

Bladzijde 228

11 a $p = 10e^{-\frac{1}{2}t+1}$
 $e^{-\frac{1}{2}t+1} = \frac{1}{10}p$

$$-\frac{1}{2}t + 1 = \ln\left(\frac{1}{10}p\right)$$

$$-\frac{1}{2}t = -1 + \ln\left(\frac{1}{10}p\right)$$

$$t = 2 - 2\ln\left(\frac{1}{10}p\right)$$

$$t = \ln(e^2) + \ln\left(\left(\frac{1}{10}p\right)^{-2}\right)$$

$$t = \ln(e^2) + \ln(100p^{-2})$$

$$t = \ln(100e^2p^{-2})$$

b $y = 3\ln\left(\frac{2}{x}\right) + 2\ln(5x)$

$$y = 3(\ln(2) - \ln(x)) + 2(\ln(5) + \ln(x))$$

$$y = 3\ln(2) - 3\ln(x) + 2\ln(5) + 2\ln(x)$$

$$y = \ln(2^3) + \ln(5^2) - \ln(x)$$

$$\ln(x) = \ln(2^3 \cdot 5^2) - y$$

$$\ln(x) = \ln(200) + \ln(e^{-y})$$

$$\ln(x) = \ln(200e^{-y})$$

$$x = 200e^{-y}$$

c $y = e^x + e^{x+1} + e^{x+2} + e^{x+3}$

$$e^x + e^{x+1} + e^{x+2} + e^{x+3} = y$$

$$e^x + e^x \cdot e + e^x \cdot e^2 + e^x \cdot e^3 = y$$

$$e^x(1 + e + e^2 + e^3) = y$$

$$e^x = \frac{y}{1 + e + e^2 + e^3}$$

$$x = \ln\left(\frac{y}{1 + e + e^2 + e^3}\right)$$

$$\frac{e-1}{e^4-1} = \frac{e-1}{(e^2+1)(e^2-1)} = \frac{e-1}{(e^2+1)(e+1)(e-1)} = \frac{1}{(e^2+1)(e+1)} = \frac{1}{e^3 + e^2 + e + 1}$$

Dus $x = \ln\left(\frac{y}{1 + e + e^2 + e^3}\right)$ kan worden geschreven als $x = \ln\left(\frac{e-1}{e^4-1}y\right)$.

10 Meetkunde met vectoren

12 a Substitutie van $x = -1 + 5t$ en $y = -t$ in $3x + 2y = 10$ geeft $3(-1 + 5t) + 2 \cdot -t = 10$

$$-3 + 15t - 2t = 10$$

$$13t = 13$$

$$t = 1$$

$t = 1$ geeft $x = -1 + 5 = 4$ en $y = -1$, dus $S(4, -1)$.

b $m \perp k$, dus $\vec{n}_m = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$m: 5x - y = c \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(1, 3) \end{array} \right\} c = 5 \cdot 1 - 3 = 2$$

Dus $m: 5x - y = 2$.

c $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|10 + 3|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\angle(k, l) = 45^\circ$$

d P op k , dus $\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 + 5t \\ -t \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 + 5t \\ -t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t - 2 \\ -t - 3 \end{pmatrix}$$

De lijnen AP en l zijn evenwijdig en $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 5t - 2 \\ -t - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$$15t - 6 - 2t - 6 = 0$$

$$13t = 12$$

$$t = \frac{12}{13}$$

$t = \frac{12}{13}$ geeft $P(-1 + 5 \cdot \frac{12}{13}, -\frac{12}{13}) = P(3\frac{8}{13}, -\frac{12}{13})$

13 a $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\cos(\angle(k, m)) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-4 - 15|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{377}}$$

$$\angle(k, m) \approx 11,9^\circ$$

b $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: 3x + 2y = c \\ \text{door } (1, 2) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

Dus $k: 3x + 2y = 7$.

$x = 2u - 6$ en $y = -5u + 4$ substitueren in $3x + 2y = 7$ geeft $3(2u - 6) + 2(-5u + 4) = 7$

$$6u - 18 - 10u + 8 = 7$$

$$-4u = 17$$

$$u = -4\frac{1}{4}$$

$u = -4\frac{1}{4}$ geeft $x = 2 \cdot -4\frac{1}{4} - 6 = -14\frac{1}{2}$ en $y = -5 \cdot -4\frac{1}{4} + 4 = 25\frac{1}{4}$

Dus $S(-14\frac{1}{2}, 25\frac{1}{4})$.

c $m: x = 2u - 6 \wedge y = -5u + 4$ geeft $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$n \perp m$, dus $\vec{n}_n = \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\left. \begin{array}{l} n: 2x - 5y = c \\ \text{door } O(0, 0) \end{array} \right\} n: 2x - 5y = 0$$

d $p \perp l$, dus $p: 3x - y = c$
door $A(6, 8)$ $c = 3 \cdot 6 - 8 = 10$

Dus $p: 3x - y = 10$.

$x = 1 - 2t$ en $y = 2 + 3t$ substitueren in $3x - y = 10$ geeft $3(1 - 2t) - (2 + 3t) = 10$

$$3 - 6t - 2 - 3t = 10$$

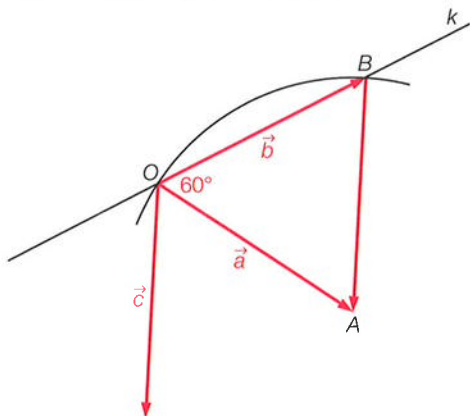
$$-9t = 9$$

$$t = -1$$

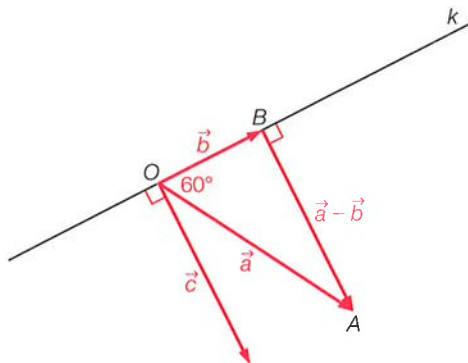
$t = -1$ geeft $x = 1 - 2 \cdot -1 = 3$ en $y = 2 + 3 \cdot -1 = -1$

Dus $T(3, -1)$.

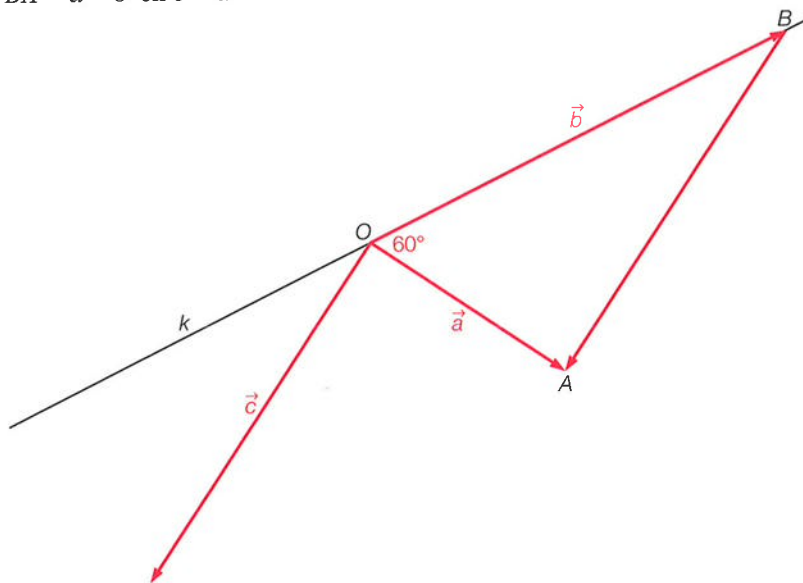
- 14 a** A is het eindpunt van $\vec{a}$ en B is het eindpunt van $\vec{b}$.
 Teken een cirkelboog van de cirkel met middelpunt A en straal OA . Deze cirkelboog snijdt k in O en B . Je hebt nu $\vec{b}$ en $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.
 Teken $\vec{c}$ evenwijdig met $\vec{BA}$ en even lang als $\vec{BA}$.



- b** A is het eindpunt van $\vec{a}$ en B is het eindpunt van $\vec{b}$.
 $|\vec{c}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{b}|$ betekent dat driehoek OBA een bijzondere rechthoekige driehoek is met zijden waarvan de lengten zich verhouden als $1 : 2 : \sqrt{3}$.
 Teken lijnstuk AB loodrecht op k . Je hebt nu $\vec{b}$ en $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.
 Teken $\vec{c}$ evenwijdig met $\vec{BA}$ en even lang als $\vec{BA}$.



- c** Zie de figuur hieronder.
 A is het eindpunt van $\vec{a}$, B is het eindpunt van $\vec{b}$, $|\vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}|$ oftewel $OB = 2OA$,
 $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



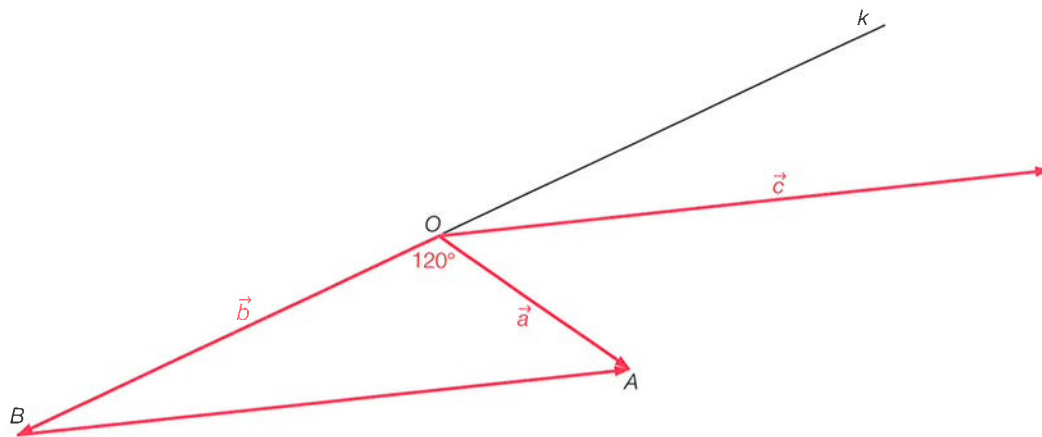
De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft $AB^2 = OA^2 + (2OA)^2 - 2 \cdot OA \cdot 2OA \cdot \cos(60^\circ)$
 $AB^2 = OA^2 + 4OA^2 - 4OA^2 \cdot \frac{1}{2}$

$$AB^2 = 3OA^2$$

$AB = |\vec{BA}| = |\vec{c}|$ en $OA = |\vec{a}|$, dus $|\vec{c}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{a}|$.

Zie de figuur hieronder.

A is het eindpunt van $\vec{a}$, B is het eindpunt van $\vec{b}$, $|\vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}|$ oftewel $OB = 2OA$,
 $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft $AB^2 = OA^2 + (2OA)^2 - 2 \cdot OA \cdot 2OA \cdot \cos(120^\circ)$

$$AB^2 = OA^2 + 4OA^2 - 4OA^2 \cdot -\frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 7OA^2$$

$$AB = |\vec{BA}| = |\vec{c}| \text{ en } OA = |\vec{a}|, \text{ dus } |\vec{c}| = \sqrt{7} \cdot |\vec{a}|.$$

Bladzijde 229

- 15 a** E is het snijpunt van de diagonalen DH en CI van het vierkant $DCHI$ en is dus het midden van diagonaal DH .

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{AB}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{h} = \vec{b} + 2\vec{BC} = \vec{b} + 2\vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{h}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dus } E(3, 5).$$

- b** $\vec{c} = \vec{b} + \vec{BC} = \vec{b} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dus } C(4, 3).$

$$\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{e}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ dus } F(2, 4\frac{1}{2}).$$

$$\text{Stel } CF: y = ax + b \text{ met } a = \frac{3 - 4\frac{1}{2}}{4 - 2} = -\frac{3}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } C(4, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 4 + b = 3 \\ -3 + b = 3 \end{array}$$

$$b = 6$$

$$\text{Dus } CF: y = -\frac{3}{4}x + 6 \text{ en } G(0, 6).$$

$$CG = \sqrt{(0-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

16 a $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-a \\ d \end{pmatrix}$

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{AE} = \vec{a} + \vec{AC}_L = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d \\ c-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d \\ c-a \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-b \\ d \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \vec{b} + \vec{BF} = \vec{b} + \vec{BC}_R = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d \\ b-c \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a-d \\ c-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b+d \\ b-c \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b \\ -a+b \end{pmatrix}, \text{ dus } M(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b).$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad \vec{n} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \vec{d} &= \vec{c} + \overrightarrow{CD} = \vec{c} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d \\ c-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix} \\
 \vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{NP} &= \vec{p} - \vec{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b+c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix} \\
 \vec{g} &= \vec{c} + \overrightarrow{CG} = \vec{c} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ b-c+d \end{pmatrix} \\
 \vec{q} &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{g}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d \\ b-c+d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b+c+d \\ b-c+d \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{NQ} &= \vec{q} - \vec{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b+c+d \\ b-c+d \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a+c+d \\ b-c+d \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{NQ} &= \overrightarrow{NP}_R, \text{ dus } NP = NQ \text{ en } NP \perp NQ, \text{ dus driehoek } PQN \text{ is een gelijkbenige} \\
 &\text{ rechthoekige driehoek.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{17} \quad \mathbf{a} \quad \overrightarrow{DA} &= \vec{a} - \vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -d \end{pmatrix} \\
 \vec{c} &= \vec{d} + \overrightarrow{DA}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ a+d \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{AC} &= \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} d \\ a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-a \\ d+a \end{pmatrix} \\
 \vec{p} &= \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}_R = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+d \\ a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+d \\ a-d \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$P(10, -1) \text{ geeft } \begin{cases} 2a+d=10 \\ a-d=-1 \\ 3a=9 \end{cases} + \begin{cases} a=3 \\ a-d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-d=-1 \\ d=4 \end{cases}$$

Dus $a=3$ en $d=4$.

$$\mathbf{b} \quad \begin{cases} x+y=6 \\ P(2a+d, a-d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+d+a-d=6 \\ 3a=6 \end{cases} \Rightarrow a=2$$

$$a=2 \text{ geeft } \vec{p} = \begin{pmatrix} 4+d \\ 2-d \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} d-2 \\ d+2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4+d \\ 2-d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d-2 \\ d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2}x^2 \\
 Q(2d+2, 4) &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(2d+2)^2 = 4 \\ (2d+2)^2 = 8 \end{cases} \\
 2d+2 &= 2\sqrt{2} \vee 2d+2 = -2\sqrt{2} \\
 d+1 &= \sqrt{2} \vee d+1 = -\sqrt{2} \\
 d &= -1 + \sqrt{2} \vee d = -1 - \sqrt{2} \\
 &\text{vold. niet}
 \end{aligned}$$

Dus $d = -1 + \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{18} \quad \mathbf{a} \quad AB: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\
 \vec{a} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Bigg\} AB: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 x &= 99 \text{ oftewel } -1 + t = 99 \text{ geeft } t = 100 \\
 t &= 100 \text{ geeft } y = 5 + 100 \cdot (-2) = -195 \\
 &\text{Dus } D(99, -195) \text{ op de lijn } AB.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} \quad BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + t \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$k: x + 3y = c \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(-1, 5) \end{array} \right\} c = -1 + 3 \cdot 5 = 14$$

$$\text{Dus } k: x + 3y = 14.$$

$$\text{Substitutie van } x = 2 + t \text{ en } y = -1 + 3t \text{ in } x + 3y = 14 \text{ geeft } 2 + t + 3(-1 + 3t) = 14$$

$$2 + t - 3 + 9t = 14$$

$$10t = 15$$

$$t = 1\frac{1}{2}$$

$$t = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } x = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ en } y = -1 + 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}, \text{ dus } S(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}).$$

$$\mathbf{c} \quad AP = BP, \text{ dus } P \text{ ligt op de middelloodlijn } m \text{ van } AB.$$

$$m \perp AB, \text{ dus } \vec{r}_m = \vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{s}_m = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P \text{ op } m, \text{ dus } \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2t \\ 2 + t \end{pmatrix}.$$

$$\vec{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2t \\ 2 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 1\frac{1}{2} \\ t - 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BP} = \vec{p} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2t \\ 2 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 1\frac{1}{2} \\ t + 3 \end{pmatrix}$$

$$AP \perp BP, \text{ dus } \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2t + 1\frac{1}{2} \\ t - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t - 1\frac{1}{2} \\ t + 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$4t^2 - 2\frac{1}{4} + t^2 - 9 = 0$$

$$5t^2 = 11\frac{1}{4}$$

$$t^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$t = 1\frac{1}{2} \vee t = -1\frac{1}{2}$$

$$t = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } P(\frac{1}{2} + 2 \cdot 1\frac{1}{2}, 2 + 1\frac{1}{2}) = P(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$$

$$t = -1\frac{1}{2} \text{ geeft } P(\frac{1}{2} + 2 \cdot -1\frac{1}{2}, 2 - 1\frac{1}{2}) = P(-2\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\mathbf{d} \quad BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (zie b)} \quad \left. \begin{array}{l} BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 38 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} q = 1$$

$$(2, -1) \text{ op } BC, \text{ dus } 38 + 3t = -1$$

$$3t = -39$$

$$t = -13$$

$$q = 1 \text{ en } t = -13 \text{ geeft } p + -13 \cdot 1 = 2$$

$$p - 13 = 2$$

$$p = 15$$

Bladzijde 230

19 a $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} CD: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \vec{c} + t \cdot (\vec{d} - \vec{c}) \\ \vec{c} &= \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{d} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} CD: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$x_P = 22$ en P op CD geeft $24 + t = 22$, dus $t = -2$.

$t = -2$ geeft $y = 8 + -2 \cdot -2 = 12$ en dit is y_P .

Verder geldt $x_D \leq x_P \leq x_C$ en $y_C \leq y_P \leq y_D$.

Dus P ligt op de zijde CD .

b $AP: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t \cdot (\vec{p} - \vec{a})$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} AP: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Q op AP , dus $\vec{q} = \begin{pmatrix} 11t \\ 16 - 2t \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{DQ} = \vec{q} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 11t \\ 16 - 2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t - 16 \\ -2t - 8 \end{pmatrix}$$

DQ loodrecht op AP , dus $\begin{pmatrix} 11t - 16 \\ -2t - 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$$121t - 176 + 4t + 16 = 0$$

$$125t = 160$$

$$t = 1\frac{7}{25}$$

$t = 1\frac{7}{25}$ geeft $Q(11 \cdot 1\frac{7}{25}, 16 - 2 \cdot 1\frac{7}{25}) = Q(14\frac{2}{25}, 13\frac{11}{25})$

20 a $x(t) = t^2 - 4t$ geeft $x'(t) = 2t - 4$

$y(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2$ geeft $y'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8t$

Evenwijdig met de x -as als $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$$4t^3 - 12t^2 + 8t = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$$

$$4t(t^2 - 3t + 2) = 0 \wedge 2t \neq 4$$

$$4t(t-1)(t-2) = 0 \wedge t \neq 2$$

$$(t=0 \vee t=1 \vee t=2) \wedge t \neq 2$$

$$t=0 \vee t=1$$

$t=0$ geeft het punt $(0, 0)$.

$t=1$ geeft het punt $(-3, 1)$.

Dus evenwijdig met de x -as in de punten $(0, 0)$ en $(-3, 1)$.

Evenwijdig met de y -as als $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$$t=2 \wedge t \neq 0 \wedge t \neq 1 \wedge t \neq 2$$

Er is dus geen waarde van t die voldoet, dus er zijn geen punten waarin de raaklijn evenwijdig is met de y -as.

- b** Naar links betekent $x'(t) < 0$

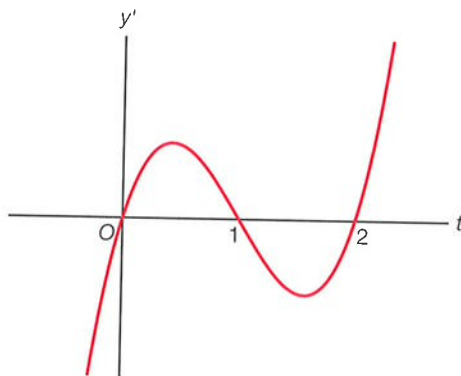
$$2t - 4 < 0$$

$$2t < 4$$

$$t < 2$$

$y'(t) = 0$ geeft $t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2$ (zie a)

Omhoog betekent $y'(t) > 0$.



$y'(t) > 0$ geeft $0 < t < 1 \vee t > 2$

$$x'(t) < 0 \wedge y'(t) > 0$$

$$t < 2 \wedge (0 < t < 1 \vee t > 2)$$

$$0 < t < 1$$

Dus naar links en omhoog voor $0 < t < 1$.

- c** $x(t) = -3$ geeft $t^2 - 4t = -3$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 3$$

$t = 1$ geeft het punt $(-3, 1)$, dus voldoet niet.

$t = 3$ geeft het punt $(-3, 9)$, dus voldoet.

$$x'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 \text{ en } y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 24$$

$$\text{De baansnelheid is } v'(3) = \sqrt{2^2 + 24^2} = \sqrt{580} = 2\sqrt{145}.$$

- d** $v(t) = \sqrt{(2t-4)^2 + (4t^3 - 12t^2 + 8t)^2}$

$$\text{Voer in } y_1 = \sqrt{(2x-4)^2 + (4x^3 - 12x^2 + 8x)^2}.$$

De optie minimum geeft $x = 2$ en $y = 0$.

De minimale baansnelheid is 0 voor $t = 2$.

- e** $x'(t) = 2t - 4$ geeft $x''(t) = 2$

$$y'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8t \text{ geeft } y''(t) = 12t^2 - 24t + 8$$

De versnellingsvector is evenwijdig met de lijn $y = x$ als $y''(t) = x''(t)$

$$12t^2 - 24t + 8 = 2$$

$$12t^2 - 24t + 6 = 0$$

$$2t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$t = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} \vee t = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4}$$

$$t = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee t = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

- 21 a** $y(t) = 0$ geeft $t^2 - 1 = 0$

$$t^2 = 1$$

$$t = 1 \vee t = -1$$

$t = 1$ geeft het punt $(0, 0)$.

$t = -1$ geeft het punt $(6, 0)$.

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(6, 0)$.

$$x(t) = 0 \text{ geeft } -t^3 + 3t^2 - 2t = 0$$

$$-t(t^2 - 3t + 2) = 0$$

$$-t(t-1)(t-2) = 0$$

$$t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2$$

$t = 0$ geeft het punt $(0, -1)$.

$t = 1$ geeft het punt $(0, 0)$.

$t = 2$ geeft het punt $(0, 3)$.

Dus de snijpunten met de y -as zijn $(0, -1)$, $(0, 0)$ en $(0, 3)$.

b $x(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t$ geeft $x'(t) = -3t^2 + 6t - 2$

$y(t) = t^2 - 1$ geeft $y'(t) = 2t$

Evenwijdig met de x -as als $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$ en evenwijdig met de y -as als $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.

$x'(t) = 0$ geeft $-3t^2 + 6t - 2 = 0$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = 12, \text{ dus } \sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$t = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{-6} \vee t = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{-6}$$

$$t = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee t = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$y'(t) = 0$ geeft $2t = 0$

$$t = 0$$

Dus raaklijn evenwijdig met de x -as of met de y -as voor $t = 0 \vee t = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee t = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

c Evenwijdig met de lijn $y = 2x + 3$ geeft $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot x'(t) = 1 \cdot y'(t)$$

$$2(-3t^2 + 6t - 2) = 2t$$

$$-6t^2 + 12t - 4 = 2t$$

$$-6t^2 + 10t - 4 = 0$$

$$3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$$

$$t = \frac{5+1}{6} = 1 \vee t = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$$

$t = 1$ geeft het punt $(0, 0)$.

$t = \frac{2}{3}$ geeft het punt $(-\frac{8}{27}, -\frac{5}{9})$.

Dus de punten zijn $(0, 0)$ en $(-\frac{8}{27}, -\frac{5}{9})$.

d $y(t) = 8$ geeft $t^2 - 1 = 8$

$$t^2 = 9$$

$$t = 3 \vee t = -3$$

$t = 3$ geeft het punt $(-6, 8)$, dus voldoet.

$t = -3$ geeft het punt $(60, 8)$, dus voldoet niet.

$x'(3) = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 2 = -11$ en $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

De baansnelheid is $v(3) = \sqrt{(-11)^2 + 6^2} = \sqrt{157}$.

e $y(t) = -\frac{3}{4}$ geeft $t^2 - 1 = -\frac{3}{4}$

$$t^2 = \frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{2} \vee t = -\frac{1}{2}$$

$x(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$, dus $t = \frac{1}{2}$ voldoet.

$x(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot -\frac{1}{2} = \frac{7}{8}$, dus $t = -\frac{1}{2}$ voldoet niet.

$$v(t) = \sqrt{(-3t^2 + 6t - 2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 - 18t^3 + 6t^2 - 18t^3 + 36t^2 - 12t + 6t^2 - 12t + 4 + 4t^2}$$

$$= \sqrt{9t^4 - 36t^3 + 52t^2 - 24t + 4}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{9t^4 - 36t^3 + 52t^2 - 24t + 4}} \cdot (36t^3 - 108t^2 + 104t - 24) = \frac{18t^3 - 54t^2 + 52t - 12}{\sqrt{9t^4 - 36t^3 + 52t^2 - 24t + 4}}$$

$$a(\frac{1}{2}) = \frac{18 \cdot \frac{1}{8} - 54 \cdot \frac{1}{4} + 52 \cdot \frac{1}{2} - 12}{\sqrt{9 \cdot \frac{1}{16} - 36 \cdot \frac{1}{8} + 52 \cdot \frac{1}{4} - 24 \cdot \frac{1}{2} + 4}} = \frac{2\frac{3}{4}}{\sqrt{1\frac{1}{16}}} = \frac{11}{17}\sqrt{17}$$

Dus de baanversnelling is $\frac{11}{17}\sqrt{17}$.