

7 Meetkunde met coördinaten

24 a $k: \frac{x}{2p+1} + \frac{y}{5} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{2p+1} + \frac{3}{5} = 1 \\ \frac{2}{2p+1} = \frac{2}{5} \\ 2p+1 = 5 \\ 2p = 4 \\ p = 2 \\ \text{vold.} \end{array} \right.$

b $rc_k = \frac{0-5}{2p+1-0} = \frac{-5}{2p+1}$
 $k \parallel m$, dus $rc_k = rc_m$
 $\frac{-5}{2p+1} = -2$
 $-2(2p+1) = -5$
 $-4p-2 = -5$
 $-4p = -3$
 $p = \frac{3}{4}$

$rc_l = \frac{q+2-0}{0-2} = \frac{q+2}{-2}$
 $l \parallel m$, dus $rc_l = rc_m$
 $\frac{q+2}{-2} = -2$
 $q+2 = 4$
 $q = 2$

Dus voor $p = \frac{3}{4} \wedge q = 2$ zijn de lijnen k , l en m evenwijdig.

c De lijnen k en l vallen samen als k door het punt $(2, 0)$ en l door het punt $(0, 5)$ gaat.

Dus er moet gelden $2p+1 = 2$ en $q+2 = 5$. Hieruit volgt $p = \frac{1}{2}$ en $q = 3$.

Dus voor $p = \frac{1}{2} \wedge q = 3$ vallen de lijnen k en l samen.

25 a Stel $k: y = ax + b$.
 $B(1, 6)$ op k geeft $a + b = 6$, dus $b = -a + 6$.
 $k: y = ax - a + 6$ oftewel $k: ax - y - a + 6 = 0$

$d(A, k) = 2$ geeft $\frac{|-3a - 4 - a + 6|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2$
 $|-4a + 2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$
 $16a^2 - 16a + 4 = 4a^2 + 4$
 $12a^2 - 16a = 0$
 $4a(3a - 4) = 0$
 $4a = 0 \vee 3a = 4$
 $a = 0 \vee a = 1\frac{1}{3}$

$a = 0$ geeft $b = 6$, dus $k_1: y = 6$.

$a = 1\frac{1}{3}$ geeft $b = -1\frac{1}{3} + 6 = 4\frac{2}{3}$, dus $k_2: y = 1\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$.

b Stel $AB: y = ax + b$ met $a = \frac{6-4}{1-3} = \frac{1}{2}$.

$y = \frac{1}{2}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 1 + b = 6 \\ b = 5\frac{1}{2} \end{array} \right.$
 door $B(1, 6)$

Dus $AB: y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ oftewel $AB: x - 2y = -11$.

$l \parallel AB$, dus $l: x - 2y = c$.

$d(B, l) = 2\sqrt{5}$ geeft $\frac{|1 - 2 \cdot 6 - c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5}$
 $\frac{|-11 - c|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$
 $|-11 - c| = 10$
 $-11 - c = 10 \vee -11 - c = -10$
 $c = -21 \vee c = -1$

Dus $l_1: x - 2y = -21$ en $l_2: x - 2y = -1$.

- c Lijnen n evenwijdig m en op afstand 5 van m .

$$n: 3x + 4y = c$$

$D(0, 2)$ is een punt op m .

$$d(D, n) = 5 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

$$\frac{|8 - c|}{\sqrt{25}} = 5$$

$$\frac{|8 - c|}{5} = 5$$

$$|8 - c| = 25$$

$$8 - c = 25 \vee 8 - c = -25$$

$$c = -17 \vee c = 33$$

$$n_1: 3x + 4y = -17 \text{ snijden met } AB: y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \text{ geeft } 3x + 4(\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}) = -17$$

$$3x + 2x + 22 = -17$$

$$5x = -39$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -7\frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \end{array} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot -7\frac{4}{5} + 5\frac{1}{2} = 1\frac{3}{5}$$

$$n_2: 3x + 4y = 33 \text{ snijden met } AB: y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \text{ geeft } 3x + 4(\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}) = 33$$

$$3x + 2x + 22 = 33$$

$$5x = 11$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2\frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \end{array} \right\} y = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{5} + 5\frac{1}{2} = 6\frac{3}{5}$$

De punten zijn $(-7\frac{4}{5}, 1\frac{3}{5})$ en $(2\frac{1}{5}, 6\frac{3}{5})$.

d $rc_{AC} = \frac{-1 - 4}{0 - -3} = -1\frac{2}{3}$

$$\tan(\alpha) = rc_{AB} = \frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 26,56\dots^\circ$$

$$\tan(\beta) = rc_{AC} = -1\frac{2}{3} \text{ geeft } \beta = -59,03\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 26,56\dots^\circ - -59,03\dots^\circ \approx 85,6^\circ$$

Dus $\angle(AB, AC) \approx 85,6^\circ$.

26 a $p = -3$ geeft $k: y = -3x + 1$

$$\tan(\alpha) = rc_k = -3 \text{ geeft } \alpha = -71,56\dots^\circ$$

$$l: 2x + y = 3 \text{ oftewel } l: y = -2x + 3$$

$$\tan(\beta) = rc_l = -2 \text{ geeft } \beta = -63,43\dots^\circ$$

$$\beta - \alpha = -63,43\dots^\circ - -71,56\dots^\circ \approx 8,1^\circ$$

Dus $\angle(k, l) \approx 8,1^\circ$.

b $-63,43\dots^\circ + 15^\circ = -48,43\dots^\circ$

$$p = rc_k = \tan(-48,43\dots^\circ) \approx -1,128$$

$$-63,43\dots^\circ - 15^\circ = -78,43\dots^\circ$$

$$p = rc_k = \tan(-78,43\dots^\circ) \approx -4,887$$

Bladzijde 178

27 a $d(A, B) = \sqrt{(5p - p)^2 + (2p + 3 - 5)^2} = \sqrt{(4p)^2 + (2p - 2)^2} = \sqrt{16p^2 + 4p^2 - 8p + 4} = \sqrt{20p^2 - 8p + 4}$

b $d(A, B) = 4\sqrt{29}$ geeft $\sqrt{20p^2 - 8p + 4} = 4\sqrt{29}$

$$20p^2 - 8p + 4 = 464$$

$$20p^2 - 8p - 460 = 0$$

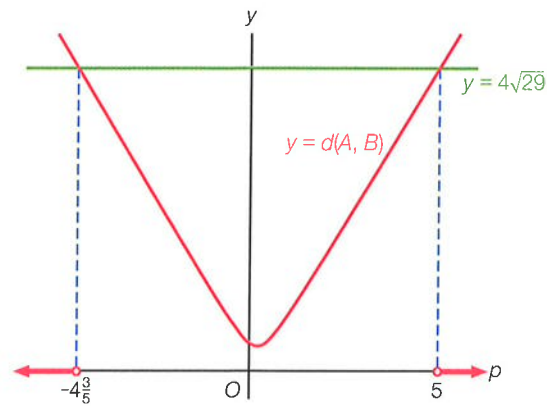
$$5p^2 - 2p - 115 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -115 = 2304$$

$$p = \frac{2 + 48}{10} = 5 \vee p = \frac{2 - 48}{10} = -4\frac{3}{5}$$

vold.

vold.



$d(A, B) > 4\sqrt{29}$ geeft $p < -4\frac{3}{5} \vee p > 5$

c $M(\frac{1}{2}(p+5p), \frac{1}{2}(5+2p+3)) = M(3p, p+4)$

Van $c: x^2 + y^2 = 16$ is het middelpunt $O(0, 0)$ en $r = 4$.

M op afstand 8 van c , dus M op de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 12.

M op $x^2 + y^2 = 144$ geeft $(3p)^2 + (p+4)^2 = 144$

$$9p^2 + p^2 + 8p + 16 = 144$$

$$10p^2 + 8p - 128 = 0$$

$$5p^2 + 4p - 64 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot -64 = 1296$$

$$p = \frac{-4 \pm 36}{10} \vee p = \frac{-4 \pm 36}{10}$$

$$p = 3\frac{1}{5} \vee p = -4$$

d AB is een middellijn, dus van d is het middelpunt $M(3p, p+4)$.

$$\text{De straal is } d(A, M) = \sqrt{(3p-p)^2 + (p+4-5)^2} = \sqrt{(2p)^2 + (p-1)^2} = \sqrt{4p^2 + p^2 - 2p + 1} = \sqrt{5p^2 - 2p + 1}.$$

$$\text{Dus } d: (x-3p)^2 + (y-p-4)^2 = 5p^2 - 2p + 1.$$

$$d \text{ door de oorsprong geeft } (-3p)^2 + (-p-4)^2 = 5p^2 - 2p + 1$$

$$9p^2 + p^2 + 8p + 16 = 5p^2 - 2p + 1$$

$$5p^2 + 10p + 15 = 0$$

$$p^2 + 2p + 3 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$$

geen opl.

Dus er is geen waarde van p waarvoor d door de oorsprong gaat.

28 a $r = d(M, k) = \frac{|3 \cdot 8 - 4 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

$$\text{Dus } c: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

b Stel $l: 3x - 4y = c$.

$P(2, 0)$ is een punt op k .

$$d(P, l) = 3 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - c|}{5} = 3$$

$$|6 - c| = 15$$

$$6 - c = 15 \vee 6 - c = -15$$

$$c = -9 \vee c = 21$$

Dus $l_1: 3x - 4y = -9$ en $l_2: 3x - 4y = 21$.

c Stel een punt op m is $A(a, a)$.

$$d(A, k) = 4 \text{ geeft } \frac{|3a - 4a - 6|}{5} = 4$$

$$|-a - 6| = 20$$

$$-a - 6 = 20 \vee -a - 6 = -20$$

$$a = -26 \vee a = 14$$

Dus $A(-26, -26)$ en $B(14, 14)$.

- 29 a** Met dit werkschema wordt het middelpunt M van de cirkel gevonden door het snijpunt van twee middelloodlijnen van driehoek ABC te berekenen. Daarna geeft $d(M, A)$ de straal van de cirkel.

b $rc_{AB} = \frac{1-8}{7-6} = -7$, dus $rc_k = \frac{1}{7}$.

Het midden van AB is $(\frac{1}{2}(6+7), \frac{1}{2}(8+1)) = (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} k: y = \frac{1}{7}x + b \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{7} \cdot 6\frac{1}{2} + b = 4\frac{1}{2} \\ \frac{13}{14} + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 3\frac{4}{7} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7}$.

$rc_{AC} = \frac{4-8}{-2-6} = \frac{1}{2}$, dus $rc_l = -2$.

Het midden van AC is $(\frac{1}{2}(6+(-2)), \frac{1}{2}(8+4)) = (2, 6)$.

$$\begin{aligned} l: y = -2x + b \quad & \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 6 \\ -4 + b = 6 \\ b = 10 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus $l: y = -2x + 10$.

k en l snijden geeft

$$\frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7} = -2x + 10$$

$$2\frac{1}{7}x = 6\frac{3}{7}$$

$$\begin{aligned} x = 3 \quad & \left\{ \begin{array}{l} y = -2x + 10 \end{array} \right. \quad y = -2 \cdot 3 + 10 = 4 \end{aligned}$$

Dus $M(3, 4)$.

$$d(M, A) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Dus $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

- 30 a** $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
 $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$
 $(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$
 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

Dus $M(1, 3)$ en $r = \sqrt{5}$.

Stel $y = ax + b$.

Door $A(5, 0)$ geeft $5a + b = 0$, dus $b = -5a$.

$y = ax - 5a$ oftewel $ax - y - 5a = 0$

$$\begin{aligned} d(M, ax - y - 5a = 0) = r \text{ geeft } \frac{|a - 3 - 5a|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \sqrt{5} \\ |-4a - 3| &= \sqrt{5a^2 + 5} \\ 16a^2 + 24a + 9 &= 5a^2 + 5 \\ 11a^2 + 24a + 4 &= 0 \\ D = 24^2 - 4 \cdot 11 \cdot 4 &= 400 \\ a = \frac{-24 \pm 20}{22} &= -\frac{2}{11} \vee a = \frac{-24 - 20}{22} = -2 \end{aligned}$$

$a = -\frac{2}{11}$ geeft $b = -5 \cdot -\frac{2}{11} = \frac{10}{11}$, dus $l: y = -\frac{2}{11}x + \frac{10}{11}$.

$a = -2$ geeft $b = -5 \cdot -2 = 10$, dus $k: y = -2x + 10$.

- b** $\tan(\alpha) = rc_k = -2$ geeft $\alpha = -63,43\dots^\circ$
 $\tan(\beta) = rc_l = -\frac{2}{11}$ geeft $\beta = -10,30\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = -10,30\dots^\circ - (-63,43\dots^\circ) \approx 53,1^\circ$
Dus $\angle(k, l) \approx 53,1^\circ$.

- c d raakt de x -as in het punt $A(5, 0)$, dus het middelpunt van d is N met $x_N = 5$.

Stel $N(5, p)$. Dit geeft $d: (x - 5)^2 + (y - p)^2 = p^2$.

$$\begin{aligned} d \text{ door } M(1, 3) \text{ geeft } (-4)^2 + (3 - p)^2 &= p^2 \\ 16 + 9 - 6p + p^2 &= p^2 \\ -6p &= -25 \\ p &= 4\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } d: (x - 5)^2 + (y - 4\frac{1}{6})^2 = (4\frac{1}{6})^2 \text{ oftewel } d: (x - 5)^2 + (y - 4\frac{1}{6})^2 = 17\frac{13}{36}.$$

Bladzijde 179

31 a $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 15 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 15 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

Dus van c_1 is het middelpunt $M(4, 2)$ en de straal $r_1 = \sqrt{5}$.

$l \perp k$ geeft $l: x + 2y = c$.

$$d(M, l) = r \text{ geeft } \frac{|4 + 2 \cdot 2 - c|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|8 - c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|8 - c| = 5$$

$$8 - c = 5 \vee 8 - c = -5$$

$$c = 3 \vee c = 13$$

Dus $l_1: x + 2y = 3$ en $l_2: x + 2y = 13$.

b $d(A, M) = \sqrt{(4 - 15)^2 + (2 - 9)^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$

$$d(A, c_1) = d(A, M) - r_1 = \sqrt{170} - \sqrt{5}$$

$$d(M, k) = \frac{|2 \cdot 4 - 2 - 21|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

$$d(k, c_1) = d(M, k) - r_1 = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$2\frac{1}{2} \cdot d(k, c_1) = 2\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Is $\sqrt{170} - \sqrt{5} > 5\sqrt{5}$ oftewel is $\sqrt{170} > 6\sqrt{5}$?

$$6\sqrt{5} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{180}$$

Er geldt dus niet dat $\sqrt{170} > 6\sqrt{5}$ en dus geldt niet dat $d(A, c_1) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c_1)$.

- c Van lijnstuk AB met $A(15, 9)$ en $B(1, -1)$ is het midden $N(8, 4)$.

N is tevens het middelpunt van c_2 en de straal van c_2 is

$$r_2 = d(A, N) = \sqrt{(8 - 15)^2 + (4 - 9)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}.$$

$$d(M, N) = \sqrt{(8 - 4)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(c_1, c_2) = r_2 - d(M, N) - r_1 = \sqrt{74} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{74} - 3\sqrt{5}$$

32 a Stel $k: y = 3x + b$ oftewel $k: 3x - y + b = 0$

Van c is het middelpunt $O(0, 0)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.

$$d(O, k) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|b| = 10$$

$$b = 10 \vee b = -10$$

Dus $k_1: y = 3x + 10$ en $k_2: y = 3x - 10$.

- b** Stel $l: y = ax + b$.

$A(4, 2)$ op l geeft $4a + b = 2$, dus $b = -4a + 2$.

$l: y = ax - 4a + 2$ oftewel $ax - y - 4a + 2 = 0$

$$d(O, l) = r \text{ geeft } \frac{|0 - 0 - 4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|-4a + 2| = \sqrt{10a^2 + 10}$$

$$16a^2 - 16a + 4 = 10a^2 + 10$$

$$6a^2 - 16a - 6 = 0$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$a = \frac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$$

$a = 3$ geeft $b = -4 \cdot 3 + 2 = -10$, dus $l_1: y = 3x - 10$.

$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -4 \cdot -\frac{1}{3} + 2 = 3\frac{1}{3}$, dus $l_2: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

- c** Noem de raakpunten P en Q .

$$\sin(\angle OBQ) = \frac{r}{OB} = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ geeft } \angle OBQ = 52,23\dots^\circ$$

$$\angle PBQ = 2 \cdot 52,23\dots^\circ \approx 104,5^\circ$$

$$\text{Dus } \angle(m_1, m_2) \approx 180^\circ - 104,5^\circ = 75,5^\circ.$$

- 33 a** $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{13}$.

$$x = 5 \text{ geeft } (5 - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

$$4 + (y - 2)^2 = 13$$

$$(y - 2)^2 = 9$$

$$y - 2 = 3 \vee y - 2 = -3$$

$$y = 5 \vee y = -1$$

Dus $A(5, 5)$ en $B(5, -1)$.

$$rc_{AM} = \frac{5 - 2}{5 - 3} = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } rc_k = -\frac{2}{3}.$$

$$k: y = -\frac{2}{3}x + b \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 5 + b = 5 \\ -3\frac{1}{3} + b = 5 \end{array} \right\}$$

$$b = 8\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{3}x + 8\frac{1}{3}.$$

$$rc_{BM} = \frac{-1 - 2}{5 - 3} = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } rc_l = \frac{2}{3}.$$

$$l: y = \frac{2}{3}x + b \quad \left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 5 + b = -1 \\ 3\frac{1}{3} + b = -1 \end{array} \right\}$$

$$b = -4\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{2}{3}x - 4\frac{1}{3}.$$

- b** m evenwijdig met $n: 3x + 2y = 10$ geeft $m: 3x + 2y = c$.

$$d(M, m) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - c|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$$

$$\frac{|13 - c|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$|13 - c| = 13$$

$$13 - c = 13 \vee 13 - c = -13$$

$$c = 0 \vee c = 26$$

Dus $m_1: 3x + 2y = 0$ en $m_2: 3x + 2y = 26$.

$$\begin{aligned}
 34 \quad c: x^2 + y^2 + 8x &= 0 \\
 x^2 + 8x + y^2 &= 0 \\
 (x+4)^2 - 16 + y^2 &= 0 \\
 (x+4)^2 + y^2 &= 16
 \end{aligned}$$

Dus middelpunt $M(-4, 0)$ en straal $r_c = 4$.

Lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{aligned} l: 3x - 4y &= c \\ \text{door } M(-4, 0) \end{aligned} \right\} c = 3 \cdot -4 - 4 \cdot 0 = -12$$

Dus $l: 3x - 4y = -12$.

k en l snijden geeft het punt S , dat het middelpunt van cirkel d is.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases} & \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 16x + 12y = 36 \\ 9x - 12y = -36 \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad 25x = 0 \\
 & \quad \quad \quad x = 0 \\
 & \quad \quad \quad \begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ y = 3 \end{cases} \begin{cases} 4 \cdot 0 + 3y = 9 \\ y = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dus $S(0, 3)$.

$$d(M, S) = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

De straal van d is $r_d = d(k, c) = d(M, S) - r_c = 5 - 4 = 1$.

Dus $d: x^2 + (y - 3)^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
 35 \quad k: \frac{x}{2r} + \frac{y}{4} &= 1 \text{ oftewel } k: 2x + ry = 4r \\
 d(O, k) = r \text{ geeft } & \frac{|2 \cdot 0 + r \cdot 0 - 4r|}{\sqrt{4 + r^2}} = r \\
 & \quad \quad \quad |-4r| = r\sqrt{4 + r^2} \\
 & \quad \quad \quad 16r^2 = r^2(4 + r^2) \\
 & \quad \quad \quad 16 = 4 + r^2 \\
 & \quad \quad \quad r^2 = 12 \\
 & \quad \quad \quad r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Bladzijde 180

$$\begin{aligned}
 36 \quad a \quad & \text{De loodlijn uit } N \text{ op de } y\text{-as snijdt de } y\text{-as in het punt } Q(0, 4). \\
 & \text{In driehoek } MNQ \text{ geeft de stelling van Pythagoras } QN^2 + QM^2 = MN^2 \\
 & \quad \quad \quad QN^2 + 5^2 = 13^2 \\
 & \quad \quad \quad QN^2 = 169 - 25 = 144 \\
 & \quad \quad \quad QN = 12
 \end{aligned}$$

Vierhoek $OPNM$ is een trapezium.

De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(9 + 4) \cdot 12 = 78$.

$$\begin{aligned}
 b \quad & \text{De loodlijn uit } N \text{ op de } y\text{-as snijdt de } y\text{-as in het punt } Q(0, s). \\
 & \text{In driehoek } MNQ \text{ geeft de stelling van Pythagoras } QN^2 + QM^2 = MN^2 \\
 & \quad \quad \quad QN^2 + (r - s)^2 = (r + s)^2 \\
 & \quad \quad \quad QN^2 + r^2 - 2rs + s^2 = r^2 + 2rs + s^2 \\
 & \quad \quad \quad QN^2 = 4rs \\
 & \quad \quad \quad QN = \sqrt{4rs} = 2\sqrt{rs}
 \end{aligned}$$

De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(r + s) \cdot 2\sqrt{rs} = (r + s)\sqrt{rs}$.

$$\begin{aligned}
 c \quad & \text{De stelling van Pythagoras in driehoek } QNM \text{ geeft } QM^2 + QN^2 = MN^2 \\
 & \quad \quad \quad (r - s)^2 + QN^2 = MN^2 \\
 & \quad \quad \quad (r - s)^2 + 15^2 = 25^2 \\
 & \quad \quad \quad (r - s)^2 = 625 - 225 \\
 & \quad \quad \quad (r - s)^2 = 400 \\
 & \quad \quad \quad r - s = 20
 \end{aligned}$$

$$MN = 25 \text{ geeft } r + s = 25$$

$$\begin{cases} r + s = 25 \\ r - s = 20 \end{cases} +$$

$$2r = 45$$

$$r = 22\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{matrix} r = 22\frac{1}{2} \\ r + s = 25 \end{matrix} \right\} 22\frac{1}{2} + s = 25$$

$$s = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } r = 22\frac{1}{2} \text{ en } s = 2\frac{1}{2}.$$

37 M op k en $x_M = -3$ geeft $y_M = -1\frac{1}{3} \cdot -3 + 4 = 8$.

$$\text{Dus } M(-3, 8).$$

$$N \text{ op } k \text{ en } y_N = -4 \text{ geeft } -1\frac{1}{3}x_N + 4 = -4$$

$$-1\frac{1}{3}x_N = -8$$

$$x_N = 6$$

$$\text{Dus } N(6, -4).$$

$$d(M, N) = \sqrt{(6 - (-3))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15, r_1 = 3 \text{ en } r_2 = 4.$$

$$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 15 - 3 - 4 = 8$$

$$d(c_1, l) = d(c_2, l) = 4$$

$$d(M, l) = r_1 + d(c_1, l) = 3 + 4 = 7$$

$$d(N, l) = r_2 + d(c_2, l) = 4 + 4 = 8$$

$$k: y = -1\frac{1}{3}x + 4 \text{ oftewel } k: 1\frac{1}{3}x + y = 4 \text{ oftewel } k: 4x + 3y = 12$$

$$l \perp k \text{ geeft } l: 3x - 4y = c$$

$$d(M, l) = 7 \text{ geeft } \frac{|3 \cdot -3 - 4 \cdot 8 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 7$$

$$\frac{|-41 - c|}{\sqrt{25}} = 7$$

$$\frac{|-41 - c|}{5} = 7$$

$$|-41 - c| = 35$$

$$-41 - c = 35 \vee -41 - c = -35$$

$$c = -76 \vee c = -6$$

$$\text{Dus } l_1: 3x - 4y = -76 \text{ en } l_2: 3x - 4y = -6.$$

$$d(N, l_1) = \frac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot -4 + 76|}{5} = \frac{|110|}{5} = \frac{110}{5} = 22, \text{ dus } l_1 \text{ voldoet niet.}$$

$$d(N, l_2) = \frac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot -4 + 6|}{5} = \frac{|40|}{5} = \frac{40}{5} = 8, \text{ dus } l_2 \text{ voldoet.}$$

$$\text{Een vergelijking van } l \text{ is dus } 3x - 4y = -6.$$

8 Goniometrische functies

38 De draaiingshoek van A is $30^\circ = \frac{1}{6}\pi \text{ rad}$.

$$\text{De draaiingshoek van } B \text{ is } \frac{1}{6}\pi + 2 \text{ rad.}$$

$$\text{De draaiingshoek van } C \text{ is } \frac{1}{6}\pi + 4 \text{ rad.}$$

$$A(\cos(\frac{1}{6}\pi), \sin(\frac{1}{6}\pi)) \approx A(0,87; 0,5)$$

$$B(\cos(\frac{1}{6}\pi + 2), \sin(\frac{1}{6}\pi + 2)) \approx B(-0,82; 0,58)$$

$$C(\cos(\frac{1}{6}\pi + 4), \sin(\frac{1}{6}\pi + 4)) \approx C(-0,19; -0,98)$$