

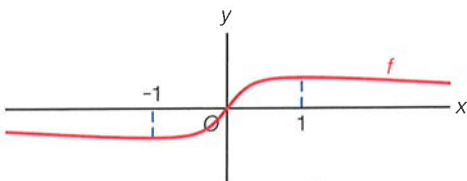
- c L is de levensverwachting in jaren, dus $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot L = 525\,600L$ is de levensverwachting in minuten.
 H is het aantal hartslagen per minuut, dus $525\,600L \cdot H$ is het aantal hartslagen in het gehele leven.
 Als $L \cdot H$ voor elk zoogdier gelijk is, dan moet $L \cdot H$ voor elk zoogdier hetzelfde getal zijn.
 $L \cdot H = 7,5G^{0,25} \cdot 280G^{-0,25} = 2100G^0 = 2100$
 Dus $L \cdot H = 2100$.

6 Differentiaalrekening

- 11 a $f(x) = \frac{x^5 - 5x^2}{x^6} = x^{-1} - 5x^{-4}$ geeft $f'(x) = -x^{-2} + 20x^{-5} = -\frac{1}{x^2} + \frac{20}{x^5} = \frac{-x^3 + 20}{x^5}$
- b $g(x) = 4x^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{4}{x^3 \cdot \sqrt{x}} = 4x^{3\frac{1}{2}} - 4x^{-3\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = 14x^{2\frac{1}{2}} + 14x^{-4\frac{1}{2}} = 14x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{14}{x^4 \cdot \sqrt{x}}$
- c $h(x) = (x\sqrt{x} + 2)^4$ geeft $h'(x) = 4(x\sqrt{x} + 2)^3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x} = 6\sqrt{x} \cdot (x\sqrt{x} + 2)^3$
- 12 a $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$
 $f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + x + 4$
 $f_p''(x) = 12x^2 + 6px + 1$
 $f_p''(x) = 0$ geeft $12x^2 + 6px + 1 = 0$
 $D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 36p^2 - 48$
 $D > 0$ geeft $36p^2 > 48$
 $p^2 > \frac{4}{3}$
 $p < -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee p > \frac{2}{3}\sqrt{3}$
 Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee p > \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
- b $f_p'(x) = 4$ geeft $4x^3 + 3px^2 + x + 4 = 4$
 $4x^3 + 3px^2 + x = 0$
 $x(4x^2 + 3px + 1) = 0$
 $x = 0 \vee 4x^2 + 3px + 1 = 0$
 Van $4x^2 + 3px + 1 = 0$ is $D = (3p)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9p^2 - 16$
 $D > 0$ geeft $9p^2 > 16$
 $p^2 > \frac{16}{9}$
 $p < -\frac{4}{3} \vee p > \frac{4}{3}$
 Dus $4x^2 + 3px + 1 = 0$ heeft twee (van 0 verschillende) oplossingen voor $p < -\frac{4}{3} \vee p > \frac{4}{3}$.
 Dus de grafiek van f_p heeft voor $p < -1\frac{1}{3} \vee p > 1\frac{1}{3}$ drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k .

Bladzijde 175

- 13 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{x}{4x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{(4x^2 + 1) \cdot 1 - x \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2}$
 $= \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} + \frac{4x^2 + 1 - 8x^2}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} + \frac{-4x^2 + 1}{(4x^2 + 1)^2}$
 $f'(1) = f'(-1) = \frac{-1 + 4}{(1 + 4)^2} + \frac{-4 + 1}{(4 + 1)^2} = \frac{3}{25} - \frac{3}{25} = 0$



- $f'(1) = 0$ en $f'(-1) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek toppen heeft voor $x = 1$ en $x = -1$.
 Dus f heeft extremen voor $x = 1$ en $x = -1$.

14 a $f(x) = \frac{3x^2 - 9}{x^3} = 3x^{-1} - 9x^{-3}$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} + 27x^{-4} = -\frac{3}{x^2} + \frac{27}{x^4} = \frac{-3x^2 + 27}{x^4}$
 $f'(x) = 0$ geeft $-3x^2 + 27 = 0$
 $3x^2 = 27$
 $x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

Zie figuur G.2 in het leerboek.

min. is $f(-3) = -\frac{2}{3}$ en max. is $f(3) = \frac{2}{3}$.

b $f'(x) = 24$ geeft $\frac{-3x^2 + 27}{x^4} = 24$
 $-3x^2 + 27 = 24x^4$
 $24x^4 + 3x^2 - 27 = 0$
 $8x^4 + x^2 - 9 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $8u^2 + u - 9 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 8 \cdot -9 = 289$
 $u = \frac{-1 \pm 17}{16} = 1 \vee u = \frac{-1 - 17}{16} = -1\frac{1}{8}$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = -1\frac{1}{8}$
 $x = 1 \vee x = -1$

De raakpunten zijn $(1, -6)$ en $(-1, 6)$.

c Voor raken geldt $f(x) = ax^2 \wedge f'(x) = 2ax$
 $\frac{3x^2 - 9}{x^3} = ax^2 \wedge \frac{-3x^2 + 27}{x^4} = 2ax$
 $a = \frac{3x^2 - 9}{x^5} \wedge a = \frac{-3x^2 + 27}{2x^5}$

Hieruit volgt $\frac{3x^2 - 9}{x^5} = \frac{-3x^2 + 27}{2x^5}$
 $\frac{6x^2 - 18}{2x^5} = \frac{-3x^2 + 27}{2x^5}$
 $6x^2 - 18 = -3x^2 + 27$
 $9x^2 = 45$
 $x^2 = 5$
 $x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

$x = \sqrt{5}$ geeft $a = \frac{3 \cdot 5 - 9}{25\sqrt{5}} = \frac{6}{125}\sqrt{5}$

$x = -\sqrt{5}$ geeft $a = \frac{3 \cdot 5 - 9}{-25\sqrt{5}} = -\frac{6}{125}\sqrt{5}$

Dus voor $a = \frac{6}{125}\sqrt{5} \vee a = -\frac{6}{125}\sqrt{5}$.

15 a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4x}$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{x^2 + 4x} + x^2 \cdot \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{2x(x^2 + 4x) + x^2(x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x}}$
 $= \frac{2x^3 + 8x^2 + x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{3x^3 + 10x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$

b $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$ geeft $g'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x} \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}}}{x^2 + 4x} = \frac{2x(x^2 + 4x) - x^2(x + 2)}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}}$
 $= \frac{2x^3 + 8x^2 - x^3 - 2x^2}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{x^3 + 6x^2}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{x^2 + 6x}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x}}$

c $h(x) = \frac{5x}{(x^2 - 2x)^3}$ geeft $h'(x) = \frac{(x^2 - 2x)^3 \cdot 5 - 5x \cdot 3(x^2 - 2x)^2 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^6} = \frac{(x^2 - 2x) \cdot 5 - 5x \cdot 3 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^4}$
 $= \frac{5x^2 - 10x - 30x^2 + 30x}{(x^2 - 2x)^4} = \frac{-25x^2 + 20x}{(x^2 - 2x)^4} = \frac{5x(4 - 5x)}{(x^2 - 2x)^4}$

16 a $f_p(x) = x^3 + px^2 - 3x + 8$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px - 3$

$$f_p'(-\frac{1}{3}) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{3} - \frac{2}{3}p - 3 = 0$$

$$-\frac{2}{3}p = \frac{8}{3}$$

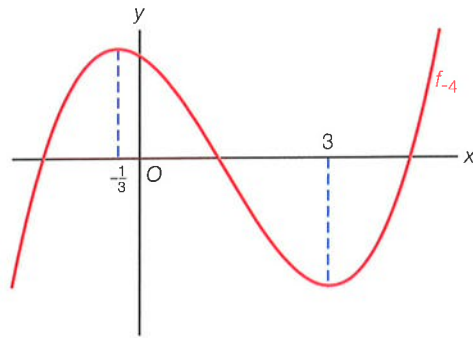
$$p = -4$$

$$f_{-4}(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 8 \text{ geeft } f_{-4}'(x) = 3x^2 - 8x - 3$$

$$f_{-4}'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$

$$x = \frac{8 \pm 10}{6} = 3 \vee x = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$$



$$\text{min. is } f_{-4}(3) = 27 - 36 - 9 + 8 = -10.$$

b $f_p'(x) = 3x^2 + 2px - 3$ geeft $f_p''(x) = 6x + 2p$

$$f_p''(1) = 0 \text{ geeft } 6 + 2p = 0$$

$$2p = -6$$

$$p = -3$$

$$y_A = f_{-3}(1) = 1 - 3 - 3 + 8 = 3$$

c Er moet gelden $f_p(x) = -3x + 12 \wedge f_p'(x) = -3$.

$$f_p'(x) = -3 \text{ geeft } 3x^2 + 2px - 3 = -3$$

$$3x^2 + 2px = 0$$

$$x(3x + 2p) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x + 2p = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}p$$

$x = 0$ geeft het punt $(0, 8)$ op de grafiek van f_p en dit punt ligt niet op de lijn $y = -3x + 12$,

dus $x = 0$ voldoet niet.

$$x = -\frac{2}{3}p \text{ substitueren in } f_p(x) = -3x + 12 \text{ geeft } f_p(-\frac{2}{3}p) = -3 \cdot -\frac{2}{3}p + 12$$

$$(-\frac{2}{3}p)^3 + p \cdot (-\frac{2}{3}p)^2 - 3 \cdot -\frac{2}{3}p + 8 = -3 \cdot -\frac{2}{3}p + 12$$

$$-\frac{8}{27}p^3 + \frac{4}{9}p^3 = 4$$

$$\frac{4}{27}p^3 = 4$$

$$p^3 = 27$$

$$p = 3$$

d $f_p'(x) = 0$ geeft $3x^2 + 2px - 3 = 0$

$$2px = -3x^2 + 3$$

$$p = \frac{-3x^2 + 3}{2x}$$

$$\text{Substitutie van } p = \frac{-3x^2 + 3}{2x} \text{ in } y = f_p(x) \text{ geeft } y = x^3 + \frac{-3x^2 + 3}{2x} \cdot x^2 - 3x + 8$$

$$y = x^3 - 1\frac{1}{2}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 3x + 8$$

$$y = -\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x + 8$$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = -\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x + 8$.

Bladzijde 176

17 a $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = x^{2\frac{1}{2}} - x^{1\frac{1}{2}} - 2\sqrt{x}$ geeft

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x\sqrt{x}}{2} - \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$$

b $f'(x) = 0$ geeft $5x^2 - 3x - 2 = 0$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -2 = 49$
 $x = \frac{3+7}{10} = 1 \vee x = \frac{3-7}{10} = -\frac{2}{5}$
 vold. vold. niet

Zie figuur G.3 in het leerboek.

min. is $f(1) = -2$.

c $f(x) = 0$ geeft $x^3 - x^2 - 2x = 0$
 $x(x^2 - x - 2) = 0$
 $x(x+1)(x-2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$
 vold. niet vold. niet vold.

Dus $A(2, 0)$.

De lijn l raakt de grafiek van f in A .

$$rc_l = f'(2) = \frac{20 - 6 - 2}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_k = -\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

$$k: y = -\frac{1}{3\sqrt{2}}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot 2 + b = 0 \\ b = \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$k: y = -\frac{1}{3\sqrt{2}}x + \frac{2}{3\sqrt{2}} \text{ oftewel } k: 3y\sqrt{2} = -x + 2$$

$$\text{Dus } k: x + 3y\sqrt{2} = 2.$$

d $f'(x) = 16\frac{1}{2}$ geeft $\frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{33}{2}$
 $5x^2 - 3x - 2 = 33\sqrt{x}$

$$\text{Voer in } y_1 = 5x^2 - 3x - 2 \text{ en } y_2 = 33\sqrt{x}.$$

De optie snijpunt geeft $x = 4$.

$$f(4) = 20, \text{ dus } B(4, 20).$$

$$y = 16\frac{1}{2}x + b \left\{ \begin{array}{l} 66 + b = 20 \\ b = -46 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } m: y = 16\frac{1}{2}x - 46.$$

18 $9 - x^2 \geq 0$

$$-x^2 \geq -9$$

$$x^2 \leq 9$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$\text{Dus } D_f = [-3, 3].$$

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 2 \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot -2x + x = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} + x$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} + x = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = x$$

$$x = 0 \vee \sqrt{9-x^2} = 1$$

$$x = 0 \vee 9 - x^2 = 1$$

$$x = 0 \vee x^2 = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$$

max. is $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) = \sqrt{9-8} + \frac{1}{2} \cdot 8 - 2 = 3$ en min. is $f(0) = \sqrt{9} + 0 - 2 = 1$.

$$f(-3) = f(3) = \sqrt{9-9} + \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 = 2\frac{1}{2}$$

Dus $B_f = [1, 3]$.

19 a $f_p(x) = x\sqrt{x} + p\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} + p\sqrt{x}$ geeft $f'_p(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+p}{2\sqrt{x}}$

$$f'_p(4) = 5 \text{ geeft } \frac{12+p}{2\sqrt{4}} = 5$$

$$12+p = 20$$

$$p = 8$$

$$f_8(x) = x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} \text{ geeft } f_8(4) = 8 + 16 = 24$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 5x + q \\ \text{door } A(4, 24) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 + q = 24 \\ q = 4 \end{array}$$

b $f'_p(x) = 0$ geeft $3x + p = 0$

$$\left. \begin{array}{l} p = -3x \\ y = x\sqrt{x} + p\sqrt{x} \end{array} \right\} y = x\sqrt{x} - 3x\sqrt{x} = -2x\sqrt{x}$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -2x\sqrt{x}$.

c $-2x\sqrt{x} = -2$

$$x\sqrt{x} = 1$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1 \text{ vold.}$$

$$f'_p(1) = 0 \text{ geeft } 3 + p = 0, \text{ dus } p = -3.$$

20 a $f(x) = (x+1)\sqrt{4x^2+1}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{4x^2+1} + (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot 8x = \sqrt{4x^2+1} + \frac{4x(x+1)}{\sqrt{4x^2+1}}$

$$rc_k = f'(0) = 1$$

$$g_a(x) = 4 + \frac{8}{(ax-2)^2} = 4 + 8(ax-2)^{-2} \text{ geeft } g'_a(x) = -16(ax-2)^{-3} \cdot a = \frac{-16a}{(ax-2)^3}$$

$$rc_l = g'_a(0) = \frac{-16a}{-8} = 2a$$

$$k \perp l \text{ geeft } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$1 \cdot 2a = -1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

b $f(0) = 1$, dus $A(0, 1)$ en $k: y = x + 1$.

$$g_a(0) = 4 + \frac{8}{(0-2)^2} = 4 + \frac{8}{4} = 4 + 2 = 6, \text{ dus } l: y = 2ax + 6.$$

k snijdt de x -as in $(-1, 0)$.

$$(-1, 0) \text{ op } l \text{ geeft } -2a + 6 = 0$$

$$-2a = -6$$

$$a = 3$$

Bladzijde 177

21 a $f(p) = \frac{4}{p}$, dus $P\left(p, \frac{4}{p}\right)$.

$$L(p) = d(O, P) = \sqrt{(p-0)^2 + \left(\frac{4}{p}-0\right)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}$$

b $L(p) = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}} = \sqrt{p^2 + 16p^{-2}}$ geeft

$$L'(p) = \frac{1}{2\sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}} \cdot (2p - 32p^{-3}) = \frac{p - 16p^{-3}}{\sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}} = \frac{p^4 - 16}{p^3 \cdot \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}}$$

$$L'(p) = 0 \text{ geeft } p^4 - 16 = 0$$

$$p^4 = 16$$

$$p = 2 \vee p = -2$$

vold. vold. niet

$$f(2) = \frac{4}{2} = 2, \text{ dus } P(2, 2).$$

$$f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rc}_k = f'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1 \\ \text{rc}_{OP} = \frac{2-0}{2-0} = 1 \end{array} \right\} \text{rc}_k \cdot \text{rc}_{OP} = -1 \cdot 1 = -1$$

Dus k en OP staan loodrecht op elkaar.

22 $f(x) = \frac{x^3 + 6}{x\sqrt{x}} = \frac{x^3 + 6}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{1\frac{1}{2}} + 6x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{9}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3x^3 - 18}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^3 - 18 = 0$$

$$3x^3 = 18$$

$$x^3 = 6$$

$$x = \sqrt[3]{6}$$

$$f(\sqrt[3]{6}) = \frac{6+6}{(\sqrt[3]{6})^{1\frac{1}{2}}} = \frac{12}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

Dus $a = 6$ en $b = 2$.

23 $f_p(x) = \frac{10x+p}{x^2+1}$ geeft $f_p'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 10 - (10x+p) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{10x^2+10-20x^2-2px}{(x^2+1)^2} = \frac{-10x^2-2px+10}{(x^2+1)^2}$

$$f_p'(1) = \frac{-10-2p+10}{(1+1)^2} = \frac{-2p}{4} = -\frac{1}{2}p$$

Loodrecht snijden, dus $f_p'(1) \cdot \text{rc}_k = -1$

$$-\frac{1}{2}p \cdot \frac{2}{3} = -1$$

$$-\frac{1}{3}p = -1$$

$$p = 3$$

$$f_3(x) = \frac{10x+3}{x^2+1}$$

$$f_3(1) = \frac{10+3}{1+1} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1, 6\frac{1}{2}).$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + q \\ \text{door } A(1, 6\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \frac{2}{3} \cdot 1 + q = 6\frac{1}{2}$$

$$q = 5\frac{5}{6}$$

Dus $p = 3$ en $q = 5\frac{5}{6}$.