

Gemengde opgaven

5 Machten, exponenten en logaritmen

Bladzijde 172

1 a $a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[4]{b^3} = \frac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$

$$(81p^2)^{-\frac{3}{4}} = 81^{-\frac{3}{4}} \cdot (p^2)^{-\frac{3}{4}} = (3^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot p^{-1\frac{1}{2}} = 3^{-3} \cdot \frac{1}{p^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{p\sqrt{p}} = \frac{1}{27p\sqrt{p}}$$

$$\frac{10a^{-5}}{(4a)^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{4^{-1\frac{1}{2}} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{(2^2)^{-1\frac{1}{2}} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{2^{-3} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10}{\frac{1}{8}} \cdot a^{-3\frac{1}{2}} = 80 \cdot \frac{1}{a^{3\frac{1}{2}}} = \frac{80}{a^3 \cdot \sqrt{a}}$$

b $x^4 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{4+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}} = x^{5\frac{1}{12}}$

$$\frac{x^2}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2}{x \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^2}{x^{1\frac{2}{3}}} = x^{2-1\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{x^{2\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = x^{1\frac{1}{4}}$$

2 a $y = \frac{6x^4}{(2\sqrt{x})^3} = \frac{6x^4}{2^3 \cdot (\sqrt{x})^3} = \frac{6x^4}{8 \cdot (x^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{6x^4}{8 \cdot x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}x^{4-1\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$

Dus $y = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$.

b $y = (\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{2}x} = (\frac{1}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{16} \cdot (2^{-2})^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{16} \cdot 2^x$

Dus $y = \frac{1}{16} \cdot 2^x$.

c $y = 4x^{-1\frac{2}{3}} \cdot (3x^4)^2 = 4x^{-1\frac{2}{3}} \cdot 3^2 \cdot (x^4)^2 = 36x^{-1\frac{2}{3}} \cdot x^8 = 36x^{6\frac{1}{3}}$

$36x^{6\frac{1}{3}} = y$

$x^{\frac{19}{3}} = \frac{1}{36}y$

$x = (\frac{1}{36}y)^{\frac{3}{19}}$

$x = (\frac{1}{36})^{\frac{3}{19}} \cdot y^{\frac{3}{19}}$

$x \approx 0,57 \cdot y^{0,16}$

Dus $x = 0,57y^{0,16}$.

d $A = 6 + 2\sqrt{3B+2}$

$6 + 2\sqrt{3B+2} = A$

$2\sqrt{3B+2} = A - 6$

kwadrateren geeft

$4(3B+2) = A^2 - 12A + 36$

$3B+2 = \frac{1}{4}A^2 - 3A + 9$

$3B = \frac{1}{4}A^2 - 3A + 7$

$B = \frac{1}{12}A^2 - A + 2\frac{1}{3}$

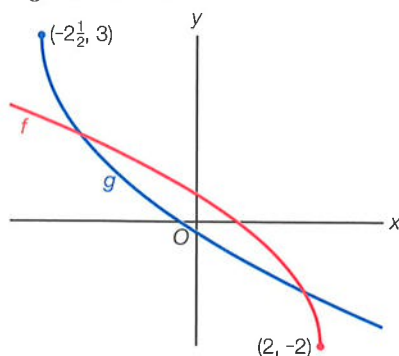
3 a $(x^{\frac{1}{2}} - 4)(2x^{\frac{2}{3}} - 16) = 0$
 $x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0 \vee 2x^{\frac{2}{3}} - 16 = 0$
 $\sqrt{x} = 4 \vee 2x^{\frac{2}{3}} = 16$
 $x = 16 \vee x^{\frac{2}{3}} = 8$
 $x = 16 \vee x = 8^{\frac{3}{2}}$
 $x = 16 \vee x = (2^3)^{\frac{3}{2}}$
 $x = 16 \vee x = 2^{4\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{2}(2x^2 - 5)^{1\frac{1}{2}} = 4$
 $(2x^2 - 5)^{1\frac{1}{2}} = 8$
 $2x^2 - 5 = 8^{\frac{2}{3}}$
 $2x^2 - 5 = (2^3)^{\frac{2}{3}}$
 $2x^2 - 5 = 4$
 $2x^2 = 9$
 $x^2 = 4\frac{1}{2}$
 $x = \sqrt{4\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{4\frac{1}{2}}$
 $x = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = -1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $2^{x+4} - 2^{x+3} = 16\sqrt{2}$
 $2^x \cdot 2^4 - 2^x \cdot 2^3 = 16\sqrt{2}$
 $16 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x = 16\sqrt{2}$
 $8 \cdot 2^x = 16\sqrt{2}$
 $2^x = 2\sqrt{2}$
 $2^x = 2^{1\frac{1}{2}}$
 $x = 1\frac{1}{2}$

4 a $y = \sqrt{x}$
 $\downarrow$ verm. y-as, $-\frac{1}{3}$
 $y = \sqrt{-3x}$
 $\downarrow$ translatie $(2, -2)$
 $f(x) = -2 + \sqrt{-3(x-2)} = -2 + \sqrt{6-3x}$

b $6 - 3x \geq 0$
 $-3x \geq -6$
 $x \leq 2$
 $D_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$ en het randpunt van de grafiek van f is $(2, -2)$.
 $4x + 10 \geq 0$
 $4x \geq -10$
 $x \geq -2\frac{1}{2}$
 $D_g = [-2\frac{1}{2}, \rightarrow)$ en het randpunt van de grafiek van g is $(-2\frac{1}{2}, 3)$.

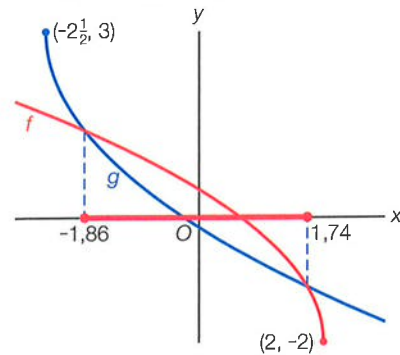


d $5 \cdot 2^{5x-1} + 6 = 56$
 $5 \cdot 2^{5x-1} = 50$
 $2^{5x-1} = 10$
 $5x - 1 = {}^2\log(10)$
 $5x = 1 + {}^2\log(10)$
 $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot {}^2\log(10)$

e ${}^3\log(3^{x-1} + 5) = 2$
 $3^{x-1} + 5 = 3^2$
 $3^{x-1} + 5 = 9$
 $3^{x-1} = 4$
 $x - 1 = {}^3\log(4)$
 $x = 1 + {}^3\log(4)$

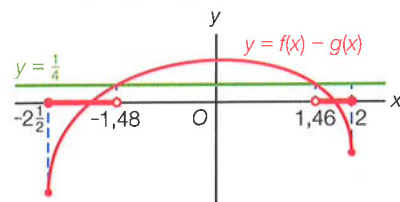
f $2^{2x+3} + 2^{x+5} = 168$
 $2^{2x} \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^5 = 168$
 $8 \cdot 2^{2x} + 32 \cdot 2^x - 168 = 0$
 $(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 21 = 0$
 Stel $2^x = u$.
 $u^2 + 4u - 21 = 0$
 $(u - 3)(u + 7) = 0$
 $u = 3 \vee u = -7$
 $2^x = 3 \vee 2^x = -7$
 $x = {}^2\log(3)$

- c Voer in $y_1 = -2 + \sqrt{6 - 3x}$ en $y_2 = 3 - \sqrt{4x + 10}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1,86$ en $x \approx 1,74$.



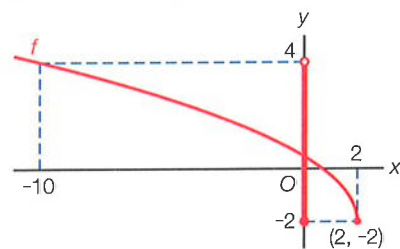
$f(x) \geq g(x)$ geeft $-1,86 \leq x \leq 1,74$

- d Zet y_1 en y_2 uit en voer in $y_3 = y_1 - y_2$ en $y_4 = \frac{1}{4}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1,48$ en $x \approx 1,46$.



$f(x) - g(x) < \frac{1}{4}$ geeft $-2\frac{1}{2} \leq x < -1,48 \vee 1,46 < x \leq 2$

- e $f(-10) = -2 + \sqrt{36} = 4$



Voor $x > -10$ is $-2 \leq f(x) < 4$.

5 a $(2x - 5)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$
 $2x - 5 = (\frac{1}{27})^{-\frac{4}{3}}$
 $2x - 5 = (3^{-3})^{-\frac{4}{3}}$
 $2x - 5 = 3^4$
 $2x - 5 = 81$
 $2x = 86$
 $x = 43$

b $(\frac{1}{2}x^2 + 9) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2 + 9} = 81$
 $(\frac{1}{2}x^2 + 9) \cdot (\frac{1}{2}x^2 + 9)^{\frac{1}{3}} = 81$
 $(\frac{1}{2}x^2 + 9)^{\frac{4}{3}} = 81$
 $\frac{1}{2}x^2 + 9 = 81^{\frac{3}{4}}$
 $\frac{1}{2}x^2 + 9 = (3^4)^{\frac{3}{4}}$
 $\frac{1}{2}x^2 + 9 = 3^3$
 $\frac{1}{2}x^2 = 18$
 $x^2 = 36$
 $x = 6 \vee x = -6$

c $(\sqrt{3})^{x+2} = 9\sqrt{3}$
 $(3^{\frac{1}{2}})^{x+2} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
 $3^{\frac{1}{2}x+1} = 3^{2\frac{1}{2}}$
 $\frac{1}{2}x + 1 = 2\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$

$x = 3$

d $4^x + 48 = 2^{x+4}$
 $(2^2)^x + 48 = 2^x \cdot 2^4$
 $(2^x)^2 + 48 = 16 \cdot 2^x$
 $(2^x)^2 - 16 \cdot 2^x + 48 = 0$
 Stel $2^x = u$.
 $u^2 - 16u + 48 = 0$
 $(u - 4)(u - 12) = 0$
 $u = 4 \vee u = 12$
 $2^x = 4 \vee 2^x = 12$
 $x = 2 \vee x = {}^2\log(12)$

e ${}^5\log(x^2 \cdot \sqrt{x} - 7) = 2$

$$x^2 \cdot \sqrt{x} - 7 = 5^2$$

$$x^2 \cdot \sqrt{x} = 32$$

$$x^{2\frac{1}{2}} = 32$$

$$x = 32^{\frac{2}{5}}$$

$$x = (2^5)^{\frac{2}{5}}$$

$$x = 2^2$$

$$x = 4$$

f $5^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5$

$$5^x - 6 \cdot \frac{1}{5^x} = 5$$

$$(5^x)^2 - 6 = 5 \cdot 5^x$$

$$\text{Stel } 5^x = u.$$

$$u^2 - 6 = 5u$$

$$u^2 - 5u - 6 = 0$$

$$(u + 1)(u - 6) = 0$$

$$u = -1 \vee u = 6$$

$$5^x = -1 \vee 5^x = 6$$

$$x = {}^5\log(6)$$

Bladzijde 173

6

a $y = 2^x$

↓ verm. x-as, 0,4

$$y = 0,4 \cdot 2^x$$

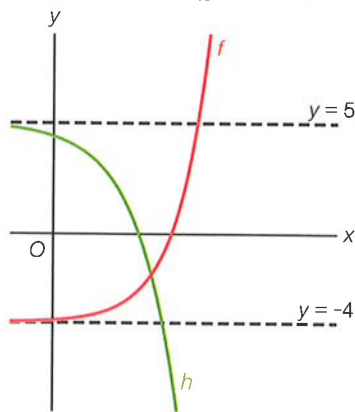
↓ translatie (2, -4)

$$f(x) = 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4$$

b $k(x) = 5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}(x-6)+1} - 4 = 1 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2} = 1 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x} \cdot 3^{-2} = 1 - 0,2 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{45} \cdot (\sqrt{3})^x$

Dus $a = 1$, $b = -\frac{1}{45}$ en $g = \sqrt{3}$.

c



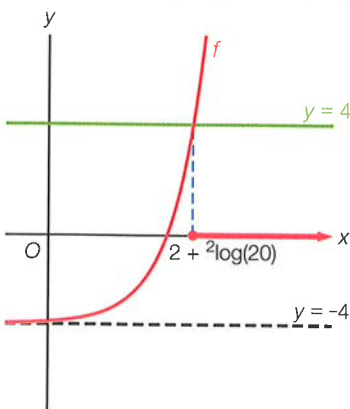
d $f(x) = 4$ geeft $0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 = 4$

$$0,4 \cdot 2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 20$$

$$x - 2 = {}^2\log(20)$$

$$x = 2 + {}^2\log(20)$$



$$f(x) \geq 4 \text{ geeft } x \geq 2 + {}^2\log(20)$$

e De lengte van AB is 3 geeft $f(p) - h(p) = 3 \vee f(p) - h(p) = -3$.

$$f(p) - h(p) = 0,4 \cdot 2^{p-2} - 4 - (5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}p+1}) = 0,4 \cdot 2^{p-2} + 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}p+1} - 9$$

Voer in $y_1 = 0,4 \cdot 2^{x-2} + 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1} - 9$, $y_2 = 3$ en $y_3 = -3$.

De optie snijpunt met y_1 en y_2 geeft $x \approx 4,92$.

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x \approx 3,74$.

Dus voor $p \approx 4,92$ en voor $p \approx 3,74$.

- f** $B_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$, dus de vergelijking $f(x) = q$ heeft één oplossing voor $q > -4$.
 $B_h = \langle \leftarrow, 5 \rangle$, dus de vergelijking $h(x) = q$ heeft geen oplossing voor $q \geq 5$.
 Dus $f(x) = q$ heeft één en $h(x) = q$ heeft geen oplossing voor $q \geq 5$.

7 De beeldgrafiek van de grafiek van f is $y = \sqrt{\frac{2}{a}x - 4} + b$.

De beeldgrafiek van de grafiek van g is $y = \sqrt{\frac{1}{a}x + 1} + b$.

De beeldgrafieken gaan door $A(4, 5)$ geeft $\sqrt{\frac{8}{a} - 4} + b = 5 \wedge \sqrt{\frac{4}{a} + 1} + b = 5$.

Hieruit volgt $\sqrt{\frac{8}{a} - 4} = 5 - b \wedge \sqrt{\frac{4}{a} + 1} = 5 - b$.

$$\sqrt{\frac{8}{a} - 4} = \sqrt{\frac{4}{a} + 1}$$

kwadrateren geeft

$$\frac{8}{a} - 4 = \frac{4}{a} + 1$$

$$\frac{4}{a} = 5$$

$$a = \frac{4}{5}$$

$a = \frac{4}{5}$ en $\sqrt{\frac{4}{a} + 1} + b = 5$ geeft $\sqrt{5 + 1} + b = 5$, dus $b = 5 - \sqrt{6}$.

8 a $T = a \cdot R^{1,5}$ geeft $a = \frac{T}{R^{1,5}}$

$R = 5,28$ en $T = 4,5$ geeft $a = \frac{4,5}{5,28^{1,5}} \approx 0,37$

$R = 3,78$ en $T = 2,7$ geeft $a = \frac{2,7}{3,78^{1,5}} \approx 0,37$

$R = 2,95$ en $T = 1,9$ geeft $a = \frac{1,9}{2,95^{1,5}} \approx 0,37$

Dus $a \approx 0,37$.

- b** Straal is $3,56 \cdot 10^6 \text{ km} = 35,6 \cdot 10^5 \text{ km}$, dus $R = 35,6$.

$R = 35,6$ geeft $T = 0,37 \cdot 35,6^{1,5} \approx 78,6$

Dus de omlooptijd is ongeveer 78,6 dagen.

- c** $R_{\text{Rhea}} = 5,28$ geeft $R_{\text{Titan}} = 2,3 \cdot 5,28 = 12,144$

$T_{\text{Titan}} = 0,37 \cdot 12,144^{1,5} = 15,65\dots$

De omlooptijd is $\frac{15,65\dots}{4,5} \approx 3,5$ keer zo groot.

- d** $T = 0,37R^{1,5}$

$0,37R^{1,5} = T$

$R^{1,5} = \frac{1}{0,37} \cdot T$

$R = \left(\frac{1}{0,37} \cdot T\right)^{\frac{2}{3}}$

$R = \left(\frac{1}{0,37}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot T^{\frac{2}{3}}$

$R \approx 1,94 \cdot T^{0,67}$

Dus $R = 1,94 \cdot T^{0,67}$.

- e** Omlooptijd 15 uur geeft $T = \frac{15}{24}$.

$R = 1,94 \cdot \left(\frac{15}{24}\right)^{0,67} \approx 1,42$

De straal is ongeveer $1,42 \cdot 10^5 \text{ km}$.

Bladzijde 174

9 a $2x + 4 > 0$

$2x > -4$

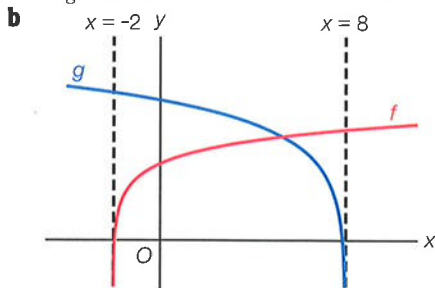
$x > -2$

 $D_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = -2$.

$8 - x > 0$

$-x > -8$

$x < 8$

 $D_g = \langle \leftarrow, 8 \rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = 8$.

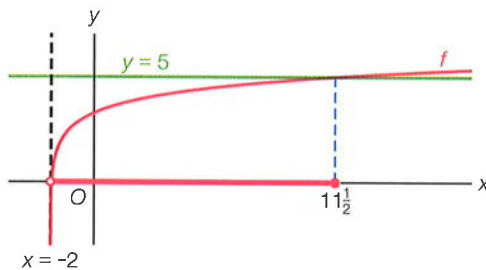
c $f(x) = 5$ geeft $2 + {}^3\log(2x + 4) = 5$

${}^3\log(2x + 4) = 3$

$2x + 4 = 3^3$

$2x = 23$

$x = 11\frac{1}{2}$



$f(x) \leq 5$ geeft $-2 < x \leq 11\frac{1}{2}$

d $f(x) = 2$ geeft $2 + {}^3\log(2x + 4) = 2$

${}^3\log(2x + 4) = 0$

$2x + 4 = 1$

$2x = -3$

$x = -1\frac{1}{2}$

Dus $x_A = -1\frac{1}{2}$.

$g(x) = 2$ geeft $3 - \frac{1}{2}\log(8 - x) = 2$

$\frac{1}{2}\log(8 - x) = 1$

$8 - x = \frac{1}{2}$

$x = 7\frac{1}{2}$

Dus $x_B = 7\frac{1}{2}$.

$AB = x_B - x_A = 7\frac{1}{2} - (-1\frac{1}{2}) = 9$

10 a $L = 34$ geeft $7,5G^{0,25} = 34$

$G^{0,25} = \frac{34}{7,5}$

$G = \left(\frac{34}{7,5}\right)^4 \approx 422$

Het gemiddelde gewicht is 422 kg.

b $H = 900$ geeft $280G^{-0,25} = 900$

$G^{-0,25} = \frac{900}{280}$

$G = \left(\frac{900}{280}\right)^{-4} = 0,009...$

$G = 0,009...$ geeft $L = 7,5 \cdot 0,009...^{0,25} = 2,33...$

Het aantal hartslagen is $900 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 2,33... \approx 1,1 \cdot 10^9$.

Dus ongeveer 1,1 miljard hartslagen.

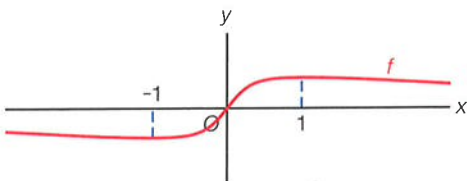
- c L is de levensverwachting in jaren, dus $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot L = 525\,600L$ is de levensverwachting in minuten.
 H is het aantal hartslagen per minuut, dus $525\,600L \cdot H$ is het aantal hartslagen in het gehele leven.
 Als $L \cdot H$ voor elk zoogdier gelijk is, dan moet $L \cdot H$ voor elk zoogdier hetzelfde getal zijn.
 $L \cdot H = 7,5G^{0,25} \cdot 280G^{-0,25} = 2100G^0 = 2100$
 Dus $L \cdot H = 2100$.

6 Differentiaalrekening

- 11 a $f(x) = \frac{x^5 - 5x^2}{x^6} = x^{-1} - 5x^{-4}$ geeft $f'(x) = -x^{-2} + 20x^{-5} = -\frac{1}{x^2} + \frac{20}{x^5} = \frac{-x^3 + 20}{x^5}$
- b $g(x) = 4x^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{4}{x^3 \cdot \sqrt{x}} = 4x^{3\frac{1}{2}} - 4x^{-3\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = 14x^{2\frac{1}{2}} + 14x^{-4\frac{1}{2}} = 14x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{14}{x^4 \cdot \sqrt{x}}$
- c $h(x) = (x\sqrt{x} + 2)^4$ geeft $h'(x) = 4(x\sqrt{x} + 2)^3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x} = 6\sqrt{x} \cdot (x\sqrt{x} + 2)^3$
- 12 a $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$
 $f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + x + 4$
 $f_p''(x) = 12x^2 + 6px + 1$
 $f_p''(x) = 0$ geeft $12x^2 + 6px + 1 = 0$
 $D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 36p^2 - 48$
 $D > 0$ geeft $36p^2 > 48$
 $p^2 > \frac{4}{3}$
 $p < -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee p > \frac{2}{3}\sqrt{3}$
 Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee p > \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
- b $f_p'(x) = 4$ geeft $4x^3 + 3px^2 + x + 4 = 4$
 $4x^3 + 3px^2 + x = 0$
 $x(4x^2 + 3px + 1) = 0$
 $x = 0 \vee 4x^2 + 3px + 1 = 0$
 Van $4x^2 + 3px + 1 = 0$ is $D = (3p)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9p^2 - 16$
 $D > 0$ geeft $9p^2 > 16$
 $p^2 > \frac{16}{9}$
 $p < -\frac{4}{3} \vee p > \frac{4}{3}$
 Dus $4x^2 + 3px + 1 = 0$ heeft twee (van 0 verschillende) oplossingen voor $p < -\frac{4}{3} \vee p > \frac{4}{3}$.
 Dus de grafiek van f_p heeft voor $p < -1\frac{1}{3} \vee p > 1\frac{1}{3}$ drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k .

Bladzijde 175

- 13 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{x}{4x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{(4x^2 + 1) \cdot 1 - x \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2}$
 $= \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} + \frac{4x^2 + 1 - 8x^2}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} + \frac{-4x^2 + 1}{(4x^2 + 1)^2}$
 $f'(1) = f'(-1) = \frac{-1 + 4}{(1 + 4)^2} + \frac{-4 + 1}{(4 + 1)^2} = \frac{3}{25} - \frac{3}{25} = 0$



- $f'(1) = 0$ en $f'(-1) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek toppen heeft voor $x = 1$ en $x = -1$.
 Dus f heeft extremen voor $x = 1$ en $x = -1$.