

Gemengde opgaven

1 Functies en grafieken

Bladzijde 182

1 a
$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -1 + 2b = 2 \\ 3 + 2b = 2 \\ 2b = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2} \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3}a \cdot -1 - \frac{1}{2} = 2 \\ -\frac{1}{3}a = 2\frac{1}{2} \\ a = -7\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $a = -7\frac{1}{2}$ en $b = -\frac{1}{2}$.

b
$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ \text{door } C(0, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 + 2b = 4 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}ax + 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}ax + 2 \\ \text{door } B(2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3}a \cdot 2 + 2 = 0 \\ \frac{2}{3}a = -2 \\ a = -3 \end{array}$$

$k: y = -x + 2$ en $l: y = -3x + 4$ snijden geeft $-x + 2 = -3x + 4$

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 2 \\ x = 1 \\ y = -x + 2 \end{array} \right\} y = 1$$

Dus $S(1, 1)$.

c $k \parallel l$ geeft $rc_k = rc_l$

$$\frac{1}{3}a = -3$$

 $a = -9$

Dus $k: y = -3x + b$ en $l: y = -3x + 2b$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x + b = 0 \\ -3x = -b \\ x = \frac{1}{3}b \end{array}$$

Dus snijpunt van k met de x -as is $P(\frac{1}{3}b, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x + 2b = 0 \\ -3x = -2b \\ x = \frac{2}{3}b \end{array}$$

Dus snijpunt van l met de x -as is $Q(\frac{2}{3}b, 0)$.

$PQ = 2$ geeft $\frac{1}{3}b - \frac{2}{3}b = 2 \vee \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}b = 2$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{3}b = 2 \vee \frac{1}{3}b = 2 \\ b = -6 \vee b = 6 \end{array}$$

Dus $a = -9$ en $b = -6$ of $b = 6$.

- 2 a** 33 km/uur geeft $\frac{33}{60} = \frac{11}{20}$ km/minuut.

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{11}{20}t + b \\ t = 5 \text{ en } s = 0 \end{array} \right\} \frac{11}{20} \cdot 5 + b = 0$$

$$\frac{11}{4} + b = 0$$

$$b = -2\frac{3}{4}$$

Dus voor Marc geldt de formule $s = \frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4}$.

$$\text{Los op } \frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4} = \frac{1}{2}t$$

$$\frac{1}{20}t = 2\frac{3}{4}$$

$$t = 55$$

Dus Marc haalt Harm in om 8:55 uur.

- b** 42 km/uur geeft $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$ km/minuut.

$$\left. \begin{array}{l} s = -\frac{7}{10}t + b \\ t = 0 \text{ en } s = 30 \end{array} \right\} b = 30$$

Dus voor Gerrit geldt de formule $s = -\frac{7}{10}t + 30$.

$$\text{Los op } \frac{1}{2}t = -\frac{7}{10}t + 30$$

$$\frac{12}{10}t = 30$$

$$t = 25$$

Dus Harm en Gerrit komen elkaar om 8:25 uur tegen.

- 3 a** $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$

$$y_{\text{top}} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + a = a - 4\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = ax - 3 \\ \text{door } (3, a - 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a - 3 = a - 4\frac{1}{2} \\ 2a = -1\frac{1}{2} \\ a = -\frac{3}{4} \end{array}$$

- b** $\frac{1}{2}x^2 - bx = 0$

$$\frac{1}{2}x(x - 2b) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2b$$

Dus de snijpunten met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(2b, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = bx - 18 \\ \text{door } (0, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 - 18 = 0 \\ \text{geen opl.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = bx - 18 \\ \text{door } (2b, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \cdot 2b - 18 = 0 \\ 2b^2 = 18 \\ b^2 = 9 \\ b = 3 \vee b = -3 \end{array}$$

- c** $2x + c = 0$

$$2x = -c$$

$$x = -\frac{1}{2}c$$

Dus snijpunt met de x -as is $(-\frac{1}{2}c, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x^2 - cx - 10 \\ \text{door } (-\frac{1}{2}c, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot (-\frac{1}{2}c)^2 - c \cdot (-\frac{1}{2}c) - 10 = 0 \\ 3 \cdot \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}c^2 = 10 \end{array}$$

$$1\frac{1}{4}c^2 = 10$$

$$c^2 = 8$$

$$c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \vee c = -2\sqrt{2}$$

4 a $7x^2 = 5x$
 $7x^2 - 5x = 0$
 $x(7x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee 7x = 5$
 $x = 0 \vee x = \frac{5}{7}$

b $2x^2 + x = 3$
 $2x^2 + x - 3 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$, dus $\sqrt{D} = 5$
 $x = \frac{-1 \pm 5}{4} = 1 \vee x = \frac{-1 - 5}{4} = -1\frac{1}{2}$

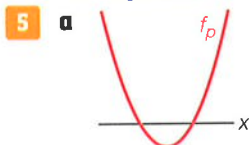
c $(x+2)(x-6) = 9$
 $x^2 - 6x + 2x - 12 = 9$
 $x^2 - 4x - 21 = 0$
 $(x+3)(x-7) = 0$
 $x = -3 \vee x = 7$

d $(x-3)^2 - (x+1) = x^2 - 1$
 $x^2 - 6x + 9 - x - 1 = x^2 - 1$
 $-7x = -9$
 $x = 1\frac{2}{7}$

e $(2x-3)^2 = 36$
 $2x-3 = 6 \vee 2x-3 = -6$
 $2x = 9 \vee 2x = -3$
 $x = 4\frac{1}{2} \vee x = -1\frac{1}{2}$

f $4 - (x-2)^2 = 7x - 3$
 $4 - (x^2 - 4x + 4) = 7x - 3$
 $4 - x^2 + 4x - 4 = 7x - 3$
 $-x^2 - 3x + 3 = 0$
 $x^2 + 3x - 3 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 21$
 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$
 $x = -1\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} \vee x = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$

Bladzijde 183



er moet gelden $D > 0$
 $D = (-p)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 9 = p^2 - 9$ $\left\{ \begin{array}{l} p^2 - 9 > 0 \\ p^2 > 9 \\ p < -3 \vee p > 3 \end{array} \right.$

b $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-p}{\frac{1}{2}} = 2p$
 $y_{\text{top}} = \frac{1}{4} \cdot (2p)^2 - p \cdot 2p + 9 = p^2 - 2p^2 + 9 = -p^2 + 9$
 $y = -3x + 2$
 door $(2p, -p^2 + 9)$ $\left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot 2p + 2 = -p^2 + 9 \\ p^2 - 6p - 7 = 0 \\ (p+1)(p-7) = 0 \\ p = -1 \vee p = 7 \end{array} \right.$

c $x_{\text{top}} = 2p$ geeft $p = \frac{1}{2}x_{\text{top}}$
 $y_{\text{top}} = \frac{1}{4}x_{\text{top}}^2 - \frac{1}{2}x_{\text{top}} \cdot x_{\text{top}} + 9 = -\frac{1}{4}x_{\text{top}}^2 + 9$
 Dus alle toppen liggen op de kromme $y = -\frac{1}{4}x^2 + 9$.

6 a één oplossing als $D = 0$
 $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 4p^2 - 64$ $\left\{ \begin{array}{l} 4p^2 - 64 = 0 \\ 4p^2 = 64 \\ p^2 = 16 \\ p = 4 \vee p = -4 \end{array} \right.$

- b** $p = 0$ geeft de vergelijking $3 = 0$ en die heeft geen oplossingen.

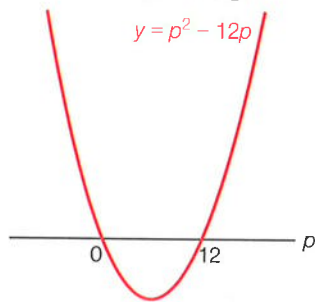
Voor $p \neq 0$ is $D = (-p)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 = p^2 - 12p$.

Geen oplossingen als $D < 0$.

$D = 0$ geeft $p^2 - 12p = 0$

$$p(p - 12) = 0$$

$$p = 0 \vee p = 12$$



$D < 0$ geeft $0 < p < 12$

Dus de vergelijking heeft geen oplossingen als $0 \leq p < 12$.

- c** $p = 0$ geeft de vergelijking $6x = 0$ en die heeft één oplossing, dus $p \neq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{twee oplossingen als } D > 0 \\ D = 6^2 - 4 \cdot p \cdot 3p = 36 - 12p^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 36 - 12p^2 > 0 \\ -12p^2 > -36 \\ p^2 < 3 \end{array}$$

$$-\sqrt{3} < p < \sqrt{3}$$

Dus twee oplossingen als $-\sqrt{3} < p < 0 \vee 0 < p < \sqrt{3}$.

- d** $x = 6$ geeft $6^2 + p \cdot 6 - 6p^2 = 0$

$$36 + 6p - 6p^2 = 0$$

$$p^2 - p - 6 = 0$$

$$(p + 2)(p - 3) = 0$$

$$p = -2 \vee p = 3$$

$$p = -2 \text{ geeft } x^2 - 2x - 6 \cdot (-2)^2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x + 4)(x - 6) = 0$$

$$x = -4 \vee x = 6$$

$$p = 3 \text{ geeft } x^2 + 3x - 6 \cdot 3^2 = 0$$

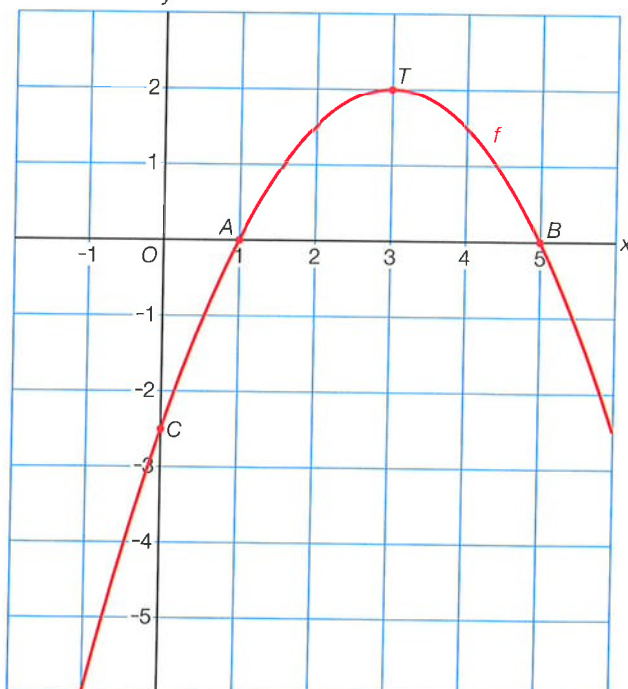
$$x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$(x - 6)(x + 9) = 0$$

$$x = 6 \vee x = -9$$

Voor $p = -2$ is de andere oplossing $x = -4$
en voor $p = 3$ is de andere oplossing $x = -9$.

7 a	x	-1	0	1	2	3	4	5	6
	$f(x)$	-6	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$



b $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 3$ en $y_{\text{top}} = f(3) = 2$, dus max. is $f(3) = 2$.

$B_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$

c $T(3, 2)$ en $y_C = f(0) = -2\frac{1}{2}$, dus $C(0, -2\frac{1}{2})$.

Stel $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - -2\frac{1}{2}}{3 - 0} = 1\frac{1}{2}$.

$y = 1\frac{1}{2}x + b$
door $C(0, -2\frac{1}{2}) \} b = -2\frac{1}{2}$

Dus $y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$.

d Zie vraag a: $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ en $T(3, 2)$.

$O(\triangle ABT) = \frac{1}{2} \cdot (5 - 1) \cdot 2 = 4$

e $f(x) = -4$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2} = -4$
 $x^2 - 6x + 5 = 8$
 $x^2 - 6x - 3 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 - 3 = 0$
 $(x - 3)^2 = 12$
 $x - 3 = \sqrt{12} \vee x - 3 = -\sqrt{12}$
 $x = 3 + \sqrt{12} \vee x = 3 - \sqrt{12}$
 $x = 3 + 2\sqrt{3} \vee x = 3 - 2\sqrt{3}$

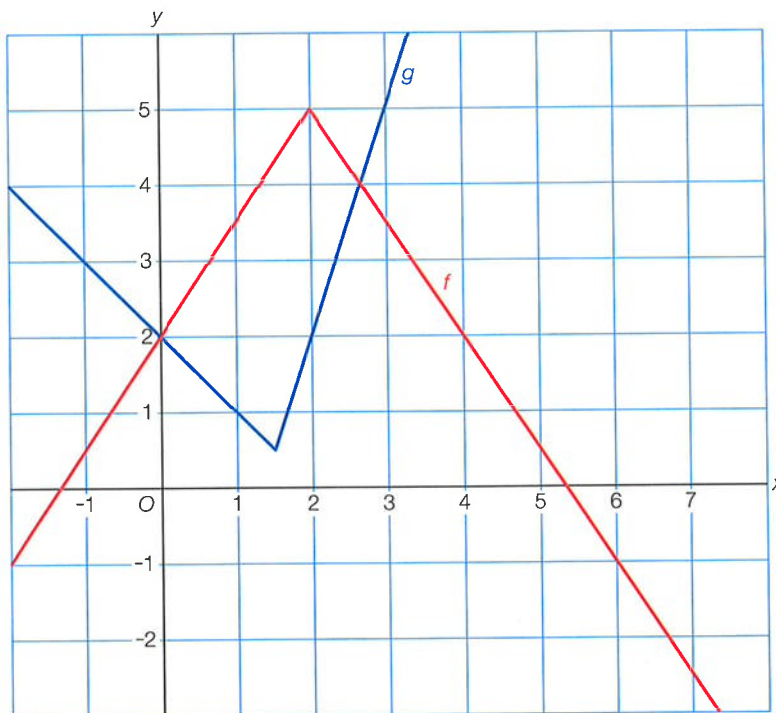
$3 + 2\sqrt{3} > 5$ kan niet, dus $a = 3 - 2\sqrt{3}$.

8 a $f(x) = 5 - (1\frac{1}{2}x - 3) = 5 - 1\frac{1}{2}x + 3 = -1\frac{1}{2}x + 8$ als $1\frac{1}{2}x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 2$ en

$f(x) = 5 - (-1\frac{1}{2}x + 3) = 5 + 1\frac{1}{2}x - 3 = 1\frac{1}{2}x + 2$ als $1\frac{1}{2}x - 3 < 0$, dus als $x < 2$.

$g(x) = x - 1 + 2x - 3 = 3x - 4$ als $2x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 1\frac{1}{2}$ en

$g(x) = x - 1 - 2x + 3 = -x + 2$ als $2x - 3 < 0$, dus als $x < 1\frac{1}{2}$.



b $x < 1\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2}x + 2 = -x + 2$

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{2}x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ geeft $g(0) = 0 + 2 = 2$

$x \geq 2$ geeft $-1\frac{1}{2}x + 8 = 3x - 4$

$$-4\frac{1}{2}x = -12$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$x = 2\frac{2}{3}$ geeft $g(2\frac{2}{3}) = 3 \cdot 2\frac{2}{3} - 4 = 4$

Dus de snijpunten zijn $(0, 2)$ en $(2\frac{2}{3}, 4)$.

c $g(x) = -x + 2$ $\left\{ \begin{aligned} -x_A + 2 &= 3 \\ A(x_A, 3) \end{aligned} \right.$

$$\begin{aligned} -x_A &= 1 \\ x_A &= -1 \end{aligned}$$

$f(x) = 1\frac{1}{2}x + 2$ $\left\{ \begin{aligned} 1\frac{1}{2}x_B + 2 &= 3 \\ B(x_B, 3) \end{aligned} \right.$

$$\begin{aligned} 1\frac{1}{2}x_B &= 1 \\ x_B &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$g(x) = 3x - 4$ $\left\{ \begin{aligned} 3x_C - 4 &= 3 \\ C(x_C, 3) \end{aligned} \right.$

$$\begin{aligned} 3x_C &= 7 \\ x_C &= 2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

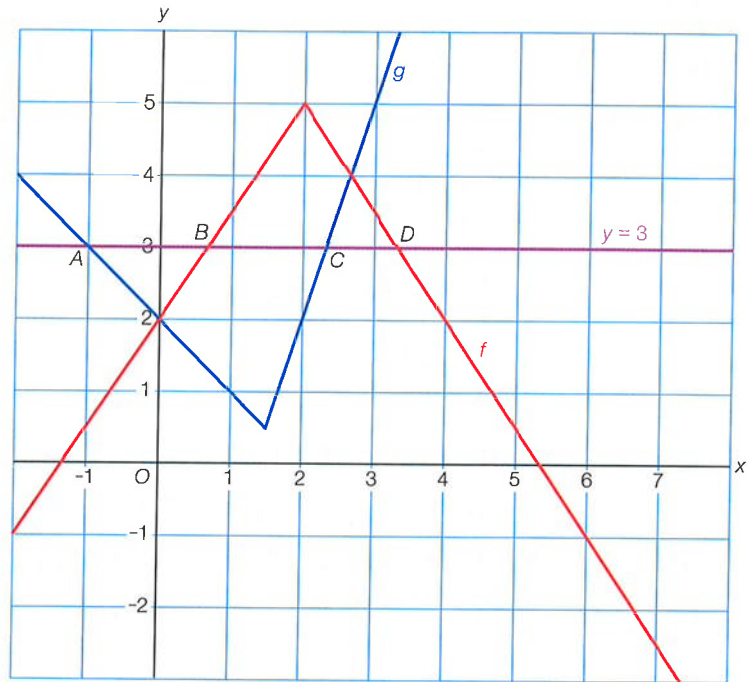
$f(x) = -1\frac{1}{2}x + 8$ $\left\{ \begin{aligned} -1\frac{1}{2}x_D + 8 &= 3 \\ D(x_D, 3) \end{aligned} \right.$

$$\begin{aligned} -1\frac{1}{2}x_D &= -5 \\ x_D &= 3\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$AB = \frac{2}{3} - (-1) = 1\frac{2}{3}$, $BC = 2\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$

en $CD = 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} = 1$.

Dus CD heeft de kleinste lengte.



9 a Voer in $y_1 = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$.

De optie maximum geeft de top $(-4, 9)$.

De optie minimum geeft de top $(0, -7)$.

$f(-1) = -4\frac{1}{2}$ en $f(2) = 9$

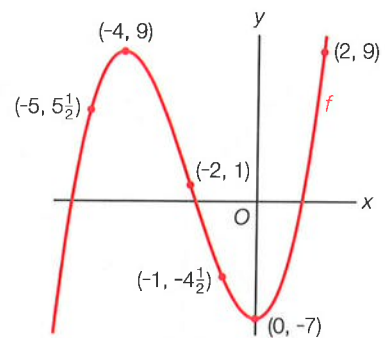
Zie de figuur.

$D_f = [-1, 2]$ geeft $B_f = [-7, 9]$

b $f(-5) = 5\frac{1}{2}$ en $f(-2) = 1$

Zie de figuur bij a.

$D_f = [-5, -2]$ geeft $B_f = [1, 9]$



10 a Voer in $y_1 = \frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 24x - 10$.

De optie minimum geeft de toppen $A(-1; -25,25)$ en $C(4, 6)$.

De optie maximum geeft de top $B(2, 22)$.

b Er zijn drie oplossingen als de lijn $y = a$ door de top B of de top C gaat.

Dus $a = 6 \vee a = 22$.

c Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 22}{4 - 2} = -8$.

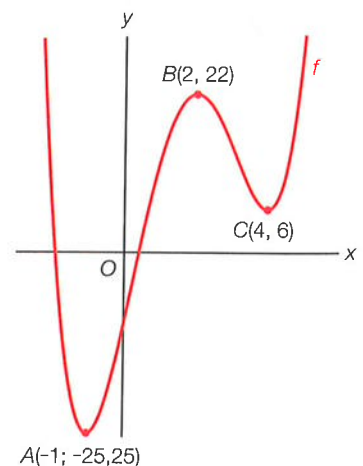
$y = -8x + b$ $\left\{ \begin{aligned} -8 \cdot 4 + b &= 6 \\ \text{door } C(4, 6) \end{aligned} \right.$

$$\begin{aligned} -32 + b &= 6 \\ b &= 38 \end{aligned}$$

Dus $k: y = -8x + 38$.

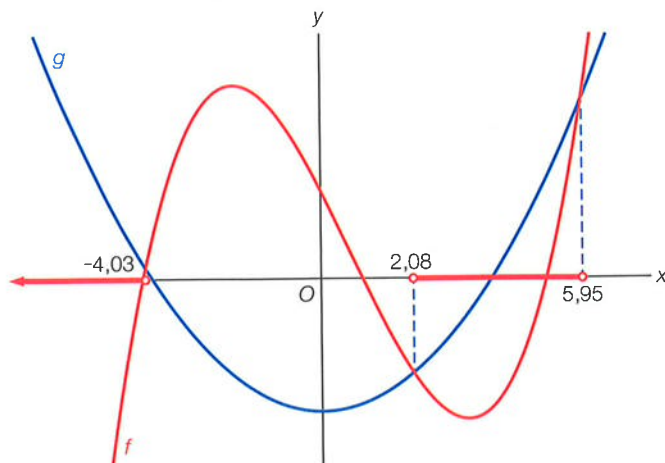
Voer in $y_2 = -8x + 38$.

De optie snijpunt geeft de punten $D(-2, 51)$ en $E(3, 18)$.

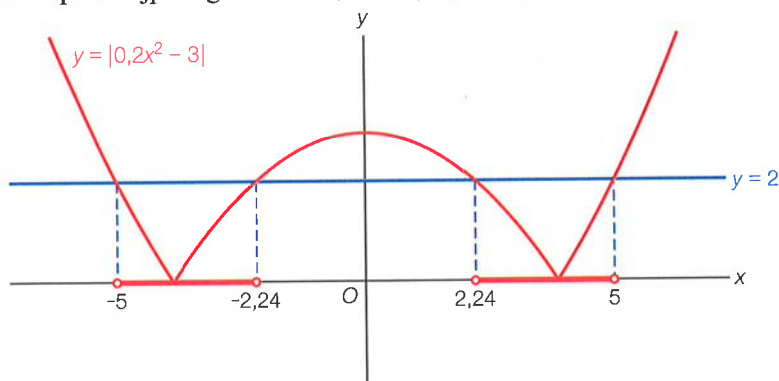


Bladzijde 184

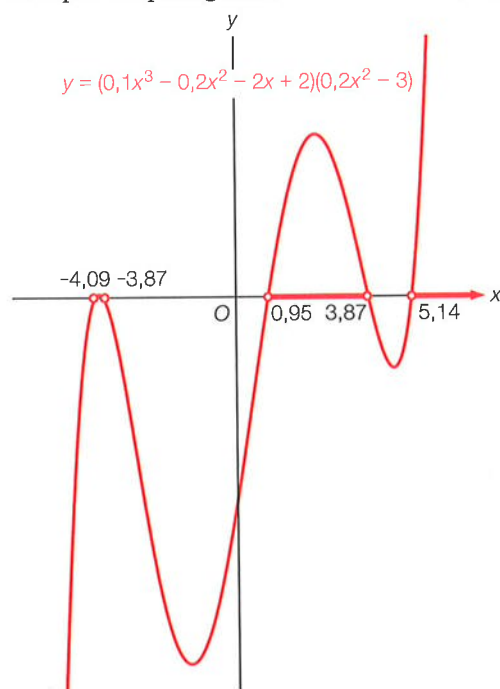
- 11 a** Voer in $y_1 = 0,1x^3 - 0,2x^2 - 2x + 2$ en $y_2 = 0,2x^2 - 3$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -4,03$, $x \approx 2,08$ en $x \approx 5,95$.



- $f(x) < g(x)$ geeft $x < -4,03 \vee 2,08 < x < 5,95$
b De optie nulpunt bij y_1 geeft $x \approx -4,09$, $x \approx 0,95$ en $x \approx 5,14$.
 $f(x) > 0$ geeft $-4,09 < x < 0,95 \vee x > 5,14$
c Voer in $y_1 = |0,2x^2 - 3|$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = -5$, $x \approx -2,24$, $x \approx 2,24$ en $x = 5$.



- $|g(x)| < 2$ geeft $-5 < x < -2,24 \vee 2,24 < x < 5$
d Voer in $y_1 = (0,1x^3 - 0,2x^2 - 2x + 2)(0,2x^2 - 3)$.
 De optie nulpunt geeft $x \approx -4,09$, $x \approx -3,87$, $x \approx 0,95$, $x \approx 3,87$ en $x \approx 5,14$



$f(x) \cdot g(x) > 0$ geeft $-4,09 < x < -3,87 \vee 0,95 < x < 3,87 \vee x > 5,14$