

Integreren 12

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In voorgaande hoofdstukken heb je geleerd hoe je functies kunt differentiëren.

In dit hoofdstuk leer je hoe je functies kunt vinden waarvan de afgeleide functie gegeven is. Zulke functies kun je gebruiken om de oppervlakte te berekenen van een gebied dat wordt begrensd door grafieken.

De technieken die in dit hoofdstuk worden besproken ga je in volgende hoofdstukken ook gebruiken bij andere toepassingen, zoals het berekenen van inhoud.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 51
- *Formules manipuleren* opdracht 49
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 18

Voorkennis

V1 Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(x) = a \cdot x^n$.

a $f(x) = \frac{1}{x^3}$

c $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$

b $f(x) = \frac{4}{5x}$

d $f(x) = \frac{1}{3x\sqrt{x}}$

V2 Schrijf de functievoorschriften voor $x \neq 0$ als som van uitdrukkingen van de vorm $a \cdot x^n$.

a $f(x) = \frac{3x^4 - 5x^2 + 2x}{x}$

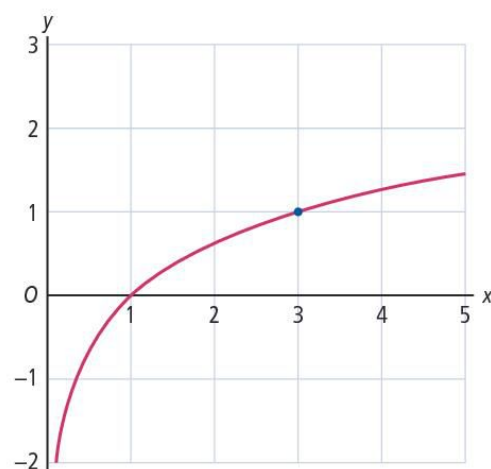
c $h(x) = \frac{3(2x - 3)^2}{4x}$

b $g(x) = \frac{x^4 + 8x^3 - 5x^2}{2x^3}$

d $k(x) = \frac{2(x + 5)^3}{x^2}$

V3 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = {}^3\log(x)$.
Je kunt de helling in een punt van deze grafiek benaderen door $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over een klein interval te berekenen.

- a** Geef een benadering van de helling in het punt (3, 1) in vier decimalen door $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over het interval [3; 3,1] te berekenen.
- b** Herhaal opdracht a maar nu over de intervallen [3; 3,01] en [3; 3,001].
- c** Geef de helling in (3, 1) in twee decimalen.



Theorie

Als in het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de waarde van Δx naar 0 nadert, ($\Delta x \rightarrow 0$) dan gaat het differentiequotiënt over in het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$, de exacte waarde van de helling in een punt van de grafiek.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \log(x)$.

Bereken in vier decimalen $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$.

Oplossing

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \Delta x) - \log(1)}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$\Delta x = 0,1$ geeft 0,41392685...

$\Delta x = 0,0001$ geeft 0,43427276...

Zo doorgaand vind je $\frac{dy}{dx} \approx 0,4343$.

V4 Bereken van elke functie het differentiaalquotiënt voor $x = 4$.
Neem $\Delta x = 0,0001$ en geef het antwoord in vier decimalen.

a $f(x) = \log(x)$

c $h(x) = x\sqrt{2x+1}$

b $g(x) = 1,2^x$

d $k(x) = \frac{x}{x+1}$

V5 Differentieer.

a $f(x) = 3(2x-5)^4$

c $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3-4x}$

b $g(x) = \frac{3}{5x+1}$

d $k(x) = \frac{4}{3\sqrt{5x+6}}$

V6 Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x^3 - 1)^2$ en
 $g(x) = 4(x^6 - x^3)$.

a Differentieer f en g .

b Laat zien dat f en g dezelfde afgeleide hebben.

c Waarom moet gelden dat $g(x) = f(x) + c$ voor een constante c ?

d Bereken de waarde van c .

V7 Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .

a $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$

b $f(x) = \frac{4}{x+3}$ en $g(x) = x$

c $f(x) = x^2 + 4$ en $g(x) = x + 6$

d $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ en $g(x) = x^2 - 2$

12.1 Oppervlakten benaderen

Je leert

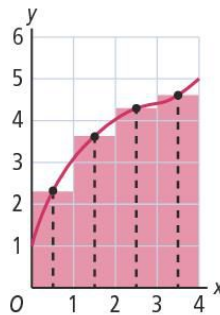
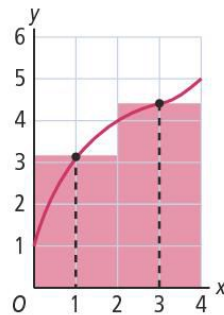
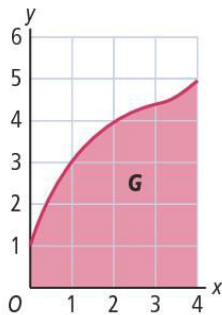
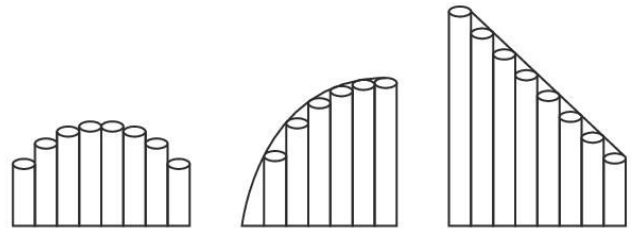
- wat een Riemann-som is
- hoe je de oppervlakte van een gebied onder een grafiek kunt benaderen

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—4—5—06—7—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—8—U1

Nicole Oresme (1323 – 1382), bisschop van Lisieux, bestudeerde het verband tussen de afgelegde weg en de snelheid van een voorwerp. Als een van de eerste wiskundigen zette hij de tijd af op een horizontale lijn en richtte hij in elk punt een loodlijn op waarvan de lengte correspondeerde met de snelheid op dat moment.

- Wat is de natuurkundige betekenis van de oppervlakte van de getekende figuren?



- 1 Het gebied G wordt ingesloten door de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 3x + 1, \text{ de } x\text{-as, de } y\text{-as en de lijn } x = 4.$$

- Bereken exact de totale oppervlakte van de twee gekleurde rechthoeken in de tweede tekening.
- Bereken exact de totale oppervlakte van de vier gekleurde rechthoeken in de derde tekening.
- Welke benadering voor de oppervlakte van het gebied G is beter, het antwoord van opdracht a of het antwoord van opdracht b?
- Hoe zou je de oppervlakte van het gebied G nog beter kunnen benaderen?

Theorie

Gegeven is de functie f op het interval $[a, b]$.

$[a, b]$ is verdeeld in n gelijke deelintervallen met breedte Δx .

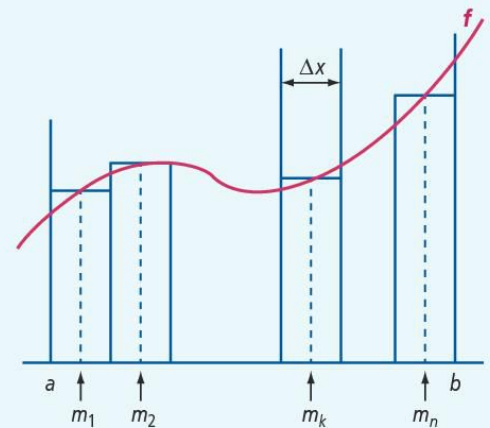
$m_1, m_2, \dots, m_n$ zijn de middens van de deelintervallen.

$f(m_1) \cdot \Delta x + f(m_2) \cdot \Delta x + \dots + f(m_n) \cdot \Delta x$ heet een

Riemann-som van de functie f op het interval $[a, b]$.

Voor $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$ is de Riemann-som een benadering van de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$.

Bernard Riemann (1826-1866) was een Duitse wiskundige.

**Voorbeeld**

Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \frac{1}{8}x^2$.

Bereken een Riemann-som van f op het interval $[0, 8]$ met vier deelintervallen.

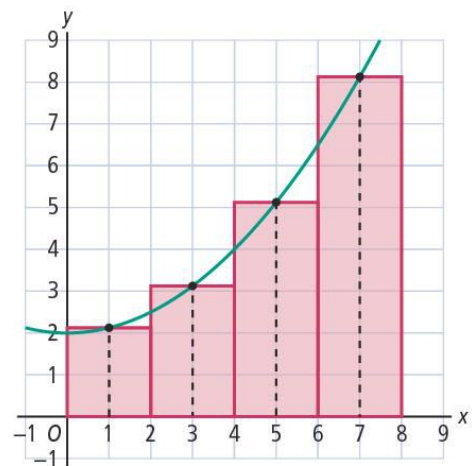
Oplossing

$$\Delta x = \frac{8}{4} = 2; m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 5, m_4 = 7.$$

De Riemann-som wordt:

$$f(1) \cdot 2 + f(3) \cdot 2 + f(5) \cdot 2 + f(7) \cdot 2 =$$

$$(2\frac{1}{8} + 3\frac{1}{8} + 5\frac{1}{8} + 8\frac{1}{8}) \cdot 2 = 37.$$

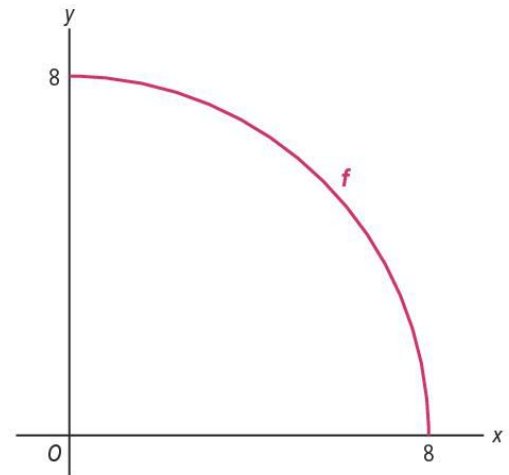


- 2** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x$. Het gebied G wordt begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 5$. Het interval $[1, 5]$ wordt verdeeld in vier gelijke deelintervallen.
- Hoe groot is de lengte Δx van een deelinterval?
 - Wat is het midden van het eerste deelinterval?
En van het laatste deelinterval?
 - Benader de oppervlakte van G met een Riemann-som van f op het interval $[1, 5]$ met vier deelintervallen.
- 3** Bereken een Riemann-som van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ op het interval $[0, 10]$ met vijf deelintervallen.
Rond je antwoord af op één decimaal.

12.1 Oppervlakten benaderen

- 4 Een gebied G wordt begrensd door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 9$.
- Benader de oppervlakte van G met een Riemann-som van f op het interval $[1, 9]$ met vier deelintervallen.
 - Benader de oppervlakte van G met een Riemann-som van f op het interval $[1, 9]$ met acht deelintervallen.
 - Teken G en bereken de oppervlakte meetkundig.

- 5 De getekende kwart cirkel is een deel van de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$.
- Bereken de oppervlakte van de kwart cirkel exact met behulp van de formule *oppervlakte cirkel* $= \pi r^2$.
 - Benader de oppervlakte van de kwart cirkel met een Riemann-som van f op het interval $[0, 8]$ met vier deelintervallen.
 - Is de afwijking van het antwoord op opdracht b meer of minder dan 2%?



Ondersteunende route → maak opdracht O6

- 6 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{6}{2x - 1}$
- H** Benader met een Riemann-som de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x -as op het interval $[2, 7]$. Kies $\Delta x = 1$.

- 7 Een gebied G wordt begrensd door de x -as, de grafiek van de functie $f(x) = 2^x$ en de lijnen $x = -2$ en $x = 2$. Benader de oppervlakte van G met een Riemann-som van f op het interval $[-2, 2]$ met vier deelintervallen. Rond af op één decimaal.

- 8 Verdeel je een interval in een groot aantal deelintervallen, dan bereken je een Riemann-som met je rekenmachine.
- Bereken een Riemann-som van de functie $f(x) = x^2 + 2x + 3$ op het interval $[-24, 6]$ met twintig deelintervallen.
 - Voer opdracht a nogmaals uit, maar nu met honderd deelintervallen.

→ Instructie rekenmachine | Riemann-som

Uitdagende route → maak opdracht U1

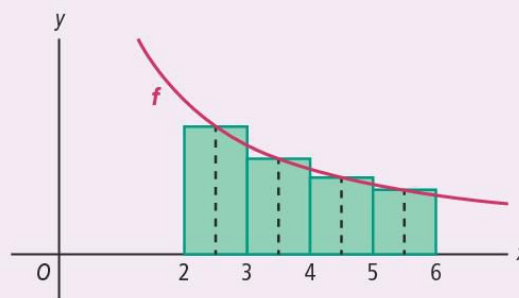
Ondersteunende opdrachten

06 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{12}{2x+1}$

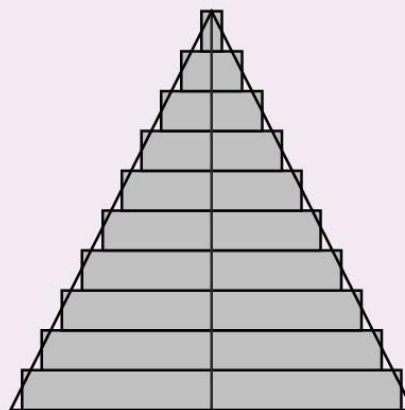
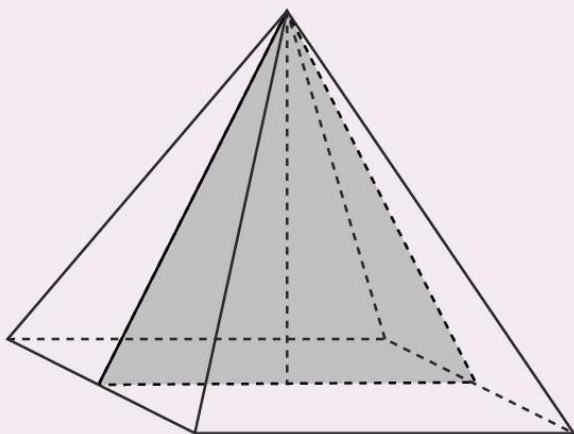
Je gaat de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de x -as op het interval $[2, 6]$ benaderen door de oppervlakte van de vier rechthoeken te berekenen.

- Hoe breed is elke rechthoek?
- Vul in: de hoogte van de eerste rechthoek is $f(\dots)$.
- Bereken de hoogte van elke rechthoek.
- Tel de oppervlakten van de rechthoeken bij elkaar op.
- Gegeven is de functie $g(x) = \frac{3}{x+1}$

Benader de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van g en de x -as op het interval $[3, 7]$. Kies deelintervallen met lengte 1.



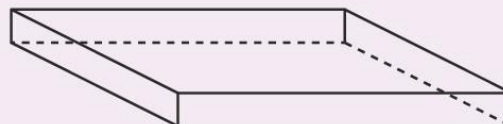
Uitdagende opdrachten



U1 Van de getekende piramide is het grondvlak 10 m bij 10 m. De hoogte is ook 10 m. De inhoud van de piramide kun je benaderen door de hoogte te verdelen in tien gelijke intervallen. Het midden van een deelinterval is dan het middelpunt van een balk met hoogte 1 en een vierkant grondvlak.

Door de inhoud van de tien balken bij elkaar op te tellen, krijg je een benadering van de inhoud van de piramide.

- Benader op bovenstaande manier de inhoud van de piramide.
- Hoeveel procent wijkt je antwoord op opdracht a af van de inhoud I van een piramide ($I = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$)?



Je leert

- wat een integraal is
- hoe je een integraal gebruikt om een oppervlakte te berekenen

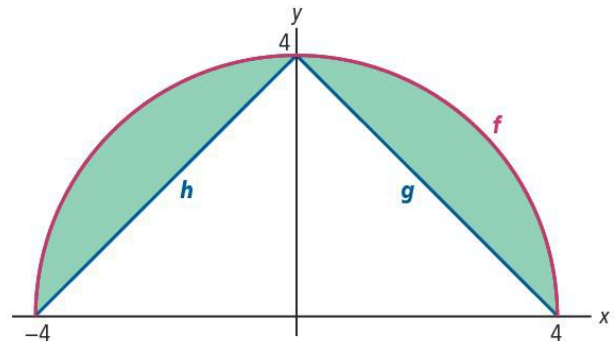
Leerroutes

- ondersteunend: 9—010—11—12—13—14—15—16—17
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—11—13—14—15—16—17—U2—U3

Getekend zijn de grafiek van de functie

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ en delen van de grafieken van de functies $g(x) = 4 - x$ en $h(x) = 4 + x$.

- Hoe bereken je de oppervlakten van de groene gebieden?



- 9 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
- Bereken met de rekenmachine Riemann-sommen van f op het interval $[0, 3]$ met 10, 30 en 100 deelintervallen.
 - Naar welke waarde zullen deze Riemann-sommen naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt?

Theorie

Gegeven is een functie f op het interval $[a, b]$.

De **integraal** $\int_a^b f(x) dx$ is de exacte waarde waar de Riemann-

sommen van f op het interval $[a, b]$ naar naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt, dus als $\Delta x \rightarrow 0$.

$f(x)$ heet de **integrand**, a de **ondergrens** en b de **bovengrens**.

Is $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$, dan is de integraal de exacte waarde van de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$.

Voorbeeld

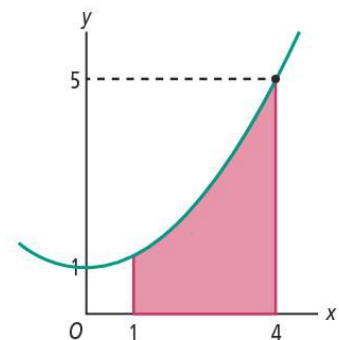
In de figuur is G het gebied begrensd door de grafiek van

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = 4$. Beschrijf de oppervlakte van G met een integraal.

Oplossing

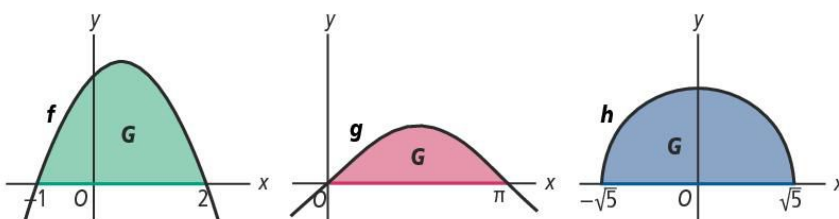
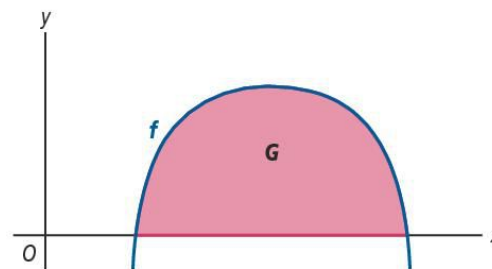
De integrand is $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, de ondergrens van de integraal is 1 en de bovengrens is 4.

De oppervlakte van G beschrijf je met de integraal $\int_1^4 (\frac{1}{4}x^2 + 1) dx$.



Ondersteunende route → maak opdracht 010

- 10** Gegeven is de functie $f(x) = 2\log(-x^2 + 10x - 15)$.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.
 - G is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x -as. Beschrijf de oppervlakte van G met een integraal.



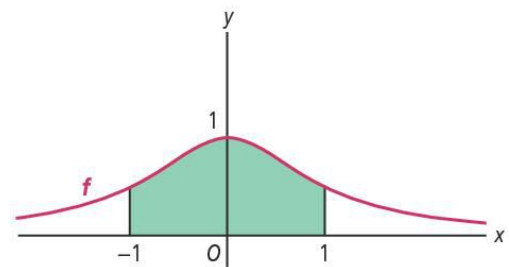
- 11** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = -x^2 + x + 2$, $g(x) = \sin(x)$ en $h(x) = \sqrt{5 - x^2}$.
- Beschrijf de oppervlakte van elk van de gebieden G met een integraal.
 - Benader de eerste integraal met behulp van een Riemann-som op het interval $[-1, 2]$. Kies $\Delta x = \frac{1}{2}$.
 - In de laatste figuur is G een halve cirkel. Bereken deze integraal op meetkundige wijze.
- 12**
- Teken de grafiek van de functie $f(x) = 2$.
 - Bereken $\int_1^5 2 \, dx$ met behulp van de grafiek.
- 13** G is het gebied tussen de grafiek van $f(x) = 5 - x$ en de x -as op het interval $[0, 5]$.
- Beschrijf de oppervlakte van G met een integraal.
 - Bereken exact (meetkundig) de oppervlakte van G .

Een integraal kun je met je rekenmachine benaderen. Daarover gaan de volgende opdrachten.

→ Instructie rekenmachine | Oppervlakte en integralen

12.2 Integralen

- 14** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
- Stel een integraal op om de oppervlakte van het gekleurde gebied te berekenen.
 - Benader deze integraal met je rekenmachine. Rond je antwoord af op twee decimalen.



- 15**
- Plot en schets de grafiek van $f(x) = 3x^2 - x^3$.
 - Benader de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f en de x -as.

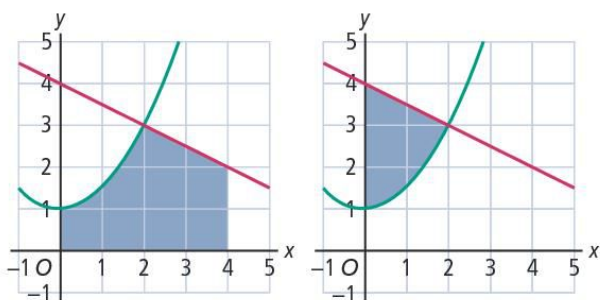
- 16** Benader de integralen. Rond zo nodig af op één decimaal.

H

- | | |
|---|---|
| a $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$ | c $\int_1^4 \frac{16}{x\sqrt{x}} dx$ |
| b $\int_{-3}^0 5 \cdot \log(x^2 + 1) dx$ | d $\int_0^5 (2^x + 2^{-x}) dx$ |

Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ en $g(x) = 4 - \frac{1}{2}x$.



- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
- Schrijf de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel in de linker figuur als een som van twee integralen en benader deze oppervlakte in twee decimalen.
- Schrijf de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel in de rechter figuur als een verschil van twee integralen en benader deze oppervlakte in twee decimalen.

Uitdagende route → maak opdracht U2 en U3

Ondersteunende opdrachten

010

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 10x - 21$.

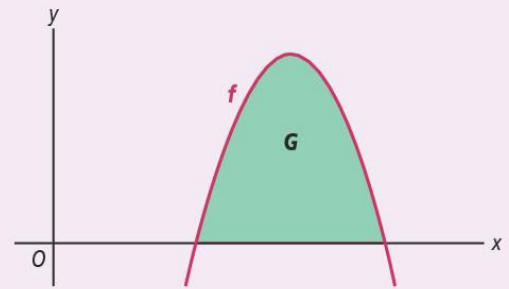
a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.

b G is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x -as. De oppervlakte van G kun je benaderen met een integraal.

Wat zijn de ondergrens en de bovengrens van de integraal?

c Vul in.

De oppervlakte van G is $\int_{\dots}^{\dots} f(x) dx = \int_{\dots}^{\dots} (\dots) dx$.



Uitdagende opdrachten

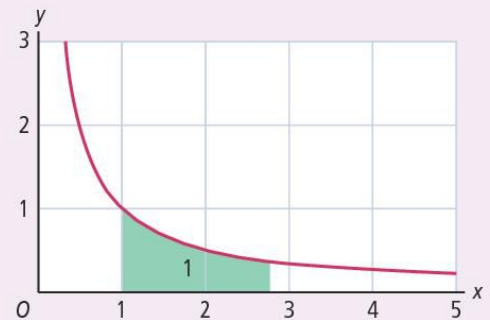
U2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.

G is het gebied begrensd door de grafiek van f , de x -as, de lijn $x = 1$ en de lijn $x = p$ met $p > 1$.

De oppervlakte van G is exact gelijk aan 1.

Benader p in vier decimalen.



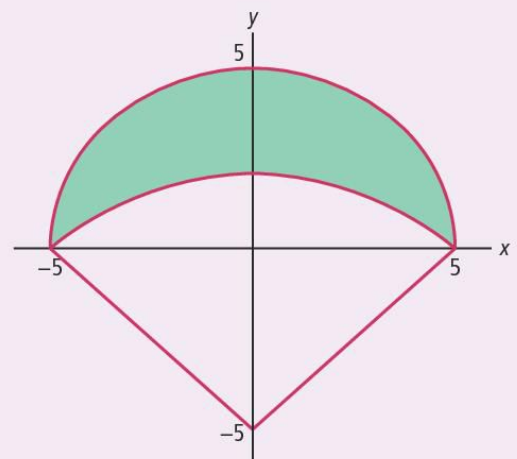
U3

Van het maantje is de bovenste boog de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en de onderste boog een deel van de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{50 - x^2} - 5$.

a Schrijf de oppervlakte van het maantje als verschil van twee integralen.

b Benader de oppervlakte van het maantje in één decimaal.

c Bereken de oppervlakte van het maantje langs meetkundige weg exact.



12.3 Hoofdstelling van de integraalrekening

Je leert

- wat een primitieve functie is
- hoe je een integraal exact berekent
- hoe je een primitieve van een machtsfunctie opstelt

Leerroutes

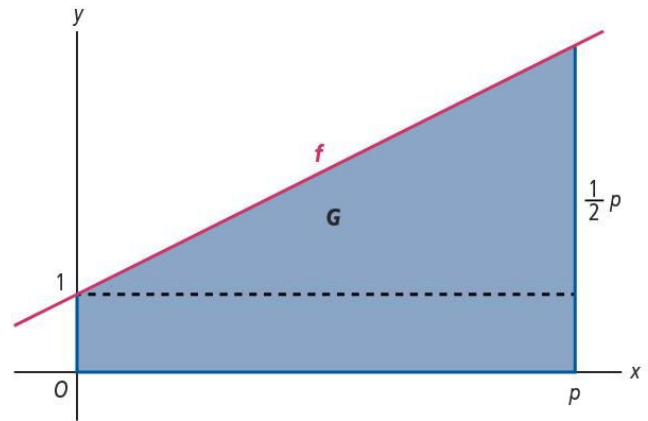
- ondersteunend: 18—19—20—021—22—23—24—25—026—26
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25—26—27
- uitdagend: 18—19—20—21—22—23—25—26—27—U4

G is het gebied begrensd door de grafiek van

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$, de x -as, de y -as en de lijn $x = p$.

$O(p)$ is de oppervlakte van G .

- Wat is het functievoorschrift van O ?
- Wat valt je op aan het functievoorschrift van O '?

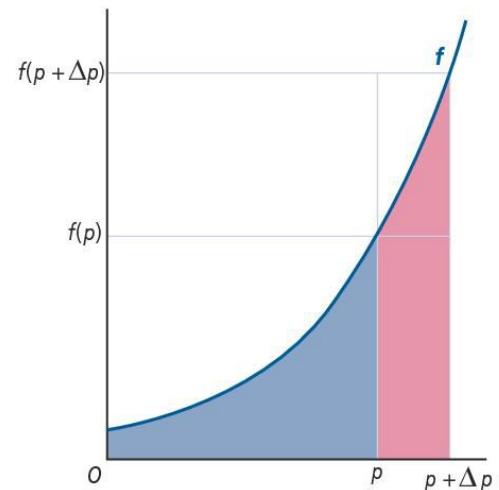


- 18** In de figuur is de grafiek van een functie f getekend. $O(p)$ is de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = p$, $p \geq 0$.

- a** Leg uit dat de oppervlakte van het rood gekleurde gebied gelijk is aan $\Delta O(p) = O(p + \Delta p) - O(p)$.
- b** Je kunt de oppervlakte van het rode gebied insluiten door twee rechthoeken met breedte Δp .
Leg uit dat geldt: $\Delta p \cdot f(p) \leq \Delta O(p) \leq \Delta p \cdot f(p + \Delta p)$.
- c** Als je de uitdrukking van opdracht b deelt door Δp dan krijg je $f(p) \leq \frac{\Delta O(p)}{\Delta p} \leq f(p + \Delta p)$.

Tot welke waarde nadert $\frac{\Delta O(p)}{\Delta p}$ als $\Delta p \rightarrow 0$?

- d** Leg uit dat hieruit volgt: $O'(p) = f(p)$.



- 19** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$. Voor $p \geq 0$ is $O(p)$ de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x -as, de grafiek van f , de y -as en de lijn $x = p$, dus $O(p) = \int_0^p x^2 dx$.

- a** Leg uit dat uit opdracht 18d volgt $O(p) = \frac{1}{3}p^3 + C$, waarbij C een constante is.
- b** Waarom moet gelden dat $O(0) = 0$? Bereken C .
- c** Bereken exact $\int_0^6 x^2 dx$.

- 20** G is het gebied begrensd door de grafiek van de functie $f(x) = x^2$, de x -as en de lijnen $x = 3$ en $x = 6$.
 O is de oppervlaktefunctie uit de vorige opdracht.
- a** Leg uit dat de oppervlakte van G gelijk is aan $O(6) - O(3)$.
- b** Bereken exact $\int_3^6 x^2 dx$.

Theorie

Het verband dat je in de vorige opdrachten hebt gevonden, heet **de hoofdstelling van de integraalrekening**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ waarbij } F'(x) = f(x).$$

$F(b) - F(a)$ wordt ook wel genoteerd als $[F(x)]_a^b$.

Een functie F waarvoor geldt dat $F'(x) = f(x)$ heet een **primitieve functie** (of kortweg **primitieve**) van f .

Het vinden van een primitieve functie heet **primitiveren**.

Het berekenen van een integraal met behulp van de hoofdstelling heet **integreren**.

Voorbeeld

Toon aan dat $F(x) = \frac{1}{6}x^6$ een primitieve is van $f(x) = x^5$ en bereken exact $\int_1^3 x^5 dx$.

Oplossing

$F'(x) = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 = x^5$, dus

$$F'(x) = f(x).$$

$$\int_1^3 x^5 dx = \left[\frac{1}{6}x^6 \right]_1^3 = \frac{1}{6} \cdot 3^6 - \frac{1}{6} \cdot 1^6 = 121\frac{1}{3}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** **a** Toon aan dat $f(x) = x^4$ een primitieve is van $f(x) = 4x^3$.
- b** Bereken exact $\int_0^2 4x^3 dx$.
- 22** **a** Toon aan dat $f(x) = 2x\sqrt{x}$ een primitieve is van $f(x) = 3\sqrt{x}$.
- b** Bereken exact $\int_4^9 3\sqrt{x} dx$.
- 23** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
- a** Differentieer f .
- b** Geef een primitieve functie van $g(x) = \frac{1}{x^3}$.

12.3 Hoofdstelling van de integraalrekening

- 24** Gegeven is de functie $F(x) = x^{11}$.
- Differentieer F .
 - Geef een primitieve functie van $g(x) = x^{10}$.

Theorie

Een **primitieve functie van de machtsfunctie** $f(x) = x^p$ is

$$F(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1}.$$

Deze regel geldt voor alle waarden van p behalve $p = -1$.

Voorbeeld

Primitiveer $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

Oplossing

$$\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{-1\frac{1}{2} + 1} x^{-1\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = -2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

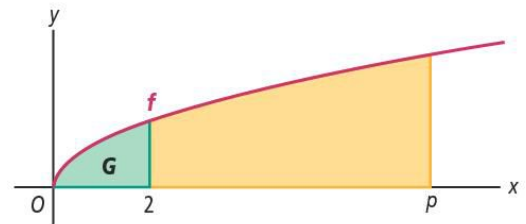
- 25** Waarom geldt de regel in de theorie niet voor $p = -1$?

Ondersteunende route → maak opdracht 026

- 26** Primitiveer.

- | | | |
|----------|------------------------------------|---|
| H | a $f(x) = x^{99}$ | c $f(x) = x\sqrt{x}$ |
| | b $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$ | d $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ |

- 27** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
 G is het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 2$.
- Bereken exact de oppervlakte van G .
 - De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijn $x = p$ is acht keer zo groot als de oppervlakte van G .
Bereken p .



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

021 In deze opdracht toon je aan dat $F(x) = x^6$ een primitieve is van $f(x) = 6x^5$ en bereken je de integraal $\int_1^2 6x^5 dx$ exact.

- a** Differentieer F en laat zien dat $F'(x) = f(x)$.
b Vul in.

$$\int_1^2 6x^5 dx = [\dots]_1^2 = F(\dots) - F(\dots) = \dots - \dots = \dots$$

026 In deze opdracht ga je op zoek naar een primitieve functie van

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

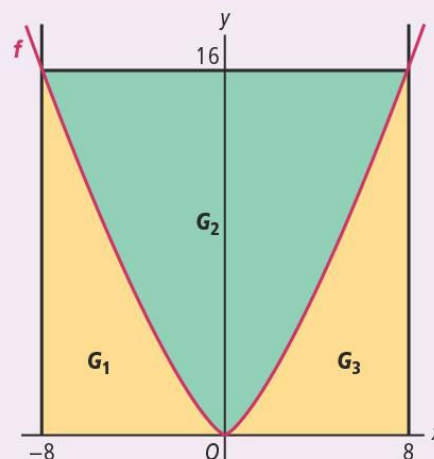
- a** Schrijf f in de vorm $f(x) = x^p$.
b Vul de gevonden waarde van p in de formule

$$F(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \text{ in.}$$

- c** Vereenvoudig de breuk en schrijf $F(x)$ zonder macht van x met een gebroken exponent.

Uitdagende opdrachten

U4 Het vierkant met hoekpunten $(-8, 0)$, $(8, 0)$, $(8, 16)$ en $(-8, 16)$ wordt door de grafiek van de functie $f(x) = x\sqrt[3]{x}$ in drie stukken: G_1 , G_2 en G_3 met oppervlakte O_1 , O_2 en O_3 verdeeld. Bewijs dat geldt: $O_2 : (O_1 + O_3) = 4 : 3$.



12.4 Primitiveren en integreren

Je leert

- hoe je een somfunctie primitiveert en integreert
- hoe je een functie van de vorm $g(x) = f(a \cdot x + b)$ primitiveert

Leerroutes

- ondersteunend: 28—29—030—31—32—33—34—35—036—36
- doorlopend: 28—29—30—31—32—33—34—35—36—37
- uitdagend: 28—29—30—32—33—34—35—36—37—U5

Janne probeert een primitieve functie te vinden van $f(x) = (x + 3)^2$. Haar klasgenoten Iris en Anouk helpen haar. Janne controleert de antwoorden van haar vriendinnen.

Beide antwoorden zijn goed.

- Hoe kan dat?

Volgens mij is een primitieve functie $F(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^3$.

Nee hoor, eerst de haakjes wegwerken. Het moet $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x$ worden.



- 28**
- Geef een functie F waarvoor geldt $F'(x) = 5$.
 - Geef een primitieve van $g(x) = 6x^2 + 5$.
 - Geef een primitieve van $h(x) = 4x^3 + 6x^2 + 5$.

Theorie

Uit de regels voor differentiëren kun je regels voor het primitiveren en regels voor het integreren afleiden.

Regels voor het primitiveren

Als $g(x) = c \cdot f(x)$, dan is $G(x) = c \cdot F(x)$.

Als $s(x) = f(x) + g(x)$, dan is $S(x) = F(x) + G(x)$.

Regels voor het integreren

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (\text{somregel})$$

Voorbeeld

Primitiveer $f(x) = 4x^2 + 6\sqrt{x}$.

Oplossing

De functie f is te schrijven als

$$f(x) = 4x^2 + 6x^{\frac{1}{2}}.$$

Een primitieve functie is

$$F(x) = 4 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 6 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1}$$

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 + 12x^{\frac{3}{2}}$$

- 29** Primitiveer.

- H**
- $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
 - $g(x) = 2x^2 + \frac{3}{x^4}$
 - $h(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$
 - $k(x) = (x^2 - 2)^2$

Ondersteunende route → maak opdracht 030

30 Bereken exact.

a $\int_1^4 (4x^2 - 6x + 5) dx$

c $\int_0^9 (\sqrt{x} + 1) dx$

b $\int_1^4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

d $\int_{-4}^{-1} \frac{x^4 + 1}{x^4} dx$

31 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^5 + 3x^3 + 6}{3x^3}$

a Schrijf het functievoorschrift als de som van machtsfuncties.

b Geef een primitieve van f .32 a Toon aan dat $F_1(x) = x^3$ en $F_2(x) = x^3 + 12$ beide primitieven zijn van $f(x) = 3x^2$.b Laat zien dat $F_2(4) - F_2(2) = F_1(4) - F_1(2)$.c Laat zien dat $F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) - F_1(a)$.**Theorie**

Een functie f heeft meerdere primitieve functies. Als F_1 een primitieve functie van f is, dan is voor elke waarde van C de functie $F_2(x) = F_1(x) + C$ ook een primitieve van f .

Omdat $\int_a^b f(x) dx = F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$ maakt het niet uit welke primitieve van f je bij het integreren gebruikt.

Voorbeeld

Stel de primitieve functies op van

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2.$$

Oplossing

Een primitieve functie van f is

$$g(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x.$$

De primitieve functies zijn dus

$$F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C.$$

33 Geef de primitieve functies.

H

a $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - x + 3$

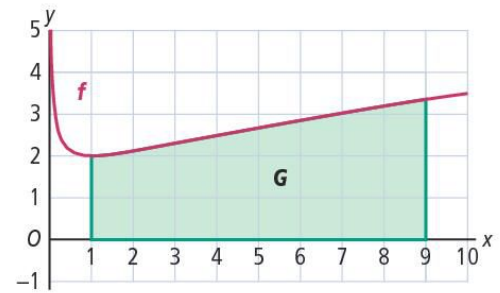
c $g(x) = -x^5 + \frac{1}{3x^3} - 1$

b $k(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

d $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2}$

12.4 Primitiveren en integreren

- 34** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.



- 35** Gegeven zijn de functies $g(x) = x^3$ en $f(x) = (3x - 4)^3$.
- a** Geef een primitieve van g .
 - b** Als primitieve van f probeert Marjan $f(x) = c \cdot (3x - 4)^4$. Geef de afgeleide $F'(x)$.
 - c** Welke waarde moet c hebben zodat F een primitieve functie van f is?
 - d** Geef een primitieve van f .
 - e** Gegeven is $g(x) = x^3$ en $f(x) = g(ax + b)$.
Noem G de primitieve van g en F de primitieve van f .
Vul in: $f(x) = \dots \cdot G(ax + b)$.

Theorie

Als G een primitieve is van g en $f(x) = g(a \cdot x + b)$, dan is $f(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax + b)$ een primitieve van f .

Voorbeeld

Geef een primitieve van $f(x) = (3 - 2x)^5$.

Oplossing

In dit geval is $a = -2$, dus

$$F(x) = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{6} \cdot (3 - 2x)^6 \text{ ofwel}$$

$$F(x) = -\frac{1}{12} (3 - 2x)^6.$$

Ondersteunende route → maak opdracht 036

- 36** Primitiveer.

H

a $f(x) = 2 \cdot (5x + 1)^3$ **c** $h(x) = \frac{2}{(1 - 6x)^3}$

b $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^5$ **d** $k(x) = \sqrt{3x + 5}$

- 37** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{(2x + 1)^2}$

De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 2$ en $x = p$ is gelijk aan $\frac{1}{5}$.
Bereken exact de waarde van p .

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

030 Gegeven is de functie $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$.

Je gaat de integraal $\int_1^4 (2x + 3\sqrt{x}) dx$ berekenen.

- a Schrijf $\sqrt{x}$ als macht van x .
- b Primitiveer f . Gebruik de formule op het blaadje.
- c Bereken $F(4)$ en $F(1)$.
- d Vul in.

$$\int_1^4 (2x + 3\sqrt{x}) dx = [\dots + \dots]_{\dots}^{\dots} = \dots - \dots = \dots$$

Bereken exact.

e $\int_0^4 (x\sqrt{x} + 3) dx$

g $\int_1^4 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

f $\int_{-1}^2 (3x^2 - x + 5) dx$

h $\int_{-3}^{-1} \frac{2x^3 - 1}{x^2} dx$

Een primitieve van $f(x) = x^p$ is $F(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1}$.

036 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{4x+1}$.

In deze opdracht ga je een primitieve functie van f bepalen.

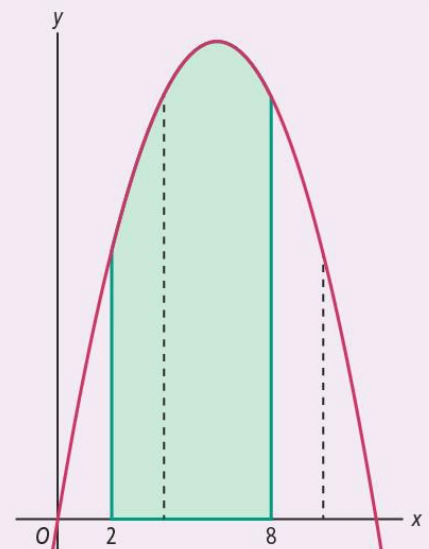
- a Geef een primitieve van $g(x) = 2\sqrt{x}$.
- b Vul in: $f(x) = g(\dots)$, dus $F(x) = \frac{1}{\dots} \cdot G(\dots)$.
- c Geef een primitieve van f .

Uitdagende opdrachten

U5 Gegeven is de familie van functies $g_a(x) = ax(12-x)$. G is het gebied begrensd door de grafiek van g_a , de x -as en de lijnen $x=2$ en $x=8$. De oppervlakte van G is 96.

- a Bereken exact de waarde van a .
- b Verder is gegeven dat $\int_p^{10} g_a(x) dx = \int_2^8 g_a(x) dx = 96$.

Bereken de waarde van p .



12.5 Oppervlakte en integralen

Je leert

- hoe je exact de oppervlakte berekent van een gebied dat onder de x -as ligt
- hoe je exact de oppervlakte berekent van een gebied ingesloten door twee grafieken

Leerroutes

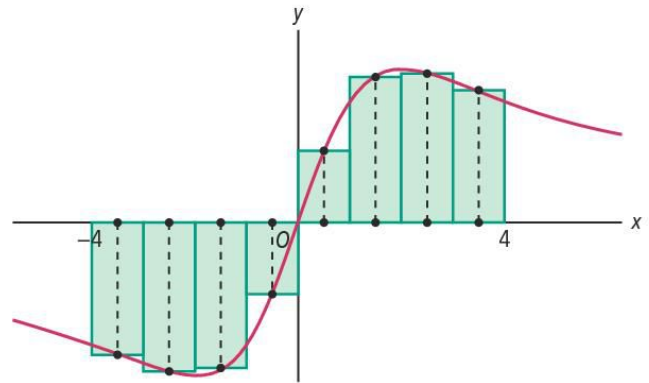
- ondersteunend: 38—039—40—41—042—43—44—45
- doorlopend: 38—39—40—41—42—43—44—45
- uitdagend: 38—39—40—41—43—44—45—U6

Kayvan berekent de Riemann-som van

$$f(x) = \frac{12x}{x^2 + 4} \text{ op het interval } [-4, 4]$$

met $\Delta x = 1$.

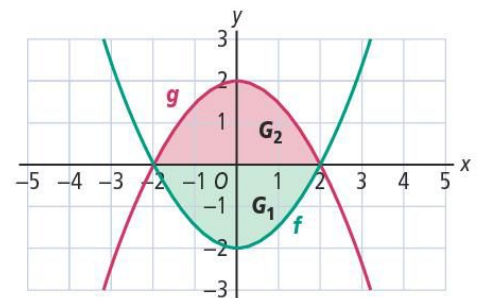
- Verklaar waarom hij als antwoord 0 vindt.



- 38** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.
 G_1 is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x -as en
 G_2 is het gebied ingesloten door de grafiek van g en de x -as.

a Bereken exact $\int_{-2}^2 (\frac{1}{2}x^2 - 2) dx$ en $\int_{-2}^2 (-\frac{1}{2}x^2 + 2) dx$.

- b** Hoe groot is de oppervlakte van G_1 ?

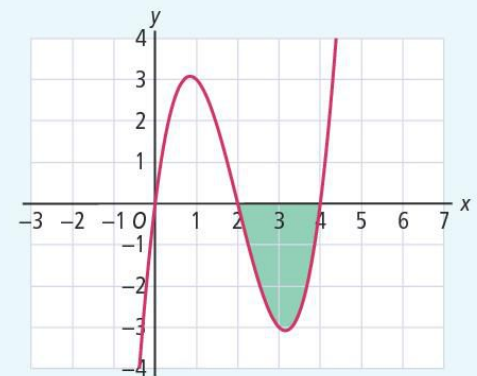


Theorie

Tot nu toe heb je de oppervlakte berekend van gebieden die boven de x -as liggen. Als een gebied onder de x -as ligt, dan kun je de oppervlakte van dat gebied berekenen door het te spiegelen in de x -as.

De oppervlakte van het gebied is dan gelijk aan

$$\int_a^b (-f(x)) dx = -\int_a^b f(x) dx \text{ of ook gelijk aan } \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$



Voorbeeld

G is het gebied ingesloten door grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ en de x -as op het interval $[2, 4]$.

Bereken exact de oppervlakte van G .

Oplossing

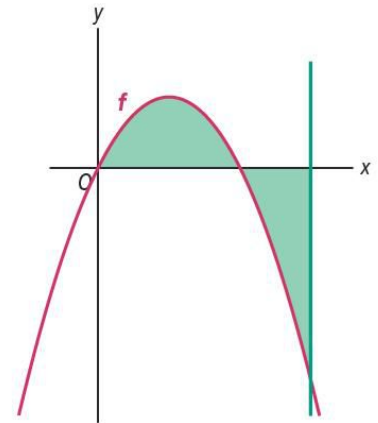
De grafiek van f staat hierboven.

De oppervlakte van G is

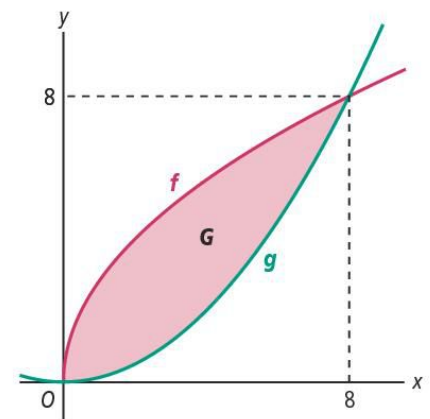
$$\begin{aligned} -\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx &= -\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \\ &= -((64 - 128 + 64) - (4 - 16 + 16)) = 4. \end{aligned}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 039

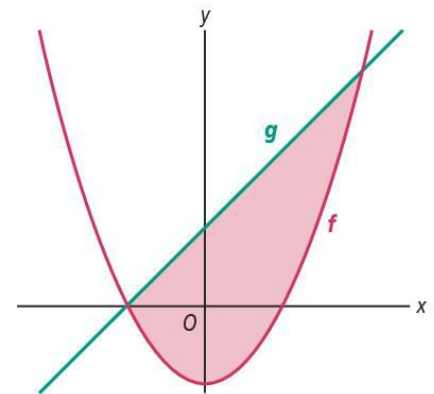
- 39** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$.
H De grafiek van f , de x -as en de lijn $x = 6$ sluiten een gebied G in dat uit twee stukken bestaat.
 Bereken exact de oppervlakte van G .



- 40** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{8x}$ en $g(x) = \frac{1}{8}x^2$.
a Ga na dat de grafieken elkaar snijden in $(0, 0)$ en $(8, 8)$.
b Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x -as, de grafiek van f en de lijn $x = 8$.
c Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x -as, de grafiek van g en de lijn $x = 8$.
d Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied G .
e Leg uit dat $\text{oppervlakte } G = \int_0^8 (f(x) - g(x)) dx$.



- 41** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ en $g(x) = x + 2$.
 Het gebied G wordt ingesloten door de grafieken van f en g .
a Controleer dat de grafieken elkaar snijden in de punten $(-2, 0)$ en $(4, 6)$.
b Door beide grafieken 3 omhoog te schuiven, ontstaan de grafieken van de functies p en q .
 Geef de functievoorschriften van p en q .
c Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van p en q .
d Toon aan dat $g(x) - f(x) = q(x) - p(x)$.
e Leg uit dat je de oppervlakte van G ook direct kunt berekenen met de integraal $\int_{-2}^4 (g(x) - f(x)) dx$.



Aanpak

Hoe bereken je exact de oppervlakte van een gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van twee functies?

- 1 Plot de grafieken en bereken de x -coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.
- 2 Stel één of meer integralen op die de oppervlakte weergeven. Let daarbij op de onderlinge ligging van de grafieken.
- 3 Bereken de integraal of de integralen en geef de oppervlakte.

12.5 Oppervlakte en integralen

Voorbeeld

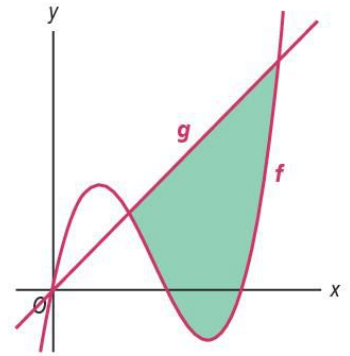
De grafieken van de functies $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$ en $g(x) = 3x$ sluiten het gebied in dat in de tekening is gekleurd. Bereken exact de oppervlakte van dat gebied.

Oplossing

- 1 De oplossingen van $f(x) = g(x)$ zijn $x = 0$, $x = 2$ en $x = 6$.
- 2 Tussen $x = 2$ en $x = 6$ ligt de grafiek van g boven de grafiek van f .

De oppervlakte wordt berekend met $\int_2^6 (g(x) - f(x)) \, dx$.

- 3 $\int_2^6 (-x^3 + 8x^2 - 12x) \, dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 \right]_2^6 = 42\frac{2}{3}$, dus de oppervlakte is $42\frac{2}{3}$.



- 42** Gegeven zijn de functies uit het voorbeeld. Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat door de grafieken van f en g worden ingesloten op het interval $[0, 2]$.

- 43** Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$ en $g(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$. De grafieken snijden elkaar in de punten $(-1, 3)$ en $(3, 1)$. Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat door de beide grafieken worden ingesloten.

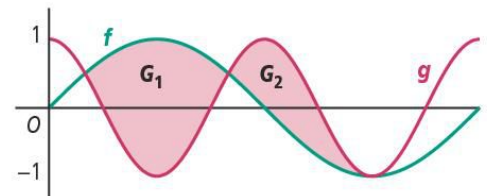
Ondersteunende route → maak opdracht 044

- 44** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 + 6x$ en $g(x) = -x^3 + 4x^2 + 12x$.

H

- a Bereken exact de oppervlakte van elk van de gebieden die worden ingesloten door de grafieken van f en g .
- b Controleer het antwoord bij opdracht a door de oppervlakte te berekenen met je rekenmachine.

- 45** Op het interval $[0, 2\pi]$ zijn de grafieken getekend van de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(2x)$.
- a Controleer met een berekening dat de grafieken een punt gemeenschappelijk hebben voor $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.
 - b Bereken de oppervlakte van elk van de twee gebieden die worden ingesloten door de grafieken van f en g . Rond af op één decimaal.



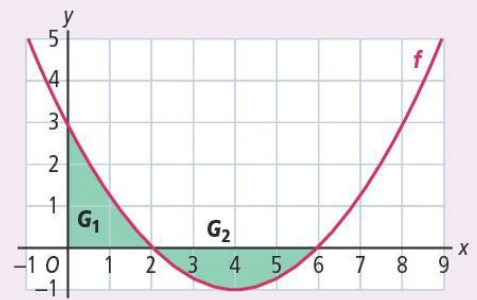
Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

039

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$. In deze opdracht bereken je de totale oppervlakte van de gebieden ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.

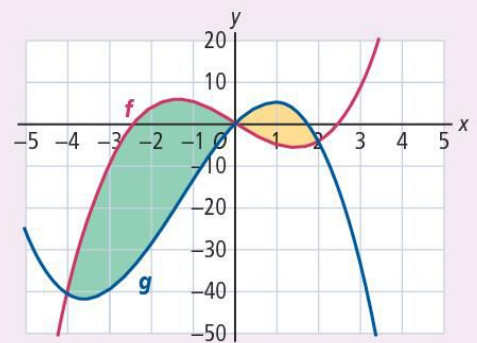
- Los exact op $f(x) = 0$.
- Het gebied G_1 ligt boven de x -as en het gebied G_2 eronder. Met welke integraal kun je de oppervlakte van G_1 berekenen? En met welke integraal de oppervlakte van G_2 ?
- Bereken exact de totale oppervlakte van de twee gebieden.



044

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 - 6x$ en $g(x) = -x^3 - 4x^2 + 10x$.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
- Op welk interval ligt de grafiek van f boven de grafiek van g ?
- Leg uit dat je de oppervlakte van dat gebied kunt berekenen met $\int_{-4}^0 (f(x) - g(x)) dx$.
- Vereenvoudig de uitdrukking $f(x) - g(x)$.
- Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied links van de y -as.
- Bereken op een vergelijkbare manier ook de oppervlakte van het gekleurde gebied rechts van de y -as.
- Controleer de antwoorden van de opdrachten e en f door de oppervlakten te berekenen met je rekenmachine.

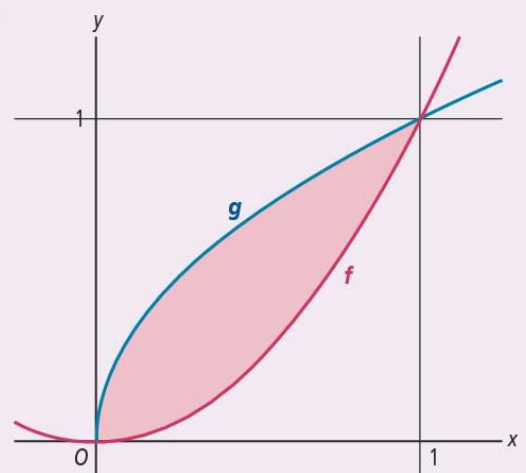


Uitdagende opdrachten

U6

G is het gebied ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x^n$ en $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

- Neem $n = 2$ en bereken exact de oppervlakte van G .
- Bewijs dat de oppervlakte van G voor elke gehele waarde van n groter dan 1 gelijk is aan $\frac{n-1}{n+1}$



12.6 Gemengde opdrachten

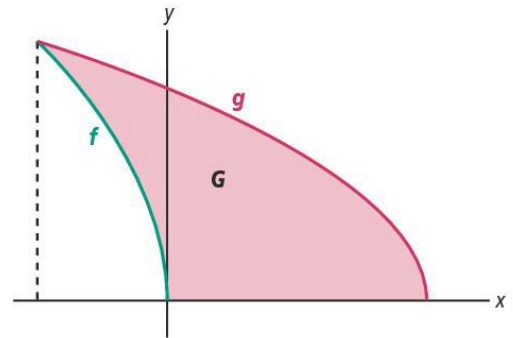
46 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2}$

G is het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$.

- Kies $p = 10$ en bereken exact de oppervlakte van G .
- Kies $p = 100$ en bereken exact de oppervlakte van G .
- Naar welke waarde nadert de oppervlakte van G als p onbegrensd toeneemt?

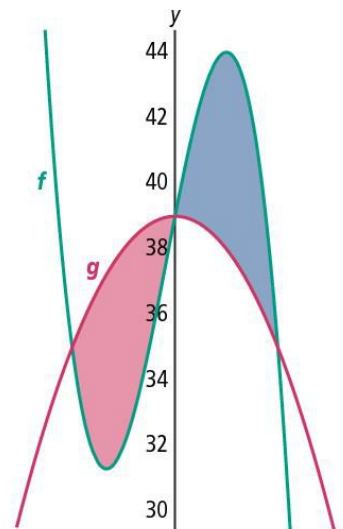
47 Het gebied G wordt ingesloten door de x -as en de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{-12x}$ en $g(x) = 2\sqrt{6-x}$.

- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
- Stel integralen op waarmee je de oppervlakte van G kunt berekenen.
- Bereken exact de oppervlakte van G .



48 In de figuur zie je langs de y -as een deel van de grafieken van de functies $f(x) = (3-x)(2x^2 + 7x + 13)$ en $g(x) = 39 - x^2$.

- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.
- De grafieken sluiten twee gebieden in. Toon aan dat de oppervlaktes van deze gebieden even groot zijn.



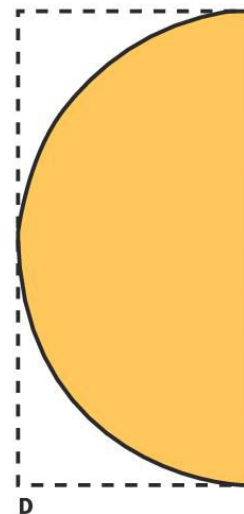
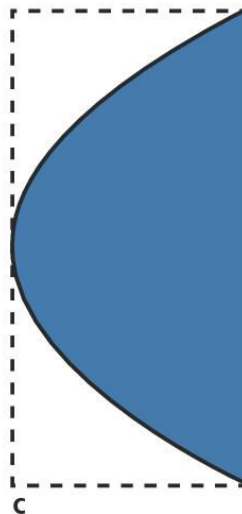
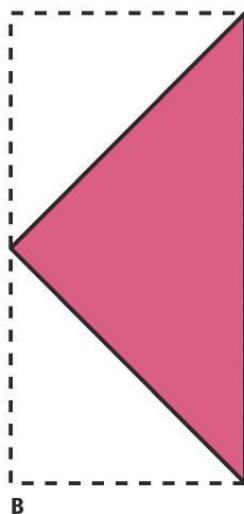
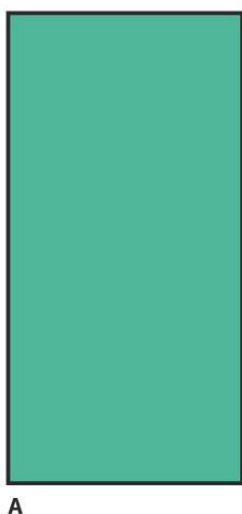
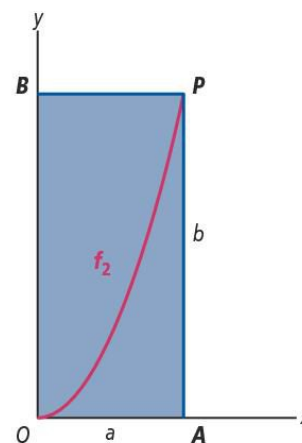
49 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{12x + 9}{16x^4 + 48x^3 + 36x^2}$

- Toon algebraïsch aan dat de noemer van $f(x)$ geschreven kan worden als $4x^2(2x + 3)^2$.
- Laat algebraïsch zien dat het functievoorschrift van f geschreven kan worden als $f(x) = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{(2x + 3)^2}$

- Bereken exact $\int_1^2 \frac{12x + 9}{16x^4 + 48x^3 + 36x^2} dx$.

- 50** Gegeven is de familie van functies $f_n(x) = x^n$, met $x \geq 0$. Op de grafiek van f_n ligt het punt $P(a, b)$. De rechthoek met hoekpunten $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, P en $B(0, b)$ wordt door de grafiek van f_n in twee gebieden verdeeld.

- In de figuur is de situatie getekend voor $n = 2$. Bewijs dat de oppervlaktes van de twee gebieden zich verhouden als 1 : 2.
- Onderzoek de verhouding van de twee oppervlaktes voor $n = 3$.
- Formuleer een algemene regel voor de verhouding van de twee oppervlaktes voor elke gehele waarde van n groter dan 1 en bewijs de regel.
- Onderzoek of de regel ook geldt voor $n = 1$.



- 51** In een rechthoek met lengte 4 en breedte 8 zijn achtereenvolgens een rechthoek, een driehoek, een parabool en een halve cirkel gekleurd. De figuren worden langs een verticale lijn doorgeknipt. Onderzoek voor elk van de figuren op welke afstand van de linker zijde van de rechthoek de figuur moet worden doorgeknipt, zodat de oppervlaktes van de twee gekleurde stukken even groot zijn. Geef je antwoord zo mogelijk exact en anders in één decimaal.

Samenvatting

Theorie

Integraal, integrand en oppervlakte

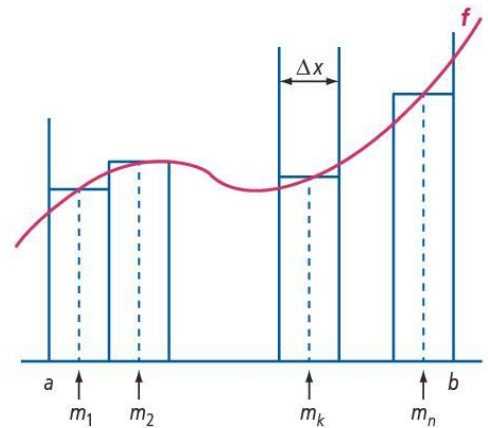
De integraal $\int_a^b f(x) dx$ is de exacte waarde waar de Riemann-sommen van f op het interval $[a, b]$ naar naderen als het aantal deelintervallen onbegrensd toeneemt, dus als $\Delta x \rightarrow 0$. $f(x)$ heet de integrand, a de ondergrens en b de bovengrens. Is $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$, dan is de integraal de exacte waarde van de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$.

- S1** G is het gebied begrensd door de grafiek van de functie $f(x) = 2^x$, de x -as, de y -as en de lijn $x = 3$.
- Stel een integraal op om de oppervlakte te berekenen.
 - Benader de integraal met de rekenmachine in drie decimalen.

Vaardigheid

Je kunt de oppervlakte van een gebied onder een grafiek benaderen.

Is f een functie met $f(x) \geq 0$ op een interval $[a, b]$ en G het gebied begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = a$ en $x = b$, dan benader je de oppervlakte van G met een Riemann-som van f op het interval $[a, b]$. Daartoe verdeel je $[a, b]$ in n gelijke deelintervallen met breedte Δx . Als $m_1, m_2, \dots, m_n$ de middens zijn van de deelintervallen, is de Riemann-som gelijk aan $f(m_1) \cdot \Delta x + f(m_2) \cdot \Delta x + \dots + f(m_n) \cdot \Delta x$.



Voorbeeld

Benader de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, de x -as, de y -as en de lijn $x = 2$ met een Riemann-som met vier deelintervallen. Rond af op twee decimalen.

Oplossing

De lengte van een deelinterval is $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

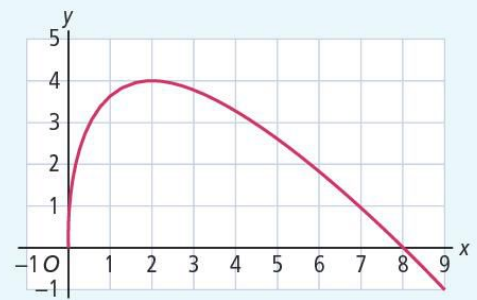
De middens van de deelintervallen zijn

$$x = \frac{1}{4}, x = \frac{3}{4}, x = 1\frac{1}{4} \text{ en } x = 1\frac{3}{4}.$$

De totale oppervlakte van de rechthoekjes is

$$\frac{1}{2} \cdot (f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(1\frac{1}{4}) + f(1\frac{3}{4})) \approx 1,36.$$

- S2** Benader de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van $f(x) = 4\sqrt{2x} - 2x$ en de x -as op het interval $[0, 8]$ met een Riemann-som met vier deelintervallen. Rond af op twee decimalen.



Vaardigheid

Je kunt een integraal exact berekenen.

Je kunt een integraal exact berekenen met behulp van de hoofdstelling van de integraalrekening.

Als f een functie is op het interval $[a, b]$ en F is een

primitieve van f , dan geldt $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Een functie F waarvoor geldt dat $F'(x) = f(x)$ heet een primitieve functie (of kortweg primitieve) van f .

Het vinden van een primitieve functie heet primitiveren.

- S3** Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.
- Teken het gebied waarvan je de oppervlakte exact kunt berekenen door $F(3) - F(2)$ te berekenen.
 - Bereken deze oppervlakte exact.

Vaardigheid

Je kunt een primitieve van een machtsfunctie opstellen.

Als $f(x) = x^p$ ($p \neq -1$) dan is de functie

$$F(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \text{ een primitieve van } f.$$

Voorbeeld

Geef een primitieve functie van $f(x) = x\sqrt{x}$.

Oplossing

$f(x)$ is te schrijven als $f(x) = x^{1\frac{1}{2}}$.

Een primitieve is

$$F(x) = \frac{1}{2\frac{1}{2}} \cdot x^{2\frac{1}{2}} \text{ ofwel}$$

$$F(x) = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}.$$

- S4**
- Geef een primitieve functie van $f(x) = x^2\sqrt{x}$.
 - Geef een primitieve functie van $f(x) = \frac{1}{x^6}$.

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt een somfunctie primitiveren en integreren.

Regels voor het primitiveren

Als $g(x) = c \cdot f(x)$, dan is $G(x) = c \cdot F(x)$.

Als $s(x) = f(x) + g(x)$, dan is $S(x) = F(x) + G(x)$

Regels voor het integreren

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (\text{somregel})$$

Voorbeeld

Bereken exact $\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x) dx$.

Oplossing

$$\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x) dx =$$

$$\left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-3}^{-1} =$$

$$-1\frac{5}{24} - (-7\frac{7}{8}) = 6\frac{2}{3}$$

S5 Bereken exact.

a $\int_1^4 \left(3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$

b $\int_1^4 \frac{4x+1}{x^3} dx$

Vaardigheid

Je kunt een functie van de vorm $f(x) = (a \cdot x + b)^n$ primitiveren.

Als G een primitieve is van g en $f(x) = g(a \cdot x + b)$, dan is

$F(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax + b)$ een primitieve van g .

Voorbeeld

Geef een primitieve van $f(x) = \frac{15}{(5x-1)^4}$

Oplossing

Een primitieve van $g(x) = \frac{15}{x^4}$ is $G(x) = -\frac{5}{x^3}$

Een primitieve van f is $F(x) = \frac{1}{5} \cdot -\frac{5}{(5x-1)^4}$ ofwel

$$F(x) = -\frac{1}{(5x-1)^4}$$

S6 Primitiveer.

a $f(x) = 2(5-2x)^4$

b $g(x) = -2\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^{-2}$

Vaardigheid

Je kunt exact de oppervlakte berekenen van een gebied dat onder de x -as ligt.

De oppervlakte van een gebied dat onder de x -as ligt en begrensd wordt door de grafiek van een functie f , de x -as en

de lijnen $x = a$ en $x = b$ bereken je met de integraal $-\int_a^b f(x) dx$

of ook wel met de integraal $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

Voorbeeld

Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van $f(x) = x^2 - 4$, de x -as en de lijn $x = -1$.

Oplossing

Met een plot zie je dat het gebied onder de x -as ligt. De oppervlakte is

$$-\int_{-1}^2 (x^2 - 4) dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-1}^2 = 9.$$

- S7** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ en de x -as.

Vaardigheid

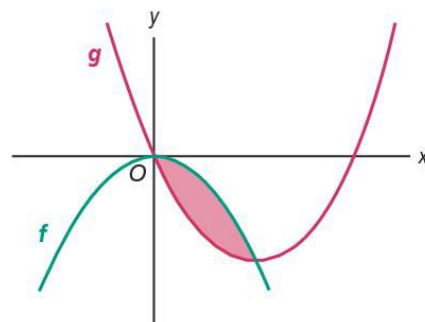
Je kunt de oppervlakte exact berekenen van een gebied ingesloten door twee grafieken.

- 1 Plot de grafieken en bereken de x -coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.
- 2 Stel één of meer integralen op die de oppervlakte weergeven. Let daarbij op de onderlinge ligging van de grafieken.
- 3 Bereken de integraal of de integralen en geef de oppervlakte.

Voorbeeld

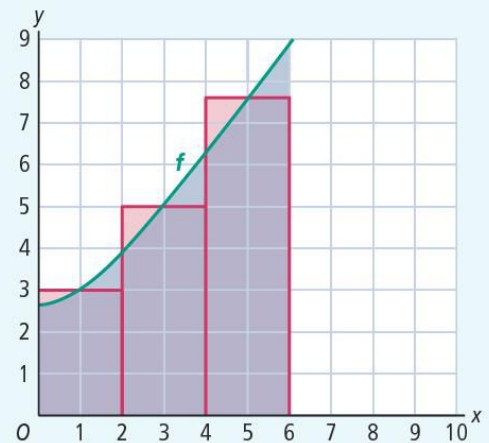
Bereken de oppervlakte van het gebied, begrensd door de grafieken van de functies $f(x) = -x^2$ en $g(x) = x^2 - 4x$.

- 1 Snijpunten: $-x^2 = x^2 - 4x$ ofwel $x^2 - 2x = 0$.
Dat geeft $x = 0$ of $x = 2$.
- 2 De oppervlakte is gelijk aan
 $\int_0^2 (-x^2 - (x^2 - 4x)) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx$.
- 3 $\int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = -\frac{2}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 2\frac{2}{3}$



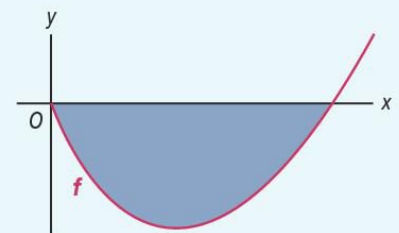
- S8** Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = 4 - \frac{16}{x^2}$ en $g(x) = 5x - 17$.

- T1** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$.
 G is het gebied begrensd door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x = 6$.
- Benader de oppervlakte van G met een Riemann-som van f met drie deelintervallen. Geef het antwoord in twee decimalen.
 - Stel een integraal op om de oppervlakte van G te berekenen.
 - Benader de integraal in twee decimalen.

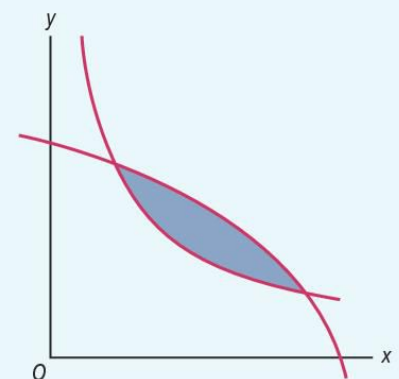


- T2** Primitiveer.
- $f(x) = 3x^5 + 8x - 4$
 - $f(x) = 9\sqrt{3x+5} - \frac{8}{\sqrt{4x+3}}$
 - $f(x) = 6x\sqrt[5]{x^2} - 4x$
 - $f(x) = \frac{3}{4x^4} - \frac{6}{5x^2}$
 - $f(x) = \frac{x^2 + 6}{x^2}$
 - $f(x) = \frac{28}{(7x-3)^3}$

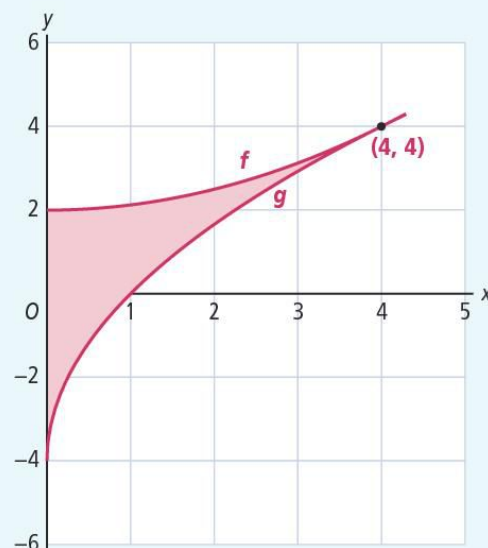
- T3** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.
 Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x -as.



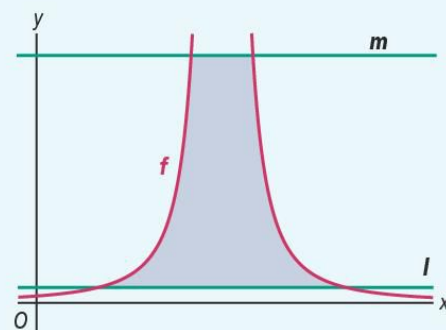
- T4** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{6}{x + \sqrt{x}}$ en $g(x) = 1 + {}^2\log(5-x)$.
- Laat met een berekening zien dat de grafieken van f en g elkaar snijden voor $x = 1$ en voor $x = 4$.
 - De grafieken van f en g sluiten een gebied in. Benader de oppervlakte van het gebied in twee decimalen.



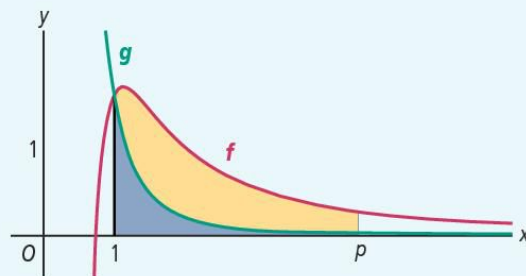
- T5** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2$ en $g(x) = 4\sqrt{x} - 4$. De grafieken van f en g raken elkaar in het punt $(4, 4)$. Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door beide grafieken en de y -as.



- T6** Gegeven zijn de functie $f(x) = \frac{2}{(3 - \frac{1}{2}x)^2}$ en de lijnen $l: y = \frac{1}{2}$ en $m: y = 8$.
- Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van l en m met de grafiek van f .
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f en de lijnen l en m .

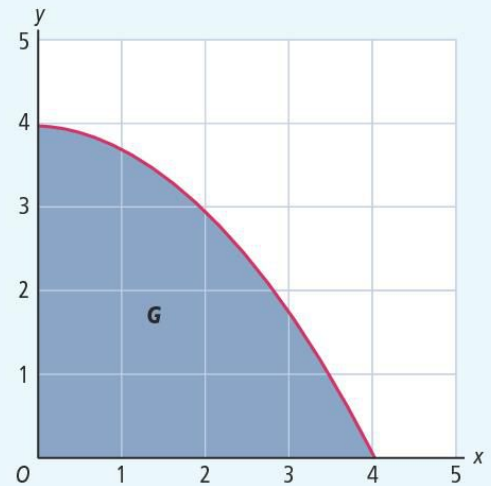


- T7** Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{8x - 6}{x^3}$ en $g(x) = \frac{2}{x^2}$.
- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
 - Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door beide grafieken en de lijn $x = 4$.
 - Het gebied begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = 1$ en $x = p$ met $p > 1$, wordt door de grafiek van g verdeeld in twee delen met gelijke oppervlakte. Bereken p exact.



Je kunt de oppervlakte van een gebied onder een grafiek benaderen.

- E1** Gegeven is de functie $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$. G is het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.
- Bereken exact een Riemann-som van f op het interval $[0, 4]$. Neem $\Delta x = 1$.
 - Bereken exact de oppervlakte van G .



Je kunt een integraal gebruiken om een oppervlakte te berekenen.

- E2** G is het gebied onder de grafiek van $f(x) = 2x + 3$ op het interval $[-1, 4]$.
- Schrijf de oppervlakte van G met een integraal.
 - Bereken meetkundig de oppervlakte van G .
 - Controleer je antwoord op opdracht b door de integraal te berekenen.

Je kunt een integraal exact berekenen.

- E3** H is het gebied onder de grafiek van $f(x) = 8x - 2x^2$ op het interval $[1, 4]$.
Bereken exact de oppervlakte van H .

Je kunt een primitieve van een machtsfunctie opstellen.

- E4** Primitiveer.

a $f(x) = x^{19}$	c $f(x) = \frac{1}{x^{19}}$
b $f(x) = x^3 \sqrt[3]{x^2}$	d $f(x) = \frac{1}{x^3 \sqrt[3]{x^2}}$

Je kunt een somfunctie primitiveren en integreren.

- E5** Primitiveer.

a $f(x) = (x + 1)(x - 5)$	c $f(x) = \frac{x^2 - 13x - 30}{x^4}$
b $f(x) = 6x(x + \sqrt{x})$	d $f(x) = \frac{x^2 - 13x + 30}{\sqrt{x}}$

Je kunt een functie van de vorm $f(x) = (ax + b)^n$ primitiveren.

E6 Primitiveer.

a $f(x) = (3x + 2)^4$

b $f(x) = \frac{2}{(5x - 3)^3}$

Je kunt exact de oppervlakte berekenen van een gebied dat onder de x -as ligt.

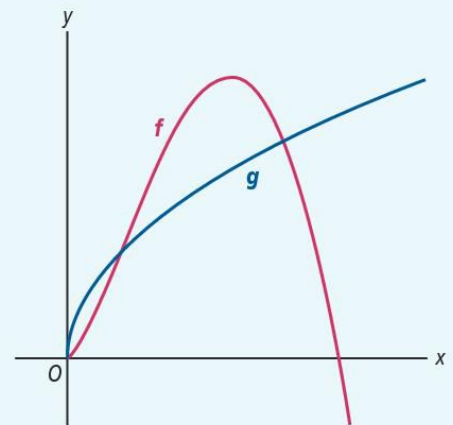
E7 Gegeven is de functie $f(x) = x - 3\sqrt{x}$.

- a** Plot en schets de grafiek van f .
- b** Bereken exact de nulpunten van f .
- c** Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f en de x -as.

Je kunt exact de oppervlakte berekenen van een gebied ingesloten door twee grafieken.

E8 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}(5x - x^2)\sqrt{x}$ en $g(x) = 2\sqrt{x}$.

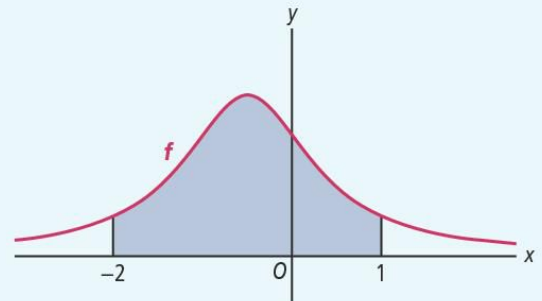
- a** Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken.
- b** Bereken exact de oppervlakte van elk van de twee gebieden, ingesloten door de twee grafieken.



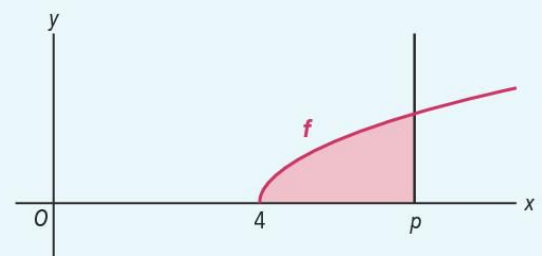
E9 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

G is het gebied begrensd door de grafiek van f , de x -as en de lijnen $x = -2$ en $x = 1$.

- a** Stel een integraal op om de oppervlakte G te berekenen.
- b** Bereken de integraal in twee decimalen.



E10 Gegeven is functie $f(x) = \sqrt{x - 4}$. De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $x = p$ met $p > 4$, is gelijk aan $2\sqrt{3}$. Bereken p .



Oppervlakte onder een parabool

In 1906 werd in een klooster te Constantinopel een brief gevonden van Archimedes (287-212 v.Chr.) aan Eratosthenes (276-194 v.Chr.). Archimedes schrijft daarin onder meer dat *een segment van een parabool $\frac{4}{3}$ is van de driehoek, die dezelfde grondlijn en dezelfde hoogte heeft.*

Archimedes introduceerde hiermee de zogenaamde uitputtingsmethode voor het berekenen van de oppervlakte onder de boog van een parabool.

Anders dan bij de Riemann-som waarbij rechthoekjes worden gebruikt, wordt hier de oppervlakte opgevuld met driehoekjes.

Je gaat onderzoeken of de bewering van Archimedes klopt. Van parabool p ligt de top in C , is lijn CM de symmetrieas en is punt P het midden van lijnstuk AM . De lijn PP_3 snijdt lijnstuk AC in punt P_1 en p in P_2 .

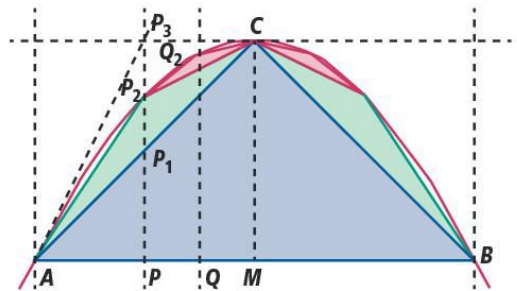
Dan is P_1 het midden van lijnstuk PP_3 , vanwege gelijkvormige driehoeken. Ook blijkt P_2 het midden van lijnstuk P_1P_3 te zijn, wat je kunt nagaan met een berekening.

Dan gelden de volgende beweringen:

$$\text{opp } \triangle P_1P_2C = \frac{1}{2} \text{ opp } \triangle P_1P_3C \text{ (halve basis)}$$

$$\text{opp } \triangle AP_1P_2 = \frac{1}{2} \text{ opp } \triangle AP_1P_3 = \frac{1}{2} \text{ opp } \triangle APP_1 \text{ (idem)}$$

$$\text{opp } \triangle APP_1 = \frac{1}{4} \triangle AMC \text{ (gelijkvormigheid)}$$

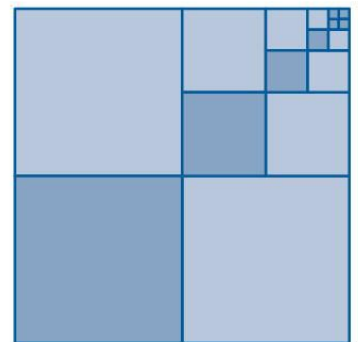


Opdracht

Noem D de oppervlakte van driehoek ABC .

Volgens Archimedes is de oppervlakte onder de parabool $\frac{4}{3}D$.

- Laat zien dat geldt $\text{opp } \triangle ACP_2 = \frac{1}{8} \text{ opp } \triangle ABC$.
- Op dezelfde manier vind je dat $\text{opp } \triangle P_2CQ_2 = \frac{1}{8} \text{ opp } \triangle ACP_2$.
Leg uit dat de oppervlakte ingesloten door de parabool en het lijnstuk AB geschreven kan worden als
$$D + 2 \cdot \frac{1}{8} D + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} D + \dots$$
- Laat met de figuur zien dat $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}$.
- Laat zien dat $D + 2 \cdot \frac{1}{8} D + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} D + \dots = \frac{4}{3} D$.
- Kies bij de parabool de functie $f(x) = k^2 - x^2$.
Om te laten zien dat P_2 het midden van lijnstuk P_1P_3 is, vul je $x = -\frac{1}{2}k$ in. Druk P_2P_3 uit in k .
- Druk $\text{opp } \triangle ABC$ uit in k en bereken $\int_{-k}^k f(x) dx$.
Formuleer je conclusie.



Exponentiële en logaritmische functies 11

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de eerdere hoofdstukken heb je geleerd te werken met exponentiële functies en in hoofdstuk 7 heb je kennis gemaakt met logaritmen.

In dit hoofdstuk ga je dieper in op het oplossen van exponentiële vergelijkingen en vergelijkingen met logaritmen. Daartoe leer je een aantal rekenregels met betrekking tot logaritmen. Verder leer je om exponentiële en logaritmische formules te herleiden tot een andere vorm, en ook te bewijzen dat twee functies hetzelfde zijn. In de laatste paragraaf wordt aandacht besteed aan wiskundige modellen, dat wil zeggen een beschrijving van een proces of verschijnsel door middel van formules.

Het onderwerp exponentiële en logaritmische functies komt weer terug in een volgend deel.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 42
- *Formules manipuleren* opdracht 12
- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 35



- V1** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = 2 \cdot 1,7^x$,
 $h(x) = 5 \cdot x^{1,7}$, $i(x) = 17 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ en $j(x) = 7 \cdot 1,0001^x$.
- Welke van deze functies zijn exponentiële functies?
 - Welke van deze functies zijn stijgend? Verklaar je antwoord.
 - Bereken voor elke functie exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as.

Theorie

De exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de **logaritme** van a voor het grondtal g . Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$.

Basisregel: Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en omgekeerd:
 uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Er geldt: ${}^g\log(1) = 0$ voor $g > 0$ en $g \neq 1$.

Voorbeeld

- Los exact op $7^{2x} = 3$.
- Van welke exponentiële vergelijking is $x = {}^2\log(11)$ de oplossing?

Oplossing

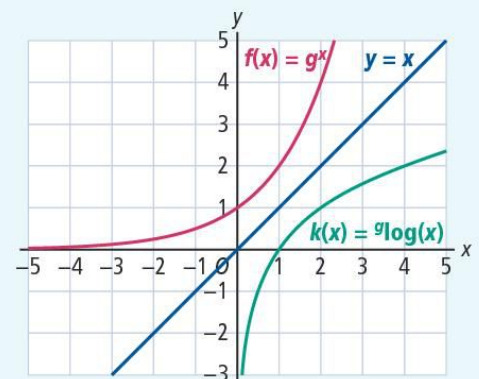
- Uit $7^{2x} = 3$ volgt $2x = {}^7\log(3)$
 dus $x = \frac{1}{2} \cdot {}^7\log(3)$
- $x = {}^2\log(11)$ is de oplossing van $2^x = 11$.

- V2** Los exact op.
- $5^x = 10$
 - $8^x = 3$
 - $3^{5x} = 9$
 - $4^{2x} = 7$
- V3** Stel een exponentiële vergelijking op waarvan de oplossing is gegeven.
- $x = {}^4\log(7)$
 - $x = 2 \cdot {}^5\log(6)$
 - $x = 1\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(2)$
 - $x = 1 + {}^2\log(12)$

Theorie

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

functie	$f(x) = g^x$	$k(x) = {}^g\log(x)$
domein	$D_f = \mathbb{R}$	$D_k = \langle 0, \rightarrow \rangle$
bereik	$B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$	$B_k = \mathbb{R}$
asymptoot	$y = 0$	$x = 0$
snijpunt assen	$(0, 1)$	$(1, 0)$



V4 Geef van elke functie het domein en de vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

a $f(x) = -12 + {}^3\log(4x - 8)$

b $g(x) = 4 \cdot {}^2\log(15 - 3x)$

V5 **a** De grafiek van $f(x) = {}^5\log(x)$ wordt gespiegeld in de lijn $y = x$.

Vul in: de beeldgrafiek hoort bij de functie ...

b De functie $f(x) = {}^g\log(x)$ is dalend.

Wat weet je over de waarde van g ?

V6 **a** Plot en schets in één figuur de grafieken van $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

b Controleer dat het snijpunt van de grafieken op de lijn $y = x$ ligt.

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen geldt de rekenregel

$${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)} \quad (b > 0 \text{ en } b \neq 1).$$

Met deze regel kun je elke logaritme herschrijven naar logaritmen met een ander grondtal.

Voorbeeld

Schrijf ${}^8\log(5)$ als een logaritme met grondtal 2.

Oplossing

$${}^8\log(5) = \frac{{}^2\log(5)}{{}^2\log(8)} = \frac{{}^2\log(5)}{3} = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(5)$$

V7 **a** Druk ${}^3\log(25)$ uit in logaritmen met grondtal 10.

b Druk ${}^{\frac{1}{2}}\log(15)$ uit in logaritmen met grondtal 6.

V8 Toon met behulp van de rekenregel aan dat

a ${}^8\log(17) = \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(17)$

b $\sqrt{2}\log(20) = 2 \cdot {}^2\log(20)$

V9 Het functievoorschrift $N(t) = 4 \cdot 3^{t+1}$ is te herleiden tot

$$N(t) = 4 \cdot 3^t \cdot 3^1 \text{ en dus tot } N(t) = 12 \cdot 3^t.$$

Schrijf in de vorm $N(t) = b \cdot g^t$.

a $N(t) = 2^{3+t}$

c $N(t) = 3^{-2+3t}$

b $N(t) = 15 \cdot 2^{t+4}$

d $N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-t}$

11.1 Vergelijkingen met exponenten en logaritmen

Je leert

- hoe je vergelijkingen met exponenten en logaritmen exact kunt oplossen
- hoe je een verdubbelingstijd of halveringstijd berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 2—3—4—5—7—U1—U2

Een beleggingsfonds belooft de klanten een toename van de waarde van de beleggingen van 4% per jaar.

- Hoe kun je een schatting geven van het aantal jaren dat verloopt totdat de waarde is verdubbeld?



- 1 a Los $2^{5-x} = 8$ exact op door beide kanten van de vergelijking te schrijven als macht van 2.
- b Los $3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+5} = \sqrt[4]{27}$ exact op door beide kanten van de vergelijking te schrijven als machten met hetzelfde grondtal.
- c Laat zien dat $x = -1 + {}^3\log(6)$ de oplossing is van de vergelijking $3^{1+x} = 6$.
- d Los exact op $5^{\frac{1}{2}x} = 2$.

Theorie

$x = {}^g\log(a)$ is de exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$. Je gebruikt deze eigenschap om de exacte oplossing van vergelijkingen met exponenten of logaritmen te vinden.

Voorbeeld 1

Los exact op $2^{1-x} = 25$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 1-x &= {}^2\log(25) \\ -x &= -1 + {}^2\log(25) \\ x &= 1 - {}^2\log(25) \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Los exact op ${}^3\log(2x-1) = 5$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 3^5 \\ 2x &= 1 + 243 \\ 2x &= 244 \\ x &= 122 \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Los exact op $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} = 14$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 3x-2 &= {}^{\frac{1}{2}}\log(14) \\ 3x &= 2 + {}^{\frac{1}{2}}\log(14) \\ x &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log(14) \end{aligned}$$

2 Los exact op.

a $7^{1-2x} = 21$

c $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-1} = 81$

b $\frac{1}{2}\log(1-2x) = 3$

d $1 + {}^5\log(x-1) = -2$

3 ${}^3\log^2(x)$ betekent $({}^3\log(x))^2$.

Gegeven is de vergelijking ${}^3\log^2(x) - 5 \cdot {}^3\log(x) = 6$.

a Stel ${}^3\log(x) = p$ en berekenen de oplossingen voor p .

b Welke waarden van x volgen hieruit?

Theorie

Ook bij sommige vergelijkingen met exponenten en logaritmen kan het handig zijn een substitutie te gebruiken.

Voorbeeld 1

Los exact op $\log^2(x) - \log(x) = 2$.

Oplossing

Stel $\log(x) = p$,

de vergelijking wordt $p^2 - p = 2$.

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p-2)(p+1) = 0$$

$$p = 2 \text{ of } p = -1$$

$$\log(x) = 2 \text{ of } \log(x) = -1$$

$$x = 10^2 = 100 \text{ of } x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

Voorbeeld 2

Los exact op $2^x - 5 \cdot 2^{-x} = 4$.

Oplossing

Vermenigvuldig links en rechts met 2^x .

$$(2^x)^2 - 5 = 4 \cdot 2^x$$

Stel $2^x = p$, de vergelijking wordt

$$p^2 - 4p - 5 = 0$$

$$(p-5)(p+1) = 0$$

$$p = 5 \text{ of } p = -1$$

$$2^x = 5 \text{ of } 2^x = -1$$

Uit $2^x = 5$ volgt $x = {}^2\log(5)$.

$2^x = -1$ heeft geen oplossing.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 Los exact op.

H

a $3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 6 = 0$

d $\frac{1}{2}\log^2(x) = 25$

b $3^x - 6 \cdot 3^{-x} = 5$

e ${}^2\log^2(x) + 3 \cdot {}^2\log(x) + 2 = 0$

c $6^{2x} - 4 \cdot 6^x = 0$

f $25^x - 3 \cdot 5^x = 28$

11.1 Vergelijkingen met exponenten en logaritmen

- 5 Bij een exponentieel groeiproces hoort de functie $A(t) = 600 \cdot 0,8^t$. De beginhoeveelheid is 600 en t is in uren.
- Bereken algebraïsch hoelang het duurt voordat die hoeveelheid is gehalveerd. Rond af op één decimaal.
 - Op een gegeven moment is de hoeveelheid 100. Bereken hoeveel tijd er verloopt tot die hoeveelheid is afgenomen tot 50. Rond af op één decimaal.
 - Leg uit: bij een exponentieel groeiproces met groeifactor 0,8 is de tijd die nodig is om te halveren onafhankelijk van de beginhoeveelheid en gelijk aan de oplossing van de vergelijking $0,8^t = 0,5$.

Theorie

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de **verdubbelingstijd** de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.

De **halveringstijd** is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$. De halveringstijd noem je ook wel **halfwaardetijd**.

Voorbeeld

Een groeiproces wordt beschreven door de formule $A = 30 \cdot 1,4^t$.

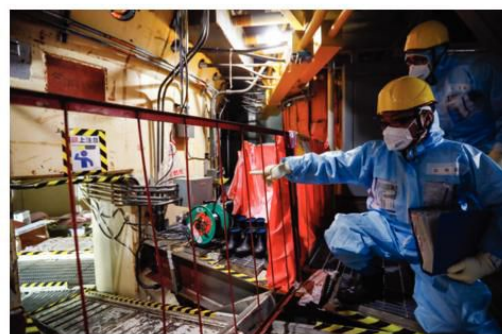
Bereken de verdubbelingstijd, afgerond op twee decimalen.

Oplossing

$g = 1,4$ dus los op $1,4^t = 2$.

$t = {}^{1,4}\log(2) \approx 2,06$

- 6 Het volume van de stam van een spar neemt per jaar met gemiddeld 5% toe.
- Stel een vergelijking op waarmee je de verdubbelingstijd voor het volume kunt vinden.
 - Benader deze verdubbelingstijd in hele jaren nauwkeurig.
 - Na hoeveel jaar is het volume van de spar verachtvoudigd?
 - Hoeveel keer past de verdubbelingstijd in de tijd die nodig is om de hoeveelheid acht keer zo groot te maken?
- 7 In 2011 leidden een aardbeving en een tsunami tot grote problemen in de Japanse kerncentrale Fukushima. Een kernramp volgde en er kwam radioactief materiaal vrij, onder andere jodium-131 en cesium-137. De halfwaardetijd van jodium-131 is 8 dagen en die van cesium-137 is 30 jaar.
- Bereken voor beide elementen hoelang het duurt totdat de radioactiviteit is teruggebracht tot 5%.
 - Stel dat het gebied als veilig wordt beschouwd als de radioactiviteit is teruggebracht tot 0,1%. Hoeveel keer langer duurt dit bij cesium-137 dan bij jodium-131? Rond je antwoord af op tientallen.



Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 04** Je gaat de vergelijking $9^x - 4 \cdot 3^x = 12$ exact oplossen.
- Verklaar stap 1 van de berekening op het blaadje.
 - Welke rekenregel is gebruikt bij stap 2?
 - Wat gebeurt er in stap 3?
 - Maak de berekening op het blaadje af.

Los exact op.

- e** $4^{2x} - 3 \cdot 4^x = 0$ **h** $2 \log^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 16$
f $\left(1\frac{1}{2}\right)^x + 2 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-x} = 3$ **i** $49^x + 2 \cdot 7^x = 8$
g ${}^3\log^2(x) + {}^3\log(x) = 12$ **j** $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

	$9^x - 4 \cdot 3^x = 12$	
	$(3^2)^x - 4 \cdot 3^x = 12$	1
	$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x = 12$	2
	$p^2 - 4p - 12 = 0$	3
	$(p - \dots)(p + \dots) = 0$	4
	$p = \dots$ of $p = \dots$	5
	$3^x = \dots$ of $3^x = \dots$	6
	$x = \dots$ of $x = \dots$	7

Uitdagende opdrachten

- U1**
- Plot en schets in één figuur de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = 2^x$.
 - Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g . Rond zo nodig af op twee decimalen.
 - Bereken ook de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van $f(x) = x^2$ en $h(x) = 1,1^x$. Rond af op één decimaal.
 - Voor welke waarden van a heeft de grafiek van de functie $k(x) = a^x$ met $a > 1$ precies één punt gemeenschappelijk met de grafiek van $f(x) = x^2$? Rond af op één decimaal.
- U2** Gegeven is een groeiproces met een groeipercentage van $p\%$.
- Leg uit dat de groeifactor kan worden geschreven als $1 + 0,01p$.
 - Leg uit dat voor de verdubbelingstijd geldt $t = {}^{1+0,01p}\log(2)$.
 - Plot en schets de grafiek van t .
 - In de economie wordt vaak de volgende vuistregel gebruikt: $\text{verdubbelingstijd} = \frac{70}{\text{groeipercentage}}$
 Komt deze regel goed overeen met de formule uit opdracht b?
 - Tot welk groeipercentage wijkt het resultaat van de vuistregel minder dan 5% af van de exacte waarde?

11.2 Rekenregels voor logaritmen

Je leert

- wat de rekenregels voor logaritmen zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—010—11—12—13
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 8—9—10—11—13—U3

In een land waar slechts weinig mensen zijn ingeënt, is een mazelen-epidemie uitgebroken. Het aantal patiënten wordt driemaal zo groot in ongeveer 5 dagen en tweemaal zo groot in ongeveer 3 dagen.

- In hoeveel dagen, ongeveer, wordt het aantal patiënten zesmaal zo groot?
- In hoeveel dagen, ongeveer, wordt het aantal patiënten achtmaal zo groot?



- 8 a $x = {}^3\log(11)$ is de exacte oplossing van $3^x = 11$. Wat is dus de waarde van $3^{{}^3\log(11)}$?
- b Geef zonder de rekenmachine te gebruiken de uitkomsten van $2^{{}^2\log(3)}$, $0,3^{0,3\log(4)}$ en $a^{a\log(3)}$.
- c Omgekeerd geldt $4 = 6^{0,3\log(4)}$ of ook $4 = 0,3^{0,3\log(4)}$. Zo kun je 4 schrijven als een macht van 6 en ook als een macht van 0,3. Schrijf op dezelfde manier het getal 7 als macht van 2, als macht van 12 en als macht van p .
- 9 Voor het rekenen met machten ken je rekenregels. Voor het rekenen met logaritmen bestaan ook rekenregels. Je kunt de rekenregels voor machten gebruiken om rekenregels voor logaritmen af te leiden.
- a Bereken $2^{{}^2\log(3)}$, $2^{{}^2\log(7)}$ en $2^{{}^2\log(3)} \cdot 2^{{}^2\log(7)}$.
- b Uit welke rekenregel voor machten volgt $2^{{}^2\log(3)} \cdot 2^{{}^2\log(7)} = 2^{{}^2\log(3) + {}^2\log(7)}$?
- c Leg uit dat de opdrachten a en b volgt dat $2^{{}^2\log(3) + {}^2\log(7)} = 2^{{}^2\log(21)}$.
- d Vul in: ${}^2\log(3) + {}^2\log(7) = {}^2\log(\dots)$.
- e Vul in: ${}^s\log(a) + {}^s\log(b) = {}^s\log(\dots)$.
- f ${}^5\log(7) + {}^5\log(70) = {}^5\log(a)$. Welke waarde heeft a ?
- g Schrijf de vergelijking ${}^5\log(70) - {}^5\log(7) = {}^5\log(b)$ als een optelling en bereken de waarde van b .
- h Schrijf $4 \cdot {}^3\log(2)$ als een optelling en toon aan: $4 \cdot {}^3\log(2) = {}^3\log(16)$.

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen gelden de volgende **rekenregels**.

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

$${}^g\log(m) = \frac{{}^n\log(m)}{{}^n\log(g)}$$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $n \neq 1$ en $m > 0$.

Voorbeeld 1

Schrijf als één logaritme ${}^4\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(36)$.

Oplossing

$${}^4\log(3) + \frac{1}{2} \cdot {}^4\log(36) =$$

$${}^4\log(3) + {}^4\log(36^{\frac{1}{2}}) =$$

$${}^4\log(3) + {}^4\log(6) =$$

$${}^4\log(18)$$

Voorbeeld 2

Schrijf als één logaritme $3 \cdot {}^2\log(7x) - {}^2\log(7)$.

Oplossing

$$3 \cdot {}^2\log(7x) - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log(7x)^3 - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log(343x^3) - {}^2\log(7) =$$

$${}^2\log\left(\frac{343x^3}{7}\right) = {}^2\log(49x^3)$$

Ondersteunende route → maak opdracht 010

10 Schrijf als één logaritme.

H

a ${}^3\log(5) + {}^3\log(6)$

b ${}^7\log(42) - {}^7\log(3) + {}^7\log(2)$

c ${}^7\log(42) - ({}^7\log(3) + {}^7\log(2))$

d $2 \cdot {}^5\log(4) + {}^5\log(a)$

e ${}^5\log(a) + {}^5\log(a+1)$

f $3 \cdot {}^{0,5}\log(p) - {}^{0,5}\log(p^2)$

11.2 Rekenregels voor logaritmen

- 11** Gegeven zijn $f(x) = \log(x)$, $g(x) = \log(1000x)$ en $h(x) = \log(0,01x)$.

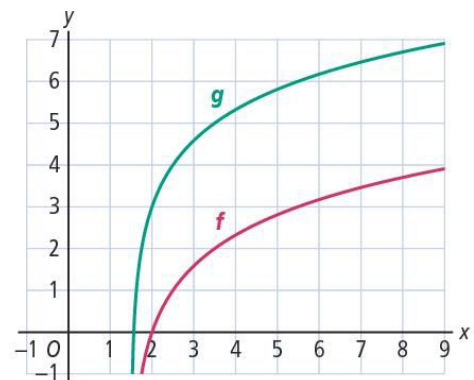
- Toon aan dat $g(x) = 3 + f(x)$.
- Toon aan dat $h(x) = -2 + f(x)$.
- Er geldt $h(x) = a + g(x)$.
Bereken de waarde van a .
- Schrijf $k(x) = 4 + f(x)$ als één logaritme.
- Schrijf $m(x) = 6 + f(x)$ als één logaritme.
- Gegeven is verder de functie $n(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$.

Toon aan dat $n(x) = -f(x)$ voor elke positieve waarde van x .

- Hoe ontstaan de grafieken van m en van n uit die f ?

- 12** In het assenstelsel staan de grafieken van $f(x) = {}^2\log(2x - 3)$ en $g(x) = {}^2\log(16x - 24)$.

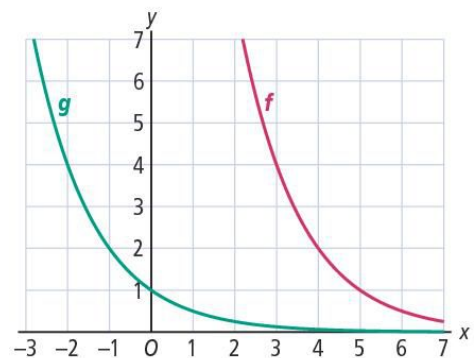
- Toon aan dat beide functies hetzelfde domein hebben.
- Gebruik de rekenregels voor logaritmen om te laten zien dat $g(x) = 3 + {}^2\log(2x - 3)$
- Door welke transformatie ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van f ?



- 13** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{5-x}$ en $g(x) = 2^{-x}$.

H

- Door in het functievoorschrift van g de variabele x te vervangen door $x - 5$ krijg je het functievoorschrift van f . Laat zien dat dit klopt.
- Door welke transformatie ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van g ?
- Je kunt het functievoorschrift van f ook schrijven als $f(x) = b \cdot 2^{-x}$.
Welke waarde heeft b ?
- Door welke andere transformatie gaat de grafiek van g over in de grafiek van f ?



Uitdaging route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b) \quad \mathbf{1}$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right) \quad \mathbf{2}$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p) \quad \mathbf{3}$$

O10 Op het blaadje staan drie rekenregels voor logaritmen.

a Op grond van welke rekenregel geldt $\log(25) = 2 \cdot \log(5)$?

b Verklaar met behulp van rekenregel 2 dat

$$\log(10x) - \log(x) = 1.$$

Schrijf als één logaritme.

c ${}^3\log(55) - {}^3\log(5)$

d ${}^5\log(90) - ({}^5\log(3) + {}^5\log(6))$

e $4 \cdot {}^9\log(2) - {}^9\log(3)$

f ${}^2\log(7) + 3 \cdot {}^2\log(p)$

g ${}^3\log(b^2) + {}^3\log(b - 2)$

h $5 \cdot {}^{0,3}\log(d) - {}^{0,3}\log(d^2)$

Uitdagende opdrachten

U3 Neem de vermenigvuldiging

$${}^2\log(3) \cdot {}^3\log(4) \cdot {}^4\log(5) \cdot \dots \cdot {}^{n-1}\log(n).$$

a Voor welke waarden van $n < 100$ is de uitkomst van deze vermenigvuldiging een geheel getal?

b Voor welke waarden van n is de uitkomst van deze vermenigvuldiging groter dan 20?

11.3 Herleiden

Je leert

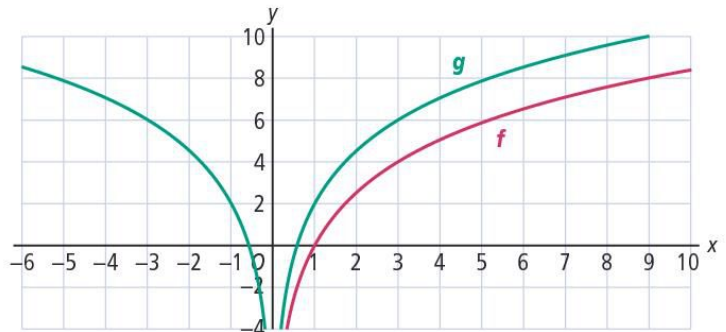
- hoe je exponentiële en logaritmische formules herleidt
- hoe je aantoonst dat twee functies hetzelfde zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 14—15— 016—17—18—19—20—021—21—22
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 16—17—18—19—20—21—22—23—U4—U5

Gegeven zijn de grafieken van $f(x) = 4 \cdot {}^3\log(x)$ en $g(x) = {}^3\log(9x^4)$.

- Welke overeenkomst en welk verschil is er tussen de grafieken van f en g ?



14 Gegeven is de formule $p = 1 + {}^3\log(r + 2)$.

- Leg uit dat $r + 2 = 3^{p-1}$.
- Druk r uit in p .

15 Gegeven is de formule $T = {}^4\log(2a)$.

- Laat zien dat je de formule kunt schrijven als $a = \frac{1}{2} \cdot 4^T$.
- Laat zien dat je de formule ook kunt schrijven als $a = 2^{2T-1}$.

Theorie

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een exponentiële formule.
Omgekeerd kun je een logaritmische formule tot een exponentiële formule herleiden. Je gebruikt de basisregel:
uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$
en omgekeerd:
uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$.

tot de macht

$${}^g\log(a) = b$$

is

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $R = 2 + 3 \cdot 5^t$.

Druk t uit in R .

Oplossing

$$2 + 3 \cdot 5^t = R$$

$$3 \cdot 5^t = R - 2 \quad (\text{links en rechts } - 2)$$

$$5^t = \frac{1}{3}R - \frac{2}{3} \quad (\text{links en rechts } : 3)$$

$$t = {}^5\log\left(\frac{1}{3}R - \frac{2}{3}\right) \quad (g^b = a \text{ geeft } b = {}^g\log(a))$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $Z = 4 + {}^2\log(3a)$.

Druk a uit in Z .

Oplossing

$$4 + {}^2\log(3a) = Z$$

$${}^2\log(3a) = Z - 4 \quad (\text{links en rechts } - 4)$$

$$3a = 2^{Z-4} \quad ({}^g\log(a) = b \text{ geeft } a = g^b)$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot 2^{Z-4} \quad (\text{links en rechts } : 3)$$

Ondersteunende route → maak opdracht 016

16 Druk t uit in N .

- a** $N = 3 \cdot 4^t$
- b** $N = -16 + 4 \cdot 5^t$
- c** $4N \cdot 6^t = 5$
- d** $7^{tN} = 10$

17 Druk p uit in q .

- H**
- a** $q = -2 + {}^5\log(p)$
 - b** $q = \log(6p - 12)$
 - c** $2^p \cdot q = 1$
 - d** $4q \cdot {}^3\log(p) = 8$

18 **a** Het verband tussen de variabelen R en S voldoet aan de formule $4 \cdot \log(S) - 2 \cdot \log(R) = 1$.**H** Toon algebraïsch aan dat $S^4 = 10R^2$.**b** Het verband tussen de variabelen P en Q voldoet aan de formule ${}^2\log(P) + 2 \cdot {}^2\log(Q) = -1$.

Schrijf het verband tussen deze variabelen als een formule zonder logaritmen.

19 Gegeven is de formule ${}^9\log(K) + {}^{27}\log(M) = 2$. Druk K uit in M . Schrijf de formule zonder logaritmen.**20** Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(x^2)$ en $g(x) = 2 \cdot \log(x)$.

- a** Plot en schets de grafieken van f en g .
- b** Welke overeenkomst en welk verschil is er tussen de twee grafieken? Geef hiervoor een verklaring.
- c** Vergelijk ook de grafieken van de functies $h(x) = \log(x^3)$ en $j(x) = 3 \cdot \log(x)$ met elkaar. Wat is je conclusie?

11.3 Herleiden

Theorie

Twee functies f en g , met hetzelfde domein, zijn hetzelfde als je kunt aantonen dat beide functies voor alle waarden uit het domein dezelfde uitkomst geven. Je toont dit meestal aan door te laten zien dat het functievoorschrift van f met behulp van de rekenregels kan worden omgezet in het functievoorschrift van g .

Voorbeeld

Toon aan dat de functies $f(x) = \frac{1}{2}\log(4x)$ en $g(x) = -2 - {}^2\log(x)$ hetzelfde zijn.

Oplossing

$$f(x) = \frac{1}{2}\log(4) + \frac{1}{2}\log(x)$$

$$f(x) = \frac{{}^2\log(4)}{{}^2\log\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$f(x) = \frac{2}{-1} + \frac{{}^2\log(x)}{-1}$$

$$f(x) = -2 - {}^2\log(x)$$

dus de functies f en g zijn hetzelfde.

Ondersteunende route → maak opdracht 021

21

a Toon aan dat de functies $f(x) = {}^5\log(x^3) + 6$ en

H

$g(x) = 3 \cdot {}^5\log(25x)$ hetzelfde zijn.

b Bewijs dat de functies $p(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x+6}$ en $q(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^{-\frac{1}{2}x}$ hetzelfde zijn.

c Schrijf $f(x) = {}^2\log(32x)$ in de vorm $f(x) = b + {}^2\log(x)$.

d Schrijf $f(x) = 9^{2x-2}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

22

a De functies $f(x) = a \cdot g^x$ en $h(x) = g^{x+b}$ zijn hetzelfde.

Wat is het verband tussen de getallen a en b ?

b De functies $f(x) = {}^s\log(x) + a$ en $h(x) = {}^s\log(bx)$ zijn hetzelfde.

Welk verband bestaat er tussen de getallen a en b ?

23

Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^5\log(4x)$,

$g(x) = 2 \cdot {}^5\log\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $h(x) = f(x) + g(x)$ met $x > 0$.

Toon algebraïsch aan dat $h(x) = 2 \cdot {}^5\log(2) - 3 \cdot {}^5\log(x)$.

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Ondersteunende opdrachten

016 Gegeven is de formule $2P - 5 = 3 \cdot 6^t$. Op het blaadje is een begin gemaakt met het herschrijven van de formule, zodat t wordt uitgedrukt in P .

- a** Wat is er gebeurd in stap 1?
b Vul stap 2 verder in.
c Pas de regel: 'Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ ' toe om stap 3 af te maken.

Druk t uit in P .

d $2P - 7 = \frac{1}{10} \cdot 3^t$

f $5^{t \cdot P} = 12$

e $2P \cdot 3^t = 9$

g $3P = 1\frac{1}{2} - 2 \cdot 5^t$

☐	$2P - 5 = 3 \cdot 6^t$		
☐	$3 \cdot 6^t = 2P - 5$		1
☐	$6^t = \dots$		2
☐	$t = \dots \log(\dots)$		3

021 In deze opdracht ga je bewijzen dat de functies $f(x) = {}^3\log(x^5) + 5$ en $g(x) = 5 \cdot {}^3\log(3x)$ hetzelfde zijn.

- a** Vul de juiste getallen in bij de eerste twee stappen.
b Verklaar stap 3.
c Maak het bewijs af.

Je gaat ook bewijzen dat de functies $f(x) = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{4-x}$ en $g(x) = \frac{1}{729} \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$ hetzelfde zijn.

- d** Vul het juiste getal in bij stap 1 van dit bewijs.
e Maak dit bewijs af.

☐	$g(x) = 5 \cdot {}^3\log(3x)$		
☐	$g(x) = {}^3\log((3x)^\dots)$		1
☐	$g(x) = {}^3\log(3^\dots \cdot x^\dots)$		2
☐	$g(x) = {}^3\log(\dots) + {}^3\log(\dots)$		3
☐			
☐	$f(x) = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{4-x}$		
☐			
☐	$f(x) = (3^\dots)^{4-x}$		1
☐			
☐	$f(x) = 3^\dots \cdot 3^\dots$		2

Uitdagende opdrachten

U4 Van een bepaalde hoeveelheid radioactief materiaal is er een verband tussen de intensiteit I van de straling en de tijd t in dagen volgens de formule $\log(I) = -0,009t + 1$.

Je kunt deze formule herleiden tot de vorm $I = b \cdot g^t$.

- a** Toon dat aan en bereken de waarde van b en van g .
b Bereken na hoeveel dagen de intensiteit is gehalveerd.

U5 Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 3^x$.

- a** Toon aan dat $h(x) = f(x+a) - f(x)$ voor elke waarde van $a \neq 0$ een exponentiële functie is.

- b** Toon aan dat $k(x) = \frac{f(cx)}{f(x)}$ voor elke waarde van $c \neq 1$ te schrijven is als $k(x) = b \cdot g^x$.

11.4 Vergelijkingen en ongelijkheden

Je leert

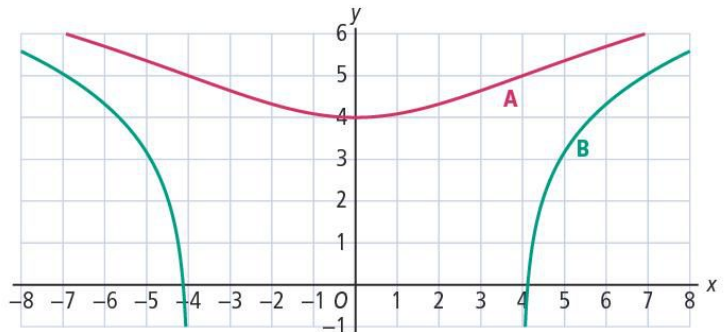
- hoe je exponentiële en logaritmische vergelijkingen exact oplost
- hoe je exponentiële en logaritmische ongelijkheden exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 24—25—026—26—27—28—029
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 24—25—26—27—29—30—U6

In het assenstelsel staan de grafieken van $f(x) = {}^2\log(x^2 - 16)$ en $g(x) = {}^2\log(x^2 + 16)$.

- Leg zonder te rekenen uit welke grafiek bij welke functie hoort.
- Leg zonder te rekenen uit dat de grafieken van deze functies elkaar niet snijden.



- 24 Gegeven is de vergelijking ${}^5\log(|3x - 7|) = 2$.
- Welke waarde kan $3x - 7$ in deze vergelijking hebben?
 - Los de vergelijking exact op.

- 25 Gegeven is de vergelijking ${}^2\log(x^2 - 4x) = {}^2\log(x - 4)$.
- Los op $x^2 - 4x = x - 4$.
 - Leg uit waarom de vergelijking ${}^2\log(x^2 - 4x) = {}^2\log(x - 4)$ geen oplossingen heeft.

Theorie

Van de logaritmische vergelijking ${}^g\log(x) = c$ is $x = g^c$ de exacte oplossing. Met behulp van deze regel en de rekenregels voor logaritmen los je logaritmische vergelijkingen exact op. Controleer zo nodig of je oplossing voldoet.

Voorbeeld 1

Los exact op $|{}^5\log(2x - 1)| = 3$.

Oplossing

$${}^5\log(2x - 1) = 3 \text{ of } {}^5\log(2x - 1) = -3$$

$$2x - 1 = 5^3 = 125 \text{ of } 2x - 1 = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

$$2x = 126 \text{ of } 2x = 1 + \frac{1}{125} = \frac{126}{125}$$

$$x = 63 \text{ of } x = \frac{63}{125}$$

(beide oplossingen voldoen)

Voorbeeld 2

Los exact op ${}^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) = 3$.

Oplossing

$${}^2\log(x(x + 2)) = 3$$

$$x(x + 2) = 2^3 \text{ geeft } x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x = -4 \text{ of } x = 2$$

Bij $x = -4$ bestaan ${}^2\log(x)$ en ${}^2\log(x + 2)$ niet. De oplossing is $x = 2$.

Ondersteunende route → maak opdracht 026

26 Los exact op.**H**

a ${}^3\log(|2x - 3|) = 4$

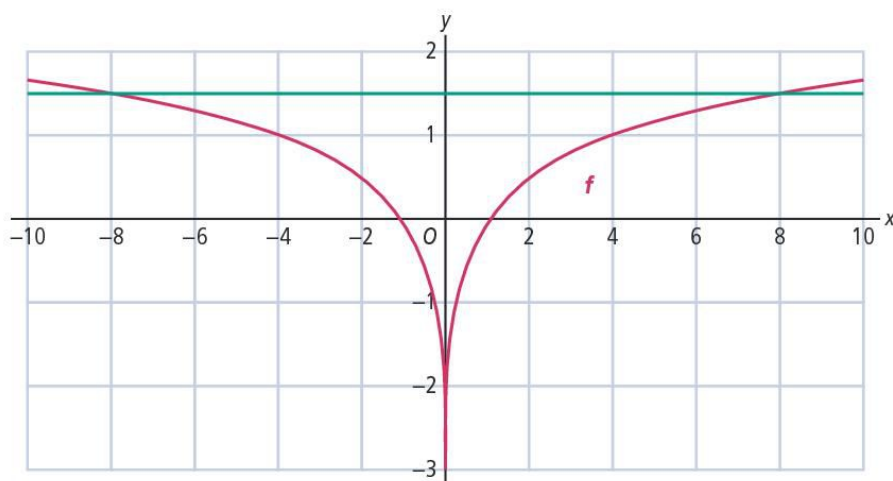
b ${}^2\log(x - 3) = 1 - {}^2\log(x + 3)$

c $\log(2x - 4) - \log(7) = 1$

d $\frac{1}{3}\log(4x) - \frac{1}{3}\log(6) = -2$

e ${}^5\log\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + {}^5\log(x)$

f ${}^3\log(5 - x) - {}^3\log(2x + 4) = 1$

**27** Getekend zijn de grafiek van de functie $f(x) = {}^4\log(|x|)$ en de lijn $y = 1\frac{1}{2}$.**a** Geef het domein van f .**b** Los exact op $f(x) = 1\frac{1}{2}$.**c** Voor welke waarden van x geldt $f(x) < 1\frac{1}{2}$?**d** Los exact op $f(x) \geq -2$.

11.4 Vergelijkingen en ongelijkheden

Theorie

Bij het oplossen van een ongelijkheid los je eerst de bijbehorende vergelijking op. Voor het trekken van de juiste conclusie over de oplossing van de ongelijkheid speelt ook het domein van de functie een belangrijke rol. Een plot van de grafieken kan daarbij helpen.

Voorbeeld

Los exact op ${}^4\log(x-5) \leq 2$.

Oplossing

$${}^4\log(x-5) = 2$$

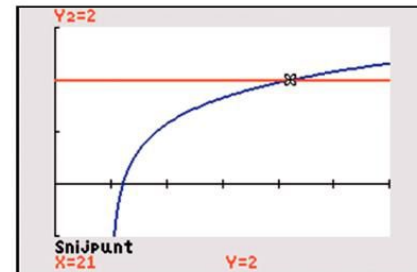
$$x-5 = 4^2$$

$$x = 21$$

In de plot staan de grafiek van $f(x) = {}^4\log(x-5)$ en de lijn $y = 2$.

Het domein van f is $\langle 5, \rightarrow \rangle$.

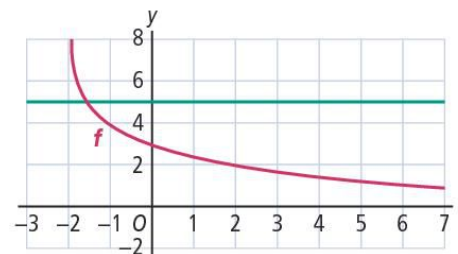
De oplossing van de ongelijkheid is $5 < x \leq 21$.



- 28** De grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}\log(x+2) + 4$ en de lijn $y = 5$ zijn getekend.

H

- a** Geef het domein van f .
b Los exact op $f(x) > 5$.



Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29** Los exact op.

H

- a** ${}^2\log(2x+1) < 5$
b ${}^3\log(4-x) \geq 2 - {}^3\log(4+x)$

- 30** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(15-2x)$ en $g(x) = {}^3\log(5x+20)$.

- a** Los exact op $f(x) \geq 1$.
b Los exact op $f(x) < g(x)$.
c Los exact op $f(x) \cdot g(x) > 0$.

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

- 026** Je gaat de vergelijking ${}^2\log(x^2 + 7) - {}^2\log(13 - x) = 2$ exact oplossen.
- Welke rekenregel is toegepast in stap 1?
 - Vul stap 2 verder in.
 - Los de vergelijking verder op.
 - Waarom moet je de oplossingen bij een vergelijking met logaritmen altijd controleren?
 - Voldoen de oplossingen van deze vergelijking?

☐	${}^2\log(x^2 + 7) - {}^2\log(13 - x) = 2$			
☐	${}^2\log\left(\frac{x^2 + 7}{\dots}\right) = 2$			1
☐	$\frac{x^2 + 7}{\dots} = \dots$			2
☐	$x^2 + 7 = \dots$			3
☐	$x^2 + \dots - \dots = 0$			4

- 029** Je gaat de ongelijkheid ${}^2\log(x - 1) + {}^2\log(7 - x) \leq 3$ exact oplossen.
- Maak de berekening op het blaadje af en los de bijbehorende vergelijking op.
 - Voldoen de oplossingen die je vindt?
 - Geef het domein van elk van de functies $f(x) = {}^2\log(x - 1)$ en $g(x) = {}^2\log(7 - x)$.
 - Plot en schets de grafieken van $h(x) = {}^2\log(x - 1) + {}^2\log(7 - x)$ en $k(x) = 3$.
 - Los de ongelijkheid op. Let daarbij op de domeinen van f en g .
 - Los exact op ${}^3\log(5 - 3x) > 4$.
 - Los exact op ${}^5\log(x^2 + 10) - {}^5\log(x + 2) \geq 1$.

☐	${}^2\log(x - 1) + {}^2\log(7 - x) \leq 3$			
☐	${}^2\log(x - 1) + {}^2\log(7 - x) = 3$			1
☐	${}^2\log((x - 1)(7 - x)) = 3$			2
☐	$(x - 1)(7 - x) = \dots$			3
☐	$\dots = \dots$			4

Uitdagende opdrachten

- U6** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = {}^3\log(p + 6x - x^2)$.
- Plot en schets de grafiek van f_0 .
 - Geef het domein van f_0 .
 - Voor welke waarde van p is het interval $\langle -3, 9 \rangle$ het domein van f_p ?
 - Voor welke waarde van p is het maximum van f_p gelijk aan 4?
 - Voor welke waarden van p bestaat de functie f_p voor geen enkele waarde van x ?

11.5 Groeimodellen

Je leert

- wat een wiskundig model is

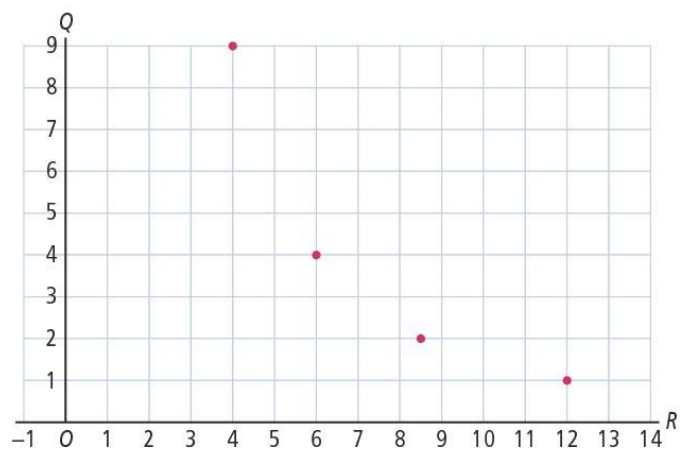
Leerroutes

- ondersteunend: 31—32—33—034—34—35
- doorlopend: 31—32—33—34—35—36
- uitdagend: 31—32—33—34—35—U7

Bij een experiment wordt gekeken naar het verband tussen de variabelen R en Q .

In de grafiek staan enkele meetgegevens.

- Welk soort verband kan er zijn tussen de variabelen?



- 31** Metingen die gedaan zijn bij een experiment leveren uitkomsten die vaak in een tabel worden weergegeven. Hiernaast zie je een klein deel van een dergelijke tabel.

- a** Op basis hiervan kun je een lineaire formule $C = a \cdot t + b$ opstellen voor het verband tussen C en t .

Bereken de waarde van a en van b .

- b** Het is ook mogelijk dat er een exponentieel verband van de vorm $C = b \cdot g^t$ bestaat tussen C en t .

Laat met een berekening zien dat de groeifactor ongeveer gelijk is aan 1,495 en bereken de waarde van b in twee decimalen.

t	C
2	10
6	50
10	...

In de praktijk zijn er meestal veel meer tabelwaarden beschikbaar dan in opdracht 31 het geval is. Door de waarden in een assenstelsel weer te geven kun je soms al een vermoeden krijgen over de formule die er bij past.

- 32** Bij radioactief materiaal neemt de sterkte van de straling op den duur af. Hoe snel dit gaat is afhankelijk van het soort materiaal. In de tabel staat van een voorwerp een aantal meetgegevens van de sterkte van de straling S .

H

- Verwerk de gegevens in een assenstelsel met t langs de horizontale as en S langs de verticale as. Neem langs de verticale as 1 cm voor 1000 becquerel.
- Schets zo goed mogelijk een vloeiende grafiek door de getekende punten en ga na dat het verband tussen t en S exponentieel zou kunnen zijn.
- Neem aan dat er sprake is van een exponentieel verband en bereken de groefactor per uur en de sterkte van de straling op tijdstip $t = 0$.
- Stel een formule op waarbij S is uitgedrukt in t .
- Controleer of alle waarden in de tabel bij benadering voldoen aan de gevonden formule.

<i>tijd t in uren</i>	<i>sterkte straling S in becquerel per gram</i>
1	4200
2	2940
5	1000
7	500

De becquerel is de eenheid die wordt gebruikt om de sterkte van radioactieve straling aan te geven.

Theorie

Gegevens die je verkrijgt bij het bestuderen van processen in de natuur of de wetenschap kun je vaak met behulp van een tabel en een grafiek weergeven. De tabel of de grafiek kun je gebruiken om vragen over het proces te beantwoorden. Soms kun je het proces beschrijven met een formule.

Je probeert de werkelijkheid dan weer te geven in een **wiskundig model**.

Voorbeeld

Bij een slinger is de slingertijd T in seconden afhankelijk van de lengte l in meters van de slinger. Enkele meetgegevens staan in de tabel. Zoek een formule bij de tabel.

Oplossing

Er is geen lineair verband en de waarden van T zijn afnemend stijgend. In dit geval vind je een verband door een tabel met T^2 toe te voegen.

Je ziet dan dat $T^2 \approx 4/l$ en daaruit volgt $T \approx \sqrt{4/l} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{l} = 2\sqrt{l}$.

l	T	T^2
0,2	0,90	0,81
0,4	1,26	1,59
0,6	1,55	2,40
0,8	1,79	3,20
1,0	2,00	4,00

- 33** Bij de tabel in opdracht 31 kun je ook een kwadratische formule van de vorm $C = p \cdot t^2 + q$ opstellen.

- Geef de vergelijking die ontstaat door hierin $t = 2$ en $C = 10$ in te vullen.
- Doe hetzelfde als bij opdracht a met $t = 6$ en $C = 50$.
- Druk bij de vergelijkingen die je in opdracht a en b hebt gevonden q uit in p .
- Bereken de waarden van p en q door het stelsel vergelijkingen bij opdracht c op te lossen.

Ondersteunende route → maak opdracht 034

- 34** In de tabel zie je van een aantal planeten de afstand A tot de zon in miljoenen kilometers en de omlooptijd t in jaren.

	Mercurius	Aarde	Mars	Jupiter	Saturnus	Neptunus
t	0,24	1,00	1,88	11,86	29,46	164,80
A	57,8	149,6	228	778	1430	4500

- Teken de punten uit de tabel in een assenstelsel waarbij je $x = \log(t)$ uitzet op de horizontale as en $y = \log(A)$ op de verticale as.
- Teken een rechte lijn die zo goed mogelijk door de getekende punten gaat en stel bij deze lijn een vergelijking op van de vorm $\log(A) = m \cdot \log(t) + n$.
- Leid uit de vergelijking die je in opdracht b hebt gevonden een verband af tussen t en A . Schrijf dit verband zonder logaritmen.



- 35** Verwarmde vloeistoffen, zoals koffie, thee of soep, koelen langzaam af. In het algemeen geldt daarbij dat het verschil tussen de temperatuur van de vloeistof en de omgevingstemperatuur per tijdseenheid met een vaste factor wordt vermenigvuldigd.

- Leg uit waarom die factor een getal tussen 0 en 1 moet zijn.

Ga uit van een omgevingstemperatuur van 20°C , een vloeistoftemperatuur van 85°C , terwijl het temperatuurverschil per 5 minuten met 70% afneemt.

- Stel een formule op voor het temperatuurverschil V in $^\circ\text{C}$ met de tijd t in eenheden van 5 minuten.
- Stel ook een formule op voor de vloeistoftemperatuur T in $^\circ\text{C}$ met de tijd t in minuten.

- 36** Bij een proef met een geluidsbron is de geluidsterkte I gemeten op verschillende afstanden d van de geluidsbron. De resultaten staan in de tabel.

d in m	4	10	14	20
I in W/m^2	25	4	2	1

- Leg uit waarom de tabel niet bij een exponentieel verband kan horen.
- Leg uit waarom de tabel niet bij een omgekeerd evenredig verband kan horen.
- Door een nieuwe tabel te maken met daarin de waarden van d^2 kun je ontdekken welk verband tussen d en I bestaat. Welke formule beschrijft dit verband?

Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

- 034** Bij een experiment zijn meetgegevens verzameld over de variabelen s en K .
Het is duidelijk dat het zinloos is om een grafiek te tekenen, omdat de waarden van K onderling sterk verschillen.
- Maak een nieuwe tabel met de waarden van $x = \log(s)$ en $y = \log(K)$.
 - Teken de punten uit de tabel van opdracht a in een assenstelsel en teken een rechte lijn die zo goed mogelijk bij deze punten aansluit.
 - Toon aan dat de vergelijking $y = 1,36 + 4x$ bij benadering de vergelijking van deze lijn is.
 - Uit het voorafgaande volgt dat $\log(K) = 1,36 + 4 \cdot \log(s)$. Schrijf de rechterkant van deze vergelijking als één logaritme.
 - Schrijf een formule op waarbij K is uitgedrukt in s en waarin geen logaritmen voorkomen.

s	K
2	370
5	14 380
10	230 000
25	8 984 400
40	58 800 000

Uitdagende opdrachten

- U7** Bij een experiment wordt op verschillende afstanden d van een geluidsbron de geluidsintensiteit I gemeten. De resultaten staan in de tabel.
- Neem de tabel over en voeg kolommen toe met $\log(d)$ en $\log(I)$.
 - Maak een grafiek met daarin de punten $(\log(d), \log(I))$.
 - Door de ligging van de punten is het mogelijk een formule op te stellen voor het verband tussen $\log(d)$ en $\log(I)$. Stel deze formule op.
 - Stel een formule zonder logaritmen op voor het verband tussen d en I .
 - Er is een lineair verband tussen de geluidsterkten in decibel en $\log(I)$. Druk dit verband uit in een formule.

d in m	I in W/m^2	decibel
10	0,495	117
20	0,125	111
40	0,031	105
60	0,014	101
80	0,008	99
100	0,005	97

11.6 Gemengde opdrachten

- 37** Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 4 \cdot {}^3\log(x)$.
- Los exact op $f(x) = 7$.
 - Het functievoorschrift van f kan worden geschreven in de vorm $f(x) = {}^3\log(px^q)$ met $x > 0$.
Bereken exact de waarde van p en van q .
 - Gegeven is de functie $g(x) = 1 + {}^3\log(9x^2)$.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
- 38** Gegeven is de functie $f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Bereken het domein van f .
 - Geef vergelijkingen van de asymptoten van f .
 - Los exact op $f(x) < 0$.
- 39** Het verband tussen de variabelen R en S is gegeven door de formule ${}^2\log(R) = 4,45 - 2,31S$.
Deze formule is ook te schrijven als $R = b \cdot g^S$.
Bereken algebraïsch de waarde van b en van g in twee decimalen.
- 40** Los exact op.
- $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$
 - $15 \cdot 3^{x+2} + 18 = 93$
 - $|1 - {}^2\log(4x + 1)| = 2$
 - $\frac{4}{{}^2\log(x) + 3} = {}^2\log(x)$
 - ${}^4\log(2x) + {}^4\log(7) \leq 3$
 - ${}^6\log(5x + 3) + {}^6\log(x - 1) = 2$
 - ${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 - 2x) \geq -3$
 - $8^x + 4^x = 6 \cdot 2^x$
- 41** Iemand krijgt 100 mg geneesmiddel toegediend door inspuiting in het bloed. Per dag wordt 40% van de aanwezige hoeveelheid afgebroken.
Na de halfwaardetijd t_h is nog precies de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid over.
- Schrijf t_h als logaritme en bereken t_h in uren nauwkeurig.
 - Na hoeveel tijd is er nog 36 mg over?
 - Zodra er nog maar 18 mg geneesmiddel in het bloed over is, moet er opnieuw ingespoten worden.
Na hoeveel tijd gebeurt dat?



42 In het assenstelsel staan de grafieken van de functies

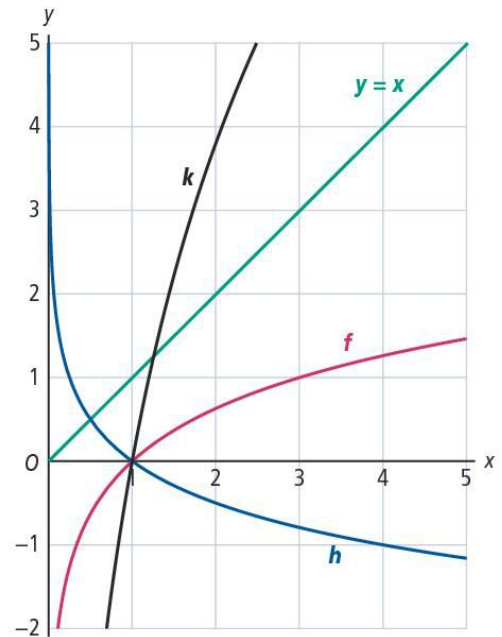
$$f(x) = {}^3\log(x), h(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(x) \text{ en } k(x) = {}^{1,2}\log(x).$$

Verder is getekend de lijn $y = x$.

Het is duidelijk te zien dat de grafiek van f de lijn $y = x$ niet snijdt, en dat de grafieken van h en k de lijn $y = x$ wel snijden.

Bekijk nu de familie van functies $m_g(x) = {}^g\log(x)$.

Onderzoek voor welke waarden van g de grafiek van een functie m_g met de lijn $y = x$ één gemeenschappelijk punt heeft en voor welke waarden van g de grafiek de lijn $y = x$ tweemaal snijdt. Rond de antwoorden af op één decimaal.



43 Veel groeiprocessen verlopen volgens een zogenaamde S-curve. Bij een dergelijk groeiproces is de groei aanvankelijk ongeveer exponentieel, daarna neemt de groeisnelheid af en de uitkomst nadert tot een zekere grenswaarde.

Een voorbeeld van een bijbehorende functie is

$$f(t) = \frac{8}{1 + 3 \cdot 0,6^t}$$

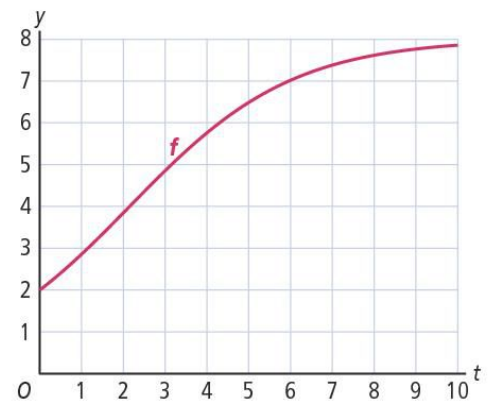
- a** Hoe groot is de beginwaarde $f(0)$ en tot welke waarde nadert de uitkomst van deze functie op den duur?

De algemene vorm voor de functie bij een S-curve

is $f(t) = \frac{A}{1 + B \cdot g^t}$. Hierbij zijn A en B zijn positieve getallen

en heeft g een waarde tussen 0 en 1.

- b** Door welke van de parameters A , B en g wordt het snijpunt met de y -as bepaald?
c Door welke parameter wordt de grenswaarde bepaald?
d Onderzoek hoe de grafiek verandert, als je de waarde van de parameter B groter maakt.
e Onderzoek welke invloed de waarde van g heeft op de vorm en de ligging van de S-curve.



Samenvatting

Theorie

Rekenregels voor logaritmen

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$$

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

$${}^g\log(m) = \frac{{}^n\log(m)}{{}^n\log(g)}$$

met $g > 0$, $g \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $n \neq 1$ en $m > 0$.

S1 Schrijf als één logaritme.

a ${}^2\log(13) - 2 \cdot {}^2\log(3)$ **b** $1\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(x) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(2)$

Theorie

Wiskundig model

In een wiskundig model wordt door middel van een formule
- een verband tussen verschillende variabelen - een
beschrijving gegeven van een proces of verschijnsel.

S2 Welke van de onderstaande kenmerken past bij het gegeven wiskundig model voor de variabelen S en t ?

- A Er is sprake van constante stijging.
- B De uitkomst nadert een grenswaarde.
- C Er is sprake van toenemende stijging.

a $S = 25 - 3 \cdot 0,95^t$ **b** $S = 12 + 4(t - 1)$

Vaardigheid

Je kunt een verdubbelingstijd of halveringstijd berekenen.

Bij een exponentieel groeiproces met groeifactor g is de verdubbelingstijd de tijd die nodig is om een hoeveelheid te verdubbelen. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = 2$.

De halveringstijd is de tijd die nodig is om een hoeveelheid te halveren. Deze tijd is de oplossing van de vergelijking $g^t = \frac{1}{2}$.

S3 Bij een groeiproces is de groeifactor 1,004 per week. Bereken algebraïsch de verdubbelingstijd. Geef een benadering in dagen nauwkeurig.

Vaardigheid

Je kunt exponentiële en logaritmische vergelijkingen exact oplossen.

Van de logaritmische vergelijking ${}^g\log(x) = c$ is $x = g^c$ de exacte oplossing. Met behulp van deze regel en de rekenregels voor logaritmen los je logaritmische vergelijkingen exact op. Controleer zo nodig of je oplossing voldoet.

In sommige gevallen los je de vergelijking op door een substitutie toe te passen.

Voorbeeld 1

Los exact op

$${}^3\log(x^2 - 5x - 20) = 1 + {}^3\log(x).$$

Oplossing

$${}^3\log(x^2 - 5x - 20) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x)$$

$${}^3\log(x^2 - 5x - 20) = {}^3\log(3x)$$

$$x^2 - 5x - 20 = 3x$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$(x - 10)(x + 2) = 0$$

$$x = 10 \text{ (voldoet)}$$

$$\text{of } x = -2 \text{ (voldoet niet)}$$

Voorbeeld 2

Los exact op

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 15.$$

Oplossing

Stel $\left(\frac{1}{2}\right)^x = p$, dan wordt de vergelijking

$$p^2 + 2p - 15 = 0$$

$$(p + 5)(p - 3) = 0$$

$$p = -5 \text{ of } p = 3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = -5 \text{ heeft geen oplossing.}$$

$$\text{Uit } \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 \text{ volgt } x = \frac{1}{2}\log(3).$$

S4 Los exact op.

a $\left({}^{1\frac{1}{2}}\log(x)\right)^2 = {}^{1\frac{1}{2}}\log(x) + 2$

b ${}^5\log(3x) + {}^5\log(2) = 4$

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(x^2 + 6x) = -3$

d $4^{2x} - 11 \cdot 4^x + 24 = 0$

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële of logaritmische ongelijkheid exact oplossen.

Bij het oplossen van een ongelijkheid los je eerst de bijbehorende vergelijking op. Voor het trekken van de juiste conclusie over de oplossing van de ongelijkheid speelt ook het domein van de functie een belangrijke rol. Een plot van de grafieken kan daarbij helpen.

Voorbeeld 1

Los exact op $3 - {}^2\log(x + 2) > 7$.

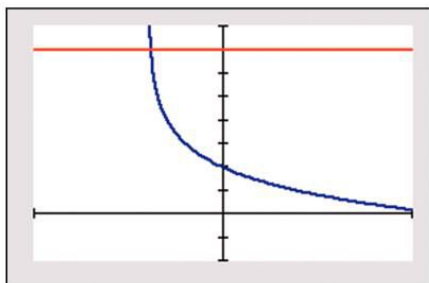
Oplossing

$$3 - {}^2\log(x + 2) = 7$$

$${}^2\log(x + 2) = -4$$

$$x + 2 = 2^{-4} = \frac{1}{16} \text{ dus } x = -1\frac{15}{16}$$

De logaritme bestaat alleen als $x > -2$.



De oplossing is $-2 < x < -1\frac{15}{16}$.

Voorbeeld 2

Los exact op ${}^2\log(9 - x^2) > 3 + {}^2\log(x)$.

Oplossing

$${}^2\log(9 - x^2) = 3 + {}^2\log(x)$$

$${}^2\log(9 - x^2) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = {}^2\log(8x)$$

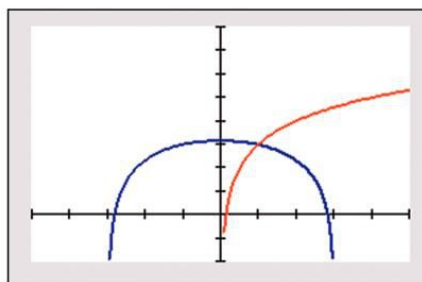
$$9 - x^2 = 8x$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(x + 9)(x - 1) = 0$$

$$x = -9 \text{ (voldoet niet) of } x = 1$$

$3 + {}^2\log(x)$ heeft alleen waarden als $x > 0$.



De oplossing is $0 < x < 1$.

S5 Los exact op.

a ${}^3\log(10x - x^2) < 2$

b ${}^3\log(10 - x) > -2 + {}^3\log(x + 5)$

Vaardigheid

Je kunt exponentiële en logaritmische formules herleiden.

Een logaritmische formule kun je herleiden tot een exponentiële formule of omgekeerd door het gebruiken van de regel: uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ of omgekeerd.

Voorbeeld 1

Gegeven is de formule $Q = 4 \cdot 1,5^x$.

Druk x uit in Q .

Oplossing

$$Q = 4 \cdot 1,5^x$$

$$4 \cdot 1,5^x = Q$$

$$1,5^x = \frac{1}{4}Q$$

$$x = {}^{1,5}\log\left(\frac{1}{4}Q\right)$$

Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $2 \cdot {}^3\log(T) = 5 \cdot {}^3\log(R) + 4$.

Druk T uit in R .

Oplossing

$$2 \cdot {}^3\log(T) = 5 \cdot {}^3\log(R) + 4$$

$${}^3\log(T) = 2\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(R) + 2$$

$${}^3\log(T) = {}^3\log(R^{2\frac{1}{2}}) + {}^3\log(9)$$

$${}^3\log(T) = {}^3\log(9R^{2\frac{1}{2}})$$

$$T = 9R^{2\frac{1}{2}}$$

- S6** Het verband tussen de variabelen P en Q is gegeven door de formule ${}^3\log(P) = 2,73 - 0,41Q$.
Deze formule is ook te schrijven als $P = c \cdot g^Q$.
Bereken algebraïsch de waarde van c en van g in twee decimalen.

Vaardigheid

Je kunt aantonen dat twee functies hetzelfde zijn.

Twee functies f en g , met hetzelfde domein, zijn hetzelfde als je kunt aantonen dat beide functies voor alle waarden uit het domein dezelfde uitkomst geven.

Voorbeeld

Toon aan dat de functies $f(x) = 2^{4x-3}$

en $g(x) = \frac{1}{8} \cdot 16^x$ hetzelfde zijn.

Oplossing

$$2^{4x-3} = 2^{4x} \cdot 2^{-3} = (2^4)^x \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 16^x$$

dus f en g zijn hetzelfde.

- S7** Toon aan dat de functies hetzelfde zijn.
- $f(x) = 3 + 5 \cdot {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^2\log(8x^5)$
 - $f(x) = \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot 5^x$ en $g(x) = 3^{-1\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{5})^x$

T1 Schrijf als één logaritme.

- a ${}^{24}\log(14) + {}^{24}\log(41)$
- b $\log(2) - \log(12) + \log(8)$
- c ${}^5\log(6) - ({}^5\log(\frac{1}{12}) - {}^5\log(2))$
- d ${}^2\log(b) - {}^2\log(3)$
- e ${}^{\frac{1}{2}}\log(p) + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4p}\right)$
- f $\frac{1}{2} \cdot {}^5\log(x^7) - 3 \cdot {}^5\log(\sqrt{x})$

T2 Los exact op.

- a $5^{|x-2|} = 7$
- b $3 - \log(x+2) = 2\frac{1}{3}$
- c ${}^2\log(x-6) + {}^2\log(x) = 4$
- d $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 24 = 0$
- e $2 \cdot {}^3\log(x) - {}^3\log(3x+4) = 0$
- f ${}^2\log(3x-2) < 7$
- g ${}^{\frac{1}{2}}\log(|8-x^2|) > -2$
- h $3^x - \frac{5}{3^x} = 4$

T3 Bij een exponentieel groeiproces hoort de formule $N = 1350 \cdot 1,08^t$ met t in jaren.

- a Bereken bij dit groeiproces algebraïsch de verdubbelingstijd in jaren. Rond af op hele jaren.
- b Op een bepaald moment is de hoeveelheid N gelijk aan 15 000. Bereken algebraïsch hoeveel jaar het duurt totdat die hoeveelheid is toegenomen tot 60 000. Rond af op hele jaren.

T4 Gegeven zijn de functies $f(x) = -1 + {}^2\log(5x-2)$ en $g(x) = {}^2\log(x^2)$.

- a Plot en schets de grafieken van f en g .
- b Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f en van de grafiek van g .
- c Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
- d Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

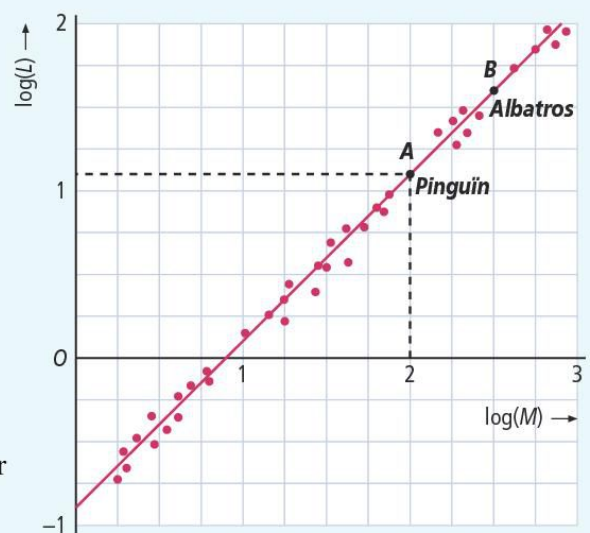
T5 Op de grafiek van de functie $f(x) = {}^a\log(x+b) + c$ liggen de punten $(-1, 0)$ en $(1, 1)$. De verticale asymptoot van f is de lijn $x = -3$. Bereken exact de waarde van a , van b en van c .

- T6** Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log\left(\frac{1}{3}x + 4\right)$.
- Geef het domein van deze functie.
 - Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f .
 - Het functievoorschrift van f kan worden geschreven als $f(x) = a + {}^3\log(x + b)$.
Toon dit aan en bereken de waarde van a en van b .

- T7** Voor de geluidsstrekte D in decibel (dB) van een toongenerator geldt $D = 10 \cdot \log\left(\frac{4,9 \cdot 10^5}{r^2}\right)$
- Hierin is r de afstand in meters tot de toongenerator.
- Bereken de geluidsstrekte op de afstanden 5 m, 7 m, 10 m en 20 m.
 - De formule is te herleiden tot de vorm $D = a + b \cdot \log(r)$, waarbij a en b constanten zijn.
Bereken de waarde van a en van b .
 - Bereken exact op welke afstand de geluidsstrekte gelijk is aan 0 dB.

- T8** Als een ei wordt uitgedroed, verliest het embryo water gedurende het broeden. De massa van het ei noem je M . De hoeveelheid water die verloren gaat noem je L . Zowel M als L zijn in grammen. In de grafiek is het verband tussen $\log(M)$ en $\log(L)$ weergegeven. De grafiek is gebaseerd op data die verkregen zijn van 65 soorten eieren. De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn.

- Bij punt A horen de meetgegevens van de pinguïn. Hoeveel gram is de massa van een ei van de pinguïn en hoeveel gram bedraagt het waterverlies van het embryo?
- Ongeacht de lengte van broedtijd en de massa van het ei is het verlies aan water van het embryo ongeveer 13% van de massa van het ei.
Ga na of dit voor de pinguïn geldt.
- Klopt dit ook voor de albatros (punt B)?
- Een formule die bij de rechte lijn hoort is $\log(L) = 1,031 \cdot \log(M) - 0,885$.
Deze formule is ook te schrijven als $L = a \cdot M^b$.
Bereken algebraïsch de waarde van a en van b .
Rond af op drie decimalen.



Extra oefening

Je kunt een verdubbelingstijd of halveringstijd berekenen.

- E1** De staatsschuld van een land stijgt al jaren exponentieel en de verwachting is dat dit blijft doorgaan. In 2018 kwam de schuld overeen met 64 miljard dollar en in 2019 was de schuld 72 miljard dollar.
- Bereken de groeifactor per jaar.
 - Bereken de staatsschuld in 2025, afgerond op miljarden dollars.
 - Bereken de verdubbelingstijd exact en geef ook een afgerond antwoord in maanden nauwkeurig.

Je kunt exponentiële en logaritmische vergelijkingen exact oplossen.

- E2** Los exact op.
- | | |
|---|--|
| a $\left(1\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 3$ | e ${}^2\log(5 - 2x) = -3$ |
| b $6^{2x-1} = 3$ | f $5^{-x+1} = 4$ |
| c $2 - {}^3\log(2x + 1) = -2$ | g $16^x - 3 \cdot 4^x = 10$ |
| d ${}^7\log\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1 - {}^7\log(x)$ | h ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = -1$ |

Je kunt exponentiële en logaritmische ongelijkheden exact oplossen.

- E3** Los exact op.
- | | |
|--|------------------------------------|
| a ${}^2\log(-2x + 1) > 5$ | d $2 - 3 \cdot \log(x) < 1$ |
| b $2^{3x-1} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ | e ${}^3\log(7 - x^2) < -1$ |
| c $2 \cdot {}^5\log(x) > {}^5\log(x + 6)$ | f $4^x \leq 2^x + 12$ |

Je kunt exponentiële en logaritmische formules herleiden.

- E4** Druk t uit in P .
- | | |
|------------------------------------|--|
| a $P = 4^t - 3$ | c $\log(P) - \log(t) = 1 \quad (P > 0 \text{ en } t > 0)$ |
| b $2P - 4 \cdot 3^{2t} = 0$ | d $P = 4 \cdot {}^{\frac{1}{3}}\log(2t) \quad (t > 0)$ |

Je kunt aantonen dat twee functies hetzelfde zijn.

- E5** Toon aan dat de functies $f(x) = 5 - 3 \cdot {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{32}x^3\right)$ hetzelfde zijn.

E6 Schrijf als één logaritme.

- a** $2 \cdot {}^5\log(11) - 3 \cdot {}^5\log(4)$ **c** $3 \cdot {}^2\log(x) + 1$
b ${}^{\frac{1}{4}}\log(x) + 2$ **d** $2 \cdot ({}^4\log(15) - {}^4\log(5)) + {}^4\log(3)$

E7 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(4 - 2x)$

en $g(x) = 2 + {}^2\log(x + 4)$.

Los exact op.

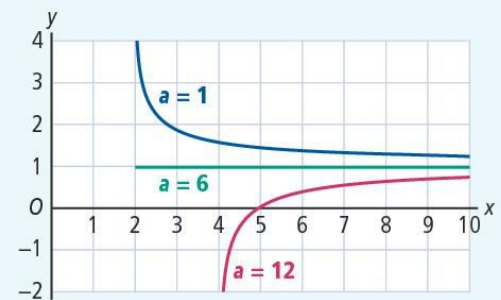
- a** $f(x) = g(x)$
b $f(x) \cdot g(x) = 0$

E8 Gegeven is de familie van functies

$$f_a(x) = {}^3\log(3x - a) - {}^3\log(x - 2).$$

De grafieken zijn getekend voor $a = 12$, $a = 1$ en $a = 6$.

- a** Geef het domein van de drie functies waarvan de grafiek getekend is.
b Welke waarde moet je voor a kiezen zodat het domein $\langle 10, \rightarrow \rangle$ is?
c Voor welke waarden van a is het domein $\langle 2, \rightarrow \rangle$?
d Leg uit waarom de grafiek voor $a = 6$ een deel van een rechte lijn is.



E9 De snelwegen in Nederland zijn vooral asfaltbetonwegen. De meest voorkomende zijn de dichte asfaltbetonwegen (DAB-wegen) en de zeer open asfaltbetonwegen (ZOAB-wegen). Voor beide soorten wegen is een formule op te stellen voor het verband tussen het geluidsniveau D in dB van het verkeer en de snelheid v in km per uur van het verkeer. Voor een DAB-weg geldt de formule $D = 35,9 \cdot \log(v) + 4,1$.

- a** Bij welke snelheid op een DAB-weg is het geluidsniveau 75 dB?
b Toon met de rekenregels aan dat een verdubbeling van de snelheid altijd ongeveer 11 dB méér geeft.

Voor een ZOAB-weg geldt de formule $D = 28,1 \cdot \log(v) + 16,0$.

- c** Ga na bij welke snelheden van het verkeer een ZOAB-weg een lager geluidsniveau heeft dan een DAB-weg.
d Bereken algebraïsch bij welke snelheden van het verkeer het geluid op een ZOAB-weg meer dan 4 dB lager is dan op een DAB-weg. Rond af op gehele kilometers per uur.
(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2004 tijdvak 2)



Kettingregel 10

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In vwo B deel 1 heb je in hoofdstuk 5 gezien dat bij elke functie f een afgeleide functie hoort waarmee je de helling in een punt van de grafiek van f exact kunt berekenen. De afgeleide functie gebruik je onder andere bij het berekenen van hellingen, bij het bepalen van extreme waarden en bij het opstellen van een vergelijking van de raaklijn in een gegeven punt van de grafiek.

In hoofdstuk 5 ging het alleen over de afgeleide van veeltermfuncties.

In dit hoofdstuk ga je ook andere functies differentiëren waaronder wortelfuncties en gebroken functies en ook functies die samengesteld zijn uit meerdere functies. Het aantal regels om functies te kunnen differentiëren wordt daarmee uitgebreid.

In vwo B deel 3 wordt het aantal regels voor het differentiëren van functies nog verder uitgebreid en leer je ook nog andere soorten functies te differentiëren, zoals goniometrische functies, exponentiële functies en logaritmische functies.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 30
- *Modelleren en abstraheren* opdracht 44
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 39



Theorie

De helling van de grafiek van de functie f in een punt op de grafiek van f bereken je met de **afgeleide functie** van f . Het bepalen van een afgeleide functie heet **differentiëren**.

De notatie voor de afgeleide functie is f' of $\frac{dy}{dx}$

Regels voor het differentiëren

functie	afgeleide functie
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$g(x) = f(x) + c$	$g'(x) = f'(x)$
$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$ (somregel)
$s(x) = f(x) - g(x)$	$s'(x) = f'(x) - g'(x)$

Voorbeeld

Differentieer.

$$f(x) = x^5$$

$$g(x) = 3x^4 + 7x^2 + 8x - 1$$

$$h(x) = (x-3)(x^2+8)$$

$$p = -9t^7 + 18$$

Oplossing

$$f'(x) = 5x^4$$

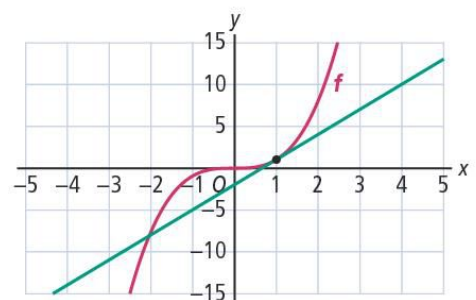
$$g'(x) = 12x^3 + 14x + 8$$

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 24 \text{ dus}$$

$$h'(x) = 3x^2 - 6x + 8$$

$$\frac{dp}{dt} = -63t^6$$

- V1** Differentieer. Werk zo nodig eerst de haakjes weg.
- a** $f(x) = 6x - 0,3x^{10}$ **c** $h(x) = 2(x^4 - x^2 + 3)$
b $g(x) = 6x^3 + x + 2$ **d** $k(x) = x^2(3x - 2x^3)$
- V2** Stel een formule op voor $\frac{ds}{dt}$. Werk eerst de haakjes weg.
- a** $s = 3(t+5)^2$ **c** $s = (t^3+3)(2t-3)$
b $s = \frac{1}{3}(t^4-5)$ **d** $s = 25t^2 + (t-2)^2$
- V3** **a** Gegeven is de functie $f(x) = 0,5x^2 + 3x$.
 Bereken met de afgeleide de helling van de grafiek van f in het punt $P(2, 8)$.
b Gegeven is de functie $g(x) = 5x^3 - 0,5x^2 - 7$.
 Bereken exact de helling van de grafiek van g in het punt $Q(1, -2\frac{1}{2})$.
- V4** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.
 In het punt $(1, 1)$ is de raaklijn aan de grafiek van f getekend.
- a** Bereken exact de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn.
b Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f waar de helling gelijk is aan 6.



- V5** Gegeven is de functie $K(p) = -p^3 + 3p^2 + 7$.
- Los exact op $K'(p) = 0$.
 - Ga met een plot van de grafiek na of er bij de gevonden waarden van p sprake is van een minimum of een maximum van K .
 - Bereken het maximum en het minimum van K .

- V6** Bereken exact de maxima en minima.

a $L(m) = -8m^2 + 16m - 3$ **c** $T(q) = -q^3 + 3q^2 + 9q$
b $h(x) = x^3 + 4x^2 + 16x$ **d** $w(r) = (3r - 4)^2 - 3r$

Aanpak

Hoe stel je een vergelijking op van de raaklijn in een punt P van een grafiek?

- Bereken de helling a in P met behulp van $f'(x)$.
- Vul a in bij de vergelijking $y = ax + b$.
- Bereken b door de coördinaten van P in te vullen.
- Schrijf een vergelijking van de raaklijn op.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^3 + 8x^2 - 15x$ in het punt $P(2, 10)$.

Oplossing

1 $f'(x) = 3x^2 + 16x - 15$ **3** $10 = 29 \times 2 + b$
 $a = f'(2) = 29$ $b = -48$
2 $y = 29x + b$ **4** $y = 29x - 48$

- V7** Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt P .
- $f(x) = 0,5x^4 - 3$ en $P(1, -2\frac{1}{2})$.
 - $f(x) = -2x^3 - 0,25x^2 + 5$; de x -coördinaat van P is 2.
 - $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 1)$ en $P(2, 18)$.

- V8** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
- Bereken exact het maximum en het minimum van f .
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de y -as.
 - De grafiek van f snijdt de x -as in het punt $A(-2, 0)$.
Op de grafiek ligt een punt P zo, dat de raaklijnen in A en P aan de grafiek van f evenwijdig zijn.
Bereken de coördinaten van P .

10.1 Machtsfuncties differentiëren

Je leert

- hoe je een machtsfunctie differentieert

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—03—4—5—06—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

Max beweert dat zijn auto vanuit stilstand binnen 10 seconden een snelheid van 100 km per uur bereikt. Als zijn auto vertrekt, voldoet de afgelegde afstand aan de formule $s = 6t\sqrt{t}$, met s in meters en t in seconden.

- Is de bewering van Max in overeenstemming met deze formule?



- 1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$
- a Benader met het differentiequotient $\frac{f(2,001) - f(2)}{0,001}$ de helling van de grafiek van f in het punt $(2, \frac{1}{2})$.
- b Benader met een differentiequotient de helling van de grafiek van f in het punt $(-1, -1)$.
- c De helling van de grafiek van f bereken je door in het differentiequotient $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de waarde van Δx naar 0 te laten naderen. Je moet de teller van het differentiequotient eerst herleiden tot één breuk. Op het blaadje staat een begin van deze herleiding. Maak deze herleiding af.
- d Gebruik deze herleiding om te laten zien dat $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ tot $-\frac{1}{x^2}$ nadert als $\Delta x \rightarrow 0$.
- e Je kunt $f(x) = \frac{1}{x}$ ook schrijven als $f(x) = x^{-1}$.
Neem aan dat de regel voor het differentiëren van machtsfuncties ook geldt voor negatieve exponenten.
Laat zien dat dan ook volgt dat $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

•	$f(x + \Delta x) - f(x) =$		
•	$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} =$		
•	$\frac{\dots}{x(x + \Delta x)} - \frac{\dots}{x(x + \Delta x)} = \dots$		

Als $f(x) = x^n$
dan $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

2 Gegeven is de functie $g(x) = \frac{1}{x^3}$

- Het functievoorschrift $g(x)$ kun je schrijven als $g(x) = x^{-3}$. Hoe ziet $g'(x)$ eruit volgens de regel naast opdracht 1e?
- Maak met je rekenmachine een tabel met benaderingen van de hellingen van de grafiek van g voor $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.
- Maak ook een tabel bij de afgeleide functie die je bij opdracht a hebt gevonden. Komen de tabellen met elkaar overeen?
- Beantwoord de vragen bij de opdrachten a, b en c voor de functie $h(x) = x^{0,7}$.

Plot1	Plot2	Plot3
$\text{Y1} = X^{-3}$	$\text{Y2} = \frac{d}{dx}(\text{Y1}) _{x=x}$	
$\text{Y3} =$		
$\text{Y4} =$		
$\text{Y5} =$		
$\text{Y6} =$		
$\text{Y7} =$		
$\text{Y8} =$		

Theorie

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van a .

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $g(x) = 4x^{0,6}$ en $h(x) = \frac{5x+6}{x^3}$

Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

Oplossing

$$f(x) = \frac{1}{x^4} \text{ geeft } f(x) = x^{-4}$$

$$f'(x) = -4x^{-5}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{x^5}$$

$$g(x) = 4x^{0,6}$$

$$g'(x) = 2,4x^{-0,4}$$

$$g'(x) = \frac{2,4}{x^{0,4}}$$

$$h(x) = \frac{5x+6}{x^3} \text{ geeft } h(x) = \frac{5x}{x^3} + \frac{6}{x^3}$$

$$h(x) = 5x^{-2} + 6x^{-3} \text{ dus } h'(x) = -10x^{-3} - 18x^{-4}$$

$$h'(x) = -\frac{10}{x^3} - \frac{18}{x^4}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

3 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

H

a $p(x) = -2x^{-2,8}$

c $g(x) = \frac{x+1}{x^2}$

b $f(x) = \frac{2}{x^6} + \frac{1}{3x^2}$

d $k(x) = \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4}$

4 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.

Schrijf $f(x)$ in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$ en toon aan dat $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10.1 Machtsfuncties differentiëren

Theorie

Ook wortelfuncties zijn machtsfuncties. Om een wortelfunctie te differentiëren schrijf je deze eerst in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

In het bijzonder geldt: als $f(x) = \sqrt{x}$ dan is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = x^3\sqrt{x}$ en $g(x) = x^2(5 + \sqrt[3]{x})$.

Oplossing

$$f(x) = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = 5x^2 + x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$f(x) = x^{3\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = 5x^2 + x^{2\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = 10x + 2\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 3\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}$$

$$g'(x) = 10x + 2\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$$

- 5 Gegeven is de functie $f(t) = 4t^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{t}}$
- a Laat zien dat je $f(t)$ kunt schrijven als $f(t) = 8t^{2\frac{1}{2}}$.
- b Toon aan dat $f'(t) = 20t\sqrt{t}$.

Ondersteunende route → maak opdracht O6

- 6 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

H

a $a(x) = \sqrt[5]{x} + 2\sqrt{x}$

d $r(x) = x(3x + \sqrt{x})$

b $f(x) = 5x^2\sqrt{x}$

e $h(x) = (4x - \sqrt{x})^2$

c $k(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{6}{5x}$

f $j(x) = \frac{2x+4}{x\sqrt{x}}$

- 7 Uit onderzoek blijkt dat de hoeveelheid energie die een parkiet per meter bij een bepaalde snelheid verbruikt, bij benadering berekend kan worden met de formule

$$D = \frac{6,0}{v^2} + 0,00050v^2 - 0,033 \text{ met } D \text{ het energieverbruik per}$$

meter in joule per meter (J/m) en v de snelheid in meters per seconde (m/s). De snelheid waarbij het energieverbruik per meter minimaal is, heet de kruissnelheid. Om die kruissnelheid te berekenen is de afgeleide van D nodig.

Bereken deze kruissnelheid in m/s. Rond af op één decimaal.
(Ontleend aan CE havo wiskunde B 2012 1e tijdvak)



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03 Op het blaadje is een begin gemaakt met het differentiëren

van $f(x) = \frac{8x^2 - 3}{x^4}$

- Leg uit wat er in stap 1 is gebeurd.
- Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd en vul op de puntjes de ontbrekende exponent in.
- De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$. Gebruik deze regel om stap 3 af te maken.
- Maak het functievoorschrift van f' in stap 4 af.

Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

e $g(x) = 15x^{-3,2}$ g $i(x) = \frac{4x^2 + 6}{x^3}$
 f $h(x) = \frac{8}{x^4} + \frac{1}{4x^5}$ h $j(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 10}{x^6}$

●	$f(x) = \frac{8x^2 - 3}{x^4}$		
●	$f(x) = \frac{8x^2}{x^4} - \frac{3}{x^4}$		1
●	$f(x) = 8x^{-2} - 3x^{-4}$		2
●	$f'(x) = -16x^{-3} + \dots x^{-5}$		3
●	$f'(x) = -\frac{16}{x^3} + \frac{\dots}{x^5}$		4
●			

06 Op het blaadje zie je hoe Dave de afgeleide vindt van de

functie $f(x) = \frac{8x + 5\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$

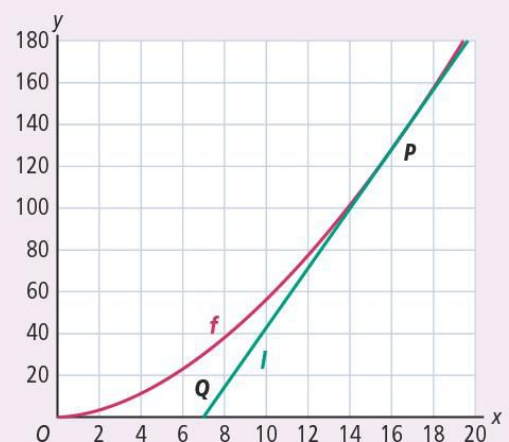
- In stap 1 heeft Dave de breuk gesplitst in twee breuken. Leg uit hoe Dave aan de noemer $x^{2\frac{1}{2}}$ komt.
- Welke rekenregel voor machten gebruikt hij in stap 2?
- Verklaar de factor -12 in stap 3.
- Leg uit wat Dave in stap 4 heeft gedaan.
- In stap 5 heeft hij de afgeleide zonder gebroken exponent geschreven. Waarom schrijft hij x^2 voor de wortel?

●	$f(x) = \frac{8x + 5\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$		Dave
●	$f(x) = \frac{8x}{x^{2\frac{1}{2}}} + \frac{5x^{\frac{1}{2}}}{x^{2\frac{1}{2}}}$		1
●	$f(x) = 8x^{-1\frac{1}{2}} + 5x^{-2}$		2
●	$f'(x) = -12x^{-2\frac{1}{2}} - 10x^{-3}$		3
●	$f'(x) = -\frac{12}{x^{2\frac{1}{2}}} - \frac{10}{x^3}$		4
●	$f'(x) = -\frac{12}{x^2\sqrt{x}} - \frac{10}{x^3}$		5
●			

Uitdagende opdrachten

U1 Lijn l met vergelijking $y = 14x - 98$ snijdt de x -as in punt Q en raakt de grafiek van de functie $f(x) = x\sqrt[4]{x^3}$ in punt P .

Bereken exact de oppervlakte van $\triangle OPQ$.



10.2 Samengestelde functies

Je leert

- wat een samengestelde functie of kettingfunctie is
- hoe je herkent uit welke functies een samengestelde functie is opgebouwd

Leerroutes

- ondersteunend: 8—9—010—10—11—12—013
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14
- uitdagend: 8—9—10—11—13—14—U2

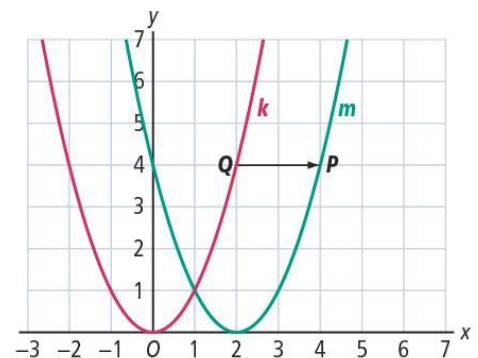
Een stalen vat is gevuld met gas. Als het vat verwarmd wordt, neemt ook de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van het gas toe, en daarmee de druk p in hPa van het gas in het afgesloten vat. T voldoet aan de formule $T = 20 + 0,5t$ met t de tijd in minuten en p aan de formule $p = 3,4T + 932$.

- Hoe kun je de druk van het gas op een bepaald tijdstip uitrekenen zonder eerst de temperatuur te berekenen?



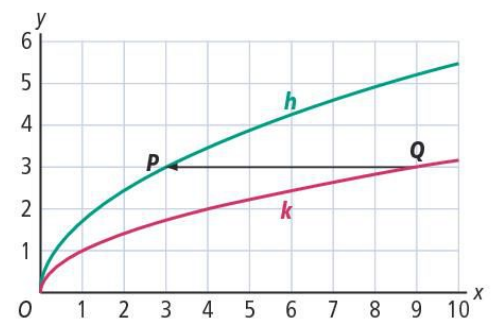
- 8 Op de grafiek van de functie $k(x) = x^2$ ligt het punt $Q(2, 4)$. Bij de verschuiving van 2 naar rechts is de grafiek van de functie m de beeldgrafiek van de grafiek van k en is punt P het beeld van Q .

- Geef het functievoorschrift van m .
- Bereken exact de helling van de grafiek van k in Q .
Waarom weet je nu de helling van de grafiek van m in P ?
- Welke waarde van x moet je bij $k'(x)$ invullen om de helling in P te berekenen? Vul in: $m'(4) = k'(\dots)$.
- Vul in: $m'(x) = k'(x - \dots)$.
- Geef het functievoorschrift van m' .



- 9 Gegeven zijn de grafieken van $k(x) = \sqrt{x}$ en $h(x) = \sqrt{3x}$. Op de grafiek van k ligt het punt $Q(9, 3)$ en op de grafiek van h het punt $P(3, 3)$. Bij een vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as is de grafiek van h de beeldgrafiek van de grafiek van k en is P het beeld van Q .

- De raaklijn in Q heeft als vergelijking $y = \frac{1}{6}x + 1\frac{1}{2}$.
Geef een vergelijking van het beeld van deze raaklijn bij vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as.
- Hoe groot is de helling in het beeldpunt P ?
- Vul in: de helling in punt $P = \dots \times$ de helling in punt Q , dus $h'(3) = \dots \cdot k'(9)$.
- Vul in: $h'(x) = \dots \cdot k'(\dots)$.
- Geef het functievoorschrift van h' .



Theorie

Als $g(x) = f(x - b)$ dan is $g'(x) = f'(x - b)$.

Als $g(x) = f(ax)$ dan is $g'(x) = a \cdot f'(ax)$.

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = (x + 7)^3$ en $h(x) = \sqrt{7x}$.

Oplossing

$$f'(x) = 3(x + 7)^2 \text{ en } h'(x) = 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7x}} \text{ ofwel } h'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x}}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 010

10 Differentieer.

a $f(x) = (x - 3)^5$

e $h(x) = (x + 8)^4$

b $W = \sqrt{p + 7}$

f $k(x) = \sqrt[3]{5x}$

c $g(x) = \frac{4}{x + 5}$

g $r(x) = \frac{6}{x - 2}$

d $y = \sqrt{-3x}$

h $P = \frac{13}{(9t)^8}$

Als de grafiek van een functie f horizontaal verschoven wordt en vervolgens vermenigvuldigd ten opzichte van de y -as, ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = f(ax + b)$. Een nieuwe functie kan ook ontstaan door twee functies achter elkaar toe te passen. Daar gaan de volgende opdrachten over.

- 11 a** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4x - 2$ en $g(x) = 2^{\frac{1}{2}x}$. Je berekent $g(f(3))$ door eerst $f(3)$ te berekenen en de uitkomst hiervan in het functievoorschrift $g(x)$ in te vullen.

$$3 \xrightarrow{f(x) = 4x - 2} 10 \xrightarrow{g(x) = 2^{\frac{1}{2}x}} 2^5$$

Ga na dat $g(f(3)) = 32$.

- b** Gegeven is de functie $k(x) = 2^{2x-1}$. Laat zien dat $k(x) = g(f(x))$.

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

- c** Gegeven zijn de functies $p(x) = 2x + 1$ en $q(x) = \sin(x)$. Geef het functievoorschrift van $r(x) = q(p(x))$.
- d** $m(x) = \log(4x - 3)$ is te schrijven als $m(x) = w(v(x))$. Geef functievoorschriften van v en w .

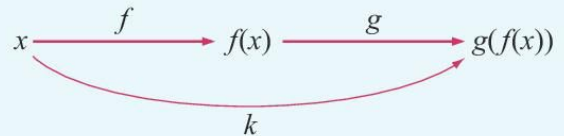
10.2 Samengestelde functies

Theorie

Als $k(x)$ wordt berekend door eerst x in te vullen in het functievoorschrift van de functie f en dat resultaat in te vullen in het functievoorschrift van de functie g , dan heet de functie k een samenstelling van f en g . In formule:

$$k(x) = g(f(x)).$$

Een **samengestelde functie** heet ook wel een **kettingfunctie**.

**Voorbeeld 1**

Geef het functievoorschrift $k(x) = g(f(x))$ als

$$f(x) = x^3 \text{ en } g(x) = \sqrt{x} + 2$$

Oplossing

$$k(x) = g(x^3) = \sqrt{x^3} + 2$$

Voorbeeld 2

De functie $h(x) = \frac{5}{(3x^2 + 4)^3}$ is samengesteld uit de functies f en g met $h(x) = g(f(x))$.

Geef functievoorschriften voor f en g .

Oplossing

$$\text{Kies } f(x) = 3x^2 + 4 \text{ en } g(x) = \frac{5}{x^3}$$

12 Geef functievoorschriften van $k(x) = g(f(x))$ en $h(x) = f(g(x))$.

H **a** $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = 4 - 2x$

b $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = 2x - 3$

c $f(x) = 3^x$ en $g(x) = \frac{3}{x}$

d $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$

Ondersteunende route → maak opdracht 013

13 Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.

H Geef mogelijke functievoorschriften van g en f .

a $k(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$ **c** $k(x) = \log(x^2 - 3x)$

b $k(x) = \frac{2}{3x^4 + 7}$ **d** $k(x) = \frac{2}{\sin(x)}$

14 Gegeven is de functie $k(x) = -3 + \sqrt{5x}$. Op de grafiek van k liggen de punten $A(\frac{1}{5}, -2)$ en $B(5, 2)$.

a Geef een vergelijking van de lijn l door A en B .

b Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek van k waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is met l .

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

010 Op het blaadje staan enkele functies en hun afgeleiden.

- a** De grafiek van g ontstaat uit die van f door een translatie van 4 naar links.
Leg uit waarom dat verband ook geldt voor de grafieken van f' en g' .
- b** Bepaal de afgeleide van $h(x) = (x - 7)^4$.
- c** Hoe ontstaat de grafiek van $k(x) = 8\sqrt{3x}$ uit die van $j(x) = 8\sqrt{x}$?
- d** Leg uit waarom in het functievoorschrift van k' de breuk met 3 vermenigvuldigd wordt.
- e** Bepaal de afgeleide van $m(x) = 5\sqrt{6x}$.

$f(x) = x^3$	$g(x) = (x + 4)^3$
$f'(x) = 3x^2$	$g'(x) = 3(x + 4)^2$
$j(x) = 8\sqrt{x}$	$k(x) = 8\sqrt{3x}$
$j'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$	$k'(x) = 3 \cdot \frac{4}{\sqrt{3x}}$
	$k'(x) = \frac{12}{\sqrt{3x}}$

013 **a** Gegeven is de functie $k(x) = 2^{6x-3}$ met $k(x) = g(f(x))$.
Vul in: $g(x) = \dots$ en $f(x) = 6x - 3$.

- b** Gegeven is de functie $k(x) = \sqrt{8 - x^2}$.
Vul in: De functie k is ontstaan door in de functie $g(x) = \sqrt{x}$ de x te vervangen door $f(x) = \dots$
- c** Vul op het blaadje de functievoorschriften van f en g in.

Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$.
Geef mogelijke functievoorschriften van g en f .

d $k(x) = (7x^2 - 2)^5$ **f** $k(x) = \sqrt[3]{8 - 9x}$

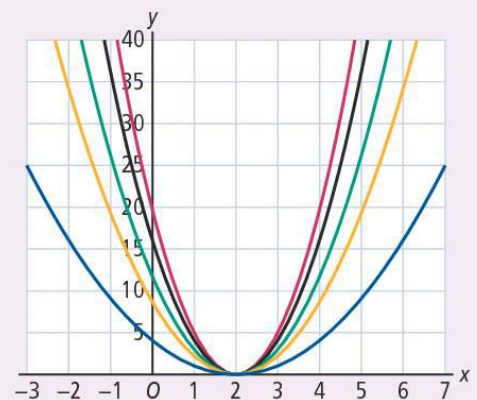
e $k(x) = \frac{3}{\log(x)}$ **g** $k(x) = \frac{-4}{\cos(x)}$

$k(x) = g(f(x))$ houdt in dat je
in het functievoorschrift van g
elke x vervangt door $f(x)$.
$k(x) = \frac{5}{4x^2 - 9}$ is van de vorm
$k(x) = g(f(x))$ met
$g(x) = \frac{5}{\dots}$ en $f(x) = \dots$

Uitdagende opdrachten

U2 Gegeven is voor verschillende waarden van a de grafiek van de functie $f_a(x) = a(x - 2)^2$.

- a** Bereken exact voor welke waarde van a de helling in het punt van de grafiek van f met x -coördinaat 1 gelijk is aan -6 .
- b** In welk punt van de grafiek van f_1 is de helling 1?
- c** In welk punt van de grafiek van f_4 is de helling 1?
- d** Toon aan dat voor elke $a \neq 0$ geldt:
Het punt op de grafiek van f_a waarin de helling van de grafiek van f_a gelijk is aan 1, ligt op de lijn $y = \frac{1}{2}x - 1$.



Je leert

- hoe je afgeleide van een kettingfunctie bepaalt

Leerroutes

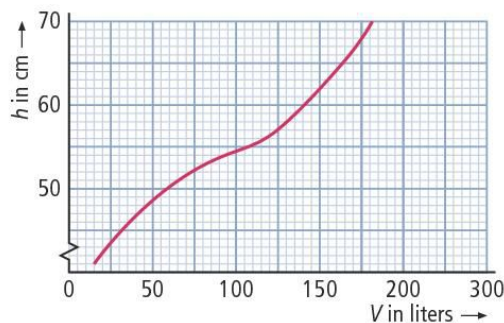
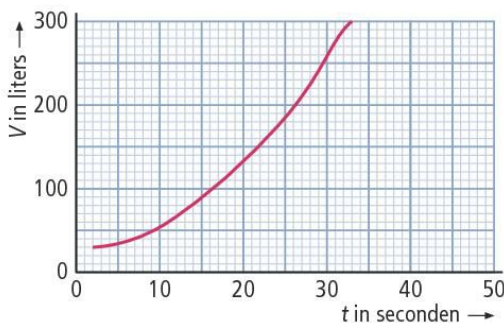
- ondersteunend: 15—16—017—18—19—020—20—21—22—23
- doorlopend: 15—16—17—18—19—20—21—22—23—24
- uitdagend: 15—16—17—18—20—21—23—24—U3—U4

Yorick gaat op zoek naar de afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 + 5)^3$. Omdat de afgeleide van $g(x) = x^3$ gelijk is aan $g'(x) = 3x^2$ probeert hij als afgeleide $f'(x) = 3(x^2 + 5)^2$. Controle met de rekenmachine geeft de drie kolommen:

$$y_1 = (x^2 + 5)^3, y_2 = 3(x^2 + 5)^2 \text{ en } y_3 = \frac{d}{dx}(y_1)$$

- Doe op grond van deze kolommen een voorspelling voor $f''(x)$.

X	Y ₁	Y ₂	Y ₃		
0	125	75	0		
1	216	108	216		
2	729	243	972		
3	2744	588	3528		
4	9261	1323	10584		
5	27000	2700	27000		
6	68921	5043	60516		
7	157464	8748	122472		



15 Gegeven zijn grafieken die het verband aangeven tussen tijd, volume en hoogte bij het vullen van een waterreservoir.

- Hoe groot is $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, de gemiddelde vulsnelheid in liters per seconde, gedurende het tijdsinterval $[10, 20]$?
- Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta V}$, de gemiddelde verandering van de hoogte in cm per liter, gedurende dat tijdsinterval?
- Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, de gemiddelde stijgsnelheid in cm per seconde, gedurende dat tijdsinterval?
- Leg uit dat geldt: $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$
Ga na dat de eenheden in deze formulering kloppen.

- 16** Bij het vullen van een ander waterreservoir gelden de functies $V(t) = 2t + 50$ en $h(V) = 2\sqrt{V}$ met t in seconden, V in liters en h in cm. In deze opdracht ga je onderzoeken hoe snel het water stijgt op het tijdstip $t = 10$.
- Bereken $V'(10)$, de snelheid waarmee het volume toeneemt op $t = 10$.
 - Hoeveel liter water zit er in het reservoir op $t = 10$?
 - Bereken $h'(V)$ op $t = 10$.
 - Druk h uit in t .
 - Met behulp van een klein interval, bijvoorbeeld $[10; 10,001]$, kun je een schatting maken van de snelheid waarmee het water stijgt op $t = 10$.
Bereken de stijgsnelheid van het water op $t = 10$.
 - Laat zien dat voor $t = 10$ geldt: $h'(t) = h'(V) \cdot V'(t)$.



Theorie

De afgeleide van de kettingfunctie $k(x) = g(f(x))$ is de functie $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Deze regel heet de **kettingregel**.

Bij formules noteer je de kettingregel meestal met

differentiaalquotiënten, bijvoorbeeld: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$

Voorbeeld

Differentieer $k(x) = 6(x^2 - 7)^4$.

Oplossing

$k(x) = g(f(x))$ met

$$f(x) = x^2 - 7 \text{ en } g(x) = 6x^4$$

$$f'(x) = 2x \quad \text{en} \quad g'(x) = 24x^3$$

$$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ geeft}$$

$$k'(x) = 24(x^2 - 7)^3 \cdot 2x \text{ ofwel}$$

$$k'(x) = 48x(x^2 - 7)^3$$

Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** Differentieer.

- | | | |
|----------|--------------------------------|--|
| H | a $f(x) = (3x^2 + 8)^4$ | d $h(x) = (5x^{1,3} - 12)^7$ |
| | b $w(x) = (1 - 3x^3)^6$ | e $p(q) = (2 - \sqrt{q})^5$ |
| | c $s(t) = (t^3 + 7)^3$ | f $k(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^3$ |

- 18** Gegeven is de functie $f(x) = (x^3 + 4x)^5$.
Casper maakt een fout bij het differentiëren en vindt $f'(x) = 15x^2(x^3 + 4x)^4 + 4$.
- Wat doet Casper fout?
 - Verbeter de fout en schrijf de juiste afgeleide op.

Casper			
☐	$f'(x) = 5(x^3 + 4x)^4 \cdot 3x^2 + 4$		
☐	$f'(x) = 15x^2(x^3 + 4x)^4 + 4$		
☐	Fout!		

10.3 De kettingregel

- 19** Differentieer.
a $f(x) = (x^2 + x + 311)^4$ **b** $g(x) = (3x^{2,7} - 19^{1,7})^3$

Ondersteunende route → maak opdracht 020

- 20** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ kun je schrijven als $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$.
 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

a $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ **c** $h(x) = \frac{3}{(x + 4)^2 - 4}$
b $g(x) = \frac{5}{(2x^3 - 4x)^2}$ **d** $k(x) = \frac{-4}{(x^4 + 7x)^3}$

- 21** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ kun je schrijven als $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - x$.
 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

a $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ **c** $h(x) = \sqrt{2x^3 - 4x} + 5x$
b $g(x) = x^2 + \sqrt{4 - x}$ **d** $k(x) = 4x - \sqrt{4x - 4x^4}$

- 22** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

H

a $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$ **c** $g(a) = 15a\sqrt{3a}$
b $y = \frac{12}{\sqrt{3x^4 - 2}}$ **d** $p = \frac{6}{(3t^2 - 4t)^3}$

- 23** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 11}}$

- a** Bepaal het domein van f .
b Stel een vergelijking op van de raaklijn in het punt van de grafiek met $x = 6$.

- 24** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

- a** Toon aan dat $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$
b Plot de grafieken van f en f' .
 Hoe zie je aan deze grafieken dat het domein van f groter is dan het domein van f' ?

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

017 Gegeven is de functie $k(x) = (7x^3 - 9)^5$.
Je gaat in deze opdracht deze functie differentiëren.

- a** Vul in: $k(x) = g(f(x))$ met $g(x) = x^5$ en $f(x) = \dots$
b Vul in: $g'(x) = 5x^4$ dus $g'(f(x)) = 5(\dots)^4$.
c Controleer dat $f'(x) = 21x^2$.
d De kettingregel luidt $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Vul het blaadje verder in.

Differentieer.

- e** $k(x) = (6x^3 + 1)^3$ **h** $h(x) = (2x^{1,4} + 2,5)^6$
f $w(x) = (12 - 5x^2)^4$ **i** $v(a) = (\sqrt{a} + 8)^3$
g $m(p) = (4p^5 + 2)^4$ **j** $f(x) = \left(\frac{4}{x} + 2\right)^3$

☐	$g'(x) = 5x^4$ dus				
☐	$g'(f(x)) = 5(\dots)^4$				
☐	$f'(x) = 21x^2$				
☐	$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ geeft				
☐	$k'(x) = 5(\dots)^4 \cdot 21x^2$				
☐	$k'(x) = \dots x^2 (\dots)^4$				
☐					

020 Je gaat de functie $f(x) = \frac{6}{(3x^2 + 5x)^4}$ differentiëren.

Je kunt $f(x)$ schrijven als $f(x) = 6(3x^2 + 5x)^{-4}$.

Er geldt $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = 6x^{-4}$ en $h(x) = 3x^2 + 5x$.

- a** Vul het blaadje verder in.
b Leg uit waarom de haakjes om $6x + 5$ noodzakelijk zijn.

☐	$g(x) = 6x^{-4}$ en $h(x) = 3x^2 + 5x$				
☐	$f'(x) = -24(h(x))^{-5} \cdot h'(x)$				
☐	$f'(x) = -24(\dots)^{-5} \cdot (6x + 5)$				
☐	$f'(x) = \frac{-24(6x + 5)}{(\dots)^5}$				
☐					

Uitdagende opdrachten

U3 Differentieer.

- a** $h(x) = \sqrt{(4x - 2)^5 + 3}$ **d** $k(x) = \frac{2x^2 + x + 6}{\sqrt{2x^2 + x}}$
b $g(x) = \frac{16}{(3x - 1)\sqrt{3x - 1}}$ **e** $m(x) = \frac{x + 8}{x + 2}$
c $f(x) = (18x^2 + 6)\sqrt{3x^2 + 1}$ **f** $j(x) = x\sqrt{x + 4}$

U4 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2x - 1} + x$.

De lijn $y = ax$ raakt de grafiek van f .
Bereken exact de waarde van a .

Je leert

- wat randextremen zijn
- hoe je exact de extreme waarden van een functie berekent

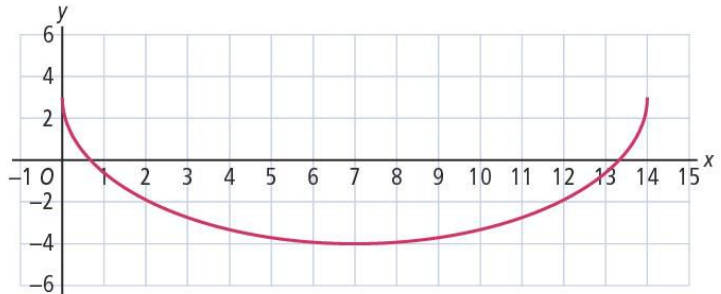
Leerroutes

- ondersteunend: 25—26—27—28—029—29—30
- doorlopend: 25—26—27—28—29—30—31
- uitdagend: 25—27—28—29—30—U5—U6

De functie $f(x) = 3 - \sqrt{14x - x^2}$ heeft bij $x = 7$ een minimum, want daar is de afgeleide $f'(x)$ gelijk aan 0.

De afgeleide is echter alléén bij $x = 7$ gelijk aan 0. Toch heeft de functie een maximale waarde.

- Hoe zit dat?



25 Gegeven is de functie $g(x) = 2,4x^5 - 16x^3$.

- Differentieer g .
- Los exact op $g'(x) = 0$.
- Plot de grafiek van g en ga na bij welke waarden van x de grafiek van g een top heeft.
- Bereken van elke top de y -coördinaat en geef aan of het een minimum of een maximum betreft.

Aanpak

Hoe bereken je exact de extreme waarden van een functie f ?

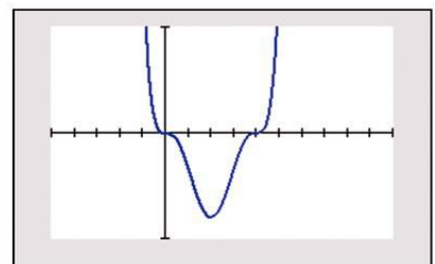
- Differentieer f .
- Los exact op $f'(x) = 0$.
- Plot de grafiek en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.
- Bereken de extreme waarden door de gevonden x -waarden in te vullen in $f(x)$.

Voorbeeld

Bereken de extreme waarden van de functie $f(x) = (x^2 - 4x)^3$.

Oplossing

- $f'(x) = 3(x^2 - 4x)^2 \cdot (2x - 4)$
- $3(x^2 - 4x)^2 \cdot (2x - 4) = 0$ geeft $x^2 - 4x = 0$ of $2x - 4 = 0$
 $x = 0$ of $x = 4$ of $x = 2$
- Zie de plot hiernaast. Bij $x = 0$ en $x = 4$ is er geen sprake van een extreme waarde.
- f heeft een minimum $f(2) = -64$.



26 Bereken exact de extreme waarden.

H

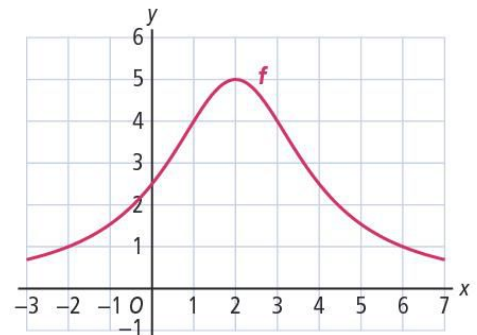
a $f(x) = x^4 - 4x^2$

b $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$

c $f(x) = (x^3 - 1)^4$

27 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{20}{(x-2)^2 + 4}$

- a Leg uit hoe je met behulp van het functievoorschrift kunt beredeneren dat f een extreme waarde heeft.
 b De grafiek suggereert dat f maar één extreme waarde heeft. Ga met behulp van de afgeleide na dat dit inderdaad het geval is.
 c Bereken exact de extreme waarde van f .



28 Gegeven is de functie $h(x) = 1 + 2\sqrt{3 - 2x}$.

- a Geef het domein en het bereik van h .
 b Onderzoek of de vergelijking $h'(x) = 0$ oplossingen heeft.
 c Ga met een plot na of h een extreme waarde heeft.

Theorie

Als de grafiek van een functie een randpunt heeft, zoals bij een wortelfunctie, dan heeft die functie daar een (rand)maximum of (rand)minimum. Randminima en randmaxima noem je ook wel **randextremen**.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $h(x) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{12x - 2x^2}$.
 Bereken exact de extreme waarde van h .
 Bereken ook exact de randextremen.

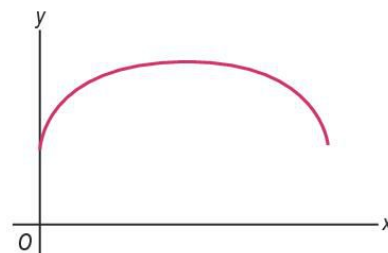
Oplossing

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12 - 4x}{2\sqrt{12x - 2x^2}} \text{ ofwel } h'(x) = \frac{3 - x}{\sqrt{12x - 2x^2}}$$

$$h'(x) = 0 \text{ geeft } x = 3.$$

$$h(3) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{18} = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$h \text{ heeft een maximum } h(3) = 2 + 1\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$



Voor het domein van h geldt $12x - 2x^2 \geq 0$.
 $2x(6 - x) = 0$ geeft randpunten $(0, 2)$ en $(6, 2)$.
 h heeft randminima $h(0) = 2$ en $h(6) = 2$.

10.4 Extreme waarden

Ondersteunende route → maak opdracht 029

29

Bereken exact de extreme waarden.

H

Vermeld ook eventuele randextremen.

a $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

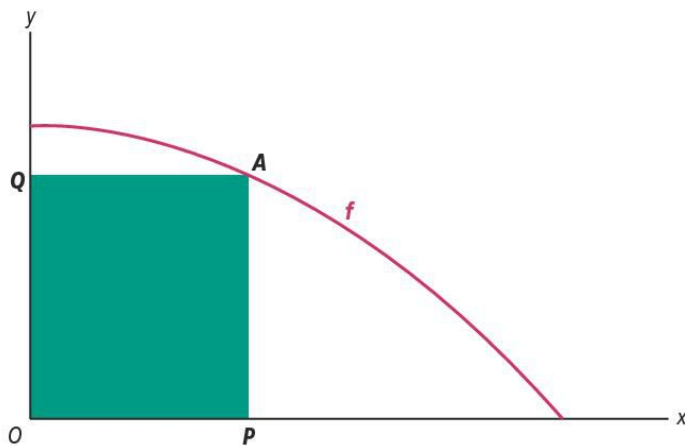
d $n(x) = 2x + \sqrt{12 - 2x^2}$

b $g(x) = (x^3 - 3x)^4$

e $p(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = x^2 - 4x\sqrt{x}$

f $q(x) = \frac{-5}{x^2 + 3}$



30

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 16$ met $x > 0$.Op de grafiek van f wordt tussen de y -as en het snijpunt van de grafiek met de x -as een punt A gekozen.De projecties van A op de x -as en y -as zijn de punten P en Q .Bereken exact de maximale oppervlakte van rechthoek $OPAQ$.

31

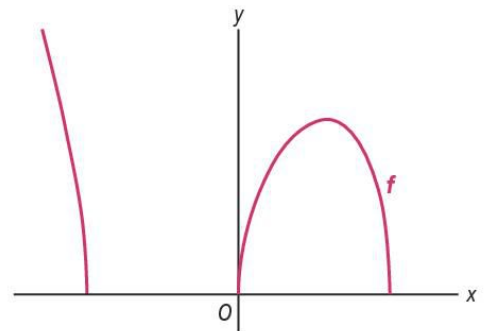
Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{12x - x^3}$.

a In de figuur zie je dat de grafiek een top heeft.

Bereken exact de coördinaten van de top.

b Bereken exact het domein van f .

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6



Ondersteunende opdrachten

- 029** Gegeven is de functie $f(x) = x + \sqrt{32 - x^2}$.
 Gevraagd wordt de extreme waarden van f exact uit te rekenen, inclusief de randextremen. Op het blaadje is hiermee een begin gemaakt.
- In stap 1 is het functievoorschrift herschreven zodat in stap 2 de functie gedifferentieerd kan worden.
 Waar komt in stap 2 de factor $-2x$ vandaan?
 - Laat zien hoe stap 3 uit stap 2 volgt.
 - In stap 4 wordt de vergelijking $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{32 - x^2}}$ opgelost.
 Ga na dat $x = 4$ wel een oplossing is en $x = -4$ niet.
 - Plot de grafiek van f . Heeft f bij $x = 4$ een maximum of een minimum? Bereken deze extreme waarde.
 - In de plot zie je ook dat de grafiek van f twee randpunten heeft. In deze randpunten heeft f een randextremum.
 Bereken exact de coördinaten van de randpunten.
 - Vul in:
 f heeft een maximum $f(4) = \dots$
 f heeft een randminimum $f(\dots) = \dots$
 f heeft een randminimum $f(\dots) = \dots$

☐	$f(x) = x + \sqrt{32 - x^2}$		
☐	$f(x) = x + (32 - x^2)^{\frac{1}{2}}$	1	
☐	$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}(32 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x$	2	
☐	$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{32 - x^2}}$	3	
☐	$f'(x) = 0$ geeft $\frac{x}{\sqrt{32 - x^2}} = 1$	4	
☐	$\sqrt{32 - x^2} = x$		
☐	$32 - x^2 = x^2$		
☐	$x = 4$ of $x = -4$		
☐	De grafiek van f heeft een randpunt als $32 - x^2 = 0$.	5	

Uitdagende opdrachten

- U5** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = ax + \frac{4}{2x - 7}$.
- Bereken exact de extreme waarden van f_2 .
 - Bereken exact de extreme waarden van $f_{\frac{1}{2}}$.
 - Onderzoek voor welke waarden van a de functie f_a geen extreme waarden heeft.
 - Voor een zekere waarde van a heeft f_a een maximum bij $x = 3$. Bij die waarde van a heeft f_a ook een minimum.
 Bereken hoe groot dat minimum is.
- U6** De functie $g(x) = a\sqrt{4x^2 - x^4} + b$ heeft een maximum 5.
 Verder heeft g een randminimum bij $x = \sqrt{3}$.
 Bereken exact a en b .

Je leert

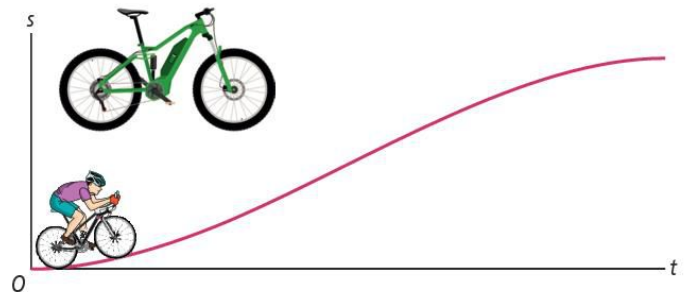
- wat een buigpunt is
- hoe je de coördinaten van een buigpunt exact berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 32—033—34—35—36—037—37—38
- doorlopend: 32—33—34—35—36—37—38—39
- uitdagend: 32—33—34—35—36—37—38—U7

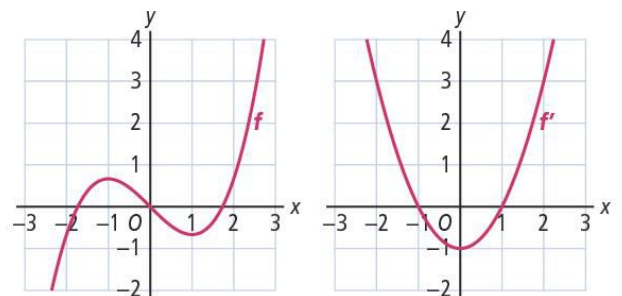
Sjoerd rijdt een stukje met zijn e-bike.
De grafiek geeft het verband tussen de afgelegde afstand s in meters die Sjoerd na t in minuten heeft afgelegd.

- Welke informatie geeft de grafiek over de rit die Sjoerd gemaakt heeft met zijn e-bike?



32 Gegeven zijn de grafiek en de hellinggrafiek van een functie f .

- Op het interval $[-1, 1]$ daalt f . Wat geldt er op dat interval voor de afgeleide $f'(x)$?
- Is de daling op $[-1, 0]$ toenemend of afnemend? Neemt de afgeleide toe of af op dit interval?
- Welke soort daling vertoont f op $[0, 1]$? Neemt f op dit interval toe of af? Wat geldt er dus op dit interval voor de afgeleide van f' ?
- Op $[-2, -1]$ is f afnemend stijgend. Wat kun je zeggen over $f'(x)$ en over de afgeleide van f' op dit interval?



Theorie

Op intervallen waar $f'(x) > 0$, stijgt f .

Op intervallen waar $f'(x) < 0$, daalt f .

De afgeleide van f' , de **tweede afgeleide** van f , notatie

f'' of $\frac{d^2y}{dx^2}$ of $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, geeft informatie over het soort

stijgen of dalen van f :

Als op een interval geldt $f''(x) > 0$, neemt $f'(x)$ toe.

f is dan **toenemend stijgend** of **afnemend dalend**.

Als op een interval geldt $f''(x) < 0$, neemt $f'(x)$ af.

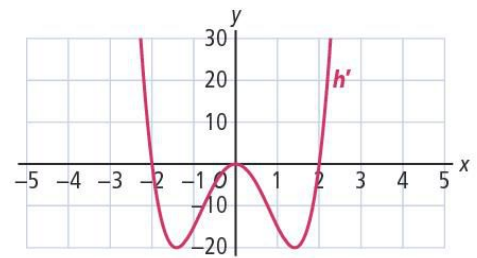
f is dan **afnemend stijgend** of **toenemend dalend**.

	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
$f'(x) > 0$	 f is toenemend stijgend	 f is afnemend stijgend
$f'(x) < 0$	 f is afnemend dalend	 f is toenemend dalend

Ondersteunende route → maak opdracht 033

- 33** Gegeven is de grafiek van de afgeleide van een functie h .
H h' heeft extreme waarden bij $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$ en $x = \sqrt{2}$.

- Op welke intervallen is h afnemend dalend? En op welke intervallen toenemend dalend?
- Bij welke waarden van x gaat h over van toenemend dalend naar afnemend dalend?
- Maak een schets van de grafiek van h met $h(0) = 0$.



- 34** Gegeven is de functie $f(x) = x - 4\sqrt{x}$.
- Plot de grafiek van f en bereken exact de extreme waarde(n) van f .
 - Toon met behulp van $f''(x)$ aan dat f' stijgt op het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
 - f is eerst dalend en daarna stijgend.
Is er hier sprake van afnemende of toenemende daling?
En is er sprake van afnemende of toenemende stijging?
- 35**
- Schets de grafiek van een functie f die overgaat van afnemende stijging naar toenemende stijging.
 - Het punt waar de overgang plaatsvindt, noem je A .
Leg uit dat f' een extreme waarde heeft voor de x -coördinaat van A .
 - Teken de raaklijn in A aan de grafiek.

Theorie

Als de afgeleide f' van een functie f een extreme waarde heeft, is er een punt op de grafiek van f waar de helling een maximale of minimale waarde heeft. Zo'n punt heet een **buigpunt**. Je berekent de extreme waarden van f' met behulp van de tweede afgeleide f'' .

Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen en met een plot te onderzoeken of de grafiek voor die waarden van x een buigpunt heeft.

De raaklijn in het buigpunt heet ook wel de **buigraaklijn**.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van de functie $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 8x$.

Oplossing

$$f'(x) = -3x^2 + 12x + 8 \text{ en}$$

$$f''(x) = -6x + 12$$

$$f''(x) = 0 \text{ voor } x = 2.$$

In een plot van de grafiek zie je dat de grafiek bij $x = 2$ een buigpunt heeft.

$$f(2) = -8 + 24 + 16 = 32$$

Het buigpunt is $(2, 32)$.

10.5 Buigpunten

- 36** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2$.
- Los exact op $f''(x) = 0$.
 - Onderzoek met een plot of de grafiek voor de gevonden waarden van x buigpunten heeft.
 - Bereken exact de coördinaten van de buigpunten.
 - Beantwoord de opdrachten a, b en c voor de functie $f(x) = x^4$.

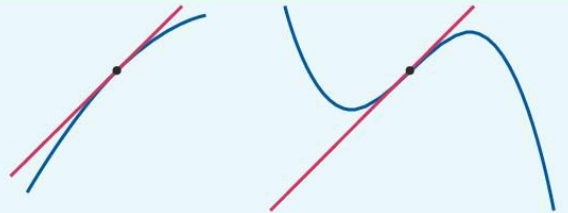
Ondersteunende route → maak opdracht O37

- 37** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .

a $f(x) = x^5 - 10x^4$	c $f(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - x^3$
b $f(x) = \frac{6x - 4}{x^2}$	d $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 5}{10x}$

Trek je een raaklijn aan de grafiek van een functie, dan zal de grafiek in het algemeen in de buurt van het raakpunt aan één kant van de raaklijn liggen. Een buigraaklijn ligt links en rechts van het buigpunt aan verschillende kanten van de grafiek.

De grafiek passeert als het ware de buigraaklijn.



- 38** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{54}x^4 - x^2$.
- Bereken exact de nulpunten van f .
 - Bereken exact de extreme waarden van f .
 - Stel van elke buigraaklijn een vergelijking op.

- 39** Een functie f heeft een extreme waarde $f(a)$; $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$.
Is $f(a)$ een minimum of een maximum?

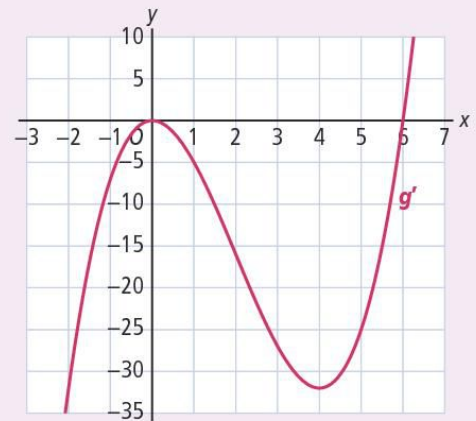
Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

033

Gegeven is de grafiek van de afgeleide van de functie g . g' heeft extreme waarden bij $x = 0$ en $x = 4$.

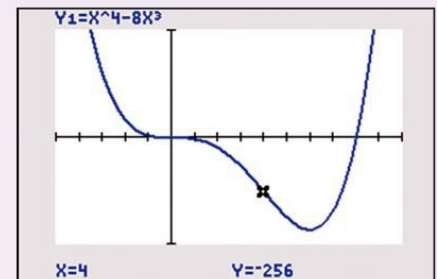
- Op het interval $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ is $g'(x) \leq 0$. Is g dan stijgend of dalend?
- Op het interval $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ stijgt g' . De waarden van $g'(x)$ worden dus minder negatief. Wat zegt dat over de mate waarin g stijgt of daalt?
- Op welk ander interval is $g'(x) \leq 0$ en stijgt g' ?
- Bij $x = 4$ gaat g over van toenemend dalend naar afnemend dalend. Hoe zie je dat in de grafiek van g' ?
- Maak een schets van de grafiek van g met $g(0) = 0$.



037

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 8x^3$. Je gaat de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f exact berekenen.

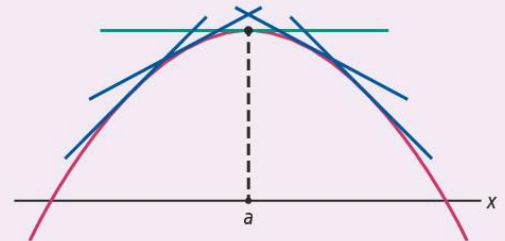
- Differentieer f .
- Toon aan dat $f''(x) = 12x^2 - 48x$.
- Los de vergelijking $f''(x) = 0$ exact op.
- Bij de nulpunten van f'' heeft de grafiek van f mogelijk buigpunten. Met een plot stel je vast of er inderdaad buigpunten zijn. Beschrijf het verloop van f in de waarden van x waarvoor geldt $f''(x) = 0$.
- Gebruik $f(x)$ om van elk buigpunt de y -coördinaat te berekenen.



Uitdagende opdrachten

U7

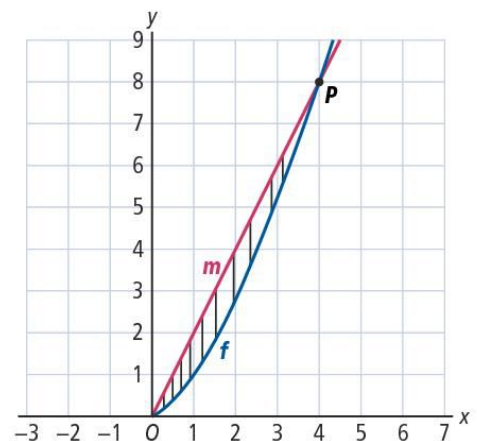
- Gegeven is de grafiek van een functie f met een aantal raaklijnen in de buurt van de top $(a, f(a))$. Neemt de helling van de grafiek van f in de buurt van de top toe of af?
- Leg uit: als de grafiek van f een top $(a, f(a))$ heeft en $f''(a) < 0$, dan is $f(a)$ een maximum van f .
- Beredeneer dat als de grafiek van f een top $(b, f(b))$ heeft en $f''(b) > 0$, $f(b)$ een minimum is van f .
- Beredeneer dat als $f''(c) = 0$ en $f'''(c) \neq 0$, de grafiek van f een buigpunt $(c, f(c))$ heeft.
- Gegeven is de functie $g(x) = 2x^5 - 5x^2$. Onderzoek met behulp van de derde afgeleide of de grafiek van g een buigpunt heeft.



10.6 Gemengde opdrachten

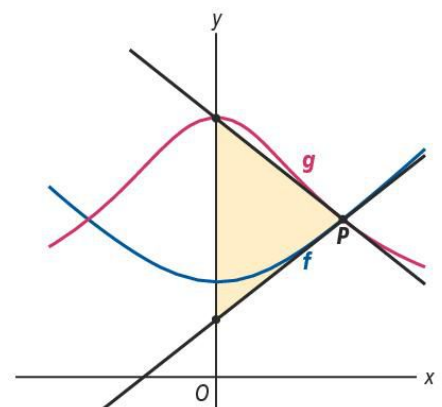
- 40** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = x^3 - 6x^2 + ax$.
- Voor elke waarde van a gaat de grafiek van f_a door $(0, 0)$. Toon dit aan.
 - Toon aan dat de grafiek van f_a voor elke waarde van a een buigpunt heeft en druk de coördinaten van dit buigpunt uit in a .
 - Laat zien dat de grafiek voor $a = 12$ een buigpunt met een horizontale raaklijn heeft. Bereken exact de coördinaten van dit buigpunt.
 - Voor welke waarden van a heeft de grafiek geen horizontale raaklijn?

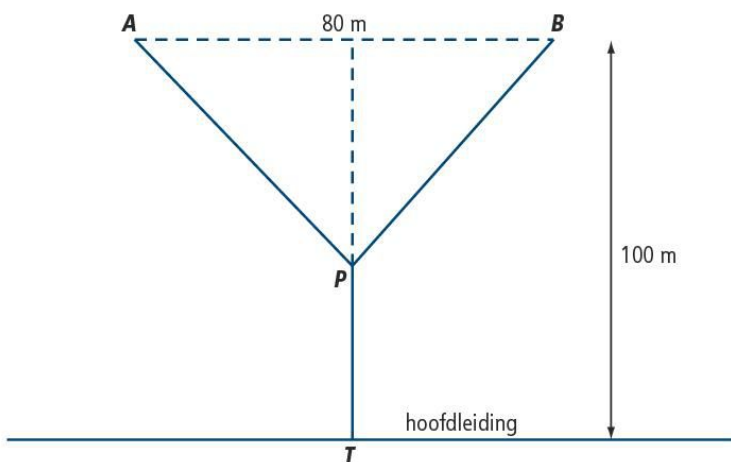
- 41** Op de grafiek van de functie $f(x) = x\sqrt{x}$ ligt een punt P . m is de lijn door O en P . In het gebied begrensd door m en de grafiek van f zijn een aantal verticale lijnstukken getekend. De lengte van zo'n lijnstuk is een functie l van x .
- Kies voor P het punt $(4, 8)$. Stel het functievoorschrift $l(x)$ op.
 - Bereken exact de maximale lengte van zo'n lijnstuk.
 - Kies voor P het punt $(p, p\sqrt{p})$ en bereken p in het geval dat de maximale lengte van het lijnstuk gelijk is aan 4.



- 42** Gegeven is de functie $g(x) = -2 + 2\sqrt{3x^2 - 2x}$.
- Bereken exact het domein van g .
 - Bereken de randextremen van g .
 - De grafiek van g snijdt de x -as in de punten A en B . Bereken exact de coördinaten van deze punten.
 - De raaklijnen aan de grafiek van g in de punten A en B snijden elkaar in punt C . Bereken exact de coördinaten van punt C .

- 43** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en $g(x) = \frac{25}{\sqrt{x^2 + 9}}$. In het snijpunt P zijn de raaklijnen aan beide grafieken getekend.
- Controleer met een berekening dat de grafieken elkaar snijden in het punt $P(4, 5)$.
 - Bereken exact de helling van beide grafieken in P .
 - De raaklijnen in P aan beide grafieken sluiten samen met de y -as een driehoek in. Bereken de oppervlakte van deze driehoek.



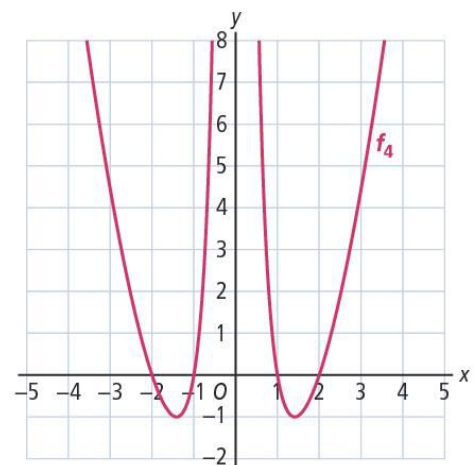


- 44** De huizen A en B moeten op de waterleiding worden aangesloten. De huizen liggen beide op 100 meter afstand van de hoofdleiding. In plaats van twee aftakkingen van de hoofdleiding, één naar A en één naar B , wordt gekozen voor een Y-verbinding: één aftakking bij T die zich bij P splitst in een tak naar A en een tak naar B . De punten P en T worden zo gekozen dat ze even ver van A als van B liggen. De afstand in meters tussen A en B is 80 meter. Onderzoek waar punt P moet liggen zodat de totale lengte van de nieuw aan te leggen leidingen minimaal is.

- 45** Gegeven is de familie van functies $f_a(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + a}{x^2}$

Voor $a = 4$ heeft de grafiek van f twee toppen.

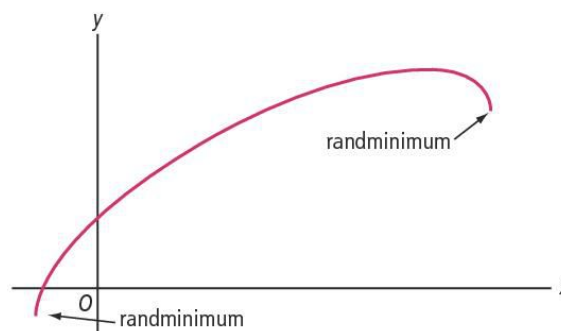
- Onderzoek voor welke waarden van a de grafiek van f_a twee toppen heeft.
- In die gevallen dat de grafiek twee toppen heeft, liggen die toppen op de grafiek van de functie $g(x) = 2x^2 - 5$. Toon dat aan.



Theorie

Randextremen

Als de grafiek van een functie een randpunt heeft, zoals bij een wortelfunctie, dan heeft die functie daar een (rand)maximum of (rand)minimum. Randminima en randmaxima noem je ook wel randextremen.



- S1** Gegeven is de functie $f(x) = 2x + \sqrt{18 - 7x - x^2}$.
 f heeft twee randextremen.
 Bereken exact de twee randextremen en vermeld of het een randminimum of een randmaximum betreft.

Theorie

Tweede afgeleide, buigpunt, buigraaklijn

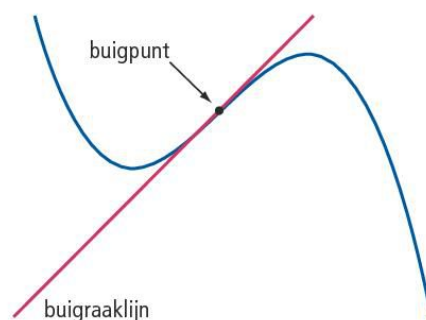
De afgeleide van f' , de tweede afgeleide van f , notatie f'' of $\frac{d^2y}{dx^2}$ of $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, geeft informatie over het soort stijgen of dalen van f :

Als op een interval geldt $f''(x) > 0$, neemt $f'(x)$ toe.
 f is dan toenemend stijgend of afnemend dalend.

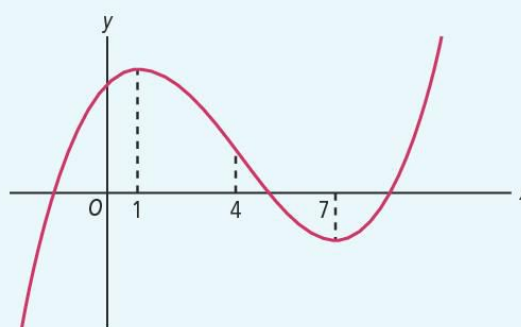
Als op een interval geldt $f''(x) < 0$, neemt $f'(x)$ af.
 f is dan afnemend stijgend of toenemend dalend.

Als de afgeleide f' van een functie f een extreme waarde heeft, is er een punt op de grafiek van f waar de helling een maximale of minimale waarde heeft. Zo'n punt heet een buigpunt. Je berekent de extreme waarden met behulp van de tweede afgeleide f'' .

De raaklijn in het buigpunt heet ook wel de buigraaklijn.



- S2** Gegeven is de grafiek van een derdegraads functie f .
- Op welk interval is f toenemend stijgend?
 - Op welk interval is f dalend?
 - Vul in: bij $x = 4$ gaat f over van ... dalend in ... dalend, dus de grafiek heeft bij $x = 4$ een ...



Vaardigheid

Je kunt een machtsfunctie differentiëren.

De afgeleide functie van $f(x) = x^a$ is $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ voor elke waarde van a .

Om een gebroken functie of een wortelfunctie te differentiëren schrijf je deze eerst in de vorm $f(x) = c \cdot x^a$.

In het bijzonder geldt: als $f(x) = \sqrt{x}$ dan is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Voorbeeld

Differentieer $f(x) = x^2\sqrt[3]{x}$ en $g(x) = \frac{6}{x^4}$

Oplossing

$f(x) = x^2\sqrt[3]{x}$ schrijf je als $f(x) = x^{2\frac{1}{3}}$.

$f'(x) = 2\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}}$ ofwel $f'(x) = 2\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$.

$g(x) = \frac{6}{x^4}$ schrijf je als $g(x) = 6x^{-4}$.

$g'(x) = -24x^{-5}$ ofwel $g'(x) = \frac{-24}{x^5}$

S3 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

a $f(x) = 8x\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{x^3 + x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$

c $h(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 + x)$

Vaardigheid

Je kunt herkennen uit welke functies een samengestelde functie is opgebouwd.

Als $k(x)$ wordt berekend door eerst x in te vullen in de functie f en dat resultaat in te vullen in de functie g , dan heet de functie k een samenstelling van f en g .

In formule: $k(x) = g(f(x))$.

Een samengestelde functie heet ook wel een kettingfunctie.

Voorbeeld

De functie $k(x) = \frac{4}{(\sqrt{x} + 1)^2}$ is van de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef mogelijke functievoorschriften van f en g .

Oplossing

$f(x) = \sqrt{x} + 1$ en $g(x) = \frac{4}{x^2}$

S4 Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef mogelijke functievoorschriften van g en f .

a $k(x) = {}^3\log(x^2 - 7)$

b $k(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\cos(x)}$

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt de afgeleide van een kettingfunctie bepalen.

De afgeleide van de kettingfunctie $k(x) = g(f(x))$ is

de functie $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Deze regel heet de kettingregel.

Voorbeeld

Differentieer $k(x) = (x^2 + 8x)^4$.

Oplossing

$k(x) = g(f(x))$ met

$f(x) = x^2 + 8x$ en $g(x) = x^4$

$f'(x) = 2x + 8$ en $g'(x) = 4x^3$

$k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$k'(x) = 4(x^2 + 8x)^3 \cdot (2x + 8)$

$k'(x) = (8x + 32)(x^2 + 8x)^3$

S5 Differentieer.

a $f(x) = 5(x^4 + 6x)^3$

b $g(x) = \sqrt{4x^3 + 8x^2 + 6}$

Vaardigheid

Je kunt exact de extreme waarden van een functie berekenen.

1 Differentieer f .

2 Los exact op $f'(x) = 0$.

3 Plot de grafiek en kijk of er sprake is van een minimum of een maximum.

4 Bereken de extreme waarden door de gevonden x -waarden in te vullen in $f(x)$.

Een functie waarvan de grafiek een randpunt heeft, heeft ook een randextreem.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}$.

Bereken exact de extreme waarde van f . Denk ook aan randextremen.

Oplossing

1 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot -2x$ ofwel $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$

2 $f'(x) = 0$ geeft $\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = -1$ ofwel $x = -\sqrt{16 - x^2}$

$x^2 = 16 - x^2$ dus $x^2 = 8$ ofwel $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ of $x = 2\sqrt{2}$

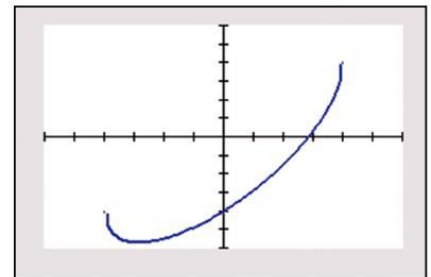
$x = 2\sqrt{2}$ voldoet niet, dus $x = -2\sqrt{2}$.

3 In de plot is te zien dat f bij $x = -2\sqrt{2}$ een minimum heeft.

4 f heeft een minimum $f(-2\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - \sqrt{16 - 8} = -4\sqrt{2}$.

In de randpunten van de grafiek geldt $16 - x^2 = 0$ dus $x = -4$ of $x = 4$.

f heeft een randmaximum $f(-4) = -4$ en een randmaximum $f(4) = 4$.



- S6** Bereken exact de extreme waarden. Denk ook aan eventuele randextremen.

a $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 9}$

b $g(x) = \frac{100}{(x^2 + 4x)^3}$

Vaardigheid

Je kunt de coördinaten van een buigpunt exact berekenen.

Buigpunten vind je door $f''(x) = 0$ op te lossen en met een plot te onderzoeken of de grafiek voor die waarden van x een buigpunt heeft.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 18$.

Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f .

Oplossing

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 18$$

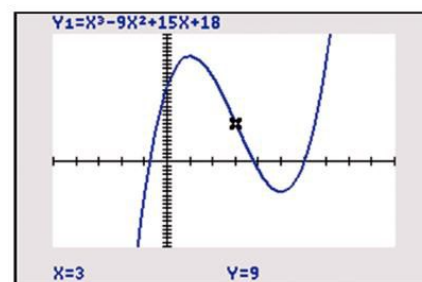
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

$$f''(x) = 0 \text{ voor } x = 3.$$

In de plot is te zien dat de grafiek bij $x = 3$ een buigpunt heeft.

$f(3) = 9$ dus het buigpunt is $(3, 9)$.



- S7** Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 6x^2 - 5$.
Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f .

T1 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder gebroken of negatieve exponent.

a $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x^2}$

b $g(x) = 4x^3 + \sqrt{x}$

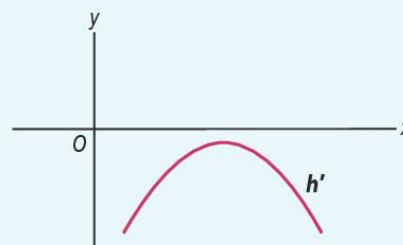
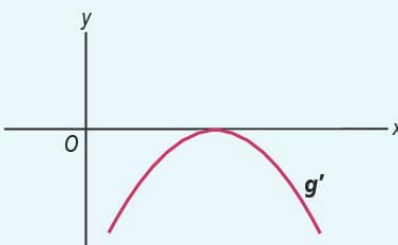
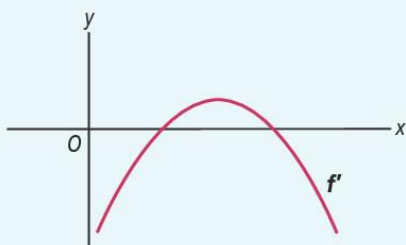
c $h(x) = (\sqrt{x} + x)(x - 1)$

T2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$.

a Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van f waar de raaklijn evenwijdig is aan de x -as.

b Onderzoek of er in de gevonden punten sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide.

T3 De functies f , g en h zijn derdegraads functies. Gegeven zijn de grafieken van f' , g' en h' . Schets een mogelijke grafiek van f , van g en van h .

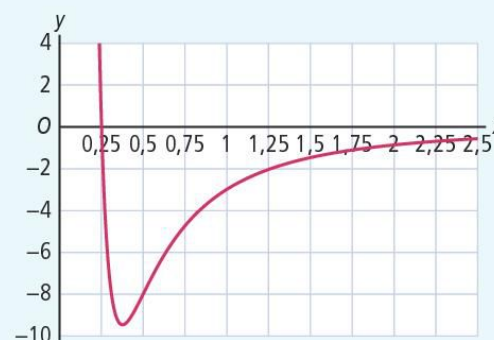


T4 Gegeven is voor $x > 0$ de functie $g(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^2}$

a Bereken exact de x -coördinaat van de top van de grafiek van g .

b Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van g .

c Stel een vergelijking op van de buigraaklijn.



T5 Gegeven zijn functies van de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef mogelijke functievoorschriften van g en f .

a $k(x) = 3 + 2(4x - 9)^5$

c $k(x) = (2x - x^2)^{1,7}$

b $k(x) = \sqrt{6x - 3x^2} - 7$

d $k(x) = \frac{2}{(x^3 - 7)^4}$

T6 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve exponent.

a $f(x) = (x - 3)^{10} + 2$

b $g(p) = (2 - p^2)^3$

c $h(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

d $k(x) = (2x - 3x^4)^2$

e $q(x) = \frac{2}{(x^3 - 7)^4}$

f $m(t) = 3 + 2(4t - 9)^5$

T7 a Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x} - 3x - 1$.
Bereken exact de extreme waarden van f . Vermeld ook eventuele randextremen.

b Gegeven is de functie $g(x) = (4x^2 + px + 1)^3$.
 g heeft een extreme waarde voor $x = 1$.
Bereken de waarden van p .

T8 Gegeven is de familie van functies

$$g_a(x) = \frac{1}{3x - a} - \frac{1}{(3x - a)^2}$$

a $g_a(4)$ is een extreme waarde van een functie g_a .
Bereken exact de waarde van a .

b De grafiek van een functie g_a heeft een buigpunt bij $x = 2$.
Bereken exact de waarde van a .

T9 Gegeven is de familie van functies $f_{p,q}(x) = p(x + 2)^3 + q$.

a Bereken exact de waarde van p en van q als gegeven is dat de grafiek van $f_{p,q}$ door de punten $(0, 0)$ en $(-3, 18)$ gaat.

b Bereken exact de waarde van p en van q als de lijn l met richtingscoëfficiënt -6 de grafiek van een functie $f_{p,q}$ raakt in het punt $(-4, 12)$.

c Toon aan dat de buigpunten van de grafieken van alle functies $f_{p,q}$ op een rechte lijn liggen en geef een vergelijking van deze lijn.

Je kunt een machtsfunctie differentiëren.

E1 Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

- | | |
|---|--|
| a $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$ | d $k(x) = 5x(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})$ |
| b $g(x) = 2\sqrt{x} + 5x^2$ | e $m(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{x}$ |
| c $h(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x^6}$ | f $n(x) = \frac{2}{x^{1,3}} - \frac{4}{5x^{2,8}}$ |

Je kunt herkennen uit welke functies een samengestelde functie is opgebouwd.

- E2**
- a** De functie $k(x) = 5 \cdot 2^{x^2+7}$ heeft de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef de mogelijke functievoorschriften van f en g .
 - b** De functie $k(x) = \sqrt{x^4 - 3}$ heeft de vorm $k(x) = g(f(x))$. Geef de mogelijke functievoorschriften van f en g .

Je kunt de afgeleide van een kettingfunctie bepalen.

E3 Differentieer en schrijf de afgeleide zonder gebroken en negatieve exponenten.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a $g(m) = (4m - 5)^3$ | c $Q(p) = \sqrt{2p^3 - 25p}$ |
| b $h(x) = \frac{4}{x^2 + 3}$ | d $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2x} - \frac{1}{2}}$ |

Je kunt exact de extreme waarden van een functie berekenen.

E4 Bereken bij welke waarden van x de afgeleide van de functies gelijk is aan nul. Onderzoek of er bij deze waarden van x sprake is van een maximum, een minimum of geen van beide. Vermeld ook eventuele randextremen.

- | | |
|--|---|
| a $f(x) = \frac{3}{2x^2 - x}$ | c $h(x) = \frac{2}{\sqrt{2 - 2x}}$ |
| b $g(x) = 3 + 2\sqrt{4x - x^2}$ | d $k(x) = (x^2 - 2)^4$ |

Je kunt de coördinaten van een buigpunt exact berekenen.

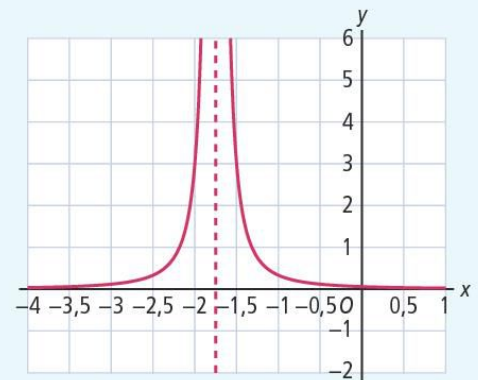
E5 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3$.

- a** Bereken exact de extreme waarde van f .
- b** Bereken exact de coördinaten van de buigpunten.
- c** Stel een vergelijking op van elke buigraaklijn.
- d** Voor welke waarden van x is f toenemend dalend?

- E6** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x + \sqrt{9x - x^2}$.
- Geef het domein van f .
 - Bereken exact de extreme waarden van f . Vermeld ook eventuele randextremen.
 - Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x -coördinaat $4\frac{1}{2}$.

- E7** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3}{(4x+7)^2}$

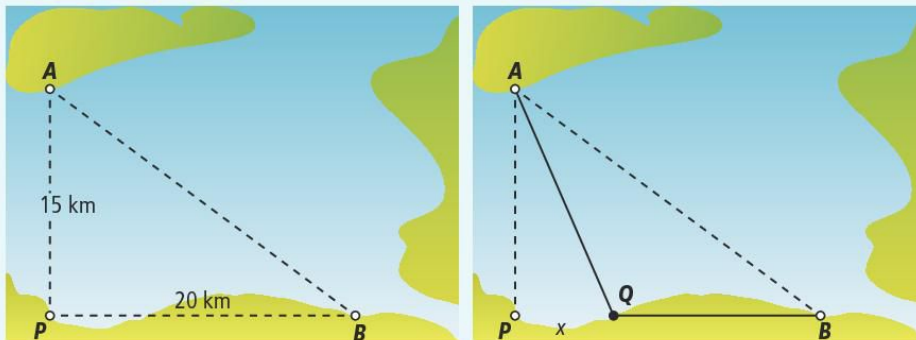
- Toon aan dat $f'(x) = \frac{-24}{(4x+7)^3}$
- Punt $P(-2, 3)$ ligt op de grafiek van f .
De lijn $y = ax + b$ raakt de grafiek van f in P .
Bereken exact de waarde van a en van b .



- E8** Differentieer. Schrijf de afgeleide zonder negatieve of gebroken exponent.

- $f(x) = (8x - 4)^3 + 7$
- $p(t) = \frac{10}{(x-5)^2 - 25}$
- $Q(p) = (3p + 2)\sqrt{3p + 2}$
- $g(p) = 2\sqrt{(4p)^3 - 7}$

- E9** Plaats A ligt op een eiland, plaats B op het vasteland. Tussen de plaatsen A en B moet een kabel worden gelegd.



De aanlegkosten onder water bedragen € 1000,- per km; de aanlegkosten over land zijn € 400,- per km.

Er ligt tussen P en B een punt Q zodat de kosten over het traject A - Q - B minimaal zijn.

- Noem $PQ = x$ (km) en toon aan dat de aanlegkosten K in euro's gegeven worden door de formule

$$K = 1000\sqrt{225 + x^2} + 400(20 - x).$$

- Bereken exact de afstand PQ waarvoor de aanlegkosten minimaal zijn.

Middelwaardestelling

Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) was een wiskundige en astronoom van Italiaanse afkomst, die later in Frankrijk en Pruisen werkte. Hij ontwikkelde zich tot een van de grootste twee wiskundigen van de 18e eeuw (de andere was Euler). Hij werkte aan getaltheorie, differentiaalrekening, mechanica en astronomie. Hij formuleerde onder andere de middelwaardestelling.



De middelwaardestelling:

Twee punten A en B met x -coördinaten a en b liggen op de grafiek van functie f . Als de afgeleide f' op interval $\langle a, b \rangle$ bestaat, dan is er in dat interval een getal c zodat $f'(c)$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B .

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{x-1}$. Op de grafiek liggen de punten $A(1, 0)$ en $B(2, 2)$.

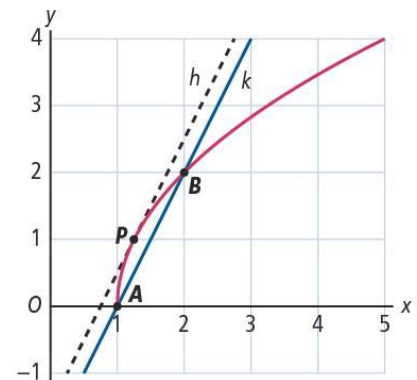
De lijn door AB is de grafiek van $k(x) = 2x - 2$.

Als je de grafieken bekijkt, zijn er twee dingen die opvallen.

- Er is een punt P waarin de raaklijn evenwijdig is aan de lijn

door A en B . Op het oog is $x_P = 1\frac{1}{4}$.

- Tussen de punten A en B zie je de verticale afstand tussen de grafiek van f en die van k eerst toenemen en daarna afnemen. Er is dus een punt waar de afstand maximaal is. Is dat ook punt P ?



In de tabel met $y_1 = 2\sqrt{x-1}$, $y_2 = 2x - 2$ en $y_3 = y_2 - y_1$ zie je dat de maximale afstand bij $x = 1,25$ ligt.

Is het toeval dat de afstand het grootst is bij $x = 1\frac{1}{4}$?

Dat ga je in de volgende opdracht onderzoeken.

Opdracht

- Los op $f'(x) = rc_{AB}$.
- Ga na dat de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn AB gegeven wordt door $g(x) = f(x) - k(x)$.
- Differentieer g .
- Heeft g een maximum of minimum?
- Leg uit: Het punt P waar de raaklijn evenwijdig is aan lijn AB , is ook het punt waar de verticale afstand van een punt op de grafiek tot de lijn AB het grootst is.
- Voer de opdrachten a tot en met e uit voor de functie

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x - 3 \right)^3 + \frac{4}{3} \text{ op het interval } [2, 8].$$

X	Y ₁	Y ₂	Y ₃	
1	0	0	0	
1.125	0.7071	0.25	-0.457	
1.25	1	0.5	-0.5	
1.375	1.2247	0.75	-0.475	
1.5	1.4142	1	-0.414	
1.625	1.5811	1.25	-0.331	
1.75	1.7321	1.5	-0.232	
1.875	1.8708	1.75	-0.121	
2	2	2	0	
2.125	2.1213	2.25	0.1287	
2.25	2.2361	2.5	0.2639	

X=1.25

Functies bewerken

9

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

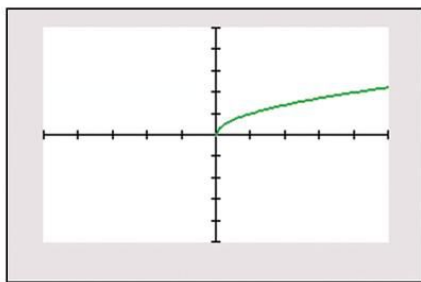
Inmiddels ken je alle soorten functies die voor het examen wiskunde B van belang zijn: lineaire functies, kwadratische functies, machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies. Ook weet je al het nodige van het verband tussen transformaties van grafieken en de functievoorschriften van de beeldgrafieken.

In dit hoofdstuk ga je met al deze functies aan de slag. Je kijkt naar mogelijke symmetrie in een grafiek, de transformaties komen nog een keer uitgebreid aan de orde en je leert bij een functie het voorschrift van de inverse functie opstellen. Nieuw is het begrip absolute waarde, dat je ook op functies gaat toepassen. Ten slotte wordt er aandacht besteed aan gelijkwaardige formules.

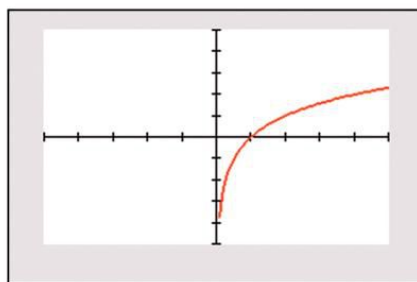
Functies zijn de kern van wiskunde B. Je zult de begrippen uit dit hoofdstuk in bijna alle volgende hoofdstukken steeds weer tegenkomen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

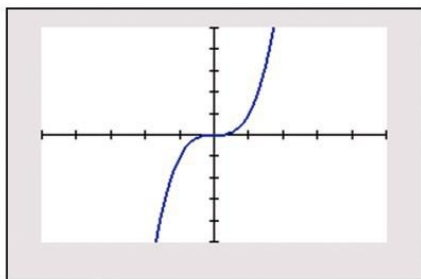
• <i>Probleem oplossen en analytisch denken</i>	49
• <i>Formules manipuleren</i>	36
• <i>Logisch redeneren en bewijzen</i>	17



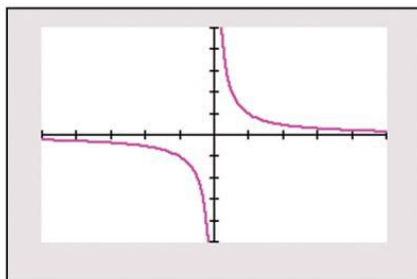
A



C



B



D

V1 Gegeven zijn de functies $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \cos(x)$,

$$k(x) = 2\log(x), m(x) = \frac{1}{x}, n(x) = \sin(x), p(x) = x^2, q(x) = x^3 \text{ en } r(x) = 1.$$

Van vier functies is de grafiek geplot. De vensterinstelling is zo dat beide assen lopen van -5 tot 5 .

Geef voor elke plot aan welke van de gegeven functies hierbij hoort.

V2 Gegeven zijn de functies $f(x) = g^x$ en $h(x) = {}^g\log(x)$.

a Neem $g = 2$ en teken de grafieken van f en h in één assenstelsel.

b Neem $g = \frac{1}{3}$ en teken opnieuw de grafieken van f en h .

c Voor welke waarden van g zijn f en h stijgend?
En voor welke waarden van g zijn f en h dalend?

d Welk verband is er tussen de grafieken van f en h ?

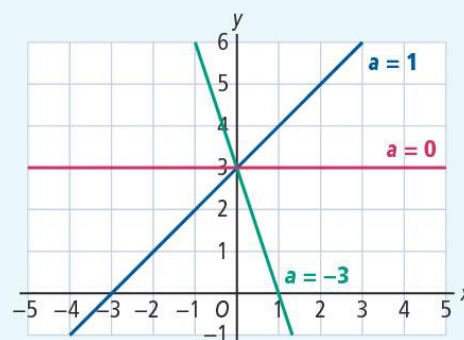
e Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f ?
En welke lijn is de asymptoot van de grafiek van h ?

Theorie

Het functievoorschrift $f_a(x) = ax + 3$ hoort bij een **familie van functies**.

Bij elke waarde van a hoort een functie en een grafiek.

Getekend zijn de grafieken van f_0 , f_1 en f_{-3} . In het functievoorschrift is x de variabele; a heet een **parameter**.



V3 Gegeven is de familie van functies $g_a(x) = \frac{12}{ax - 6}$

- a** De grafiek van g_a gaat door het punt $(8, 2)$.
Bereken a .
- b** De grafiek van g_a heeft een verticale asymptoot $x = 1\frac{1}{2}$.
Bereken a .
- c** Welke lijn is voor elke waarde van $a \neq 0$ een asymptoot van de grafiek van g_a ?

V4 Gegeven is de familie van functies $f_n(x) = x^n$ met n geheel.

- a** Plot de grafiek van f_n voor $n = 5$ en voor $n = -2$ en geef van beide functies het domein en het bereik.
- b** Voor welke waarde van n gaat de grafiek van f_n door het punt $(2, \frac{1}{8})$?
- c** Welk punt ligt voor elke waarde van n op de grafiek van f_n ?
- d** Voor welke positieve waarden van n ligt de grafiek van f_n nergens onder de x -as?

V5 Gegeven is de familie van functies $h_p(x) = x^3 + px + 8$.

- a** De grafiek van h_p gaat door het punt $(4, 20)$.
Bereken p .
- b** In het punt op de grafiek met $x = -2$ is de helling van de grafiek gelijk aan -3 .
Bereken p .

V6 Gegeven is de functie $f(x) = 3\sin(x - 2) + 5$.
Geef het bereik van f .

V7 Bepaal van elke functie het domein en het bereik.

- a** $f(x) = 3(x - 2)^2 + 5$
- b** $f(x) = 3\sqrt{x - 2} + 5$
- c** $f(x) = \frac{3}{x - 2} + 5$
- d** $f(x) = 3^{x-2} + 5$
- e** $f(x) = {}^3\log(x - 2) + 5$

Je leert

- hoe je na een transformatie het functievoorschrift opstelt bij de beeldgrafiek

Leerroutes

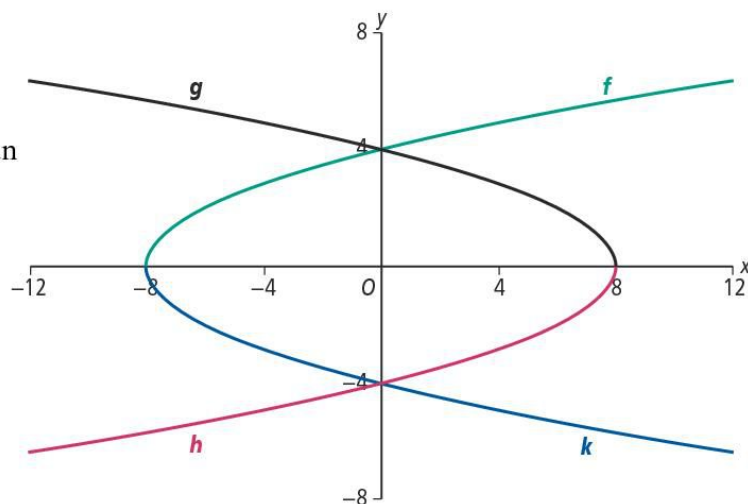
- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—7—08—9
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—4—5—6—7—8—9—U1

In de figuur zie je de grafieken van de

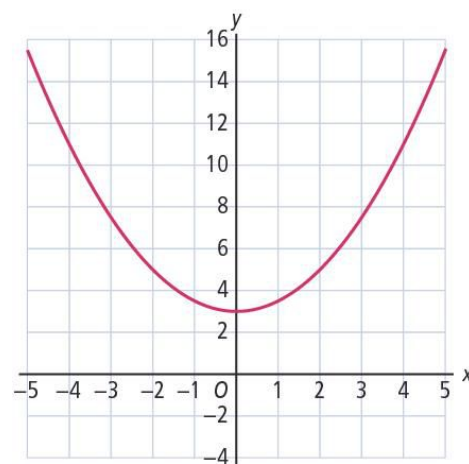
functies $f(x) = \sqrt{16 + 2x}$, $g(x) = \sqrt{16 - 2x}$,

$h(x) = -\sqrt{16 - 2x}$ en $k(x) = -\sqrt{16 + 2x}$.

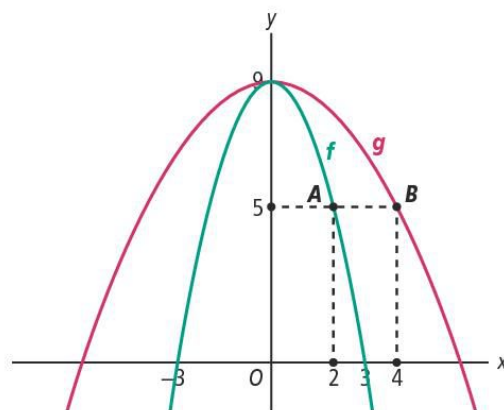
- Hoe zijn de grafieken van g , h en k ontstaan uit de grafiek van f ?



- 1 Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.
- De grafiek van f wordt 5 omlaag verschoven. Daardoor ontstaat de grafiek van de functie g . Stel het functievoorschrift op van g .
 - De grafiek van f wordt 2 naar rechts verschoven. Het resultaat is de grafiek van de functie h . Stel het functievoorschrift op van h .
 - Door de grafiek van f ten opzichte van de x -as met 4 te vermenigvuldigen ontstaat de grafiek van de functie j . Stel het functievoorschrift op van j .



- 2 Gegeven is de functie $f(x) = 9 - x^2$. Door de grafiek van f met 2 te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as ontstaat de grafiek van een functie g .
- In welke punten snijdt de grafiek van f de x -as?
 - In welke punten snijdt de grafiek van g de x -as?
 - Het punt $A(2, 5)$ ligt op de grafiek van f . Het beeld van A is het punt B op de grafiek van g .
Vul in: $g(4) = f(2)$, dus $g(4) = \dots$
 - Vul in: $g(a) = f(\dots)$, dus $g(a) = \dots$
 - Stel het functievoorschrift op van g .



Theorie

Pas je op de grafiek van een functie f een **transformatie** toe, zoals een verschuiving (translatie), een spiegeling of een vermenigvuldiging, dan heet de grafiek die zo ontstaat, de **beeldgrafiek**.

Bij een **verticale translatie** over een afstand d omhoog ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x) + d$.

Bij een **horizontale translatie** over een afstand c naar rechts ontstaat de grafiek van $g(x) = f(x - c)$.

Bij een **vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as** met factor a ontstaat de grafiek van $g(x) = a \cdot f(x)$.

Bij een **vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as** met factor b ontstaat de grafiek van $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift op van de grafiek die ontstaat door de grafiek van de functie

$$f(x) = 2 + {}^3\log(x)$$

a 7 naar links te verschuiven.

b ten opzichte van de y -as met 4 te vermenigvuldigen.

Oplossing

a $g(x) = f(x + 7)$

$$g(x) = 2 + {}^3\log(x + 7)$$

b $h(x) = f\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$

$$h(x) = 2 + {}^3\log\left(\frac{1}{4}x\right)$$

3 Gegeven is de functie $f(x) = 3^x$.

H

Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek bij toepassing van de aangegeven transformaties.

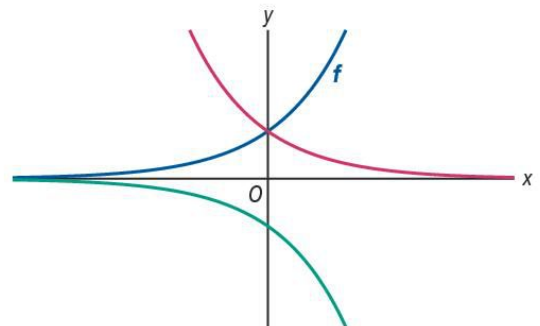
- a** Een vermenigvuldiging met -2 ten opzichte van de x -as en daarna een verschuiving van 4 naar links.
- b** Een vermenigvuldiging met $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as en daarna een verschuiving van 4 omhoog.

Ondersteunende route → maak opdracht 04

- 4** De grafiek van de functie $f(x) = 4x + \sqrt{x}$ wordt 2 naar links verschoven.
Leg uit wat het juiste functievoorschrift van de beeldgrafiek is.
Kies uit $g(x) = 4(x + 2) + \sqrt{x}$, $g(x) = 4(x + 2) + \sqrt{x + 2}$ en $g(x) = 4x + \sqrt{x + 2}$.

5 Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.

- a** De grafiek van f wordt gespiegeld in de x -as.
Met welke vermenigvuldiging krijg je dezelfde beeldgrafiek?
- b** Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.
- c** De grafiek van f wordt gespiegeld in de y -as.
Met welke vermenigvuldiging krijg je dezelfde beeldgrafiek?
- d** Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.



9.1 Transformaties

Theorie

Als de grafiek van een functie f wordt **gespiegeld in de x -as**, ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = -f(x)$.

Als de grafiek van een functie f wordt **gespiegeld in de y -as**, ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = f(-x)$.

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek van $f(x) = x^2 - 3x$ bij spiegeling in de y -as.

Oplossing

$$g(x) = f(-x) = (-x)^2 - 3(-x)$$

$$g(x) = x^2 + 3x$$

- 6** De grafiek van de functie $f(x) = x^2 + 2x$ wordt gespiegeld in de x -as en daarna 5 naar rechts verschoven. Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.
- 7** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
- H** **a** De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f te spiegelen in de y -as en daarna de translatie 3 naar rechts toe te passen. Stel het functievoorschrift op van g .
- b** Krijg je hetzelfde antwoord als de volgorde van de twee transformaties wordt veranderd? Leg je antwoord uit.

Ondersteunende route → maak opdracht O8

- 8** Gegeven is de functie $f(x) = \sin(2x + 5)$.
- a** Alya beweert dat je de grafiek van f krijgt als je de grafiek van $g(x) = \sin(2x)$ over een afstand 5 naar links verschuift. Waarom is dit niet juist?
- b** Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit die van $h(x) = \sin(x)$? Vermeld ook de volgorde waarin de transformaties moeten worden toegepast.
- 9** Geef aan door welke transformaties de grafiek van de functie g kan ontstaan uit de grafiek van de functie f . Geef aan in welke volgorde deze transformaties moeten worden toegepast.
- H** **a** $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}x}$
- b** $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = 8 + \log(x - 6)$
- c** $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\pi\right)$

Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 04** Gegeven is de functie $f(x) = x \cdot 2^x$.
 Als op de grafiek van f een verschuiving van 3 naar rechts wordt toegepast, is de beeldgrafiek de grafiek van een functie g .
- Plot de grafieken van f en $g(x) = (x - 3) \cdot 2^x$.
 Is $g(x)$ het functievoorschrift bij de beeldgrafiek?
 - Plot de grafieken van f en $g(x) = x \cdot 2^{x-3}$.
 Is $g(x)$ het functievoorschrift bij de beeldgrafiek?
 - Plot de grafieken f en $g(x) = (x - 3) \cdot 2^{x-3}$.
 Is $g(x)$ het functievoorschrift bij de beeldgrafiek?
 - Vul in: bij een verschuiving van 3 naar rechts van de grafiek van f , geldt $g(x) = f(\dots)$. Dan moet je *elke* x in het functievoorschrift van f vervangen door ...
 - De grafiek van f wordt 5 naar links verschoven.
 Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

- 08** Gegeven is de functie $f(x) = \log(3x)$.
 Als op de grafiek van f een verschuiving van 4 naar rechts wordt toegepast, is de beeldgrafiek de grafiek van een functie g .
- Plot de grafieken van f en $g(x) = \log(3x - 4)$.
 Is het functievoorschrift van g juist? Geef een verklaring.
 - Plot de grafieken van f en $g(x) = \log(3x - 12)$.
 Is het functievoorschrift van g juist? Geef een verklaring.
 - De grafiek van de functie $h(x) = \log(3x + 30)$ is de beeldgrafiek bij een verschuiving van de grafiek van f .
 Welke verschuiving is hier toegepast?
 - Door welke transformaties ontstaat de grafiek van h uit die van $k(x) = \log(x)$? Vermeld ook de volgorde waarin de transformaties moeten worden toegepast.

Uitdagende opdrachten

- U1** Op de grafiek van de functie $f(x) = \frac{a}{x-b}$ worden achtereenvolgens de volgende transformaties toegepast:
- translatie 3 omhoog en 5 naar links,
 - vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 en
 - vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$.
- Het resultaat is de grafiek van de functie $g(x) = 9\left(\frac{1}{x} + 1\right)$.
 Bereken de waarde van a en van b .

9.2 Symmetrie van grafieken

Je leert

- wat even en oneven functies zijn
- hoe je de symmetrie van een grafiek aantoon

Leerroutes

- ondersteunend: 10—011—11—12—13—14—015—16
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—11—12—14—15—16—17—U2

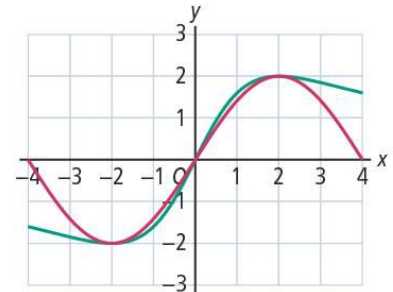
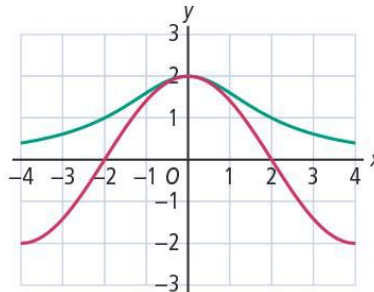
In beide assenstelsels zie je twee grafieken.

De grafieken horen bij de functies

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}, g(x) = \frac{8}{x^2 + 4},$$

$$h(x) = 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right) \text{ en } k(x) = 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right).$$

- Van welke functies is de grafiek symmetrisch in de y -as?
- Welke symmetrie hebben de grafieken van de andere functies?



- 10** Van de functie f is gegeven dat $f(2) = 2$ en $f(6) = 4$.

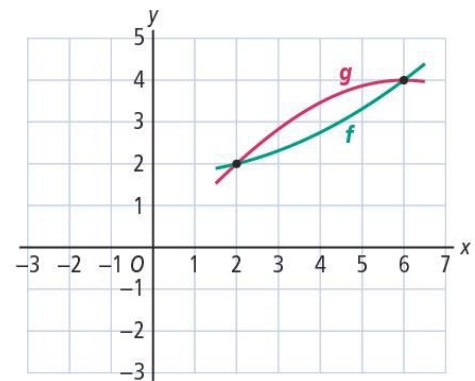
De grafiek van f is symmetrisch in de y -as.

- a** Bereken $f(-2)$ en $f(-6)$.

- b** Maak met een schets duidelijk dat voor elke waarde van a uit het domein van f geldt $f(-a) = f(a)$.

- c** Van de functie g is gegeven dat $g(2) = 2$ en $g(6) = 4$.
De grafiek van g is puntsymmetrisch in de oorsprong.
Bereken $g(-2)$ en $g(-6)$.

- d** Schets een grafiek die puntsymmetrisch is in de oorsprong.
Geef in de schets aan waarom voor elke waarde van a geldt $g(-a) = -g(a)$.



Theorie

De grafiek van een functie f is **symmetrisch in de y -as** als $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f .

De grafiek van een functie f is **puntsymmetrisch in $(0, 0)$** als $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f .

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4}$

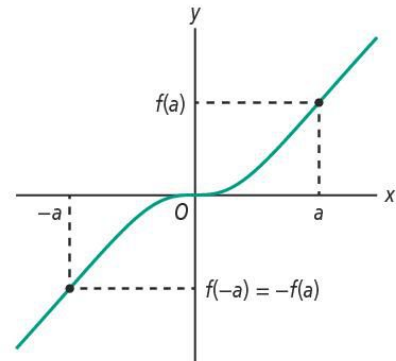
Toon aan dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in de oorsprong.

Oplossing

$$f(a) = \frac{a^3}{a^2 + 4} \text{ en } f(-a) = \frac{(-a)^3}{(-a)^2 + 4} = \frac{-a^3}{a^2 + 4} = -\frac{a^3}{a^2 + 4},$$

dus $f(-a) = -f(a)$.

De grafiek van f is puntsymmetrisch in de oorsprong.

**Ondersteunende route → maak opdracht 011**

- 11** Plot van elke functie de grafiek en noteer of de grafiek symmetrisch is in de y -as, in de oorsprong of geen van beide. Toon bij de symmetrische grafieken de symmetrie aan door $f(a)$ te vergelijken met $f(-a)$.

H

a $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c $f(x) = x^4 - x$

b $f(x) = x^3 - 4x$

d $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{x^3}$

- 12** Gegeven is de machtsfunctie $f(x) = x^n$ met n een geheel, positief getal.
- a** Laat zien dat voor $n = 6$ geldt $f(-a) = f(a)$.
 - b** Laat zien dat voor $n = 7$ geldt $f(-a) = -f(a)$.
 - c** Voor welke waarden van n geldt $f(-a) = f(a)$? Is voor die waarden van n de grafiek van f lijnsymmetrisch of puntsymmetrisch?
 - d** Voor welke waarden van n geldt $f(-a) = -f(a)$? Welke symmetrie heeft de grafiek van f voor die waarden van n ?

Theorie

Voor $f(x) = x^n$, met n even, geldt $f(-a) = f(a)$. Elke functie met deze eigenschap heet daarom een **even functie**.

Voor $f(x) = x^n$, met n oneven, geldt $f(-a) = -f(a)$.

Elke functie met deze eigenschap heet een **oneven functie**.

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4}$ uit het voorbeeld hierboven is een oneven functie, want $f(-a) = -f(a)$.

9.2 Symmetrie van grafieken

13 Plot de grafiek en geef aan of de functie even of oneven is.

a $f(x) = x^5 - 5x^3$

c $f(x) = \cos(x)$

b $f(x) = 6\sin^3(x)$

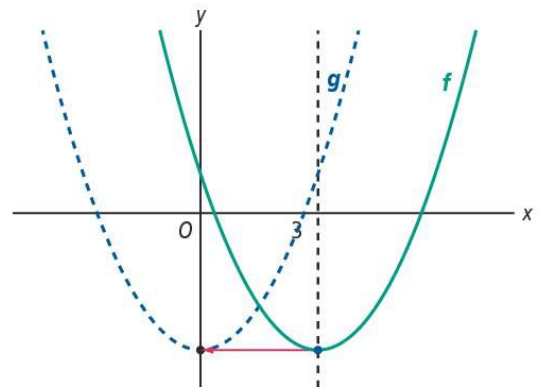
d $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$

- 14**
- a** Toon aan dat de grafiek van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ puntsymmetrisch is in de oorsprong.
 - b** Is f een even functie of een oneven functie?
 - c** Door welke verschuiving ontstaat de grafiek van $g(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ uit de grafiek van f ?
 - d** Geef het punt van symmetrie van de grafiek van g .

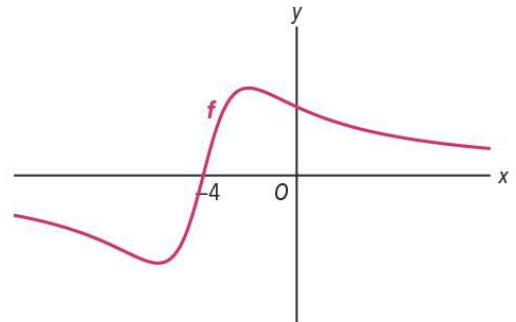
Ondersteunende route → maak opdracht 015

- 15** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6x + 2$.
In deze opdracht ga je bewijzen dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = 3$.

- a** Bij een verschuiving van 3 naar links is de grafiek van g het beeld van de grafiek van f .
Stel het functievoorschrift op van g .
- b** Toon aan dat g een even functie is.
- c** Leg uit dat hieruit volgt dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = 3$.



- 16** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{10x + 40}{x^2 + 8x + 20}$.
Toon aan dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in het punt $(-4, 0)$ door de grafiek eerst 4 naar rechts te verschuiven en aan te tonen dat de beeldgrafiek puntsymmetrisch is in $(0, 0)$.

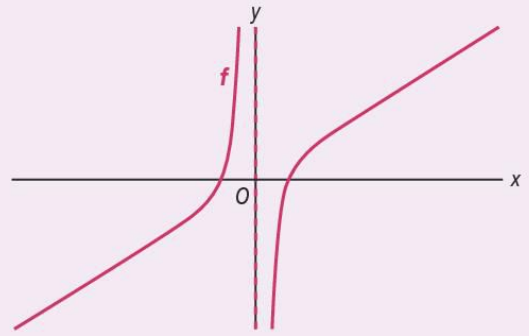


- 17** Gegeven zijn twee oneven functies f en g .
- a** Toon aan dat $h(x) = f(x) + g(x)$ een oneven functie is.
 - b** Toon aan dat $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ een even functie is.

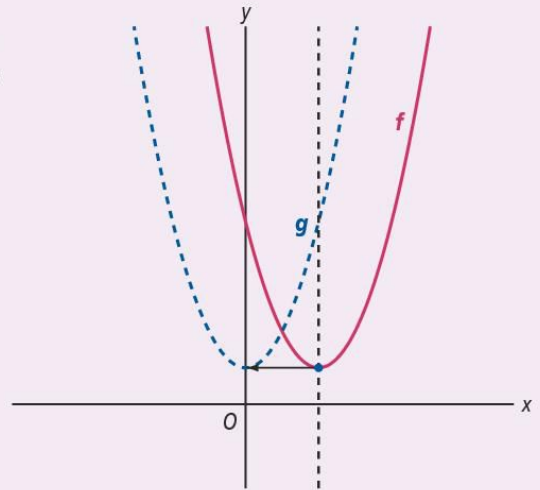
Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 011** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^3}$.
De grafiek lijkt symmetrisch in de oorsprong. In deze opdracht toon je dat aan.
- Bereken $f(-1)$ en $f(1)$.
 - Bereken ook $f(-2)$ en $f(2)$.
 - Vul in: $f(a) = \frac{1}{2} \cdot \dots - \frac{1}{\dots^3}$ en $f(-a) = \frac{1}{2} \cdot \dots - \frac{1}{(\dots)^3}$
 - Werk de haakjes weg en laat zien dat $f(-a) = -f(a)$.

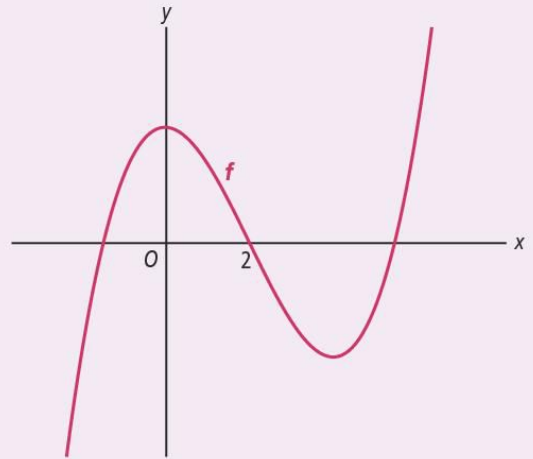


- 015** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
Je gaat aantonen dat de grafiek van f symmetrisch is in de lijn $x = 2$. Dat doe je door de grafiek van f twee naar links te verschuiven en aan te tonen dat de beeldgrafiek de grafiek van een even functie is en dus symmetrisch in de y -as.
- De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f twee naar links te verschuiven.
Vul in: $g(x) = f(x + \dots) = (x + \dots)^2 - 4(x + \dots) + 5$.
 - Schrijf het functievoorschrift van g zo eenvoudig mogelijk.
 - Bereken $g(4)$ en $g(-4)$.
 - Toon aan dat g een even functie is.
 - Welke lijn is de symmetrieas van de grafiek van g ?
 - Dus in welke lijn is de grafiek van f symmetrisch?



Uitdagende opdrachten

- U2** Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$.
- Toon met een berekening aan dat het punt $(2, 0)$ op de grafiek van f ligt.
 - Toon aan dat de grafiek van f symmetrisch is in $(2, 0)$.



9.3 Absolute waarde

Je leert

- wat een absolute waarde is
- hoe je de grafiek van een absolute waarde-functie tekent

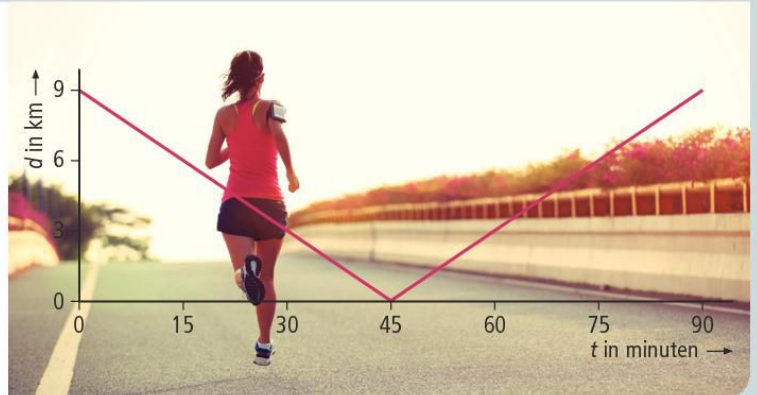
Leerroutes

- ondersteunend: 18—19—20—21—022—23—24—025—25
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 18—19—20—21—23—25—26—U3—U4

Wendy loopt met een constante snelheid van 12 km/h over een weg 9 km heen en 9 km terug.

d is de afstand in km tot haar keerpunt.

- Welke bijzonderheid heeft de grafiek die het verband aangeeft tussen de afstand d en de tijd t ?



- 18**
- Op de getallenlijn is de afstand van het getal 3 tot het getal 0 gelijk aan 3.
Welk getal ligt ook op een afstand 3 tot het getal 0?
 - Noem twee getallen die op een afstand van $\sqrt{5}$ liggen van het getal 0.
 - Voor welke getallen a is de afstand tot 0 gelijk aan a ?
 - Voor welke getallen a is de afstand tot 0 gelijk aan $-a$?



Theorie

De afstand op de getallenlijn van een getal x tot 0 noem je de **absolute waarde** van x .

De notatie voor de absolute waarde van x is $|x|$.

Voor de absolute waarde van x geldt: $|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$

Voorbeeld

$$|6| = 6 \text{ en } |-8| = 8$$

$$|-14| + |5| = 14 + 5 = 19$$

$$|8 - 15| = |-7| = 7$$

- 19** Bereken.
- $|3 - 28|$
 - $3 - |-28|$
 - $\sqrt{|-100|} - \log(|-100|)$
 - $|18 - |-24||$
- 20** Gegeven is de functie $f(x) = |x|$.
- Bereken $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ en $f(4)$.
 - Teken de grafiek van f voor $-5 \leq x \leq 5$.
 - Plot en schets de grafiek van $g(x) = \sqrt{x^2}$.
 - Vergelijk de grafieken van f en g .
Welke conclusie kun je daaruit trekken?

21 Gegeven zijn de functies $k(x) = -x^2 + 2x$ en $l(x) = |-x^2 + 2x|$.

a Vul de tabel in.

	-2	-1	0	1	2	3	4
$k(x)$	...	...	...	...	...	...	...
$l(x)$	...	...	...	...	...	...	...

b Teken in één figuur de grafieken van k en l .

c Schrijf op hoe de grafiek van l uit die van k ontstaat.

d Hoe groot zijn de extreme waarden van l ?

Theorie

De grafiek van $f(x) = |g(x)|$ ontstaat door de delen van de grafiek van g die onder de x -as liggen te spiegelen in de x -as. Daardoor zal de grafiek van f vaak een **knik** vertonen in de punten die op de x -as liggen.

f heeft een minimum in elk van de nulpunten van g , die je vindt door $g(x) = 0$ op te lossen.

Je kunt $f(x)$ ook zonder absolute waarde-strepen schrijven:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{als } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{als } g(x) < 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = |\sin(x)|$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Teken de grafiek van f , geef de extreme waarden van f en schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.

Oplossing

Teken eerst de grafiek van $g(x) = \sin(x)$.

Los op $g(x) = 0$. De nulpunten zijn $0, \pi$ en 2π .

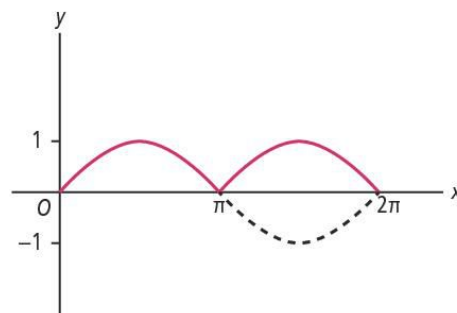
Spiegel de delen van de grafiek van g die onder de x -as liggen, in de x -as.

De extreme waarden van f zijn:

minima: $f(0) = 0, f(\pi) = 0$ en $f(2\pi) = 0$,

maxima: $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$ en $f(1\frac{1}{2}\pi) = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{als } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin(x) & \text{als } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

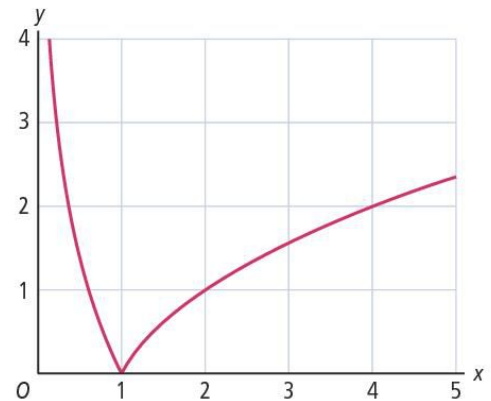


→ Instructie rekenmachine | Absolute waarde

9.3 Absolute waarde

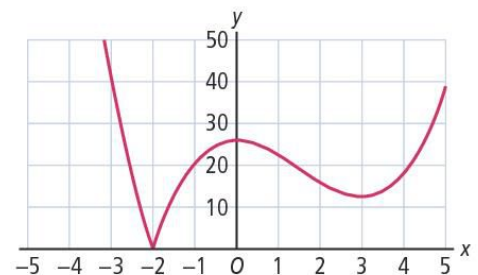
Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** Gegeven is de grafiek van $f(x) = |^2\log(x)|$.
- Los op $^2\log(x) = 0$.
 - Geef de extreme waarde van f .
 - Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.
 - Los exact op $f(x) > 2$.



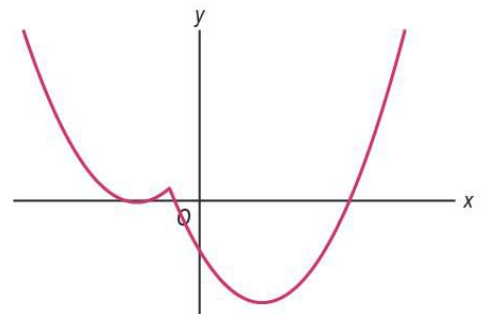
- 23** Gegeven zijn de functies $f(x) = |x^3 - 12x|$ en $g(x) = x^3 - 12x$.
- H**
- Plot en schets de grafiek van g .
 - Bereken exact de nulpunten van g .
 - Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.
 - Voor welke waarden van x valt de grafiek van f samen met de grafiek van g ?
 - Bereken exact de coördinaten van de toppen van de grafiek van g .
 - Geef de extreme waarden van f .

- 24** Gegeven is de functie $f(x) = |-x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 26|$.
- Bereken exact de extreme waarden van de functie $g(x) = -x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 26$.
 - Ga na dat $x = -2$ het nulpunt van g is.
 - Geef de extreme waarden van f .



Ondersteunende route → maak opdracht 025

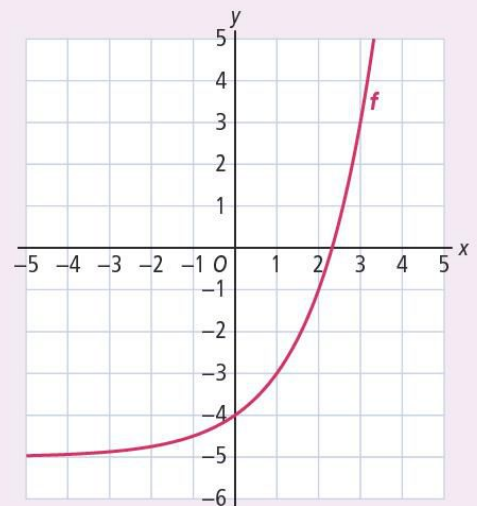
- 25**
- Plot en schets de grafiek van $f(x) = ^3\log(|x|)$.
 - Los exact op $f(x) > 2$.
- 26** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - |5x + 6|$.
- Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.
 - In welk punt zit er een knik in de grafiek?
 - Bereken exact de nulpunten van f .
 - Bereken exact de extreme waarden van f .



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 022** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 2^x - 5$.
- Hoe ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = |2^x - 5|$ uit de grafiek van f ?
 - Los exact op $f(x) = 0$.
 - Schets de grafiek van g .
 - Bereken exact de coördinaten van het punt waarin de grafiek van g een knik heeft.
 - Stel het functievoorschrift op van g zonder absolute waarde-strepen.
 - Hoe groot is het minimum van g ?
 - Los exact op $f(x) = 3$ en $-f(x) = 3$.
 - Los exact op $g(x) \leq 3$.

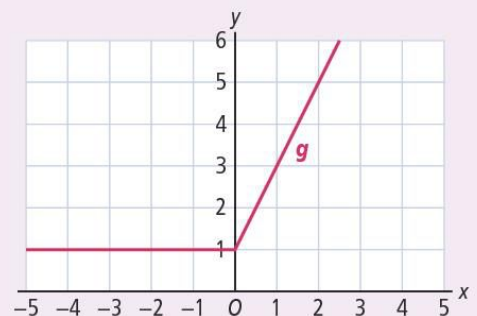


- 025** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{|x|}$.
- Bereken $f(1)$ en $f(-1)$.
 - Bereken $f(9)$ en $f(-9)$.
 - Schrijf $f(x)$ zonder absolute waarde-strepen.
 - Plot en schets de grafiek van f .
 - Welke symmetrie heeft de grafiek?
 - Er zijn twee waarden van x waarvoor $f(x) = 2$. Welke zijn dat?
 - Los exact op $f(x) > 2$.

Uitdagende opdrachten

- U3**
- Plot en schets de grafiek van de functie $f(x) = |x| - 2x$.
 - Los exact op $-3 \leq f(x) \leq 3$.

- U4** De grafiek hoort bij een functie g .
Onderzoek welk functievoorschrift deze functie kan hebben.
Gebruik in je antwoord absolute waarde-strepen.



9.4 Inverse functies

Je leert

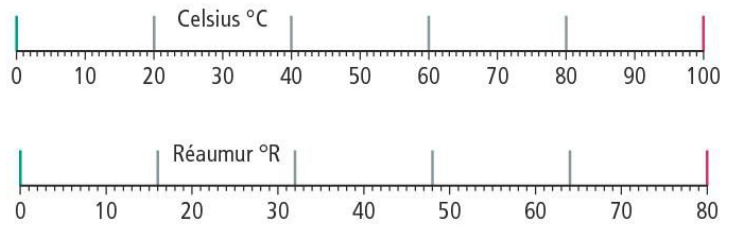
- wat een inverse functie is
- hoe je het functievoorschrift van een inverse functie opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 27—28—029—30—31—032—32
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 28—29—30—31—32—33—U5

In de 18^e eeuw werden er door verschillende natuurkundigen temperatuurschalen ontwikkeld. Een van de eerste schalen was die van Réaumur (1731), later vervangen door die van Celsius (1742). Van graden Réaumur naar graden Celsius reken je om met de formule $C = \frac{5}{4} R$.

- Hoe reken je om van graden Celsius naar graden Réaumur?



27 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = {}^3\log(x)$.

- Vul de tabellen in.
- Welke bijzonderheid zie je in de tabellen?
- Er geldt $f(2\frac{1}{2}) = 9\sqrt{3}$.
Wat volgt hieruit voor de waarde van $g(9\sqrt{3})$?

x	-1	0	1	2
$f(x)$	...	...	...	...

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$g(x)$	...	...	...	...

28 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 8$ en $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.
Er geldt $f(5) = 2$ en $g(2) = 5$.
Leg uit dat geldt: als $f(a) = b$, dan is $g(b) = a$ voor elke waarde van a .

$$f: 5 \xrightarrow{\times 2} 10 \xrightarrow{-8} 2$$

$$g: 5 \xleftarrow{:2} 10 \xleftarrow{+8} 2$$

Theorie

Bij elke functie f hoort een rekenschema. Soms kun je daarbij een **terugrekenschema** maken. Bij zo'n terugrekenschema hoort een functie g .

De functies f en g heten **inverse functies** van elkaar als geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd) voor elke a uit het domein van f en elke b uit het domein van g .

De notatie voor de inverse functie van f is f^{inv} .

Het domein van f^{inv} is gelijk aan het bereik van f .

Bij het opstellen van het functievoorschrift van een inverse functie maak je gebruik van **inverse bewerkingen**.

Voorbeelden van
inverse bewerkingen

$+ 7$ en $- 7$

$\times 3$ en $: 3$

$(\dots)^2$ en $\sqrt{\dots}$

$(\dots)^3$ en $\sqrt[3]{\dots}$

$(\dots)^a$ en $(\dots)^{\frac{1}{a}}$

$g^{\dots}$ en ${}^g\log(\dots)$

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift op van de inverse van $f(x) = \sqrt{x-7}$.
 Vermeld daarbij het domein van f^{inv} .

Oplossing

Bij f hoort het rekenschema:

$$x \xrightarrow{-7} x-7 \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \sqrt{x-7}$$

Bij f^{inv} hoort het terugrekenschema:

$$x^2 + 7 \xleftarrow{+7} x^2 \xleftarrow{\dots^2} x$$

Dus $f^{inv}(x) = x^2 + 7$.

Het bereik van f is $[0, \rightarrow)$, dus het domein van f^{inv} is $[0, \rightarrow)$.

Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29** Stel een functievoorschrift op van f^{inv} . Vermeld daarbij ook het domein van f^{inv} .

H

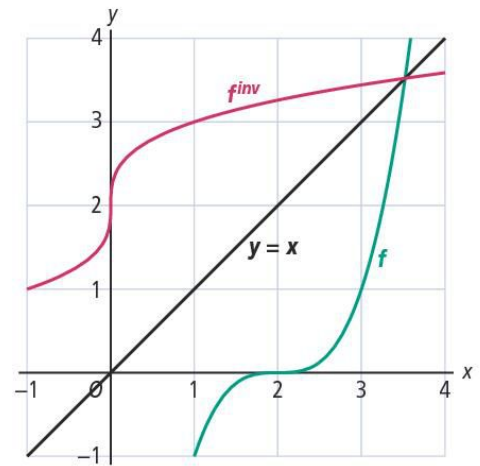
- a** $f(x) = -4x + 3$
- b** $f(x) = \sqrt{2x+5}$
- c** $f(x) = \log(x-3)$
- d** $f(x) = \frac{1}{x-2}$

- 30**
- a** Teken de punten $P(4, 2)$, $Q(-4, 1)$ en $R(4, -2)$.
 - b** Geef de coördinaten van de beeldpunten P' , Q' en R' bij spiegeling in de lijn $y = x$.

Uit $f(a) = b$ volgt $f(b) = a$. Dus als het punt (a, b) op de grafiek van f ligt, dan ligt het punt (b, a) op de grafiek van f^{inv} . Bij spiegeling in de lijn $y = x$ worden de x - en y -coördinaat van een punt verwisseld. De grafieken van f en f^{inv} zijn dus elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

9.4 Inverse functies

- 31** Gegeven is de functie $f(x) = (x - 2)^3$ met daarop het punt $P(3, 1)$. Bij spiegelen in de lijn $y = x$ is de grafiek van f^{inv} het beeld van de grafiek van f en P' het beeld van P . De coördinaten van elk punt op de grafiek van f voldoen aan de vergelijking $y = (x - 2)^3$.
- Laat zien dat de coördinaten van P' voldoen aan de vergelijking $x = (y - 2)^3$.
 - Leg uit waarom de coördinaten van elk punt van de grafiek van f^{inv} voldoen aan de vergelijking $x = (y - 2)^3$.
 - Herleid de vergelijking $x = (y - 2)^3$ tot $y = 2 + \sqrt[3]{x}$.
 - Schrijf het functievoorschrift van f^{inv} op.

**Aanpak**

Hoe stel je het functievoorschrift op van de inverse functie van een gegeven functie f ?

- Vervang in het functievoorschrift $f(x)$ door y .
- Vervang in de formule x door y en y door x .
- Druk in de nieuwe formule y uit in x .
- Schrijf het resultaat als functievoorschrift door y te vervangen door $f^{inv}(x)$.

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift op van de inverse functie van $f(x) = {}^3\log(2x - 5)$.

Oplossing

- $y = {}^3\log(2x - 5)$
- $x = {}^3\log(2y - 5)$
- $3^x = 2y - 5$
 $2y = 3^x + 5$ dus $y = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 2\frac{1}{2}$
- $f^{inv}(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 2\frac{1}{2}$

Ondersteunende route → maak opdracht 032

- 32** Stel het functievoorschrift op van f^{inv} . Vermeld ook het domein van f^{inv} .

H

- | | |
|--|-----------------------------|
| a $f(x) = {}^2\log\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$ | d $f(x) = 2^x - 3$ |
| b $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ | e $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ |
| c $f(x) = \frac{3}{x+1}$ | f $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ |

- 33** Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x}$. Geef het functievoorschrift en het domein van f^{inv} .

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

Ondersteunende opdrachten

029 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{x+5}$.

- Op het blaadje zie je het rekenschema dat bij f hoort.
In het terugrekenschema moet je de inverse bewerking van 2^{+++} opnemen. Wat is de inverse bewerking van 2^{+++} ?
- En wat is de inverse bewerking van $+5$?
- Vul het schema in en geef het functievoorschrift van f^{inv} .
- Het domein van f^{inv} is het bereik van f .
Geef het domein van f^{inv} .

Stel het functievoorschrift op van f^{inv} . Vermeld daarbij ook het domein van f^{inv} .

e $f(x) = 3^{x-2}$ **g** $f(x) = \sqrt{5x+10}$

f $f(x) = -2x + 8$ **h** $f(x) = \frac{1}{x+3}$

$$x \xrightarrow{+5} x+5 \xrightarrow{2\cdots} 2^{x+5}$$

$$\cdots \xleftarrow{\cdots} \cdots \xleftarrow{\cdots} x$$

032 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$. Je gaat in deze opdracht het functievoorschrift van f^{inv} opstellen.

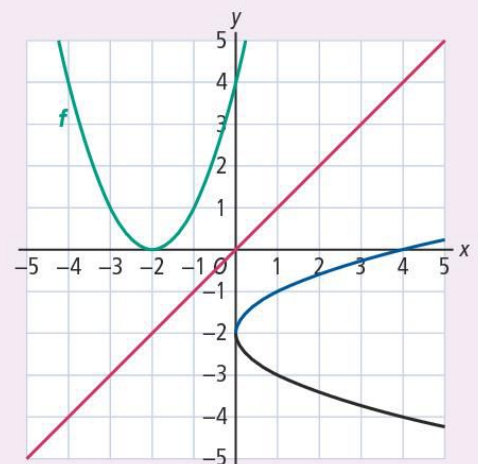
- Vervang $f(x)$ door y .
- Vervang x door y en y door x .
- De formule van opdracht b moet je herleiden zo dat y uitgedrukt wordt in x . Op het blaadje is een begin gemaakt.
Leg uit wat er in elke stap gebeurt en maak de herleiding af.
- Stel het functievoorschrift op van f^{inv} .
- Wat is het bereik van f ?
- Geef het domein van f^{inv} .

$x = \frac{y+1}{y-4}$		
$x(y-4) = y+1$		1
$xy - 4x = y+1$		2
$xy - y = \dots$		3
$y \cdot (\dots) =$		4

Uitdagende opdrachten

U5 Gegeven is de functie $f(x) = (x + 2)^2$. De grafiek van f is gespiegeld in de lijn $y = x$.

- b** Als je het domein van f beperkt tot het interval $[-2, \rightarrow)$, bestaat er wel een inverse functie. Stel voor deze situatie het functievoorschrift van f^{inv} op.
- c** Stel ook het functievoorschrift op van f^{inv} als het domein van f beperkt wordt tot het interval $\langle \leftarrow, -2]$.



9.5 Gelijkwaardige formules

Je leert

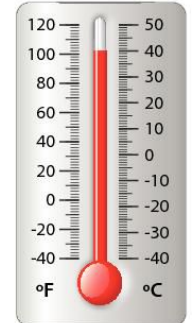
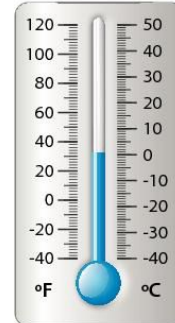
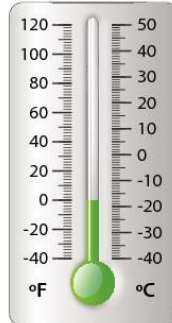
- wat gelijkwaardige formules zijn

Leerroutes

- ondersteunend: 34—35—036—37—38—039—39—40—41
- doorlopend: 34—35—36—37—38—39—40—41—42
- uitdagend: 34—35—37—38—39—40—41—42—U6

In de Verenigde Staten gebruikt men nog de temperatuurschaal van Fahrenheit (1724). Daarbij is $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ gelijk aan $32\text{ }^{\circ}\text{F}$ en $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ aan $212\text{ }^{\circ}\text{F}$.

- Welke twee formules geven het verband weer tussen de temperatuur C in $^{\circ}\text{C}$ en de temperatuur F in $^{\circ}\text{F}$? Kies uit: $C = \frac{5}{9}F - 32$, $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, $F = \frac{9}{5}C + 32$ en $F = \frac{9}{5}(C + 32)$.



34 Gegeven zijn de formules $y = 2 \cdot 3^x + 6$ en $x = {}^3\log\left(\frac{1}{2}y - 3\right)$.

- Controleer door invullen dat $x = 1$ en $y = 12$ aan beide formules voldoen.
- $x = 0$ en $y = 8$ voldoen aan de eerste formule. Voldoen deze getallen ook aan de tweede formule?
- Laat zien dat de tweede formule te herleiden is tot de eerste.

Theorie

Als bij twee formules elke combinatie van waarden die aan de ene formule voldoet, ook aan de andere voldoet en omgekeerd, dan heten die formules **gelijkwaardig** of **equivalent**. Bij het herleiden van een formule pas je links en rechts dezelfde bewerking toe of gebruik je inverse bewerkingen.

Voorbeeld

Herleid $y = \frac{24}{2x - 5}$ tot een gelijkwaardige formule waarbij x is uitgedrukt in y .

Oplossing

$$\begin{aligned} \text{Uit } y &= \frac{24}{2x - 5} \text{ volgt } y(2x - 5) = 24, \\ \text{dus } 2x - 5 &= \frac{24}{y} \text{ of ook } 2x = 5 + \frac{24}{y} \\ x &= 2\frac{1}{2} + \frac{12}{y} \end{aligned}$$

35 Leg uit dat de formule $2xy = 5y + 24$ gelijkwaardig is met de formules in het voorbeeld.

Ondersteunende route → maak opdracht 036

- 36** Herleid tot een gelijkwaardige formule waarbij p is uitgedrukt in q .

H

a $p^3 + 2q = 5$ **d** $q = {}^6\log(p + 20)$
b $q = \frac{5}{p+3}$ **e** $q = \sqrt[5]{p+1} - 2$
c $q + 3^p = 4$ **f** $q = \frac{-7}{6 + \sqrt[3]{p}}$

- 37** Op het blaadje is een begin gemaakt met het herleiden van de formule $q = \frac{24p}{2p-1}$ tot een equivalente formule waarbij p is uitgedrukt in q .

- a** Leg uit wat er in de stappen 1 tot en met 4 is gebeurd en maak de herleiding af.

Druk p uit in q .

b $q = \frac{p-3}{p+4}$ **c** $q = \frac{4p-12}{3p-5}$

•	$q = \frac{24p}{2p-1}$		
•	$q(2p-1) = 24p$		1
•	$2pq - q = 24p$		2
•	$2pq - 24p = q$		3
•	$p(2q-12) = q$		4

- 38** Gegeven is de formule $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$

- a** Neem $b = 50$ en druk v uit in f .
b Neem $f = 10$ en laat zien dat de formule te herleiden is

tot $b = \frac{10v}{v-10}$

Ondersteunende route → maak opdracht 039

- 39** Robert maakt een kanotocht van 10 km heen en 10 km terug. De stroomsnelheid van de rivier is v km per uur en Robert vaart met een gemiddelde snelheid van 4 km per uur ten opzichte van het water. T is de tijd in uren die hij over de tocht doet.

- a** Leg uit dat geldt $T = \frac{10}{4-v} + \frac{10}{4+v}$
b Voor welke waarden van v kan met deze formule de vaartijd worden berekend?
c Herleid de formule tot een vorm met één breuk.
d Druk v uit in T voor $v \geq 0$.

9.5 Gelijkwaardige formules

Herleid je de formule $q = p^2$ tot een vorm waarbij p uitgedrukt wordt in q , dan vind je $p = \sqrt{q}$ of $p = -\sqrt{q}$.

De formule $p = \sqrt{q}$ is gelijkwaardig met $q = p^2$ voor $p \geq 0$.

De formule $p = -\sqrt{q}$ is gelijkwaardig met $q = p^2$ voor $p \leq 0$.

Voorbeeld

Herleid $p^2 = 2q - 3$ voor $p \leq 0$ tot een gelijkwaardige formule waarbij q is uitgedrukt in p .

Oplossing

$p^2 = 2q - 3$ geeft

$p = \sqrt{2q - 3}$ of $p = -\sqrt{2q - 3}$.

Omdat $p \leq 0$ is de oplossing

$p = -\sqrt{2q - 3}$.

- 40** Herleid de formule tot een gelijkwaardige formule waarbij p is uitgedrukt in q .

H

- a** $p^2 + 4q = 5$ voor $p \geq 0$
- b** $p^2 + 4q = 5$ voor $p \leq 0$
- c** $(p - 2)^2 + 4q = 5$ voor $p - 2 \leq 0$

- 41** De formule voor kinetische energie is $E = \frac{1}{2}mv^2$. E is de energie in joule, m is de massa in kg en v is de snelheid in m/s.
- a** Druk m uit in de andere variabelen.
 - b** Druk v uit in E en m voor $v \geq 0$.

Herleid je de formule $q = \sqrt{p}$ tot een vorm waarbij p uitgedrukt wordt in q , dan vind je $p = q^2$. Deze formule is alleen equivalent met de formule $q = \sqrt{p}$ voor $q \geq 0$. Zo voldoet de combinatie $(p, q) = (4, -2)$ wel aan de formule $p = q^2$, maar niet aan de formule $q = \sqrt{p}$.

- 42** Herleid de formules tot een vorm waarbij p is uitgedrukt in q . Geef aan voor welke waarden van q de formules gelijkwaardig zijn.

- a** $q = \sqrt{p + 5}$
- b** $q = \frac{6}{1 + \sqrt{p - 3}}$

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

036 Je gaat de formule $q = \frac{12}{6 + \sqrt[3]{p+1}}$ herleiden tot een gelijkwaardige formule waarbij p is uitgedrukt in q .

- Op het blaadje wordt er in stap 1 met $6 + \sqrt[3]{p+1}$ vermenigvuldigd.
Wat moet er op de puntjes staan?
- In stap 2 wordt gedeeld door q . Vul stap 2 in.
- Vul stap 3 in.
- Wat gebeurt er in stap 4?
- Maak de herleiding af.

Herleid de formules tot een vorm waarbij p is uitgedrukt in q .

- $4p^3 + 2q = 9$
- $q = \frac{6}{p-1}$
- $3q + 10^p = 6$
- $q = \frac{4\log(2p-7)}{2 + \sqrt[5]{p}}$
- $q = \frac{5}{2 + \sqrt[5]{p}}$
- $q = \frac{p}{4p-8}$

•	$q = \frac{12}{6 + \sqrt[3]{p+1}}$				
•	$q \cdot (\dots) = 12$				1
•	$\dots = \frac{12}{q}$				2
•	$\sqrt[3]{p+1} = \dots$				3
•	$p+1 = (\dots)^3$				4

039 Je gaat de formule $q = \frac{6}{1-p} + \frac{6}{1+p}$ herleiden tot een formule waarbij p is uitgedrukt in q .

- Gebruik het blaadje om de breuken gelijknamig te maken en op te tellen.
- Laat zien dat $q = \frac{12}{1-p^2}$
- Laat zien dat $p^2 = 1 - \frac{12}{q}$
- Druk p uit in q voor $p \geq 0$.

•	$q = \frac{6}{1-p} + \frac{6}{1+p}$				
•	$\frac{6}{1-p} + \frac{6}{1+p} =$				
•	$\frac{6(\dots)}{(1-p)(1+p)} + \frac{6(\dots)}{(1-p)(1+p)} =$				
•	$\dots$				
•	$\frac{\dots}{(1-p)(1+p)}$				

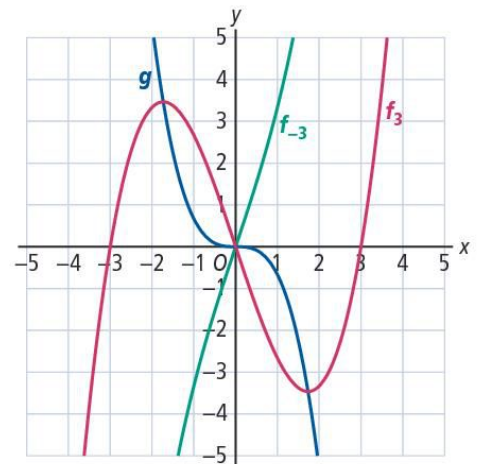
Uitdagende opdrachten

U6 Herleid de formules tot een vorm waarbij p is uitgedrukt in q .

- $q = \frac{1 - {}^2\log(p)}{{}^2\log(p)}$
- $q = 3 + \sqrt[3]{3 - 3p^3}$
- $4pq = 3p + 2q + 1$
- $q - 4 = p(p - 4), p \geq 2$

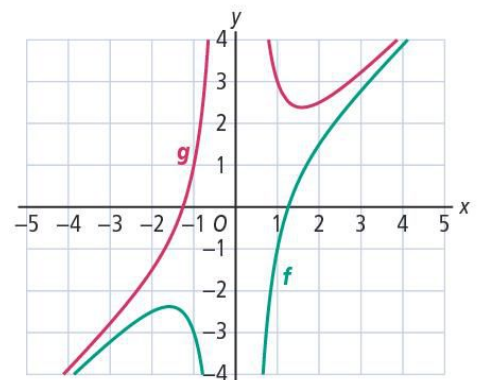
9.6 Gemengde opdrachten

- 43** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - px$ en de functie $g(x) = -\frac{2}{3}x^3$.
Getekend zijn de grafieken van f_{-3} , f_3 en g .
- Toon aan dat f_p voor elke waarde van p een oneven functie is.
 - Leg uit waarom je alleen voor positieve waarden van p grafieken krijgt die drie snijpunten met de x -as hebben.
 - Toon aan dat voor positieve waarden van p de toppen van de grafiek van f_p op de grafiek van g liggen.



- 44** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 6|x|$.
- Plot en schets de grafiek van f .
 - Welke symmetrie vertoont de grafiek van f ?
 - Schrijf het functievoorschrift van f zonder absolute waarde-strepen.
 - Bereken exact de extreme waarden van f .
 - Beantwoord de opdrachten a, b, c, en d ook voor de functie $f(x) = x^2 + 6|x|$.

- 45** Gegeven zijn de functies $f(x) = x - \frac{2}{x^2}$ en $g(x) = x + \frac{2}{x^2}$.
Het lijkt er op dat de grafiek van g het spiegelbeeld is van de grafiek van f bij spiegeling in O .
Toon aan dat dat juist is door de grafiek van f eerst te spiegelen in de x -as en daarna in de y -as.



- 46** Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = p + \frac{4}{x-p}$.
- Plot en schets de grafiek van f_1 .
 - Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van f_1 .
 - Voor welke waarden van p gaat de grafiek van f_p door de oorsprong?
 - Toon aan dat $f_1^{inv} = f_1$.
 - Toon aan dat voor elke waarde van p geldt $f_p^{inv} = f_p$.
 - De grafiek van f_p snijdt de lijn $y = x$ in de punten P en Q . Toon aan dat PQ onafhankelijk is van p .

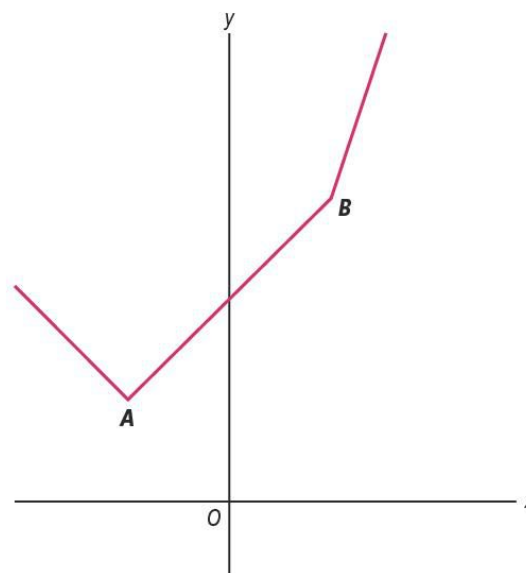
- 47** De volgorde van de transformaties die op de grafiek van een functie worden toegepast, is soms wel en soms niet van belang. Ga uit van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ en onderzoek voor elk geval of de volgorde van de twee transformaties invloed heeft op het resultaat. Geef telkens een voorbeeld.
- Twee translaties na elkaar.
 - Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as en een translatie omhoog of omlaag.
 - Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as en een translatie naar links of rechts.
 - Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as en een translatie naar links of rechts.
 - Een vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as en een translatie omhoog of omlaag.
- 48** Gegeven is een functie f , waarvoor geldt $f^{inv} = f$.
- Wat kun je zeggen over de symmetrie van de grafiek van f ?
 - Onderzoek voor welke lineaire functies geldt dat $f^{inv} = f$.
 - Kun je nog andere dan lineaire functies vinden waarvoor geldt dat $f^{inv} = f$?

- 49** Voor $p \geq 0$ is gegeven de familie van functies

$$f_p(x) = |x - p| + x + |x + p|.$$

Getekend is de grafiek van f_2 .

- In de punten A en B vertoont de grafiek van f_2 een knik. Bereken exact de coördinaten van A en B .
- Bereken voor verschillende waarden van p de coördinaten van de knikpunten.
- Voor elke waarde van p krijg je andere knikpunten A en B . Onderzoek wat de verzameling van de knikpunten A en wat de verzameling van de knikpunten B is.



Samenvatting

Theorie

Gelijkwaardige formules

Als bij twee formules elke combinatie van waarden die aan de ene formule voldoet, ook aan de andere voldoet en omgekeerd, dan heten die formules gelijkwaardig of equivalent.

Bij herleiden pas je links en rechts dezelfde bewerking toe of gebruik je inverse bewerkingen.

Voorbeeld

Herleid de formule $q = \frac{p-3}{p-4}$ tot een gelijkwaardige formule waarbij p uitgedrukt is in q .

Oplossing

$$q(p-4) = p-3 \quad \times (p-4)$$

$$pq - 4q = p - 3 \quad \text{haakjes weggewerkt}$$

$$pq - p = 4q - 3 \quad \text{alle termen met } p \text{ naar één kant}$$

$$p(q-1) = 4q-3 \quad p \text{ buiten haakjes gehaald}$$

$$p = \frac{4q-3}{q-1} \quad : (q-1)$$

- S1** Herleid tot een gelijkwaardige formule waarbij p uitgedrukt is in q .

a $q = \frac{1}{2} \cdot \log(p-5)$

b $q = \sqrt[5]{4p+20} - 1$

Theorie

Inverse functies

De functies f en g heten inverse functies van elkaar als voor elk getal a uit het domein van f en voor elk getal b uit het domein van g geldt: uit $f(a) = b$ volgt $g(b) = a$ (en omgekeerd).

Het domein van f^{inv} is gelijk aan het bereik van f .

Bij het opstellen van het functievoorschrift van een inverse functie maak je gebruik van inverse bewerkingen.

De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

- S2** Gegeven zijn de functies $f(x) = 4x + 2$ en $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Kies twee punten A en B op de grafiek van f en spiegel deze punten in de lijn $y = x$.

Laat met een berekening zien dat de beeldpunten A' en B' op de grafiek van g liggen.

Vaardigheid

Je kunt na een transformatie het functievoorschrift opstellen bij de beeldgrafiek.

Pas je op de grafiek van een functie f een transformatie toe, dan heet de grafiek die zo ontstaat, de beeldgrafiek.

Het functievoorschrift $g(x)$ van de beeldgrafiek is bij een

- verticale translatie d omhoog: $g(x) = f(x) + d$
- horizontale translatie c naar rechts: $g(x) = f(x - c)$
- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor a : $g(x) = a \cdot f(x)$
- vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met factor b : $g(x) = f\left(\frac{1}{b} \cdot x\right)$
- spiegelen in de x -as: $g(x) = -f(x)$
- spiegelen in de y -as: $g(x) = f(-x)$

Voorbeeld

$$f(x) = \sqrt{x}$$

verschuiving 1 omhoog: $g(x) = \sqrt{x} + 1$

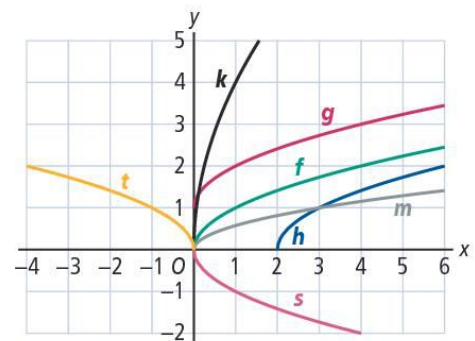
verschuiving 2 naar rechts: $h(x) = \sqrt{x - 2}$

vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 4: $k(x) = 4\sqrt{x}$

vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 3: $m(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x}$

spiegelen in de x -as: $s(x) = -\sqrt{x}$

spiegelen in de y -as: $t(x) = \sqrt{-x}$



S3 Op de grafiek van $f(x) = x^2$ worden achtereenvolgens de volgende transformaties toegepast:

- verschuiving 6 naar rechts
- vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as
- verschuiving 4 omlaag

a Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.

b Stel ook het functievoorschrift op bij de grafiek die ontstaat door de transformaties in omgekeerde volgorde uit te voeren.

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt de symmetrie van een grafiek aantonen.

De grafiek van een functie f is symmetrisch in de y -as als $f(-a) = f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f . f heet dan een even functie.

De grafiek van een functie f is puntsymmetrisch in $(0, 0)$ als $f(-a) = -f(a)$ voor elke waarde van a uit het domein van f . f heet dan een oneven functie.

Voorbeeld

Toon aan dat $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 4x$ een oneven functie is.

Oplossing

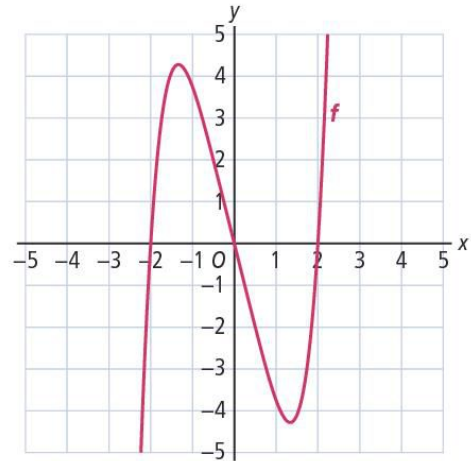
$$f(a) = \frac{1}{4}a^5 - 4a$$

$$f(-a) = \frac{1}{4}(-a)^5 - 4(-a)$$

$$f(-a) = -\frac{1}{4}a^5 + 4a$$

$$f(-a) = -(\frac{1}{4}a^5 - 4a) = -f(a)$$

$$f(-a) = -f(a) \text{ dus } f \text{ is een oneven functie.}$$



- S4**
- a** Toon aan dat $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ een oneven functie is.
 - b** Toon aan dat $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ een even functie is.

Vaardigheid

Je kunt de grafiek van een absolute waarde-functie tekenen.

Voor de absolute waarde van x geldt: $|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$

De functie $f(x) = |g(x)|$ ontstaat door de delen van de grafiek van g die onder de x -as liggen te spiegelen in de x -as. Je kunt $f(x)$ ook zonder absolute waarde-strepen schrijven:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{als } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{als } g(x) < 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

Teken de grafiek van $f(x) = |\log(x)|$ en schrijf het functievoorschrift zonder absolute waarde-strepen.

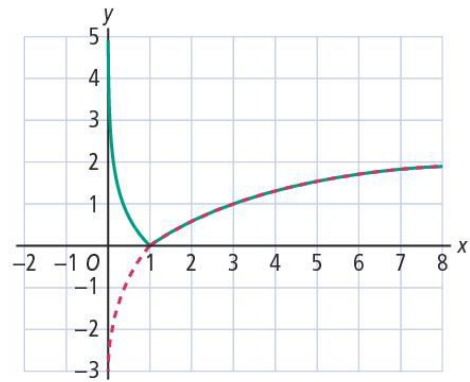
Oplossing

Teken de grafiek van $g(x) = \log(x)$.

$\log(x) = 0$ geeft $x = 1$.

Spiegel het gedeelte waarvoor $0 < x < 1$ in de x -as.

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{als } x > 1 \\ -\log(x) & \text{als } 0 < x < 1 \end{cases}$$



- S5**
- Teken de grafiek van de functie $f(x) = |x^2 + x - 6|$.
 - Schrijf het functievoorschrift van f zonder absolute waarde-strepen.
 - Bereken exact de extreme waarden van f .

Vaardigheid

Je kunt het functievoorschrift van de inverse functie van een gegeven functie f opstellen.

- Vervang in het functievoorschrift $f(x)$ door y .
- Vervang in de formule x door y en y door x .
- Druk in de nieuwe formule y uit in x .
- Schrijf het resultaat als functievoorschrift door y te vervangen door $f^{inv}(x)$.

Voorbeeld

Stel het functievoorschrift op van de inverse functie van $f(x) = \sqrt[3]{x+7}$.

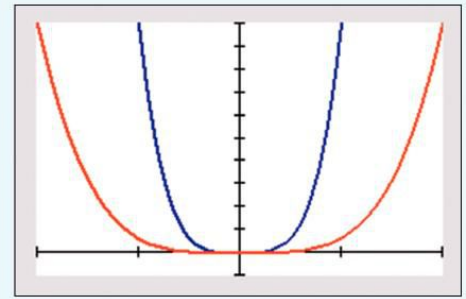
Oplossing

- $y = \sqrt[3]{x+7}$
- $x = \sqrt[3]{y+7}$
- $x^3 = y+7$, dus $y = x^3 - 7$
- $f^{inv}(x) = x^3 - 7$

- S6** Stel het functievoorschrift op van f^{inv} .

- $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$
- $f(x) = 6^{2x+3}$

- T1** Gegeven is de functie $f(x) = 100x^4$.
- De grafiek van f wordt vermenigvuldigd met factor 2 ten opzichte van de y -as.
Toon aan dat de beeldgrafiek bij de functie $g(x) = 6,25x^4$ hoort.
 - Welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as geeft dezelfde beeldgrafiek?
 - De grafiek van f wordt ten opzichte van de y -as met factor $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd.
Stel bij de beeldgrafiek het functievoorschrift op.

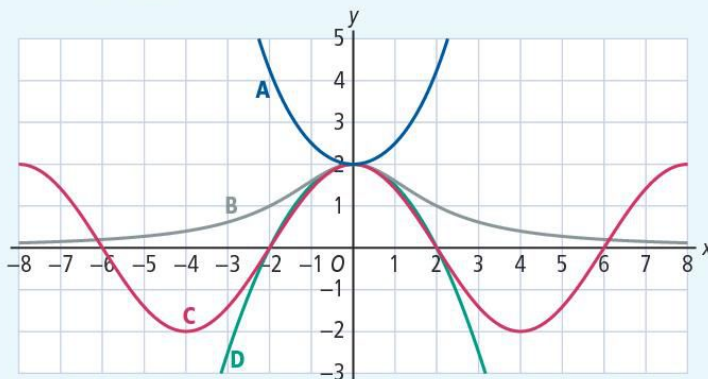


- T2** Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4x$.
- De grafiek van f wordt gespiegeld in de y -as en daarna 3 naar rechts verschoven.
Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.
 - Beantwoord opdracht a ook voor het geval de grafiek van f eerst 3 naar rechts wordt verschoven en daarna wordt gespiegeld in de y -as.

- T3** In het assenstelsel zie je vier grafieken die horen bij de functies

$$f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \quad h(x) = 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$$

$$g(x) = \frac{8}{x^2 + 4} \quad k(x) = 2^x + 2^{-x}$$



- Welke grafiek hoort bij welke functie?
 - Toon van elke functie aan dat de grafiek symmetrisch is in de y -as.
- T4** Gegeven zijn de functies $f(x) = |-x^3 + 12x|$ en $g(x) = |3x|$.
- Bereken exact de nulpunten van f .
 - Plot en schets de grafieken van f en g in één figuur.
 - Schrijf beide functievoorschriften zonder absolute waarde-strepen.
 - Bereken exact de extreme waarden van f .
 - Los exact op $f(x) < g(x)$.

T5 Stel het functievoorschrift op van f^{inv} .
Vermeld ook het domein van f^{inv} .

a $f(x) = 8 - 4x$

c $f(x) = 10^{8-4x}$

b $f(x) = \frac{10}{8-4x}$

d $f(x) = \sqrt{8-4x}$

T6 Herleid tot een gelijkwaardige formule waarbij p is uitgedrukt in q .

a $q = 4 + 5^{p-6}$

c $q = \frac{4p}{2p-5}$

b $q = \frac{4}{2p-5}$

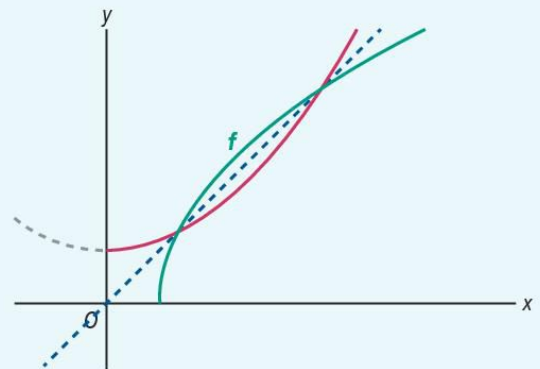
d $3p^2 - 6q = 5$ met $p \leq 0$

T7 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{12x - 27}$.

a De grafiek van f^{inv} is een deel van een parabool.
Stel een vergelijking van die parabool op.

b Leg uit dat de snijpunten van de grafieken van f en f^{inv} op de lijn $y = x$ liggen.

c Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en f^{inv} .



T8 Gegeven is de formule $x^2y = 2x - y$.

a Herleid de formule tot een vorm waarbij y is uitgedrukt in x .

b Plot en schets de grafiek bij de formule uit opdracht a.

c Welke waarden kan x aannemen? En welke y ?

T9 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x}$.

a Toon met een berekening aan dat het domein van f gelijk is aan $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup [8, \rightarrow)$.

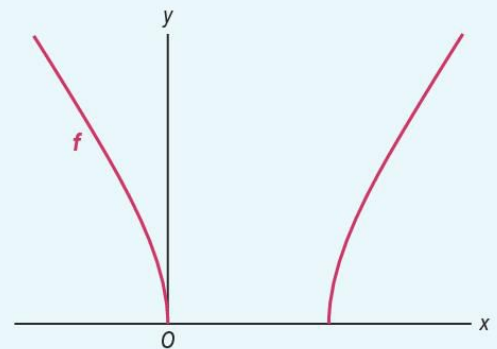
b Waarom kan de functie bij dit domein geen inverse functie hebben?

Als het domein van f beperkt wordt tot $[8, \rightarrow)$ kan er wel een inverse functie worden gevonden.

c Toon aan dat het functievoorschrift van f ook geschreven

kan worden als $f(x) = \sqrt{(x-4)^2 - 16}$.

d Stel het functievoorschrift van f^{inv} op in het geval het domein van f beperkt wordt tot $[8, \rightarrow)$.



Je kunt na een transformatie het functievoorschrift opstellen bij de beeldgrafiek.

- E1** Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3x - 9} + 4$.
- a** Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f uit de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{x}$?
 - b** De grafiek van f wordt gespiegeld in de y -as en daarna 5 naar rechts verschoven.
Stel het functievoorschrift op bij de beeldgrafiek.
 - c** Beantwoord opdracht b ook voor het geval dat de transformaties in omgekeerde volgorde worden toegepast.

Je kunt de symmetrie van een grafiek aantonen.

- E2** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.
- a** Toon aan dat de grafiek van f puntsymmetrisch is in O .
 - b** Bereken exact de nulpunten van f .
 - c** Los exact op $f(x) < -x$.
 - d** Toon aan dat de grafiek van $g(x) = |\frac{1}{3}x^3 - 4x|$ symmetrisch is in de y -as.

Je kunt de grafiek van een absolute waarde-functie tekenen.

- E3** Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 3)(x + 4)$.
- a** Plot en schets de grafiek van f .
 - b** Bereken exact de nulpunten van f .
 - c** Bereken exact de extreme waarden van f .
 - d** Teken de grafiek van $g(x) = |(x^2 - 3)(x + 4)|$.
 - e** Bereken exact de extreme waarden van g .

Je kunt het functievoorschrift van de inverse functie van een gegeven functie f opstellen.

- E4** Stel het functievoorschrift op van de inverse functie.
- | | |
|--|------------------------------------|
| a $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 7)$ | c $f(x) = {}^3\log(2x) - 5$ |
| b $f(x) = 2^{x-4}$ | d $f(x) = \frac{1}{3x + 6}$ |

E5 Herleid tot een gelijkwaardige formule waarbij p is uitgedrukt in q .

a $q = \log(10p - 6)$

c $q = \sqrt[3]{\frac{1}{3}p + 3} - 3$

b $q = \frac{5p}{p-5}$

d $q = \sqrt{p+15}$

E6 Geef aan door welke transformaties de grafiek van de functie g kan ontstaan uit de grafiek van de functie f . Geef ook aan in welke volgorde deze transformaties moeten worden toegepast.

a $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 3\sqrt{2x-6}$

b $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = 2 + \frac{5}{x-1}$

E7 Plot de grafiek van de functie f en noteer of f even of oneven is of geen van beide. Toon bij de grafieken van de even en oneven functies de symmetrie aan door $f(a)$ te vergelijken met $f(-a)$.

a $f(x) = \sqrt{|3x|} + 3$

c $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{3}{x}$

d $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

E8 Een route van 40 km wordt afgelegd met x km/h op de heenweg en y km/h op de terugweg. De gemiddelde snelheid over de heen- en terugweg is 100 km/h.

a Verklaar dat voor het verband tussen x en y moet gelden:

$$\frac{80}{100} = \frac{40}{x} + \frac{40}{y}$$

b Herleid de formule en druk y uit in x .

c Waarom kan x geen waarden kleiner of gelijk aan 50 aannemen?

E9 Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = p + \sqrt{px+4}$.

a Voor welke waarde van p gaat de grafiek van f_p door het punt $(6, 6)$?

b Voor welke waarde van p is het domein van f_p gelijk aan $\langle \leftarrow, 3 \rangle$?

c Door welke transformaties ontstaat de grafiek van f_8 uit de grafiek van f_4 ?

Vectoren 8

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In klas 3 heb je geleerd dat de grafiek van een lineaire functie een rechte lijn is. Ook weet je hoe je een vergelijking van een lijn opstelt als de coördinaten van twee punten van die lijn gegeven zijn.

In dit hoofdstuk maak je kennis met vectoren. Je leert dat een lijn ook kan worden beschreven met een vectorvoorstelling en hoe je vectoren kunt gebruiken om de hoek tussen twee lijnen te berekenen.

Behalve in de wiskunde spelen vectoren een belangrijke rol in de natuurkunde. Alle grootheden waarbij naast de grootte ook de richting een rol speelt, zoals bijvoorbeeld snelheid en kracht, kun je met vectoren beschrijven. In klas 6 zul je nog meer toepassingen van vectoren tegenkomen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 23
- *Modelleren en algebraïseren* opdracht 56
- *Formules manipuleren* opdracht 25



- V1** a Van $\triangle PQR$ is gegeven dat $\angle Q = 90^\circ$, $PQ = 14$ en $QR = 11$.
Schets deze driehoek en bereken exact PR .
- b Van $\triangle ABC$ is gegeven: $\angle C = 90^\circ$, $AB = 17$ en $BC = 8$.
Schets deze driehoek en bereken exact AC .

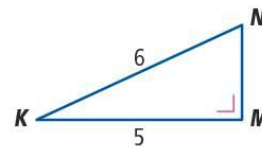
zijde	kwadraat
rechthoekszijde = 14	196
rechthoekszijde = 11	$\dots +$
langste zijde = ...	$\dots$

Theorie

In rechthoekige driehoeken geldt de **stelling van Pythagoras**:
Noem je de rechthoekszijden a en b en de langste zijde c , dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

Voorbeeld

In $\triangle KMN$ is $\angle M = 90^\circ$, $KM = 5$ en $KN = 6$. Bereken exact MN .

Oplossing

zijde	kwadraat
$KM = 5$	25
$MN = \dots$	$\frac{11}{+}$
$KN = 6$	36

dus $MN = \sqrt{11}$.

- V2** Bereken exact de lengte van de onbekende zijde.
- a $\triangle ABC$ met $\angle B = 90^\circ$, $AB = 12$ en $BC = 9$.
- b $\triangle DEF$ met $\angle D = 90^\circ$, $DE = 7$ en $DF = 7$.
- c $\triangle PQR$ met $\angle R = 90^\circ$, $PQ = 13$ en $PR = 3$.
- d $\triangle STV$ met $\angle S = 90^\circ$, $ST = 17$ en $TV = 25$.
- V3** Van $\triangle ABC$ is gegeven dat $AC = 5$ en $BC = 6$. De lengte van de hoogtelijn CD is 3.
- a Maak een schets van $\triangle ABC$.
- b Bereken exact AB .
- V4** Een ruit is een vierhoek waarvan alle zijden even lang zijn. Van een ruit $ABCD$ zijn de diagonalen $AC = 20$ en $BD = 16$.
- a Maak een schets van deze ruit.
- b Bereken exact de lengte van de zijden van deze ruit.

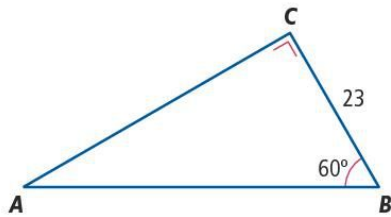
Theorie

Bij berekeningen in rechthoekige driehoeken kun je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken. In de tabel zie je voor een aantal hoeken de exacte waarde van de sinus en de cosinus.
Als je te maken hebt met andere hoekgroottes dan die in de tabel, kun je niet met exacte waarden rekenen.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Voorbeeld 1

In $\triangle ABC$ is $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ en $BC = 23$.
Bereken exact AC en AB .

Oplossing

$$\cos(60^\circ) = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{23}{AB}$$

$$AB = 46$$

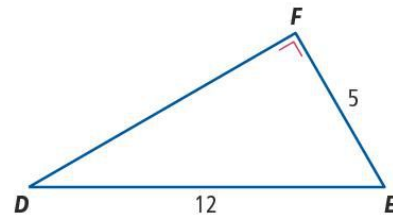
$$\sin(60^\circ) = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{AC}{46}$$

$$AC = 23\sqrt{3}$$

Voorbeeld 2

In $\triangle DEF$ is $\angle F = 90^\circ$, $DE = 12$ en $EF = 5$.
Bereken $\angle D$ en $\angle E$ in graden nauwkeurig.

Oplossing

$$\sin(\angle D) = \frac{5}{12}$$

$$\angle D \approx 25^\circ$$

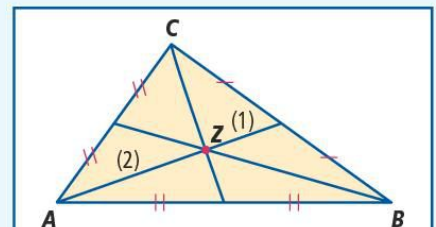
$$\angle E \approx 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

V5 Bereken in de driehoeken de lengte van de onbekende zijden en grootte van de onbekende hoeken. Geef indien mogelijk de exacte waarde en rond in andere gevallen lengtes af op één decimaal en hoeken op hele graden.

- a $\triangle ABC$ met $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$ en $\angle B = 30^\circ$.
- b $\triangle DEF$ met $\angle F = 90^\circ$, $DE = 13$ en $\angle E = 36^\circ$.
- c $\triangle GHK$ met $\angle H = 90^\circ$, $GK = 7\sqrt{3}$ en $GH = 7$.
- d $\triangle PQR$ met $\angle P = 90^\circ$, $PQ = \sqrt{18}$ en $QR = 6$.

Theorie

Een **zwaartelij**n in een driehoek is een lijnstuk dat een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde. De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt, het **zwaartepunt**. Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelij in twee delen waarvan de lengtes zich verhouden als 2 : 1.



Om verwarring met de echte lengtes te voorkomen, worden verhoudingsgetallen in een tekening tussen haakjes weergegeven.

- V6** Van $\triangle ABC$ is gegeven: $A(7, 1)$, $B(7, 5)$ en $C(1, 1)$.
- a Teken $\triangle ABC$ en de zwaartelijnen BD en CE in een assenstelsel.
 - b Bereken exact BD en CE .
 - c Noem het zwaartepunt Z en bereken exact CZ en BZ .

Je leert

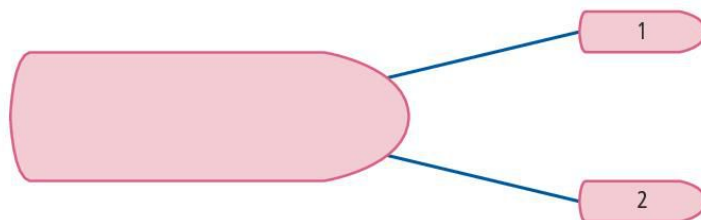
- wat een vector is
- hoe je vectoren optelt

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3— 04—4—5—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7
- uitdagend: 1—2—3—4—6—7—U1

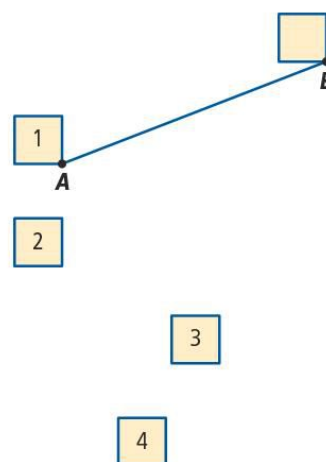
Een groot zeeschip wordt gesleept door twee sleepboten.

- Onder welke voorwaarde zal het grote zeeschip recht vooruit gaan?
- Als de afstand tussen de twee sleepboten groter is, is er dan een grotere of kleinere kracht nodig om het zeeschip met dezelfde snelheid vooruit te slepen?



- 1 Bij een zolderopruiming worden dozen verplaatst. Gert verplaatst doos 1 van A naar B . De dozen 2 en 3 worden door Gert in dezelfde richting en over dezelfde afstand verplaatst.

- a Teken de nieuwe plek van de dozen 2 en 3.
b Doos 4 wordt in precies de tegengestelde richting verplaatst en over de helft van de afstand van de andere dozen. Teken de nieuwe plek van doos 4.

**Theorie**

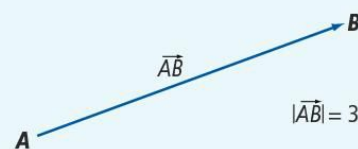
Bij een verplaatsing heb je te maken met een afstand en een richting. Een verplaatsing kun je goed weergeven met een pijl.

In de wiskunde spreek je van een **vector**.

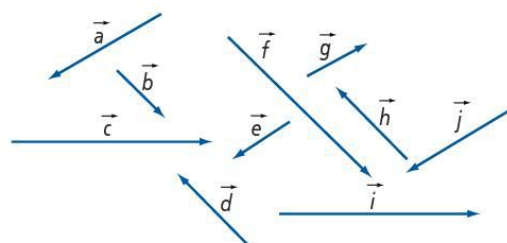
Een vector met beginpunt A en eindpunt B noteer je als $\overrightarrow{AB}$.

Je kunt een vector ook aangeven met een kleine letter en een pijltje erboven, zoals $\vec{a}$.

De **lengte van een vector** noteer je als $|\overrightarrow{AB}|$ of als $|\vec{a}|$.

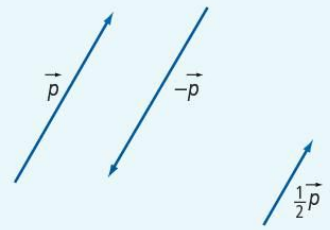


- 2 Welke vectoren horen bij dezelfde verplaatsing?

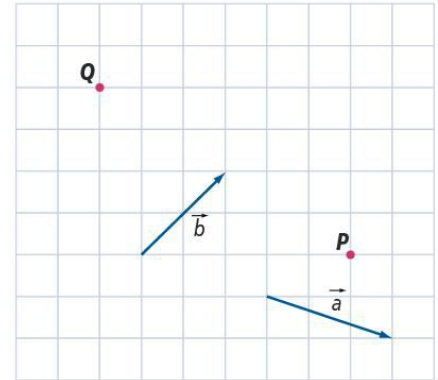


Theorie

De vector $2\vec{p}$ heeft dezelfde richting als de vector $\vec{p}$, maar is twee keer zo lang. De vector $-\vec{p}$ is even lang als de vector $\vec{p}$, maar heeft een tegengestelde richting. Je noemt de vectoren $\vec{p}$ en $-\vec{p}$ **tegengestelde vectoren**.



- 3 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en twee punten P en Q .
- Verplaats P eerst over de vector $3\vec{a}$ en vervolgens verder over de vector $2\vec{a}$. Het resultaat had je ook kunnen bereiken door P in één keer te verplaatsen. Over welke vector?
 - Verplaats Q eerst over de vector $\vec{a}$ en vervolgens verder over de vector $\vec{b}$. Teken de vector die het resultaat van de verplaatsingen in één keer bereikt.

**Theorie**

De **somvector** $\vec{p} + \vec{q}$ van twee vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ vind je door eerst de verplaatsing over $\vec{p}$ te doen en daarna de verplaatsing over $\vec{q}$. Daartoe maak je het beginpunt van $\vec{q}$ vast aan het eindpunt van $\vec{p}$. De vector $\vec{p} + \vec{q}$ is dan de vector van het beginpunt van $\vec{p}$ naar het eindpunt van $\vec{q}$.

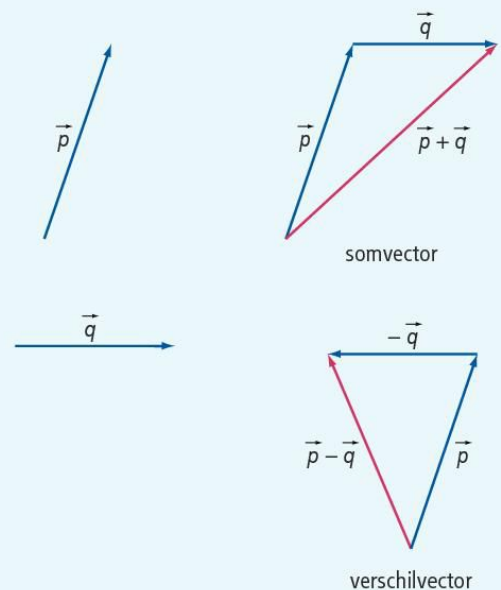
Deze constructie heet de **kop-staart methode**.

De **verschilvector** $\vec{p} - \vec{q}$ is de somvector van $\vec{p}$ en $-\vec{q}$.

Dus $\vec{p} - \vec{q} = \vec{p} + (-\vec{q})$.

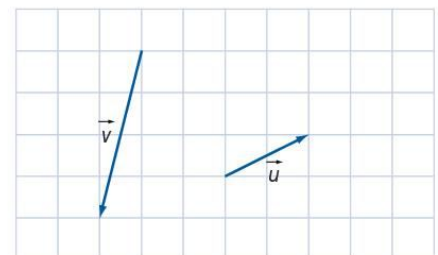
De som van twee tegengestelde vectoren is de **nulvector** $\vec{0}$.

De nulvector heeft lengte nul en de richting is onbepaald.

**Ondersteunende route → maak opdracht 04**

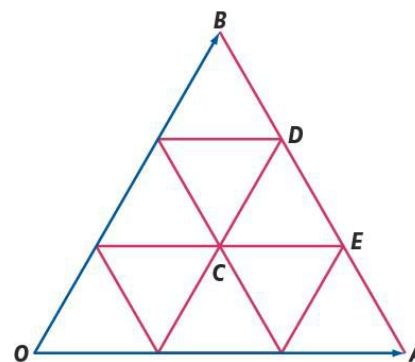
- 4 Teken de vectoren met de kop-staart methode.

- | | | |
|----------|---|--|
| H | a $\vec{v} - 2\vec{u}$ | c $-3\vec{u} - 2\vec{v}$ |
| | b $\frac{1}{2}\vec{u} + 1\frac{1}{2}\vec{v}$ | d $(\vec{u} - \vec{v}) - (\vec{v} - \vec{u})$ |



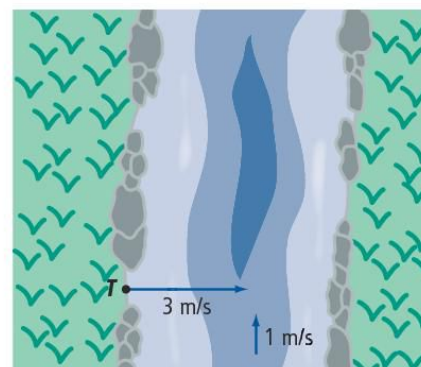
8.1 Vectoren

- 5 In driehoek OAB is $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
- Welke vector is gelijk aan $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$?
 - Druk $\overrightarrow{OD}$ en $\overrightarrow{OE}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
 - Druk $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{DE}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

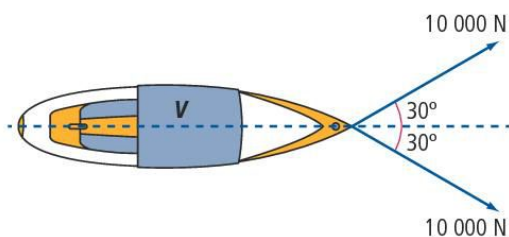


Omdat krachten en snelheden een richting en een grootte hebben, kun je deze weergegeven met behulp van vectoren.

- 6 Tim wil met een boot een rivier oversteken. Hij start in punt T . De richting waarin Tim vaart en zijn snelheid ten opzichte van het water zijn in de tekening met een vector aangegeven. Ook is een vector getekend die de richting en de stroomsnelheid van de rivier aangeeft.
- Teken het punt waar de boot zich na één seconde bevindt.
 - Teken het punt waar Tim de overkant zal bereiken.
 - Bereken hoeveel meter de boot in één seconde aflegt.



- 7 Twee sleepboten trekken een schip. Elke sleepboot oefent een kracht uit van 10 000 N. Hieronder is de situatie geschetst. De kabels naar de sleepboten maken een hoek van 60° met elkaar.
- Teken de kracht die door de sleepboten samen op het schip wordt uitgeoefend.
 - Bereken de grootte van deze kracht.

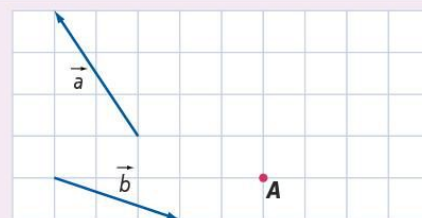


Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

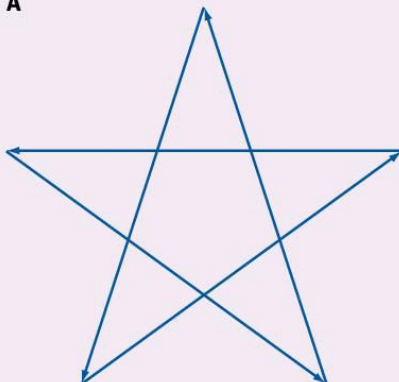
04 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en punt A .

- Teken met beginpunt A een vector gelijk aan vector $\vec{a}$.
Noem het eindpunt van die vector B .
- Teken met beginpunt B een vector gelijk aan vector $2\vec{b}$.
Noem het eindpunt van die vector C .
- Teken vector $\overrightarrow{AC}$ en druk $\overrightarrow{AC}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

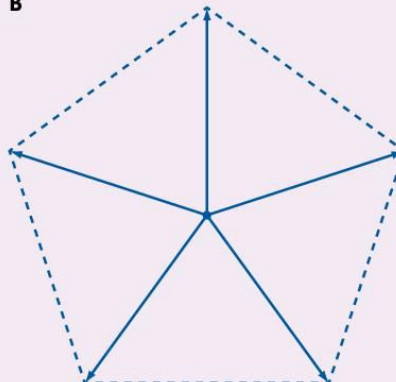
**Uitdagende opdrachten**

U1 a Waaraan is de som van de vijf vectoren in figuur A gelijk?

A



B



- In de regelmatige vijfhoek van figuur B gaan vanuit het middelpunt vectoren naar de hoekpunten.
Als vijf personen op de hoekpunten van de vijfhoek met dezelfde kracht in de richting van de vectoren trekken aan een voorwerp in het middelpunt, zou dat voorwerp op zijn plaats moeten blijven.
Toon met een tekening aan dat de som van de vijf vectoren inderdaad gelijk is aan $\vec{0}$.

Je leert

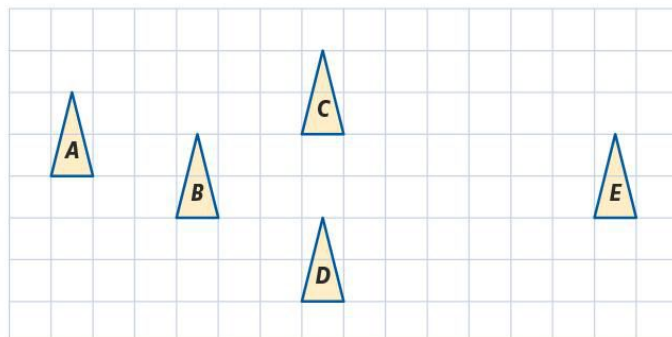
- wat kentallen zijn
- hoe je met kentallen rekt

Leerroutes

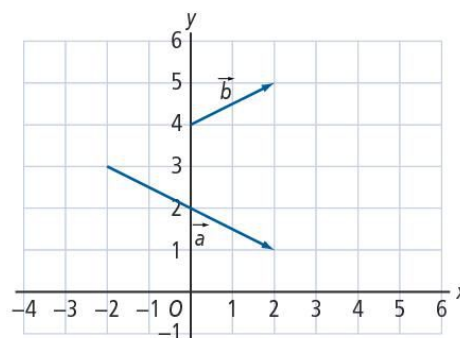
- ondersteunend: 8—9—10—011—11—12—13—014
- doorlopend: 8—9—10—11—12—13—14—15
- uitdagend: 8—9—10—11—12—13—15—U2

In het rooster staan vijf gelijke driehoeken, die je kunt verplaatsen door horizontaal en verticaal te verschuiven. Zo verplaats je driehoek A naar driehoek B door 3 hokjes naar rechts en 1 omlaag te schuiven.

- Hoe verplaats je driehoek B naar driehoek E ? En driehoek A naar driehoek E ?
- Geef aan hoe je driehoek D naar driehoek B , driehoek C of driehoek E verplaatst.



- 8 Vector $\vec{a}$ heeft beginpunt $(-2, 3)$ en eindpunt $(2, 1)$.
 Vector $\vec{b}$ heeft beginpunt $(0, 4)$ en eindpunt $(2, 5)$.
- Teken met beginpunt $(-3, 6)$ de vector $\vec{p} = 2\vec{a}$.
 - Geef de coördinaten van het eindpunt van de vector $\vec{p}$.
 - Teken met beginpunt $(-2, 3)$ de vector $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$. Welke coördinaten heeft het eindpunt van $\vec{q}$?
 - Bereken $|\vec{a}|$ met behulp van een geschikte driehoek.



Theorie

In een assenstelsel kun je vectoren beschrijven met **kentallen**. De drie vectoren in de tekening hebben de kentallen 4 en -2 , want de pijl gaat vier naar rechts en twee omlaag.

Je noteert dit als $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

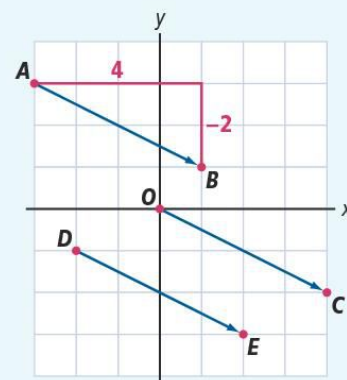
Voor de lengte van vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ geldt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Een vector die in de oorsprong begint, heet een **plaatsvector**.

Het eindpunt van de plaatsvector $\overrightarrow{OC}$ is $C(4, -2)$.

Er geldt $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ en $k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$,

met k een reëel getal.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

9 Gegeven zijn de plaatsvectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

H

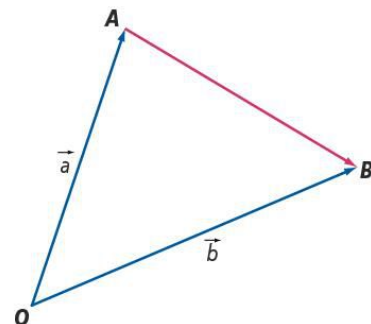
- Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$ en $3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
- Bereken exact $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ en $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.
- Laat met een berekening zien dat $|3\vec{a}| = 3 \cdot |\vec{a}|$.

10 Gegeven zijn twee vectoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

- Ga na dat $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Vul in: $\overrightarrow{AB} = \dots - \dots$

- Teken vector $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$.
- Waarom is vierhoek $OBCA$ een parallellogram?
- Lijn OC snijdt lijnstuk AB in punt M .
Druk $\overrightarrow{OM}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



Theorie

Als $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$ is de vector

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{dus } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Voor het midden M van een lijnstuk AB geldt

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Ondersteunende route → maak opdracht 011

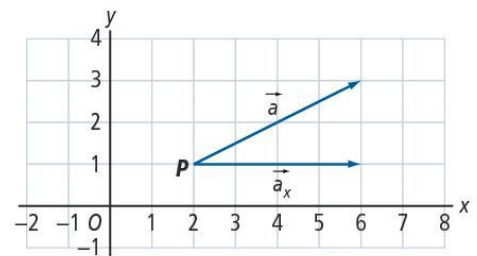
11 Gegeven zijn de punten $A(3, 7)$, $B(-2, 5)$ en $C(1, -4)$.

H

- Bereken de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ en $\overrightarrow{CA}$.
- Bereken exact $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ en $|\overrightarrow{CA}|$.
- Bereken exact $|5\overrightarrow{AB}|$ en $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}|$.
- Bereken exact de coördinaten van de middens van de zijden van $\triangle ABC$.

8.2 Vectoren en kentallen

- 12** a Teken de plaatsvectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- b Leg uit hoe je aan de kentallen kunt zien dat de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ dezelfde richting hebben.
- c Geef de kentallen van drie vectoren die dezelfde richting hebben als $\vec{v}$ en $\vec{w}$.
- d Geef de kentallen van drie vectoren waarvan de richting tegengesteld is aan de richting van $\vec{v}$.
- e Geef de kentallen van een vector die dezelfde lengte heeft als $\vec{v}$, maar die niet dezelfde of een tegengestelde richting heeft.
- 13** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}_x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, beide met beginpunt $P(2, 1)$.
- Teken de vector $\vec{a}_y$ met beginpunt P die evenwijdig is aan de y -as en zo dat $\vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}$.

**Theorie**

Als $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ waarbij de drie vectoren hetzelfde beginpunt hebben met $\vec{a}_x$ evenwijdig aan de x -as en $\vec{a}_y$ evenwijdig aan de y -as, dan is vector $\vec{a}$ **ontbonden in de vectoren** $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$.

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** Gegeven is de vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- Geef de kentallen van $\vec{u}_x$ en $\vec{u}_y$.
- 15** Gegeven is de vector $\vec{a}$ met $|\vec{a}| = 3\sqrt{5}$ en $\vec{a}_x = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Bereken exact de kentallen van $\vec{a}_y$ (twee oplossingen).

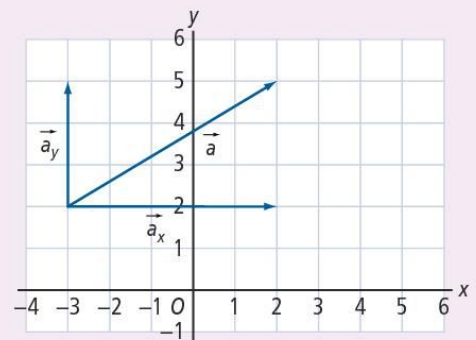
Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 011**
- Teken in een assenstelsel de punten $A(2, 6)$ en $B(7, 3)$ en teken de vector $\overrightarrow{AB}$.
 - Welke kentallen heeft $\overrightarrow{AB}$?
 - Ga na dat geldt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
 - Bereken exact $|\overrightarrow{AB}|$.
 - Teken in het assenstelsel de vector $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
 - Bereken de coördinaten van C .
 - Voor punt M geldt: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
Bereken de coördinaten van M .

- 014** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$.

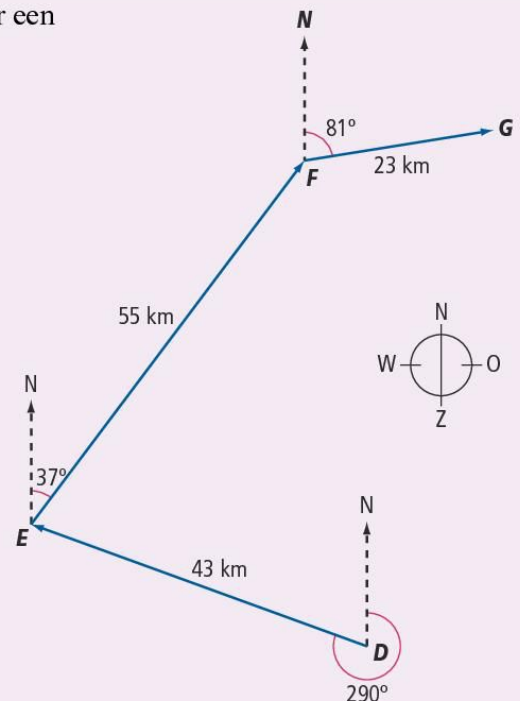
- Geef de kentallen van $\vec{a}$, $\vec{a}_x$ en $\vec{a}_y$.
- Controleer dat $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$.
- Teken met beginpunt $(0, 4)$ de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- Teken met beginpunt $(0, 4)$ een vector $\vec{b}_x$ evenwijdig aan de x -as en een vector $\vec{b}_y$ evenwijdig aan de y -as, zodat $\vec{b} = \vec{b}_x + \vec{b}_y$.
- Vul in: $\vec{b}_x = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ en $\vec{b}_y = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.



Uitdagende opdrachten

- U2** Een helikopter vertrekt vanuit Den Helder Airport (D) voor een vlucht langs drie boorplatforms E , F en G . De vliegtocht is in de tekening aangegeven met vectoren.

- Laat zien dat voor $\overrightarrow{DE}$ geldt: $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -43 \cdot \sin(70^\circ) \\ 43 \cdot \cos(70^\circ) \end{pmatrix}$.
- Bereken de kentallen van de drie vectoren $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ en $\overrightarrow{FG}$ in twee decimalen.
- Bereken de lengte en de koers van de terugvlucht van punt G naar Den Helder Airport in hele kilometers en hele graden.



Je leert

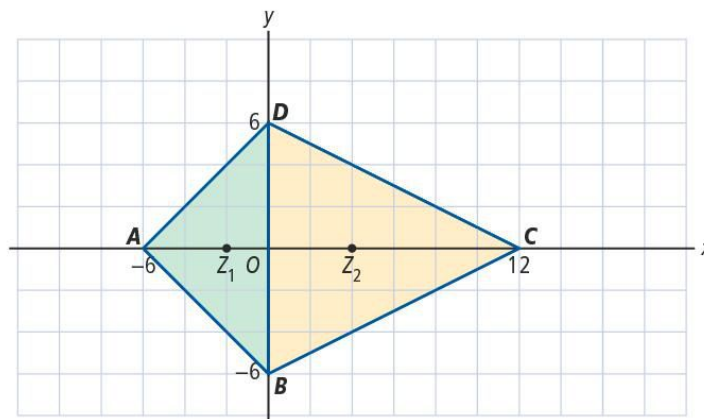
- wat het zwaartepunt is van een aantal puntmassa's
- hoe je de plaats van een zwaartepunt vindt

Leerroutes

- ondersteunend: 16—17—18—19—20—021—21—22
- doorlopend: 16—17—18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 16—17—18—19—20—23—U3—U4

In de figuur zijn de zwaartepunten van de gekleurde driehoeken aangegeven. Stel je voor dat de vlieger van stevig karton is.

- Wat denk je: ligt het zwaartepunt van de vlieger dicht bij Z_1 of Z_2 ? Waarom?
- Teken de vlieger op stevig papier en laat hem balanceren op je vingertop.
Klopt je antwoord op de vorige vraag?



- 16** Aan een (massaloze) stang hangen twee massa's van 1 kg in de punten A en B . De stang wordt opgehangen in punt Z .

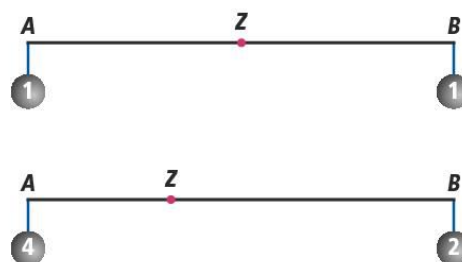
Als $AZ = BZ$, hangt de stang in evenwicht.

Volgens de hefboomwet van Archimedes is de stang in de tweede figuur in evenwicht als geldt: $m_A \cdot AZ = m_B \cdot BZ$ met m_A de massa in A in kg en m_B de massa in B in kg.

- a** Leg uit dat als $m_A = 4$ en $m_B = 2$ bij evenwicht geldt:
 $AZ : BZ = 1 : 2$.

- b** Gegeven is $m_A = 4$, $m_B = 10$ en $AB = 7$ cm.

Teken deze situatie en teken de plaats van het ophangpunt Z zodat de stang in evenwicht is. Hoe lang is AZ ?

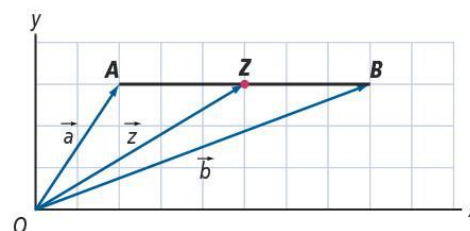


- 17** De eerste situatie van opdracht 16 is getekend in een assenstelsel met oorsprong O en de plaatsvectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{z}$.

- a** Leg uit dat hier geldt dat $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

- b** Teken de situatie van 16a in een assenstelsel.

- c** Gebruik dat $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ en laat zien dat $\vec{z} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

**Theorie**

Bevindt zich bij een (massaloze) stang AB in A een massa a en in B een massa b , dan is het evenwichtspunt ofwel **zwaartepunt** Z het ophangpunt waarbij de stang met massa's in evenwicht is. Z is het eindpunt van de plaatsvector $\vec{z} = \frac{a}{a+b} \cdot \vec{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \vec{b}$, met $\vec{a}$ en $\vec{b}$ de plaatsvectoren van A en B .

Voorbeeld

In $A(-2, 5)$ bevindt zich een massa $a = 3$ en in $B(3, 2)$ een massa $b = 5$.

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z .

Oplossing

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{3}{8} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} + \frac{15}{8} \\ \frac{15}{8} + \frac{10}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{8} \\ 3\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \text{ dus is } Z(1\frac{1}{8}, 3\frac{1}{8}).$$

- 18** De massa in A is a en de massa in B is b . Er is steeds evenwicht.

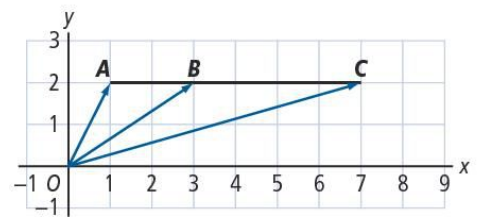
H

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z .

- a** $A(1, 3)$, $B(7, 3)$, $a = 4$ en $b = 8$.
b $A(2, 9)$, $B(7, -3)$, $a = 5$ en $b = 8$.

- 19** In de punten $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ en $C(7, 2)$ bevinden zich massa's van 1 kg.

- a** Waar ligt het zwaartepunt Z_{AC} van de massa's in A en C ?
b Laat zien dat voor het zwaartepunt Z van de massa van 2 kg in Z_{AC} en de massa in B geldt: $\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

**Theorie**

Bij het rekenen met massa's ga je er meestal vanuit dat die massa's in een punt zijn geconcentreerd. Je spreekt dan van **puntmassa's**. Als zich in de punten $A_1, A_2, \dots, A_n$ de massa's $m_1, m_2, \dots, m_n$ bevinden, dan geldt voor het zwaartepunt Z van die puntmassa's:

$$\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n, \text{ waarbij}$$

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

Voorbeeld

In de punten $A(-2, 5)$, $B(1, 6)$ en $C(7, -3)$ bevinden zich puntmassa's van achtereenvolgens 2, 5 en 3.

Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z .

Oplossing

$$m = 2 + 5 + 3 = 10$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \frac{2}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{21}{10} \\ \frac{10}{10} + \frac{30}{10} - \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{5} \\ 3\frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

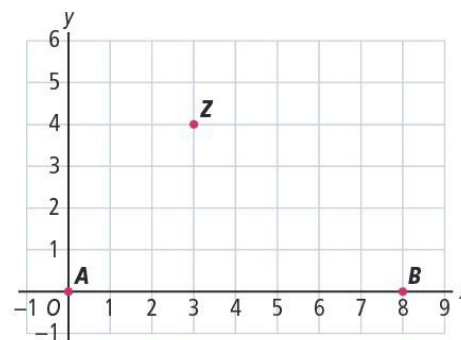
dus is $Z(2\frac{1}{5}, 3\frac{1}{10})$.

8.3 Zwaartepunt en evenwicht

- 20** **H**
- a** In de punten $A(1, 2)$, $B(4, 5)$ en $C(7, 3)$ bevinden zich puntmassa's ter grootte van achtereenvolgens 6, 4 en 10. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z .
- b** In $P(-3, -5)$, $Q(-1, 7)$, $R(0, 4)$, $S(5, 2)$ en $T(3, -3)$ bevinden zich puntmassa's ter grootte van achtereenvolgens 10, 30, 6, 14 en 5. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z .

Ondersteunende route → maak opdracht 021

- 21** De punten A , B en C liggen op één rechte lijn zo dat $AB = 2$, $BC = 8$ en $AC = 10$. De puntmassa's in A , B en C zijn achtereenvolgens 10, 30 en 20.
- a** Teken de situatie in een assenstelsel met $A(1, 3)$ en lijnstuk AC evenwijdig aan de x -as.
- b** Bereken en teken de positie van het zwaartepunt Z .
- 22** In de punten A , B en C van $\triangle ABC$ bevinden zich puntmassa's ter grootte van 4, 6 en 8. Druk de vector $\vec{z}$ van het zwaartepunt uit in $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.
- 23** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(0, 0)$ en $B(8, 0)$. In elk hoekpunt van $\triangle ABC$ bevindt zich een massa van 1 kg. Het zwaartepunt Z bevindt zich in het punt $(3, 4)$.
- a** Bereken de coördinaten van C .
- b** In $\triangle ABR$ zijn de massa's in A , B en R respectievelijk 1, 1 en 3 kg, terwijl Z in $(3, 4)$ blijft. Bereken de coördinaten van R .



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

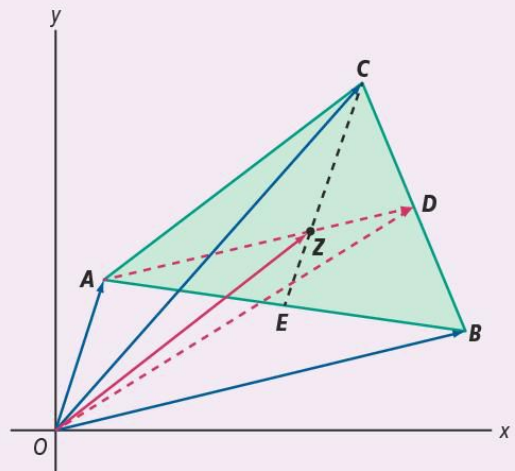
Ondersteunende opdrachten

- 021** Op een lijnstuk AB met lengte 9 ligt een punt C zo dat $AC = 6$. De puntmassa's in A , B en C zijn achtereenvolgens $m_1 = 4$, $m_2 = 3$ en $m_3 = 1$.
- Teken in een assenstelsel lijnstuk AB evenwijdig aan de x -as met punt C in $(0, 3)$.
 - Geef de coördinaten van A en B .
 - Teken en geef de plaatsvectoren van A , B en C .
 - Hoe groot is de totale massa m ?
 - Gebruik de formule $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a} + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{b} + \frac{m_3}{m} \cdot \vec{c}$ om de positie van het zwaartepunt Z te berekenen.
 - Teken Z .

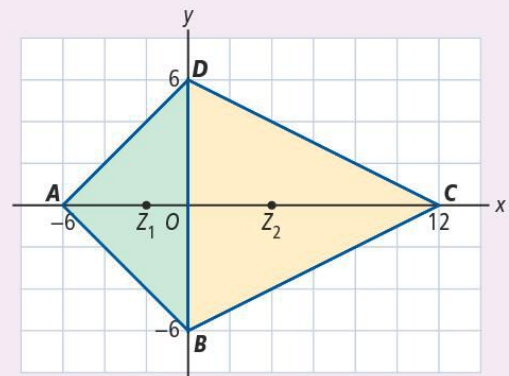
Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven is $\triangle ABC$. De plaatsvectoren van A , B en C zijn $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$. De punten D en E zijn de middens van de zijden BC en AB . De zwaartelijnen AD en CE snijden elkaar in het zwaartepunt Z .

- Druk $\vec{OD}$ uit in de vectoren $\vec{b}$ en $\vec{c}$.
- Waarom geldt $\vec{AZ} = \frac{2}{3} \vec{AD}$?
- Toon aan dat $\vec{OZ} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
- Als zich in de hoekpunten van $\triangle ABC$ puntmassa's bevinden met massa 1, dan valt zwaartepunt Z_m van de puntmassa's samen met Z . Toon dat aan.



- U4** In deze opdracht bereken je het zwaartepunt Z van de vlieger uit de opdracht op bladzijde 52. De hoekpunten zijn $A(-6, 0)$, $B(0, -6)$, $C(12, 0)$ en $D(0, 6)$.
- Beredeneer dat het zwaartepunt Z van de vlieger op de lijn AC ligt.
 - Bereken de coördinaten van de zwaartepunten Z_3 en Z_4 van de driehoeken ACD en ABC .
 - Z is het snijpunt van de lijnen Z_1Z_2 en Z_3Z_4 . Geef de coördinaten van Z .
 - In de hoekpunten van de vlieger bevinden zich puntmassa's met massa 1. Onderzoek of het zwaartepunt van de puntmassa's samenvalt met het zwaartepunt van de vlieger.



8.4 Inwendig product

Je leert

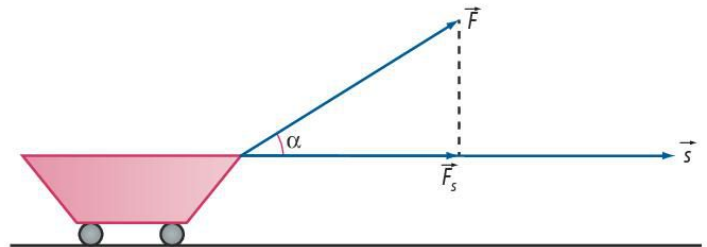
- wat een inwendig product is
- hoe je de hoek tussen twee vectoren berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 24—25—26—27—028—29—30—031—31
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 24—25—26—27—28—29—30—32—U5

Als je een wagentje aan een touw over een horizontale weg verplaatst, verricht je arbeid. Die arbeid W kun je berekenen door de kracht *in de richting van de weg*, $|\vec{F}_s|$, te vermenigvuldigen met de afgelegde weg. W hangt dus ook af van de hoek α tussen de kracht $\vec{F}$ waarmee je aan het touw trekt en de weg $\vec{s}$.

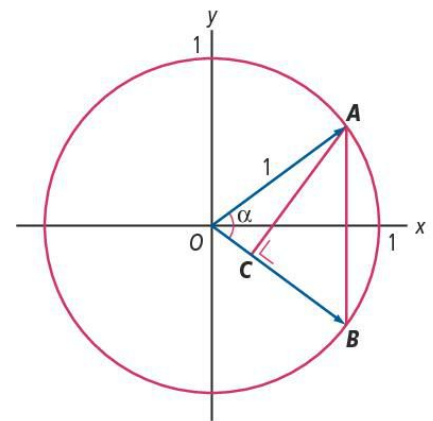
- Bij welke hoek geldt $W = \frac{1}{2} \cdot |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$?



- 24** Op de eenheidscirkel liggen de punten $A(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ en $B(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

In deze opdracht bereken je de hoek α tussen de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$.

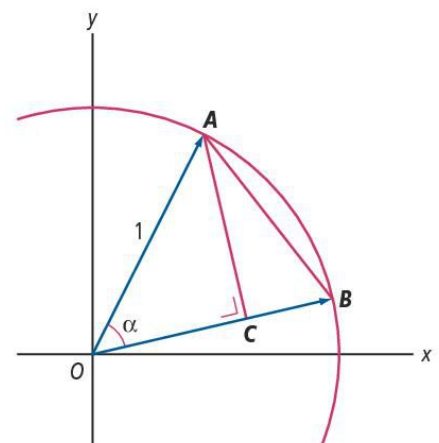
- De loodlijn uit A op $\vec{OB}$ snijdt deze in C .
Leg uit dat $OC = \cos(\alpha)$.
- Leg uit dat $AC^2 = 1 - \cos^2(\alpha)$.
- Leg uit dat $BC = 1 - \cos(\alpha)$ en
 $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2 - 2\cos(\alpha)$.
- Bereken $\cos(\alpha)$. Gebruik daarbij dat $AB = \frac{6}{5}$.
- Bereken α in graden nauwkeurig.



- 25** Op de eenheidscirkel liggen de punten $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$.

De loodlijn uit A op $\vec{OB}$ snijdt deze in C .
Je gaat een formule afleiden voor $\cos(\alpha)$.

- Toon op de manier van de vorige opdracht aan dat
 $AB^2 = 2 - 2\cos(\alpha)$.
- Je weet $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
Toon aan dat $AB^2 = 2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$.
- Toon aan dat $\cos(\alpha) = a_1b_1 + a_2b_2$.
- Controleer je antwoord van opdracht 24e met behulp van deze formule.



- 26** Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(5, 12)$ met plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Om $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ met de formule van opdracht 25c te berekenen, heb je vectoren met lengte 1 nodig. Kies dus op de lijnstukken OA en OB punten C en D zo, dat $OC = OD = 1$.
- Bereken $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$ en geef de kentallen van $\overrightarrow{OC}$ en $\overrightarrow{OD}$.
 - Bereken $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ met de formule van opdracht 25c.

Theorie

De uitdrukking $a_1b_1 + a_2b_2$ heet het **inwendig product** of

inproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

De notatie voor het inwendig product is $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Als $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ en $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ geldt $\cos(\alpha) = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Algemeen geldt: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ of $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$.

Voorbeeld

Bereken in hele graden de hoek α tussen de vectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oplossing

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot -1 + 1 \cdot 2 = -1$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = -0,141\dots$$

$$\alpha \approx 98^\circ$$

- 27** Gegeven zijn de plaatsvectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.
- Bereken het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b}$ met behulp van de kentallen.
 - Bereken $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ in graden nauwkeurig.

Ondersteunende route → maak opdracht 028

- 28** Bereken bij elk paar plaatsvectoren het inproduct en de ingesloten hoek, dat is de hoek die de twee plaatsvectoren met elkaar maken. Rond je antwoorden af op hele graden.

H

a $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

8.4 Inwendig product

- 29 a** Uit de formule van het inproduct volgt dat als $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ dan $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Leg dat uit.
- b** Is het omgekeerde 'uit $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ volgt $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ ' ook waar?

Theorie

Als twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan, is hun inproduct gelijk aan 0. Het omgekeerde is ook waar, mits $\vec{a}$ en/of $\vec{b}$ niet gelijk zijn aan de nulvector.

Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(4, 6)$ en $B(3, -2)$. Onderzoek of $\vec{OA} \perp \vec{OB}$.

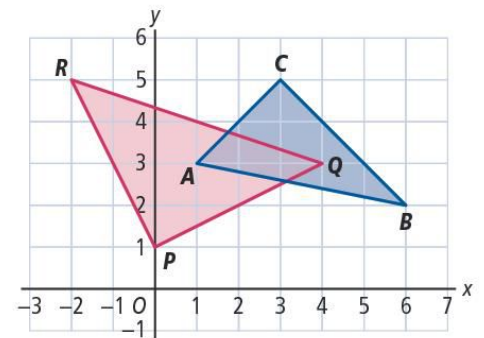
Oplossing

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot -2 = 0, \text{ dus} \\ \vec{OA} \perp \vec{OB}.$$

- 30 a** Leg uit dat voor p en q (niet beide 0) geldt: $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$.
- b** Geef de kentallen van drie vectoren die loodrecht staan op $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- c** Doe hetzelfde voor de vectoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e} = \begin{pmatrix} 17 \\ -43 \end{pmatrix}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 031

- 31** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(1, 3)$, $B(6, 2)$ en $C(3, 5)$.
- a** Hoek C is de hoek tussen de vectoren $\vec{CA}$ en $\vec{CB}$ (let op: het hoekpunt is het beginpunt van de vectoren!). Bereken met behulp van het inproduct $\angle C$ en $\angle A$ van $\triangle ABC$ in graden nauwkeurig.
- b** Bereken ook de hoeken van $\triangle PQR$ met $P(0, 1)$, $Q(4, 3)$ en $R(-2, 5)$ in hele graden.



- 32** Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $A(-24, -1)$, $B(36, -25)$, $C(3, 23)$ en $D(-12, 29)$.
- a** Bereken de hoeken van de vierhoek in graden nauwkeurig.
- b** Onderzoek of de diagonalen AC en BD loodrecht op elkaar staan.

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

028 Gegeven zijn de punten $A(6, 2)$ en $B(1, 3)$.

- a** Met de berekening van $\alpha = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ is al een begin gemaakt. Maak de berekening af.

Bereken in hele graden de hoek tussen de plaatsvectoren.

b $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = 6 \cdot \dots + 2 \cdot \dots \\ |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{\dots^2 + \dots^2} = \dots \text{ en} \\ |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{\dots^2 + \dots^2} = \dots \\ \cos(\alpha) &= \frac{\dots}{\dots \cdot \dots} \\ \alpha &\approx \dots^\circ \end{aligned}$$

031 Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(5, 2)$, $B(10, 3)$ en $C(2, 6)$.

Hoek A is de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

- a** Geef de kentallen van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

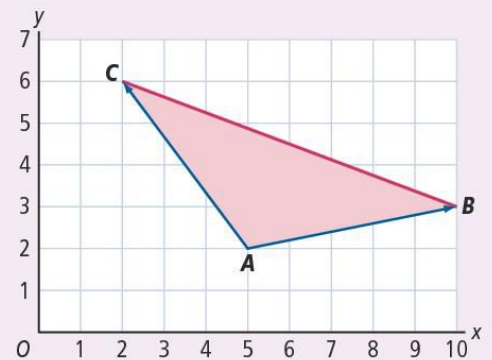
b Vul in: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \dots$

c Vul in: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\dots^2 + \dots^2} = \dots$

d Bereken exact $|\overrightarrow{AC}|$.

e Bereken $\cos(\angle A)$.

f Bereken $\angle A$ in graden nauwkeurig.



Uitdagende opdrachten

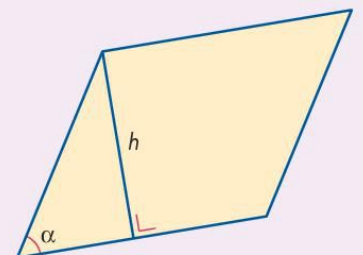
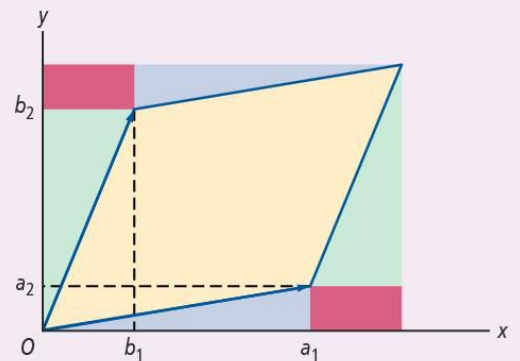
U5 De vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ vormen twee zijden van een parallellogram.

- a** Bereken met inlijsten de oppervlakte van het parallellogram.

- b** Toon aan dat de oppervlakte van het parallellogram met als twee zijden de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gelijk is aan $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

- c** Laat zien dat de oppervlakte van het parallellogram ook gelijk is aan $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$.

- d** Druk $\sin(\alpha)$ uit in de kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



Je leert

- wat een vectorvoorstelling van een lijn is
- hoe je een vectorvoorstelling van een lijn door twee gegeven punten opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 33—034—35—36—37—38—039—39—41
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38—39—40—41
- uitdagend: 33—34—35—36—37—38—39—41—U6

Een jacht vertrekt om 12 uur uit Medemblik.

Een uur later passeert het een boei bij het punt (3, 5). De vector Medemblik – boei geeft de richting en de snelheid aan van het jacht.

- Hoe laat bereikt het jacht de Afsluitdijk?
- Als niets de doortocht van het jacht belemmert, wordt dan ooit het punt (77, 225) bereikt?



33 Anton fietst in $1\frac{1}{2}$ uur over het rechte stuk van de Afsluitdijk. In een rooster heeft het startpunt van de dijk bij Den Oever coördinaten (2, 1) en het einde van het rechte stuk (23, 13).

- Teken in een assenstelsel de vector die de afstand aangeeft die Anton na een kwartier heeft afgelegd.
- Laat zien dat je de coördinaten van Anton na t kwartier

kunt berekenen met $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Bereken zijn positie na 1 uur en 15 minuten.



Theorie

Gegeven zijn een punt A met plaatsvector $\vec{a}$ en een vector $\vec{r}$. De eindpunten van alle plaatsvectoren $\vec{v}$ waarvoor $\vec{v} = \vec{a} + \lambda\vec{r}$ liggen op een lijn l door A evenwijdig aan $\vec{r}$.

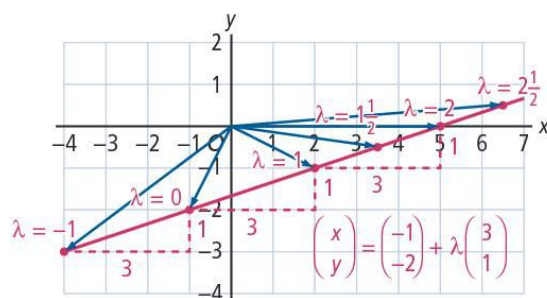
$\vec{v} = \vec{a} + \lambda\vec{r}$ heet een **vectorvoorstelling** van l . Met kentallen

schrijf je $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda r_1 \\ a_2 + \lambda r_2 \end{pmatrix}$.

$\vec{a}$ heet een **steunvector** van l en $\vec{r}$ een **richtingsvector**.

λ heet een **parameter** (spreek uit: parameter). Als de parameter de tijd voorstelt, wordt vaak de letter t gebruikt.

Voorbeeld



Griekse letters voor parameters:
 λ : lambda, μ : mu, ν : nu

Ondersteunende route → maak opdracht 034

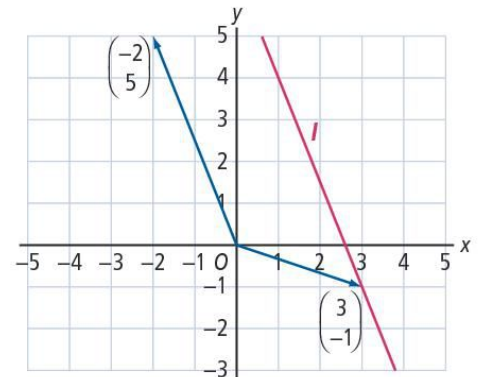
34 Teken de lijnen l en m in een assenstelsel.

H

a $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b** $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2\lambda \\ 5 + \lambda \end{pmatrix}$

35 Gegeven is lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- a** Welke punten van l horen bij $\mu = 5$ en $\mu = -2\frac{1}{2}$?
- b** Voor welke waarde van μ krijg je het punt $(1, 4)$?
- c** Welke waarde van μ hoort bij punt $(9, -16)$ van l ?
- d** Ligt het punt $(-33, 90)$ op l ?
- e** Bereken p , zodat het punt $(31, p)$ op l ligt.



36 In deze opdracht stel je een vectorvoorstelling op van de lijn l door de punten $P(8, -2)$ en $Q(18, 3)$.

- a** Kies als steunvector $\overrightarrow{OP}$ of $\overrightarrow{OQ}$ en schrijf de kentallen op.
- b** Bereken de kentallen van $\overrightarrow{PQ}$.
- c** Waarom is behalve de vector $\overrightarrow{PQ}$ ook de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ een richtingsvector van de lijn door P en Q ?
- d** Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door P en Q .

Aanpak

Hoe stel je een vectorvoorstelling op van een lijn door twee gegeven punten P en Q ?

- 1** Kies als steunvector $\overrightarrow{OP}$ of $\overrightarrow{OQ}$.
- 2** Een richtingsvector is $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.
- 3** Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$.

Je mag de richtingsvector korter of langer maken door de kentallen door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door de punten $P(12, 20)$ en $Q(18, 11)$.

Oplossing

- 1** $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ is een steunvector.
- 2** $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
Neem als richtingsvector $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- 3** Een vectorvoorstelling van l is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8.5 Vectorvoorstelling van een lijn

37 Stel een vectorvoorstelling op van de lijn:

- H**
- a door de punten $A(-5, 9)$ en $B(-4, 2)$.
 - b door de punten $C(-4, 5)$ en $D(4, 17)$.
 - c door de punten $E(5, 2020)$ en $F(365, 1540)$.

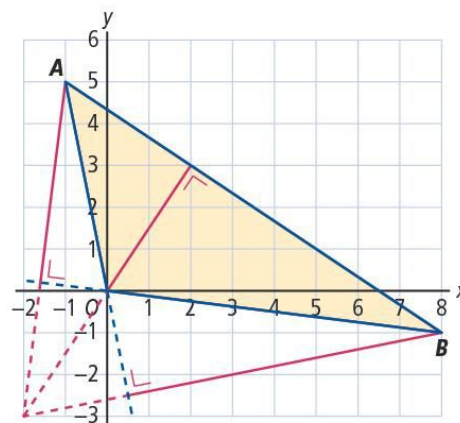
38 De hoek tussen twee lijnen is de scherpe of rechte hoek tussen die lijnen.

- a Bereken met behulp van het inproduct van de richtingsvectoren de hoek tussen de lijnen AB en CD van opdracht 37.
- b Bereken ook de hoek tussen de lijnen CD en EF .

Ondersteunende route → maak opdracht 039

39 Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(-1, 5)$ en $B(8, -1)$. Een *hoogtelijn* in een driehoek is een lijn door een hoekpunt loodrecht op de overstaande zijde.

- a Geef een vectorvoorstelling van de lijn AB .
- b Geef een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit O .
- c Geef ook een vectorvoorstelling van de hoogtelijn uit A en van de hoogtelijn uit B .
- d In de figuur lijken de drie hoogtelijnen door het punt $(-2, -3)$ te gaan. Onderzoek met behulp van de vectorvoorstellingen van de hoogtelijnen of dat klopt.



40 Gegeven is de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3t \\ 7 + 2t \end{pmatrix}$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x -as en de y -as.

41 Gegeven zijn de punten $K(-3, 1)$, $L(18, 7)$ en $M(74, 23)$.

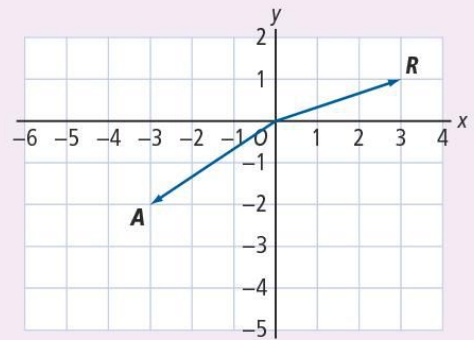
- a Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door K en L .
- b Onderzoek of punt M op de lijn KL ligt.
- c Onderzoek of de punten $A(-3, 5)$, $B(7, 13)$ en $C(42, 41)$ op één lijn liggen.

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

034 Gegeven zijn de plaatsvector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en de vector $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Teken in een assenstelsel de plaatsvectoren $\vec{a} - 2\vec{r}$, $\vec{a} - \vec{r}$, $\vec{a} + \vec{r}$ en $\vec{a} + 2\vec{r}$.
- Teken een lijn l door de eindpunten van de vectoren.
- Geef een vectorvoorstelling van l in de vorm $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.
- Teken de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



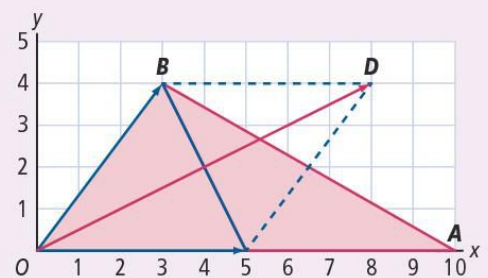
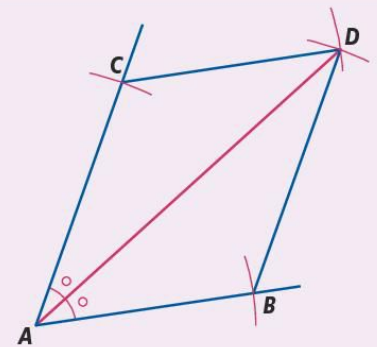
039 l is de lijn door de punten $A(0, 5)$ en $B(6, 0)$.

- Geef een richtingsvector $\vec{r}$ van l .
- Geef een vector $\vec{p}$ die loodrecht staat op $\vec{r}$.
- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door O die loodrecht staat op l .

Uitdagende opdrachten

U6 De bissectrice (deellijn) van een hoek kun je construeren met een *ruitconstructie*: een cirkel met middelpunt A snijdt de benen van de hoek in B en C en de cirkels met middelpunten B en C en straal AC snijden elkaar behalve in A ook in D . De lijn AD deelt dan de hoek bij A doormidden. Die ruitconstructie kun je ook gebruiken om een vectorvoorstelling van een bissectrice op te stellen.

- Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(10, 0)$ en $B(3, 4)$.
Bereken exact $|\vec{OB}|$.
- Kies een punt E op lijnstuk OA zodat $|\vec{OE}| = |\vec{OB}|$ en stel een vectorvoorstelling op van de bissectrice van hoek BOE .
- Controleer met behulp van het inproduct dat $\angle(\vec{OD}, \vec{OB}) = \angle(\vec{OD}, \vec{OE})$.
- Gegeven is $\triangle PQR$ met $P(-4, 0)$, $Q(12, 2)$ en $R(0, 7)$. Stel een vectorvoorstelling op van de bissectrice van hoek P .
- De bissectrice van de hoek tussen de plaatsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ heeft vectorvoorstelling $\vec{v} = \lambda \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$.
Toon dat aan.



8.6 Vectorvoorstelling en vergelijking

Je leert

- wat een normaalvector is
- hoe je een vectorvoorstelling van een lijn omzet in een vergelijking en omgekeerd

Leerroutes

- ondersteunend: 42—43—44—045—45—46—47—48—049
- doorlopend: 42—43—44—45—46—47—48—49—50
- uitdagend: 42—43—44—45—47—48—49—50—U7

Bij elke lijn in de figuur hoort een vergelijking en een vectorvoorstelling.

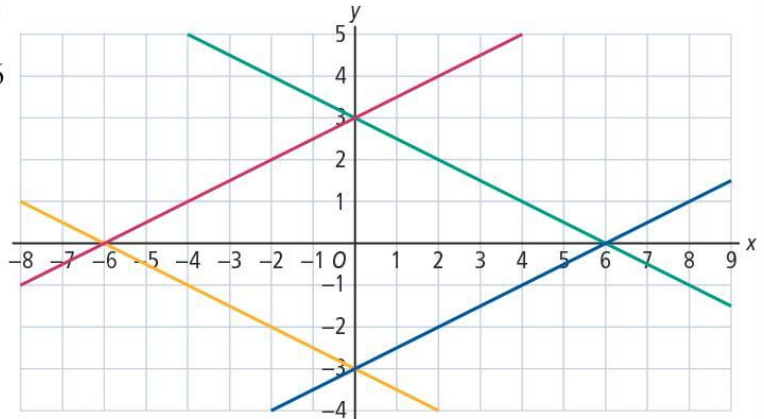
De vergelijkingen zijn: $x - 2y = 6$, $x + 2y = -6$, $x + 2y = 6$ en $x - 2y = -6$.

De vectorvoorstellingen zijn:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Zoek bij elke vergelijking de bijbehorende vectorvoorstelling.



42 Gegeven is lijn l : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

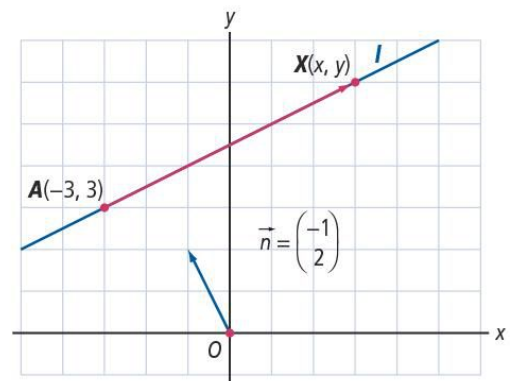
- Bereken de richtingscoëfficiënt van l en stel een vergelijking op van l .
- Laat zien dat je de vergelijking kunt herleiden tot $5x - 2y = 11$.
- De uitdrukking links van het $=$ -teken kun je ook schrijven als het inproduct van de vectoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Wat kun je zeggen over de onderlinge ligging van de vector

$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en de richtingsvector $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ van l ?

- 43** Gegeven is het punt $A(-3, 3)$ en een vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 l is de lijn door A met een richtingsvector loodrecht op $\vec{n}$.
 Punt $X(x, y)$ is een willekeurig punt op l .

- a** Druk de kentallen van vector $\overrightarrow{AX}$ uit in x en y .
b Omdat $\vec{n} \perp \overrightarrow{AX}$ geldt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$.
 Laat zien dat hieruit volgt dat $x - 2y = -9$ een vergelijking is van l .



Theorie

Een vector loodrecht op een richtingsvector van lijn l heet een **normaalvector** van l . De notatie voor een normaalvector is $\vec{n}_l$.

Is $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ een richtingsvector van l , dan is $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ een

normaalvector van l .

Een vergelijking van l is dan $qx - py = c$.

De waarde van c vind je door in deze vergelijking de coördinaten van een punt van l in te vullen.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn l :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Oplossing

$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dus een vergelijking

van l is $3x - 4y = c$.

$(-3, 5)$ ligt op l . Invullen geeft:

$$-9 - 20 = c, \text{ dus } c = -29.$$

$$l: 3x - 4y = -29$$

- 44** Stel een vergelijking op.

H

a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3t \\ 3 + 5t \end{pmatrix}$

Ondersteunende route → maak opdracht 045

- 45** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(8, 0)$ en $B(3, 6)$. m_{OA} , m_{OB} en m_{AB} zijn de middelloodlijnen van de lijnstukken OA , OB en AB .

- a** Teken $\triangle OAB$, m_{OA} en m_{OB} .
b Leg uit dat $\overrightarrow{OB}$ een normaalvector is van m_{OB} en stel een vergelijking op van m_{OB} .
c m_{OA} en m_{OB} snijden elkaar in M .
 Bereken exact de coördinaten van M .
d Stel een vergelijking op van m_{AB} .
e Toon met een berekening aan dat M ook op m_{AB} ligt.

8.6 Vectorvoorstelling en vergelijking

- 46** Gegeven is vierhoek $PQRS$ met $P(-4, 2)$, $Q(5, 9)$, $R(6, 17)$ en $S(-1, 13)$.
- Toon aan dat de diagonalen PR en QS loodrecht op elkaar staan.
 - Stel een vergelijking op van de lijn door punt S die loodrecht staat op lijnstuk PQ .
- 47** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(4, 0)$, $B(1, 7)$ en $C(-5, 2)$.
Stel een vergelijking op van de hoogtelijn uit A .
- 48** Gegeven is lijn k met vergelijking $7x + 2y = 4$.
- Waarom zijn $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ beide te kiezen als richtingsvector van k ?
 - Leg uit dat het punt $(0, 2)$ op k ligt.
 - Stel een vectorvoorstelling op van k .

Theorie

De lijn $l: ax + by = c$ heeft normaalvector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

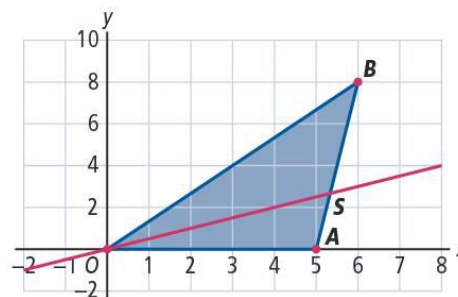
Een richtingsvector van l is dan $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Ondersteunende route → maak opdracht 049

- 49** Stel van elke lijn een vectorvoorstelling op.

- | | | |
|----------|-----------------------------|-----------------------------------|
| H | a $3x - 2y = 8$ | d $y = 5$ |
| | b $7x + 2y - 16 = 0$ | e $x = -8$ |
| | c $-4x + y = 0$ | f $y = \frac{1}{2}x - 0,4$ |

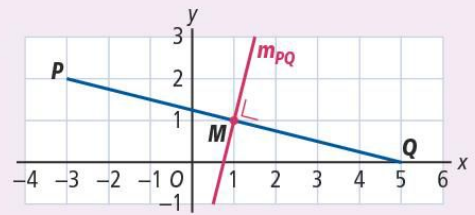
- 50** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(5, 0)$ en $B(6, 8)$ en de lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Toon aan dat l gelijke hoeken maakt met de lijnen OA en OB .
 - Stel vergelijkingen op van l en de lijn m door A en B .
 - Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van l en m .
 - Toon aan dat $SA : SB = OA : OB$.



Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

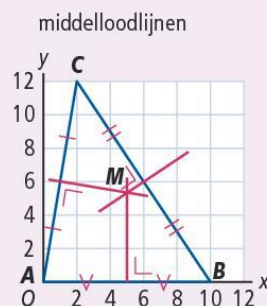
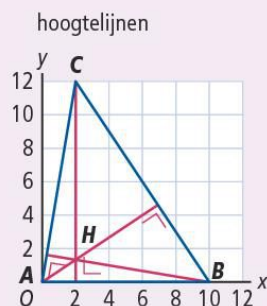
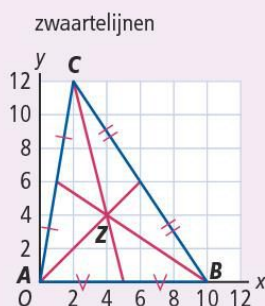
- 045** Gegeven zijn de punten $P(-3, 2)$ en $Q(5, 0)$.
- Bereken de coördinaten van het midden M van lijnstuk PQ .
 - m_{PQ} is de middelloodlijn van lijnstuk PQ .
Leg uit dat $\overrightarrow{PQ}$ een normaalvector is van m_{PQ} .
 - Stel een vergelijking op van m_{PQ} .



- 049** Lijn l heeft vergelijking $6x - 11y = 1$.
- Om een steunvector van l te vinden, kies je een punt op l . Zo'n punt kun je vinden door proberen. Je kunt ook een x -coördinaat kiezen en dan de bijbehorende y -coördinaat berekenen met behulp van de vergelijking van l . Bereken de y -coördinaat van het punt op l waarvoor $x = 2$.
 - Geef de kentallen van $\vec{n}_l$.
 - Geef een richtingsvector van l .
 - Geef een vectorvoorstelling van l .
 - Stel een vectorvoorstelling op van k : $4x + 3y = 7$.
 - Stel een vectorvoorstelling op van n : $y = 15$ en p : $x = -3$.
 - Stel een vectorvoorstelling op van q : $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Uitdagende opdrachten

- U7** De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707 – 1783) bewees dat in elke driehoek het zwaartepunt Z , het snijpunt H van de hoogtelijnen en het snijpunt M van de middelloodlijnen op één lijn liggen en dat bovendien geldt $ZH = 2 \cdot ZM$.



Voor een concreet voorbeeld ga je dat bewijzen.

Van $\triangle ABC$ is $A(0, 0)$, $B(10, 0)$ en $C(2, 12)$.

- Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van $\triangle ABC$.
- Toon aan dat de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ door één punt gaan (H). H heet het *hoogtepunt* van de driehoek.
- Toon aan dat de middelloodlijnen van $\triangle ABC$ door één punt gaan (M).
- Toon aan dat $\overrightarrow{ZH} = 2\overrightarrow{MZ}$.

8.7 Gemengde opdrachten

- 51** Geef bij elk paar vectoren aan of ze dezelfde richting hebben, een tegengestelde richting hebben, loodrecht op elkaar staan of dat geen van deze drie mogelijkheden geldt.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -24 \\ 9 \end{pmatrix}$ **c** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$
b $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ en $\vec{q} = \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \end{pmatrix}$ **d** $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

- 52** Gegeven zijn de punten $A(1, 2)$, $B(5, -6)$, $C(-2, 8)$ en $D(-5, -2)$.

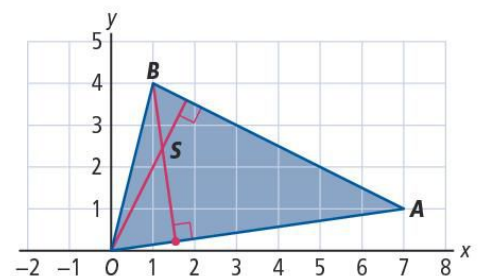
- a** Onderzoek of het punt C op de lijn AB ligt.
b Onderzoek of de lijn DA loodrecht op de lijn AB staat.
c Het punt Q heeft coördinaten $(3, q)$.
 Onderzoek voor welke waarde van q de vectoren $\overrightarrow{DQ}$ en $\overrightarrow{DA}$ loodrecht op elkaar staan.
d Bereken in graden nauwkeurig $\angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$.

- 53** Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 3)$ en $D(p, q)$.

- a** Neem $p = 4$ en $q = -2$. In elk hoekpunt bevindt zich een puntmassa van 1 kg.
 Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z .
b In A , B , C en D bevinden zich puntmassa's van achtereenvolgens 1, 2, 3 en 4 kg. Het zwaartepunt van deze puntmassa's is $O(0, 0)$.
 Bereken p en q .

- 54** Gegeven zijn de punten $P(3, 2)$, $Q(6, 6)$ en $R(8, 2)$.
 Samen met een vierde punt S zijn dit de hoekpunten van een parallellogram.
a Teken in een assenstelsel alle mogelijke posities van S .
b Is er een positie van S zo, dat P , Q , R en S de hoekpunten van een ruit zijn?
c Geef bij elk gevonden parallellogram zowel een vergelijking als een vectorvoorstelling van de diagonalen.

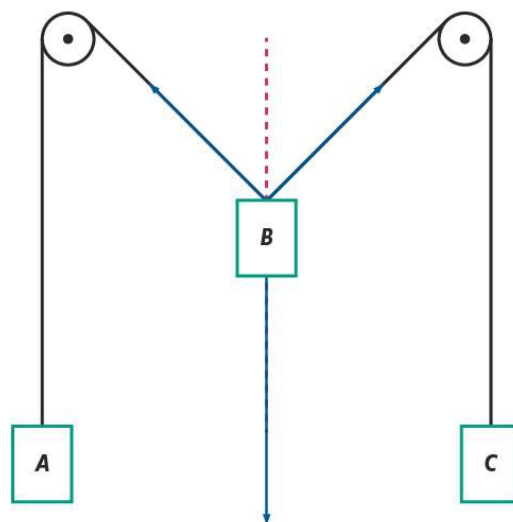
- 55** Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(7, 1)$ en $B(1, 4)$.
 Een hoogtelijn is een lijn door een hoekpunt loodrecht op de overstaande zijde.
a Stel van elke hoogtelijn een vergelijking op.
b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de hoogtelijnen uit O en B .
c Toon aan dat S ook op de hoogtelijn uit A ligt.
d Bereken $\angle A$ in hele graden.



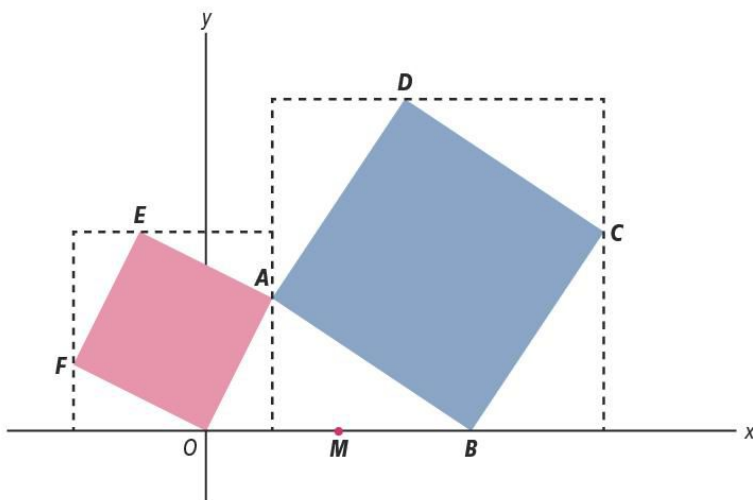
Onderzoeksoopdrachten

- 56** De voorwerpen A , B en C zijn met touwen via katrollen verbonden. Op A en C werkt een zwaartekracht van 20 N en daardoor op B twee krachten van 20 N schuin omhoog. Daarnaast werkt op B een zwaartekracht van 30 N.

- a** Naar boven werkt een kracht die de som is van de twee getekende krachten. Onderzoek wat er in de getekende situatie met B gebeurt.
- b** Op een gegeven moment hangt B stil. Bereken in dat geval de hoek die de touwen bij B met elkaar maken in hele graden.



- 57** Voor positieve waarden van p en q is gegeven $\triangle OAB$ met $O(0, 0)$, $A(p, q)$ en $B(4, 0)$. Het midden van lijnstuk OB is punt M . Op de zijden OA en AB staan de vierkanten $OAEF$ en $ABCD$.



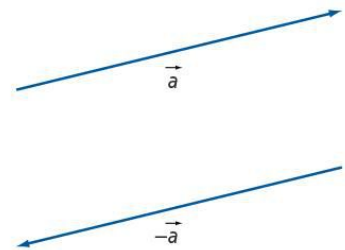
- a** In de figuur is de situatie getekend voor $p = 1$ en $q = 2$. Toon aan dat de lijnen MA en ED loodrecht op elkaar staan.
- b** Onderzoek of de lijnen MA en ED ook loodrecht op elkaar staan voor andere waarden van p en q .

Theorie

Vector, tegengestelde vector en lengte van een vector

Een vector is een pijl die een verplaatsing aangeeft. Een vector heeft een grootte en een richting. $\overrightarrow{AB}$ is de vector met beginpunt A en eindpunt B . $|\overrightarrow{AB}|$ is de lengte van $\overrightarrow{AB}$.

De tegengestelde vector van $\vec{a}$ is $-\vec{a}$. Deze is even lang als $\vec{a}$, maar heeft een tegengestelde richting.



- S1** Teken op roosterpapier de tegengestelde vectoren van de vectoren in de figuur.



Theorie

Kentallen en plaatsvector

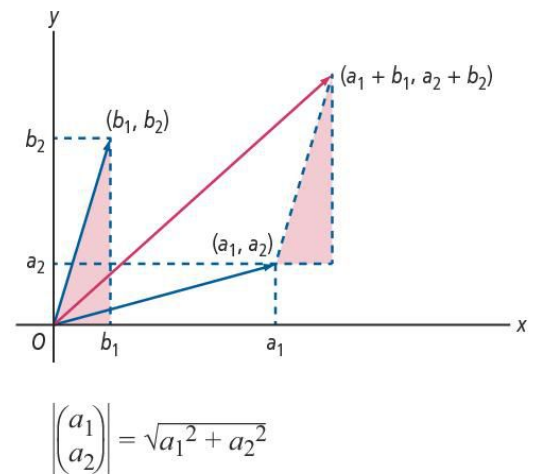
In een assenstelsel kun je vectoren beschrijven met kentallen.

Er geldt $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ en $k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$.

Voor de lengte van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ geldt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Een vector die in de oorsprong begint, heet een plaatsvector.

Als $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$, is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.



Voorbeeld

Gegeven zijn de punten $A(-6, -2)$ en $B(9, 4)$.

Geef de kentallen van de vectoren

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{AB}$.

Bereken exact ook de lengte van deze vectoren.

Oplossing

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{261} (= 3\sqrt{29})$$

- S2** Gegeven zijn de punten $P(-6, 2)$ en $Q(7, 7)$.

- Bereken de kentallen van de vectoren $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ en $7\overrightarrow{OP} + 6\overrightarrow{OQ}$.
- Bereken exact ook de lengte van deze vectoren.

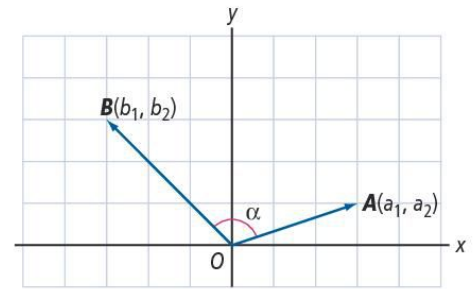
Theorie

Inwendig product

Het inwendig product van twee vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ is

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\alpha).$$

Als $\vec{a} \perp \vec{b}$ is hun inproduct gelijk aan 0. Als $\vec{a} \neq \vec{0}$ en $\vec{b} \neq \vec{0}$ is ook het omgekeerde waar: als $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ geldt $\vec{a} \perp \vec{b}$.



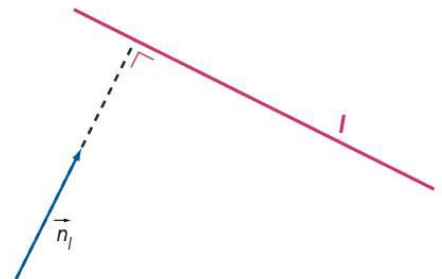
- S3** **a** Bereken het inwendig product van $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- b** Toon aan dat $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 17\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$.

Theorie

Normaalvector

Een vector loodrecht op een lijn l is een normaalvector van l .

Is $\vec{r} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ een richtingsvector van l , dan is $\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$ een normaalvector van l . Ook $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ is een normaalvector van l .



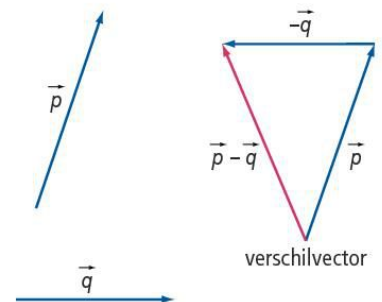
- S4** Geef van elke lijn een normaalvector.

a $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b** $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 48 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

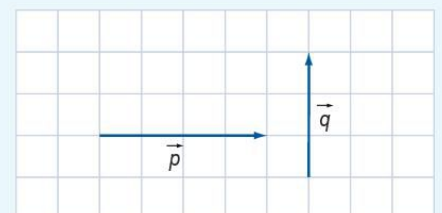
Vaardigheid

Je kunt vectoren optellen.

De somvector $\vec{p} + \vec{q}$ van twee vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ construeer je met de kop-staart methode. De verschilvector $\vec{p} - \vec{q}$ is de somvector van $\vec{p}$ en $-\vec{q}$. Dus $\vec{p} - \vec{q} = \vec{p} + (-\vec{q})$.



- S5** Gegeven zijn de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ met $|\vec{p}| = 4$ en $|\vec{q}| = 3$.
- a** Teken op roosterpapier de vectoren $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{p} + \vec{q}$ en $\vec{q} - \vec{p}$.
- b** Bereken $|\vec{p} + \vec{q}|$.



Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt met kentallen rekenen.

Voor het midden M van een lijnstuk AB geldt

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \text{ of ook } \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

- S6** Van $\triangle ABC$ is $A(-24, -12)$, $B(15, -3)$ en $C(0, 5)$.
Bereken de coördinaten van de middens P , Q en R van de zijden AB , BC en AC .

Vaardigheid

Je kunt de plaats van een zwaartepunt vinden.

Het zwaartepunt of evenwichtspunt is het ophangpunt van een massaloze stang met massa's die in evenwicht is.

Als zich in de punten $A_1, A_2, \dots, A_n$ de massa's $m_1, m_2, \dots, m_n$ bevinden met zwaartepunt Z , dan

geldt: $\vec{z} = \frac{m_1}{m} \cdot \vec{a}_1 + \frac{m_2}{m} \cdot \vec{a}_2 + \dots + \frac{m_n}{m} \cdot \vec{a}_n$, waarbij

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

- S7** In de punten $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 5)$ en $D(-1, 4)$ bevinden zich puntmassa's van respectievelijk 1, 2, 2 en 1 kg.
Bereken de coördinaten van het zwaartepunt.

Vaardigheid

Je kunt de hoek tussen twee vectoren berekenen.

De hoek α tussen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kun je berekenen

$$\text{met de formule } \cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Voorbeeld

Bereken de hoek α tussen de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Oplossing

$$|\vec{a}| = \sqrt{65}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{65} \text{ en } \vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = -25.$$

$$\cos(\alpha) = -\frac{25}{65} = -\frac{5}{13} \text{ dus } \alpha \approx 113^\circ.$$

- S8** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ met $A(-7, 1)$ en $B(1, 1)$.

Vaardigheid

Je kunt de vectorvoorstelling van een lijn door twee gegeven punten P en Q opstellen.

- 1 Kies als steunvector $\overrightarrow{OP}$ of $\overrightarrow{OQ}$.
- 2 Een richtingsvector is $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.
- 3 Een vectorvoorstelling is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$.

Je mag de richtingsvector korter of langer maken door de kentallen door hetzelfde getal te delen of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

Voorbeeld

Geef een vectorvoorstelling van de lijn door $A(3, -2)$ en $B(1, 4)$.

Oplossing

- 1 $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ is een steunvector.
- 2 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Neem als richtingsvector $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- 3 lijn $AB: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- S9** Gegeven zijn de punten $A(-5, 0)$, $B(3, 2)$ en $C(1, 6)$.
Stel vectorvoorstellingen op van de lijnen AB , BC en AC .

Vaardigheid

Je kunt een vectorvoorstelling van een lijn omzetten in een vergelijking en omgekeerd.

Lijn $l: ax + by = c$ heeft normaalvector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Voorbeeld 1

Geef een vergelijking van de lijn

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Oplossing

Een normaalvector van l is $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van l is $2x + 5y = 2 \cdot -6 + 5 \cdot -2$.
 $l: 2x + 5y = -22$.

Voorbeeld 2

Geef een vectorvoorstelling van de lijn m met vergelijking $x - 3y = 4$.

Oplossing

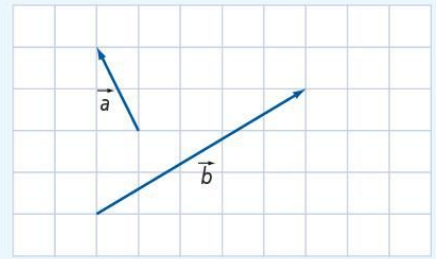
$\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dus een richtingsvector van m is $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Het punt $(4, 0)$ ligt op m , dus een vectorvoorstelling van m is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- S10** **a** Stel een vectorvoorstelling op van $l: 3x + 5y = 2$.
b Stel een vergelijking op van $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$.

T1 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

- a** Teken de vector $-2\vec{b}$.
- b** Teken de vector $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
- c** Teken de vector $2\vec{a} - \vec{b}$.



T2 Gegeven zijn de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

- a** Bereken de kentallen van de vectoren $\vec{v} + 3\vec{w}$ en $2\vec{v} - \vec{w}$.
- b** Bereken $|\vec{v} + 3\vec{w}|$ en $|2\vec{v} - \vec{w}|$.
- c** De vector $2\vec{v} - 3\vec{w}$ wordt ontbonden in vectoren evenwijdig aan de x -as en de y -as.
Geef de kentallen van deze vectoren.

T3 **a** Teken een lijnstuk AB met lengte 8 cm.
b In A bevindt zich een massa met grootte 9 en in B bevindt zich een massa met grootte 3.
Bereken en teken de positie van het zwaartepunt Z .

T4 In de punten $A(-6, 0)$, $B(6, 3)$, $C(0, -4)$ en $D(-2, 10)$ bevinden zich vier puntmassa's van achtereenvolgens 5, 10, 20, 15.
a Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z .
b In punt $E(p, q)$ bevindt zich een puntmassa van 15.
Het zwaartepunt van de puntmassa's in A , B en E is het punt $(2, 0)$.
Bereken de coördinaten van E .

T5 Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(-1, -2)$, $B(6, -1)$ en $C(1, 4)$.
a Bereken exact de lengte van de zijden van $\triangle ABC$.
b Bereken de grootte van de hoeken van $\triangle ABC$.
Rond je antwoorden af op hele graden.

T6 Stel een vergelijking op van de lijn.

a $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b** $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5t \\ 2 + 8t \end{pmatrix}$

T7 Geef een vectorvoorstelling van de lijn.

a $l: -x + 3y = 8$ **c** $n: y = -5$
b $m: y = -5x - 4$ **d** $k: x = 64$

T8 Gegeven is lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 5t \\ 8 - 2t \end{pmatrix}$ en punt $A(-3, 12)$.

- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de assen.
- b** Lijn m gaat door A en is evenwijdig met l . Geef een vectorvoorstelling van m .
- c** Lijn k gaat door A en staat loodrecht op l . Geef een vectorvoorstelling van k .

T9 De hoekpunten van vierhoek $ABCD$ zijn $A(-4, -2)$, $B(6, -3)$, $C(4, 5)$ en $D(-3, 3)$. De punten P , Q , R en S zijn de middens van de zijden AB , BC , CD en DA .

- a** Toon aan dat $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.
- b** Wat voor vierhoek is vierhoek $PQRS$?

T10 **a** Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Toon aan dat m de hoek van l met de x -as middendoor deelt.

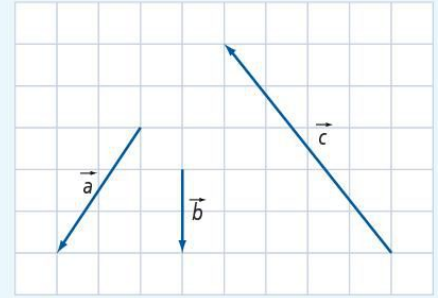
b Gegeven zijn de lijnen $p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ en $q: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereken de waarde van t waarvoor q de hoek van p met de x -as middendoor deelt.

Je kunt vectoren optellen.

E1 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

- Teken de vector $\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}$.
- Teken de vector $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.



Je kunt met kentallen rekenen.

E2 Gegeven zijn de punten $P(2, 6)$ en $Q(-8, 0)$.

- Bereken de kentallen en de lengte van de vector $-\frac{1}{2}\vec{p} + 1\frac{1}{2}\vec{q}$.
- Bereken de coördinaten van het midden van lijnstuk PQ .

Je kunt de plaats van een zwaartepunt vinden.

E3 De hoekpunten van een vierhoek $ABCD$ hebben de coördinaten $A(-1, 30)$, $B(3, 31)$, $C(4, 35)$ en $D(0, 34)$.

- In de vier hoekpunten bevinden zich gelijke puntmassa's. Bereken hiervan de coördinaten van het zwaartepunt Z .
- Nu bevinden zich in de punten A en C puntmassa's van 3 en 10. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van deze twee puntmassa's.

Je kunt de hoek tussen twee vectoren berekenen.

E4 Gegeven zijn de punten $A(-3, -2)$, $B(8, 3)$ en $C(-1, 4)$.

- Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.
- Bereken de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ in hele graden.
- Onderzoek of de vector $\vec{p} = \begin{pmatrix} 45 \\ -99 \end{pmatrix}$ loodrecht staat op $\overrightarrow{AB}$.

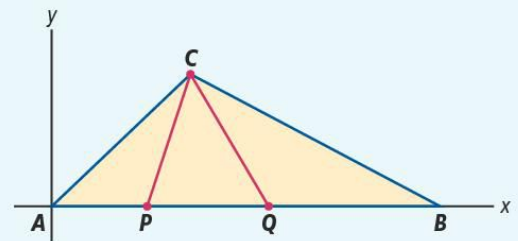
Je kunt een vectorvoorstelling van een lijn door twee gegeven punten opstellen.

E5 Deze opdracht gaat over de punten A , B en C van opdracht E4.

- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn door B en C .
- Stel een vectorvoorstelling op van lijn l die door A en het midden M van lijnstuk BC gaat.

Je kunt een vectorvoorstelling van een lijn omzetten in een vergelijking en omgekeerd.

- E6** Gegeven zijn de lijnen $l: 2x - 7y = 4$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5t \\ 6 - t \end{pmatrix}$.
- Stel een vectorvoorstelling op van lijn l .
 - Stel een vergelijking op van lijn m .
 - Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van de lijn door $P(2, 1)$ die loodrecht staat op lijn m .
- E7**
- Teken in een assenstelsel $\triangle OAB$ met $A(4, 1)$ en $B(2, 4)$.
 - Bereken de hoeken van $\triangle OAB$ in graden nauwkeurig.
- E8** Gegeven zijn de punten $A(-2, 1)$, $B(4, -1)$ en $P(p, 3)$.
Bereken voor welke waarden van p de vectoren $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{BP}$ loodrecht op elkaar staan.
- E9** Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $A(4, 0)$, $B(5, 6)$, $C(0, 3)$ en $D(-2, 0)$. In de punten A , B en C bevinden zich puntmassa's van achtereenvolgens 2, 4 en 6.
- Bereken exact de grootte van de puntmassa in punt D zodat de y -coördinaat van het zwaartepunt van deze vier puntmassa's gelijk is aan 1.
 - Bereken de x -coördinaat van het zwaartepunt.
- E10** Gegeven is $\triangle ABC$ met $A(0, 0)$, $B(224, 0)$ en $C(80, 60)$.
- Op zijde AB liggen de punten $P(p, 0)$ en $Q(q, 0)$, zodat $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ}) = \angle(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$.
Bereken p en q .
 - Bij meting lijkt $\angle(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CQ}) = 60^\circ$.
Onderzoek of dat klopt.



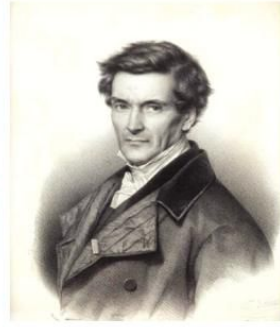
Windrichting

Vectoren worden vaak gebruikt in kaartjes met de weersvoorspelling. Wind wordt veroorzaakt doordat luchtdeeltjes zich bewegen van plaatsen met een hoge luchtdruk naar plaatsen met een lage luchtdruk.

C.H.D. Buys Ballot (1817-1890) was de eerste die dit met metingen aantoonde. Buys Ballot was een veelzijdige wetenschapper, die zich bezig hield met onder andere natuurkunde, wiskunde en meteorologie. Hij is de oprichter van het KNMI.



Buys Ballot



De Coriolis

Hoe ontstaat wind en windrichting?

Luchtdrukverschillen veroorzaken een kracht, die luchtdrukgradiënt wordt genoemd. Deze kracht brengt de luchtmasa in beweging van plaatsen met een hoge luchtdruk naar die met een lage. De draaiing van de aarde speelt echter ook een rol met betrekking tot de windrichting. De kracht die daarbij een rol speelt heet Corioliskracht.

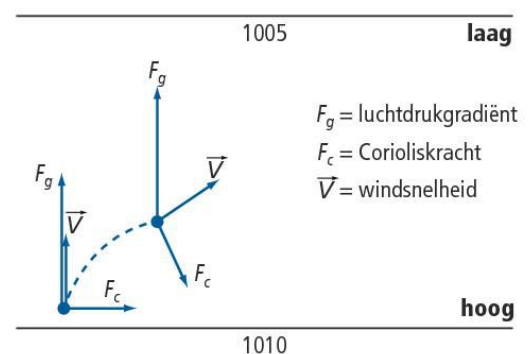
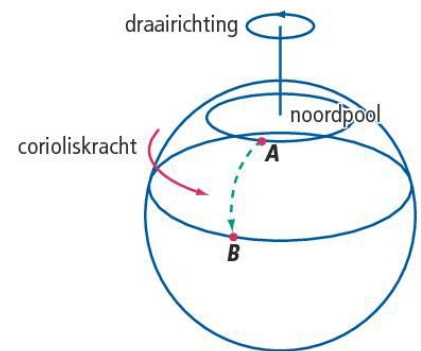
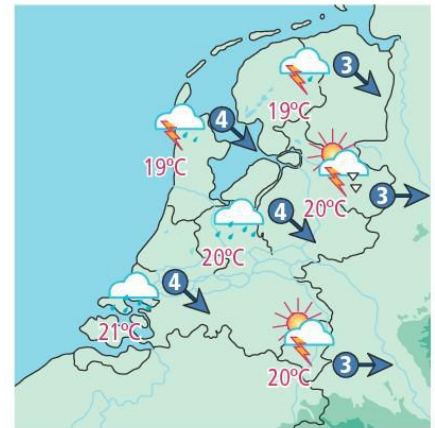
Zowel punt *A* als punt *B* draaien in 24 uur rond de aarde. Als je van *A* naar *B* gaat neemt de omloopsnelheid toe en ben je aan het versnellen. De kracht die deze versnelling geeft heet de Corioliskracht, genoemd naar G.G de Coriolis (1792-1843). Deze kracht is alleen van toepassing op vaste punten van het aardoppervlak. Op punten erboven heeft deze kracht geen invloed.

Zodra de lucht beweegt, treedt de Corioliskracht op. De wind die vanuit een gebied met hoge luchtdruk waait naar een gebied met lage luchtdruk wijkt op het noordelijk halfrond af naar rechts en op het zuidelijk halfrond naar links. Dit geldt voor een waarnemer op aarde.

De Corioliskracht staat altijd loodrecht op de windrichting en buigt deze af.

Opdracht

- Wat zal de windrichting op den duur worden?
- Welke richting en onderlinge sterkte hebben de luchtdrukgradiënt en de Corioliskracht dan?



Exponenten en logaritmen

7

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

Al eerder heb je kennis gemaakt met exponentiële groei en exponentiële functies.

Het gaat in dit hoofdstuk over grafieken van exponentiële functies en het oplossen van exponentiële vergelijkingen. Om het exact oplossen van exponentiële vergelijkingen mogelijk te maken wordt er een nieuw begrip ingevoerd: de logaritme. Daarna leer je enkele eigenschappen van logaritmen, hoe grafieken van logaritmische functies eruit zien en je leert vergelijkingen met logaritmen op te lossen.

De kennis van exponentiële en logaritmische functies heb je in klas 5 en 6 weer nodig.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|--|---------------------|
| • <i>Modelleren en algebraïseren</i> | opdracht 48 |
| • <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | intro paragraaf 7.4 |
| • <i>Formules manipuleren</i> | opdracht 44 |

Voorkennis

- V1 In de tabel is de grootte van een bacteriepopulatie weergegeven vanaf het moment dat werd begonnen met tellen.

<i>tijd in uren</i>	0	1	2	3	4
<i>aantal bacteriën</i>	120	156	203	263	342

- Bereken in één decimaal de groeifactor per uur.
- Hoe groot is de groeifactor per dag?
- Hoeveel bacteriën waren er twee uur voordat er werd begonnen met tellen?
- Na hoeveel uur zijn er 660 bacteriën?

- V2 Bij een exponentieel groeiproces is de groeifactor 1,43 per dag. Geef bij de opdrachten het antwoord in twee decimalen.

- Bereken de groeifactor per week.
- Bereken de groeifactor per halve dag.

Theorie

Functies van de vorm $N(t) = b \cdot g^t$ heten exponentiële functies. Hierin is b de **beginhoeveelheid** op tijdstip $t = 0$ en is g de **groeifactor** per tijdseenheid.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $N(t) = 13,5 \cdot 1,04^t$ met N in miljoenen en t in maanden.

Bereken de beginhoeveelheid en de groeifactor per jaar.

Oplossing

De beginhoeveelheid is $N(0) = 13,5$ miljoen.

De groeifactor per jaar is $1,04^{12} \approx 1,6$.

- V3 Gegeven is de functie $N(t) = 12 \cdot 1,09^{t-2}$, waarbij t de tijd in dagen is.

- Bereken de beginhoeveelheid in twee decimalen.
- Bereken de groeifactor per week in twee decimalen.
- Bereken de groeifactor per zes uur in twee decimalen.

Theorie

Bij het rekenen met groeifactoren kun je gebruik maken van de regels voor het rekenen met machten.

Bij het rekenen met machten geldt:

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}, \quad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}, \quad (g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$g^0 = 1, \quad g^1 = g, \quad g^{-n} = \frac{1}{g^n}, \quad g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$$

Voorbeeld

Schrijf $81 \cdot \sqrt{\frac{1}{27}}$ als macht van 3.

Oplossing

$$81 \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} = 3^4 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$3^4 \cdot (3^{-3})^{\frac{1}{2}} =$$

$$3^4 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{2\frac{1}{2}}$$

V4 Schrijf als macht van 2.

a $\frac{1}{16} \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

c $\frac{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[3]{4}}{\frac{1}{32}}$

b $2^{-4} \cdot \frac{1}{2^{-3}}$

d $4^{-3} \cdot 8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}$

Theorie

Machtsvergelijkingen kun je vereenvoudigen tot de vorm $x^c = a$ waarbij de variabele in het grondtal staat.
Exponentiële vergelijkingen kun je herleiden tot de vorm $g^x = a$ waarbij de variabele in de exponent staat.

Voorbeeld 1

Los exact op $3 \cdot g^5 = 30$.

Oplossing

$3 \cdot g^5 = 30$ geeft $g^5 = 10$

ofwel $g = 10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10}$.

Voorbeeld 2

Los exact op $5^{x+2} = \frac{1}{125}$

Oplossing

$\frac{1}{125} = 5^{-3}$ geeft $5^{x+2} = 5^{-3}$.

$x + 2 = -3$ dus $x = -5$.

V5 Los exact op.

a $4 \cdot g^3 = 48$

e $\frac{1}{4} g^4 = 16$

b $g^{\frac{1}{4}} + 3 = 5$

f $\frac{1}{2} g^{-3} = 12$

c $g^{-2} = \frac{1}{4}$

g $2 + \frac{1}{3} g^{-6} = 3$

d $15g^{-\frac{1}{3}} = 3$

h $\frac{4}{g^2} = 64g^3$

V6 Los exact op.

a $2^x = \frac{1}{8}$

d $2^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$

b $3^{-x} = 3$

e $5^{2x-2} = 125$

c $5^{3-x} = 1$

f $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 3\sqrt{3}$

V7 Gegeven is de functie $f(x) = 3^{2x}$.

- a De grafiek van f wordt 3 naar links verschoven.
Stel een functievoorschrift op van de beeldgrafiek.
- b De grafiek van f wordt met 5 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.
Stel een functievoorschrift op van de beeldgrafiek.

7.1 Exponentiële functies

Je leert

- hoe je een functievoorschrift aanpast na een transformatie

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—4—05—06—6—7
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—2—4—5—6—8—U1—U2

Een blad papier wordt twee keer zo dik als je het dubbelvouwt. Als je dit papier opnieuw dubbelvouwt heb je vier lagen papier. Neem aan dat het papier 0,1 mm dik is.

- Stel dat je onbeperkt vaak kunt dubbelvouwen.

Hoe vaak moet je dan vouwen om een dikte van meer dan 1 km te krijgen?



- 1 Gegeven zijn de exponentiële functies $h(x) = 2 \cdot 3^x$,

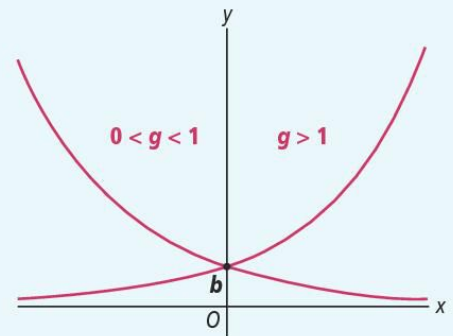
$$i(x) = 0,5 \cdot 1,65^x, j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ en } k(x) = 10 \cdot 0,7^x.$$

Deze functies zijn allemaal van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

- Plot de grafieken van deze functies.
Welke functies zijn stijgend en welke zijn dalend?
- Leg uit waarom de functie stijgend is als $g > 1$.
- Welke lijn is asymptoot van elk van de grafieken?
- Geef bij elk van de functies de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as.

Theorie

Een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ met $b > 0$, is stijgend als de groeifactor $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.
De grafiek gaat door het punt $(0, b)$ op de verticale as.
De grafiek heeft de x -as ($y = 0$) als horizontale asymptoot.
Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik van f is $\langle 0, \infty \rangle$.



- 2 Gegeven zijn de functies $f(x) = 20 \cdot 1,5^x$, $g(x) = 0,5^{-x}$,

$$h(x) = 3 \cdot 0,7^{2x+1} \text{ en } k(x) = 1,0001^x.$$

- Geef van elke functie aan of deze stijgend of dalend is.
- Geef van elke functie het snijpunt van de grafiek met de verticale as.
- Geef de groeifactor van de functie g en van de functie h .
- Geef het domein en het bereik van de functie k .
- Geef van de functies f en g de vergelijkingen van de asymptoten van de bijbehorende grafieken.

- 3 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 2^{-x}$.
- Plot en schets de grafieken van f en g .
 - Leg uit waarom de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld in de y -as zijn.
 - De grafiek van $h(x) = 2 \cdot 3^x$ wordt gespiegeld in de y -as. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.
 - De grafiek van $h(x) = 2 \cdot 3^x$ wordt gespiegeld in de x -as. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Theorie

Bij een **transformatie** van de grafiek van een functie f ontstaat een nieuwe grafiek, de **beeldgrafiek**. Bij de beeldgrafiek kun je het functievoorschrift $g(x)$ opstellen.

<i>transformatie</i>	<i>resultaat</i>
- verschuiving d omhoog	$g(x) = f(x) + d$
- verschuiving c naar rechts	$g(x) = f(x - c)$
- vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x -as	$g(x) = a \cdot f(x)$
- spiegeling in de x -as	$g(x) = -f(x)$
- spiegeling in de y -as	$g(x) = f(-x)$

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x) = 0,5^{2x}$ wordt 3 naar links verschoven en vervolgens gespiegeld in de y -as.

Stel het functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek.

Oplossing

Na de verschuiving van 3 naar links ontstaat de grafiek van $h(x) = f(x + 3)$ dus $h(x) = 0,5^{2(x+3)}$ ofwel $h(x) = 0,5^{2x+6}$.

De spiegeling in de y -as geeft vervolgens de grafiek van $g(x) = h(-x)$ dus $g(x) = 0,5^{-2x+6}$.

- 4
- De grafiek van $f(x) = 1,5^x$ wordt vermenigvuldigd met 3 ten opzichte van de x -as en daarna gespiegeld in de y -as. Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.
 - De grafiek van $g(x) = 4 \cdot 3^x$ wordt gespiegeld in de x -as en vervolgens 2 omhoog verschoven. Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.
 - De grafiek van $h(x) = 2 \cdot 0,7^x$ wordt gespiegeld in de y -as en vervolgens 4 naar rechts verschoven. Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.
 - De grafiek van $k(x) = 100 \cdot 2^x$ wordt eerst in de x -as gespiegeld en daarna in de y -as. Tot slot vindt er een verschuiving van 6 omlaag plaats. Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek.
 - Geef van elke beeldgrafiek een vergelijking van de horizontale asymptoot.

7.1 Exponentiële functies

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5** **H**
- Door welke transformaties ontstaat de grafiek van $g(x) = 3 + 0,5^{x-4}$ uit de grafiek van $f(x) = 0,5^x$?
 - Door welke transformaties, en in welke volgorde, ontstaat de grafiek van $g(x) = 3 \cdot 5^{-x} + 2$ uit die van $f(x) = 5^x$?
 - Door welke transformaties, en in welke volgorde, ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 - 3^{2-x}$ uit die van $f(x) = 3^x$?

Ondersteunende route → maak opdracht 06

- 6** **H**
- Gegeven zijn de functies $g(x) = 8 \cdot 2^x$ en $h(x) = 2^{x+3}$.
- Door welke transformaties zijn de grafieken van g en h uit de grafiek van $f(x) = 2^x$ ontstaan?
 - Plot de grafieken van g en h . Wat valt je op?
 - Gebruik de rekenregels voor het rekenen met machten om aan te tonen dat de functies g en h hetzelfde zijn.
 - De grafiek van de functie $k(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^x$ kan op twee verschillende manieren uit de grafiek van $f(x) = 3^x$ ontstaan: een verschuiving of een vermenigvuldiging. Geef beide mogelijkheden.
 - Op welke twee manieren kan de grafiek van de functie $m(x) = 2 \cdot 4^x$ ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 4^x$?
- 7**
- Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- Plot en schets de grafieken van f en g .
 - De grafieken van f en g zijn elkaars spiegelbeeld in de y -as. Gebruik de rekenregels om aan te tonen dat een spiegeling van de grafiek van f in de y -as de grafiek van g oplevert.
 - De grafiek van $h(x) = 8 \cdot 1,5^x$ wordt gespiegeld in de y -as. Stel het functievoorschrift op dat bij de beeldgrafiek hoort en schrijf dit in de vorm $k(x) = b \cdot g^x$.
- 8**
- De grafiek van $p(x) = \sqrt{3} \cdot 3^x$ wordt gespiegeld in de y -as en vervolgens $\frac{1}{2}$ naar links verschoven. Stel het functievoorschrift op dat bij de beeldgrafiek hoort en schrijf dit in de vorm $q(x) = b \cdot g^x$.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 05** Gegeven is de functie $g(x) = 7 \cdot 2^{-x} + 6$. Joris onderzoekt door welke transformaties de grafiek van g ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 2^x$. Op het blaadje zie je hoe hij te werk gaat.
- In het functievoorschrift is x vervangen door $-x$. Welke spiegeling hoort daarbij?
 - Vul het blaadje verder in.
 - Als je de grafiek van g ook nog 3 naar rechts verschuift, vervang je in het functievoorschrift x door $x - 3$ om het functievoorschrift van de beeldgrafiek te krijgen. Toon aan dat bij de beeldgrafiek de functie $p(x) = 7 \cdot 2^{3-x} + 6$ hoort.

Geef van de volgende functies aan door welke transformaties de grafiek ontstaat uit de grafiek van $f(x) = 3^x$.

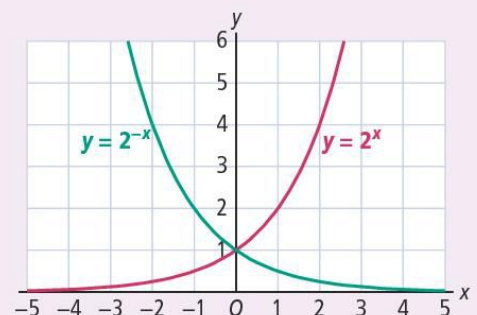
- | | |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| d $g(x) = 4 + 3^{x+2}$ | f $g(x) = 3^{5-x} - 10$ |
| e $g(x) = 8 - 3^{x-4}$ | g $g(x) = 1 - 2 \cdot 3^{-x}$ |

Joris	
$h(x) = 2^{-x} = f(-x)$	
dus een spiegeling in de ...-as.	
$k(x) = 7 \cdot 2^{-x} = 7 \cdot h(x)$	
dus een vermenigvuldiging	
met ... ten opzichte van de ...	
$g(x) = 7 \cdot 2^{-x} + 6 = k(x) + 6$	
dus een verschuiving ...	

- 06** Gegeven is de functie $h(x) = 5^{x+2}$.
- Laat met behulp van de rekenregel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$ zien dat het functievoorschrift van h te schrijven is als $h(x) = 25 \cdot 5^x$.
 - Uit de twee functievoorschriften van h kun je opmaken dat de grafiek van h door twee verschillende transformaties uit de grafiek van $f(x) = 5^x$ kan ontstaan. Welke twee transformaties zijn dat?

Uitdagende opdrachten

- U1** Van een functie f is bekend dat $f(x) = b \cdot g^x + c$. Geef het functievoorschrift als gegeven is:
- $f(0) = 2$, $f(6) = -50$ en de asymptoot is $y = 4$.
 - $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ en de asymptoot is $y = -2$.
 - $f(-1) = -8$, $f(1) = -32$ en de asymptoot is $y = -7$.
- U2** Beredeneer van de volgende functies welke lijnen een horizontale asymptoot zijn van de grafiek. Je kunt daarbij gebruik maken van de grafieken van $y = 2^x$ en $y = 2^{-x}$.
- | | |
|-------------------------------------|--|
| a $f(x) = \frac{4}{1 + 2^x}$ | c $f(x) = \frac{2}{2^{-x} + 2^x}$ |
| b $f(x) = (2 + 2^x)^2$ | d $f(x) = \frac{2^x}{2^{-x} + 2^x}$ |



7.2 Exponentiële vergelijkingen

Je leert

- hoe je een exponentiële vergelijking exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 9—010—10—11—012—13—14—15
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14—15—16
- uitdagend: 9—10—11—12—13—15—U3—U4

Bij een exponentieel groeiproces verdubbelt de hoeveelheid in één week.

- Hoelang duurt het om acht keer zoveel te krijgen?
- Hoelang duurt het om vijf keer zoveel te krijgen?



- 9 Gegeven is de vergelijking $2 \cdot 6^{3+x} = 12 \cdot 36^x$.
- Waarom kun je de vergelijking herschrijven als $6^{3+x} = 6 \cdot 36^x$?
 - Schrijf de rechterkant van de vergelijking als één macht van 6.
 - Los de vergelijking exact op.

Aanpak

Hoe los je een exponentiële vergelijking exact op?

- Deel zo mogelijk de linker- en de rechterkant van de vergelijking door hetzelfde getal.
- Schrijf de linker- en de rechterkant van de vergelijking als machten van hetzelfde grondtal.
- Stel de exponenten aan elkaar gelijk en los de hierdoor ontstane vergelijking op.

Voorbeeld

Los exact op.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16\sqrt{2}$$

Oplossing

- niet nodig
- $(2^{-1})^x = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$
 $2^{-x} = 2^{4\frac{1}{2}}$
- $-x = 4\frac{1}{2}$
 $x = -4\frac{1}{2}$

$$2 \cdot 0,2^{1-3x} = 250 \cdot 5^x$$

Oplossing

- $0,2^{1-3x} = 125 \cdot 5^x$
- $(5^{-1})^{1-3x} = 5^3 \cdot 5^x$
 $5^{3x-1} = 5^{3+x}$
- $3x-1 = 3+x$
 $x = 2$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-2x} = 8^{x+3}$$

Oplossing

- $(2^{-2})^{1-2x} = (2^3)^{x+3}$
- $2^{-2+4x} = 2^{3x+9}$
- $4x-2 = 3x+9$
 $x = 11$

Ondersteunende route → maak opdracht 010

10 Los exact op.

- H**
- | | |
|--|--|
| a $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{2x-3}$ | f $0,1^{2x} = 1000^{1-x}$ |
| b $3^x = \frac{1}{27}$ | g $32 \cdot 2^x = 4^{4x+3}$ |
| c $0,25^x = 16 \cdot 2^{x-1}$ | h $3 \cdot 0,5^x = 24 \cdot 2^{4x-3}$ |
| d $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+3} = 1$ | i $14 \cdot 4^x = 7 \cdot 2^{3x}$ |
| e $2^x = 0,125^3$ | j $\sqrt{2^x} = \frac{1}{64}$ |

11 Ga bij elke vergelijking na of deze exact kan worden opgelost of niet. Bereken de exacte oplossing als dat mogelijk is en geef in de andere gevallen een benadering in twee decimalen.

- H**
- | | |
|---|--|
| a $36 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-1} = 12$ | d $0,125^x = \sqrt{2}$ |
| b $2^{4x-1} = 24$ | e $2 \cdot 10^x = 5^x$ |
| c $3^x \cdot 4^x = 6^x$ | f $6^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ |

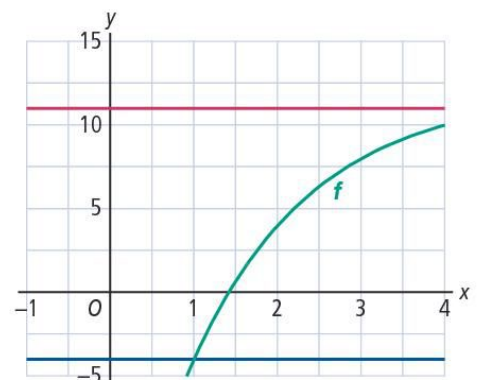
Ondersteunende route → maak opdracht 012

12 Gegeven zijn de functies $f(x) = 27 \cdot 3^{2-x}$ en $g(x) = (\sqrt{3})^x$.

- H**
- a** Los exact op $f(x) = g(x)$.
- b** Gebruik een plot en geef de oplossing van $f(x) > g(x)$.

13 Gegeven zijn de functie $f(x) = 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ en de lijnen met vergelijkingen $y = -4$ en $y = 11$.

- a** Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met elk van de lijnen $y = -4$ en $y = 11$.
- b** Geef de oplossing van $f(x) \geq 11$ in intervalnotatie.
- c** Los exact op $-4 < f(x) < 11$.
- d** Los exact op $4 \leq f(x) \leq 11\frac{1}{2}$.

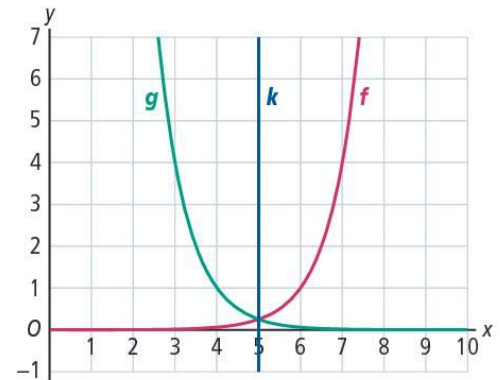


7.2 Exponentiële vergelijkingen

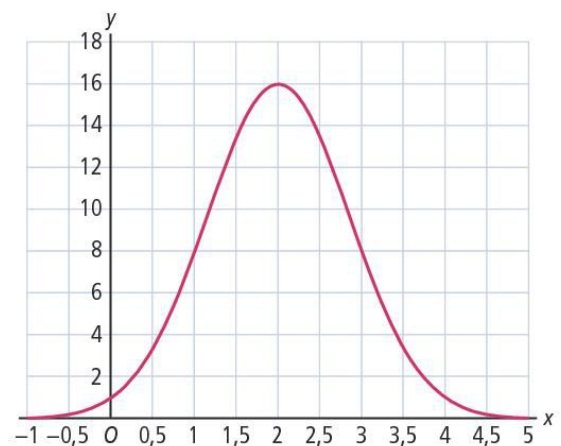
- 14** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{0,5x}$ en $g(x) = 2^{-x+3}$.
- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
 - Plot de grafieken van f en g en geef de oplossing van $f(x) \leq g(x)$.

- 15** Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{12-2x}$ en $g(x) = 4^{4-x}$. Lijn k is de verticale lijn door het snijpunt van de grafieken van f en g .

- Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g en geef een vergelijking van lijn k .
- Los op $g(x) \geq f(x)$.
- De grafieken van f en g lijken elkaars spiegelbeeld te zijn in lijn k .
Bereken exact de coördinaten van de snijpunten A en B van de grafieken van f en g met de lijn $y = 4$.
- Waarom zijn A en B elkaars spiegelbeeld in lijn k ?
- De punten P en Q zijn de snijpunten van de lijn $y = 10$ met de grafieken van f en g .
Laat zien dat P en Q elkaars spiegelbeeld zijn in lijn k .



- 16** Gegeven is de grafiek van de functie $g(x) = 2^{4x-x^2}$.
- Maak een tabel met functiewaarden van g voor $x = -1$ tot en met $x = 5$.
 - Beredeneer met behulp van het functievoorschrift dat voor waarden van x ver van 0 de grafiek steeds dichterbij de x -as komt.
 - Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de lijn $y = 2^{-12}$.
 - Los exact op $1 \leq g(x) \leq 8$.
 - Los op $g(x) \geq 5$. Rond af op twee decimalen.



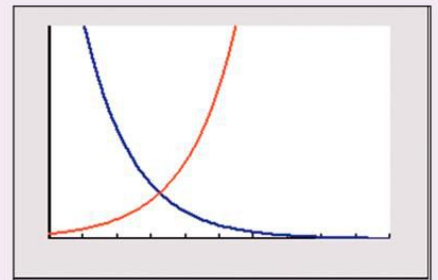
Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 010** Gegeven zijn de vergelijkingen $2^{x-3} = 64$ en $25^x = 5\sqrt{5}$.
- Gebruik dat $64 = 2^6$ en los de vergelijking $2^{x-3} = 64$ op.
 - Op het blaadje is een begin gemaakt met het oplossen van de vergelijking $25^x = 5\sqrt{5}$.
Leg uit wat er bij stap 2 is gebeurd.
 - Gebruik de rekenregels voor het rekenen met machten om bij stap 3 beide kanten als één macht van 5 te schrijven.
 - Maak de berekening op het blaadje af.
 - Vereenvoudig de vergelijking $3 \cdot 8^{2x} = 12$ door links en rechts door 3 te delen. Schrijf vervolgens beide kanten als een macht van 2 en los de vergelijking op.
 - Los de vergelijking $\sqrt{12 \cdot 27^x} = 18$ exact op door eerst te kwadrateren en daarna de vergelijking te vereenvoudigen.

●	$25^x = 5\sqrt{5}$	1
●	$(5^2)^x = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$	2
●	$5^{\dots} = 5^{\dots}$	3
●	$\dots = \dots$	

- 012** Gegeven zijn de functies $f(x) = 32 \cdot 2^{5-x}$ en $g(x) = 2^x \cdot \sqrt{128}$.
- Schrijf $f(x)$ en $g(x)$ als machten van 2.
 - Los exact op $f(x) = g(x)$.
 - In de plot van de grafieken hoort de dalende grafiek bij f . Bij welke waarden van x ligt de grafiek van f lager dan die van g ?
 - Geef de oplossing van $f(x) \leq g(x)$.

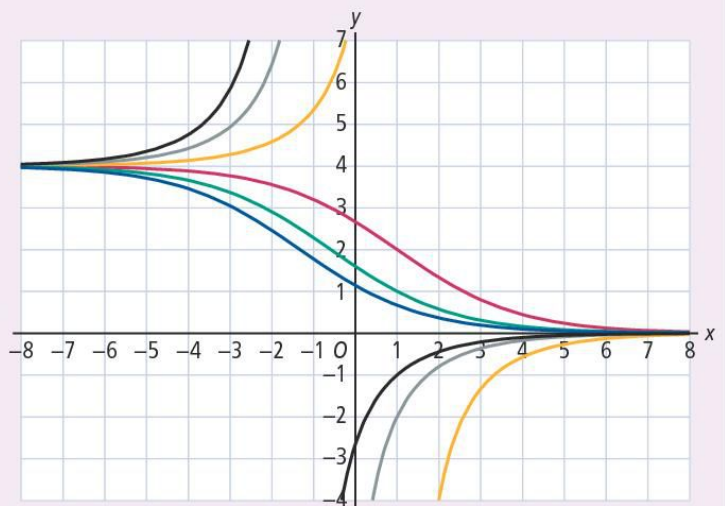


Uitdagende opdrachten

- U3** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{\frac{1}{2}x^2 - 2}$ en $g(x) = (2\sqrt{2})^x$.
- Leg uit waarom de grafiek van f symmetrisch is in de y -as.
 - Bereken hoe groot het minimum van f is.
 - Los exact op $2 \leq f(x) \leq 4$.
 - Los exact op $f(x) = g(x)$.

- U4** Er zijn enkele grafieken van de familie van functies $f_a(x) = \frac{8}{2 + a \cdot 2^x}$ getekend.

- Voor hoeveel verschillende waarden van a is de grafiek getekend?
- Waarom hebben de grafieken van alle functies f_a dezelfde horizontale asymptoten?
- Neem $a = 1$ en los exact op $\frac{8}{2 + 1 \cdot 2^x} = 2^x$.
- Bereken exact de y -coördinaat van het snijpunt S van de grafiek van f_{-1} met de grafiek van $g(x) = 4 \cdot 2^{-x}$.
- Bereken in twee decimalen ook de x -coördinaat van S .



7.3 Logarithmen

Je leert

- wat logarithmen zijn
- hoe je logarithmen gebruikt om exponentiële vergelijkingen exact op te lossen
- hoe je vergelijkingen met logarithmen exact oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 17—18—19—20—21—22—23—024—025—25
- doorlopend: 17—18—19—20—21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 17—18—20—21—22—23—24—26—U5—U6

Sommige waterplanten groeien onder gunstige omstandigheden exponentieel.

Voor de oppervlakte N in m^2 van een dergelijke plant geldt $N = 6 \cdot 3^t$ met t in weken.

- Leg uit waarom je de vergelijking $N = 4374$ wel exact kunt oplossen en de vergelijking $N = 6000$ niet.



- 17** Gegeven is de vergelijking $3^x = 18$.
- Waarom kun je deze vergelijking niet exact oplossen?
 - Toon aan dat voor de oplossing geldt: $2,63 < x < 2,64$.
 - Geef de oplossing in vier decimalen.
- 18** Welke vergelijkingen kun je exact oplossen?
Los die vergelijkingen exact op.
- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| a $2^x = 10$ | d $5^x = \sqrt{5}$ |
| b $3^x = 25$ | e $2^x = 256$ |
| c $10^x = \frac{1}{10}$ | f $3^x = \frac{1}{36}$ |
- 19**
- Tussen welke gehele getallen ligt de oplossing van $3^x = 25$?
 - Beredeneer welk getal groter is: de oplossing van $3^x = 15$ of die van $6^x = 38$.

Theorie

De exacte oplossing van de vergelijking $g^x = a$ heet de **logaritme** van a voor het grondtal g .

Je noteert deze oplossing als $x = {}^g\log(a)$ en je spreekt ${}^g\log(a)$ uit als 'g-log a'.

Basisregel: Uit $g^b = a$ volgt $b = {}^g\log(a)$ en omgekeerd:

uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b = g^{{}^g\log(a)}$.

Hierbij is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Er geldt: ${}^g\log(1) = 0$ voor elke waarde van $g > 0$ (mits $g \neq 1$)

tot de macht

$${}^g\log(a) = b$$

is

Voorbeeld 1Los exact op $4^x = 13$.**Oplossing**Uit $4^x = 13$ volgt

$$x = {}^4\log(13).$$

Voorbeeld 2Van welke exponentiële vergelijking is $x = {}^5\log(12)$ de oplossing?**Oplossing** $x = {}^5\log(12)$ is de oplossing van $5^x = 12$.**20** Los exact op, dus schrijf de oplossing met een logaritme.**H**

a $7^x = 4$

d $3^{x-2} = 14$

b $7^x = 10$

e $5^{x+1} = 100$

c $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 13$

f $5^{2x+3} = 0,5$

21 Geef een exponentiële vergelijking bij de gegeven oplossingen.

a $x = {}^3\log(5)$

d $x = {}^{10}\log(6)$

b $x = {}^7\log\left(\frac{1}{2}\right)$

e $x = {}^4\log(8)$

c $x = {}^{\frac{1}{2}}\log(7)$

f $x = {}^{0,1}\log(1000)$

22 Vul in.

a ${}^3\log(27) = \dots$ want $27 = 3^{\dots}$

b ${}^2\log\left(\frac{1}{8}\right) = \dots$ want $\frac{1}{8} = 2^{\dots}$

c ${}^5\log(5\sqrt{5}) = \dots$ want $5\sqrt{5} = 5^{\dots}$

d ${}^7\log(1) = \dots$ want $1 = 7^{\dots}$

23 Gegeven de rij ${}^5\log(1), {}^5\log(2), {}^5\log(3), {}^5\log(4), \dots, {}^5\log(1000)$. Welke van deze logaritmen zijn gelijk aan een geheel getal? Verklaar je antwoord.

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24 Bereken exact.**H**

a ${}^2\log(2\sqrt{2})$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(9)$

b ${}^7\log\left(\frac{1}{49}\right)$

e ${}^{25}\log(5)$

c ${}^{10}\log(1\,000\,000)$

f ${}^{\frac{1}{4}}\log\left(\frac{1}{64}\right)$

7.3 Logaritmen

Theorie

Met de regel 'Uit ${}^s\log(a) = b$ volgt $a = g^b$ ' kun je vergelijkingen met logaritmen exact oplossen.

Voorbeeld

Los exact op ${}^2\log(2x - 4) = 3$.

Oplossing

Uit ${}^2\log(2x - 4) = 3$ volgt $2x - 4 = 2^3$.

$2x - 4 = 8$ dus $x = 6$.

Ondersteunende route → maak opdracht 025

25 Los exact op.

a ${}^3\log(x) = 2$

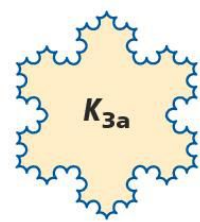
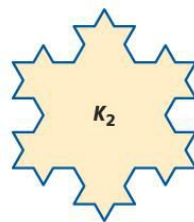
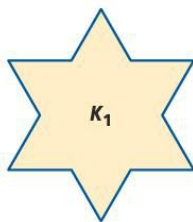
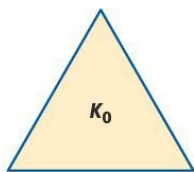
d ${}^3\log(x + 10) = 2$

b ${}^5\log(x) = -1$

e ${}^5\log(x^2 + 4) = 3$

c ${}^4\log(5x) = \frac{1}{2}$

f ${}^6\log(x^2 - 13) = 2$



26 De reeks plaatjes toont de ontwikkeling van de zogenaamde Koch-curve of sneeuwvlokkromme.

Begin met de gelijkzijdige driehoek K_0 met zijde 9. Verdeel elke zijde in drieën en vervang steeds het middelste deel door een gelijkzijdige driehoek aan de buitenzijde.

a Hoe groot is de omtrek van K_0 en van K_1 ?

b Leg uit dat geldt: $omtrek\ K_n = 27 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

c Bij welke figuur is de omtrek gelijk aan $85\frac{1}{3}$?

d Bij welke figuur is de omtrek groter dan 10^6 ?

e De antwoorden op de opdrachten c en d kun je schrijven met logaritmen.

Schrijf die antwoorden als logaritmen.

Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten

- 024** Je gaat in deze opdracht $\frac{1}{2}\log(4\sqrt{2})$ berekenen.
 $x = \frac{1}{2}\log(4\sqrt{2})$ is de oplossing van de vergelijking
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}$.
- Vul het blaadje verder in.
 - Van welke vergelijking is $x = {}^3\log\left(\frac{1}{81}\right)$ de oplossing?
 - Bereken exact ${}^3\log\left(\frac{1}{81}\right)$.
- Bereken exact.
- | | |
|---|---|
| d ${}^5\log(25\sqrt{5})$ | g $\frac{1}{4}\log(16\sqrt{8})$ |
| e ${}^6\log\left(\frac{1}{216}\right)$ | h ${}^{49}\log(7)$ |
| f ${}^{100}\log(10)$ | i $\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{81}\right)$ |

☐	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}$				
☐	$(2^{-1})^x = 2 \cdots 2 \cdots$				
☐	$2^{-x} = 2 \cdots$				
☐	$-x = \dots$				
☐	$x = \dots$				
☐	dus $\frac{1}{2}\log(4\sqrt{2}) = \dots$				

- 025** Er geldt ${}^3\log(81) = 4$ want $3^4 = 81$.
- Vul in: uit ${}^3\log(x) = 2$ volgt $x = 3^{\dots} = \dots$
 - Vul in: uit ${}^5\log(x) = 4$ volgt $x = \dots^{\dots} = \dots$
 - Op het blaadje wordt de vergelijking ${}^3\log(5x - 4) = 4$ exact opgelost.
Maak de berekening op het blaadje af.

☐	Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$,				
☐	uit ${}^3\log(5x - 4) = 4$ volgt dus				
☐	$5x - 4 = 3^4$.				
☐	$5x - 4 = \dots$				
☐	$5x = \dots$				
☐	$x = \dots$				

Uitdagende opdrachten

- U5** Los exact op.
- | | |
|--|--|
| a $4 - {}^2\log(-x) = -2$ | d ${}^{10}\log(90 + {}^2\log(x)) = 2$ |
| b ${}^5\log(10 + \sqrt{x}) = 2$ | e ${}^2\log(4 + 4^x) = 4$ |
| c ${}^3\log({}^2\log(x)) = 4$ | f $({}^3\log(x + 2))^2 = 9$ |
- U6** Bij een exponentieel groeiproces is de groeifactor 2 per tijdseenheid.
 Dan is ${}^2\log(7)$, de oplossing van $2^t = 7$, de groeitijd die nodig is om een hoeveelheid 7 keer zo groot te maken bij groeifactor 2.
- Wat is in termen van groeitijden de betekenis van ${}^2\log(5)$?
 - Leg met behulp van groeitijden uit dat moet gelden
 ${}^2\log(7) + {}^2\log(5) = {}^2\log(35)$.
 - Leg met behulp van groeitijden uit dat moet gelden
 ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$.

7.4 Logaritmen berekenen

Je leert

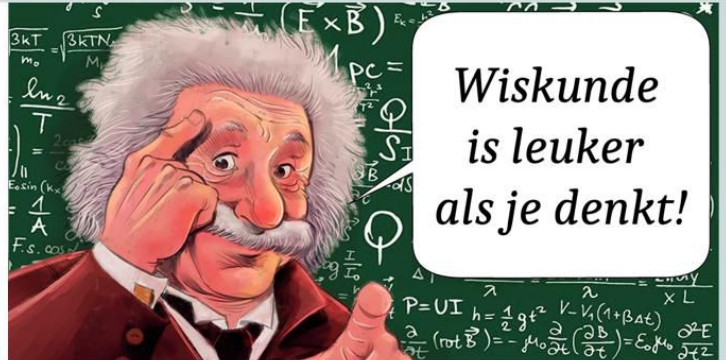
- hoe je logaritmen met je rekenmachine berekent
- hoe je een logaritme herschrijft naar een logaritme met een ander grondtal

Leerroutes

- ondersteunend: 27—28—029—30—31—32—33—034—34
- doorlopend: 27—28—29—30—31—32—33—34—35
- uitdagend: 27—28—29—30—31—33—34—35—U7

In $^g\log(a)$ kun je verschillende getallen voor a en g invullen. Dat geeft niet altijd een zinvolle uitdrukking. Zo zijn $^5\log(-5)$, $^3\log(0)$, $^{-2}\log(8)$ en $^1\log(4)$ niet zinvol.

- Leg uit waarom.



- 27**
- Zoek de log-toets op je rekenmachine en bereken $\log(2)$, $\log(5)$, $\log(10)$, $\log(25)$ en $\log(100)$.
 - Voor welke waarde van x is $\log(x) = 3$?
 - Waaruit blijkt dat 10 het grondtal van de log-toets op je rekenmachine is?
 - Bereken $\log(1\,000\,000)$ en $\log(0,0001)$. Verklaar de uitkomsten.

Theorie

Op rekenmachines zit een log-toets. Op de meeste rekenmachines wordt daarbij het grondtal niet vermeld. Het grondtal bij deze logaritme is 10. Als ergens $\log(\dots)$ staat, wordt $^{10}\log(\dots)$ bedoeld.

Voorbeeld 1

Bereken $\log(0,01)$ en $\log(50)$ indien nodig afgerond op twee decimalen en controleer je antwoorden.

Oplossing

Met de rekenmachine: $\log(0,01) = -2$;

controle $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$

$\log(50) \approx 1,70$; controle $10^{1,70} \approx 50$.

Voorbeeld 2

Los $10^{5x} = 17$ exact op en geef ook een benadering in twee decimalen.

Oplossing

$10^{5x} = 17$ dus $5x = ^{10}\log(17) = \log(17)$

dus $x = \frac{1}{5} \cdot \log(17)$

Op twee decimalen afgerond $x \approx 0,25$.

- 28**
- Bereken met de rekenmachine $\log(3)$, $\log\left(\frac{1}{1000}\right)$, $\log(1)$ en $\log(123\,456)$.
 - Los $10^{2x+1} = 500$ exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29** De exacte oplossing van $10^x = 5$ is $x = \log(5)$. Als je dit antwoord invult in de vergelijking $10^x = 5$ krijg je $10^{\log(5)} = 5$.
- Verklaar dat $10^{\log(7)} = 7$.
 - Geef, zonder de rekenmachine te gebruiken, de uitkomsten van $10^{\log(564)}$, $10^{\log(0,1)}$ en $10^{\log(0,08)}$.
 - Schrijf de getallen 14, 400 en 0,003 als een macht met grondtal 10. Geef de exponenten als exact getal en ook als benadering in twee decimalen.
- 30** De exacte oplossing van $7^x = 20$ is $x = {}^7\log(20)$. Je kunt de getallen 7 en 20 beide schrijven als een macht van 10. Zo is $7 = 10^{\log(7)}$ en is $20 = 10^{\log(20)}$.
- Laat zien dat uit de vergelijking $7^x = 20$ volgt dat $10^{x \cdot \log(7)} = 10^{\log(20)}$.
 - Druk de oplossing x uit in $\log(7)$ en $\log(20)$.
 - Waarom volgt uit deze berekening dat ${}^7\log(20) = \frac{\log(20)}{\log(7)}$?

Theorie

Met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ kun je elke logaritme met alleen de log-toets van je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld 1

Bereken ${}^7\log(4)$ en ${}^{\frac{1}{2}}\log(0,7)$ in twee decimalen.

Oplossing

$${}^7\log(4) = \frac{\log(4)}{\log(7)} \approx 0,71$$

$${}^{\frac{1}{2}}\log(0,7) = \frac{\log(0,7)}{\log(\frac{1}{2})} \approx 0,51$$

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $5^t = 23$ exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

Oplossing

$$5^t = 23 \text{ dus } t = {}^5\log(23)$$

Dit is het exacte antwoord. Een benadering in twee decimalen vind je met

$$t = \frac{\log(23)}{\log(5)} \approx 1,95.$$

7.4 Logaritmen berekenen

31 Bereken in twee decimalen.

- H** **a** ${}^9\log(35)$ **c** ${}^5\log(10)$
b ${}^{\frac{1}{3}}\log(128)$ **d** ${}^4\log\left(\frac{1}{13}\right)$

32 Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

- H** **a** $15^x = 2$ **d** $10^x = 5$
b $4^{2x} = 6$ **e** $10^x = 50$
c $3^x = \sqrt{5}$ **f** $10^x = 500$

33 De exacte oplossing van $7^x = 20$ is $x = {}^7\log(20)$.
 De getallen 7 en 20 zijn als machten van een willekeurig positief grondtal b ($b \neq 1$) te schrijven.

Zo is $7 = b^{{}^b\log(7)}$ en is $20 = b^{{}^b\log(20)}$.

Laat zien dat hieruit volgt $x = {}^7\log(20) = \frac{{}^b\log(20)}{{}^b\log(7)}$

Theorie

Voor het rekenen met logaritmen geldt de rekenregel

$${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)} \quad (b > 0 \text{ en } b \neq 1).$$

Met deze regel kun je elke logaritme herschrijven naar logaritmen met een ander grondtal.

Voorbeeld

Bereken ${}^9\log(27)$ door op grondtal 3 over te gaan.

Oplossing

$${}^9\log(27) = \frac{{}^3\log(27)}{{}^3\log(9)} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 034

- 34** **a** Vul in: ${}^8\log(128) = \frac{{}^2\log(\dots)}{{}^2\log(\dots)}$ en laat zien dat ${}^8\log(128) = 2\frac{1}{3}$.
b Bereken exact ${}^4\log(32)$ door op grondtal 2 over te gaan.
c Bereken exact ${}^{27}\log(9\sqrt{3})$ door op een ander grondtal over te gaan.
d Bereken exact ${}^{25}\log(125)$ door op een ander grondtal over te gaan.
e Bereken exact ${}^{\frac{1}{8}}\log(16)$ door op een ander grondtal over te gaan.

35 Bereken exact de waarde van a en van b in

$${}^3\log(18) \cdot {}^4\log(3) = a \cdot {}^2\log(b).$$

Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

029 a Controleer met je rekenmachine dat $\log(5) = 0,698\dots$

b Laat met je rekenmachine zien dat $10^{0,698\dots} = 5$.

c Blijkbaar is $10^{\log(5)} = 5$.

Ga met je rekenmachine na dat $10^{\log(247)} = 247$.

d Kies een positief getal a , niet gelijk aan 1, en ga na dat $10^{\log(a)} = a$.

e Met de regel uit opdracht d kun je elk getal schrijven als macht van 10. Zo is $7 = 10^{\log(7)}$.
Schrijf de getallen 29, 600 en 0,2 als macht van 10. Geef de exponenten als exact getal en ook als benadering in twee decimalen.

034 Op het blaadje wordt ${}^4\log(128)$ berekend door gebruik te

maken van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$

a In de berekening is gekozen om het grondtal van de logaritme van 4 te wijzigen in 2.

Leg uit waarom dat in dit geval handig is.

b Maak de berekening op het blaadje af.

c Om ${}^9\log(3\sqrt{3})$ met dezelfde regel te berekenen, moet je een grondtal b kiezen zodat ${}^b\log(3\sqrt{3})$ en ${}^b\log(9)$ zonder rekenmachine te berekenen zijn.

Leg uit dat $b = 3$ in dat geval een goede keuze is.

d Bereken ${}^9\log(3\sqrt{3}) = \frac{{}^3\log(3\sqrt{3})}{{}^3\log(9)} = \frac{\dots}{\dots}$

$$4 \log(128) = \frac{2 \log(128)}{2 \log(4)}$$
$$2 \log(128) = 7 \text{ want } 2^7 = 128$$
$$2 \log(4) = 2 \text{ want } 2^2 = 4$$
$$\text{dus } 4 \log(128) = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Uitdagende opdrachten

U7 Met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$ kun je

verschillende eigenschappen van logaritmen bewijzen. Daartoe moet je soms het grondtal b geschikt kiezen. Bewijs de volgende eigenschappen.

a ${}^2\log(a) \cdot {}^a\log(2) = 1$

b ${}_g\log(a) = \frac{1}{{}_a\log(g)}$

$$\mathbf{c} \quad \frac{2\log(a)}{8\log(a)} = 3$$

d $g\log(a^3) = 3 \cdot g\log(a)$

e $g\log(a^{-1}) = -g\log(a)$

7.5 Grafieken van logaritmische functies

Je leert

- grafieken van logaritmische functies onderzoeken
- hoe je het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepaalt

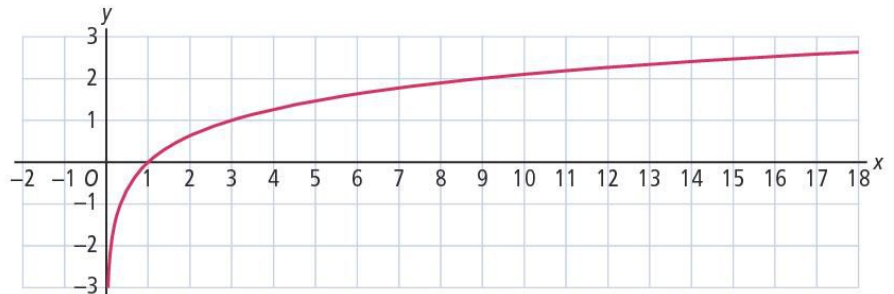
Leerroutes

- ondersteunend: 36—37—38—039—40—041—42
- doorlopend: 36—37—38—39—40—41—42
- uitdagend: 36—38—39—40—42—U8—U9

De grafiek hoort bij een functie

$$f(x) = {}^g\log(x).$$

- Hoe kun je met behulp van de grafiek nagaan welke waarde het grondtal g heeft?



36 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log(x)$.

a Vul in.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	...	...	...	...	...	...

b Vul in.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	...	...	...	...	...	...

- c** Schets de grafieken van f en g in één figuur.
d In welke lijn moet je de grafiek van f spiegelen om de grafiek van g te krijgen?
e Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van f en welke lijn is de asymptoot van de grafiek van g ?

37 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5^x$ en $k(x) = {}^5\log(x)$.

- a** Plot en schets de grafieken van f en k .
b Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van f met de y -as.
c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van k met de x -as.
d Geef het domein en het bereik van beide functies.
e Elk van deze grafieken heeft een asymptoot. Geef een vergelijking van elke asymptoot.

→ Instructie rekenmachine | Logaritmen

Theorie

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

functie: $f(x) = g^x$

$k(x) = {}^g\log(x)$

domein: $D_f = \mathbb{R}$

$D_k = \langle 0, \rightarrow \rangle$

bereik: $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

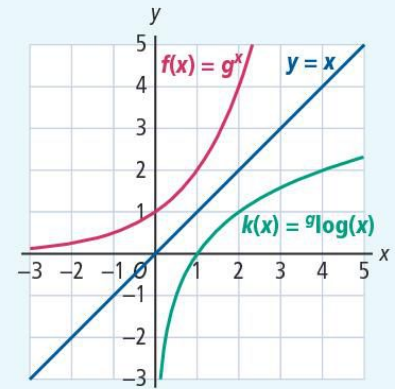
$B_k = \mathbb{R}$

asymptoot: $y = 0$

$x = 0$

snijpunt assen: $(0, 1)$

$(1, 0)$



38 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^{1,2}\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,8}\log(x)$.

- Plot de grafieken van f en g . Welk punt ligt op beide grafieken?
- De grafieken van h en k zijn de spiegelbeelden van de grafieken van f en g bij spiegelen in de lijn $y = x$. Stel de functievoorschriften op van h en k .
- Voor welke waarden van het grondtal g is de functie $l(x) = {}^g\log(x)$ stijgend en voor welke waarden van g is de functie dalend?

Theorie

Voor een logaritmische functie geldt, net als bij exponentiële functies, dat het grondtal g altijd positief is, maar niet gelijk aan 1.

Voor $0 < g < 1$ is de functie $f(x) = {}^g\log(x)$ dalend en voor $g > 1$ stijgend.

Voorbeeld

stijgend

$f(x) = {}^{1,2}\log(x)$

$g(x) = {}^{\frac{3}{2}}\log(x)$

$h(x) = {}^{\sqrt{2}}\log(x)$

dalend

$k(x) = {}^{0,9}\log(x)$

$l(x) = {}^{\frac{3}{4}}\log(x)$

$m(x) = {}^{0,01}\log(x)$

Ondersteunende route → maak opdracht 039

39 Beredeneer van elke functie of deze stijgend of dalend is.

H

a $f(x) = {}^2\log(5x)$

d $h(x) = {}^{0,5}\log(-x)$

b $f(x) = {}^2\log(-x)$

e $k(x) = 2 - {}^4\log(4 - x)$

c $g(x) = {}^{0,3}\log(x)$

f $p(x) = \frac{1}{\log(x)}$ met $x > 1$

7.5 Grafieken van logaritmische functies

- 40** Gegeven is de functie $g(x) = {}^2\log(x + 3)$.
- Bereken het nulpunt van g .
 - Hoe ontstaat de grafiek van g uit de grafiek van $f(x) = {}^2\log(x)$?
 - Bereken het domein van g .
 - Voor welke waarden van x is $g(x) < 0$?
 - Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van g ?
 - De grafiek van g wordt gespiegeld in de y -as en vervolgens 2 naar rechts verschoven.
Geef het domein, het nulpunt van de functie en de vergelijking van de asymptoot bij de beeldgrafiek.

Theorie

Het domein van een functie $f(x) = {}^s\log(x + b)$ volgt uit $x + b > 0$, dus het domein is $x > -b$ of $\langle -b, \rightarrow \rangle$.
De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = -b$.
Het nulpunt van f volgt uit $x + b = 1$, dus het nulpunt is $x = 1 - b$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2 - {}^3\log(4x + 8)$.
Geef het domein, het nulpunt en de verticale asymptoot.

Oplossing

Het domein volgt uit $4x + 8 > 0$, dus is het domein $x > -2$.
Uit $2 - {}^3\log(4x + 8) = 0$ volgt ${}^3\log(4x + 8) = 2$. Dit geeft $4x + 8 = 3^2$.

Het nulpunt is $x = \frac{1}{4}$.

Een verticale asymptoot volgt uit $4x + 8 = 0$, dus $x = -2$.

Ondersteunende route → maak opdracht 041

- 41** Geef het domein, het nulpunt en een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

H

- $f(x) = {}^3\log(x - 5)$
- $k(x) = {}^8\log(21 - 6x)$
- $h(x) = {}^2\log(2x + 9) - 11$
- $g(x) = 4 + {}^{0,5}\log(x - 7)$
- $m(x) = -3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(-5x - 10)$
- $n(x) = x \cdot \log(5x - 1)$

- 42** Gegeven is de functie $h(x) = -7 + {}^3\log(x^2 - 5)$.

H

- Plot en schets de grafiek van h .
- Geef het domein van h .
- Stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van h .
- Bereken de nulpunten van h .

Uitdagende route → maak opdracht U8 en U9

Ondersteunende opdrachten

- 039** Op het blaadje staat een begin van een redenering waarom de functie $f(x) = {}^2\log(5 - x)$ dalend is.
- Vul bij elke stap op de puntjes het woord *af* of *toe* in.
 - De functie $f(x) = {}^{0.5}\log(x)$ is dalend, want het grondtal g is kleiner dan 1.
Leg uit hoe stap 2 op het blaadje moet worden aangepast als je het grondtal 2 in 0,5 verandert.
 - Schrijf de redenering van stap 3 op voor $f(x) = {}^{0.5}\log(5 - x)$.

Beredeneer van elke functie of de functie stijgend of dalend is.

- $f(x) = {}^3\log(x + 6)$
- $h(x) = {}^{1.1}\log(-x) + 8$
- $f(x) = {}^{0.5}\log(-x)$
- $k(x) = 2 - {}^7\log(4 + x)$
- $g(x) = {}^4\log(2x)$
- $p(x) = \frac{5}{\log(x)}$ met $x > 1$

1	$g(x) = 5 - x$ is dalend, want als x toeneemt, neemt $5 - x$...
2	$f(p) = {}^2\log(p)$ is stijgend, dus als p toeneemt, neemt ${}^2\log(p)$... en als p afneemt, neemt ${}^2\log(p)$...
3	$f(x) = {}^2\log(5 - x)$ is dalend, want als x toeneemt, neemt $5 - x$... en dus neemt ${}^2\log(5 - x)$...

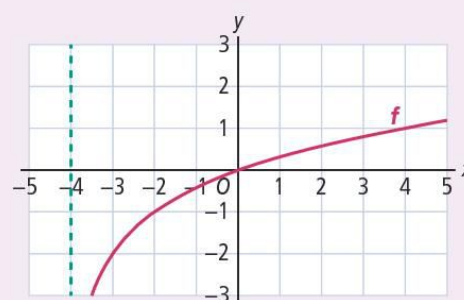
- 041** Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(3x + 6)$.
- Voor het domein van f moet gelden $3x + 6 > 0$. Geef het domein van f .
 - Voor het nulpunt van f geldt ${}^3\log(3x + 6) = 0$. Bereken het nulpunt van f .
 - De verticale asymptoot van de grafiek volgt uit $3x + 6 = 0$. Geef een vergelijking van de verticale asymptoot.

Geef van de volgende functies het domein, het nulpunt en de asymptoot van de grafiek.

- $g(x) = {}^5\log(8 - \frac{1}{2}x)$
- $k(x) = 2 + {}^5\log(25x)$
- $h(x) = {}^2\log(2x - 4)$
- $l(x) = 4 - {}^{0.5}\log(x - 6)$

Uitdagende opdrachten

- U8** De grafiek hoort bij een functie van de vorm $f(x) = p + {}^2\log(x + q)$. Van de functie is gegeven dat de lijn $x = -4$ de asymptoot is van de grafiek en dat de grafiek door de oorsprong gaat. Onderzoek met behulp van een berekening of het punt $(12, 2)$ op de grafiek van f ligt.



- U9** Geef van elke functie het domein, de nulpunten en vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek.
- $f(x) = \log(9x - x^2)$
 - $h(x) = \log(x + 3) - \log(3 - x)$

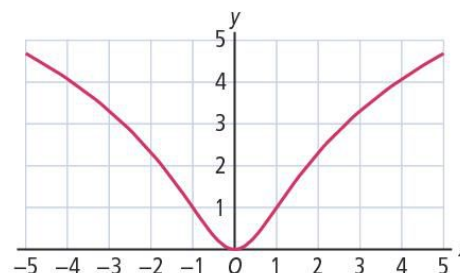
7.6 Gemengde opdrachten

- 43** Hieronder staan enkele herleidingen met machten. Sommige zijn goed, sommige zijn fout.
Leg uit waarom een herleiding goed is of fout is en verbeter de foute herleidingen.

a $4 \cdot 2^x = 8^x$	f $4^x + 2^x = 6^x$
b $4 \cdot 2^x = 2^{x+2}$	g $4 + 2^x = 2^{2+x}$
c $4^x \cdot 2^x = 8^x$	h $4^x \cdot 2^x = 2^{2x} \cdot 2^x = 2^{2x^2}$
d $8^x \cdot 2^x = 2^{3x}$	i $4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{2x}$
e $\frac{4}{2^x} = 2^x$	j $\frac{4^x}{2^x} = 2^x$

- 44** **a** Bewijs dat de functies $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ en $g(x) = 2^{2-2x}$ hetzelfde zijn.
b Herleid $f(x) = 4^{0,5(x+1)}$ tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
c Herleid $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$ tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ met $g > 1$.

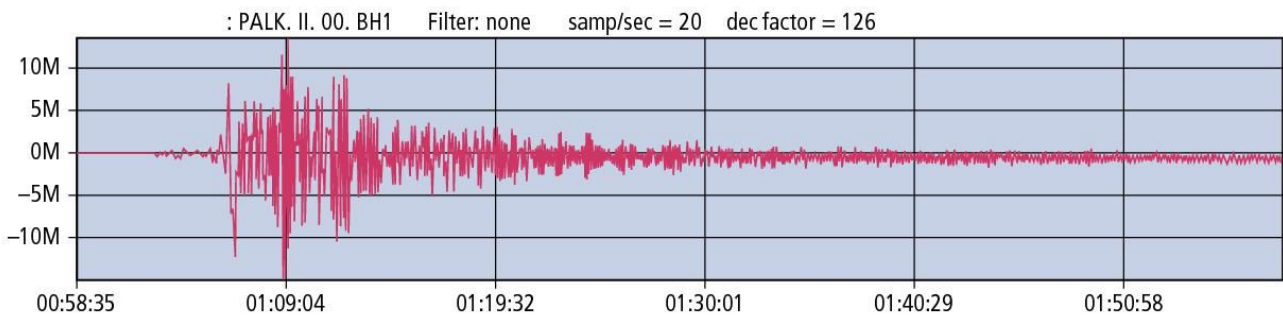
- 45** Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = 2 \log(x^2 + 1)$.
a Geef het domein en het bereik van f .
b Verklaar dat de oorsprong de top van de grafiek van f is.
c Heeft de grafiek van f asymptoten? Zo ja, welke? Zo nee, waarom niet?
d Los exact op $f(x) = 6$.



- 46** Gegeven is de functie $f(x) = \log(x^2 - 6x + 8)$.
a Plot en schets de grafiek van f .
b Geef het domein en het bereik van f .
c Geef de asymptoten van de grafiek van f .
d Los exact op $f(x) = 0$.

- 47** Los exact op.

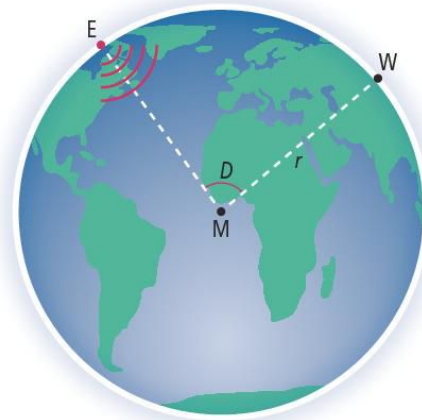
a $16 \cdot 2^{x-6} = \sqrt{2}$	d ${}^4\log(2x) + {}^4\log(2x) = 6$
b $15 \cdot 3^{x+2} + 18 = 93$	e $2 - {}^4\log(x+3) = -\frac{1}{2}$
c $1 - {}^2\log(4x+1) = -4$	f ${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 - 2x) = -3$



- 48** Aardbevingen worden geregistreerd met een seismograaf, die de aardbevingsgolven weergeeft in een seismogram. De kracht van een aardbeving wordt meestal uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter. Dat getal R bereken je met $R = \log(U) + 1,66 \cdot \log(D) + 3,08$. Hierin is U de grootste uitwijking in mm in het seismogram en is D de grootte van de hoek tussen MW en ME in graden. Neem voor de omtrek van de aarde 40 000 km. De schaal van Richter is zo ontworpen, dat je nul krijgt bij een uitwijking van 0,001 mm op 100 km van het epicentrum.

- Bereken de hoek D die hoort bij een afstand van 100 km langs het aardoppervlak. Controleer daarna met een berekening dat een uitwijking van 0,001 mm ongeveer $R = 0$ oplevert.
- In 2011 vond er een aardbeving plaats met een kracht van 9,0 op de schaal van Richter. Het epicentrum van deze aardbeving lag in Japan. Bereken de uitwijking in Nederland. De hoek tussen MW en ME is in dit geval ongeveer 84° .

E : plaats epicentrum
W : plaats waarnemingsstation
M : middelpunt aarde



- 49** Leerlingen van klas 4B onderzoeken of er bij de uitkomsten in de tabel een passende formule te vinden is.

- Teken een grafiek bij de uitkomsten in de tabel.
- Waarom verwerpen de leerlingen direct lineaire formules en wortelformules?
- Onderzoek of één van de volgende formules bij benadering wel voldoet: $N = b + t^a$ of $N = b \cdot g^t$.

t	N
0	3
1	4
2	7
3	11
4	17
5	25
6	35
7	52
8	72
9	100

Theorie

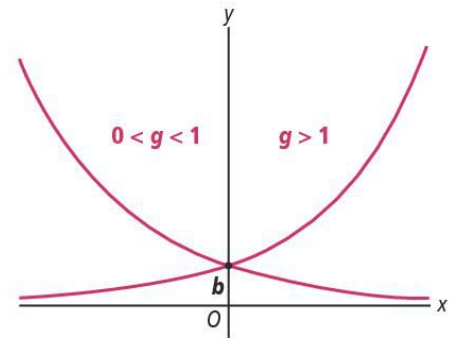
Exponentiële functie

Een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ met $b > 0$ is stijgend als de groefactor $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.

De grafiek gaat door het punt $(0, b)$ op de verticale as.

De grafiek heeft de x -as ($y = 0$) als horizontale asymptoot.

Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.



S1 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 \cdot 0,85^x$, $g(x) = 2,1^x$,

$h(x) = 10 \cdot 1,7^x$ en $k(x) = -12 \cdot 0,01^x$.

- Welke van deze functies zijn stijgend?
- Van welke van deze functies gaat de grafiek door het punt $(0, 1)$?
- Geef het domein en het bereik van de functies f en k .

Theorie

Logaritme

De exacte oplossing van $g^x = a$ is $x = {}^g\log(a)$, de logaritme van a voor het grondtal g .

Omgekeerd volgt uit $x = {}^g\log(a)$ dat $g^x = a$.

Dus geldt $g^{{}^g\log(a)} = a$.

Hierin is $a > 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

tot de macht

$$g^{{}^g\log(a)} = a$$

is

- S2
- Van welke vergelijking is ${}^3\log(7)$ de exacte oplossing?
 - Geef de exacte oplossing van de vergelijking $2^x = 18$.

Theorie

Grafieken van logaritmische functies

De grafieken van $f(x) = g^x$ en $k(x) = {}^g\log(x)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

functie: $f(x) = g^x$

$k(x) = {}^g\log(x)$

domein: $D_f = \mathbb{R}$

$D_k = \langle 0, \rightarrow \rangle$

bereik: $B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

$B_k = \mathbb{R}$

asymptoot: $y = 0$

$x = 0$

snijpunt assen: $(0, 1)$

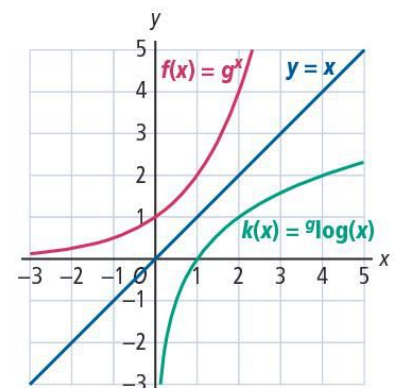
$(1, 0)$

stijgend als $g > 1$

stijgend als $g > 1$

dalend als $0 < g < 1$

dalend als $0 < g < 1$



- S3** Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^2\log(x)$ en $g(x) = {}^{0,5}\log(x)$.
- Plot de grafieken van f en g en geef de coördinaten van het snijpunt van deze grafieken.
 - Spiegelen van de grafieken van f en g in de lijn $y = x$ geeft de grafieken van h en k .
Geef de functievoorschriften van h en k .
 - Geef de asymptoten van de grafieken van f , g , h en k .

Vaardigheid

Je kunt een functievoorschrift aanpassen na een transformatie.

Bij een transformatie van de grafiek van een functie f ontstaat een nieuwe grafiek, de beeldgrafiek. Bij de beeldgrafiek kun je het functievoorschrift $g(x)$ opstellen.

transformatie	resultaat
- verschuiving d omhoog	$g(x) = f(x) + d$
- verschuiving c naar rechts	$g(x) = f(x - c)$
- vermenigvuldiging met a ten opzichte van de x -as	$g(x) = a \cdot f(x)$
- spiegeling in de x -as	$g(x) = -f(x)$
- spiegeling in de y -as	$g(x) = f(-x)$

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = 1,5^{2x-3}$ wordt 2 naar rechts verschoven, vervolgens met 3 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as en ten slotte gespiegeld in de y -as.

Stel het functievoorschrift $g(x)$ op van de beeldgrafiek.

Oplossing

$f(x) = 1,5^{2x-3}$	
$h(x) = 1,5^{2(x-2)-3} = 1,5^{2x-7}$	2 naar rechts verschoven
$k(x) = 3 \cdot 1,5^{2x-7}$	met 3 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as
$g(x) = 3 \cdot 1,5^{-2x-7}$	gespiegeld in de y -as

- S4** Gegeven is de functie $f(x) = 3 \cdot 2^{3x}$.
Stel het functievoorschrift op van de beeldgrafiek na de volgende transformaties.
- Vermenigvuldigen met factor 2 ten opzichte van de x -as.
 - Spiegelen in de x -as en daarna 3 omlaag verschuiven.
 - 3 omlaag verschuiven en daarna spiegelen in de x -as.
 - Vermenigvuldigen met factor -4 ten opzichte van de x -as en daarna de spiegelen in de y -as.
 - Spiegelen in de y -as en daarna 4 naar links verschuiven.

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt een exponentiële vergelijking exact oplossen, zo nodig met logaritmen.

- 1 Deel zo mogelijk linker- en rechterkant van de vergelijking door hetzelfde getal.
- 2 Schrijf de linker- en rechterkant van de vergelijking als machten van hetzelfde grondtal.
- 3 Stel de exponenten aan elkaar gelijk en los de hierdoor ontstane vergelijking op.
Als stap 2 niet mogelijk is, gebruik je een logaritme om de vergelijking exact op te lossen.

Voorbeeld 1

Los exact op $\frac{2}{9} \cdot 3^{2t} = 162$.

Oplossing

- 1 $3^{2t} = 162 : \frac{2}{9} = 729$
- 2 $3^{2t} = 3^6$
- 3 $2t = 6$ dus $t = 3$.

Voorbeeld 2

Los exact op $2 \cdot 3^{t+1} = 28$.

Oplossing

- 1 $3^{t+1} = 14$
 $t+1 = {}^3\log(14)$
 $t = {}^3\log(14) - 1$

S5 Los exact op.

- a** $2^{3t} = 4 \cdot 2^{3+t}$ **c** $6 \cdot 5^{t+8} = 36$
b $4^{2t-1} = 32^t$ **d** $\frac{1}{5} \cdot 25^{3t} = 10$

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen met logaritmen exact oplossen.

Bij het exact oplossen van vergelijkingen met logaritmen gebruik je de regel: 'Uit ${}^g\log(a) = b$ volgt $a = g^b$ '.

Voorbeeld

Los exact op $\frac{1}{2}\log(6-2x) = -2$.

Oplossing

Uit $\frac{1}{2}\log(6-2x) = -2$ volgt $6-2x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

$6-2x = 4$ dus $x = 1$.

S6 Los exact op.

- a** ${}^8\log(x) = 2$ **c** ${}^3\log(4x) = 4$
b $\frac{1}{2}\log(x+9) = 3$ **d** ${}^5\log(5x-100) = 3$

Vaardigheid

Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.

Met behulp van de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ kun je elke logaritme met alleen de log-toets van je rekenmachine berekenen.

Voorbeeld

Bereken in drie decimalen ${}^7\log(845)$.

Oplossing

$${}^7\log(845) = \frac{\log(845)}{\log(7)} \approx 3,463$$

S7 Bereken in drie decimalen.

- a** ${}^5\log(90)$ **c** ${}^{12}\log(0,01)$
b ${}^{10}\log(12\,480)$ **d** ${}^{0,78}\log(2)$

Vaardigheid

Je kunt een logaritme herschrijven naar een logaritme met een ander grondtal.

Met de rekenregel ${}^g\log(a) = \frac{{}^b\log(a)}{{}^b\log(g)}$ ($b > 0$ en $b \neq 1$)

kun je elke logaritme herschrijven naar logaritmen met een ander grondtal.

Voorbeeld

Bereken exact ${}^8\log(64\sqrt{2})$.

Oplossing

$${}^8\log(64\sqrt{2}) = \frac{{}^2\log(2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}})}{{}^2\log(8)} = \frac{6\frac{1}{2}}{3} = 2\frac{1}{6}$$

S8 Bereken exact zonder gebruik te maken van je rekenmachine.

- a** ${}^4\log(32)$ **c** ${}^{\frac{1}{4}}\log(32)$
b ${}^9\log(243)$ **d** ${}^{16}\log(1024)$

Vaardigheid

Je kunt het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepalen.

Het domein van een functie $f(x) = {}^g\log(x + b)$ volgt uit $x + b > 0$, dus het domein is $x > -b$ of $\langle -b, \rightarrow \rangle$.

Het bereik van f is $\mathbb{R}$.

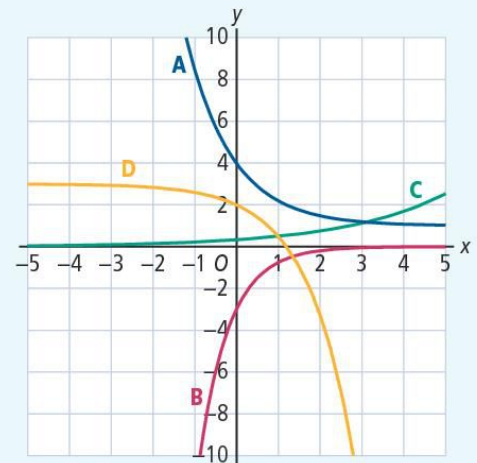
De verticale asymptoot heeft vergelijking $x = -b$.

Het nulpunt van f volgt uit $x + b = 1$, dus is het nulpunt $x = 1 - b$.

S9 Bepaal van elke functie het domein, het bereik en het nulpunt en geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.

- a** $f(x) = {}^2\log(2 - x)$ **c** $h(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(7 - 2x) + 1$
b $g(x) = 2 - {}^3\log(x)$ **d** $k(x) = 3 - {}^6\log(3x + 3)$

- T1** Getekend zijn de grafieken van $f(x) = -2,5^x + 3$, $g(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ en $j(x) = 3 \cdot 0,4^x + 1$.
- Welke van deze functies zijn stijgend?
 - Welke grafiek hoort bij welke functie?
 - Geef vergelijkingen van de asymptoten van deze grafieken.
 - Bereken van elk van de functies de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de beide assen.
 - De grafiek van f wordt eerst 4 omlaag verschoven en daarna vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met $-\frac{1}{2}$. Het resultaat wordt daarna gespiegeld in de y -as. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.



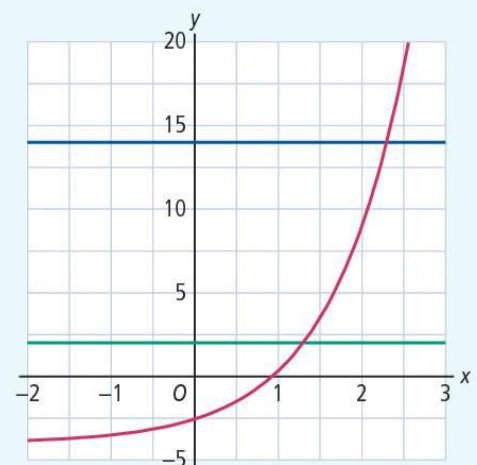
- T2** Een koud voorwerp, bijvoorbeeld een blikje frisdrank dat in de koelkast heeft gestaan, zal langzamerhand opwarmen. Ga uit van een blikje met temperatuur van 5°C , terwijl de omgevingstemperatuur 25°C is. Het temperatuurverschil neemt per minuut met 7,5% af.
- Bereken de temperatuur van het blikje na 1 minuut, na 5 minuten en na 10 minuten.
 - Stel een formule op voor de temperatuur T in $^\circ\text{C}$ na t minuten.
 - Na hoeveel minuten is de temperatuur van 10°C bereikt?

- T3** Beredeneer welke van deze logaritmen gelijk zijn aan een negatief getal: $\frac{1}{2}\log(2)$, $2\log(4)$, $\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{4}\right)$, $2\log(1)$, $2\log\left(\frac{1}{5}\right)$, $5\log\left(\frac{1}{3}\right)$, $3\log(0,9)$

- T4** Bereken exact zonder gebruik te maken van je rekenmachine.

- | | |
|--|---|
| a $3\log(\sqrt{3})$ | d $\frac{1}{3}\log(1)$ |
| b $2\log\left(\frac{1}{8}\right)$ | e $16\log\left(\frac{1}{32}\right)$ |
| c $\frac{1}{5}\log(125)$ | f $\sqrt{125}\log\left(\frac{1}{5}\right)$ |

- T5** Getekend zijn de grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,3-x} - 4$ en de lijnen met vergelijkingen $y = 2$ en $y = 14$.
- Bereken exact de x -coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met elk van deze lijnen.
 - Los exact op $2 < f(x) < 14$.
 - Los op $f(x) \geq 50$.



T6 Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

a $3^{4k} = 5$

d $\left(\frac{1}{5}\right)^p = 3\sqrt{2}$

b $\frac{1}{3} \cdot 2^{2x} = 42\frac{2}{3}$

e $\sqrt{3^x} \geq \frac{1}{27}$

c $3^{-x} = 81\sqrt{27}$

f $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq 4^{3t}$

T7 Beredeneer van de functies of ze stijgend of dalend zijn.

a $f(x) = \frac{1}{3}\log(6 - 3x)$

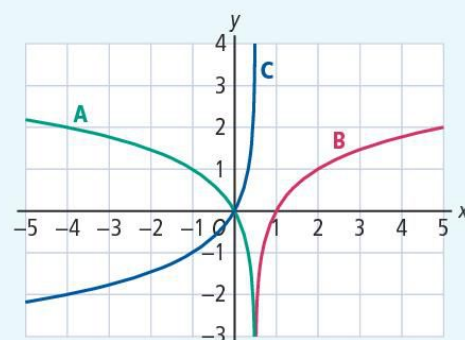
b $g(x) = {}^2\log\left(\frac{1}{x}\right)$

c $h(x) = \frac{1}{\log(-x)}$

T8 Getekend zijn de grafieken van de functies

$f(x) = {}^3\log(2x - 1)$, $g(x) = {}^3\log(1 - 2x)$ en $h(x) = \frac{1}{3}\log(1 - 2x)$.

- Waarom hebben deze drie grafieken dezelfde verticale asymptoot?
- Volgens de tekening hebben twee van de functies hetzelfde domein. Welke twee functies zijn dat?
- Geef aan welke grafiek bij welke functie hoort.



T9 Los exact op.

a ${}^3\log(3x + 3) = 3$

d ${}^3\log(3x^2 + 4x) = 0$

b ${}^2\log(2x - 6) = 4$

e ${}^2\log(3x - 4) = 7$

c $3 - \log(x + 2) = 2\frac{1}{3}$

f $\frac{1}{2}\log(8 - x^2) = -1$

T10 Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log\left(\frac{1}{3}x + 4\right)$.

- Geef het domein van deze functie.
- Geef een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f .
- Plot de grafiek van f en los exact op $f(x) \leq 2$.

Je kunt een functievoorschrift aanpassen na een transformatie.

- E1** Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot 5^x$.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek na
- een verschuiving 2 omhoog en daarna een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x -as.
 - een spiegeling in de x -as en daarna een verschuiving 3 naar links.
 - spiegeling in de x -as en daarna een spiegeling in de y -as.

Je kunt een exponentiële vergelijking exact oplossen, zo nodig met logaritmen.

- E2** Los exact op.
- | | |
|----------------------------------|--|
| a $9^t = 3 \cdot 3^{2+t}$ | c $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-t} = 2^{-t+2}$ |
| b $4^{t-1} = 8^t$ | d $45 \cdot 3^{t+7} = 90$ |

Je kunt vergelijkingen met logaritmen exact oplossen.

- E3** Los exact op.
- | | |
|-------------------------------|---|
| a $\log(3 - 2x) = -1$ | c $\frac{1}{2}\log(2x) = 3$ |
| b $^3\log(6 + 3x) = 4$ | d $\frac{1}{4}\log(5x - 1) = -2$ |

Je kunt logaritmen met je rekenmachine berekenen.

- E4** Bereken in drie decimalen.
- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| a $^{100}\log(175)$ | c $^{0,3}\log(23,78)$ |
| b $^{1,5}\log(75)$ | d $\frac{1}{4}\log(15)$ |

Je kunt een logaritme herschrijven naar een logaritme met een ander grondtal.

- E5** Bereken exact zonder gebruik te maken van je rekenmachine.
- | | |
|----------------------------------|---------------------------|
| a $^5\log(125\sqrt{5})$ | c $^{25}\log(125)$ |
| b $^{\frac{1}{3}}\log(9)$ | d $^{32}\log(64)$ |

Je kunt het domein, bereik, nulpunt en asymptoten bij logaritmische functies bepalen.

- E6** Bepaal van elke functie het domein, het bereik en de nulpunten en geef een vergelijking van de asymptoot van de grafiek.
- | | |
|---|-----------------------------------|
| a $f(x) = ^3\log(12 - 3x)$ | c $h(x) = ^5\log(-5x)$ |
| b $g(x) = 3 + ^{\frac{1}{2}}\log(4x - 28)$ | d $k(x) = \log(x^2 - 100)$ |

E7 Los exact op. Geef ook een benadering in twee decimalen.

a $3^{1-2t} = 15$

c $(2,7)^{3t+2} = 127$

b $\left(\frac{1}{3}\right)^{3t} = 26$

d $\left(\frac{3}{2^t}\right)^3 = 64$

E8 Los exact op.

a $5^{2t} = 125^{1-t}$

d $16 \cdot 0,5^x \geq 0,125$

b $32 \cdot 2^t = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

e $0,25^{t-3} < 7$

c $3^{2x+3} = 44$

f $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{16}$

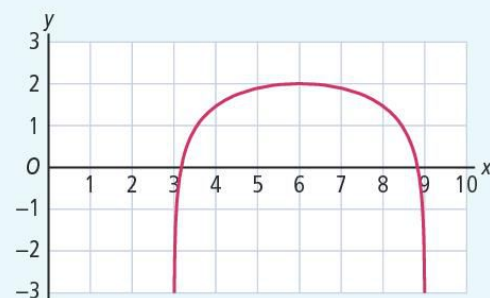
E9 Gegeven is de functie $f(x) = {}^3\log(-x^2 + 12x - 27)$.

a Bereken exact het domein van f .

b Bereken exact de nulpunten van f .

c Bereken exact de maximale waarde die de functie $g(x) = -x^2 + 12x - 27$ heeft.

d Bereken exact het maximum van f .



E10 Beredeneer van de functies of ze stijgend of dalend zijn.

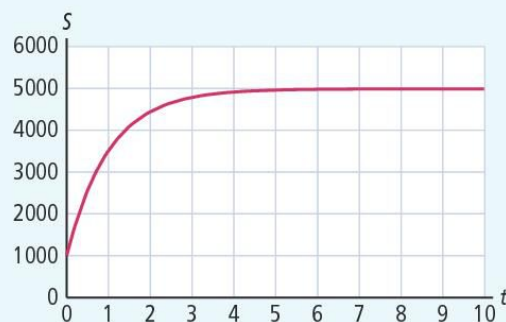
a $f(x) = {}^{1/3}\log(1 - 3x)$

b $g(x) = 25 - {}^4\log(x - 8)$

E11 De verkoop van een nieuw product neemt bij aanvang vaak snel toe, maar na een zekere periode stabiliseert de verkoop. De grafiek geeft de verkoop van een nieuw product weer. De bijbehorende formule heeft de vorm $S = b - a \cdot 2,7^{-t}$, met t in maanden.

a Onderzoek welke waarden a en b hebben.

b Bereken na hoeveel maanden er 4000 producten werden verkocht.



E12 Gegeven zijn de functies $f(x) = (\sqrt{5})^{\frac{1}{2}x}$ en $g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 5^{1-x}$.

a Los exact op $f(x) = g(x)$.

b Voor welke waarden van x geldt $f(x) \leq g(x)$?