

Scorevoorstel oefentoets vwo B deel 3

Hoofdstuk K Voortgezette integraalrekening

In deze toets zijn de vragen gelabeld met K, T of I.

K = kennisvraag, T = toepassingsvraag, I = inzichtvraag

De toets bestaat uit veertien vragen met in totaal 46 punten.

Er zijn twee K-vragen met in totaal 2 punten, negen T-vragen met in totaal 32 punten en drie I-vragen met in totaal 12 punten.

OPGAVE 1

TOTAAL 2P

- K **a** $f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \, d f(x)$ 1p
- K **b** $\frac{1}{x^2 + 1}$ 1p

OPGAVE 2

TOTAAL 13P

- T **a** $F(x) = \int \frac{1}{3}(3x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} \cdot 6x \, dx = \int \frac{1}{3}(3x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} \, d(3x^2 + 5) = \int \frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}} \, du$ 1p
 $F(x) = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} (3x^2 + 5) \sqrt{3x^2 + 5} + c$ 1p
- T **b** $F(x) = \int 2x \cdot 2 \cos(2x) \, dx = 2x \sin(2x) - \int 2 \sin(2x) \, dx$ 2p
 $F(x) = 2x \sin(2x) + \cos(2x) + c$ 1p
- T **c** $F(x) = \int -\frac{1}{\cos^2(x) + 1} \cdot -\sin(x) \, dx = \int -\frac{1}{\cos^2(x) + 1} \, d \cos(x)$ 1p
 $F(x) = -\arctan(\cos(x)) + c$ 1p
- I **d** $F(x) = \int -\frac{1}{\cos^2(x) - 1} \cdot -\sin(x) \, dx = \int -\frac{1}{\cos^2(x) - 1} \, d \cos(x)$ 1p
 $F(x) = \int -\frac{1}{u^2 - 1} \, du = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{u+1} - \frac{\frac{1}{2}}{u-1} \right) \, du$ 2p
 $F(x) = \frac{1}{2} \ln|u+1| - \frac{1}{2} \ln|u-1| + c = \frac{1}{2} \ln|\cos(x)+1| - \frac{1}{2} \ln|\cos(x)-1| + c$ 1p
- T **e** $F(x) = \int 1\frac{1}{2} \tan(2x) \cdot 2x \, dx = \int 1\frac{1}{2} \tan(2x) \, d 2x$ 1p
 $F(x) = -1\frac{1}{2} \ln|\cos(2x)| + c$ 1p

OPGAVE 3**TOTAAL 6P**

- T **a** $\int_{\frac{1}{12}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} \frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)} dx = \int_{\frac{1}{12}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2(2x)} \cdot 2 \cos(2x) dx = \int_{x=\frac{1}{12}\pi}^{x=\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2(2x)} d\sin(2x)$ 1p
- $\int_{x=\frac{1}{12}\pi}^{x=\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2(2x)} d\sin(2x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{1}{u^2} du = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{1}{2} u^{-2} du = \left[-\frac{1}{2} u^{-1} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \left[-\frac{1}{2u} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$ 1p
- $\left[-\frac{1}{2u} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ 1p
- T **b** $\int_{-2}^0 \frac{8}{(x+2)^2 + 4} dx = \int_{-2}^0 \frac{2}{\frac{1}{4}(x+2)^2 + 1} dx = \int_{-2}^0 \frac{2}{(\frac{1}{2}x+1)^2 + 1} dx$ 1p
- $\int_{-2}^0 \frac{2}{(\frac{1}{2}x+1)^2 + 1} dx = \left[2 \cdot 2 \arctan(\frac{1}{2}x+1) \right]_{-2}^0 = \left[4 \arctan(\frac{1}{2}x+1) \right]_{-2}^0$ 1p
- $\left[4 \arctan(\frac{1}{2}x+1) \right]_{-2}^0 = 4 \arctan(1) - 4 \arctan(0) = \pi$ 1p

OPGAVE 4**TOTAAL 4P**

$$F(x) = \int e^{-\sqrt{x}} dx = \int 2\sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int 2\sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} d\sqrt{x} = \int 2u e^{-u} du$$

$$\int 2u e^{-u} du = -2u e^{-u} + \int 2e^{-u} du = -2u e^{-u} - 2e^{-u} + c$$

$$F(x) = -2\sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + c = \frac{-2\sqrt{x} - 2}{e^{\sqrt{x}}} + c$$

OPGAVE 5**TOTAAL 11P**

- T **a** $f(x) = \frac{1-4x^2}{16x^2-8x+1} = \frac{1-4x^2}{(4x-1)^2}$ geeft 3p
- $f'(x) = \frac{(4x-1)^2 \cdot (-8x) - (1-4x^2) \cdot 2(4x-1) \cdot 4}{(4x-1)^4} = \frac{8x-8}{(4x-1)^3}$ 3p
- $f'(x) = 0$ geeft $8x-8=0$, dus $x=1$ 1p
- min. is $f(1) = -\frac{1}{3}$ 1p
- T **b** $f(x) = 0$ geeft $1-4x^2=0$ oftewel $x^2 = \frac{1}{4}$, dus $x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$ 1p
- $f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{16}(32x-8) + \frac{3}{4}}{16x^2-8x+1}$ 1p
- $f(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \cdot \frac{32x-8}{16x^2-8x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{(4x-1)^2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \cdot \frac{32x-8}{16x^2-8x+1} + \frac{3}{4}(4x-1)^{-2}$ 1p
- $O(V) = \left[-\frac{1}{4}x - \frac{1}{16} \ln|16x^2-8x+1| - \frac{3}{16}(4x-1)^{-1} \right]_{-\frac{1}{2}}^0$ 2p
- $O(V) = \left[-\frac{1}{4}x - \frac{1}{16} \ln|16x^2-8x+1| - \frac{3}{16(4x-1)} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 =$
- $\frac{3}{16} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16} \ln(9) + \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{16} \ln(9) = \frac{1}{8} \ln(3)$ 1p

OPGAVE 6**TOTAAL 10P**

- T a** $x(t) = 0$ geeft $4t = t^2$, dus $t = 0 \vee t = 4$ 1p
- $y(t) = 0$ geeft $t(t^2 - 4t + 3) = 0$ oftewel $t(t-1)(t-3) = 0$, dus $t = 0 \vee t = 1 \vee t = 3$ 1p
- $t = 0$ geeft $(0, 0)$, $t = 1$ geeft $(3, 0)$, $t = 3$ geeft $(3, 0)$ en $t = 4$ geeft $(0, 12)$,
- dus $O(V) = \int_{t=1}^{t=3} y \, dx$ 1p
- $O(V) = \int_{t=1}^{t=3} (t^3 - 4t^2 + 3t) d(4t - t^2) = \int_1^3 (t^3 - 4t^2 + 3t)(4 - 2t) \, dt =$ 1p
- $\int_1^3 (-2t^4 + 12t^3 - 22t^2 + 12t) \, dt = \left[-\frac{2}{5}t^5 + 3t^4 - \frac{22}{3}t^3 + 6t^2 \right]_1^3 = \frac{8}{15}$ 2p
- I b** $O(W) = \int_{t=4}^{t=3} y \, dx + \int_{t=0}^{t=1} y \, dx$ 1p
- $\int_{t=4}^{t=3} y \, dx = \left[-\frac{2}{5}t^5 + 3t^4 - \frac{22}{3}t^3 + 6t^2 \right]_4^3 = 16\frac{11}{15}$ 1p
- $\int_{t=0}^{t=1} y \, dx = \left[-\frac{2}{5}t^5 + 3t^4 - \frac{22}{3}t^3 + 6t^2 \right]_0^1 = 1\frac{4}{15}$ 1p
- $O(W) = 16\frac{11}{15} - 1\frac{4}{15} = 15\frac{7}{15}$ 1p