baansnelheid is $|\vec{v}| = \sqrt{9\sin^2(t) + 36\cos^2(3t)}$.

De baanversnelling is

$$v'(t) = \frac{18\sin(t) \cdot \cos(t) - 216\cos(3t) \cdot \sin(3t)}{2\sqrt{9\sin^2(t) + 36\cos^2(3t)}}$$

Als $t = \frac{1}{2}\pi$ geldt $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, de baansnelheid is $\sqrt{9} = 3$ en de baanversnelling is 0.

134 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(3t) \\ y(t) = -3\sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan met de y -as.
- In het eerste kwadrant ligt een punt op de baan, waar de raaklijn verticaal is. Bereken exact de coördinaten van dit punt.
- Bereken exact de waarden van t waarvoor de baan de lijn met vergelijking $y = x$ snijdt.

135 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

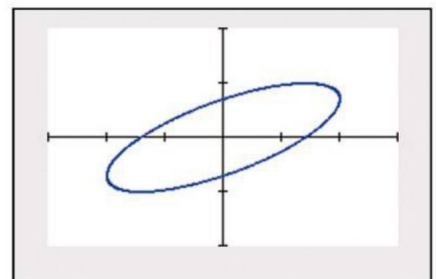
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases} \text{ met } t \geq 0.$$

Bereken exact de snelheidsvector, de baansnelheid en de baanversnelling op het tijdstip $t = 3$.

136 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Bereken exact de snelheidsvector en de baansnelheid in het punt waar de baan van P de positieve y -as snijdt.
- Bereken exact de baanversnelling op het tijdstip $t = \pi$.



- 137** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a** Bereken de hoek die de snelheidsvector op het tijdstip $t = \frac{1}{6}\pi$ maakt met de positieve x -as. Rond je antwoord af op hele graden.
- b** Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling op het tijdstip $t = \frac{1}{6}\pi$.
- c** Bereken exact de maximale waarde van de baansnelheid.
- d** Bereken exact de waarde(n) van t waarvoor geldt $OP = \sqrt{12\frac{1}{2}}$.

Examenopdrachten

- 138** **Bewegend punt**

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2019, tijdvak 2)

De beweging van een punt P wordt beschreven door de

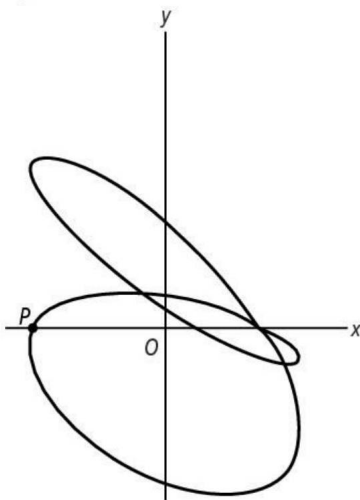
bewegingsvergelijkingen: $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - \sin(2t) \\ y(t) = \sin(2t) - \sin(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$

Op verschillende tijdstippen bevindt P zich op de x -as. Op

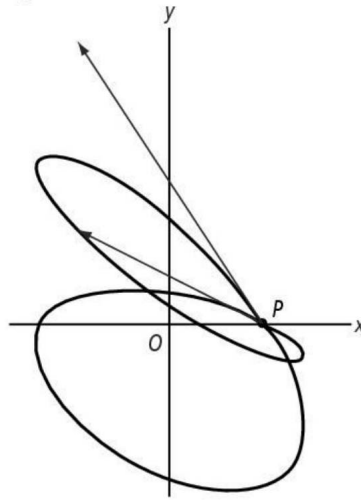
een van die tijdstippen bevindt P zich links van de y -as.

Zie figuur 1, waarin de positie van P op dit tijdstip is aangegeven.

figuur 1



figuur 2



- a** Bereken exact de x -coördinaat van P op dit tijdstip.

Hint 58

Op de tijdstippen $t = 0$ en $t = \pi$ bevindt P zich in hetzelfde punt. Dit punt is met een stip aangegeven in figuur 2.

Ook zijn de snelheidsvector van P op tijdstip $t = 0$ en de snelheidsvector van P op tijdstip $t = \pi$ aangegeven.

- b** Bereken algebraïsch de hoek in graden tussen deze twee snelheidsvectoren. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Hint 59

139 Scheve parabolen

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2017, tijdvak 2)

Voor $a > 0$ is de baan van het punt P gegeven door de

bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = at^2 + t + 1 \\ y(t) = at^2 - t + 1 \end{cases}$ waarbij t de tijd voorstelt.

Neem $a = 3$. Dan zijn de bewegingsvergelijkingen van P dus:

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 + t + 1 \\ y(t) = 3t^2 - t + 1 \end{cases}$$

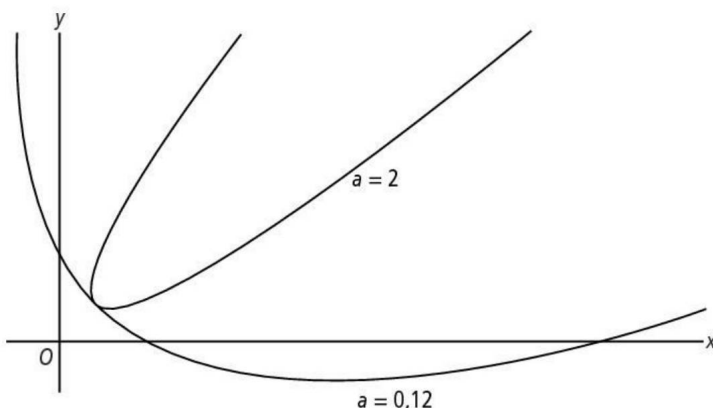
Voor $a = 3$ is de snelheid van P op zeker moment minimaal.

a Bereken exact deze minimale snelheid.

Hint 60

De baan van P is voor elke waarde van $a > 0$ een scheve parabool.

In de figuur is voor twee waarden van a de baan van P weergegeven.



Voor $a = 0,12$ bevindt P zich op twee tijdstippen op de x -as.

Voor $a = 2$ is er geen enkel tijdstip waarop P zich op de x -as bevindt. Zie de figuur.

Er is één waarde van a waarvoor P zich op precies één tijdstip op de x -as bevindt.

b Bereken exact deze waarde van a .

Hint 61

140 Bewegend punt

(Ontleend aan CE vwo wiskunde B 2018, tijdvak 1)

De beweging van een punt P wordt gegeven door de

bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = (1 + t)^2 \end{cases}$

In de figuur is de baan van P weergegeven.

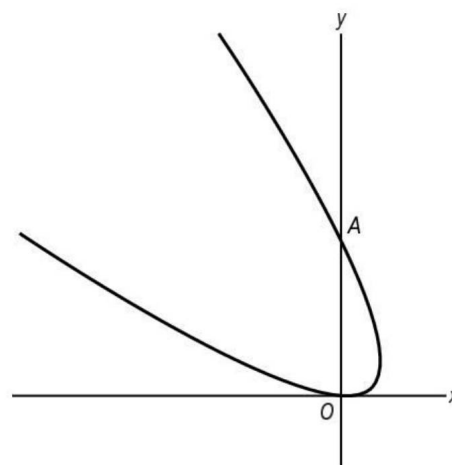
De baan van P snijdt de y -as in de oorsprong O en in punt A .

a Bereken exact de snelheid waarmee P door punt A gaat.

Hint 62

b Voor elke waarde van t bevindt P zich op de kromme met vergelijking $(x + y)^2 = 4y$.
 Bewijs dit.

Hint 63



141 Een achtbaan*(Ontleend aan CE vwo wiskunde B pilot 2017, tijdvak 1)*De baan van een punt P wordt gegeven door de

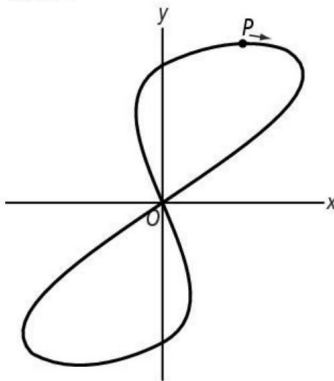
$$\text{bewegingsvergelijkingen } \begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(t) \end{cases} \text{ met } t \text{ in}$$

seconden en x en y in meter.Als t loopt van 0 tot 2π , doorloopt P de baan precies één keer.In figuur 1 is deze baan weergegeven. Ook is te zien waar P zich bevindt op $t = 0$ en in welke richting P zich dan beweegt.

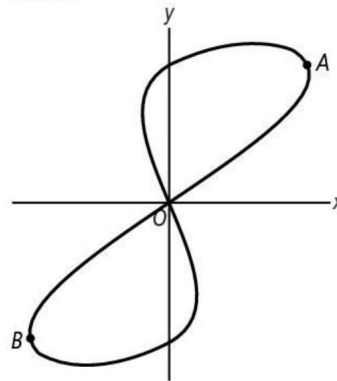
- a** Bereken met behulp van differentiëren de maximale snelheid van het punt P in meter per seconde. Rond je antwoord af op één decimaal.

Hint 64

figuur 1



figuur 2



Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ zijn er vier tijdstippen waarop de x -coördinaat en de y -coördinaat van P aan elkaar gelijk zijn. Op deze tijdstippen bevindt P zich achtereenvolgens in de punten A , O , B en O . Zie figuur 2.

- b** Bereken exact hoeveel seconden de beweging van A naar B duurt.

Hint 65

Een punt Q maakt dezelfde beweging als P , maar Q loopt π seconden vóór op P .

De bewegingsvergelijkingen van Q zijn dan:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) \\ y(t) = 2\cos(t + \pi) \end{cases}$$

Als $t = \frac{1}{2}\pi$ en als $t = \frac{3}{2}\pi$, vallen P en Q samen. Op alle andere tijdstippen is er sprake van een lijnstuk PQ .

- c** Bewijs dat de helling van lijnstuk PQ onafhankelijk van t is.

Hint 66

Hints bij de examenopdrachten

- 1 Welke eis stel je aan de teller en de noemer als je een perforatie moet vinden?
- 2 Stel bijvoorbeeld het hoekpunt rechtsonder is $(a, 0)$. Druk de zijden van het vierkant uit in a .
- 3 Stel een functievoorschrift voor de inverse van f op en herleid het voorschrift tot één breuk.
- 4 Los op $f(x) = 0$.
- 5 De verticale afstand is $f(a) - g(a)$ of $g(a) - f(a)$.
- 6 Uit $h_7 = \frac{1}{5} \cdot h_0$ volgt $a^7 = \frac{1}{5}$.
- 7 Met $T_1 = 1,11$ bereken je h_1 en met $T_4 = 0,68$ bereken je h_4 . Met h_1 en h_4 kun je h_0 berekenen.
- 8 De vergelijking $p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4}$ moet één oplossing hebben.
Je kunt de wortel isoleren en daarna kwadrateren.
Je kunt een substitutie $q = \sqrt{x-p}$ gebruiken.
Je kunt ook de afgeleide gebruiken.
- 9 Wat zijn de coördinaten van het randpunt van de grafiek van f_p ?
- 10 Hoe ziet het functievoorschrift er uit voor de waarden van x links van het punt A ?
- 11 Druk de coördinaten van A en B uit in p . Druk vervolgens OA en AB uit in p en los op $OA = AB$.
- 12 Welke regel volgt uit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$?
- 13 Stel de lijn k is de grafiek van een lineaire functie $n(x)$. Welke eis geldt er nu voor $h'(0)$ en $n'(0)$?
- 14 Stel een vergelijking op van de raaklijn in het snijpunt met de x -as en vul daar de coördinaten van de perforatie in.
- 15 Druk breedte en hoogte van de rechthoek uit in p en bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van p waarvoor de oppervlakte maximaal is.
- 16 De lengte van het verbindingslijnstuk is het verschil tussen $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.
- 17 Je hebt een vergelijking van de raaklijn nodig. Hoe bereken je de coördinaten van A ?

- 18 Welke vergelijking moet je oplossen?
- 19 Welke twee integralen moet je berekenen?
- 20 Wat kun je zeggen van de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V én W om de y -as te wentelen?
- 21 Druk de oppervlakte van het linker gebied uit in a en ook de oppervlakte van het rechter gebied.
- 22 Welke limiet moet je berekenen om een vergelijking van de horizontale asymptoot te vinden?
- 23 Differentieer $f(x)$.
- 24 Wat is de primitieve van g ?
- 25 Druk de coördinaten van de top uit in a .
- 26 Differentieer $F_a(x)$.
- 27 Bereken eerst de x -coördinaat van het snijpunt.
- 28 Los exact op $f'(x) = 0$.
- 29 Druk de oppervlakte van het gebied in figuur 2 uit in machten van 2. Daarna mag je de rekenmachine gebruiken.
- 30 Hoe kun je hier het inproduct gebruiken?
- 31 Maak gebruik van de formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
- 32 Aan welke eis moet een breuk voldoen bij een perforatie?
- 33 Gebruik het inproduct of de richtingscoëfficiënten.
- 34 Differentieer en denk aan de verdubbelingsformules.
- 35 Wat weet je van de x -coördinaten van de eindpunten van het lijnstuk?
- 36 Welke van de verdubbelingsformules kun je hier toepassen?
- 37 Los exact op $\sin(2x) = -\sin(x) = \sin(-x)$.
- 38 Differentieer f_a en los a op uit $f'_a\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 0$. Je mag de oplossing benaderen met de rekenmachine.
- 39 Stel de integraal op en laat zien dat de uitkomst onafhankelijk is van a .

- 40** Teken een cirkel met straal 6 cm met het eindpunt van $\vec{w}_z$ als middelpunt. Een snijpunt van deze cirkel met de kustlijn is het eindpunt van $\vec{w}_d$.
- 41** Bereken de kentallen van $\vec{w}_z$ en $\vec{w}_d$ met behulp van de gegeven hoeken. Hoe bereken je met deze kentallen de kentallen van $\vec{w}_r$?
- 42** Wat heb je nodig om de coördinaten van het snijpunt F van de cirkel en de lijn AC te berekenen?
- 43** Waarom is het voldoende om aan te tonen dat de vectoren $\vec{MB}$ en $\vec{MF}$ loodrecht op elkaar staan, evenals de vectoren $\vec{MG}$ en $\vec{MA}$?
- 44** Gebruik dat $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$ en dat $\vec{OA} \perp \vec{AB}$.
- 45** Gebruik dat $\vec{ED} = \vec{OD} - \vec{OE}$ en gebruik het inproduct.
- 46** Volgens welke stelling is in dit geval lijnstuk AC of lijnstuk BC een middellijn? Gebruik vervolgens het middelpunt van de cirkel.
- 47** Als $AB = AC$ dan ligt punt C ook nog op een andere cirkel. Welke? Stel van deze cirkel een vergelijking op en snijdt deze cirkel met de gegeven cirkel.
- 48** Stel een vergelijking van c op en vul daar $x = t$ en $y = 2t$ in.
- 49** Wat geldt er voor drie punten als ze niet de hoekpunten van een driehoek vormen? Waar ligt punt P dus?
- 50** Druk $\vec{AP}$ en $\vec{BP}$ uit in t . Bereken voor welke waarde van t geldt $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ en ga voor die waarde van t na of $AP = BP$.
- 51** Stel een vergelijking van c op en bereken de coördinaten van de snijpunten van c met de x -as. Gebruik vervolgens de formule voor het zwaartepunt van een systeem van puntmassa's.
- 52** Noem $P(14, 0)$ en r de straal van d . Welke stelling geldt er voor de rechthoekige driehoek OPM ?
- 53** Verdeel de veelhoek in drie rechthoeken met gelijke oppervlakte. Waar ligt het zwaartepunt van een rechthoek?
- 54** De afstand van M tot de lijn k moet gelijk zijn aan de straal van de cirkel. Stel de x -coördinaat van punt S gelijk aan p , stel een vergelijking op van lijn k en gebruik de afstandsformule.
- 55** De projectie van M op de lijn door O en A is M' . Dan is M' het midden van OA en OMM' is een rechthoekige driehoek. Bereken MM' en gebruik de afstandsformule voor de afstand van M tot m .

- 56** Stel het middelpunt van de nieuwe cirkel is $N(0, y)$ en van de oorspronkelijke cirkels M_1 respectievelijk M_2 .
Dan moet gelden: $d(N, c_1) = d(N, c_2)$ en dus $NM_1 - r_1 = NM_2 - r_2$.
- 57** Eén raaklijn is verticaal. Gebruik voor de andere raaklijnen $y = ax + b$ dat de afstanden van de middelpunten van de cirkels tot de raaklijn gelijk zijn aan de straal. Dat geeft twee vergelijkingen in a en b .
- 58** Los op $\sin(2t) - \sin(t) = 0$ en kies de oplossing waarbij P links van de y -as ligt.
- 59** Bepaal $x'(t)$ en $y'(t)$ en daarmee de snelheidsvectoren voor $t = 0$ en $t = \pi$. Met welke formule bereken je de hoek tussen twee vectoren?
- 60** Bepaal $x'(t)$ en $y'(t)$ en daarmee het functievoorschrift voor de baansnelheid $v(t)$. Hoe bereken je vervolgens de minimale snelheid?
- 61** De vergelijking $at^2 - t + 1 = 0$ heeft in dit geval precies één oplossing. Hoe gebruik je dan de discriminant?
- 62** Bereken welke waarde van t bij punt A hoort. Bepaal $x'(t)$ en $y'(t)$ en vul de gevonden waarde van t in. Bereken met de uitkomsten de baansnelheid.
- 63** Vul voor x en y de gegeven formules in en laat zien dat de verkregen vergelijking klopt voor iedere waarde van t .
- 64** Bepaal $x'(t)$ en $y'(t)$ en daarmee het functievoorschrift voor de baansnelheid $v(t)$. Waarom mag je in dit geval je rekenmachine gebruiken om het maximum van $v(t)$ te berekenen?
- 65** Los de vergelijking $x(t) = y(t)$ op en bepaal welke van de oplossingen bij de punten A en B horen. Bereken het verschil tussen deze oplossingen.
- 66** Druk de helling van lijnstuk PQ uit in t en gebruik de goniometrische formules om de verkregen formule te vereenvoudigen tot een constante waarde.

Formuleblad

De volgende lijst formules wordt afgedrukt op bladzijde 2 van het examen.

Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

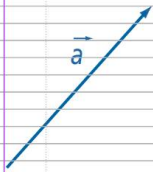
$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

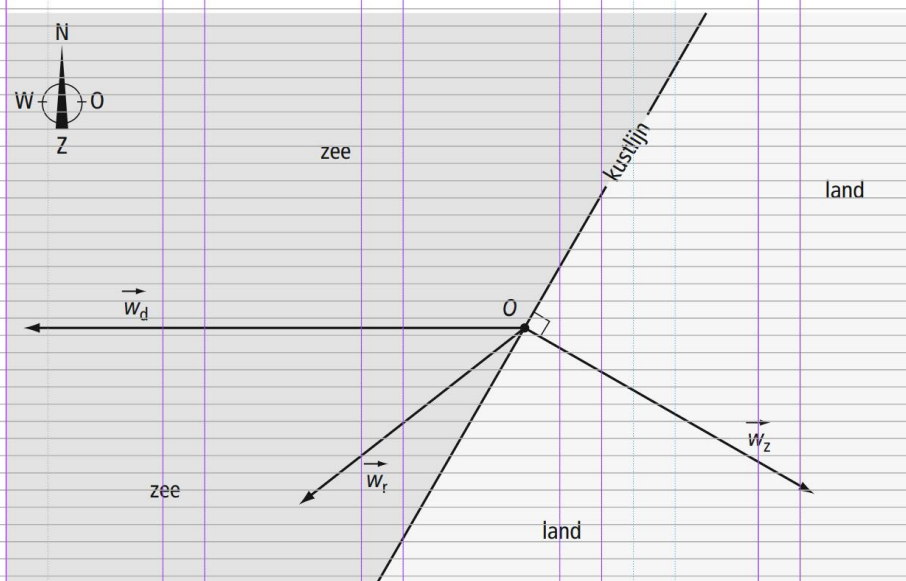
Werkbladen | Examenvoorbereiding

92

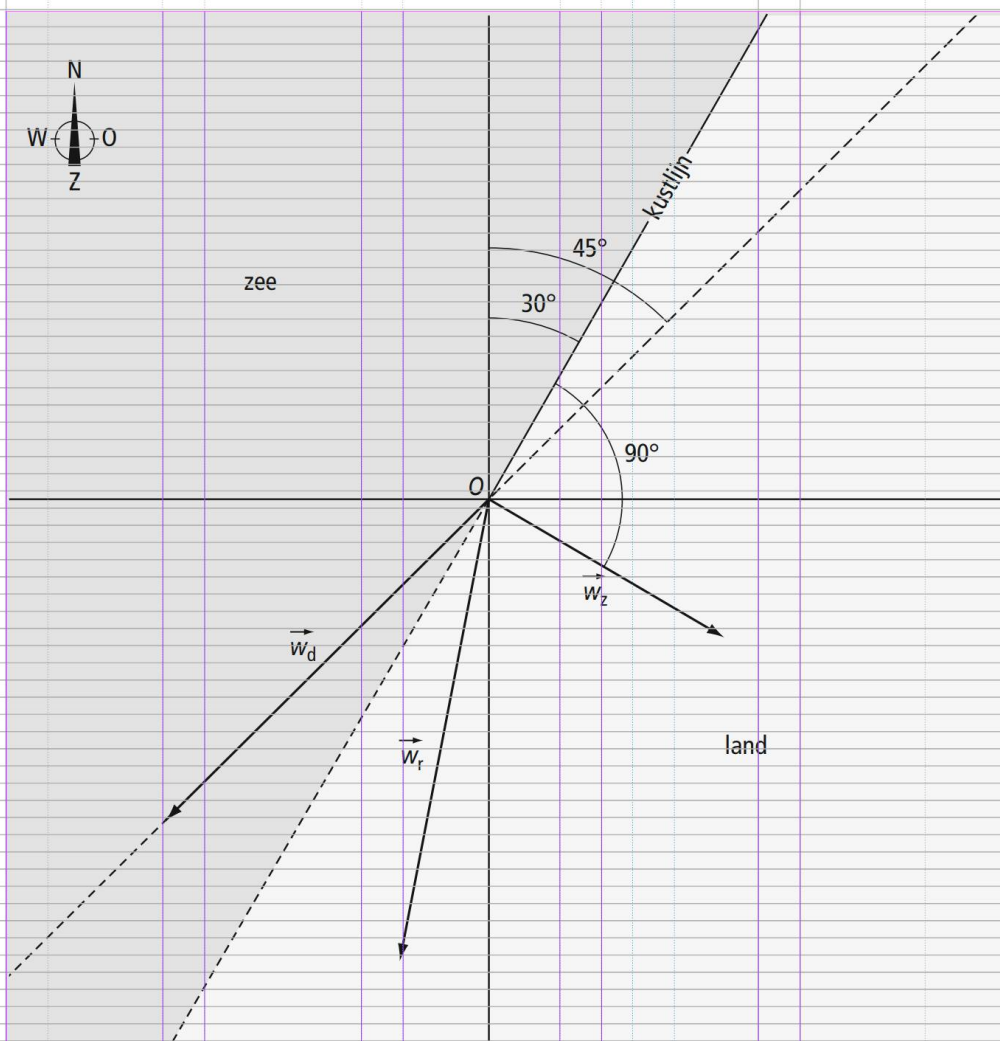


(orphans)

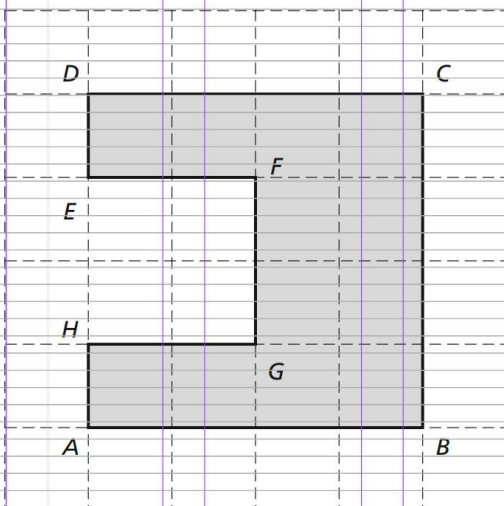
94a



94b



129



(orphans)

Als in een examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hieraan in deze lijst is gegeven.

Algebraïsch/op algebraïsche wijze

Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.

Exact/op exacte wijze

Zonder gebruik te maken van specifieke opties* van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden.

*Als bijvoorbeeld gevraagd wordt de ongelijkheid $\frac{5}{x} < x$ exact op te lossen, wordt verwacht dat de gelijkheid $\frac{5}{x} = x$ exact wordt opgelost.
De tekens in de oplossing van de ongelijkheid hoeven niet verantwoord te worden.*

Aantonen dat/laten zien dat

Het geven van een redeneringen/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.

Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid

Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.

Bepalen

Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen.
Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Beredeneren, uitleggen

Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.

Berekenen

Het gevraagde uitrekenen.
Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

Bewijzen (dat)

Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren doormiddel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van de specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Noemen (aangeven wat, welke, wanneer, hoeveel)	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist, tenzij anders is aangegeven.
Onderzoeken of	Het geven van een redeneringen/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
Tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.