

b Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = 1 - \frac{4}{(-2+3)^2} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ B(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -2 + b = 0 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $l: y = -3x - 6$.

Stel $m: y = ax + b$ met $a = f'(1) = 1 - \frac{4}{(1+3)^2} = \frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ C(1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\frac{3}{4} \end{array}$$

Dus $m: y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

l en m snijden geeft $-3x - 6 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

$$-3\frac{3}{4}x = 5\frac{1}{4}$$

$$-15x = 21$$

$$x = -1\frac{2}{5}$$

$x = -1\frac{2}{5}$ geeft $y = -3 \cdot -1\frac{2}{5} - 6 = -1\frac{4}{5}$

Dus het snijpunt is $(-1\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5})$.

23 a $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x-2) - (x^2-2x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \frac{4+4}{(-2-1)^2} = \frac{8}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{8}{9}x + b \\ f(-2) = -3\frac{1}{3}, \text{ dus } A(-2, -3\frac{1}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{8}{9} \cdot -2 + b = -3\frac{1}{3} \\ -\frac{16}{9} + b = -\frac{30}{9} \\ b = -\frac{14}{9} = -1\frac{5}{9} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{8}{9}x - 1\frac{5}{9}$.

b $rc_l = f'(-1) = \frac{1+2}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4}$

$rc_m = f'(3) = \frac{9-6}{(3-1)^2} = \frac{3}{4}$

$rc_l = rc_m$, dus l en m zijn evenwijdig.

3 Meetkunde

Bladzijde 187

24 Stel $AD = x$, dan is $BD = x + 2$.

$BC = AB = AD + BD = x + x + 2 = 2x + 2$

In $\triangle BCD$ is $\tan(55^\circ) = \frac{2x+2}{x+2}$.

Voer in $y_1 = \tan(55^\circ)$ en $y_2 = \frac{2x+2}{x+2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 1,497...$

Dus $AB = 2 \cdot 1,497... + 2 \approx 4,99$.

In $\triangle BCD$ is $\cos(55^\circ) = \frac{x+2}{CD} = \frac{1,497...+2}{CD}$.

Dus $CD = \frac{1,497...+2}{\cos(55^\circ)} \approx 6,10$.

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DCE \\ \angle ABC = \angle CED \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ dus } \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}$$

Stel $CD = x$, dan is $BC = x + 1$.

Dit geeft $\frac{7}{x} = \frac{x+1}{4}$

$$x(x+1) = 28$$

$$x^2 + x = 28$$

$$x^2 + x - 28 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -28 = 113$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{113}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{113}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{113} \vee x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{113} \text{ (kan niet)}$$

Dus $CD = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{113}$.

26 a De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.

De zijde $\times$ hoogte-methode in $\triangle BCD$ geeft $BD \cdot CE = CD \cdot AD$

$$26 \cdot CE = 15 \cdot 10$$

$$CE = \frac{15 \cdot 10}{26} = 5\frac{10}{13}$$

b $\left. \begin{array}{l} \angle ABS = \angle CDS \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle BAS = \angle DCS \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ dus } \frac{AB}{CD} = \frac{BS}{DS}$

Stel $DS = x$, dan is $BS = 26 - x$.

Dit geeft $\frac{24}{15} = \frac{26-x}{x}$

$$24x = 15(26 - x)$$

$$24x = 390 - 15x$$

$$39x = 390$$

$$x = 10, \text{ dus } DS = 10$$

$DS = AD$, dus $\angle SAD = \angle ASD$ (basishoeken gelijkbenige driehoek).

En omdat $\angle CAD = \angle SAD$ is $\angle CAD = \angle ASD$.

27 Teken DE en CF loodrecht op AB , en stel $AE = x$.

Zie de figuur hiernaast.

Nu is $BF = 15 - 3 - x = 12 - x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $DE^2 = 5^2 - x^2$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCF$ geeft $CF^2 = 11^2 - (12 - x)^2$.

$DE = CF$, dus $DE^2 = CF^2$, dus $25 - x^2 = 121 - (144 - 24x + x^2)$

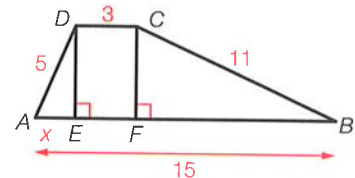
$$25 - x^2 = 121 - 144 + 24x - x^2$$

$$24x = 48$$

$$x = 2$$

Dus $DE^2 = 5^2 - 2^2 = 21$, dus $DE = \sqrt{21}$.

$$O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(15 + 3) \cdot \sqrt{21} = 9\sqrt{21}$$



28 $O(\triangle ADE) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin(\angle A) = 15 \sin(\angle A)$

$$O(\triangle ABC) = 2 \cdot O(\triangle ADE) = 30 \sin(\angle A) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AC \cdot \sin(\angle A) = 30 \sin(\angle A) \\ 4AC = 30 \end{array} \right\}$$

$$AC = 7\frac{1}{2}$$

Dus $CE = AC - AE = 7\frac{1}{2} - 5 = 2\frac{1}{2}$.

Bladzijde 188

- 29** De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

$$BM = \frac{1}{2}BC = 2,5$$

Zie de figuur hiernaast.

$$AM = BM = 2,5 \text{ (straal cirkel)}$$

$$\text{In } \triangle AMN \text{ is } \sin(\angle AMN) = \frac{2}{2,5}$$

$$\angle AMN = 53,13\dots^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle AMN = 2 \cdot 53,13\dots^\circ = 106,26\dots^\circ$$

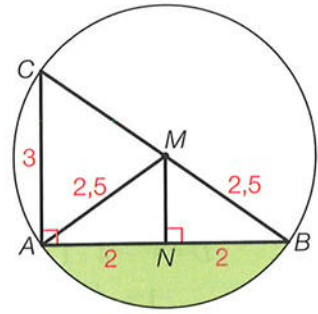
De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door AM ,

$$BM \text{ en de kortste cirkelboog } AB \text{ is } \frac{106,26\dots}{360} \cdot \pi \cdot 2,5^2 = 5,795\dots$$

$$\text{De stelling van Pythagoras in } \triangle AMN \text{ geeft } MN = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5.$$

$$\text{opp } \triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 = 3$$

De oppervlakte van het groene gebied is $5,795\dots - 3 \approx 2,80$.



- 30** Teken AC . Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$AC^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos(50^\circ)$$

$$AC^2 = 38,861\dots$$

$$AC = 6,233\dots$$

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft

$$\frac{6,233\dots}{\sin(50^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle BAC)}$$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{4 \sin(50^\circ)}{6,233\dots} = 0,491\dots$$

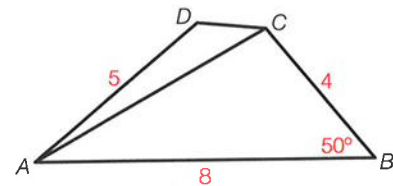
$$\angle BAC = 29,44\dots^\circ$$

$$\angle CAD = 40^\circ - \angle BAC = 40^\circ - 29,44\dots^\circ = 10,55\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle CAD$ geeft $CD^2 = 38,861\dots + 5^2 - 2 \cdot 6,233\dots \cdot 5 \cdot \cos(10,55\dots^\circ)$

$$CD^2 = 2,578\dots$$

$$CD \approx 1,61$$



- 31 a** Stel de straal van een grote cirkel is r .

Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In } \triangle ABC \text{ is } AC = 2r \text{ en } AB = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}.$$

$$\text{Ook is } AB = r + 1.$$

$$\text{Dit geeft } r\sqrt{2} = r + 1$$

$$r\sqrt{2} - r = 1$$

$$r(\sqrt{2} - 1) = 1$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Dus de straal van de grote cirkels is $\sqrt{2} + 1$.

- b** In $\triangle ABD$ is $BD = \sqrt{2}$.

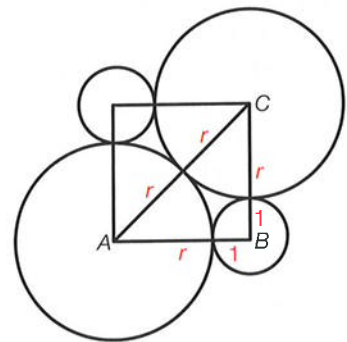
$$DE = 1, \text{ dus } BE = \sqrt{2} - 1.$$

$\triangle BEH$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

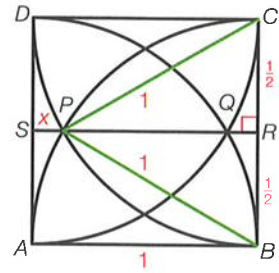
$$\text{In } \triangle BEH \text{ is } EH = BE = \sqrt{2} - 1.$$

$$O(\triangle BEH) = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}(2 - 2\sqrt{2} + 1) = 1\frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

$$\text{Dus } O(\triangle DEHC) = O(\triangle BCD) - O(\triangle BEH) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - (1\frac{1}{2} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1.$$

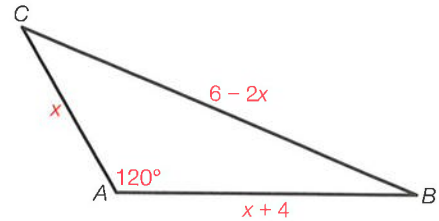


- c Zie de figuur hiernaast met R op BC en S op AD waarbij R en S op het verlengde van PQ liggen.
 $BC = BP = CP = 1$ (straal cirkel)
 $\angle BCP = 60^\circ$ (gelijkzijdige driehoek)
 Stel $PS = x$, dan is $PR = 1 - x$.
 In $\triangle CPR$ is $PR = \sqrt{3} \cdot CR = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 Dus $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - x$ oftewel $x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
 $PQ = 1 - 2x = 1 - 2(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$



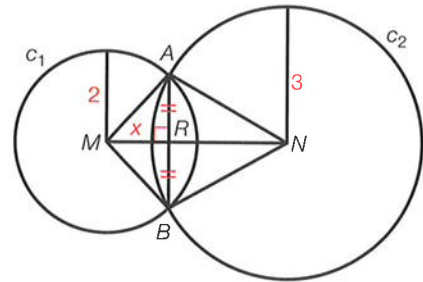
Bladzijde 189

- 32 Stel $AC = x$, dan is $AB = x + 4$ en $BC = 10 - x - (x + 4) = 6 - 2x$.
 Zie de figuur hiernaast.
 De cosinusregel geeft
 $(6 - 2x)^2 = x^2 + (x + 4)^2 - 2 \cdot x \cdot (x + 4) \cdot \cos(120^\circ)$.
 Voer in $y_1 = (6 - 2x)^2$ en $y_2 = x^2 + (x + 4)^2 - 2x(x + 4)\cos(120^\circ)$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,564...$
 Dus $AB = 4,564...$ en $AC = 0,564...$
 $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4,564... \cdot 0,564... \cdot \sin(120^\circ) \approx 1,12$



- 33 $\angle ADE = \angle AED = \frac{180^\circ - \angle DAE}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$
 $\angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$
 $\angle DEC = \angle DCE = \frac{180^\circ - \angle CDE}{2} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67\frac{1}{2}^\circ$
 $\angle BCE = \angle BCD - \angle DCE = 90^\circ - 67\frac{1}{2}^\circ = 22\frac{1}{2}^\circ$
 Stel $AD = BC = x$.
 In $\triangle ADE$ is $AE = AD = x$ en $DE = \sqrt{2} \cdot AD = x\sqrt{2}$.
 In $\triangle CDE$ is $CD = DE = x\sqrt{2}$.
 $BE = AB - AE = CD - AE = x\sqrt{2} - x$
 In $\triangle BCE$ is $\tan(22\frac{1}{2}^\circ) = \frac{BE}{BC} = \frac{x\sqrt{2} - x}{x} = \frac{x(\sqrt{2} - 1)}{x} = \sqrt{2} - 1$.

- 34 a Zie de figuur hiernaast met $AM = BM = 2$ en $AN = BN = 3$.
 $AMBN$ is een vlieger met MN als symmetrieas, dus MN gaat door het midden R van AB en staat loodrecht op AB .
 Stel $MR = x$, dan is $NR = 4 - x$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle AMR$ geeft $AR^2 = 2^2 - x^2$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle ANR$ geeft $AR^2 = 3^2 - (4 - x)^2$.
 Dus $4 - x^2 = 9 - (16 - 8x + x^2)$
 $4 - x^2 = 9 - 16 + 8x - x^2$
 $8x = 11$
 $x = 1\frac{3}{8}$
 $AR^2 = 2^2 - x^2 = 2^2 - (1\frac{3}{8})^2 = \frac{135}{64}$ geeft $AR = \sqrt{\frac{135}{64}} = \frac{\sqrt{135}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{8} = \frac{3}{8}\sqrt{15}$
 Dus $AB = 2AR = \frac{3}{4}\sqrt{15}$.



b Zie de figuur hiernaast.

$\angle NDS = 90^\circ$ en $\angle MCS = 90^\circ$ (stelling raaklijn aan cirkel)

$$\left. \begin{array}{l} \angle NDS = \angle MCS \text{ (rechte hoek)} \\ \angle NSD = \angle MSC \end{array} \right\} \Delta DNS \sim \Delta CMS \text{ dus } \frac{DN}{CM} = \frac{NS}{MS}$$

Stel $MS = x$, dan is $NS = x + 4$.

$$\text{Dit geeft } \frac{3}{2} \frac{x+4}{x}$$

$$3x = 2(x+4)$$

$$3x = 2x + 8$$

$$x = 8, \text{ dus } MS = 8$$

Zie de figuur hiernaast.

$\angle PQS = 90^\circ$ (stelling raaklijn aan cirkel)

$$\left. \begin{array}{l} \angle MCS = \angle PQS \text{ (rechte hoek)} \\ \angle MSC = \angle PSQ \end{array} \right\} \Delta CMS \sim \Delta QPS \text{ dus } \frac{CM}{PQ} = \frac{MS}{PS}$$

Stel de straal van c_3 is r .

Dan is $PQ = r$ en $PS = 8 - 2 - r = 6 - r$.

$$\text{Dit geeft } \frac{2}{r} = \frac{8}{6-r}$$

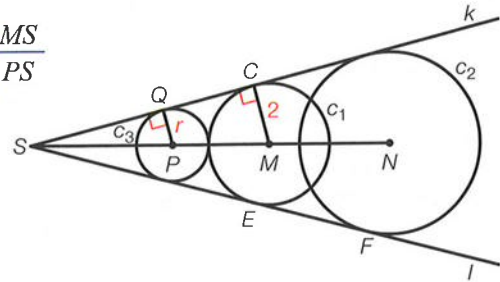
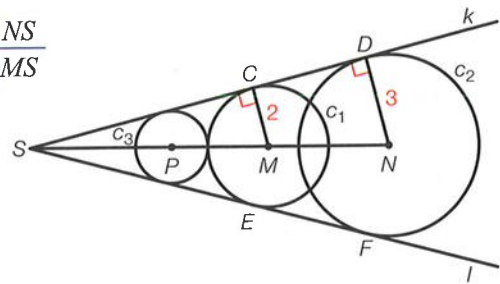
$$8r = 2(6-r)$$

$$8r = 12 - 2r$$

$$10r = 12$$

$$r = 1\frac{1}{5}$$

De straal van c_3 is $1\frac{1}{5}$.



35 Stel $AM = BM = r$. Zie de figuur hiernaast.

AB is een middellijn van c_1 , dus $\angle AMB = 90^\circ$ (stelling van Thales).

$\triangle ABM$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek, dus $AB = r\sqrt{2}$.

De straal van c_1 is $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ en de oppervlakte van c_1 is $\pi \cdot (\frac{1}{2}r\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$.

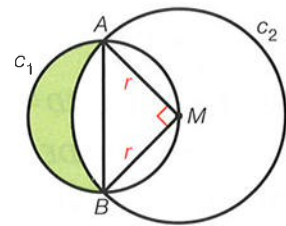
$$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM = \frac{1}{2}r^2$$

De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door lijnstuk AB

en cirkel c_2 is $\frac{90}{360} \cdot \pi r^2 - O(\triangle ABM) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2$.

De oppervlakte van het groene gebied is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 - (\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2) = \frac{1}{2}r^2$.

Dus de oppervlakte van het groene gebied is gelijk is aan de oppervlakte van driehoek ABM .



36 Zie de figuur hiernaast.

Stel $BE = x$, dan is $AE = x + 11$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCE$ geeft $CE^2 = 13^2 - x^2$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ACE$ geeft $CE^2 = 20^2 - (x + 11)^2$.

$$\text{Dus } 169 - x^2 = 400 - (x^2 + 22x + 121)$$

$$169 - x^2 = 400 - x^2 - 22x - 121$$

$$22x = 110$$

$$x = 5$$

Dus $BE = 5$, $AE = 11 + 5 = 16$ en $CE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle CDE$ geeft $DE = \sqrt{15^2 - 144} = 9$.

Dus $AD = AE - DE = 16 - 9 = 7$.

