

Scorevoorstel oefentoets vwo B deel 4

Hoofdstuk 15 Afgeleiden en primitieven

In deze toets zijn de vragen gelabeld met K, T of I.

K = kennisvraag, T = toepassingsvraag, I = inzichtvraag

De toets bestaat uit veertien vragen met in totaal 69 punten.

Er zijn twee K-vragen met in totaal 2 punten, negen T-vragen met in totaal 47 punten en drie I-vragen met in totaal 20 punten.

OPGAVE 1

TOTAAL 2P

- K **a** afnemend dalend 1p
- K **b** $\frac{d}{dt} \left(\frac{dZ}{dt} \right)$ 1p

OPGAVE 2

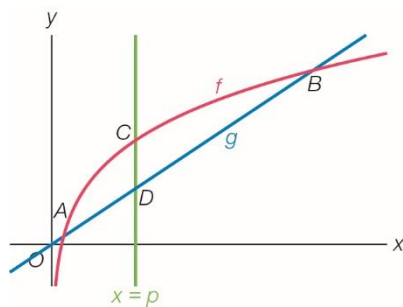
TOTAAL 7P

- T **a** stel $x_B = 3p$, dan is $x_C = 7p$ 1p
 $f(3p) = g(7p)$ geeft $\sqrt{15p} = \sqrt{35p-12}$ 1p
 $15p = 35p-12$ geeft $p = \frac{3}{5}$ 1p
 $q = f\left(\frac{9}{5}\right) = \sqrt{5 \cdot \frac{9}{5}} = \sqrt{9} = 3$ 1p
- T **b** $DE = 4EF$, dus $f(r) = \frac{5}{4}g(r)$ oftewel $4f(r) = 5g(r)$ 1p
 $4\sqrt{5r} = 5\sqrt{5r-12}$ geeft $16 \cdot 5r = 25(5r-12)$ 1p
 $80r = 125r - 300$ geeft $45r = 300$, dus $r = 6\frac{2}{3}$ 1p

OPGAVE 3

TOTAAL 7P

figuur zoals hieronder 1p



$$L = CD = f(p) - g(p) = \ln(p^2 + 4p) - \frac{2}{3}p \quad 1p$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{2p+4}{p^2+4p} - \frac{2}{3} \quad 2p$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{2p+4}{p^2+4p} = \frac{2}{3}, \text{ dus } 2p^2 + 8p = 6p + 12 \quad 1p$$

$$2p^2 + 2p - 12 = 0 \text{ oftewel } p^2 + p - 6 = 0, \text{ dus } (p-2)(p+3) = 0 \quad 1p$$

$$p = 2 \vee p = -3 \text{ (vold. niet), dus de maximale lengte is } \ln(12) - 1\frac{1}{3} \text{ voor } p = 2 \quad 1p$$

OPGAVE 4**TOTAAL 15P**

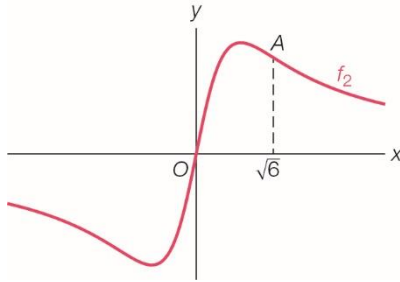
- T a** $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 16 = 1 - 9 + 24 - 16 = 0$, dus de grafiek van f snijdt de x -as in $(1, 0)$ 1p
 $f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 16 = 64 - 144 + 96 - 16 = 0$ 1p
 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ 1p
 $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 18 \cdot 4 + 24 = 48 - 72 + 24 = 0$ 1p
 $f(4) = 0$ en $f'(4) = 0$, dus de grafiek van f raakt de x -as in het punt $(4, 0)$ 1p
- I b** stel $x_p = p$, je krijgt
 $O(OPQR) = V(p) = p \cdot f(p) = p(p^3 - 9p^2 + 24p - 16) = p^4 - 9p^3 + 24p^2 - 16p$ 1p
 $V'(p) = 4p^3 - 27p^2 + 48p - 16$ 1p
 $V'(2) = 4 \cdot 2^3 - 27 \cdot 2^2 + 48 \cdot 2 - 16 = 4 > 0$ 1p
 $V'(3) = 4 \cdot 3^3 - 27 \cdot 3^2 + 48 \cdot 3 - 16 = -7 < 0$ 1p
uit $V'(2) > 0$ en $V'(3) < 0$ volgt dat er voor $2 < p < 3$ een maximum is voor V 1p
- T c** $k: y = ax + b$ met $a = f'(1\frac{1}{2}) = 3 \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 18 \cdot 1\frac{1}{2} + 24 = 3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ 1p
 $k \perp l$, dus $rc_l = -\frac{4}{15}$ 1p
 $l: y = -\frac{4}{15}x + b$ en l door $A(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{8})$ geeft $-\frac{4}{15} \cdot 1\frac{1}{2} + b = 3\frac{1}{8}$, dus $b = 3\frac{21}{40}$ 1p
de minimale afstand is de afstand tussen $A(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{8})$ en $B(0, 3\frac{21}{40})$ 1p
 $d(A, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + (\frac{2}{5})^2} = \sqrt{2\frac{41}{100}}$ 1p

OPGAVE 5

TOTAAL 19P

- I **a** $\cos(\alpha) = \frac{BP}{2}$, dus $BP = 2 \cos(\alpha)$ 1p
- $\sin(\alpha) = \frac{AP}{2}$, dus $AP = 2 \sin(\alpha)$ 1p
- $\angle CAS = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 60^\circ = \alpha + 30^\circ$ 1p
- $\cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{AS}{2}$, dus $AS = 2 \cos(\alpha + 30^\circ)$ 1p
- $O = BP \cdot (AP + AS) = 2 \cos(\alpha)(2 \sin(\alpha) + 2 \cos(\alpha + 30^\circ))$ 1p
- $\cos(\alpha + 30^\circ) = \cos(\alpha) \cos(30^\circ) - \sin(\alpha) \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \sin(\alpha)$ 1p
- $O = 2 \cos(\alpha)(2 \sin(\alpha) + \sqrt{3} \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) = 2 \cos(\alpha)(\sin(\alpha) + \sqrt{3} \cdot \cos(\alpha))$ 1p
- $O = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 2 \sqrt{3} \cdot \cos^2(\alpha) = \sin(2\alpha) + 2 \sqrt{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha))$
- $= \sin(2\alpha) + \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \cos(2\alpha) = \sin(2\alpha) + \sqrt{3} \cdot \cos(2\alpha) + \sqrt{3}$ 1p
- T **b** $O = \sin(2\alpha) + \sqrt{3} \cdot \cos(2\alpha) + \sqrt{3}$ geeft $\frac{dO}{d\alpha} = 2 \cos(2\alpha) - 2 \sqrt{3} \cdot \sin(2\alpha)$ 1p
- $\frac{dO}{d\alpha} = 0$ geeft $2 \sqrt{3} \cdot \sin(2\alpha) = 2 \cos(2\alpha)$, dus $\tan(2\alpha) = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ 1p
- $2\alpha = \frac{1}{6} \pi + k \cdot \pi$ geeft $\alpha = \frac{1}{12} \pi + k \cdot \frac{1}{2} \pi$, dus $\alpha = \frac{1}{12} \pi$ 1p
- $O_{\max} = \sin(\frac{1}{6} \pi) + \sqrt{3} \cdot \cos(\frac{1}{6} \pi) + \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$ 1p
- I **c** $\angle QBC = 180^\circ - \alpha - 60^\circ = 120^\circ - \alpha$ 1p
- $\cos(\alpha) = \frac{BP}{2}$, dus $BP = 2 \cos(\alpha)$, $\cos(120^\circ - \alpha) = \frac{BQ}{2}$, dus $BQ = 2 \cos(120^\circ - \alpha)$ en
- $\sin(120^\circ - \alpha) = \frac{CQ}{2}$, dus $CQ = 2 \sin(120^\circ - \alpha)$ 1p
- $\cos(120^\circ - \alpha) = \cos(120^\circ) \cos(\alpha) + \sin(120^\circ) \sin(\alpha) = -\frac{1}{2} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha)$ 1p
- $\sin(120^\circ - \alpha) = \sin(120^\circ) \cos(\alpha) - \cos(120^\circ) \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \sin(\alpha)$ 1p
- $O = (BP + BQ) \cdot CQ = (2 \cos(\alpha) - \cos(\alpha) + \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha))(\sqrt{3} \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$ 1p
- $O = (\cos(\alpha) + \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha))(\sqrt{3} \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$
- $= \sqrt{3} \cdot \cos^2(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 3 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \sqrt{3} \cdot \sin^2(\alpha)$ 1p
- $O = 4 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \sqrt{3}(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) = 2 \sin(2\alpha) + \sqrt{3}$ 1p

T	OPGAVE 6	TOTAAL 6P
	$f_p(x) = \frac{10x}{x^2 + p}$ geeft $f'_p(x) = \frac{(x^2 + p) \cdot 10 - 10x \cdot 2x}{(x^2 + p)^2} = \frac{-10x^2 + 10p}{(x^2 + p)^2}$	1p
	$f''_p(x) = \frac{(x^2 + p)^2 \cdot -20x - (-10x^2 + 10p) \cdot 2(x^2 + p) \cdot 2x}{(x^2 + p)^4}$	1p
	$f''_p(x) = \frac{-20x(x^2 + p) - 4x(-10x^2 + 10p)}{(x^2 + p)^3} = \frac{20x^3 - 60px}{(x^2 + p)^3}$	1p
	$f''_p(\sqrt{6}) = 0$ geeft $20 \cdot 6\sqrt{6} - 60p \cdot \sqrt{6} = 0$, dus $120\sqrt{6} - 60p\sqrt{6} = 0$ en dit geeft $p = 2$	1p
	schets zoals hieronder	1p



uit de schets volgt dat voor $p = 2$ de grafiek van f_p bij $x = \sqrt{6}$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend

	OPGAVE 7	TOTAAL 13P
T	a $f(x) = \frac{6x}{x+4} = \frac{6(x+4) - 24}{x+4} = 6 - \frac{24}{x+4}$ en $g(x) = \frac{x+5}{5x} = \frac{1}{5} + \frac{1}{x}$	1p
	$O(V) = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^a g(x) dx = \int_0^1 \left(6 - \frac{24}{x+4}\right) dx + \int_1^a \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{x}\right) dx$	1p
	$O(V) = \left[6x - 24 \ln x+4 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{5}x + \ln x \right]_1^a$	1p
	$O(V) = 6 - 24 \ln(5) - (0 - 24 \ln(4)) + \frac{1}{5}a + \ln(a) - (\frac{1}{5} + 0)$	1p
	$O(V) = 5\frac{4}{5} + 24 \ln(\frac{4}{5}) + \frac{1}{5}a + \ln(a)$	1p
	invoeren van $y_1 = 5\frac{4}{5} + 24 \ln(\frac{4}{5}) + \frac{1}{5}x + \ln(x)$ en $y_2 = 3$	1p
	de optie snijpunt geeft $x \approx 4,866$, dus $a \approx 4,866$	1p
T	b $y = \frac{x+5}{5x}$ geeft $5xy = x+5$ oftewel $5xy - x = 5$ en dus $x(5y-1) = 5$ oftewel $x = \frac{5}{5y-1}$	2p
	$I(L) = \pi \int_2^3 x^2 dy = \pi \int_2^3 \frac{25}{(5y-1)^2} dy = \pi \int_2^3 25(5y-1)^{-2} dy$	1p
	$I(L) = \pi \left[25 \cdot \frac{1}{5} \cdot -1(5y-1)^{-1} \right]_2^3 = \pi \left[\frac{-5}{5y-1} \right]_2^3$	2p
	$I(L) = \pi \left(\frac{-5}{14} - \frac{-5}{9} \right) = \frac{25}{126} \pi$	1p