

$$\text{b} \quad \int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^0 = -1 + e$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } O(W) = -1 + e + \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} e - 1\frac{1}{2}.$$

$$\int_{-1}^{\ln(\frac{4}{e+3})} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^{\ln(\frac{4}{e+3})} = -e^{-\ln(\frac{4}{e+3})} + e = -e^{\ln(\frac{e+3}{4})} + e = -\frac{e+3}{4} + e = -\frac{1}{4}e - \frac{3}{4} + e = \frac{3}{4}e - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} O(W) = \frac{1}{2} (1\frac{1}{2} e - 1\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} e - \frac{3}{4}$$

Dus de lijn $x = \ln\left(\frac{4}{e+3}\right)$ verdeelt W in twee delen met gelijke oppervlakte.

12 Goniometrische formules

33 a $\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = -\cos(x - \frac{2}{3}\pi)$
 $\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$
 $x - \frac{1}{6}\pi = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
geen oplossing $2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$

b $2 \sin(x) \cos(x) = \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$
 $\sin(2x) = \sin(x + \frac{2}{3}\pi)$
 $2x = x + \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - x - \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

c $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
 $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) \cdot \sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
 $\frac{1}{2}\sin(2x + \pi) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
 $\sin(2x + \pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $2x + \pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = -\frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$

d $\sqrt{3} \cdot \sin(2x) + \cos(2x) = 1$
 $2\sqrt{3} \sin(x) \cos(x) + 1 - 2\sin^2(x) = 1$
 $2\sqrt{3} \sin(x) \cos(x) - 2\sin^2(x) = 0$
 $2\sin(x)(\sqrt{3} \cdot \cos(x) - \sin(x)) = 0$
 $2\sin(x) = 0 \vee \sqrt{3} \cdot \cos(x) - \sin(x) = 0$
 $\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$
 $x = k \cdot \pi \vee \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3}$
 $x = k \cdot \pi \vee \tan(x) = \sqrt{3}$
 $x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

34 a $f(x) = (2 - \sin(x))^2 = 4 - 4\sin(x) + \sin^2(x) = 4 - 4\sin(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$
 $= 4\frac{1}{2} - 4\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$$F(x) = 4\frac{1}{2}x + 4\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

b $g(x) = \sin(3x) \cos(\frac{1}{2}x) + \cos(3x) \sin(\frac{1}{2}x) = \sin(3\frac{1}{2}x)$

$$G(x) = -\frac{2}{7}\cos(3\frac{1}{2}x) + c$$

c $h(x) = 4\cos^4(x) - \cos^2(2x) = (2\cos^2(x))^2 - \cos^2(2x) = (1 + \cos(2x))^2 - \cos^2(2x)$
 $= 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) - \cos^2(2x) = 1 + 2\cos(2x)$

$$H(x) = x + \sin(2x) + c$$

35 a $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \sqrt{2}$ geeft $f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$
 $f'(x) = 0$ geeft $\cos(x) + \sin(x) = 0$
 $\sin(x) = -\cos(x)$
 $\tan(x) = -1$
 $x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$$f(-\frac{1}{4}\pi) = \sin(-\frac{1}{4}\pi) - \cos(-\frac{1}{4}\pi) + \sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

$f(-\frac{1}{4}\pi) = 0$ en $f'(-\frac{1}{4}\pi) = 0$, dus de grafiek van f raakt de x -as.

b $f(\frac{1}{4}\pi - p) + f(\frac{1}{4}\pi + p) = \sin(\frac{1}{4}\pi - p) - \cos(\frac{1}{4}\pi - p) + \sqrt{2} + \sin(\frac{1}{4}\pi + p) - \cos(\frac{1}{4}\pi + p) + \sqrt{2}$
 $= \sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\frac{1}{4}\pi)\sin(p)) + \sqrt{2}$
 $+ \sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\frac{1}{4}\pi)\sin(p)) + \sqrt{2}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$
 $+ \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2y_A$

Dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in $A(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2})$.

c $f(\frac{3}{4}\pi - p) = \sin(\frac{3}{4}\pi - p) - \cos(\frac{3}{4}\pi - p) + \sqrt{2}$
 $= \sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(p)) + \sqrt{2}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$
 $= \sqrt{2} \cdot \cos(p) + \sqrt{2}$

$$f(\frac{3}{4}\pi + p) = \sin(\frac{3}{4}\pi + p) - \cos(\frac{3}{4}\pi + p) + \sqrt{2}$$

$$= \sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(p)) + \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \cos(p) + \sqrt{2}$$

$$f(\frac{3}{4}\pi - p) = f(\frac{3}{4}\pi + p)$$

Dus de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$ is symmetrieas van de grafiek van f .

36 a $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab \sin(bt) \\ ab \cos(bt) \end{pmatrix}$
 $v(t) = \sqrt{(-ab \sin(bt))^2 + (ab \cos(bt))^2} = \sqrt{a^2 b^2 \sin^2(bt) + a^2 b^2 \cos^2(bt)}$
 $= \sqrt{a^2 b^2 (\sin^2(bt) + \cos^2(bt))} = \sqrt{a^2 b^2} = ab$

b $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab^2 \cos(bt) \\ -ab^2 \sin(bt) \end{pmatrix}$
 $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -ab \sin(bt) \\ ab \cos(bt) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -ab^2 \cos(bt) \\ -ab^2 \sin(bt) \end{pmatrix} = a^2 b^3 \sin(bt) \cos(bt) - a^2 b^3 \cos(bt) \sin(bt) = 0$

Dus $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$.

c $|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-ab^2 \cos(bt))^2 + (-ab^2 \sin(bt))^2} = \sqrt{a^2 b^4 \cos^2(bt) + a^2 b^4 \sin^2(bt)}$
 $= \sqrt{a^2 b^4 (\sin^2(bt) + \cos^2(bt))} = \sqrt{a^2 b^4} = ab^2$

$$v = 10 \text{ en } |\vec{a}(t)| = 5 \text{ geeft } ab = 10 \text{ en } ab^2 = 5$$

$$\frac{ab^2}{ab} = \frac{5}{10}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ en } ab = 10 \text{ geeft } a = 20$$

Dus de straal van de cirkel is 20.

Bladzijde 234

37 a $f(x) = 2 \cos^2(x) + \sin(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 + 1 + \sin(2x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$
 $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$ geeft $f'(x) = -2 \sin(2x) + 2 \cos(2x)$
 $f'(x) = 0$ geeft $-2 \sin(2x) + 2 \cos(2x) = 0$

$$\sin(2x) = \cos(2x)$$

$$\tan(2x) = 1$$

$$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x \text{ in } [0, \pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{5}{8}\pi$$

$$\text{max. is } f(\frac{1}{8}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi) + \sin(\frac{1}{4}\pi) + 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{min. is } f(\frac{5}{8}\pi) = \cos(1\frac{1}{4}\pi) + \sin(1\frac{1}{4}\pi) + 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\text{Dus } B_f = [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}].$$

- b** $f(x) = g(x)$ geeft $2 \cos^2(x) + \sin(2x) = 2 \sin(2x)$

$$2 \cos^2(x) = \sin(2x)$$

$$2 \cos^2(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$2 \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \sin(x)$$

$$\cos(x) = 0 \vee \tan(x) = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

x in $[0, \pi]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi$

$$O(V) = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2 \sin(2x) - (2 \cos^2(x) + \sin(2x))) dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2 \sin(2x) - (\cos(2x) + \sin(2x) + 1)) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2 \sin(2x) - \cos(2x) - \sin(2x) - 1) dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(2x) - \cos(2x) - 1) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x) - x \right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{2} \cos(\pi) - \frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2}\pi - \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \frac{1}{4}\pi \right)$$

$$= \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}\pi + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{4}\pi$$

- c** C is het midden van AB als $g(p) = \frac{1}{2}f(p)$.

Dit geeft $2 \sin(2p) = \cos^2(p) + \frac{1}{2} \sin(2p)$

$$\frac{1}{2} \sin(2p) = \cos^2(p)$$

$$3 \sin(p) \cos(p) = \cos^2(p)$$

$$\cos(p) = 0 \vee 3 \sin(p) = \cos(p)$$

$$p = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 3 \cdot \frac{\sin(p)}{\cos(p)} = 1$$

$$\text{vold. niet} \quad \tan(p) = \frac{1}{3}$$

- 38 a** $u_P = 25 \sin(8\pi t)$

Per trilling wordt $4 \cdot 25 = 100$ mm afgelegd.

Er zijn $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$ trillingen per seconde,

dus P legt per minuut $60 \cdot 4 \cdot 100 = 24\,000$ mm = 24 m af.

$$u_Q = 40 \sin(6\pi t).$$

Per trilling wordt $4 \cdot 40 = 160$ mm afgelegd.

Er zijn $\frac{6\pi}{2\pi} = 3$ trillingen per seconde,

dus Q legt per minuut $60 \cdot 3 \cdot 160 = 28\,800$ mm = 28,8 m af.

Het punt Q legt de grootste afstand per minuut af. Het verschil is 4,8 m.

- b** Op $t = 0$ beginnen P en Q beide aan een nieuwe trilling.

P heeft trillingstijd $\frac{1}{4}$ seconde en Q heeft trillingstijd $\frac{1}{3}$ seconde. Dus na 1 seconde heeft P 4 trillingen gemaakt en Q 3 trillingen, dus beginnen P en Q na 1 seconde beide de tweede keer aan een nieuwe trilling.

Dus op $t = 1$.

- c** De afstand tussen P en Q is $|25 \sin(8\pi t) - 40 \sin(6\pi t)|$.

Voer in $y_1 = |25 \sin(8\pi x) - 40 \sin(6\pi x)|$ en $y_2 = 30$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,2360\dots$

Dus het eerste tijdstip is $t \approx 0,236$.

- 39 a** $f(x) = 0$ geeft $2 \sin^2(x) + \sin(x) = 0$

$$\sin(x)(2 \sin(x) + 1) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 2\pi$

$$O = \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi (2 \sin^2(x) + \sin(x)) dx = \int_0^\pi (2 \sin^2(x) - 1 + 1 + \sin(x)) dx$$

$$= \int_0^\pi (-\cos(2x) + \sin(x) + 1) dx = \left[-\frac{1}{2} \sin(2x) - \cos(x) + x \right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{2} \sin(2\pi) - \cos(\pi) + \pi - \left(-\frac{1}{2} \sin(0) - \cos(0) + 0 \right) = 0 - (-1) + \pi + 0 + 1 = 2 + \pi$$

b $f(x) = 2 \sin^2(x) + \sin(x)$ geeft $f'(x) = 4 \sin(x) \cos(x) + \cos(x)$

$f'(x) = 0$ geeft $4 \sin(x) \cos(x) + \cos(x) = 0$

$$\cos(x)(4 \sin(x) + 1) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee \sin(x) = -\frac{1}{4}$$

$$f(\frac{1}{2}\pi) = 2 \sin^2(\frac{1}{2}\pi) + \sin(\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$f(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \sin^2(1\frac{1}{2}\pi) + \sin(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{4} \text{ geeft } f(x) = 2 \cdot (-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$f(x) = p$ heeft precies vier oplossingen voor $-\frac{1}{8} < p < 0 \vee 0 < p < 1$.

c $f(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 \sin^2(\frac{1}{2}\pi - p) + \sin(\frac{1}{2}\pi - p)$

$$= 2(\sin(\frac{1}{2}\pi) \cos(p) - \cos(\frac{1}{2}\pi) \sin(p))^2 + \sin(\frac{1}{2}\pi) \cos(p) - \cos(\frac{1}{2}\pi) \sin(p)$$

$$= 2(1 \cdot \cos(p) - 0)^2 + 1 \cdot \cos(p) - 0$$

$$= 2 \cos^2(p) + \cos(p)$$

$$f(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 \sin^2(\frac{1}{2}\pi + p) + \sin(\frac{1}{2}\pi + p)$$

$$= 2(\sin(\frac{1}{2}\pi) \cos(p) + \cos(\frac{1}{2}\pi) \sin(p))^2 + \sin(\frac{1}{2}\pi) \cos(p) + \cos(\frac{1}{2}\pi) \sin(p)$$

$$= 2(1 \cdot \cos(p) + 0)^2 + 1 \cdot \cos(p) + 0$$

$$= 2 \cos^2(p) + \cos(p)$$

Er geldt $f(\frac{1}{2}\pi - p) = f(\frac{1}{2}\pi + p)$, dus de grafiek van f is symmetrisch op het interval $[0, \pi]$.

$$p = f(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi) = f(\frac{1}{6}\pi) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = 1$$

40 a $\begin{cases} x(t) = \sin(t) + \cos(t) \\ y(t) = 1 + 2 \sin(2t + \pi) \end{cases}$

$$x^2 = (\sin(t) + \cos(t))^2 = \sin^2(t) + 2 \sin(t) \cos(t) + \cos^2(t) = 1 + \sin(2t)$$

$$\begin{cases} y = 1 + 2 \sin(2t + \pi) = 1 - 2 \sin(2t) \\ x^2 = 1 + \sin(2t) \text{ geeft } \sin(2t) = x^2 - 1 \end{cases} \begin{cases} y = 1 - 2(x^2 - 1) \\ y = 1 - 2x^2 + 2 \end{cases}$$

$$y = -2x^2 + 3$$

Dus de baan van P is een deel van de bergparabool $y = -2x^2 + 3$.

Dus $a = -2$ en $b = 3$.

b $\begin{cases} x^2 = 1 + \sin(2t) \\ -1 \leq \sin(2t) \leq 1 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 2 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$

$$x = -\sqrt{2} \text{ en } y = -2x^2 + 3 \text{ geeft } y = -1$$

$$x = \sqrt{2} \text{ en } y = -2x^2 + 3 \text{ geeft } y = -1$$

Dus de keerpunten zijn $(-\sqrt{2}, -1)$ en $(\sqrt{2}, -1)$.

Bladzijde 235

41 a De baan van P is de cirkel met middelpunt O en straal 4, de baan van Q is de cirkel met middelpunt O en straal 5.

De minimale afstand tussen P en Q is $5 - 4 = 1$ voor $5t = 3t + k \cdot 2\pi$

$$2t = k \cdot 2\pi$$

$$t = k \cdot \pi$$

Dus de minimale afstand wordt bereikt voor $t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$.

De maximale afstand tussen P en Q is $5 + 4 = 9$ voor $5t = 3t + \pi + k \cdot 2\pi$

$$2t = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

Dus de maximale afstand wordt bereikt voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$.

b $PQ^2 = (5 \cos(3t) - 4 \cos(5t))^2 + (5 \sin(3t) - 4 \sin(5t))^2$
 $= 25 \cos^2(3t) - 40 \cos(3t) \cos(5t) + 16 \cos^2(5t) + 25 \sin^2(3t) - 40 \sin(3t) \sin(5t) + 16 \sin^2(5t)$
 $= 25(\cos^2(3t) + \sin^2(3t)) + 16(\cos^2(5t) + \sin^2(5t)) - 40(\cos(3t) \cos(5t) + \sin(3t) \sin(5t))$
 $= 25 + 16 - 40 \cos(3t - 5t) = 41 - 40 \cos(-2t) = 41 - 40 \cos(2t) = 41 - 40(1 - 2 \sin^2(t))$
 $= 41 - 40 + 80 \sin^2(t) = 1 + 80 \sin^2(t)$

Dus $PQ = \sqrt{1 + 80 \sin^2(t)}$.

c $PQ = \sqrt{41}$
 $\sqrt{1 + 80 \sin^2(t)} = \sqrt{41}$
 $1 + 80 \sin^2(t) = 41$
 $80 \sin^2(t) = 40$
 $\sin^2(t) = \frac{1}{2}$
 $\sin(t) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \vee \sin(t) = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$
 $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
 t in $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi \vee t = 1\frac{1}{4}\pi \vee t = 1\frac{3}{4}\pi$

d Evenwijdig met de y -as, dus $x_P = x_Q$
 $4 \cos(5t) = 5 \cos(3t)$
 Voer in $y_1 = 4 \cos(5x)$ en $y_2 = 5 \cos(3x)$.
 De optie snijpunt geeft $x = 0,756...$
 Dus voor $t \approx 0,76$.

42 a $y = 0$ geeft $\cos(3t) = 0$
 $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
 $t = \frac{1}{6}\pi$ geeft het punt $(\frac{1}{2}, 0)$.
 $t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(-1, 0)$.
 $t = \frac{5}{6}\pi$ geeft het punt $(\frac{1}{2}, 0)$.
 $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -2 \sin(2t) \\ y'(t) = -3 \sin(3t) \end{cases}$ en dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) \\ -3 \sin(3t) \end{pmatrix}$.
 $\vec{v}(\frac{1}{6}\pi) = \begin{pmatrix} -2 \sin(\frac{1}{3}\pi) \\ -3 \sin(\frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$
 $\vec{v}(\frac{5}{6}\pi) = \begin{pmatrix} -2 \sin(1\frac{2}{3}\pi) \\ -3 \sin(2\frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$
 $\cos(\varphi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right|} = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Dus $\varphi = 60^\circ$.

b $x = 0$ geeft $\cos(2t) = 0$
 $2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
 $t = \frac{1}{4}\pi$ geeft het punt $(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.
 $t = \frac{3}{4}\pi$ geeft het punt $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.
 $\vec{v}(\frac{3}{4}\pi) = \begin{pmatrix} -2 \cdot -1 \\ -3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$ en k door $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.
 Dus $k: y = -\frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c De baansnelheid is $v(\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{(-2 \sin(\pi))^2 + (-3 \sin(1\frac{1}{2}\pi))^2} = \sqrt{0 + 9} = 3$.

d $d(A, B) = 1$, dus A op de lijn $y = \frac{1}{2}$, omdat de baan symmetrisch is in de x -as.
 $\cos(3t) = \frac{1}{2}$
 $3t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $t = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
 t in $[0, \pi]$ geeft $t = \frac{1}{9}\pi \vee t = \frac{7}{9}\pi \vee t = \frac{5}{9}\pi$
 $x(\frac{1}{9}\pi) = \cos(\frac{2}{9}\pi) = 0,766...$
 $x(\frac{7}{9}\pi) = \cos(\frac{14}{9}\pi) = 0,173...$
 $x(\frac{5}{9}\pi) = \cos(\frac{10}{9}\pi) = -0,939...$
 Dus $p \approx -0,94 \vee p \approx 0,17 \vee p \approx 0,77$.

43 a $y = 0$ geeft $2 \cos(2t) = 0$
 $\cos(2t) = 0$
 $2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
 $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$t = -\frac{1}{4}\pi$ geeft het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$.

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ y(t) = 2 \cos(2t) \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x'(t) = -3 \sin(t + \frac{1}{2}\pi) \\ y'(t) = -4 \sin(2t) \end{cases}$$

Dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin(t + \frac{1}{2}\pi) \\ -4 \sin(2t) \end{pmatrix}$.

$$\vec{v}(-\frac{1}{4}\pi) = \begin{pmatrix} -3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -4 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{4}{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}} \text{ geeft } \varphi = -62,061\dots^\circ$$

Dus de hoek waaronder de baan de positieve x -as snijdt is ongeveer $62,1^\circ$.

b De baansnelheid is $v(-\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{(-1\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{4\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{\frac{41}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{82}$

c $x = 0$ geeft $3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) = 0$

$$\cos(t + \frac{1}{2}\pi) = 0$$

$$t + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = k \cdot \pi$$

$t = 0$ geeft $y = 2$, dus de baan snijdt de y -as in het punt $(0, 2)$.

Dus de vergelijking van de parabool is van de vorm $y = ax^2 + 2$.

$$\begin{cases} y = ax^2 + 2 \\ t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft het punt } (-3, -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot (-3)^2 + 2 = -2 \\ 9a = -4 \\ a = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Dus $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$.

Substitutie van $x = 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi)$ en $y = 2 \cos(2t)$ in $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$ geeft

$$2 \cos(2t) = -\frac{4}{9} \cdot (3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi))^2 + 2$$

$$2 \cos(2t) = -\frac{4}{9} \cdot 9(\cos(t + \frac{1}{2}\pi))^2 + 2$$

$$2 \cos(2t) = -4(\sin(t + \pi))^2 + 2$$

$$\cos(2t) = -2(-\sin(t))^2 + 1$$

$$\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2(t)$$

Dit klopt voor elke t , dus de baan van P is een deel van de parabool $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$.

d $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ 2 \cos(2t) \end{pmatrix}$

$$\vec{PQ} = \vec{p}_L = \begin{pmatrix} -2 \cos(2t) \\ 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \vec{p} + \vec{p}_L = \begin{pmatrix} 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ 2 \cos(2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \cos(2t) \\ 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) - 2 \cos(2t) \\ 2 \cos(2t) + 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix}$$

Dus de bewegingsvergelijkingen van Q zijn $\begin{cases} x_Q = 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) - 2 \cos(2t) \\ y_Q = 2 \cos(2t) + 3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$

e Q op de y -as geeft $x_Q = 0$

$$3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) - 2 \cos(2t) = 0$$

$$3 \cos(t + \frac{1}{2}\pi) = 2 \cos(2t)$$

Voer in $y_1 = 3 \cos(x + \frac{1}{2}\pi)$ en $y_2 = 2 \cos(2x)$.

De optie snijpunt geeft $x = -0,439\dots$

Dus $t = -0,439\dots$ en dit geeft $P(1,276\dots; 1,276\dots)$.

$$O(OPQR) = OP^2 = 1,276\dots^2 + 1,276\dots^2 \approx 3,26.$$

