Gemengde opgaven

1 Functies en grafieken

Bladzijde 182

1 **a** $\left.\begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array}\right\}$ $-3 \cdot -1 + 2b = 2$

$3 + 2b = 2$

$2b = -1$

$b = -\frac{1}{2}$

Dus k: $y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2} \\ \text{door } A(-1, 2) \end{array}\right\}$ $\frac{1}{3}a \cdot -1 - \frac{1}{2} = 2$

$-\frac{1}{3}a = 2\frac{1}{2}$

$a = -7\frac{1}{2}$

Dus $a = -7\frac{1}{2}$ en $b = -\frac{1}{2}$.

b $\left.\begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ \text{door } C(0, 4) \end{array}\right\}$ $0 + 2b = 4$

$b = 2$

Dus k: $y = \frac{1}{3}ax + 2$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}ax + 2 \\ \text{door } B(2, 0) \end{array}\right\}$ $\frac{1}{3}a \cdot 2 + 2 = 0$

$\frac{2}{3}a = -2$

$a = -3$

k: $y = -x + 2$ en l: $y = -3x + 4$ snijden geeft $-x + 2 = -3x + 4$

$2x = 2$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$ $y = 1$

Dus $S(1, 1)$.

c $k \,//\, l$ geeft $\text{rc}_k = \text{rc}_l$

$\frac{1}{3}a = -3$

$a = -9$

Dus k: $y = -3x + b$ en l: $y = -3x + 2b$.

$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ y = 0 \end{array}\right\}$ $-3x + b = 0$

$-3x = -b$

$x = \frac{1}{3}b$

Dus snijpunt van k met de x-as is $P(\frac{1}{3}b, 0)$.

$\left.\begin{array}{l} y = -3x + 2b \\ y = 0 \end{array}\right\}$ $-3x + 2b = 0$

$-3x = -2b$

$x = \frac{2}{3}b$

Dus snijpunt van l met de x-as is $Q(\frac{2}{3}b, 0)$.

$PQ = 2$ geeft $\frac{1}{3}b - \frac{2}{3}b = 2 \vee \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}b = 2$

$-\frac{1}{3}b = 2 \vee \frac{1}{3}b = 2$

$b = -6 \vee b = 6$

Dus $a = -9$ en $b = -6$ of $b = 6$.

2 **a** 33 km/uur geeft $\frac{33}{60} = \frac{11}{20}$ km/minuut.

$$\left.\begin{array}{l} s = \frac{11}{20}t + b \\ t = 5 \text{ en } s = 0 \end{array}\right\} \frac{11}{20} \cdot 5 + b = 0$$

$$\frac{11}{4} + b = 0$$

$$b = -2\tfrac{3}{4}$$

Dus voor Marc geldt de formule $s = \frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4}$.

Los op $\frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4} = \frac{1}{2}t$

$\frac{1}{20}t = 2\frac{3}{4}$

$t = 55$

Dus Marc haalt Harm in om 8:55 uur.

b 42 km/uur geeft $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$ km/minuut.

$$\left.\begin{array}{l} s = -\frac{7}{10}t + b \\ t = 0 \text{ en } s = 30 \end{array}\right\} b = 30$$

Dus voor Gerrit geldt de formule $s = -\frac{7}{10}t + 30$.

Los op $\frac{1}{2}t = -\frac{7}{10}t + 30$

$\frac{12}{10}t = 30$

$t = 25$

Dus Harm en Gerrit komen elkaar om 8:25 uur tegen.

3 **a** $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$

$y_{\text{top}} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + a = a - 4\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} y = ax - 3 \\ \text{door } (3,\ a - 4\frac{1}{2}) \end{array}\right\} 3a - 3 = a - 4\tfrac{1}{2}$$

$$2a = -1\tfrac{1}{2}$$

$$a = -\tfrac{3}{4}$$

b $\frac{1}{2}x^2 - bx = 0$

$\frac{1}{2}x(x - 2b) = 0$

$x = 0 \vee x = 2b$

Dus de snijpunten met de x-as zijn $(0, 0)$ en $(2b, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = bx - 18 \\ \text{door } (0, 0) \end{array}\right\} 0 - 18 = 0$$

geen opl.

$$\left.\begin{array}{l} y = bx - 18 \\ \text{door } (2b, 0) \end{array}\right\} b \cdot 2b - 18 = 0$$

$$2b^2 = 18$$

$$b^2 = 9$$

$$b = 3 \vee b = -3$$

c $2x + c = 0$

$2x = -c$

$x = -\frac{1}{2}c$

Dus snijpunt met de x-as is $(-\frac{1}{2}c, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - cx - 10 \\ \text{door } (-\frac{1}{2}c, 0) \end{array}\right\} 3 \cdot (-\tfrac{1}{2}c)^2 - c \cdot -\tfrac{1}{2}c - 10 = 0$$

$$3 \cdot \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}c^2 = 10$$

$$1\tfrac{1}{4}c^2 = 10$$

$$c^2 = 8$$

$$c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \vee c = -2\sqrt{2}$$

4 **a** $7x^2 = 5x$
$7x^2 - 5x = 0$
$x(7x - 5) = 0$
$x = 0 \vee 7x = 5$
$x = 0 \vee x = \frac{5}{7}$

b $2x^2 + x = 3$
$2x^2 + x - 3 = 0$
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 25$, dus $\sqrt{D} = 5$
$x = \dfrac{-1+5}{4} = 1 \vee x = \dfrac{-1-5}{4} = -1\frac{1}{2}$

c $(x + 2)(x - 6) = 9$
$x^2 - 6x + 2x - 12 = 9$
$x^2 - 4x - 21 = 0$
$(x + 3)(x - 7) = 0$
$x = -3 \vee x = 7$

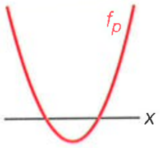
d $(x - 3)^2 - (x + 1) = x^2 - 1$
$x^2 - 6x + 9 - x - 1 = x^2 - 1$
$-7x = -9$
$x = 1\frac{2}{9}$

e $(2x - 3)^2 = 36$
$2x - 3 = 6 \vee 2x - 3 = -6$
$2x = 9 \vee 2x = -3$
$x = 4\frac{1}{2} \vee x = -1\frac{1}{2}$

f $4 - (x - 2)^2 = 7x - 3$
$4 - (x^2 - 4x + 4) = 7x - 3$
$4 - x^2 + 4x - 4 = 7x - 3$
$-x^2 - 3x + 3 = 0$
$x^2 + 3x - 3 = 0$
$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 21$
$x = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} \vee x = \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$
$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} \vee x = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$

Bladzijde 183

5 **a**



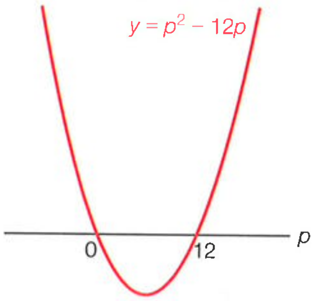
$\left.\begin{array}{l}\text{er moet gelden } D > 0 \\ D = (-p)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 9 = p^2 - 9\end{array}\right\}$ $p^2 - 9 > 0$
$p^2 > 9$
$p < -3 \vee p > 3$

b $x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-p}{\frac{1}{2}} = 2p$
$y_{top} = \frac{1}{4} \cdot (2p)^2 - p \cdot 2p + 9 = p^2 - 2p^2 + 9 = -p^2 + 9$
$\left.\begin{array}{l} y = -3x + 2 \\ \text{door } (2p, -p^2 + 9)\end{array}\right\}$ $-3 \cdot 2p + 2 = -p^2 + 9$
$p^2 - 6p - 7 = 0$
$(p + 1)(p - 7) = 0$
$p = -1 \vee p = 7$

c $x_{top} = 2p$ geeft $p = \frac{1}{2}x_{top}$
$y_{top} = \frac{1}{4}x_{top}{}^2 - \frac{1}{2}x_{top} \cdot x_{top} + 9 = -\frac{1}{4}x_{top}{}^2 + 9$
Dus alle toppen liggen op de kromme $y = -\frac{1}{4}x^2 + 9$.

6 **a** $\left.\begin{array}{l}\text{één oplossing als } D = 0 \\ D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 4p^2 - 64\end{array}\right\}$ $4p^2 - 64 = 0$
$4p^2 = 64$
$p^2 = 16$
$p = 4 \vee p = -4$

b $p = 0$ geeft de vergelijking $3 = 0$ en die heeft geen oplossingen.
Voor $p \neq 0$ is $D = (-p)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 = p^2 - 12p$.
Geen oplossingen als $D < 0$.
$D = 0$ geeft $p^2 - 12p = 0$
$p(p - 12) = 0$
$p = 0 \vee p = 12$



$D < 0$ geeft $0 < p < 12$
Dus de vergelijking heeft geen oplossingen als $0 \leq p < 12$.

c $p = 0$ geeft de vergelijking $6x = 0$ en die heeft één oplossing, dus $p \neq 0$.
twee oplossingen als $D > 0$
$D = 6^2 - 4 \cdot p \cdot 3p = 36 - 12p^2$
$36 - 12p^2 > 0$
$-12p^2 > -36$
$p^2 < 3$
$-\sqrt{3} < p < \sqrt{3}$
Dus twee oplossingen als $-\sqrt{3} < p < 0 \vee 0 < p < \sqrt{3}$.

d $x = 6$ geeft $6^2 + p \cdot 6 - 6p^2 = 0$
$36 + 6p - 6p^2 = 0$
$p^2 - p - 6 = 0$
$(p + 2)(p - 3) = 0$
$p = -2 \vee p = 3$

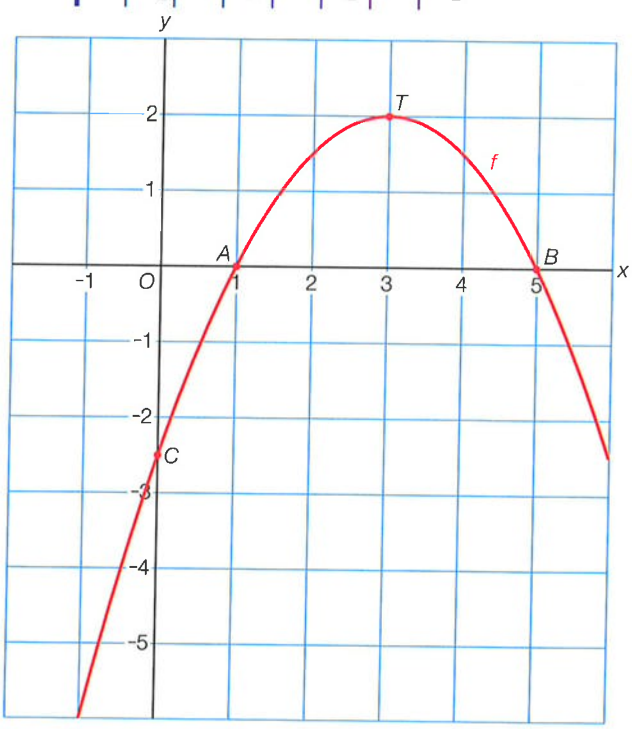
$p = -2$ geeft $x^2 - 2x - 6 \cdot (-2)^2 = 0$
$x^2 - 2x - 24 = 0$
$(x + 4)(x - 6) = 0$
$x = -4 \vee x = 6$

$p = 3$ geeft $x^2 + 3x - 6 \cdot 3^2 = 0$
$x^2 + 3x - 54 = 0$
$(x - 6)(x + 9) = 0$
$x = 6 \vee x = -9$

Voor $p = -2$ is de andere oplossing $x = -4$
en voor $p = 3$ is de andere oplossing $x = -9$.

7 **a**

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-6	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$



b $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 3$ en $y_{top} = f(3) = 2$, dus max. is $f(3) = 2$.

$B_f = \langle \leftarrow, 2]$

c $T(3, 2)$ en $y_C = f(0) = -2\frac{1}{2}$, dus $C(0, -2\frac{1}{2})$.

Stel $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - -2\frac{1}{2}}{3 - 0} = 1\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } C(0, -2\frac{1}{2}) \end{array}\right\} b = -2\frac{1}{2}$

Dus $y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$.

d Zie vraag a: $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ en $T(3, 2)$.

$O(\triangle ABT) = \frac{1}{2} \cdot (5 - 1) \cdot 2 = 4$

e $f(x) = -4$ geeft $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2} = -4$

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x + 5 &= 8 \\
x^2 - 6x - 3 &= 0 \\
(x-3)^2 - 9 - 3 &= 0 \\
(x-3)^2 &= 12 \\
x - 3 = \sqrt{12} &\vee x - 3 = -\sqrt{12} \\
x = 3 + \sqrt{12} &\vee x = 3 - \sqrt{12} \\
x = 3 + 2\sqrt{3} &\vee x = 3 - 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

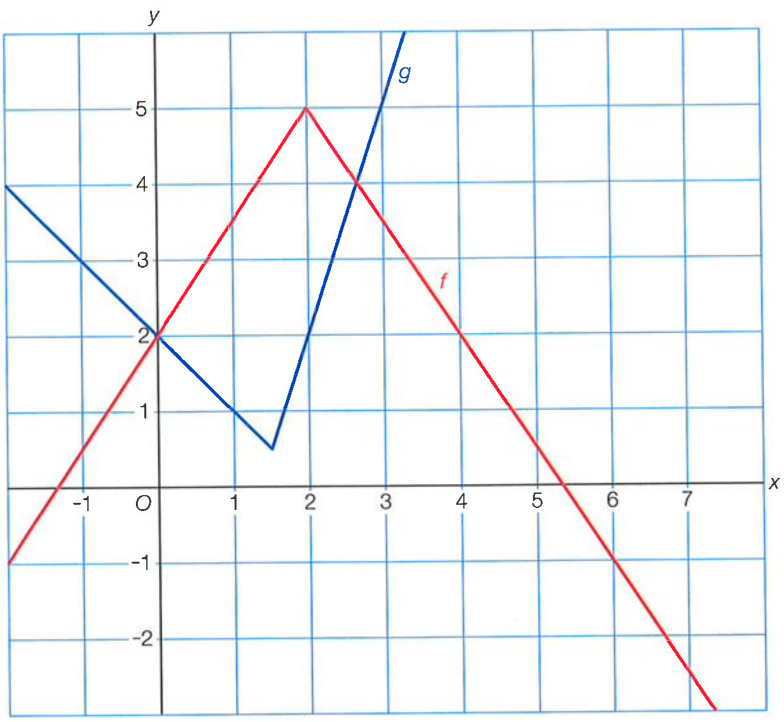
$3 + 2\sqrt{3} > 5$ kan niet, dus $a = 3 - 2\sqrt{3}$.

8 **a** $f(x) = 5 - (1\frac{1}{2}x - 3) = 5 - 1\frac{1}{2}x + 3 = -1\frac{1}{2}x + 8$ als $1\frac{1}{2}x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 2$ en

$f(x) = 5 - (-1\frac{1}{2}x + 3) = 5 + 1\frac{1}{2}x - 3 = 1\frac{1}{2}x + 2$ als $1\frac{1}{2}x - 3 < 0$, dus als $x < 2$.

$g(x) = x - 1 + 2x - 3 = 3x - 4$ als $2x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 1\frac{1}{2}$ en

$g(x) = x - 1 - 2x + 3 = -x + 2$ als $2x - 3 < 0$, dus als $x < 1\frac{1}{2}$.



b $x < 1\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2}x + 2 = -x + 2$

$$2\frac{1}{2}x = 0$$
$$x = 0$$

$x = 0$ geeft $g(0) = 0 + 2 = 2$

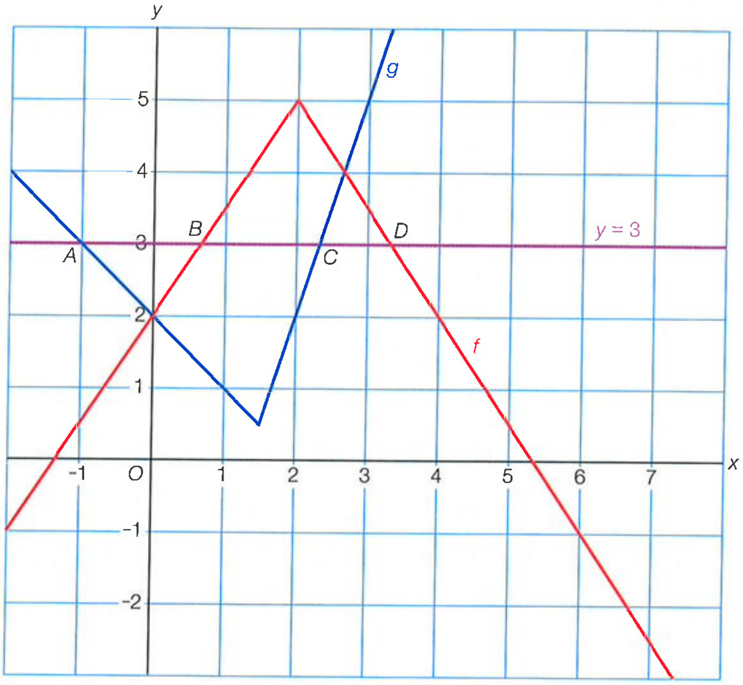
$x \geq 2$ geeft $-1\frac{1}{2}x + 8 = 3x - 4$

$$-4\frac{1}{2}x = -12$$
$$x = 2\frac{2}{3}$$

$x = 2\frac{2}{3}$ geeft $g(2\frac{2}{3}) = 3 \cdot 2\frac{2}{3} - 4 = 4$

Dus de snijpunten zijn $(0, 2)$ en $(2\frac{2}{3}, 4)$.

c $\left.\begin{array}{l} g(x) = -x + 2 \\ A(x_A, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -x_A + 2 = 3 \\ -x_A = 1 \\ x_A = -1 \end{array}$



$\left.\begin{array}{l} f(x) = 1\frac{1}{2}x + 2 \\ B(x_B, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2}x_B + 2 = 3 \\ 1\frac{1}{2}x_B = 1 \\ x_B = \frac{2}{3} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} g(x) = 3x - 4 \\ C(x_C, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x_C - 4 = 3 \\ 3x_C = 7 \\ x_C = 2\frac{1}{3} \end{array}$

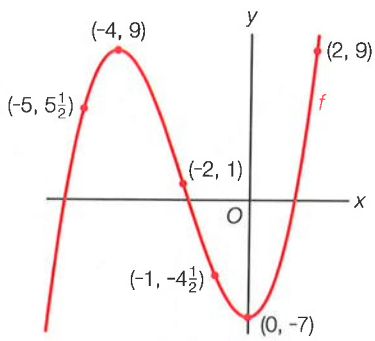
$\left.\begin{array}{l} f(x) = -1\frac{1}{2}x + 8 \\ D(x_D, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2}x_D + 8 = 3 \\ -1\frac{1}{2}x_D = -5 \\ x_D = 3\frac{1}{3} \end{array}$

$AB = \frac{2}{3} - -1 = 1\frac{2}{3}$, $BC = 2\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$

en $CD = 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} = 1$.

Dus CD heeft de kleinste lengte.

9 **a** Voer in $y_1 = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$.
De optie maximum geeft de top $(-4, 9)$.
De optie minimum geeft de top $(0, -7)$.
$f(-1) = -4\frac{1}{2}$ en $f(2) = 9$
Zie de figuur.
$D_f = [-1, 2]$ geeft $B_f = [-7, 9]$



b $f(-5) = 5\frac{1}{2}$ en $f(-2) = 1$
Zie de figuur bij a.
$D_f = [-5, -2]$ geeft $B_f = [1, 9]$

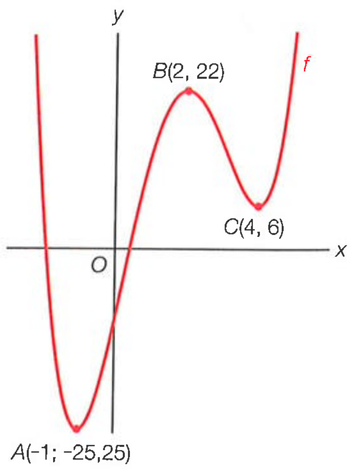
10 **a** Voer in $y_1 = \frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 24x - 10$.
De optie minimum geeft de toppen $A(-1; -25{,}25)$ en $C(4, 6)$.
De optie maximum geeft de top $B(2, 22)$.

b Er zijn drie oplossingen als de lijn $y = a$ door de top B of de top C gaat.
Dus $a = 6 \vee a = 22$.

c Stel k: $y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 22}{4 - 2} = -8$.

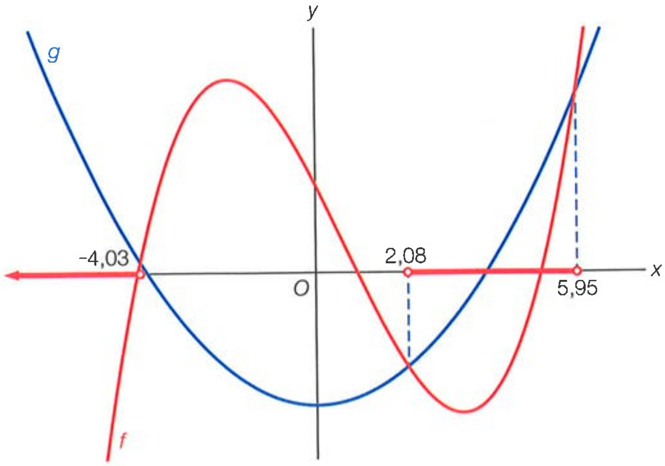
$\left.\begin{array}{l} y = -8x + b \\ \text{door } C(4, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -8 \cdot 4 + b = 6 \\ -32 + b = 6 \\ b = 38 \end{array}$

Dus k: $y = -8x + 38$.
Voer in $y_2 = -8x + 38$.
De optie snijpunt geeft de punten $D(-2{,}51; 58{,}12)$ en $E(3{,}18; 12{,}55)$.



Bladzijde 184

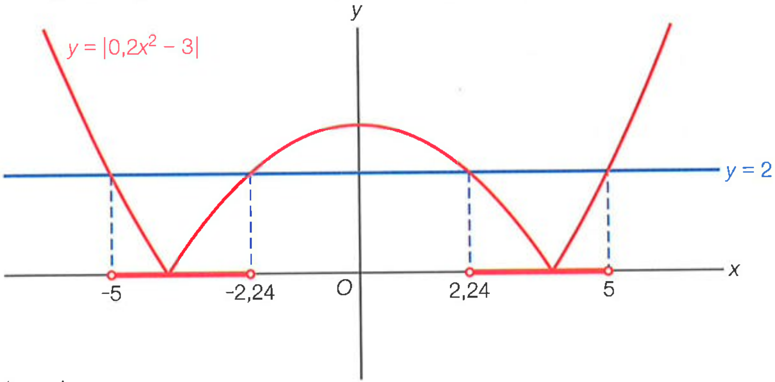
11 **a** Voer in $y_1 = 0{,}1x^3 - 0{,}2x^2 - 2x + 2$ en $y_2 = 0{,}2x^2 - 3$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -4{,}03$, $x \approx 2{,}08$ en $x \approx 5{,}95$.



$f(x) < g(x)$ geeft $x < -4{,}03 \vee 2{,}08 < x < 5{,}95$

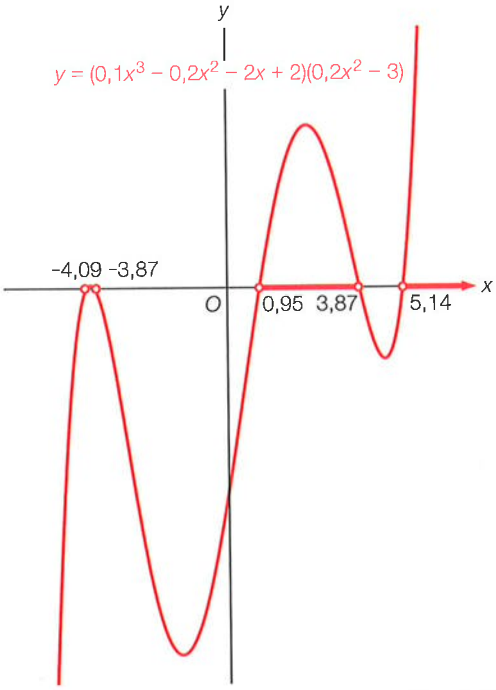
b De optie nulpunt bij y_1 geeft $x \approx -4{,}09$, $x \approx 0{,}95$ en $x \approx 5{,}14$.
$f(x) > 0$ geeft $-4{,}09 < x < 0{,}95 \vee x > 5{,}14$

c Voer in $y_1 = |0{,}2x^2 - 3|$ en $y_2 = 2$.
De optie snijpunt geeft $x = -5$, $x \approx -2{,}24$, $x \approx 2{,}24$ en $x = 5$.



$|g(x)| < 2$ geeft $-5 < x < -2{,}24 \vee 2{,}24 < x < 5$

d Voer in $y_1 = (0{,}1x^3 - 0{,}2x^2 - 2x + 2)(0{,}2x^2 - 3)$.
De optie nulpunt geeft $x \approx -4{,}09$, $x \approx -3{,}87$, $x \approx 0{,}95$, $x \approx 3{,}87$ en $x \approx 5{,}14$

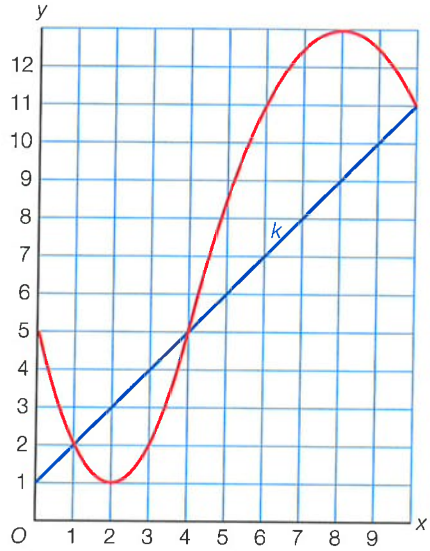


$f(x) \cdot g(x) > 0$ geeft $-4{,}09 < x < -3{,}87 \vee 0{,}95 < x < 3{,}87 \vee x > 5{,}14$

2 De afgeleide functie

12 **a** Afnemend dalend op $\langle\leftarrow, 2\rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 2, 4\rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 4, 8\rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 8, \rightarrow\rangle$.

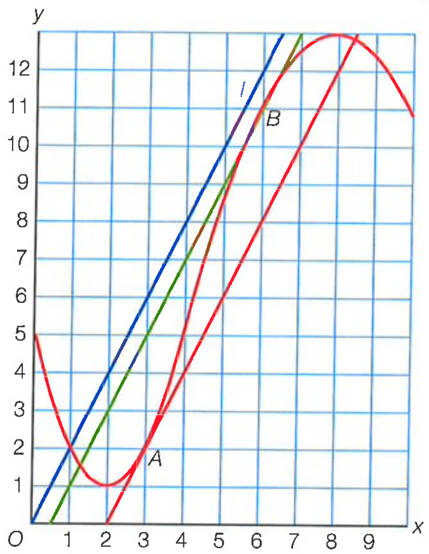
b Teken de lijn k met $\text{rc}_k = 1$ door het punt $(10, 11)$ van de grafiek.



k snijdt de grafiek links van $(10, 11)$ in de punten $(1, 2)$ en $(4, 5)$.
Dus op $[1, 10]$ en op $[4, 10]$ is de gemiddelde verandering gelijk aan 1.

c De intervallen $[0, 4]$, $[1, 3]$ en $[6, 10]$ zijn de intervallen waarvan de grenzen gehele getallen zijn en waarop het differentiequotiënt gelijk is aan 0.
Dus $[1, 3]$ is het gevraagde interval.

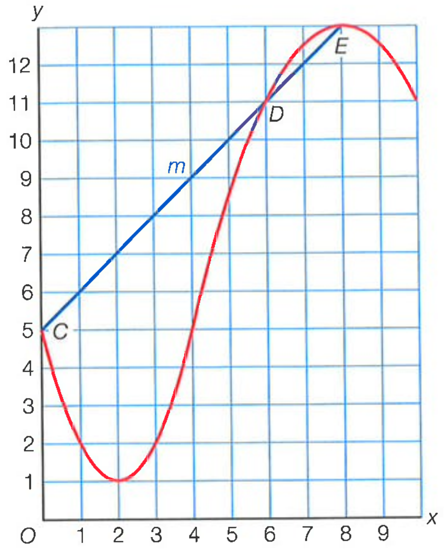
d Teken een lijn met richtingscoëfficiënt 2, bijvoorbeeld lijn l met $\text{rc}_l = 2$ door O in de figuur hieronder.
Teken lijnen evenwijdig met l die de grafiek raken.



In de raakpunten $A(3, 2)$ en $B(6, 11)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 2.

e Er zijn geen lijnen met richtingscoëfficiënt -7 die de grafiek raken.
Dus er ligt geen punt op de grafiek waarin de helling van de grafiek gelijk is aan -7.

f In een top is de helling van de grafiek gelijk aan 0.
Dus E is het hoogste punt van de grafiek, oftewel $E(8, 13)$.
Teken de lijn m met $\text{rc}_m = 1$ door E.



Dit geeft $C(0, 5)$ en $D(6, 11)$.

13 **a** Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16a + 4b + c - (0 + 0 + c)}{4} = \frac{16a + 4b}{4}$.

Dus $\frac{16a + 4b}{4} = 2$ oftewel $16a + 4b = 8$, dus $4a + b = 2$ oftewel $b = 2 - 4a$.

Op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9a + 3b + c - (4a + 2b + c)}{1} = \frac{5a + b}{1} = 5a + b$.

Dus $5a + b = 4$ oftewel $b = 4 - 5a$.

$b = 2 - 4a$ en $b = 4 - 5a$ geeft $2 - 4a = 4 - 5a$
$a = 2$

$a = 2$ geeft $b = 2 - 4 \cdot 2 = -6$

Dus $f(x) = 2x^2 - 6x + c$.

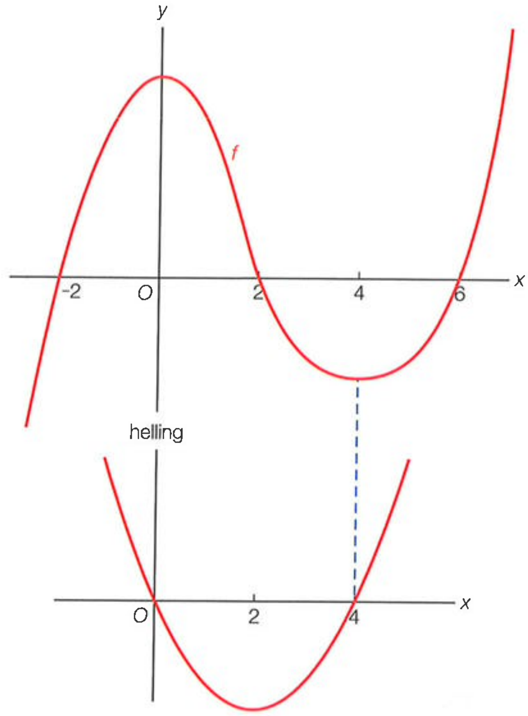
Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{50 - 30 + c - (2 - 6 + c)}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

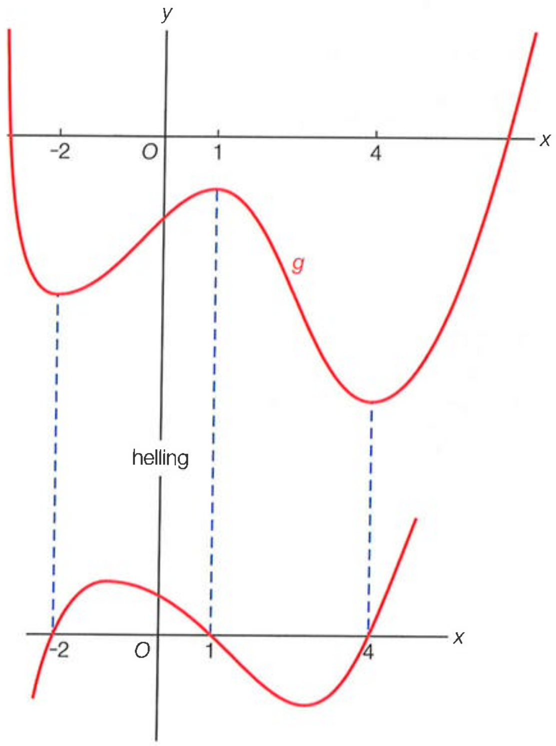
b Op $[0, c]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{2c^2 - 6c + c - (0 - 0 + c)}{c} = \frac{2c^2 - 6c}{c} = \frac{c(2c - 6)}{c} = 2c - 6$.

Er moet dus gelden $2c - 6 = c$ en dit geeft $c = 6$.

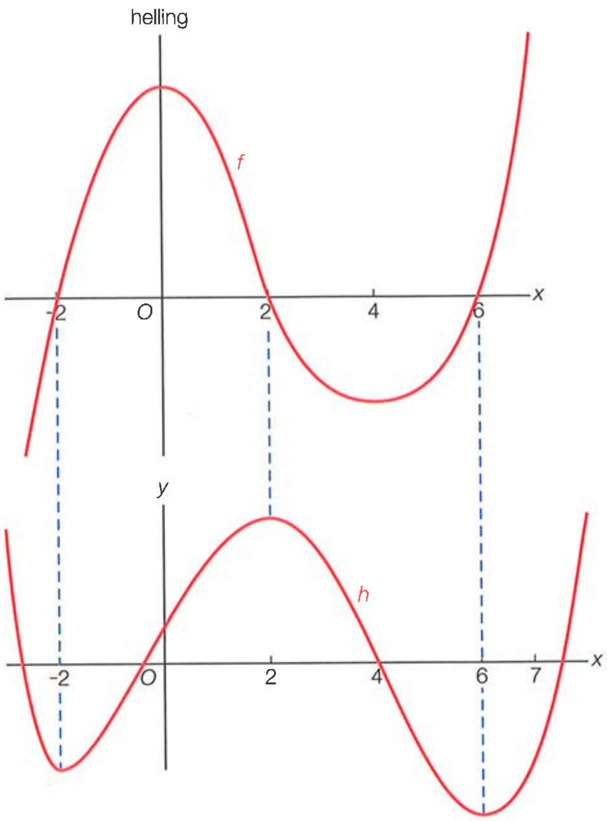
Bladzijde 185

14 **a**





b



15 **a** Voer in $y_1 = \dfrac{500x^2}{x^2 + 400}$.

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=15} = 15{,}36$

Op $t = 15$ is de snelheid $15{,}36 \cdot 3{,}6 \approx 55$ km/uur.

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=30} = 7{,}10...$

Op $t = 30$ is de snelheid $7{,}10... \cdot 3{,}6 \approx 26$ km/uur.

b $t = 50$ geeft $s = \dfrac{500 \cdot 50^2}{50^2 + 400} = 431{,}03...$

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=50} = 2{,}37...$

Dus na 1 minuut heeft de mountainbiker $431{,}03... + 10 \cdot 2{,}37... \approx 455$ meter afgelegd.

16 **a** Voer in $y_1 = \dfrac{5x + 6}{\sqrt{2x + 9}}$.

Stel l: $y = ax + b$ met $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=-4} = 19$.

$\left.\begin{array}{l} y = 19x + b \\ f(-4) = -14, \text{ dus } A(-4, -14) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 19 \cdot -4 + b = -14 \\ -76 + b = -14 \\ b = 62 \end{array}$

Dus l: $y = 19x + 62$.

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0} \approx 1{,}44$

$\left.\begin{array}{l} y = 1{,}44x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } B(0, 2) \end{array}\right\} b = 2$

Dus k: $y = 1{,}44x + 2$.

c Stel m: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=8} = 0{,}632$.

$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}632x + b \\ f(8) = 9{,}2, \text{ dus } C(8;\, 9{,}2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}632 \cdot 8 + b = 9{,}2 \\ 5{,}056 + b = 9{,}2 \\ b = 4{,}144 \end{array}$

Dus m: $y = 0{,}632x + 4{,}144$.

m snijden met de x-as geeft $0{,}632x + 4{,}144 = 0$

$0{,}632x = -4{,}144$

$x \approx -6{,}56$

17 **a** $f(x) = -x(2x - 7) = -2x^2 + 7x$ geeft $f'(x) = -4x + 7$

b $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

c $f(x) = \dfrac{2x - 1}{5 - 2x}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(5 - 2x) \cdot 2 - (2x - 1) \cdot -2}{(5 - 2x)^2} = \dfrac{10 - 4x + 4x - 2}{(5 - 2x)^2} = \dfrac{8}{(5 - 2x)^2}$

d $f(x) = 7 - \dfrac{x^2 + 8x}{16} = 7 - \frac{1}{16}(x^2 + 8x) = 7 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x$ geeft $f'(x) = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$

e $f(x) = x(3x + 2)^2 = x(9x^2 + 12x + 4) = 9x^3 + 12x^2 + 4x$ geeft $f'(x) = 27x^2 + 24x + 4$

f $f(x) = 8 - (x - 1)^2 = 8 - (x^2 - 2x + 1) = 8 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x + 7$ geeft $f'(x) = -2x + 2$

g $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1} + x^4$ geeft

$f'(x) = \dfrac{(x + 1) \cdot (2x - 2) - (x^2 - 2x) \cdot 1}{(x + 1)^2} + 4x^3 = \dfrac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 + 2x}{(x + 1)^2} + 4x^3 = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{(x + 1)^2} + 4x^3$

h $f(x) = 3x^2 - \dfrac{4x + 3}{2x - 1}$ geeft

$f'(x) = 6x - \dfrac{(2x - 1) \cdot 4 - (4x + 3) \cdot 2}{(2x - 1)^2} = 6x - \dfrac{8x - 4 - 8x - 6}{(2x - 1)^2} = 6x + \dfrac{10}{(2x - 1)^2}$

Bladzijde 186

18 **a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^2 - x - 2$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(0) = 0 - 0 - 2 = -2$.

$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(0) = 1, \text{ dus } A(0,\, 1) \end{array}\right\} b = 1$

Dus k: $y = -2x + 1$.

b Raaklijn horizontaal, dus rc $= 0$, dus $f'(x) = 0$.

Dit geeft $x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$

$x = -1 \vee x = 2$

$f(-1) = 2\frac{1}{6}$ en $f(2) = -2\frac{1}{3}$

De gevraagde punten zijn $(-1,\, 2\frac{1}{6})$ en $(2,\, -2\frac{1}{3})$.

c Raaklijnen evenwijdig met l: $y = 4x + 10$, dus $\text{rc}_{\text{raaklijn}} = \text{rc}_l = 4$, dus $f'(x) = 4$.

Dit geeft $x^2 - x - 2 = 4$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = -2 \vee x = 3$

$f(-2) = \frac{1}{3}$ en $f(3) = -\frac{1}{2}$

Dus $B(-2,\, \frac{1}{3})$ en $C(3,\, -\frac{1}{2})$.

19 **a** $f(x) = (x^2 + 2)(1 - x) = x^2 - x^3 + 2 - 2x = -x^3 + x^2 - 2x + 2$ geeft $f'(x) = -3x^2 + 2x - 2$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(2) = -12 + 4 - 2 = -10$.

$\left.\begin{array}{l} y = -10x + b \\ f(2) = -6, \text{ dus } A(2,\, -6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -10 \cdot 2 + b = -6 \\ -20 + b = -6 \\ b = 14 \end{array}$

Dus k: $y = -10x + 14$.

b $rc_k = -10$ en de raaklijn is evenwijdig met k, dus $f'(x) = -10$.
Dit geeft $-3x^2 + 2x - 2 = -10$
$-3x^2 + 2x + 8 = 0$
$D = 2^2 - 4 \cdot -3 \cdot 8 = 100$
$x = \frac{-2 + 10}{-6} = -1\frac{1}{3} \vee x = \frac{-2 - 10}{-6} = 2$
Dus $x_B = -1\frac{1}{3}$.

20 $f(x) = (x^2 - 9)(x + p) = x^3 + px^2 - 9x - 9p$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2px - 9$
Voor de helling in A geldt $f'(-2) = 7$.
Dit geeft $3 \cdot (-2)^2 + 2p \cdot -2 - 9 = 7$
$12 - 4p - 9 = 7$
$-4p = 4$
$p = -1$
Dus $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.
Stel k: $y = ax + b$ met $a = rc_k = rc_l = 7$.
$$\left.\begin{array}{l} y = 7x + b \\ f(-2) = 15, \text{ dus } A(-2, 15) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 \cdot -2 + b = 15 \\ -14 + b = 15 \\ b = 29 \end{array}$$
Dus k: $y = 7x + 29$.
k snijden met de grafiek van f geeft $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 7x + 29$.
Voer in $y_1 = x^3 - x^2 - 9x + 9$ en $y_2 = 7x + 29$.
De optie snijpunt geeft $x = -2$ en $y = 15$, en $x = 5$ en $y = 64$.
Dus $B(5, 64)$.

21 **a** $s = 0{,}06t^3 + 1{,}2t^2$ geeft $v = 0{,}18t^2 + 2{,}4t$
Na vier seconden is de snelheid $v = 0{,}18 \cdot 4^2 + 2{,}4 \cdot 4 = 12{,}48$ m/s.
Na zes seconden is de snelheid $v = 0{,}18 \cdot 6^2 + 2{,}4 \cdot 6 = 20{,}88$ m/s.

b 100 km/uur $= \frac{100}{3{,}6}$ m/s
Voer in $y_1 = 0{,}18x^2 + 2{,}4x$ en $y_2 = \frac{100}{3{,}6}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 7{,}43$.
Dus na ongeveer 7,43 seconden is de snelheid 100 km/uur.

c Na acht seconden is $s = 0{,}06 \cdot 8^3 + 1{,}2 \cdot 8^2 = 107{,}52$ m
en $v = 0{,}18 \cdot 8^2 + 2{,}4 \cdot 8 = 30{,}72$ m/s.
$\frac{300 - 107{,}52}{30{,}72} \approx 6{,}3$, dus na ongeveer $8 + 6{,}3 = 14{,}3$ seconden
heeft de motor 300 meter afgelegd.

22 **a** $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x + 3}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{(x + 3) \cdot 0 - 4 \cdot 1}{(x + 3)^2} = 1 - \frac{4}{(x + 3)^2}$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(0) = 1 - \frac{4}{(0 + 3)^2} = \frac{5}{9}$.
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{9}x + b \\ f(0) = -\frac{2}{3}, \text{ dus } A(0, -\frac{2}{3}) \end{array}\right\} b = -\frac{2}{3}$$
Dus k: $y = \frac{5}{9}x - \frac{2}{3}$.

b Stel l: $y = ax + b$ met $a = f'(-2) = 1 - \dfrac{4}{(-2+3)^2} = -3$.

$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ B(-2, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -2 + b = 0 \\ b = -6 \end{array}$

Dus l: $y = -3x - 6$.

Stel m: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 1 - \dfrac{4}{(1+3)^2} = \frac{3}{4}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ C(1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 1 + b = 0 \\ b = -\frac{3}{4} \end{array}$

Dus m: $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

l en m snijden geeft $-3x - 6 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

$-3\frac{3}{4}x = 5\frac{1}{4}$

$-15x = 21$

$x = -1\frac{2}{5}$

$x = -1\frac{2}{5}$ geeft $y = -3 \cdot -1\frac{2}{5} - 6 = -1\frac{4}{5}$

Dus het snijpunt is $(-1\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5})$.

23 **a** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ geeft

$f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x-2) - (x^2 - 2x + 2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \dfrac{4+4}{(-2-1)^2} = \frac{8}{9}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{8}{9}x + b \\ f(-2) = -3\frac{1}{3}, \text{ dus } A(-2, -3\frac{1}{3}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{8}{9} \cdot -2 + b = -3\frac{1}{3} \\ -\frac{16}{9} + b = -\frac{30}{9} \\ b = -\frac{14}{9} = -1\frac{5}{9} \end{array}$

Dus k: $y = \frac{8}{9}x - 1\frac{5}{9}$.

b $rc_l = f'(-1) = \dfrac{1+2}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4}$

$rc_m = f'(3) = \dfrac{9-6}{(3-1)^2} = \frac{3}{4}$

$rc_l = rc_m$, dus l en m zijn evenwijdig.

3 Meetkunde

Bladzijde 187

24 Stel $AD = x$, dan is $BD = x + 2$.

$BC = AB = AD + BD = x + x + 2 = 2x + 2$

In $\triangle BCD$ is $\tan(55°) = \dfrac{2x+2}{x+2}$.

Voer in $y_1 = \tan(55°)$ en $y_2 = \dfrac{2x+2}{x+2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 1{,}497...$

Dus $AB = 2 \cdot 1{,}497... + 2 \approx 4{,}99$.

In $\triangle BCD$ is $\cos(55°) = \dfrac{x+2}{CD} = \dfrac{1{,}497... + 2}{CD}$.

Dus $CD = \dfrac{1{,}497... + 2}{\cos(55°)} \approx 6{,}10$.

25 $\left.\begin{array}{l}\angle ACB = \angle DCE \\ \angle ABC = \angle CED \text{ (gegeven)}\end{array}\right\}$ $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ dus $\begin{array}{c|c} AC & BC \\ \hline CD & CE \end{array}$

Stel $CD = x$, dan is $BC = x + 1$.

Dit geeft $\begin{array}{c|c} 7 & x+1 \\ \hline x & 4 \end{array}$

$x(x + 1) = 28$
$x^2 + x = 28$
$x^2 + x - 28 = 0$
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -28 = 113$
$x = \dfrac{-1 + \sqrt{113}}{2} \vee x = \dfrac{-1 - \sqrt{113}}{2}$
$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{113} \vee x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{113}$ (kan niet)

Dus $CD = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{113}$.

26 **a** De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.
De zijde × hoogte-methode in $\triangle BCD$ geeft $BD \cdot CE = CD \cdot AD$
$26 \cdot CE = 15 \cdot 10$
$CE = \dfrac{15 \cdot 10}{26} = 5\frac{10}{13}$

b $\left.\begin{array}{l}\angle ABS = \angle CDS \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle BAS = \angle DCS \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\}$ $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ dus $\begin{array}{c|c} AB & BS \\ \hline CD & DS \end{array}$

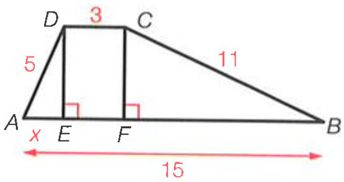
Stel $DS = x$, dan is $BS = 26 - x$.

Dit geeft $\begin{array}{c|c} 24 & 26-x \\ \hline 15 & x \end{array}$

$24x = 15(26 - x)$
$24x = 390 - 15x$
$39x = 390$
$x = 10$, dus $DS = 10$

$DS = AD$, dus $\angle SAD = \angle ASD$ (basishoeken gelijkbenige driehoek).
En omdat $\angle CAD = \angle SAD$ is $\angle CAD = \angle ASD$.

27 Teken DE en CF loodrecht op AB, en stel $AE = x$.
Zie de figuur hiernaast.
Nu is $BF = 15 - 3 - x = 12 - x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $DE^2 = 5^2 - x^2$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle BCF$ geeft $CF^2 = 11^2 - (12 - x)^2$.
$DE = CF$, dus $DE^2 = CF^2$, dus $25 - x^2 = 121 - (144 - 24x + x^2)$
$25 - x^2 = 121 - 144 + 24x - x^2$
$24x = 48$
$x = 2$



Dus $DE^2 = 5^2 - 2^2 = 21$, dus $DE = \sqrt{21}$.

$O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(15 + 3) \cdot \sqrt{21} = 9\sqrt{21}$

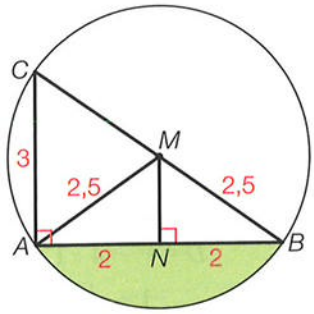
28 $O(\triangle ADE) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin(\angle A) = 15\sin(\angle A)$

$\left.\begin{array}{l}O(\triangle ABC) = 2 \cdot O(\triangle ADE) = 30\sin(\angle A) \\ O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AC \cdot \sin(\angle A)\end{array}\right\}$ $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AC \cdot \sin(\angle A) = 30\sin(\angle A)$
$4AC = 30$
$AC = 7\frac{1}{2}$

Dus $CE = AC - AE = 7\frac{1}{2} - 5 = 2\frac{1}{2}$.

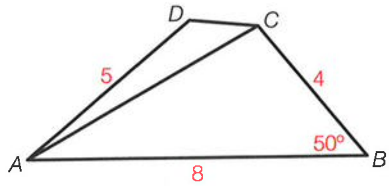
Bladzijde 188

29 De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
$BM = \frac{1}{2}BC = 2{,}5$
Zie de figuur hiernaast.
$AM = BM = 2{,}5$ (straal cirkel)



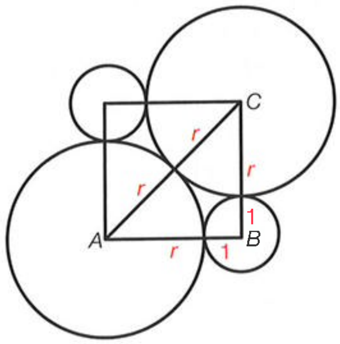
In $\triangle AMN$ is $\sin(\angle AMN) = \frac{2}{2{,}5}$
$\angle AMN = 53{,}13...°$
$\angle AMB = 2 \cdot \angle AMN = 2 \cdot 53{,}13...° = 106{,}26...°$
De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door AM,
BM en de kortste cirkelboog AB is $\frac{106{,}26...}{360} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 = 5{,}795...$
De stelling van Pythagoras in $\triangle AMN$ geeft $MN = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 1{,}5$.
opp $\triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 3$
De oppervlakte van het groene gebied is $5{,}795... - 3 \approx 2{,}80$.

30 Teken AC. Zie de figuur hiernaast.



De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
$AC^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos(50°)$
$AC^2 = 38{,}861...$
$AC = 6{,}233...$
De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft
$\frac{6{,}233...}{\sin(50°)} = \frac{4}{\sin(\angle BAC)}$
$\sin(\angle BAC) = \frac{4\sin(50°)}{6{,}233...} = 0{,}491...$
$\angle BAC = 29{,}44...°$
$\angle CAD = 40° - \angle BAC = 40° - 29{,}44...° = 10{,}55...°$
De cosinusregel in $\triangle CAD$ geeft $CD^2 = 38{,}861... + 5^2 - 2 \cdot 6{,}233... \cdot 5 \cdot \cos(10{,}55...°)$
$CD^2 = 2{,}578...$
$CD \approx 1{,}61$

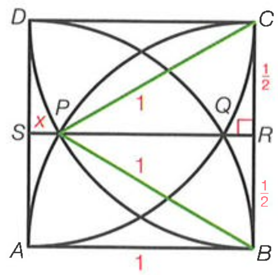
31 **a** Stel de straal van een grote cirkel is r.
Zie de figuur hiernaast.



In $\triangle ABC$ is $AC = 2r$ en $AB = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$.
Ook is $AB = r + 1$.
Dit geeft $r\sqrt{2} = r + 1$
$r\sqrt{2} - r = 1$
$r(\sqrt{2} - 1) = 1$
$r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$
$r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$
Dus de straal van de grote cirkels is $\sqrt{2} + 1$.

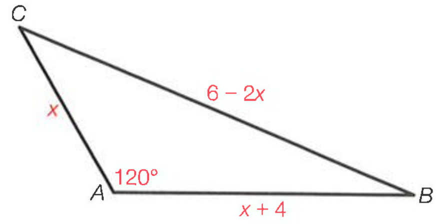
b In $\triangle ABD$ is $BD = \sqrt{2}$.
$DE = 1$, dus $BE = \sqrt{2} - 1$.
$\triangle BEH$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.
In $\triangle BEH$ is $EH = BE = \sqrt{2} - 1$.
$O(\triangle BEH) = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}(2 - 2\sqrt{2} + 1) = 1\frac{1}{2} - \sqrt{2}$
Dus $O(DEHC) = O(\triangle BCD) - O(\triangle BEH) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - (1\frac{1}{2} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.

c Zie de figuur hiernaast met R op BC en S op AD waarbij R en S op het verlengde van PQ liggen.
$BC = BP = CP = 1$ (straal cirkel)
$\angle BCP = 60°$ (gelijkzijdige driehoek)
Stel $PS = x$, dan is $PR = 1 - x$.
In $\triangle CPR$ is $PR = \sqrt{3} \cdot CR = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Dus $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1 - x$ oftewel $x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
$PQ = 1 - 2x = 1 - 2(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$



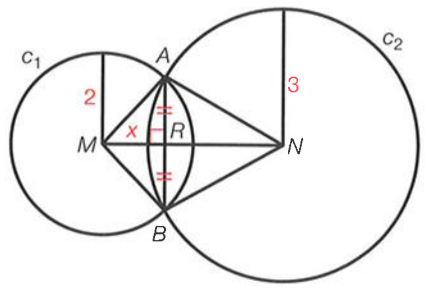
Bladzijde 189

32 Stel $AC = x$, dan is $AB = x + 4$ en $BC = 10 - x - (x + 4) = 6 - 2x$.
Zie de figuur hiernaast.
De cosinusregel geeft
$(6 - 2x)^2 = x^2 + (x + 4)^2 - 2 \cdot x \cdot (x + 4) \cdot \cos(120°)$.
Voer in $y_1 = (6 - 2x)^2$ en $y_2 = x^2 + (x + 4)^2 - 2x(x + 4)\cos(120°)$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}564...$
Dus $AB = 4{,}564...$ en $AC = 0{,}564...$
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4{,}564... \cdot 0{,}564... \cdot \sin(120°) \approx 1{,}12$

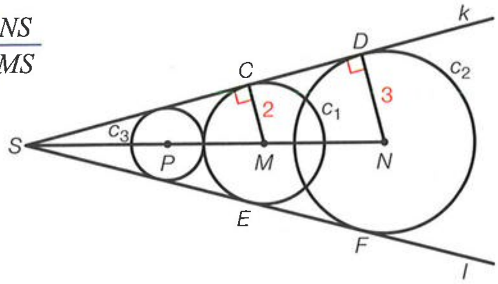


33 $\angle ADE = \angle AED = \dfrac{180° - \angle DAE}{2} = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$
$\angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 90° - 45° = 45°$
$\angle DEC = \angle DCE = \dfrac{180° - \angle CDE}{2} = \dfrac{180° - 45°}{2} = 67\frac{1}{2}°$
$\angle BCE = \angle BCD - \angle DCE = 90° - 67\frac{1}{2}° = 22\frac{1}{2}°$
Stel $AD = BC = x$.
In $\triangle ADE$ is $AE = AD = x$ en $DE = \sqrt{2} \cdot AD = x\sqrt{2}$.
In $\triangle CDE$ is $CD = DE = x\sqrt{2}$.
$BE = AB - AE = CD - AE = x\sqrt{2} - x$
In $\triangle BCE$ is $\tan(22\frac{1}{2}°) = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{x\sqrt{2} - x}{x} = \dfrac{x(\sqrt{2} - 1)}{x} = \sqrt{2} - 1$.

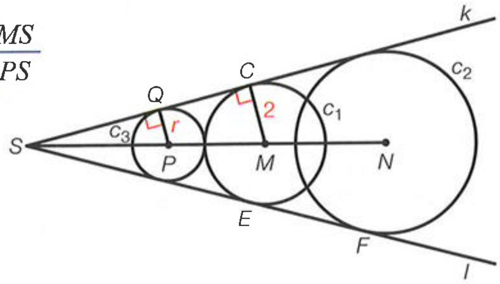
34 **a** Zie de figuur hiernaast met $AM = BM = 2$ en $AN = BN = 3$.
$AMBN$ is een vlieger met MN als symmetrieas, dus MN gaat door het midden R van AB en staat loodrecht op AB.
Stel $MR = x$, dan is $NR = 4 - x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle AMR$ geeft $AR^2 = 2^2 - x^2$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ANR$ geeft $AR^2 = 3^2 - (4 - x)^2$.
Dus $4 - x^2 = 9 - (16 - 8x + x^2)$
$4 - x^2 = 9 - 16 + 8x - x^2$
$8x = 11$
$x = 1\frac{3}{8}$
$AR^2 = 2^2 - x^2 = 2^2 - (1\frac{3}{8})^2 = \frac{135}{64}$ geeft $AR = \sqrt{\frac{135}{64}} = \dfrac{\sqrt{135}}{\sqrt{64}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{8} = \frac{3}{8}\sqrt{15}$
Dus $AB = 2AR = \frac{3}{4}\sqrt{15}$.



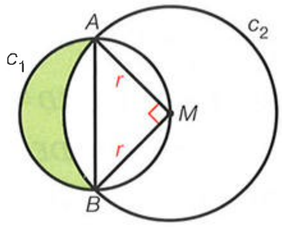
b Zie de figuur hiernaast.
$\angle NDS = 90°$ en $\angle MCS = 90°$ (stelling raaklijn aan cirkel)
$\left.\begin{array}{l}\angle NDS = \angle MCS \text{ (rechte hoek)} \\ \angle NSD = \angle MSC\end{array}\right\}$ $\triangle DNS \sim \triangle CMS$ dus $\begin{array}{c|c} DN & NS \\ \hline CM & MS \end{array}$
Stel $MS = x$, dan is $NS = x + 4$.
Dit geeft $\begin{array}{c|c} 3 & x+4 \\ \hline 2 & x \end{array}$
$3x = 2(x + 4)$
$3x = 2x + 8$
$x = 8$, dus $MS = 8$



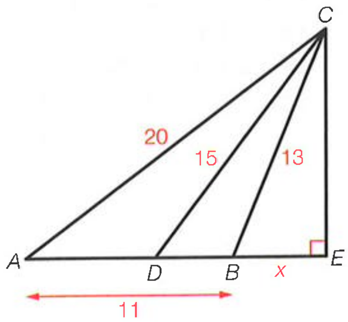
Zie de figuur hiernaast.
$\angle PQS = 90°$ (stelling raaklijn aan cirkel)
$\left.\begin{array}{l}\angle MCS = \angle PQS \text{ (rechte hoek)} \\ \angle MSC = \angle PSQ\end{array}\right\}$ $\triangle CMS \sim \triangle QPS$ dus $\begin{array}{c|c} CM & MS \\ \hline PQ & PS \end{array}$
Stel de straal van c_3 is r.
Dan is $PQ = r$ en $PS = 8 - 2 - r = 6 - r$.
Dit geeft $\begin{array}{c|c} 2 & 8 \\ \hline r & 6-r \end{array}$
$8r = 2(6 - r)$
$8r = 12 - 2r$
$10r = 12$
$r = 1\frac{1}{5}$
De straal van c_3 is $1\frac{1}{5}$.



35 Stel $AM = BM = r$. Zie de figuur hiernaast.
AB is een middellijn van c_1, dus $\angle AMB = 90°$ (stelling van Thales).
$\triangle ABM$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek, dus $AB = r\sqrt{2}$.
De straal van c_1 is $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ en de oppervlakte van c_1 is $\pi \cdot (\frac{1}{2}r\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$.
$O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM = \frac{1}{2}r^2$
De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door lijnstuk AB en cirkel c_2 is $\frac{90}{360} \cdot \pi r^2 - O(\triangle ABM) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2$.
De oppervlakte van het groene gebied is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 - (\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2) = \frac{1}{2}r^2$.
Dus de oppervlakte van het groene gebied is gelijk is aan de oppervlakte van driehoek ABM.



36 Zie de figuur hiernaast.
Stel $BE = x$, dan is $AE = x + 11$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle BCE$ geeft $CE^2 = 13^2 - x^2$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ACE$ geeft $CE^2 = 20^2 - (x + 11)^2$.
Dus $169 - x^2 = 400 - (x^2 + 22x + 121)$
$169 - x^2 = 400 - x^2 - 22x - 121$
$22x = 110$
$x = 5$
Dus $BE = 5$, $AE = 11 + 5 = 16$ en $CE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle CDE$ geeft $DE = \sqrt{15^2 - 144} = 9$.
Dus $AD = AE - DE = 16 - 9 = 7$.



4 Vergelijkingen en herleidingen

Bladzijde 190

37 **a** $\begin{cases} 2x + 3y = 58 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 6y = 116 \\ 15x - 6y = 36 \end{cases}$ +

$19x \quad = 152$

$\left.\begin{array}{l} x = 8 \\ 5x - 2y = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 8 - 2y = 12 \\ 40 - 2y = 12 \\ -2y = -28 \\ y = 14 \end{array}$

Dus $(x, y) = (8, 14)$.

b $2x + y = 13$ geeft $y = -2x + 13$

Substitutie van $y = -2x + 13$ in $x^2 + y^2 = 58$ geeft $x^2 + (-2x + 13)^2 = 58$

$x^2 + 4x^2 - 52x + 169 = 58$

$5x^2 - 52x + 111 = 0$

$D = (-52)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 111 = 484$

$x = \dfrac{52 + 22}{10} = 7\frac{2}{5} \vee x = \dfrac{52 - 22}{10} = 3$

$x = 3$ geeft $y = -2 \cdot 3 + 13 = 7$

$x = 7\frac{2}{5}$ geeft $y = -2 \cdot 7\frac{2}{5} + 13 = -1\frac{4}{5}$

Dus $(x, y) = (3, 7) \vee (x, y) = (7\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5})$.

c $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}32y = 2 \\ 0{,}6x - 0{,}28y = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2{,}4x - 1{,}92y = 12 \\ 2{,}4x - 1{,}12y = 20 \end{cases}$ −

$-0{,}8y = -8$

$\left.\begin{array}{l} y = 10 \\ 0{,}4x - 0{,}32y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}4x - 0{,}32 \cdot 10 = 2 \\ 0{,}4x - 3{,}2 = 2 \\ 0{,}4x = 5{,}2 \\ x = 13 \end{array}$

Dus $(x, y) = (13, 10)$.

d $x + 5y = 17$ geeft $x = -5y + 17$

Substitutie van $x = -5y + 17$ in $(2x - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$ geeft

$(2(-5y + 17) - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$

$(-10y + 34 - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73$

$(-10y + 33)^2 + (3y - 1)^2 = 73$

$100y^2 - 660y + 1089 + 9y^2 - 6y + 1 = 73$

$109y^2 - 666y + 1017 = 0$

$D = (-666)^2 - 4 \cdot 109 \cdot 1017 = 144$

$y = \dfrac{666 + 12}{218} = 3\frac{12}{109} \vee y = \dfrac{666 - 12}{218} = 3$

$y = 3$ geeft $x = -5 \cdot 3 + 17 = 2$

$y = 3\frac{12}{109}$ geeft $x = -5 \cdot 3\frac{12}{109} + 17 = 1\frac{49}{109}$

Dus $(x, y) = (2, 3) \vee (x, y) = (1\frac{49}{109}, 3\frac{12}{109})$.

38 **a** De grafiek gaat door $(0, 0)$.

$f(0) = 0$ geeft $0 + 0 + 0 + d = 0$, dus $d = 0$.

b $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = 0$ geeft $0 + 0 + c = 0$, dus $c = 0$.

c $f(x) = ax^3 + bx^2$

De grafiek gaat door de punten $(6, 4)$ en $(12, 0)$.

$f(6) = 4$ geeft $216a + 36b = 4$ oftewel $54a + 9b = 1$.

$f(12) = 0$ geeft $1728a + 144b = 0$ oftewel $b = -12a$.

Substitutie van $b = -12a$ in $54a + 9b = 1$ geeft $54a + 9 \cdot -12a = 1$

$54a - 108a = 1$

$-54a = 1$

$a = -\frac{1}{54}$

$a = -\frac{1}{54}$ geeft $b = -12 \cdot -\frac{1}{54} = \frac{2}{9}$

39 Stel a is het aantal rails van 7 cm, b is het aantal rails van 15 cm, en c is het aantal rails van 22 cm.
Dan geldt $7a + 15b = 95$, $7a + 22c = 189$ en $15b + 22c = 214$.

$$\begin{cases} 7a + 15b = 95 \\ 7a + 22c = 189 \end{cases} -$$
$$15b - 22c = -94$$

$$\begin{cases} 15b - 22c = -94 \\ 15b + 22c = 214 \end{cases} +$$
$$30b = 120$$

$$\left.\begin{array}{l} b = 4 \\ 15b - 22c = -94 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 15 \cdot 4 - 22c = -94 \\ 60 - 22c = -94 \\ -22c = -154 \\ c = 7 \end{array}$$

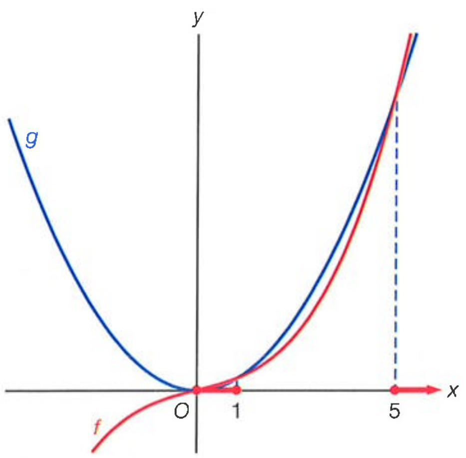
Dus Finn heeft zeven stukken rail van 22 cm.

40 **a** $17 - (2x-1)^4 = 1$
$(2x-1)^4 = 16$
$2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$
$2x = 3 \vee 2x = -1$
$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

b $x^6 - 6x^3 + 5 = 0$
Stel $x^3 = u$.
$u^2 - 6u + 5 = 0$
$(u-1)(u-5) = 0$
$u = 1 \vee u = 5$
$x^3 = 1 \vee x^3 = 5$
$x = 1 \vee x = \sqrt[3]{5}$

c $10x^4 = 17x^2 + 657$
$10x^4 - 17x^2 - 657 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$10u^2 - 17u - 657 = 0$
$D = (-17)^2 - 4 \cdot 10 \cdot -657 = 26\,569$
$u = \frac{17 + 163}{20} = 9 \vee u = \frac{17 - 163}{20} = -7\frac{3}{10}$
$x^2 = 9 \vee x^2 = -7\frac{3}{10}$
$x = 3 \vee x = -3$

d Stel $f(x) = x^3 + 5x$ en $g(x) = 6x^2$.
$f(x) = g(x)$ geeft $x^3 + 5x = 6x^2$
$x^3 - 6x^2 + 5x = 0$
$x(x^2 - 6x + 5) = 0$
$x(x-1)(x-5) = 0$
$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 5$



$x^3 + 5x \geq 6x^2$ geeft $0 \leq x \leq 1 \vee x \geq 5$

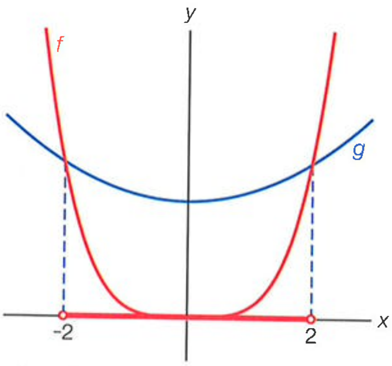
e $(2x-1)^4 - 5(2x-1)^2 + 4 = 0$
Stel $(2x-1)^2 = u$.
$u^2 - 5u + 4 = 0$
$(u-1)(u-4) = 0$
$u = 1 \vee u = 4$
$(2x-1)^2 = 1 \vee (2x-1)^2 = 4$
$2x - 1 = 1 \vee 2x - 1 = -1 \vee 2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$
$2x = 2 \vee 2x = 0 \vee 2x = 3 \vee 2x = -1$
$x = 1 \vee x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

f $x^3 - 3x\sqrt{x} - 108 = 0$
Stel $x\sqrt{x} = u$.
$u^2 - 3u - 108 = 0$
$(u+9)(u-12) = 0$
$u = -9 \vee u = 12$
$x\sqrt{x} = -9 \vee x\sqrt{x} = 12$
$x\sqrt{x} = -9$ heeft geen oplossingen.
$x\sqrt{x} = 12$ kwadrateren geeft $x^3 = 144$
$x = \sqrt[3]{144}$
$x = \sqrt[3]{144}$ geeft $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{144}} = 12$ vold.

Bladzijde 191

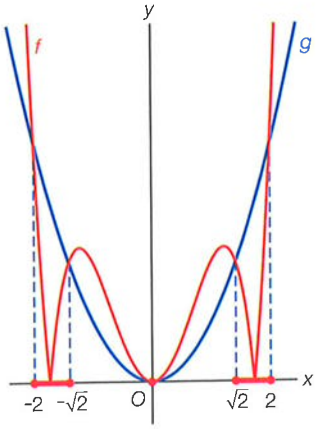
41 **a** $x^5 - 16x^3 + 28x = 0$
$x(x^4 - 16x^2 + 28) = 0$
$x = 0 \vee x^4 - 16x^2 + 28 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$x = 0 \vee u^2 - 16u + 28 = 0$
$x = 0 \vee (u-2)(u-14) = 0$
$x = 0 \vee u = 2 \vee u = 14$
$x = 0 \vee x^2 = 2 \vee x^2 = 14$
$x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{14} \vee x = -\sqrt{14}$

b Stel $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^2 + 12$.
$f(x) = g(x)$ geeft $x^4 = x^2 + 12$
$x^4 - x^2 - 12 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - u - 12 = 0$
$(u+3)(u-4) = 0$
$u = -3 \vee u = 4$
$x^2 = -3 \vee x^2 = 4$
$x = 2 \vee x = -2$



$x^4 < x^2 + 12$ geeft $-2 < x < 2$

c Stel $f(x) = |x^4 - 3x^2|$ en $g(x) = x^2$.
$f(x) = g(x)$ geeft $x^4 - 3x^2 = x^2 \vee x^4 - 3x^2 = -x^2$
$x^4 - 4x^2 = 0 \vee x^4 - 2x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 4) = 0 \vee x^2(x^2 - 2) = 0$
$x^2 = 0 \vee x^2 = 4 \vee x^2 = 2$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$



$|x^4 - 3x^2| \leq x^2$ geeft $-2 \leq x \leq -\sqrt{2} \vee x = 0 \vee \sqrt{2} \leq x \leq 2$

d $6x^5 + 10x^2 \cdot \sqrt{x} - 464 = 0$
$3x^5 + 5x^2 \cdot \sqrt{x} - 232 = 0$
Stel $x^2 \cdot \sqrt{x} = u$.
$3u^2 + 5u - 232 = 0$
$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot -232 = 2809$
$u = \dfrac{-5 + 53}{6} = 8 \vee u = \dfrac{-5 - 53}{6} = -9\frac{2}{3}$
$x^2 \cdot \sqrt{x} = 8 \vee x^2 \cdot \sqrt{x} = -9\frac{2}{3}$
$x^2 \cdot \sqrt{x} = -9\frac{2}{3}$ heeft geen oplossingen.
$x^2 \cdot \sqrt{x} = 8$ kwadrateren geeft $x^5 = 64$
$x = \sqrt[5]{64}$
$x = \sqrt[5]{64}$ geeft $(\sqrt[5]{64})^2 \cdot \sqrt{\sqrt[5]{64}} = 8$ vold.

42 **a** inhoud kubus $= 2^3 = 8$
oppervlakte kubus $= 6 \cdot 2^2 = 24$
lengte ribben $= 12 \cdot 2 = 24$
Zo krijg je som $= 8 + 24 + 24 = 56$.

b Stel de ribbe x.
inhoud kubus $= x^3$
oppervlakte kubus $= 6x^2$
lengte ribben $= 12x$
Er geldt $x^3 + 3 \cdot 6x^2 = 144x$
$x^3 + 18x^2 - 144x = 0$
$x(x^2 + 18x - 144) = 0$
$x(x - 6)(x + 24) = 0$
$x = 0 \vee x = 6 \vee x = -24$
Dus de ribbe is 6.

c Stel de ribbe x.
Er geldt $x^3 \cdot (6x^2 + 12x) = (6x^2)^2$
$6x^5 + 12x^4 = 36x^4$
$6x^5 - 24x^4 = 0$
$6x^4(x - 4) = 0$
$x = 0 \vee x = 4$
Dus de ribbe is 4.

43 **a** $(2x^2-1)^2=x^2$

$2x^2-1=x \vee 2x^2-1=-x$

$2x^2-x-1=0 \quad \vee \quad 2x^2+x-1=0$

$D=(-1^2)-4\cdot 2\cdot -1=9 \quad D=1^2-4\cdot 2\cdot -1=9$

$x=\frac{1+3}{4}=1 \vee x=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2} \vee x=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2} \vee x=\frac{-1-3}{4}=-1$

b $\sqrt{2-2x}+2x=0$

$\sqrt{2-2x}=-2x$

kwadrateren geeft

$2-2x=4x^2$

$-4x^2-2x+2=0$

$2x^2+x-1=0$

$D=1^2-4\cdot 2\cdot -1=9$

$x=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2} \vee x=\frac{-1-3}{4}=-1$

$x=\frac{1}{2}$ geeft $\sqrt{2-2\cdot\frac{1}{2}}=-1$ vold. niet

$x=-1$ geeft $\sqrt{2-2\cdot -1}=2$ vold.

c $\frac{2x+4}{x}=\frac{12}{x+1}$

$(2x+4)(x+1)=12x$

$2x^2+2x+4x+4=12x$

$2x^2-6x+4=0$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1 \vee x=2$

vold. vold.

d $\sqrt{3x-2}+2=x$

$\sqrt{3x-2}=x-2$

kwadrateren geeft

$3x-2=(x-2)^2$

$3x-2=x^2-4x+4$

$-x^2+7x-6=0$

$x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0$

$x=1 \vee x=6$

$x=1$ geeft $\sqrt{3\cdot 1-2}=-1$ vold. niet

$x=6$ geeft $\sqrt{3\cdot 6-2}=4$ vold.

e $(2x-3)(x^2-3)+3=2x$

$(2x-3)(x^2-3)=2x-3$

$2x-3=0 \vee x^2-3=1$

$2x=3 \vee x^2=4$

$x=1\frac{1}{2} \vee x=2 \vee x=-2$

f $\frac{x^2-9}{2x+3}=\frac{x^2-9}{x+4}$

$x^2-9=0 \vee 2x+3=x+4$

$x^2=9 \vee x=1$

$x=3 \vee x=-3 \vee x=1$

vold. vold. vold.

44 **a** $(x^3-2x+1)(2x+1)=2x+1$

$2x+1=0 \vee x^3-2x+1=1$

$2x=-1 \vee x^3-2x=0$

$x=-\frac{1}{2} \vee x(x^2-2)=0$

$x=-\frac{1}{2} \vee x=0 \vee x^2=2$

$x=-\frac{1}{2} \vee x=0 \vee x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$

b $\frac{x^3}{x+2} = \frac{4x}{x+2}$
$x^3 = 4x$
$x^3 - 4x = 0$
$x(x^2 - 4) = 0$
$x = 0 \vee x^2 = 4$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$
vold. vold. vold. niet

c $\frac{3(x^3-5)+21}{x^3+1} = 0$
$3(x^3-5)+21 = 0$
$3(x^3-5) = -21$
$x^3 - 5 = -7$
$x^3 = -2$
$x = \sqrt[3]{-2}$ vold.

d $\sqrt{x^2+2x} + x = 6$
$\sqrt{x^2+2x} = 6 - x$
kwadrateren geeft
$x^2 + 2x = (6-x)^2$
$x^2 + 2x = 36 - 12x + x^2$
$14x = 36$
$x = 2\frac{4}{7}$
$x = 2\frac{4}{7}$ geeft $\sqrt{(2\frac{4}{7})^2 + 2 \cdot 2\frac{4}{7}} + 2\frac{4}{7} = 6$ vold.

e $x^3 - 26x\sqrt{x} = 27$
$x^3 - 26x\sqrt{x} - 27 = 0$
Stel $x\sqrt{x} = u$.
$u^2 - 26u - 27 = 0$
$(u+1)(u-27) = 0$
$u = -1 \vee u = 27$
$x\sqrt{x} = -1 \vee x\sqrt{x} = 27$
$x\sqrt{x} = -1$ heeft geen oplossingen.
$x\sqrt{x} = 27$ kwadrateren geeft $x^3 = 729$
$x = 9$
$x = 9$ geeft $9\sqrt{9} = 27$ vold.

f $\frac{x^2-1}{2x+2} = 5x$
$x^2 - 1 = 5x(2x+2)$
$x^2 - 1 = 10x^2 + 10x$
$9x^2 + 10x + 1 = 0$
$D = 10^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 64$
$x = \frac{-10+8}{18} = -\frac{1}{9} \vee x = \frac{-10-8}{18} = -1$
vold. vold. niet

45 **a** $y = \frac{x^4 - x^2}{x-1} = \frac{x^2(x^2-1)}{x-1} = \frac{x^2(x-1)(x+1)}{x-1} = x^2(x+1)$ mits $x \neq 1$

b $y = \frac{15x}{x+2} - 2x = \frac{15x}{x+2} - \frac{2x(x+2)}{x+2} = \frac{15x - 2x^2 - 4x}{x+2} = \frac{-2x^2 + 11x}{x+2}$

c $y = \frac{10 - \frac{2x}{x+3}}{5 + \frac{2}{x+3}} = \frac{\left(10 - \frac{2x}{x+3}\right) \cdot (x+3)}{\left(5 + \frac{2}{x+3}\right) \cdot (x+3)} = \frac{10(x+3) - 2x}{5(x+3) + 2} = \frac{8x + 30}{5x + 17}$ mits $x \neq -3$

d $N = \frac{3t^3 + 3t^2 - 6t}{t^2 + 2t} = \frac{3t(t^2 + t - 2)}{t(t+2)} = \frac{3t(t-1)(t+2)}{t(t+2)} = 3t - 3$ mits $t \neq 0 \wedge t \neq -2$

e $K = \frac{2a}{a+2}\left(\frac{a-1}{2a} - \frac{a+2}{a^2}\right) = \frac{2a}{a+2} \cdot \frac{a(a-1)-2(a+2)}{2a^2} = \frac{2a}{a+2} \cdot \frac{a^2-a-2a-4}{2a^2}$

$= \frac{2a(a^2-3a-4)}{2a^2(a+2)} = \frac{a^2-3a-4}{a(a+2)}$

f $P = \frac{\frac{q^2}{q^2+1}-2}{\frac{q}{q^2+1}-2q} = \frac{\left(\frac{q^2}{q^2+1}-2\right)\cdot(q^2+1)}{\left(\frac{q}{q^2+1}-2q\right)\cdot(q^2+1)} = \frac{q^2-2(q^2+1)}{q-2q(q^2+1)} = \frac{-q^2-2}{-2q^3-q} = \frac{q^2+2}{2q^3+q}$

Bladzijde 192

46 **a** $T = \frac{(2t-1)(t+2)}{2t^2} = \frac{2t^2+4t-t-2}{2t^2} = \frac{2t^2+3t-2}{2t^2} = 1 + \frac{3}{2t} - \frac{1}{t^2}$

b $B = 12a - 6 \cdot \frac{\frac{a}{a^2+1}-2}{5a} = 12a - 6 \cdot \frac{\left(\frac{a}{a^2+1}-2\right)\cdot(a^2+1)}{5a\cdot(a^2+1)} = 12a - 6 \cdot \frac{a-2(a^2+1)}{5a(a^2+1)}$

$= 12a - 6 \cdot \frac{a-2a^2-2}{5a(a^2+1)} = 12a + \frac{12a^2-6a+12}{5a(a^2+1)}$

c Substitutie van $y = \frac{4x}{x-1}$ in $K = \frac{3y-2}{2y-1}$ geeft

$K = \frac{3\left(\frac{4x}{x-1}\right)-2}{2\left(\frac{4x}{x-1}\right)-1} = \frac{\left(3\left(\frac{4x}{x-1}\right)-2\right)\cdot(x-1)}{\left(2\left(\frac{4x}{x-1}\right)-1\right)\cdot(x-1)} = \frac{3\cdot 4x-2(x-1)}{2\cdot 4x-(x-1)} = \frac{10x+2}{7x+1}$ mits $x \neq 1$.

47 **a** $f^{\text{inv}}(x) = 3$ geeft $x = f(3) = \frac{3\cdot 3+1}{3-2} = 10$

b $g^{\text{inv}}(x) = x^2$ geeft $x = g(x^2)$

$$x = 1 + \frac{3}{x^2-3}$$
$$x - 1 = \frac{3}{x^2-3}$$
$$(x^2-3)(x-1) = 3$$
$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = 3$$
$$x^3 - x^2 - 3x = 0$$
$$x(x^2-x-3) = 0$$
$$x = 0 \vee x^2 - x - 3 = 0$$

vold.

Van $x^2 - x - 3 = 0$ is $D = (-1^2) - 4\cdot 1\cdot -3 = 13$, dus $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \vee x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$

vold. vold.

c Voor h geldt $y = a + \frac{3x-1}{2x+1}$, dus voor h^{inv} geldt $x = a + \frac{3y-1}{2y+1}$.

$x = a + \frac{3y-1}{2y+1}$ geeft $x(2y+1) = a(2y+1) + 3y - 1$

$$2xy + x = 2ay + a + 3y - 1$$
$$2xy - 2ay - 3y = -x + a - 1$$
$$y(2x - 2a - 3) = -x + a - 1$$
$$y = \frac{-x+a-1}{2x-2a-3} = \frac{-x+a-1}{2x-(2a+3)}$$

Dus $h^{\text{inv}}(x) = \frac{-x+a-1}{2x-(2a+3)}$.

$k(x) = 2 - \frac{5x-25}{2x-11} = \frac{2(2x-11)}{2x-11} - \frac{5x-25}{2x-11} = \frac{4x-22-(5x-25)}{2x-11} = \frac{-x+3}{2x-11}$

Dus er moet gelden $a - 1 = 3$ en $2a + 3 = 11$.

Hieruit volgt $a = 4$.

48 **a** $px^3 + 2px^2 + x^2 + 2\frac{1}{4}x = 0$

$x(px^2 + 2px + x + 2\frac{1}{4}) = 0$

$x = 0 \vee px^2 + 2px + x + 2\frac{1}{4} = 0$

$x = 0 \vee px^2 + (2p + 1)x + 2\frac{1}{4} = 0$

De vergelijking heeft drie oplossingen als $px^2 + (2p + 1)x + 2\frac{1}{4} = 0$ twee oplossingen heeft.

$p = 0$ geeft $x + 2\frac{1}{4} = 0$, dus één oplossing.

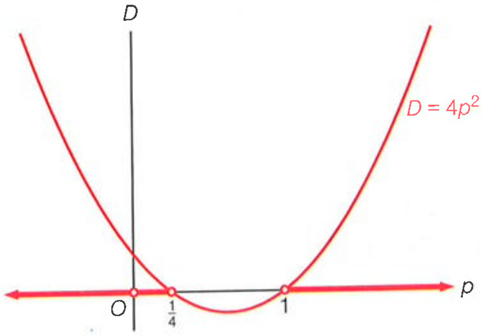
Voor $p \neq 0$ is $D = (2p + 1)^2 - 4 \cdot p \cdot 2\frac{1}{4} = 4p^2 + 4p + 1 - 9p = 4p^2 - 5p + 1$.

Twee oplossingen als $D > 0$, dus als $4p^2 - 5p + 1 > 0$.

$4p^2 - 5p + 1 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$

$p = \frac{5+3}{8} = 1 \vee p = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$



De vergelijking heeft drie oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < \frac{1}{4} \vee p > 1$.

b $2px^4 - px^3 + 5x^3 + 2x^2 = 0$

$x^2(2px^2 - px + 5x + 2) = 0$

$x^2 = 0 \vee 2px^2 - px + 5x + 2 = 0$

$x = 0 \vee 2px^2 + (-p + 5)x + 2 = 0$

De vergelijking heeft precies één oplossing als $2px^2 + (-p + 5)x + 2 = 0$ geen oplossingen heeft.

$p = 0$ geeft $5x + 2 = 0$, dus één oplossing.

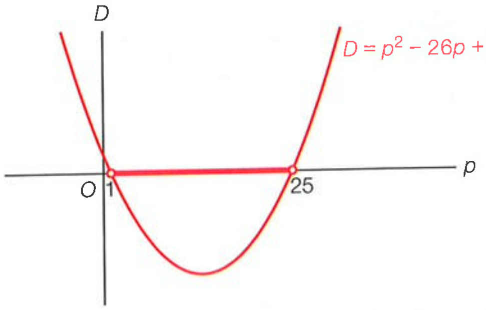
Voor $p \neq 0$ is $D = (-p + 5)^2 - 4 \cdot 2p \cdot 2 = p^2 - 10p + 25 - 16p = p^2 - 26p + 25$.

Geen oplossingen als $D < 0$, dus als $p^2 - 26p + 25 < 0$.

$p^2 - 26p + 25 = 0$

$(p - 1)(p - 25) = 0$

$p = 1 \vee p = 25$



De vergelijking heeft precies één oplossing voor $1 < p < 25$.

49 $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 10 - 10x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{10x^2 + 10 - 20x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}$

$\text{rc}_{\text{raaklijn}} = -\frac{4}{5}$ geeft $\frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2} = \frac{-4}{5}$

$-4(x^2+1)^2 = 5(-10x^2+10)$

$-4(x^4+2x^2+1) = -50x^2+50$

$-4x^4 - 8x^2 - 4 = -50x^2 + 50$

$-4x^4 + 42x^2 - 54 = 0$

$2x^4 - 21x^2 + 27 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$2u^2 - 21u + 27 = 0$

$D = (-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27 = 225$

$u = \frac{21+15}{4} = 9 \vee u = \frac{21-15}{4} = 1\frac{1}{2}$

$x^2 = 9 \vee x^2 = 1\frac{1}{2}$

$x = 3 \vee x = -3 \vee x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{1\frac{1}{2}}$

vold. vold. vold. vold.

erantwoording

isch tekenwerk: Integra Software Services

on

gontwerp: InOntwerp, Assen
p binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
: Integra Software Services

en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
gevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13,
ingen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

al
jouw toekomst belangrijk en daarom
oek klimaatneutraal geproduceerd.

Gemengde opgaven

5 Machten, exponenten en logaritmen

Bladzijde 172

1 **a** $a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[4]{b^3} = \frac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[3]{a}}$

$(81p^2)^{-\frac{3}{4}} = 81^{-\frac{3}{4}} \cdot (p^2)^{-\frac{3}{4}} = (3^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot p^{-1\frac{1}{2}} = 3^{-3} \cdot \frac{1}{p^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{p\sqrt{p}} = \frac{1}{27p\sqrt{p}}$

$\frac{10a^{-5}}{(4a)^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{4^{-1\frac{1}{2}} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{(2^2)^{-1\frac{1}{2}} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10a^{-5}}{2^{-3} \cdot a^{-1\frac{1}{2}}} = \frac{10}{\frac{1}{8}} \cdot a^{-3\frac{1}{2}} = 80 \cdot \frac{1}{a^{3\frac{1}{2}}} = \frac{80}{a^3 \cdot \sqrt{a}}$

b $x^4 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^4 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{4+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}} = x^{5\frac{1}{12}}$

$\frac{x^2}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2}{x \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^2}{x^{1\frac{2}{3}}} = x^{2-1\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{x^{2\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = x^{1\frac{3}{4}}$

2 **a** $y = \frac{6x^4}{(2\sqrt{x})^3} = \frac{6x^4}{2^3 \cdot (\sqrt{x})^3} = \frac{6x^4}{8 \cdot (x^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{6x^4}{8 \cdot x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}x^{4-1\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$

Dus $y = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$.

b $y = (\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{2}x} = (\frac{1}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{16} \cdot (2^{-2})^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{16} \cdot 2^x$

Dus $y = \frac{1}{16} \cdot 2^x$.

c $y = 4x^{-1\frac{2}{3}} \cdot (3x^4)^2 = 4x^{-1\frac{2}{3}} \cdot 3^2 \cdot (x^4)^2 = 36x^{-1\frac{2}{3}} \cdot x^8 = 36x^{6\frac{1}{3}}$

$36x^{6\frac{1}{3}} = y$

$x^{\frac{19}{3}} = \frac{1}{36}y$

$x = (\frac{1}{36}y)^{\frac{3}{19}}$

$x = (\frac{1}{36})^{\frac{3}{19}} \cdot y^{\frac{3}{19}}$

$x \approx 0{,}57 \cdot y^{0{,}16}$

Dus $x = 0{,}57y^{0{,}16}$.

d $A = 6 + 2\sqrt{3B+2}$

$6 + 2\sqrt{3B+2} = A$

$2\sqrt{3B+2} = A - 6$

kwadrateren geeft

$4(3B+2) = A^2 - 12A + 36$

$3B + 2 = \frac{1}{4}A^2 - 3A + 9$

$3B = \frac{1}{4}A^2 - 3A + 7$

$B = \frac{1}{12}A^2 - A + 2\frac{1}{3}$

3 **a** $(x^{\frac{1}{2}}-4)(2x^{\frac{2}{3}}-16)=0$

$x^{\frac{1}{2}}-4=0 \vee 2x^{\frac{2}{3}}-16=0$

$\sqrt{x}=4 \vee 2x^{\frac{2}{3}}=16$

$x=16 \vee x^{\frac{2}{3}}=8$

$x=16 \vee x=8^{\frac{3}{2}}$

$x=16 \vee x=(2^3)^{\frac{3}{2}}$

$x=16 \vee x=2^{4\frac{1}{2}}$

$x=16 \vee x=16\sqrt{2}$

b $\frac{1}{2}(2x^2-5)^{1\frac{1}{2}}=4$

$(2x^2-5)^{1\frac{1}{2}}=8$

$2x^2-5=8^{\frac{2}{3}}$

$2x^2-5=(2^3)^{\frac{2}{3}}$

$2x^2-5=4$

$2x^2=9$

$x^2=4\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{4\frac{1}{2}} \vee x=-\sqrt{4\frac{1}{2}}$

$x=1\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x=-1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c $2^{x+4}-2^{x+3}=16\sqrt{2}$

$2^x \cdot 2^4-2^x \cdot 2^3=16\sqrt{2}$

$16 \cdot 2^x-8 \cdot 2^x=16\sqrt{2}$

$8 \cdot 2^x=16\sqrt{2}$

$2^x=2\sqrt{2}$

$2^x=2^{1\frac{1}{2}}$

$x=1\frac{1}{2}$

d $5 \cdot 2^{5x-1}+6=56$

$5 \cdot 2^{5x-1}=50$

$2^{5x-1}=10$

$5x-1={}^2\log(10)$

$5x=1+{}^2\log(10)$

$x=\frac{1}{5}+\frac{1}{5} \cdot {}^2\log(10)$

e ${}^3\log(3^{x-1}+5)=2$

$3^{x-1}+5=3^2$

$3^{x-1}+5=9$

$3^{x-1}=4$

$x-1={}^3\log(4)$

$x=1+{}^3\log(4)$

f $2^{2x+3}+2^{x+5}=168$

$2^{2x} \cdot 2^3+2^x \cdot 2^5=168$

$8 \cdot 2^{2x}+32 \cdot 2^x-168=0$

$(2^x)^2+4 \cdot 2^x-21=0$

Stel $2^x=u$.

$u^2+4u-21=0$

$(u-3)(u+7)=0$

$u=3 \vee u=-7$

$2^x=3 \vee 2^x=-7$

$x={}^2\log(3)$

4 **a** $y=\sqrt{x}$

$\downarrow$ verm. y-as, $-\frac{1}{3}$

$y=\sqrt{-3x}$

$\downarrow$ translatie $(2, -2)$

$f(x)=-2+\sqrt{-3(x-2)}=-2+\sqrt{6-3x}$

b $6-3x \geq 0$

$-3x \geq -6$

$x \leq 2$

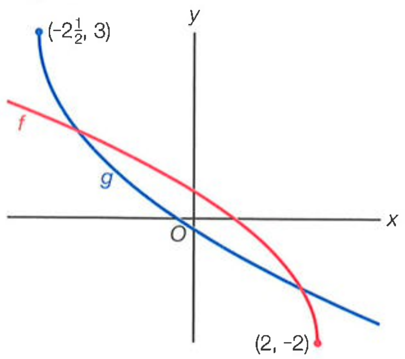
$D_f=\langle\leftarrow, 2]$ en het randpunt van de grafiek van f is $(2, -2)$.

$4x+10 \geq 0$

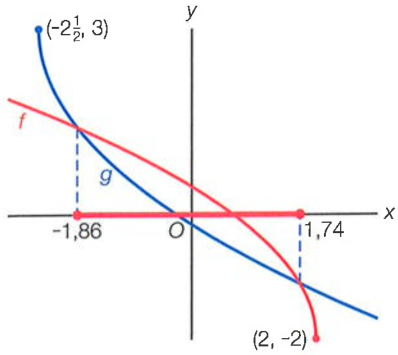
$4x \geq -10$

$x \geq -2\frac{1}{2}$

$D_g=[-2\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$ en het randpunt van de grafiek van g is $(-2\frac{1}{2}, 3)$.

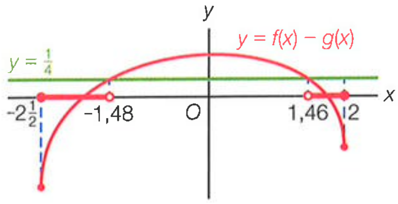


c Voer in $y_1 = -2 + \sqrt{6 - 3x}$ en $y_2 = 3 - \sqrt{4x + 10}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1{,}86$ en $x \approx 1{,}74$.



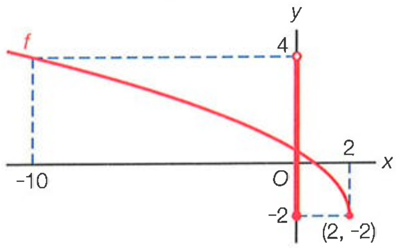
$f(x) \geq g(x)$ geeft $-1{,}86 \leq x \leq 1{,}74$

d Zet y_1 en y_2 uit en voer in $y_3 = y_1 - y_2$ en $y_4 = \frac{1}{4}$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -1{,}48$ en $x \approx 1{,}46$.



$f(x) - g(x) < \frac{1}{4}$ geeft $-2\frac{1}{2} \leq x < -1{,}48 \vee 1{,}46 < x \leq 2$

e $f(-10) = -2 + \sqrt{36} = 4$



Voor $x > -10$ is $-2 \leq f(x) < 4$.

5 **a** $(2x-5)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$
$2x - 5 = (\frac{1}{27})^{-\frac{4}{3}}$
$2x - 5 = (3^{-3})^{-\frac{4}{3}}$
$2x - 5 = 3^4$
$2x - 5 = 81$
$2x = 86$
$x = 43$

b $(\frac{1}{2}x^2 + 9) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2 + 9} = 81$
$(\frac{1}{2}x^2 + 9) \cdot (\frac{1}{2}x^2 + 9)^{\frac{1}{3}} = 81$
$(\frac{1}{2}x^2 + 9)^{\frac{4}{3}} = 81$
$\frac{1}{2}x^2 + 9 = 81^{\frac{3}{4}}$
$\frac{1}{2}x^2 + 9 = (3^4)^{\frac{3}{4}}$
$\frac{1}{2}x^2 + 9 = 3^3$
$\frac{1}{2}x^2 = 18$
$x^2 = 36$
$x = 6 \vee x = -6$

c $(\sqrt{3})^{x+2} = 9\sqrt{3}$
$(3^{\frac{1}{2}})^{x+2} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
$3^{\frac{1}{2}x+1} = 3^{2\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{2}x + 1 = 2\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$
$x = 3$

d $4^x + 48 = 2^{x+4}$
$(2^2)^x + 48 = 2^x \cdot 2^4$
$(2^x)^2 + 48 = 16 \cdot 2^x$
$(2^x)^2 - 16 \cdot 2^x + 48 = 0$
Stel $2^x = u$.
$u^2 - 16u + 48 = 0$
$(u-4)(u-12) = 0$
$u = 4 \vee u = 12$
$2^x = 4 \vee 2^x = 12$
$x = 2 \vee x = {}^2\log(12)$

e $^5\log(x^2 \cdot \sqrt{x} - 7) = 2$

$x^2 \cdot \sqrt{x} - 7 = 5^2$

$x^2 \cdot \sqrt{x} = 32$

$x^{2\frac{1}{2}} = 32$

$x = 32^{\frac{2}{5}}$

$x = (2^5)^{\frac{2}{5}}$

$x = 2^2$

$x = 4$

f $5^x - 6 \cdot (\frac{1}{5})^x = 5$

$5^x - 6 \cdot \frac{1}{5^x} = 5$

$(5^x)^2 - 6 = 5 \cdot 5^x$

Stel $5^x = u$.

$u^2 - 6 = 5u$

$u^2 - 5u - 6 = 0$

$(u + 1)(u - 6) = 0$

$u = -1 \vee u = 6$

$5^x = -1 \vee 5^x = 6$

$x = {}^5\log(6)$

Bladzijde 173

6 **a** $y = 2^x$

$\downarrow$ verm. x-as, 0,4

$y = 0{,}4 \cdot 2^x$

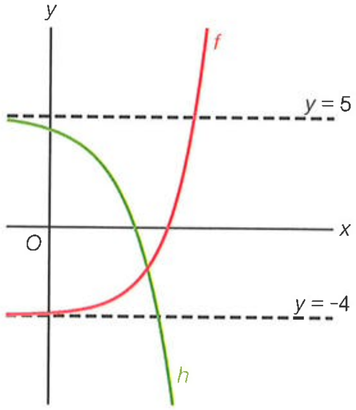
$\downarrow$ translatie (2, -4)

$f(x) = 0{,}4 \cdot 2^{x-2} - 4$

b $k(x) = 5 - 0{,}2 \cdot 3^{\frac{1}{2}(x-6)+1} - 4 = 1 - 0{,}2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2} = 1 - 0{,}2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x} \cdot 3^{-2} = 1 - 0{,}2 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^x \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{45} \cdot (\sqrt{3})^x$

Dus $a = 1$, $b = -\frac{1}{45}$ en $g = \sqrt{3}$.

c



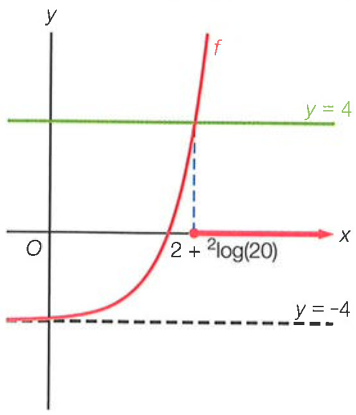
d $f(x) = 4$ geeft $0{,}4 \cdot 2^{x-2} - 4 = 4$

$0{,}4 \cdot 2^{x-2} = 8$

$2^{x-2} = 20$

$x - 2 = {}^2\log(20)$

$x = 2 + {}^2\log(20)$



$f(x) \geq 4$ geeft $x \geq 2 + {}^2\log(20)$

e De lengte van AB is 3 geeft $f(p) - h(p) = 3 \vee f(p) - h(p) = -3$.

$f(p) - h(p) = 0{,}4 \cdot 2^{p-2} - 4 - (5 - 0{,}2 \cdot 3^{\frac{1}{2}p+1}) = 0{,}4 \cdot 2^{p-2} + 0{,}2 \cdot 3^{\frac{1}{2}p+1} - 9$

Voer in $y_1 = 0{,}4 \cdot 2^{x-2} + 0{,}2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1} - 9$, $y_2 = 3$ en $y_3 = -3$.

De optie snijpunt met y_1 en y_2 geeft $x \approx 4{,}92$.

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x \approx 3{,}74$.

Dus voor $p \approx 4{,}92$ en voor $p \approx 3{,}74$.

f $B_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$, dus de vergelijking $f(x) = q$ heeft één oplossing voor $q > -4$.
$B_h = \langle \leftarrow, 5 \rangle$, dus de vergelijking $h(x) = q$ heeft geen oplossing voor $q \geq 5$.
Dus $f(x) = q$ heeft één en $h(x) = q$ heeft geen oplossing voor $q \geq 5$.

7 De beeldgrafiek van de grafiek van f is $y = \sqrt{\frac{2}{a}x - 4} + b$.

De beeldgrafiek van de grafiek van g is $y = \sqrt{\frac{1}{a}x + 1} + b$.

De beeldgrafieken gaan door $A(4, 5)$ geeft $\sqrt{\frac{8}{a} - 4} + b = 5 \wedge \sqrt{\frac{4}{a} + 1} + b = 5$.

Hieruit volgt $\sqrt{\frac{8}{a} - 4} = 5 - b \wedge \sqrt{\frac{4}{a} + 1} = 5 - b$.

$\sqrt{\frac{8}{a} - 4} = \sqrt{\frac{4}{a} + 1}$
kwadrateren geeft
$\frac{8}{a} - 4 = \frac{4}{a} + 1$
$\frac{4}{a} = 5$
$a = \frac{4}{5}$

$a = \frac{4}{5}$ en $\sqrt{\frac{4}{a} + 1} + b = 5$ geeft $\sqrt{5 + 1} + b = 5$, dus $b = 5 - \sqrt{6}$.

8 **a** $T = a \cdot R^{1,5}$ geeft $a = \frac{T}{R^{1,5}}$
$R = 5,28$ en $T = 4,5$ geeft $a = \frac{4,5}{5,28^{1,5}} \approx 0,37$
$R = 3,78$ en $T = 2,7$ geeft $a = \frac{2,7}{3,78^{1,5}} \approx 0,37$
$R = 2,95$ en $T = 1,9$ geeft $a = \frac{1,9}{2,95^{1,5}} \approx 0,37$
Dus $a \approx 0,37$.

b Straal is $3,56 \cdot 10^6$ km $= 35,6 \cdot 10^5$ km, dus $R = 35,6$.
$R = 35,6$ geeft $T = 0,37 \cdot 35,6^{1,5} \approx 78,6$
Dus de omlooptijd is ongeveer 78,6 dagen.

c $R_{\text{Rhea}} = 5,28$ geeft $R_{\text{Titan}} = 2,3 \cdot 5,28 = 12,144$
$T_{\text{Titan}} = 0,37 \cdot 12,144^{1,5} = 15,65...$
De omlooptijd is $\frac{15,65...}{4,5} \approx 3,5$ keer zo groot.

d $T = 0,37R^{1,5}$
$0,37R^{1,5} = T$
$R^{1,5} = \frac{1}{0,37} \cdot T$
$R = (\frac{1}{0,37} \cdot T)^{\frac{2}{3}}$
$R = (\frac{1}{0,37})^{\frac{2}{3}} \cdot T^{\frac{2}{3}}$
$R \approx 1,94 \cdot T^{0,67}$
Dus $R = 1,94 \cdot T^{0,67}$.

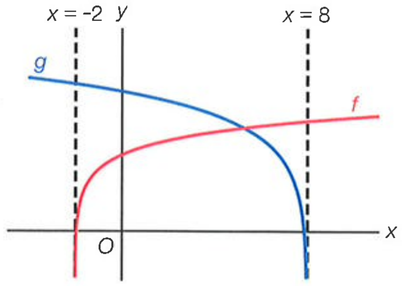
e Omlooptijd 15 uur geeft $T = \frac{15}{24}$.
$R = 1,94 \cdot (\frac{15}{24})^{0,67} \approx 1,42$
De straal is ongeveer $1,42 \cdot 10^5$ km.

Bladzijde 174

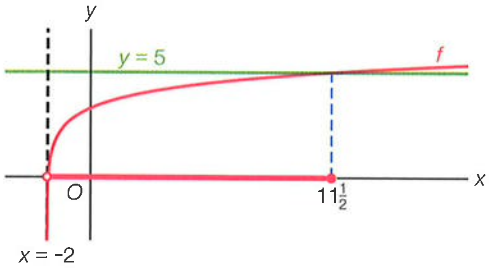
9 **a** $2x + 4 > 0$
$2x > -4$
$x > -2$
$D_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = -2$.

$8 - x > 0$
$-x > -8$
$x < 8$
$D_g = \langle \leftarrow, 8 \rangle$ en de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = 8$.

b



c $f(x) = 5$ geeft $2 + {}^3\log(2x + 4) = 5$
${}^3\log(2x + 4) = 3$
$2x + 4 = 3^3$
$2x = 23$
$x = 11\frac{1}{2}$



$f(x) \leq 5$ geeft $-2 < x \leq 11\frac{1}{2}$

d $f(x) = 2$ geeft $2 + {}^3\log(2x + 4) = 2$
${}^3\log(2x + 4) = 0$
$2x + 4 = 1$
$2x = -3$
$x = -1\frac{1}{2}$
Dus $x_A = -1\frac{1}{2}$.

$g(x) = 2$ geeft $3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(8 - x) = 2$
${}^{\frac{1}{2}}\log(8 - x) = 1$
$8 - x = \frac{1}{2}$
$x = 7\frac{1}{2}$
Dus $x_B = 7\frac{1}{2}$.
$AB = x_B - x_A = 7\frac{1}{2} - -1\frac{1}{2} = 9$

10 **a** $L = 34$ geeft $7{,}5G^{0{,}25} = 34$
$G^{0{,}25} = \frac{34}{7{,}5}$
$G = \left(\frac{34}{7{,}5}\right)^4 \approx 422$
Het gemiddelde gewicht is 422 kg.

b $H = 900$ geeft $280G^{-0{,}25} = 900$
$G^{-0{,}25} = \frac{900}{280}$
$G = \left(\frac{900}{280}\right)^{-4} = 0{,}009...$
$G = 0{,}009...$ geeft $L = 7{,}5 \cdot 0{,}009...^{0{,}25} = 2{,}33...$
Het aantal hartslagen is $900 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 2{,}33... \approx 1{,}1 \cdot 10^9$.
Dus ongeveer 1,1 miljard hartslagen.

c L is de levensverwachting in jaren, dus $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot L = 525\,600L$ is de levensverwachting in minuten.
H is het aantal hartslagen per minuut, dus $525\,600L \cdot H$ is het aantal hartslagen in het gehele leven.
Als $L \cdot H$ voor elk zoogdier gelijk is, dan moet $L \cdot H$ voor elk zoogdier hetzelfde getal zijn.
$L \cdot H = 7{,}5G^{0{,}25} \cdot 280G^{-0{,}25} = 2100G^0 = 2100$
Dus $L \cdot H = 2100$.

6 Differentiaalrekening

11 **a** $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x^2}{x^6} = x^{-1} - 5x^{-4}$ geeft $f'(x) = -x^{-2} + 20x^{-5} = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{20}{x^5} = \dfrac{-x^3 + 20}{x^5}$

b $g(x) = 4x^3 \cdot \sqrt{x} - \dfrac{4}{x^3 \cdot \sqrt{x}} = 4x^{3\frac{1}{2}} - 4x^{-3\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = 14x^{2\frac{1}{2}} + 14x^{-4\frac{1}{2}} = 14x^2 \cdot \sqrt{x} + \dfrac{14}{x^4 \cdot \sqrt{x}}$

c $h(x) = (x\sqrt{x} + 2)^4$ geeft $h'(x) = 4(x\sqrt{x} + 2)^3 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{x} = 6\sqrt{x} \cdot (x\sqrt{x} + 2)^3$

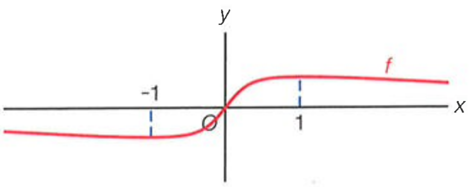
12 **a** $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$
$f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + x + 4$
$f_p''(x) = 12x^2 + 6px + 1$
$f_p''(x) = 0$ geeft $12x^2 + 6px + 1 = 0$
$D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 36p^2 - 48$
$D > 0$ geeft $36p^2 > 48$
$p^2 > \frac{4}{3}$
$p < -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee p > \frac{2}{3}\sqrt{3}$
Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee p > \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

b $f_p'(x) = 4$ geeft $4x^3 + 3px^2 + x + 4 = 4$
$4x^3 + 3px^2 + x = 0$
$x(4x^2 + 3px + 1) = 0$
$x = 0 \vee 4x^2 + 3px + 1 = 0$
Van $4x^2 + 3px + 1 = 0$ is $D = (3p)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9p^2 - 16$
$D > 0$ geeft $9p^2 > 16$
$p^2 > \frac{16}{9}$
$p < -\frac{4}{3} \vee p > \frac{4}{3}$
Dus $4x^2 + 3px + 1 = 0$ heeft twee (van 0 verschillende) oplossingen voor $p < -\frac{4}{3} \vee p > \frac{4}{3}$.
Dus de grafiek van f_p heeft voor $p < -1\frac{1}{3} \vee p > 1\frac{1}{3}$ drie raaklijnen die evenwijdig zijn met k.

Bladzijde 175

13 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4} + \dfrac{x}{4x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 4) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} + \dfrac{(4x^2 + 1) \cdot 1 - x \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2}$
$= \dfrac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} + \dfrac{4x^2 + 1 - 8x^2}{(4x^2 + 1)^2} = \dfrac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} + \dfrac{-4x^2 + 1}{(4x^2 + 1)^2}$

$f'(1) = f'(-1) = \dfrac{-1 + 4}{(1 + 4)^2} + \dfrac{-4 + 1}{(4 + 1)^2} = \frac{3}{25} - \frac{3}{25} = 0$



$f'(1) = 0$ en $f'(-1) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek toppen heeft voor $x = 1$ en $x = -1$.
Dus f heeft extremen voor $x = 1$ en $x = -1$.

14 **a** $f(x) = \dfrac{3x^2 - 9}{x^3} = 3x^{-1} - 9x^{-3}$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} + 27x^{-4} = -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{27}{x^4} = \dfrac{-3x^2 + 27}{x^4}$

$f'(x) = 0$ geeft $-3x^2 + 27 = 0$

$3x^2 = 27$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

Zie figuur G.2 in het leerboek.

min. is $f(-3) = -\frac{2}{3}$ en max. is $f(3) = \frac{2}{3}$.

b $f'(x) = 24$ geeft $\dfrac{-3x^2 + 27}{x^4} = 24$

$-3x^2 + 27 = 24x^4$

$24x^4 + 3x^2 - 27 = 0$

$8x^4 + x^2 - 9 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$8u^2 + u - 9 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 8 \cdot -9 = 289$

$u = \dfrac{-1 + 17}{16} = 1 \vee u = \dfrac{-1 - 17}{16} = -1\frac{1}{8}$

$x^2 = 1 \vee x^2 = -1\frac{1}{8}$

$x = 1 \vee x = -1$

De raakpunten zijn $(1, -6)$ en $(-1, 6)$.

c Voor raken geldt $f(x) = ax^2 \wedge f'(x) = 2ax$

$\dfrac{3x^2 - 9}{x^3} = ax^2 \wedge \dfrac{-3x^2 + 27}{x^4} = 2ax$

$a = \dfrac{3x^2 - 9}{x^5} \wedge a = \dfrac{-3x^2 + 27}{2x^5}$

Hieruit volgt $\dfrac{3x^2 - 9}{x^5} = \dfrac{-3x^2 + 27}{2x^5}$

$\dfrac{6x^2 - 18}{2x^5} = \dfrac{-3x^2 + 27}{2x^5}$

$6x^2 - 18 = -3x^2 + 27$

$9x^2 = 45$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

$x = \sqrt{5}$ geeft $a = \dfrac{3 \cdot 5 - 9}{25\sqrt{5}} = \frac{6}{125}\sqrt{5}$

$x = -\sqrt{5}$ geeft $a = \dfrac{3 \cdot 5 - 9}{-25\sqrt{5}} = -\frac{6}{125}\sqrt{5}$

Dus voor $a = \frac{6}{125}\sqrt{5} \vee a = -\frac{6}{125}\sqrt{5}$.

15 **a** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4x}$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{x^2 + 4x} + x^2 \cdot \dfrac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} = \dfrac{2x(x^2 + 4x) + x^2(x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x}}$

$= \dfrac{2x^3 + 8x^2 + x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \dfrac{3x^3 + 10x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$

b $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$ geeft $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x} \cdot 2x - x^2 \cdot \dfrac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}}}{x^2 + 4x} = \dfrac{2x(x^2 + 4x) - x^2(x + 2)}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}}$

$= \dfrac{2x^3 + 8x^2 - x^3 - 2x^2}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}} = \dfrac{x^3 + 6x^2}{(x^2 + 4x)\sqrt{x^2 + 4x}} = \dfrac{x^2 + 6x}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x}}$

c $h(x) = \dfrac{5x}{(x^2 - 2x)^3}$ geeft $h'(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)^3 \cdot 5 - 5x \cdot 3(x^2 - 2x)^2 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^6} = \dfrac{(x^2 - 2x) \cdot 5 - 5x \cdot 3 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^4}$

$= \dfrac{5x^2 - 10x - 30x^2 + 30x}{(x^2 - 2x)^4} = \dfrac{-25x^2 + 20x}{(x^2 - 2x)^4} = \dfrac{5x(4 - 5x)}{(x^2 - 2x)^4}$

16 **a** $f_p(x) = x^3 + px^2 - 3x + 8$ geeft $f_p'(x) = 3x^2 + 2px - 3$

$f_p'(-\frac{1}{3}) = 0$ geeft $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}p - 3 = 0$

$-\frac{2}{3}p = \frac{8}{3}$

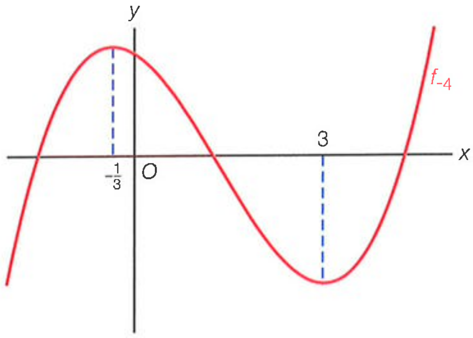
$p = -4$

$f_{-4}(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 8$ geeft $f_{-4}'(x) = 3x^2 - 8x - 3$

$f_{-4}'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 8x - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

$x = \frac{8 + 10}{6} = 3 \vee x = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$



min. is $f_{-4}(3) = 27 - 36 - 9 + 8 = -10$.

b $f_p'(x) = 3x^2 + 2px - 3$ geeft $f_p''(x) = 6x + 2p$

$f_p''(1) = 0$ geeft $6 + 2p = 0$

$2p = -6$

$p = -3$

$y_A = f_{-3}(1) = 1 - 3 - 3 + 8 = 3$

c Er moet gelden $f_p(x) = -3x + 12 \wedge f_p'(x) = -3$.

$f_p'(x) = -3$ geeft $3x^2 + 2px - 3 = -3$

$3x^2 + 2px = 0$

$x(3x + 2p) = 0$

$x = 0 \vee 3x + 2p = 0$

$x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}p$

$x = 0$ geeft het punt $(0, 8)$ op de grafiek van f_p en dit punt ligt niet op de lijn $y = -3x + 12$, dus $x = 0$ voldoet niet.

$x = -\frac{2}{3}p$ substitueren in $f_p(x) = -3x + 12$ geeft $f_p(-\frac{2}{3}p) = -3 \cdot -\frac{2}{3}p + 12$

$(-\frac{2}{3}p)^3 + p \cdot (-\frac{2}{3}p)^2 - 3 \cdot -\frac{2}{3}p + 8 = -3 \cdot -\frac{2}{3}p + 12$

$-\frac{8}{27}p^3 + \frac{4}{9}p^3 = 4$

$\frac{4}{27}p^3 = 4$

$p^3 = 27$

$p = 3$

d $f_p'(x) = 0$ geeft $3x^2 + 2px - 3 = 0$

$2px = -3x^2 + 3$

$p = \frac{-3x^2 + 3}{2x}$

Substitutie van $p = \frac{-3x^2 + 3}{2x}$ in $y = f_p(x)$ geeft $y = x^3 + \frac{-3x^2 + 3}{2x} \cdot x^2 - 3x + 8$

$y = x^3 - 1\frac{1}{2}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 3x + 8$

$y = -\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x + 8$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = -\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x + 8$.

Bladzijde 176

17 **a** $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = x^{2\frac{1}{2}} - x^{1\frac{1}{2}} - 2\sqrt{x}$ geeft

$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x\sqrt{x}}{2} - \dfrac{3\sqrt{x}}{2} - \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$

b $f'(x) = 0$ geeft $5x^2 - 3x - 2 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -2 = 49$

$x = \dfrac{3+7}{10} = 1 \vee x = \dfrac{3-7}{10} = -\frac{2}{5}$

vold. vold. niet

Zie figuur G.3 in het leerboek.

min. is $f(1) = -2$.

c $f(x) = 0$ geeft $x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x(x+1)(x-2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2$

vold. niet vold. niet vold.

Dus $A(2, 0)$.

De lijn l raakt de grafiek van f in A.

$\text{rc}_l = f'(2) = \dfrac{20 - 6 - 2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, dus $\text{rc}_k = -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}x + b \\ \text{door } A(2, 0) \end{array}\right\} -\dfrac{1}{3\sqrt{2}} \cdot 2 + b = 0$

$b = \dfrac{2}{3\sqrt{2}}$

$k\colon y = -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}x + \dfrac{2}{3\sqrt{2}}$ oftewel $k\colon 3y\sqrt{2} = -x + 2$

Dus $k\colon x + 3y\sqrt{2} = 2$.

d $f'(x) = 16\frac{1}{2}$ geeft $\dfrac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{33}{2}$

$5x^2 - 3x - 2 = 33\sqrt{x}$

Voer in $y_1 = 5x^2 - 3x - 2$ en $y_2 = 33\sqrt{x}$.

De optie snijpunt geeft $x = 4$.

$f(4) = 20$, dus $B(4, 20)$.

$\left.\begin{array}{l} y = 16\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(4, 20) \end{array}\right\} 66 + b = 20$

$b = -46$

Dus $m\colon y = 16\frac{1}{2}x - 46$.

18 $9 - x^2 \geq 0$

$-x^2 \geq -9$

$x^2 \leq 9$

$-3 \leq x \leq 3$

Dus $D_f = [-3, 3]$.

$f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 2$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot -2x + x = \dfrac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} + x$

$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} + x = 0$

$\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}} = x$

$x = 0 \vee \sqrt{9-x^2} = 1$

$x = 0 \vee 9 - x^2 = 1$

$x = 0 \vee x^2 = 8$

$x = 0 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$

max. is $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) = \sqrt{9-8} + \frac{1}{2} \cdot 8 - 2 = 3$ en min. is $f(0) = \sqrt{9} + 0 - 2 = 1$.

$f(-3) = f(3) = \sqrt{9-9} + \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 = 2\frac{1}{2}$

Dus $B_f = [1, 3]$.

19 **a** $f_p(x) = x\sqrt{x} + p\sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}} + p\sqrt{x}$ geeft $f_p'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{p}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{p}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+p}{2\sqrt{x}}$

$f_p'(4) = 5$ geeft $\dfrac{12+p}{2\sqrt{4}} = 5$

$12 + p = 20$

$p = 8$

$f_8(x) = x\sqrt{x} + 8\sqrt{x}$ geeft $f_8(4) = 8 + 16 = 24$

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = 5x + q \\ \text{door } A(4, 24) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 20 + q = 24 \\ q = 4 \end{array}$

b $f_p'(x) = 0$ geeft $3x + p = 0$

$\left.\begin{array}{l} p = -3x \\ y = x\sqrt{x} + p\sqrt{x} \end{array}\right\} y = x\sqrt{x} - 3x\sqrt{x} = -2x\sqrt{x}$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -2x\sqrt{x}$.

c $-2x\sqrt{x} = -2$

$x\sqrt{x} = 1$

$x^3 = 1$

$x = 1$ vold.

$f_p'(1) = 0$ geeft $3 + p = 0$, dus $p = -3$.

20 **a** $f(x) = (x+1)\sqrt{4x^2+1}$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{4x^2+1} + (x+1) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot 8x = \sqrt{4x^2+1} + \dfrac{4x(x+1)}{\sqrt{4x^2+1}}$

$rc_k = f'(0) = 1$

$g_a(x) = 4 + \dfrac{8}{(ax-2)^2} = 4 + 8(ax-2)^{-2}$ geeft $g_a'(x) = -16(ax-2)^{-3} \cdot a = \dfrac{-16a}{(ax-2)^3}$

$rc_l = g_a'(0) = \dfrac{-16a}{-8} = 2a$

$k \perp l$ geeft $rc_k \cdot rc_l = -1$

$1 \cdot 2a = -1$

$a = -\frac{1}{2}$

b $f(0) = 1$, dus $A(0, 1)$ en k: $y = x + 1$.

$g_a(0) = 4 + \dfrac{8}{(0-2)^2} = 4 + \dfrac{8}{4} = 4 + 2 = 6$, dus l: $y = 2ax + 6$.

k snijdt de x-as in $(-1, 0)$.

$(-1, 0)$ op l geeft $-2a + 6 = 0$

$-2a = -6$

$a = 3$

Bladzijde 177

21 **a** $f(p) = \frac{4}{p}$, dus $P\left(p, \frac{4}{p}\right)$.

$L(p) = d(O, P) = \sqrt{(p-0)^2 + \left(\frac{4}{p} - 0\right)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}$

b $L(p) = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}} = \sqrt{p^2 + 16p^{-2}}$ geeft

$L'(p) = \frac{1}{2\sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}} \cdot (2p - 32p^{-3}) = \frac{p - 16p^{-3}}{\sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}} = \frac{p^4 - 16}{p^3 \cdot \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}}$

$L'(p) = 0$ geeft $p^4 - 16 = 0$
$p^4 = 16$
$p = 2 \vee p = -2$
vold. vold. niet

$f(2) = \frac{4}{2} = 2$, dus $P(2, 2)$.

$f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$

$\left.\begin{array}{l} rc_k = f'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1 \\ rc_{OP} = \frac{2-0}{2-0} = 1 \end{array}\right\} rc_k \cdot rc_{OP} = -1 \cdot 1 = -1$

Dus k en OP staan loodrecht op elkaar.

22 $f(x) = \frac{x^3 + 6}{x\sqrt{x}} = \frac{x^3 + 6}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{1\frac{1}{2}} + 6x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9x^{-2\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{9}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3x^3 - 18}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ geeft $3x^3 - 18 = 0$
$3x^3 = 18$
$x^3 = 6$
$x = \sqrt[3]{6}$

$f(\sqrt[3]{6}) = \frac{6 + 6}{(\sqrt[3]{6})^{1\frac{1}{2}}} = \frac{12}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$

Dus $a = 6$ en $b = 2$.

23 $f_p(x) = \frac{10x + p}{x^2 + 1}$ geeft $f_p'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 10 - (10x + p) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{10x^2 + 10 - 20x^2 - 2px}{(x^2+1)^2} = \frac{-10x^2 - 2px + 10}{(x^2+1)^2}$

$f_p'(1) = \frac{-10 - 2p + 10}{(1+1)^2} = \frac{-2p}{4} = -\frac{1}{2}p$

Loodrecht snijden, dus $f_p'(1) \cdot rc_k = -1$
$-\frac{1}{2}p \cdot \frac{2}{3} = -1$
$-\frac{1}{3}p = -1$
$p = 3$

$f_3(x) = \frac{10x + 3}{x^2 + 1}$

$f_3(1) = \frac{10 + 3}{1 + 1} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$, dus $A(1, 6\frac{1}{2})$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + q \\ \text{door } A(1, 6\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \frac{2}{3} \cdot 1 + q = 6\frac{1}{2}$
$q = 5\frac{5}{6}$

Dus $p = 3$ en $q = 5\frac{5}{6}$.

7 Meetkunde met coördinaten

24 **a** $\left.\begin{array}{l} k\colon \frac{x}{2p+1}+\frac{y}{5}=1 \\ A(2, 3) \text{ op } k \end{array}\right\}$ $\frac{2}{2p+1}+\frac{3}{5}=1$

$\frac{2}{2p+1}=\frac{2}{5}$

$2p+1=5$

$2p=4$

$p=2$

vold.

b $\text{rc}_k=\frac{0-5}{2p+1-0}=\frac{-5}{2p+1}$

$k /\!/ m$, dus $\text{rc}_k=\text{rc}_m$

$\frac{-5}{2p+1}=-2$

$-2(2p+1)=-5$

$-4p-2=-5$

$-4p=-3$

$p=\frac{3}{4}$

$\text{rc}_l=\frac{q+2-0}{0-2}=\frac{q+2}{-2}$

$l /\!/ m$, dus $\text{rc}_l=\text{rc}_m$

$\frac{q+2}{-2}=-2$

$q+2=4$

$q=2$

Dus voor $p=\frac{3}{4} \wedge q=2$ zijn de lijnen k, l en m evenwijdig.

c De lijnen k en l vallen samen als k door het punt $(2, 0)$ en l door het punt $(0, 5)$ gaat.
Dus er moet gelden $2p+1=2$ en $q+2=5$. Hieruit volgt $p=\frac{1}{2}$ en $q=3$.
Dus voor $p=\frac{1}{2} \wedge q=3$ vallen de lijnen k en l samen.

25 **a** Stel $k\colon y=ax+b$.
$B(1, 6)$ op k geeft $a+b=6$, dus $b=-a+6$.
$k\colon y=ax-a+6$ oftewel $k\colon ax-y-a+6=0$

$d(A, k)=2$ geeft $\frac{|-3a-4-a+6|}{\sqrt{a^2+1}}=2$

$|-4a+2|=2\sqrt{a^2+1}$

$16a^2-16a+4=4a^2+4$

$12a^2-16a=0$

$4a(3a-4)=0$

$4a=0 \vee 3a=4$

$a=0 \vee a=1\frac{1}{3}$

$a=0$ geeft $b=6$, dus $k_1\colon y=6$.

$a=1\frac{1}{3}$ geeft $b=-1\frac{1}{3}+6=4\frac{2}{3}$, dus $k_2\colon y=1\frac{1}{3}x+4\frac{2}{3}$.

b Stel $AB\colon y=ax+b$ met $a=\frac{6-4}{1--3}=\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x+b \\ \text{door } B(1, 6) \end{array}\right\}$ $\frac{1}{2}\cdot 1+b=6$

$b=5\frac{1}{2}$

Dus $AB\colon y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$ oftewel $AB\colon x-2y=-11$.

$l /\!/ AB$, dus $l\colon x-2y=c$.

$d(B, l)=2\sqrt{5}$ geeft $\frac{|1-2\cdot 6-c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

$\frac{|-11-c|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

$|-11-c|=10$

$-11-c=10 \vee -11-c=-10$

$c=-21 \vee c=-1$

Dus $l_1\colon x-2y=-21$ en $l_2\colon x-2y=-1$.

c Lijnen n evenwijdig m en op afstand 5 van m.
n: $3x + 4y = c$
$D(0, 2)$ is een punt op m.

$d(D, n) = 5$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$

$\dfrac{|8 - c|}{\sqrt{25}} = 5$

$\dfrac{|8 - c|}{5} = 5$

$|8 - c| = 25$

$8 - c = 25 \vee 8 - c = -25$

$c = -17 \vee c = 33$

n_1: $3x + 4y = -17$ snijden met AB: $y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ geeft $3x + 4(\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}) = -17$

$3x + 2x + 22 = -17$

$5x = -39$

$\left.\begin{array}{l} x = -7\frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \end{array}\right\} y = \frac{1}{2} \cdot -7\frac{4}{5} + 5\frac{1}{2} = 1\frac{3}{5}$

n_2: $3x + 4y = 33$ snijden met AB: $y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ geeft $3x + 4(\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}) = 33$

$3x + 2x + 22 = 33$

$5x = 11$

$\left.\begin{array}{l} x = 2\frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \end{array}\right\} y = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{5} + 5\frac{1}{2} = 6\frac{3}{5}$

De punten zijn $(-7\frac{4}{5}, 1\frac{3}{5})$ en $(2\frac{1}{5}, 6\frac{3}{5})$.

d $\text{rc}_{AC} = \dfrac{-1 - 4}{0 - -3} = -1\frac{2}{3}$

$\tan(\alpha) = \text{rc}_{AB} = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26{,}56...^\circ$

$\tan(\beta) = \text{rc}_{AC} = -1\frac{2}{3}$ geeft $\beta = -59{,}03...^\circ$

$\alpha - \beta = 26{,}56...^\circ - -59{,}03...^\circ \approx 85{,}6^\circ$

Dus $\angle(AB, AC) \approx 85{,}6^\circ$.

26 **a** $p = -3$ geeft k: $y = -3x + 1$

$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = -3$ geeft $\alpha = -71{,}56...^\circ$

l: $2x + y = 3$ oftewel l: $y = -2x + 3$

$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -2$ geeft $\beta = -63{,}43...^\circ$

$\beta - \alpha = -63{,}43...^\circ - -71{,}56...^\circ \approx 8{,}1^\circ$

Dus $\angle(k, l) \approx 8{,}1^\circ$.

b $-63{,}43...^\circ + 15^\circ = -48{,}43...^\circ$

$p = \text{rc}_k = \tan(-48{,}43...^\circ) \approx -1{,}128$

$-63{,}43...^\circ - 15^\circ = -78{,}43...^\circ$

$p = \text{rc}_k = \tan(-78{,}43...^\circ) \approx -4{,}887$

Bladzijde 178

27 **a** $d(A, B) = \sqrt{(5p - p)^2 + (2p + 3 - 5)^2} = \sqrt{(4p)^2 + (2p - 2)^2} = \sqrt{16p^2 + 4p^2 - 8p + 4} = \sqrt{20p^2 - 8p + 4}$

b $d(A, B) = 4\sqrt{29}$ geeft $\sqrt{20p^2 - 8p + 4} = 4\sqrt{29}$

$20p^2 - 8p + 4 = 464$

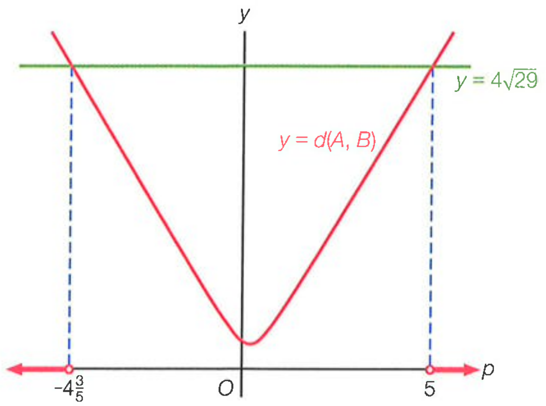
$20p^2 - 8p - 460 = 0$

$5p^2 - 2p - 115 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -115 = 2304$

$p = \dfrac{2 + 48}{10} = 5 \vee p = \dfrac{2 - 48}{10} = -4\frac{3}{5}$

vold. vold.



$d(A, B) > 4\sqrt{29}$ geeft $p < -4\frac{3}{5} \vee p > 5$

c $M(\frac{1}{2}(p + 5p), \frac{1}{2}(5 + 2p + 3)) = M(3p, p + 4)$
Van c: $x^2 + y^2 = 16$ is het middelpunt $O(0, 0)$ en $r = 4$.
M op afstand 8 van c, dus M op de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 12.
M op $x^2 + y^2 = 144$ geeft $(3p)^2 + (p + 4)^2 = 144$

$$9p^2 + p^2 + 8p + 16 = 144$$
$$10p^2 + 8p - 128 = 0$$
$$5p^2 + 4p - 64 = 0$$
$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot -64 = 1296$$
$$p = \frac{-4 + 36}{10} \vee p = \frac{-4 - 36}{10}$$
$$p = 3\frac{1}{5} \vee p = -4$$

d AB is een middellijn, dus van d is het middelpunt $M(3p, p + 4)$.
De straal is $d(A, M) = \sqrt{(3p - p)^2 + (p + 4 - 5)^2} = \sqrt{(2p)^2 + (p - 1)^2} = \sqrt{4p^2 + p^2 - 2p + 1} = \sqrt{5p^2 - 2p + 1}$.
Dus d: $(x - 3p)^2 + (y - p - 4)^2 = 5p^2 - 2p + 1$.
d door de oorsprong geeft $(-3p)^2 + (-p - 4)^2 = 5p^2 - 2p + 1$

$$9p^2 + p^2 + 8p + 16 = 5p^2 - 2p + 1$$
$$5p^2 + 10p + 15 = 0$$
$$p^2 + 2p + 3 = 0$$
$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$$

geen opl.
Dus er is geen waarde van p waarvoor d door de oorsprong gaat.

28 **a** $r = d(M, k) = \frac{|3 \cdot 8 - 4 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

Dus c: $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

b Stel l: $3x - 4y = c$.
$P(2, 0)$ is een punt op k.

$d(P, l) = 3$ geeft $\frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - c|}{5} = 3$

$$|6 - c| = 15$$
$$6 - c = 15 \vee 6 - c = -15$$
$$c = -9 \vee c = 21$$

Dus l_1: $3x - 4y = -9$ en l_2: $3x - 4y = 21$.

c Stel een punt op m is $A(a, a)$.

$d(A, k) = 4$ geeft $\frac{|3a - 4a - 6|}{5} = 4$

$$|-a - 6| = 20$$
$$-a - 6 = 20 \vee -a - 6 = -20$$
$$a = -26 \vee a = 14$$

Dus $A(-26, -26)$ en $B(14, 14)$.

29 **a** Met dit werkschema wordt het middelpunt M van de cirkel gevonden door het snijpunt van twee middelloodlijnen van driehoek ABC te berekenen. Daarna geeft $d(M, A)$ de straal van de cirkel.

b $\text{rc}_{AB} = \dfrac{1-8}{7-6} = -7$, dus $\text{rc}_k = \frac{1}{7}$.

Het midden van AB is $(\frac{1}{2}(6+7), \frac{1}{2}(8+1)) = (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = \frac{1}{7}x + b \\ \text{door } (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{7}\cdot 6\frac{1}{2} + b = 4\frac{1}{2} \\ \frac{13}{14} + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 3\frac{4}{7} \end{array}$$

Dus $k\colon y = \frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7}$.

$\text{rc}_{AC} = \dfrac{4-8}{-2-6} = \frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_l = -2$.

Het midden van AC is $(\frac{1}{2}(6+-2), \frac{1}{2}(8+4)) = (2, 6)$.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -2x + b \\ \text{door } (2, 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2\cdot 2 + b = 6 \\ -4 + b = 6 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus $l\colon y = -2x + 10$.

k en l snijden geeft

$\frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7} = -2x + 10$

$2\frac{1}{7}x = 6\frac{3}{7}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2x + 10 \end{array}\right\} y = -2\cdot 3 + 10 = 4$$

Dus $M(3, 4)$.

$d(M, A) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Dus $c\colon (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

30 **a** $c\colon x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

$x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

Dus $M(1, 3)$ en $r = \sqrt{5}$.

Stel $y = ax + b$.

Door $A(5, 0)$ geeft $5a + b = 0$, dus $b = -5a$.

$y = ax - 5a$ oftewel $ax - y - 5a = 0$

$d(M, ax - y - 5a = 0) = r$ geeft $\dfrac{|a - 3 - 5a|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$

$|-4a - 3| = \sqrt{5a^2 + 5}$

$16a^2 + 24a + 9 = 5a^2 + 5$

$11a^2 + 24a + 4 = 0$

$D = 24^2 - 4\cdot 11\cdot 4 = 400$

$a = \dfrac{-24+20}{22} = -\frac{2}{11} \vee a = \dfrac{-24-20}{22} = -2$

$a = -\frac{2}{11}$ geeft $b = -5\cdot -\frac{2}{11} = \frac{10}{11}$, dus $l\colon y = -\frac{2}{11}x + \frac{10}{11}$.

$a = -2$ geeft $b = -5\cdot -2 = 10$, dus $k\colon y = -2x + 10$.

b $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = -2$ geeft $\alpha = -63{,}43...^\circ$

$\tan(\beta) = \text{rc}_l = -\frac{2}{11}$ geeft $\beta = -10{,}30...^\circ$

$\beta - \alpha = -10{,}30...^\circ - -63{,}43...^\circ \approx 53{,}1^\circ$

Dus $\angle(k, l) \approx 53{,}1^\circ$.

c d raakt de x-as in het punt $A(5, 0)$, dus het middelpunt van d is N met $x_N = 5$.
Stel $N(5, p)$. Dit geeft d: $(x-5)^2 + (y-p)^2 = p^2$.
d door $M(1, 3)$ geeft $(-4)^2 + (3-p)^2 = p^2$
$16 + 9 - 6p + p^2 = p^2$
$-6p = -25$
$p = 4\frac{1}{6}$
Dus d: $(x-5)^2 + (y-4\frac{1}{6})^2 = (4\frac{1}{6})^2$ oftewel d: $(x-5)^2 + (y-4\frac{1}{6})^2 = 17\frac{13}{36}$.

Bladzijde 179

31 **a** c_1: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 15 = 0$
$(x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 15 = 0$
$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$
Dus van c_1 is het middelpunt $M(4, 2)$ en de straal $r_1 = \sqrt{5}$.
$l \perp k$ geeft l: $x + 2y = c$.

$d(M, l) = r$ geeft $\dfrac{|4 + 2 \cdot 2 - c|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$

$\dfrac{|8 - c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$|8 - c| = 5$
$8 - c = 5 \vee 8 - c = -5$
$c = 3 \vee c = 13$
Dus l_1: $x + 2y = 3$ en l_2: $x + 2y = 13$.

b $d(A, M) = \sqrt{(4-15)^2 + (2-9)^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$
$d(A, c_1) = d(A, M) - r_1 = \sqrt{170} - \sqrt{5}$

$d(M, k) = \dfrac{|2 \cdot 4 - 2 - 21|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|-15|}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

$d(k, c_1) = d(M, k) - r_1 = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
$2\frac{1}{2} \cdot d(k, c_1) = 2\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
Is $\sqrt{170} - \sqrt{5} > 5\sqrt{5}$ oftewel is $\sqrt{170} > 6\sqrt{5}$?
$6\sqrt{5} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{180}$
Er geldt dus niet dat $\sqrt{170} > 6\sqrt{5}$ en dus geldt niet dat $d(A, c_1) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c_1)$.

c Van lijnstuk AB met $A(15, 9)$ en $B(1, -1)$ is het midden $N(8, 4)$.
N is tevens het middelpunt van c_2 en de straal van c_2 is
$r_2 = d(A, N) = \sqrt{(8-15)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$.
$d(M, N) = \sqrt{(8-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$d(c_1, c_2) = r_2 - d(M, N) - r_1 = \sqrt{74} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{74} - 3\sqrt{5}$

32 **a** Stel k: $y = 3x + b$ oftewel k: $3x - y + b = 0$
Van c is het middelpunt $O(0, 0)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.

$d(O, k) = r$ geeft $\dfrac{|3 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$

$\dfrac{|b|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$|b| = 10$
$b = 10 \vee b = -10$
Dus k_1: $y = 3x + 10$ en k_2: $y = 3x - 10$.

b Stel l: $y = ax + b$.
$A(4, 2)$ op l geeft $4a + b = 2$, dus $b = -4a + 2$.
l: $y = ax - 4a + 2$ oftewel $ax - y - 4a + 2 = 0$

$$d(O, l) = r \text{ geeft } \frac{|0 - 0 - 4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$$
$$|-4a + 2| = \sqrt{10a^2 + 10}$$
$$16a^2 - 16a + 4 = 10a^2 + 10$$
$$6a^2 - 16a - 6 = 0$$
$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$
$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$
$$a = \frac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \frac{8 - 10}{6} = -\tfrac{1}{3}$$

$a = 3$ geeft $b = -4 \cdot 3 + 2 = -10$, dus l_1: $y = 3x - 10$.
$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -4 \cdot -\frac{1}{3} + 2 = 3\frac{1}{3}$, dus l_2: $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

c Noem de raakpunten P en Q.

$$\sin(\angle OBQ) = \frac{r}{OB} = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ geeft } \angle OBQ = 52{,}23...°$$
$\angle PBQ = 2 \cdot 52{,}23...° \approx 104{,}5°$
Dus $\angle(m_1, m_2) \approx 180° - 104{,}5° = 75{,}5°$.

33 **a** c: $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$
Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{13}$.
$x = 5$ geeft $(5 - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$
$4 + (y - 2)^2 = 13$
$(y - 2)^2 = 9$
$y - 2 = 3 \vee y - 2 = -3$
$y = 5 \vee y = -1$
Dus $A(5, 5)$ en $B(5, -1)$.

$\text{rc}_{AM} = \frac{5 - 2}{5 - 3} = 1\frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_k = -\frac{2}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -\tfrac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(5, 5) \end{array}\right\} -\tfrac{2}{3} \cdot 5 + b = 5$$
$-3\frac{1}{3} + b = 5$
$b = 8\frac{1}{3}$
Dus k: $y = -\frac{2}{3}x + 8\frac{1}{3}$.

$\text{rc}_{BM} = \frac{-1 - 2}{5 - 3} = -1\frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_l = \frac{2}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = \tfrac{2}{3}x + b \\ \text{door } B(5, -1) \end{array}\right\} \tfrac{2}{3} \cdot 5 + b = -1$$
$3\frac{1}{3} + b = -1$
$b = -4\frac{1}{3}$
Dus l: $y = \frac{2}{3}x - 4\frac{1}{3}$.

b m evenwijdig met n: $3x + 2y = 10$ geeft m: $3x + 2y = c$.

$$d(M, m) = r \text{ geeft } \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - c|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$$
$$\frac{|13 - c|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$
$$|13 - c| = 13$$
$$13 - c = 13 \vee 13 - c = -13$$
$$c = 0 \vee c = 26$$
Dus m_1: $3x + 2y = 0$ en m_2: $3x + 2y = 26$.

34 c: $x^2 + y^2 + 8x = 0$
$x^2 + 8x + y^2 = 0$
$(x+4)^2 - 16 + y^2 = 0$
$(x+4)^2 + y^2 = 16$
Dus middelpunt $M(-4, 0)$ en straal $r_c = 4$.
Lijn l gaat door M en staat loodrecht op k.
$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 3x - 4y = c \\ \text{door } M(-4, 0) \end{array}\right\} c = 3 \cdot -4 - 4 \cdot 0 = -12$
Dus l: $3x - 4y = -12$.
k en l snijden geeft het punt S, dat het middelpunt van cirkel d is.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 16x + 12y = 36 \\ 9x - 12y = -36 \end{cases} +$$
$$25x = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x + 3y = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 0 + 3y = 9 \\ y = 3 \end{array}$$

Dus $S(0, 3)$.
$d(M, S) = \sqrt{(0 - -4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
De straal van d is $r_d = d(k, c) = d(M, S) - r_c = 5 - 4 = 1$.
Dus d: $x^2 + (y-3)^2 = 1$.

35 k: $\frac{x}{2r} + \frac{y}{4} = 1$ oftewel k: $2x + ry = 4r$
$d(O, k) = r$ geeft $\frac{|2 \cdot 0 + r \cdot 0 - 4r|}{\sqrt{4 + r^2}} = r$
$|-4r| = r\sqrt{4 + r^2}$
$16r^2 = r^2(4 + r^2)$
$16 = 4 + r^2$
$r^2 = 12$
$r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Bladzijde 180

36 **a** De loodlijn uit N op de y-as snijdt de y-as in het punt $Q(0, 4)$.
In driehoek MNQ geeft de stelling van Pythagoras $QN^2 + QM^2 = MN^2$
$QN^2 + 5^2 = 13^2$
$QN^2 = 169 - 25 = 144$
$QN = 12$
Vierhoek $OPNM$ is een trapezium.
De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(9 + 4) \cdot 12 = 78$.

b De loodlijn uit N op de y-as snijdt de y-as in het punt $Q(0, s)$.
In driehoek MNQ geeft de stelling van Pythagoras $QN^2 + QM^2 = MN^2$
$QN^2 + (r-s)^2 = (r+s)^2$
$QN^2 + r^2 - 2rs + s^2 = r^2 + 2rs + s^2$
$QN^2 = 4rs$
$QN = \sqrt{4rs} = 2\sqrt{rs}$
De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(r+s) \cdot 2\sqrt{rs} = (r+s)\sqrt{rs}$.

c De stelling van Pythagoras in driehoek QNM geeft $QM^2 + QN^2 = MN^2$
$(r-s)^2 + OP^2 = MN^2$
$(r-s)^2 + 15^2 = 25^2$
$(r-s)^2 = 625 - 225$
$(r-s)^2 = 400$
$r - s = 20$

$MN = 25$ geeft $r + s = 25$

$$\begin{cases} r + s = 25 \\ r - s = 20 \end{cases}$$
$$2r = 45 \quad +$$

$$\left.\begin{array}{l} r = 22\frac{1}{2} \\ r + s = 25 \end{array}\right\} 22\frac{1}{2} + s = 25$$
$$s = 2\frac{1}{2}$$

Dus $r = 22\frac{1}{2}$ en $s = 2\frac{1}{2}$.

37 M op k en $x_M = -3$ geeft $y_M = -1\frac{1}{3} \cdot -3 + 4 = 8$.
Dus $M(-3, 8)$.
N op k en $y_N = -4$ geeft $-1\frac{1}{3}x_N + 4 = -4$
$$-1\frac{1}{3}x_N = -8$$
$$x_N = 6$$
Dus $N(6, -4)$.
$d(M, N) = \sqrt{(6 - -3)^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$, $r_1 = 3$ en $r_2 = 4$.
$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 15 - 3 - 4 = 8$
$d(c_1, l) = d(c_2, l) = 4$
$d(M, l) = r_1 + d(c_1, l) = 3 + 4 = 7$
$d(N, l) = r_2 + d(c_2, l) = 4 + 4 = 8$
k: $y = -1\frac{1}{3}x + 4$ oftewel k: $1\frac{1}{3}x + y = 4$ oftewel k: $4x + 3y = 12$
$l \perp k$ geeft l: $3x - 4y = c$

$d(M, l) = 7$ geeft $\dfrac{|3 \cdot -3 - 4 \cdot 8 - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 7$
$$\frac{|-41 - c|}{\sqrt{25}} = 7$$
$$\frac{|-41 - c|}{5} = 7$$
$$|-41 - c| = 35$$
$$-41 - c = 35 \vee -41 - c = -35$$
$$c = -76 \vee c = -6$$
Dus l_1: $3x - 4y = -76$ en l_2: $3x - 4y = -6$.

$d(N, l_1) = \dfrac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot -4 + 76|}{5} = \dfrac{|110|}{5} = \dfrac{110}{5} = 22$, dus l_1 voldoet niet.

$d(N, l_2) = \dfrac{|3 \cdot 6 - 4 \cdot -4 + 6|}{5} = \dfrac{|40|}{5} = \dfrac{40}{5} = 8$, dus l_2 voldoet.

Een vergelijking van l is dus $3x - 4y = -6$.

8 Goniometrische functies

38 De draaiingshoek van A is $30° = \frac{1}{6}\pi$ rad.

De draaiingshoek van B is $\frac{1}{6}\pi + 2$ rad.

De draaiingshoek van C is $\frac{1}{6}\pi + 4$ rad.

$A(\cos(\frac{1}{6}\pi), \sin(\frac{1}{6}\pi)) \approx A(0{,}87; 0{,}5)$

$B(\cos(\frac{1}{6}\pi + 2), \sin(\frac{1}{6}\pi + 2)) \approx B(-0{,}82; 0{,}58)$

$C(\cos(\frac{1}{6}\pi + 4), \sin(\frac{1}{6}\pi + 4)) \approx C(-0{,}19; -0{,}98)$

Bladzijde 181

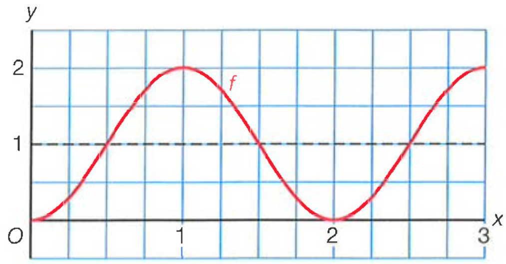
39 **a** $A(\cos(\frac{2}{3}\pi), \sin(\frac{2}{3}\pi)) = A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

b $C(\cos(-\frac{1}{6}\pi), \sin(-\frac{1}{6}\pi)) = C(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$

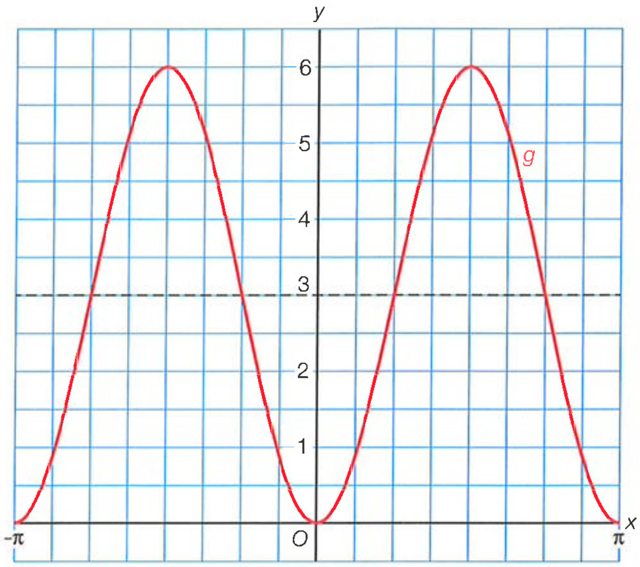
c $\cos(\beta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geeft $\beta = -\frac{3}{4}\pi$

d De lengte van de langste cirkelboog BC is $1\frac{1}{4}\pi - -\frac{1}{6}\pi = 1\frac{5}{12}\pi$.

40 **a** $f(x) = 1 - \sin(\pi x + \frac{1}{2}\pi) = 1 - \sin(\pi(x + \frac{1}{2}))$
evenwichtsstand 1
amplitude 1
periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
$-1 < 0$, dus grafiek dalend door het punt $(1\frac{1}{2}, 1)$.



b $g(x) = 3 + 3\cos(2x - \pi) = 3 + 3\cos(2(x - \frac{1}{2}\pi))$
evenwichtsstand 3
amplitude 3
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
$3 > 0$, dus $(\frac{1}{2}\pi, 6)$ is een hoogste punt.



41 **a** $a = \frac{20 + -10}{2} = 5$
$b = 20 - 5 = 15$
Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 3$ en bij $t = 8$, dus periode $= 8 - 3 = 5$,
dus $c = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.
Dalend door de evenwichtsstand bij $t = 3 - \frac{1}{2} \cdot$ periode $= 3 - \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2}$, dus $d = \frac{1}{2}$.
Dus $N = 5 - 15\sin(\frac{2}{5}\pi(t - \frac{1}{2}))$.

b Er is een hoogste punt bij $t = 3 + \frac{1}{4} \cdot$ periode $= 3 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 4\frac{1}{4}$.
Dus $N = 5 + 15\cos(\frac{2}{5}\pi(t - 4\frac{1}{4}))$.

42 **a** Stel $y = a + b\sin(c(x - d))$.
$a = \frac{5 + -1}{2} = 2$
$b = 5 - 2 = 3$
periode $= 4\pi$, dus $c = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.
Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$, dus $d = \frac{1}{2}\pi$.
Dus $y = 2 + 3\sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi))$.
Bijvoorbeeld:
$y = \sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3\sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 2} y = 3\sin(\frac{1}{2}x) \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{2}\pi,\, 2)} y = 2 + 3\sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi))$

b Een hoogste punt is $(1\frac{1}{2}\pi, 5)$, dus $y = 2 + 3\cos(\frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{2}\pi))$.

Bijvoorbeeld:

$y = \cos(x) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3\cos(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 2} y = 3\cos(\frac{1}{2}x) \xrightarrow{\text{translatie } (1\frac{1}{2}\pi,\, 2)} y = 2 + 3\cos(\frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{2}\pi))$

43 **a** $\sin^2(x + \frac{1}{3}\pi) = 1$

$\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 1 \vee \sin(x + \frac{1}{3}\pi) = -1$

$x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

b $\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) \cdot \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$

$\cos(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0 \vee \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$

$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$

$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi \vee 2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

c $\tan(2x - \frac{1}{4}\pi) = \tan(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi)$

$2x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

$1\frac{1}{2}x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{7}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

d $\sin(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}\pi) \cdot (\cos(\pi x) - 1) = 0$

$\sin(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}\pi) = 0 \vee \cos(\pi x) - 1 = 0$

$\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}\pi = k \cdot \pi \vee \cos(\pi x) = 1$

$\frac{1}{2}\pi x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee \pi x = k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{2} + k \cdot 2 \vee x = k \cdot 2$

e $\tan^2(\pi x) = \tan(\pi x)$

$\tan(\pi x) = 0 \vee \tan(\pi x) = 1$

$\pi x = k \cdot \pi \vee \pi x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$x = k \cdot 1 \vee x = \frac{1}{4} + k \cdot 1$

f $\sin(2x + \frac{1}{4}\pi) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$

$2x + \frac{1}{4}\pi = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{4}\pi = \pi - (x - \frac{1}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{4}\pi = \pi - x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{13}{36}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Bladzijde 182

44 **a** $\sin^2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$

$\sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = k \cdot 4\pi \vee x = \pi + k \cdot 4\pi \vee x = 2\pi + k \cdot 4\pi \vee x = -\pi + k \cdot 4\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

b $\tan^2(x) = 3$

$\tan(x) = \sqrt{3} \vee \tan(x) = -\sqrt{3}$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

c $\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = 0$

$\cos(x)(\cos(x) - \frac{1}{2}) = 0$

$\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

d $\cos(2x) - \cos(\frac{1}{2}x) = 0$

$\cos(2x) = \cos(\frac{1}{2}x)$

$2x = \frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{2}x + k \cdot 2\pi$

$1\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi \vee 2\frac{1}{2}x = k \cdot 2\pi$

$x = k \cdot 1\frac{1}{3}\pi \vee x = k \cdot \frac{4}{5}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{4}{5}\pi \vee x = 1\frac{3}{5}\pi$

45 **a** $\cos(\frac{2}{3}\pi(x-1)) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{2}{3}\pi(x-1) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}\pi(x-1) = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$\frac{2}{3}\pi x - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}\pi x - \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$\frac{2}{3}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{2}{3}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = 1\frac{1}{4} + k \cdot 3 \vee x = \frac{3}{4} + k \cdot 3$
x in $[0, 5]$ geeft $x = 1\frac{1}{4} \vee x = 4\frac{1}{4} \vee x = \frac{3}{4} \vee x = 3\frac{3}{4}$

b $\sin(\frac{1}{2}\pi x) = \sin(\frac{1}{2}\pi(x-1))$
$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi(x-1) + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = \pi - \frac{1}{2}\pi(x-1) + k \cdot 2\pi$
$\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi x = \pi - \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$0 = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
geen opl. $\qquad x = 1\frac{1}{2} + k \cdot 2$
x in $[0, 5]$ geeft $x = 1\frac{1}{2} \vee x = 3\frac{1}{2}$

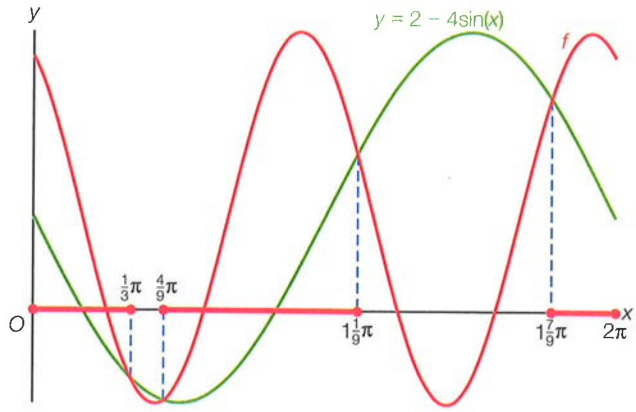
c $\tan(\frac{1}{3}\pi x) + \sqrt{3} = 0$
$\tan(\frac{1}{3}\pi x) = -\sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$
$x = 2 + k \cdot 3$
x in $[0, 5]$ geeft $x = 2 \vee x = 5$

d $\sin^2(\frac{1}{3}\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi x)$
$\sin(\frac{1}{3}\pi x) = 0 \vee \sin(\frac{1}{3}\pi x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi x = k \cdot \pi \vee \frac{1}{3}\pi x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{3}\pi x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = k \cdot 3 \vee x = 1 + k \cdot 6 \vee x = 2 + k \cdot 6$
x in $[0, 5]$ geeft $x = 0 \vee x = 3 \vee x = 1 \vee x = 2$

46 **a** $f(x) = 2$ geeft $2 - 4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 2$
$4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
$\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$
$2x - \frac{1}{3}\pi = k \cdot \pi$
$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$
De grafiek van f snijdt de lijn van de evenwichtsstand in de punten
$(\frac{1}{6}\pi, 2)$, $(\frac{2}{3}\pi, 2)$, $(1\frac{1}{6}\pi, 2)$ en $(1\frac{2}{3}\pi, 2)$.

b Toppen als $\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1 \vee \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -1$
$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{12}\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi \vee x = 1\frac{11}{12}\pi$
De toppen van de grafiek zijn $(\frac{5}{12}\pi, -2)$, $(1\frac{5}{12}\pi, -2)$, $(\frac{11}{12}\pi, 6)$ en $(1\frac{11}{12}\pi, 6)$.

c $f(x) = 2 - 4\sin(x)$ geeft $2 - 4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 2 - 4\sin(x)$
$4\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 4\sin(x)$
$\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \sin(x)$
$2x - \frac{1}{3}\pi = x + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \pi - x + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{4}{9}\pi \vee x = 1\frac{1}{9}\pi \vee x = 1\frac{7}{9}\pi$



$f(x) \geq 2 - 4\sin(x)$ geeft $0 \leq x \leq \frac{1}{3}\pi \vee \frac{4}{9}\pi \leq x \leq 1\frac{1}{9}\pi \vee 1\frac{7}{9}\pi \leq x \leq 2\pi$

47 **a** $-\cos(2\pi x - \frac{1}{4}\pi) = \cos(2\pi x - \frac{1}{4}\pi + \pi) = \sin(2\pi x - \frac{1}{4}\pi + \pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2\pi x + 1\frac{1}{4}\pi)$

b $-\sin(2(x + 1\frac{1}{4}\pi)) = -\sin(2x + 2\frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + 2\frac{1}{2}\pi + \pi) = \cos(2x + 2\frac{1}{2}\pi + \pi - \frac{1}{2}\pi) =$
$\cos(2x + 3\pi) = \cos(2x + \pi)$

c $\sin(2x + \frac{2}{3}\pi) - 2\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi) - 2\cos(2x - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi) =$
$\cos(2x + \frac{1}{6}\pi) + 2\cos(2x - \frac{5}{6}\pi + \pi) = \cos(2x + \frac{1}{6}\pi) + 2\cos(2x + \frac{1}{6}\pi) = 3\cos(2x + \frac{1}{6}\pi)$

d $\dfrac{\cos(2x - \frac{1}{3}\pi)}{\sin(2x + \frac{2}{3}\pi)} = \dfrac{\sin(2x - \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi)}{\cos(2x + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi)} = \dfrac{\sin(2x + \frac{1}{6}\pi)}{\cos(2x + \frac{1}{6}\pi)} = \tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$

48 **a** $f(x) = x^2 \cdot \sin(3x - \frac{1}{2}\pi)$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \sin(3x - \frac{1}{2}\pi) + x^2 \cdot \cos(3x - \frac{1}{2}\pi) \cdot 3$
$= 2x\sin(3x - \frac{1}{2}\pi) + 3x^2\cos(3x - \frac{1}{2}\pi)$

b $f(x) = \dfrac{x}{2 + \cos(x)}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(2 + \cos(x)) \cdot 1 - x \cdot -\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2} = \dfrac{2 + \cos(x) + x\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$

c $f(x) = x^2 \cdot \cos^3(x)$ geeft $f'(x) = 2x \cdot \cos^3(x) + x^2 \cdot 3\cos^2(x) \cdot -\sin(x) = 2x\cos^3(x) - 3x^2\sin(x)\cos^2(x)$

d $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{\tan^2(x)} = x^2 - \tan^{-2}(x)$ geeft $f'(x) = 2x + 2\tan^{-3}(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) = 2x + \dfrac{2 + 2\tan^2(x)}{\tan^3(x)}$

e $f(x) = \sqrt{2\sin(x) + 3\cos(x)}$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\sin(x) + 3\cos(x)}} \cdot (2\cos(x) - 3\sin(x)) = \dfrac{2\cos(x) - 3\sin(x)}{2\sqrt{2\sin(x) + 3\cos(x)}}$

f $f(x) = \dfrac{5}{4\sin(x) + 3\cos(x)}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(4\sin(x) + 3\cos(x)) \cdot 0 - 5 \cdot (4\cos(x) - 3\sin(x))}{(4\sin(x) + 3\cos(x))^2} = \dfrac{15\sin(x) - 20\cos(x)}{(4\sin(x) + 3\cos(x))^2}$

49 **a** $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(2 + \sin(x)) \cdot -\sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2}$
$= \dfrac{-2\sin(x) - \sin^2(x) - \cos^2(x)}{(2 + \sin(x))^2}$
$= \dfrac{-2\sin(x) - (\sin^2(x) + \cos^2(x))}{(2 + \sin(x))^2}$
$= \dfrac{-1 - 2\sin(x)}{(2 + \sin(x))^2}$

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{-1 - 2 \cdot 1}{(2 + 1)^2} = \dfrac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ f(\frac{1}{2}\pi) = 0, \text{ dus } A(\frac{1}{2}\pi, 0) \end{array}\right\} -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi + b = 0$$
$$b = \frac{1}{6}\pi$$

Dus k: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\pi$.

c $f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{-1 - 2\sin(x)}{(2 + \sin(x))^2} = 0$

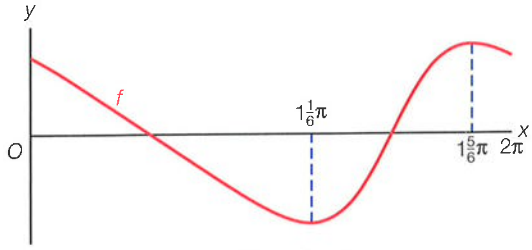
$-1 - 2\sin(x) = 0$

$2\sin(x) = -1$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{6}\pi$ (vold.) $\vee\ x = 1\frac{5}{6}\pi$ (vold.)



min. is $f(1\frac{1}{6}\pi) = \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

max. is $f(1\frac{5}{6}\pi) = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Dus $B_f = [-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}]$.

Gemengde opgaven

9 Exponentiële en logaritmische functies

Bladzijde 226

1 **a** $x+1>0$ geeft $x>-1$, dus $D_f = \langle -1, \rightarrow \rangle$.

$f(x) = g(x)$ geeft $2 - {}^3\log(x+1) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5-x)$

${}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{9}) + {}^{\frac{1}{3}}\log(x+1) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5-x)$

${}^{\frac{1}{3}}\log(\frac{1}{9}(x+1)) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5-x)$

$\frac{1}{9}(x+1) = 5-x$

$x+1 = 45-9x$

$10x = 44$

$x = 4\frac{2}{5}$

$f(x) \geq g(x)$ geeft $-1 < x \leq 4\frac{2}{5}$

b $f(x) = 3$ geeft $2 - {}^3\log(x+1) = 3$

$-{}^3\log(x+1) = 1$

${}^3\log(x+1) = -1$

$x+1 = 3^{-1}$

$x+1 = \frac{1}{3}$

$x = -\frac{2}{3}$

$g(x) = 3$ geeft ${}^{\frac{1}{3}}\log(5-x) = 3$

$5-x = (\frac{1}{3})^3$

$5-x = \frac{1}{27}$

$x = 4\frac{26}{27}$

$AB = 4\frac{26}{27} - -\frac{2}{3} = 4\frac{26}{27} + \frac{18}{27} = 5\frac{17}{27}$

$f(2) = 2 - {}^3\log(3) = 2 - 1 = 1$ en $g(2) = {}^{\frac{1}{3}}\log(3) = {}^{\frac{1}{3}}\log((\frac{1}{3})^{-1}) = -1$

$CD = 1 - -1 = 2$

Dus AB is niet meer dan drie keer zo lang als CD.

c $f(x) = 2 - {}^3\log(x+1)$ geeft $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)\ln(3)}$

$rc_{\text{raaklijn}} = -1$, dus $f'(x) = -1$

$-\dfrac{1}{(x+1)\ln(3)} = -1$

$\dfrac{1}{(x+1)\ln(3)} = 1$

$x+1 = \dfrac{1}{\ln(3)}$

$x = \dfrac{1}{\ln(3)} - 1$

$x = \dfrac{1-\ln(3)}{\ln(3)}$

Dus $x_P = \dfrac{1-\ln(3)}{\ln(3)}$.

2 **a** $4^{\log(x)} = 2^{3+\log(x)}$

$(2^2)^{\log(x)} = 2^{3+\log(x)}$

$2^{2\log(x)} = 2^{3+\log(x)}$

$2\log(x) = 3 + \log(x)$

$\log(x) = 3$

$x = 1000$

b ${}^8\log(2x+1) = {}^4\log(25)$

$\dfrac{{}^2\log(2x+1)}{{}^2\log(8)} = \dfrac{{}^2\log(25)}{{}^2\log(4)}$

$\dfrac{{}^2\log(2x+1)}{3} = \dfrac{{}^2\log(25)}{2}$

${}^2\log(2x+1) = 1\frac{1}{2} \cdot {}^2\log(25)$

${}^2\log(2x+1) = {}^2\log(25^{1\frac{1}{2}})$

$2x+1 = 125$

$2x = 124$

$x = 62$

c ${}^5\log^2(x+2) = 6 \cdot {}^5\log(x+2) + 7$
Stel ${}^5\log(x+2) = u$.
$u^2 = 6u + 7$
$u^2 - 6u - 7 = 0$
$(u+1)(u-7) = 0$
$u = -1 \vee u = 7$
${}^5\log(x+2) = -1 \vee {}^5\log(x+2) = 7$
$x + 2 = 5^{-1} \vee x + 2 = 5^7$
$x = -2 + \frac{1}{5} \vee x = 5^7 - 2$
$x = -1\frac{4}{5} \vee x = 78\,123$

d $2 \cdot {}^3\log(2x-3) + {}^{\frac{1}{3}}\log(2x+1) = 2$
${}^3\log((2x-3)^2) - {}^3\log(2x+1) = {}^3\log(9)$
${}^3\log((2x-3)^2) = {}^3\log(9) + {}^3\log(2x+1)$
${}^3\log((2x-3)^2) = {}^3\log(9(2x+1))$
$(2x-3)^2 = 9(2x+1)$
$4x^2 - 12x + 9 = 18x + 9$
$4x^2 - 30x = 0$
$4x(x - 7\frac{1}{2}) = 0$
$x = 0 \quad \vee \quad x = 7\frac{1}{2}$
vold. niet

3 **a** $\ln^2(x) + 1 = 2\frac{1}{2}\ln(x)$
Stel $\ln(x) = u$.
$u^2 + 1 = 2\frac{1}{2}u$
$u^2 - 2\frac{1}{2}u + 1 = 0$
$(u - \frac{1}{2})(u - 2) = 0$
$u = \frac{1}{2} \vee u = 2$
$\ln(x) = \frac{1}{2} \vee \ln(x) = 2$
$x = \sqrt{e} \vee x = e^2$

b $\dfrac{e^x}{e^x - 2} = 2$
$e^x = 2(e^x - 2)$
$e^x = 2\,e^x - 4$
$-e^x = -4$
$e^x = 4$
$x = \ln(4)$

c $\ln(3x+2) = \frac{1}{2}$
$3x + 2 = e^{\frac{1}{2}}$
$3x + 2 = \sqrt{e}$
$3x = -2 + \sqrt{e}$
$x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{e}$

d $\ln(4x) - \ln(x+4) = 1$
$\ln\left(\dfrac{4x}{x+4}\right) = 1$
$\dfrac{4x}{x+1} = e$
$4x = e(x+1)$
$4x = ex + 4e$
$4x - ex = 4e$
$(4 - e)x = 4e$
$x = \dfrac{4e}{4 - e}$

e $\ln^2(x-2) = 4$
$\ln(x-2) = 2 \vee \ln(x-2) = -2$
$x - 2 = e^2 \vee x - 2 = e^{-2}$
$x = 2 + e^2 \vee x = 2 + \dfrac{1}{e^2}$

f $3\,e^{2x} + 2 = 5\,e^x$
$3\,(e^x)^2 + 2 = 5\,e^x$
Stel $e^x = u$.
$3u^2 + 2 = 5u$
$3u^2 - 5u + 2 = 0$
$D = (-5^2) - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$
$u = \dfrac{5+1}{6} = 1 \vee u = \dfrac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$
$e^x = 1 \vee e^x = \frac{2}{3}$
$x = 0 \vee x = \ln(\frac{2}{3})$

4 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}096$
$1{,}096^T = 2$
$T = {}^{1,096}\log(2) = 7{,}561...$
De verdubbelingstijd is 7 jaar en $0{,}561... \cdot 12 \approx 7$ maanden.

b $g_{\text{dag}} = 0{,}83$
$0{,}83^T = \frac{1}{2}$
$T = {}^{0,83}\log(\frac{1}{2}) = 3{,}720...$
De halveringstijd is $3{,}720... \cdot 24 \approx 89$ uren.

c $g_{\text{maand}} = 2$
$g_{\text{dag}} = 2^{\frac{1}{30}} = 1{,}023...$
De toename per dag is 2,3%.

d $g_{8,3\text{ dagen}} = \frac{1}{2}$
$g_{\text{dag}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{8,3}} = 0{,}919...$
$0{,}919...^t = 0{,}01$
$t = {}^{0,919...}\log(0{,}01) = 55{,}1...$
Dus na 55 dagen is er nog 1% over.

5 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $3 \cdot 2^x = 6 \cdot (\frac{1}{4})^x$

$3 \cdot 2^x = 6 \cdot (2^{-2})^x$

$3 \cdot 2^x = 6 \cdot (2^x)^{-2}$

Stel $2^x = u$.

$3u = 6u^{-2}$

$3u^3 = 6$

$u^3 = 2$

$u = 2^{\frac{1}{3}}$

$2^x = 2^{\frac{1}{3}}$

$x = \frac{1}{3}$

$f(x) \leq g(x)$ geeft $x \leq \frac{1}{3}$

b $h(x) = f(x) + g(x) = 3 \cdot 2^x + 6 \cdot (\frac{1}{4})^x$ geeft $h'(x) = 3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) + 6 \cdot (\frac{1}{4})^x \cdot \ln(\frac{1}{4})$

$h'(x) = 0$ geeft $3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) + 6 \cdot (\frac{1}{4})^x \cdot \ln(\frac{1}{4}) = 0$

$3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) + 6 \cdot (2^{-2})^x \cdot \ln(2^{-2}) = 0$

$3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) + 6 \cdot 2^{-2x} \cdot -2\ln(2) = 0$

$3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) - 12 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln(2) = 0$

$3 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = 12 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln(2)$

$2^x = 4 \cdot 2^{-2x}$

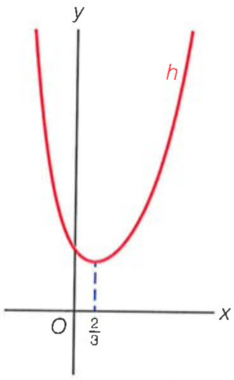
$2^x = 2^2 \cdot 2^{-2x}$

$2^x = 2^{2-2x}$

$x = 2 - 2x$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$



Dus $h(x) = f(x) + g(x)$ heeft een minimum voor $x = \frac{2}{3}$.

Bladzijde 227

6 **a** $f(x) = x^2 e^{x-1}$ geeft $f'(x) = 2x \cdot e^{x-1} + x^2 \cdot e^{x-1} = (x^2 + 2x)e^{x-1}$

b $g(x) = \ln^2(x) + \ln(x^2) = (\ln(x))^2 + \ln(x^2)$ geeft

$g'(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2\ln(x) + 2}{x}$

c $h(x) = {}^2\log(x^3 - x^2)$ geeft $h'(x) = \frac{1}{(x^3 - x^2)\ln(2)} \cdot (3x^2 - 2x) = \frac{3x^2 - 2x}{(x^3 - x^2)\ln(2)}$

d $j(x) = \ln(\ln(2x))$ geeft $j'(x) = \frac{1}{\ln(2x)} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x\ln(2x)}$

7 **a** $y = e^{3x-1} \xrightarrow{\text{translatie } (2,\,0)} y = e^{3(x-2)-1}$

Er geldt $e^{3(x-2)-1} = e^{3x-6-1} = e^{3x-1-6} = e^{3x-1} \cdot e^{-6} = \frac{1}{e^6} \cdot e^{3x-1}$.

Dus de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met $\frac{1}{e^6}$ levert dezelfde beeldfiguur op.

b $y = \ln(x^2) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 3} y = \ln((\frac{1}{3}x)^2) = \ln(\frac{1}{9}x^2)$

Er geldt $\ln(\frac{1}{9}x^2) = \ln(\frac{1}{9}) + \ln(x^2) = \ln(3^{-2}) + \ln(x^2) = -2\ln(3) + \ln(x^2)$.

Dus de translatie $(0, -2\ln(3))$ levert dezelfde beeldfiguur op.

8 **a** $f(x) = (x-3)^2 e^x = (x^2 - 6x + 9)e^x$ geeft $f'(x) = (2x-6) \cdot e^x + (x^2 - 6x + 9) \cdot e^x = (x^2 - 4x + 3)e^x$

$f'(x) = 0$ geeft $(x^2 - 4x + 3)e^x = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 3$

$(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1 \vee x = 3$

$f(1) = (1-3)^2 e^1 = 4e$ en $f(3) = (3-3)^2 e^3 = 0$

De toppen zijn $(1, 4e)$ en $(3, 0)$.

b $f'(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x$ geeft $f''(x) = (2x-4) \cdot e^x + (x^2 - 4x + 3) \cdot e^x = (x^2 - 2x - 1)e^x$

$f''(x) = 0$ geeft $(x^2 - 2x - 1)e^x = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$D = (-2^2) - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 8$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} \vee x = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2}$

$x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$

De x-coördinaten van de buigpunten zijn $x = 1 + \sqrt{2}$ en $x = 1 - \sqrt{2}$.

c Stel $x_A = a$, dan is $x_B = a + 3$.

$p = f(x_A) = f(x_B)$ geeft $(a-3)^2 e^a = a^2 e^{a+3}$

Voer in $y_1 = (x-3)^2 e^x$ en $y_2 = x^2 e^{x+3}$.

De optie snijpunt geeft $x = -0{,}861...$ en $y = 6{,}299...$ en $x = 0{,}547...$ en $y = 10{,}398...$

Dus $p \approx 6{,}30$.

9 **a** $f_{-2}(x) = x^{-2} \cdot \ln(x)$ geeft $f_{-2}'(x) = -2x^{-3} \cdot \ln(x) + x^{-2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2\ln(x)}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2\ln(x)}{x^3} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{-2\ln(x) + 1}{x^3}$

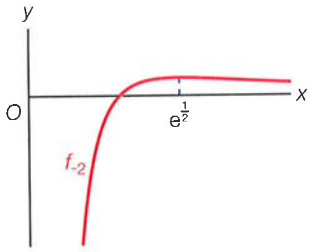
$f_{-2}'(x) = 0$ geeft $\dfrac{-2\ln(x) + 1}{x^3} = 0$

$-2\ln(x) + 1 = 0$

$-2\ln(x) = -1$

$\ln(x) = \frac{1}{2}$

$x = e^{\frac{1}{2}}$



max. is $f_{-2}(e^{\frac{1}{2}}) = (e^{\frac{1}{2}})^{-2} \cdot \frac{1}{2} = e^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \dfrac{1}{2e}$

b $f_3(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ geeft $f_3'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \dfrac{1}{x} = 3x^2 \ln(x) + x^2$

$f_3'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2$ geeft $f_3''(x) = 6x \cdot \ln(x) + 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x} + 2x = 6x\ln(x) + 3x + 2x = 6x\ln(x) + 5x$

$f_3''(x) = 0$ geeft $6x\ln(x) + 5x = 0$

$x(6\ln(x) + 5) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 6\ln(x) + 5 = 0$

vold. niet $6\ln(x) = -5$

$\ln(x) = -\frac{5}{6}$

$x = e^{-\frac{5}{6}}$

De x-coördinaat van het buigpunt van de grafiek van f_3 is $x = e^{-\frac{5}{6}}$.

c $f_p(x) = x^p \cdot \ln(x)$ geeft $f_p'(x) = px^{p-1} \cdot \ln(x) + x^p \cdot \frac{1}{x} = px^{p-1}\ln(x) + x^p \cdot x^{-1} = px^{p-1}\ln(x) + x^{p-1}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $px^{p-1}\ln(x) + x^{p-1} = 0$

$x^{p-1}(p\ln(x) + 1) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad p\ln(x) + 1 = 0$

vold. niet $\quad p\ln(x) = -1$

$\ln(x) = -\frac{1}{p}$

$x = e^{-\frac{1}{p}}$

$f_p(e^{-\frac{1}{p}}) = (e^{-\frac{1}{p}})^p \cdot -\frac{1}{p} = e^{-1} \cdot -\frac{1}{p} = -\frac{1}{pe}$

$y_{top} = \frac{1}{3}e$ geeft $-\frac{1}{pe} = \frac{1}{3}e$

$-\frac{1}{pe} = \frac{e}{3}$

$pe^2 = -3$

$p = \frac{-3}{e^2}$

10 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $\ln(4x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$4x = \frac{1}{x}$

$4x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

vold. niet

$f(\frac{1}{2}) = \ln(2)$ geeft $A(\frac{1}{2}, \ln(2))$

$f(x) = \ln(4x) = \ln(4) + \ln(x)$ geeft $f'(x) = \frac{1}{x}$

Stel $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{2}) = 2$.

$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{2}, \ln(2)) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot \frac{1}{2} + b = \ln(2) \\ b = \ln(2) - 1 \end{array}$

De lijn $y = 2x + \ln(2) - 1$ snijdt de y-as in $(0, \ln(2) - 1)$.

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -\ln(x)$ geeft $g'(x) = -\frac{1}{x}$

Stel $y = ax + b$ met $a = g'(\frac{1}{2}) = -2$.

$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{2}, \ln(2)) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot \frac{1}{2} + b = \ln(2) \\ b = \ln(2) + 1 \end{array}$

De lijn $y = -2x + \ln(2) + 1$ snijdt de y-as in $(0, \ln(2) + 1)$.

De lengte van het gevraagde lijnstuk is $\ln(2) + 1 - (\ln(2) - 1) = 2$.

b Stel $x_P = p$.

$PS = g(p) = \ln\left(\frac{1}{p}\right)$

$\left.\begin{array}{l} PQRS \text{ is een vierkant, dus } PQ = PS = \ln\left(\frac{1}{p}\right) \\ x_P = p \end{array}\right\} x_Q = p + \ln\left(\frac{1}{p}\right)$

$x_Q = p + \ln\left(\frac{1}{p}\right)$ geeft $QR = f\left(p + \ln\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \ln\left(4\left(p + \ln\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right) = \ln\left(4p + 4\ln\left(\frac{1}{p}\right)\right)$

$PQRS$ is een vierkant, dus $PS = QR$

$\ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln\left(4p + 4\ln\left(\frac{1}{p}\right)\right)$

$\frac{1}{p} = 4p + 4\ln\left(\frac{1}{p}\right)$

Voer in $y_1 = \frac{1}{x}$ en $y_2 = 4x + 4\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

De optie snijpunt geeft $x = 0{,}1065...$

Dus $x_P \approx 0{,}107$.

Bladzijde 228

11 **a** $p = 10e^{-\frac{1}{2}t+1}$

$e^{-\frac{1}{2}t+1} = \frac{1}{10}p$

$-\frac{1}{2}t + 1 = \ln(\frac{1}{10}p)$

$-\frac{1}{2}t = -1 + \ln(\frac{1}{10}p)$

$t = 2 - 2\ln(\frac{1}{10}p)$

$t = \ln(e^2) + \ln((\frac{1}{10}p)^{-2})$

$t = \ln(e^2) + \ln(100p^{-2})$

$t = \ln(100e^2p^{-2})$

b $y = 3\ln\left(\frac{2}{x}\right) + 2\ln(5x)$

$y = 3(\ln(2) - \ln(x)) + 2(\ln(5) + \ln(x))$

$y = 3\ln(2) - 3\ln(x) + 2\ln(5) + 2\ln(x)$

$y = \ln(2^3) + \ln(5^2) - \ln(x)$

$\ln(x) = \ln(2^3 \cdot 5^2) - y$

$\ln(x) = \ln(200) + \ln(e^{-y})$

$\ln(x) = \ln(200e^{-y})$

$x = 200e^{-y}$

c $y = e^x + e^{x+1} + e^{x+2} + e^{x+3}$

$e^x + e^{x+1} + e^{x+2} + e^{x+3} = y$

$e^x + e^x \cdot e + e^x \cdot e^2 + e^x \cdot e^3 = y$

$e^x(1 + e + e^2 + e^3) = y$

$e^x = \dfrac{y}{1 + e + e^2 + e^3}$

$x = \ln\left(\dfrac{y}{1 + e + e^2 + e^3}\right)$

$\dfrac{e-1}{e^4-1} = \dfrac{e-1}{(e^2+1)(e^2-1)} = \dfrac{e-1}{(e^2+1)(e+1)(e-1)} = \dfrac{1}{(e^2+1)(e+1)} = \dfrac{1}{e^3+e^2+e+1}$

Dus $x = \ln\left(\dfrac{y}{1 + e + e^2 + e^3}\right)$ kan worden geschreven als $x = \ln\left(\dfrac{e-1}{e^4-1}y\right)$.

10 Meetkunde met vectoren

12 **a** Substitutie van $x = -1 + 5t$ en $y = -t$ in $3x + 2y = 10$ geeft $3(-1 + 5t) + 2 \cdot -t = 10$

$-3 + 15t - 2t = 10$

$13t = 13$

$t = 1$

$t = 1$ geeft $x = -1 + 5 = 4$ en $y = -1$, dus $S(4, -1)$.

b $m \perp k$, dus $\vec{n}_m = \vec{r}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} m\text{: } 5x - y = c \\ \text{door } A(1, 3) \end{array}\right\} c = 5 \cdot 1 - 3 = 2$

Dus m: $5x - y = 2$.

c $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(k, l)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|10 + 3|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \dfrac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\angle(k, l) = 45°$

d P op k, dus $\vec{p} = \begin{pmatrix} -1+5t \\ -t \end{pmatrix}$.

$\vec{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1+5t \\ -t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t-2 \\ -t-3 \end{pmatrix}$

De lijnen AP en l zijn evenwijdig en $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 5t-2 \\ -t-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$15t - 6 - 2t - 6 = 0$

$13t = 12$

$t = \frac{12}{13}$

$t = \frac{12}{13}$ geeft $P(-1 + 5 \cdot \frac{12}{13}, -\frac{12}{13}) = P(3\frac{8}{13}, -\frac{12}{13})$

13 **a** $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\cos(\angle(k, m)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4-15|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{377}}$$

$\angle(k, m) \approx 11{,}9°$

b $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{matrix} k\colon 3x + 2y = c \\ \text{door } (1, 2) \end{matrix}\right\} c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

Dus k: $3x + 2y = 7$.

$x = 2u - 6$ en $y = -5u + 4$ substitueren in $3x + 2y = 7$ geeft $3(2u-6) + 2(-5u+4) = 7$

$6u - 18 - 10u + 8 = 7$

$-4u = 17$

$u = -4\frac{1}{4}$

$u = -4\frac{1}{4}$ geeft $x = 2 \cdot -4\frac{1}{4} - 6 = -14\frac{1}{2}$ en $y = -5 \cdot -4\frac{1}{4} + 4 = 25\frac{1}{4}$

Dus $S(-14\frac{1}{2}, 25\frac{1}{4})$.

c m: $x = 2u - 6 \wedge y = -5u + 4$ geeft m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$n \perp m$, dus $\vec{n}_n = \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{matrix} n\colon 2x - 5y = c \\ \text{door } O(0, 0) \end{matrix}\right\} n\colon 2x - 5y = 0$

d $\left.\begin{matrix} p \perp l, \text{ dus } p\colon 3x - y = c \\ \text{door } A(6, 8) \end{matrix}\right\} c = 3 \cdot 6 - 8 = 10$

Dus p: $3x - y = 10$.

$x = 1 - 2t$ en $y = 2 + 3t$ substitueren in $3x - y = 10$ geeft $3(1 - 2t) - (2 + 3t) = 10$

$3 - 6t - 2 - 3t = 10$

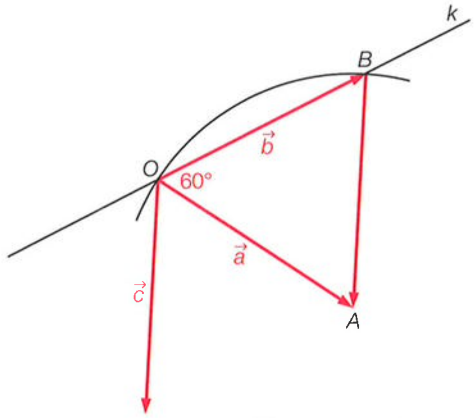
$-9t = 9$

$t = -1$

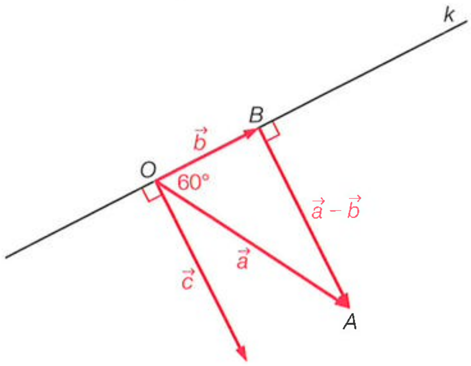
$t = -1$ geeft $x = 1 - 2 \cdot -1 = 3$ en $y = 2 + 3 \cdot -1 = -1$

Dus $T(3, -1)$.

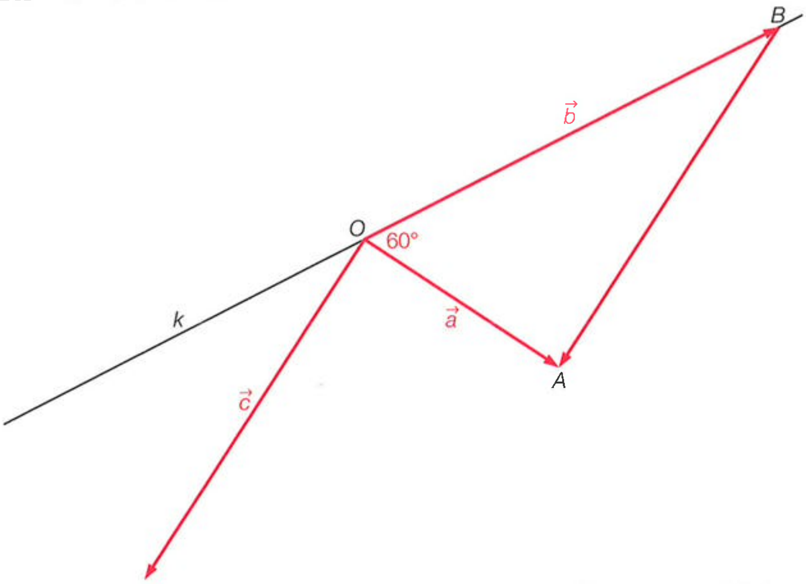
14 **a** A is het eindpunt van $\vec{a}$ en B is het eindpunt van $\vec{b}$.
Teken een cirkelboog van de cirkel met middelpunt A en straal OA. Deze cirkelboog snijdt k in O en B. Je hebt nu $\vec{b}$ en $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.
Teken $\vec{c}$ evenwijdig met $\overrightarrow{BA}$ en even lang als $\overrightarrow{BA}$.



b A is het eindpunt van $\vec{a}$ en B is het eindpunt van $\vec{b}$.
$|\vec{c}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{b}|$ betekent dat driehoek OBA een bijzondere rechthoekige driehoek is met zijden waarvan de lengten zich verhouden als $1 : 2 : \sqrt{3}$.
Teken lijnstuk AB loodrecht op k. Je hebt nu $\vec{b}$ en $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.
Teken $\vec{c}$ evenwijdig met $\overrightarrow{BA}$ en even lang als $\overrightarrow{BA}$.



c Zie de figuur hieronder.
A is het eindpunt van $\vec{a}$, B is het eindpunt van $\vec{b}$, $|\vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}|$ oftewel $OB = 2OA$,
$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

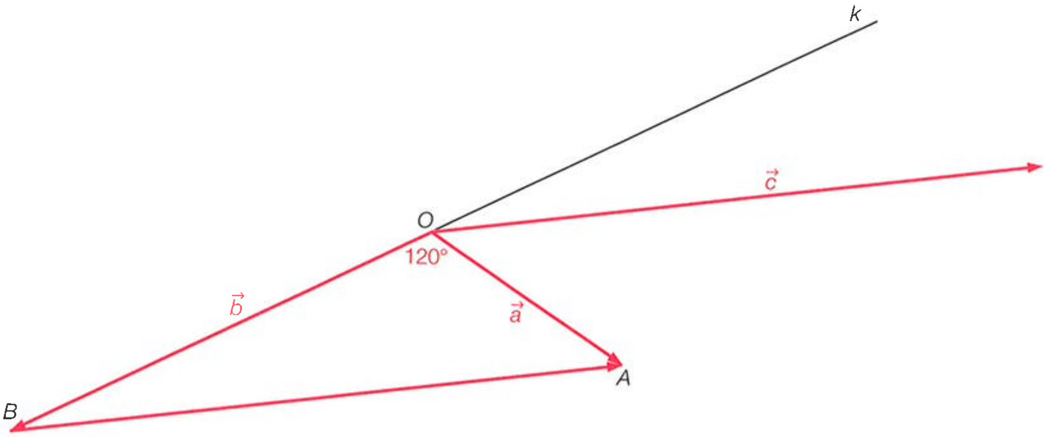


De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft $AB^2 = OA^2 + (2OA)^2 - 2 \cdot OA \cdot 2OA \cdot \cos(60°)$

$$AB^2 = OA^2 + 4OA^2 - 4OA^2 \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$AB^2 = 3OA^2$$

$AB = |\overrightarrow{BA}| = |\vec{c}|$ en $OA = |\vec{a}|$, dus $|\vec{c}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{a}|$.

Zie de figuur hieronder.
A is het eindpunt van $\vec{a}$, B is het eindpunt van $\vec{b}$, $|\vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}|$ oftewel $OB = 2OA$,
$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft $AB^2 = OA^2 + (2OA)^2 - 2 \cdot OA \cdot 2OA \cdot \cos(120°)$
$AB^2 = OA^2 + 4OA^2 - 4OA^2 \cdot -\frac{1}{2}$
$AB^2 = 7OA^2$
$AB = |\overrightarrow{BA}| = |\vec{c}|$ en $OA = |\vec{a}|$, dus $|\vec{c}| = \sqrt{7} \cdot |\vec{a}|$.

Bladzijde 229

15 **a** E is het snijpunt van de diagonalen DH en CI van het vierkant $DCHI$ en is dus het midden van diagonaal DH.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}_L = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$\vec{h} = \vec{b} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{b} + 2\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

$\vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{h}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, dus $E(3, 5)$.

b $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, dus $C(4, 3)$.

$\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{e}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, dus $F(2, 4\frac{1}{2})$.

Stel CF: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{3 - 4\frac{1}{2}}{4 - 2} = -\frac{3}{4}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } C(4, 3) \end{array}\right\} -\frac{3}{4} \cdot 4 + b = 3$
$-3 + b = 3$
$b = 6$

Dus CF: $y = -\frac{3}{4}x + 6$ en $G(0, 6)$.

$CG = \sqrt{(0-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

16 **a** $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c-a\\d\end{pmatrix}$

$\vec{e} = \vec{a} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}_L = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-d\\c-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-d\\c-a\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c-b\\d\end{pmatrix}$

$\vec{f} = \vec{b} + \overrightarrow{BF} = \vec{b} + \overrightarrow{BC}_R = \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d\\b-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b+d\\b-c\end{pmatrix}$

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}a-d\\c-a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b+d\\b-c\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+b\\-a+b\end{pmatrix}$, dus $M(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)$.

b $\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{CD} = \vec{c} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d \\ c-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NP} = \vec{p} - \vec{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b+c-d \\ -a+c+d \end{pmatrix}$

$\vec{g} = \vec{c} + \overrightarrow{CG} = \vec{c} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ b-c+d \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{g}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d \\ b-c+d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b+c+d \\ b-c+d \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NQ} = \vec{q} - \vec{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b+c+d \\ b-c+d \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a+c+d \\ b-c+d \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NP}_R$, dus $NP = NQ$ en $NP \perp NQ$, dus driehoek PQN is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

17 **a** $\overrightarrow{DA} = \vec{a} - \vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -d \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \vec{d} + \overrightarrow{DA}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ a+d \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} d \\ a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-a \\ d+a \end{pmatrix}$

$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}_R = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+d \\ a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+d \\ a-d \end{pmatrix}$

$P(10, -1)$ geeft $\begin{cases} 2a+d=10 \\ a-d=-1 \end{cases}$ +

$3a \quad = 9$

$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ a-d=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3-d=-1 \\ d=4 \end{array}$

Dus $a = 3$ en $d = 4$.

b $\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ P(2a+d, a-d) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2a+d+a-d=6 \\ 3a=6 \\ a=2 \end{array}$

$a = 2$ geeft $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4+d \\ 2-d \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} d-2 \\ d+2 \end{pmatrix}$.

$\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4+d \\ 2-d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d-2 \\ d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x^2 \\ Q(2d+2, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2}(2d+2)^2=4 \\ (2d+2)^2=8 \\ 2d+2=2\sqrt{2} \vee 2d+2=-2\sqrt{2} \\ d+1=\sqrt{2} \vee d+1=-\sqrt{2} \\ d=-1+\sqrt{2} \vee d=-1-\sqrt{2} \end{array}$

vold. niet

Dus $d = -1 + \sqrt{2}$.

18 **a** $\left.\begin{array}{l} AB: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} AB: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$x = 99$ oftewel $-1 + t = 99$ geeft $t = 100$

$t = 100$ geeft $y = 5 + 100 \cdot -2 = -195$

Dus $D(99, -195)$ op de lijn AB.

b $\left.\begin{array}{l} BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} + t \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} k: x + 3y = c \\ \text{door } A(-1, 5) \end{array}\right\} c = -1 + 3 \cdot 5 = 14$

Dus $k: x + 3y = 14$.

Substitutie van $x = 2 + t$ en $y = -1 + 3t$ in $x + 3y = 14$ geeft $2 + t + 3(-1 + 3t) = 14$

$2 + t - 3 + 9t = 14$

$10t = 15$

$t = 1\frac{1}{2}$

$t = 1\frac{1}{2}$ geeft $x = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ en $y = -1 + 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, dus $S(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

c $AP = BP$, dus P ligt op de middelloodlijn m van AB.

$m \perp AB$, dus $\vec{r}_m = \vec{n}_{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{s}_m = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Dus $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

P op m, dus $\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2t \\ 2 + t \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2t \\ 2 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 1\frac{1}{2} \\ t - 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BP} = \vec{p} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2t \\ 2 + t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 1\frac{1}{2} \\ t + 3 \end{pmatrix}$

$AP \perp BP$, dus $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

$\begin{pmatrix} 2t + 1\frac{1}{2} \\ t - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t - 1\frac{1}{2} \\ t + 3 \end{pmatrix} = 0$

$4t^2 - 2\frac{1}{4} + t^2 - 9 = 0$

$5t^2 = 11\frac{1}{4}$

$t^2 = 2\frac{1}{4}$

$t = 1\frac{1}{2} \vee t = -1\frac{1}{2}$

$t = 1\frac{1}{2}$ geeft $P(\frac{1}{2} + 2 \cdot 1\frac{1}{2}, 2 + 1\frac{1}{2}) = P(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$

$t = -1\frac{1}{2}$ geeft $P(\frac{1}{2} + 2 \cdot -1\frac{1}{2}, 2 - 1\frac{1}{2}) = P(-2\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

d $\left.\begin{array}{l} BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (zie b)} \\ BC: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 38 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} q = 1$

$(2, -1)$ op BC, dus $38 + 3t = -1$

$3t = -39$

$t = -13$

$q = 1$ en $t = -13$ geeft $p + -13 \cdot 1 = 2$

$p - 13 = 2$

$p = 15$

Bladzijde 230

19 **a** $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \vec{b} + \vec{BC} = \vec{b} + \vec{BA}_R = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \vec{c} + \vec{CD} = \vec{b} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} CD: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{c} + t \cdot (\vec{d} - \vec{c}) \\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{d} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} CD: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$x_P = 22$ en P op CD geeft $24 + t = 22$, dus $t = -2$.
$t = -2$ geeft $y = 8 + -2 \cdot -2 = 12$ en dit is y_P.
Verder geldt $x_D \leq x_P \leq x_C$ en $y_C \leq y_P \leq y_D$.
Dus P ligt op de zijde CD.

b
$$\left.\begin{array}{l} AP: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + t \cdot (\vec{p} - \vec{a}) \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} AP: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Q op AP, dus $\vec{q} = \begin{pmatrix} 11t \\ 16 - 2t \end{pmatrix}$.

$\vec{DQ} = \vec{q} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 11t \\ 16 - 2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t - 16 \\ -2t - 8 \end{pmatrix}$

DQ loodrecht op AP, dus $\begin{pmatrix} 11t - 16 \\ -2t - 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$121t - 176 + 4t + 16 = 0$
$125t = 160$
$t = 1\frac{7}{25}$

$t = 1\frac{7}{25}$ geeft $Q(11 \cdot 1\frac{7}{25}, 16 - 2 \cdot 1\frac{7}{25}) = Q(14\frac{2}{25}, 13\frac{11}{25})$

20 **a** $x(t) = t^2 - 4t$ geeft $x'(t) = 2t - 4$
$y(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2$ geeft $y'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8t$
Evenwijdig met de x-as als $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$
$4t^3 - 12t^2 + 8t = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$
$4t(t^2 - 3t + 2) = 0 \wedge 2t \neq 4$
$4t(t - 1)(t - 2) = 0 \wedge t \neq 2$
$(t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2) \wedge t \neq 2$
$t = 0 \vee t = 1$

$t = 0$ geeft het punt $(0, 0)$.
$t = 1$ geeft het punt $(-3, 1)$.
Dus evenwijdig met de x-as in de punten $(0, 0)$ en $(-3, 1)$.
Evenwijdig met de y-as als $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$
$t = 2 \wedge t \neq 0 \wedge t \neq 1 \wedge t \neq 2$
Er is dus geen waarde van t die voldoet, dus er zijn geen punten waarin de raaklijn evenwijdig is met de y-as.

b Naar links betekent $x'(t) < 0$

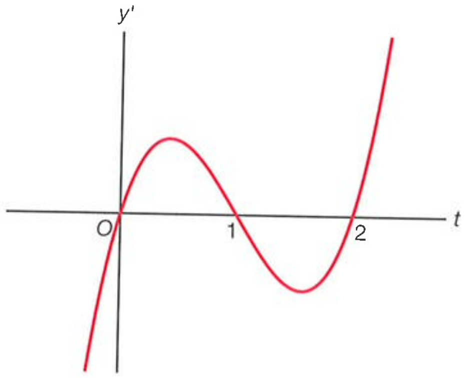
$2t - 4 < 0$

$2t < 4$

$t < 2$

$y'(t) = 0$ geeft $t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2$ (zie a)

Omhoog betekent $y'(t) > 0$.



$y'(t) > 0$ geeft $0 < t < 1 \vee t > 2$

$x'(t) < 0 \wedge y'(t) > 0$

$t < 2 \wedge (0 < t < 1 \vee t > 2)$

$0 < t < 1$

Dus naar links en omhoog voor $0 < t < 1$.

c $x(t) = -3$ geeft $t^2 - 4t = -3$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t - 1)(t - 3) = 0$

$t = 1 \vee t = 3$

$t = 1$ geeft het punt $(-3, 1)$, dus voldoet niet.

$t = 3$ geeft het punt $(-3, 9)$, dus voldoet.

$x'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$ en $y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 24$

De baansnelheid is $v(3) = \sqrt{2^2 + 24^2} = \sqrt{580} = 2\sqrt{145}$.

d $v(t) = \sqrt{(2t - 4)^2 + (4t^3 - 12t^2 + 8t)^2}$

Voer in $y_1 = \sqrt{(2x - 4)^2 + (4x^3 - 12x^2 + 8x)^2}$.

De optie minimum geeft $x = 2$ en $y = 0$.

De minimale baansnelheid is 0 voor $t = 2$.

e $x'(t) = 2t - 4$ geeft $x''(t) = 2$

$y'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8t$ geeft $y''(t) = 12t^2 - 24t + 8$

De versnellingsvector is evenwijdig met de lijn $y = x$ als $y''(t) = x''(t)$

$12t^2 - 24t + 8 = 2$

$12t^2 - 24t + 6 = 0$

$2t^2 - 4t + 1 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$t = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{4} \vee t = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{4}$

$t = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee t = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

21 **a** $y(t) = 0$ geeft $t^2 - 1 = 0$

$t^2 = 1$

$t = 1 \vee t = -1$

$t = 1$ geeft het punt $(0, 0)$.

$t = -1$ geeft het punt $(6, 0)$.

Dus de snijpunten met de x-as zijn $(0, 0)$ en $(6, 0)$.

$x(t) = 0$ geeft $-t^3 + 3t^2 - 2t = 0$

$-t(t^2 - 3t + 2) = 0$

$-t(t - 1)(t - 2) = 0$

$t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2$

$t = 0$ geeft het punt $(0, -1)$.

$t = 1$ geeft het punt $(0, 0)$.

$t = 2$ geeft het punt $(0, 3)$.

Dus de snijpunten met de y-as zijn $(0, -1)$, $(0, 0)$ en $(0, 3)$.

b $x(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t$ geeft $x'(t) = -3t^2 + 6t - 2$
$y(t) = t^2 - 1$ geeft $y'(t) = 2t$
Evenwijdig met de x-as als $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$ en evenwijdig met de y-as als $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.
$x'(t) = 0$ geeft $-3t^2 + 6t - 2 = 0$
$D = 6^2 - 4 \cdot -3 \cdot -2 = 12$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$t = \dfrac{-6 + 2\sqrt{3}}{-6} \vee t = \dfrac{-6 - 2\sqrt{3}}{-6}$
$t = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee t = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$y'(t) = 0$ geeft $2t = 0$
$t = 0$
Dus raaklijn evenwijdig met de x-as of met de y-as voor $t = 0 \vee t = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee t = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

c Evenwijdig met de lijn $y = 2x + 3$ geeft $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$2 \cdot x'(t) = 1 \cdot y'(t)$
$2(-3t^2 + 6t - 2) = 2t$
$-6t^2 + 12t - 4 = 2t$
$-6t^2 + 10t - 4 = 0$
$3t^2 - 5t + 2 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$
$t = \dfrac{5 + 1}{6} = 1 \vee t = \dfrac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}$

$t = 1$ geeft het punt $(0, 0)$.
$t = \frac{2}{3}$ geeft het punt $(-\frac{8}{27}, -\frac{5}{9})$.
Dus de punten zijn $(0, 0)$ en $(-\frac{8}{27}, -\frac{5}{9})$.

d $y(t) = 8$ geeft $t^2 - 1 = 8$
$t^2 = 9$
$t = 3 \vee t = -3$
$t = 3$ geeft het punt $(-6, 8)$, dus voldoet.
$t = -3$ geeft het punt $(60, 8)$, dus voldoet niet.
$x'(3) = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 2 = -11$ en $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$
De baansnelheid is $v(3) = \sqrt{(-11)^2 + 6^2} = \sqrt{157}$.

e $y(t) = -\frac{3}{4}$ geeft $t^2 - 1 = -\frac{3}{4}$
$t^2 = \frac{1}{4}$
$t = \frac{1}{2} \vee t = -\frac{1}{2}$
$x(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$, dus $t = \frac{1}{2}$ voldoet.
$x(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot -\frac{1}{2} = 1\frac{7}{8}$, dus $t = -\frac{1}{2}$ voldoet niet.
$v(t) = \sqrt{(-3t^2 + 6t - 2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 - 18t^3 + 6t^2 - 18t^3 + 36t^2 - 12t + 6t^2 - 12t + 4 + 4t^2}$
$= \sqrt{9t^4 - 36t^3 + 52t^2 - 24t + 4}$
$a(t) = v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{9t^4 - 36t^3 + 52t^2 - 24t + 4}} \cdot (36t^3 - 108t^2 + 104t - 24) = \dfrac{18t^3 - 54t^2 + 52t - 12}{\sqrt{9t^4 - 36t^3 + 52t^2 - 24t + 4}}$
$a(\frac{1}{2}) = \dfrac{18 \cdot \frac{1}{8} - 54 \cdot \frac{1}{4} + 52 \cdot \frac{1}{2} - 12}{\sqrt{9 \cdot \frac{1}{16} - 36 \cdot \frac{1}{8} + 52 \cdot \frac{1}{4} - 24 \cdot \frac{1}{2} + 4}} = \dfrac{2\frac{3}{4}}{\sqrt{1\frac{1}{16}}} = \frac{11}{17}\sqrt{17}$
Dus de baanversnelling is $\frac{11}{17}\sqrt{17}$.

11 Integraalrekening

Bladzijde 231

22 **a** $F(x) = x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ geeft

$F'(x) = 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = 1 + \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1}$

$= \frac{x^2+1}{x^2-1}$

Dus $F'(x) = f(x)$ oftewel F is een primitieve van f.

b $F(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln(x^2-1)$ geeft

$F'(x) = 1 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)\cdot 1 - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x$

$= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} + \frac{2x}{x^2-1} = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{2x}{x^2-1}$

$= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{-2}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1} = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-1} = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Dus $F'(x) = f(x)$ oftewel F is een primitieve van f.

c $F(x) = -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) + 6x\cos(x) - 6\sin(x)$ geeft

$F'(x) = -3x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot -\sin(x) + 6x \cdot \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x) + 6 \cdot \cos(x) + 6x \cdot -\sin(x) - 6\cos(x)$

$= -3x^2\cos(x) + x^3\sin(x) + 6x\sin(x) + 3x^2\cos(x) + 6\cos(x) - 6x\sin(x) - 6\cos(x)$

$= x^3\sin(x)$

Dus $F'(x) = f(x)$ oftewel F is een primitieve van f.

d $F(x) = (6x^2 - 2x - 4)\sqrt{x-1}$ geeft

$F'(x) = (12x-2) \cdot \sqrt{x-1} + (6x^2-2x-4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = (12x-2)\sqrt{x-1} + \frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x-1}}$

$= \frac{(12x-2)(x-1)}{\sqrt{x-1}} + \frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x-1}} = \frac{12x^2-12x-2x+2+3x^2-x-2}{\sqrt{x-1}}$

$= \frac{15x^2-15x}{\sqrt{x-1}} = \frac{15x(x-1)}{\sqrt{x-1}} = 15x\sqrt{x-1}$

Dus $F'(x) = f(x)$ oftewel F is een primitieve van f.

23 **a** $f(x) = 7 \cdot \log(5x)$ geeft $F(x) = 7 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot (5x\ln(5x) - 5x) + c = \frac{7(x\ln(5x) - x)}{\ln(10)} + c$

b $f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1}$ geeft $F(x) = 2e^{\frac{1}{2}x-1} + c$

c $f(x) = 10\ln(2x-4)$ geeft

$F(x) = 10 \cdot \frac{1}{2}((2x-4)\ln(2x-4) - (2x-4)) + c = 5(2x-4)\ln(2x-4) - 5(2x-4) + c$

d $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2\sqrt{x} + 8x}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} - \frac{6x^{2\frac{1}{2}}}{x^3} + \frac{8x}{x^3} = x - 6x^{-\frac{1}{2}} + 8x^{-2}$ geeft

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{6}{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{-1} \cdot x^{-1} + c = \frac{1}{2}x^2 - 12\sqrt{x} - \frac{8}{x} + c$

e $f(x) = (x^2+3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$ geeft $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x + c$

f $f(x) = 3\sin(4x)$ geeft $F(x) = 3 \cdot -\frac{1}{4}\cos(4x) + c = -\frac{3}{4}\cos(4x) + c$

24 **a** $f(x) = \sqrt{6x+3} = (6x+3)^{\frac{1}{2}}$ geeft $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}(6x+3)^{1\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{9}(6x+3)\sqrt{6x+3} + c$

b $f(x) = \frac{10}{2x-1}$ geeft $F(x) = 10 \cdot \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c = 5\ln|2x-1| + c$

c $f(x) = (3x-6)^{-2}$ geeft $F(x) = \frac{1}{3} \cdot -(3x-6)^{-1} + c = -\frac{1}{3}(3x-6)^{-1} + c$

d $f(x) = (2x+5)^{-1} = \frac{1}{2x+5}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + c$

e $f(x) = 10^{2x-3}$ geeft $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{2x-3}}{\ln(10)} + c = \frac{10^{2x-3}}{2\ln(10)} + c$

f $f(x) = \frac{8^x - 1}{2^x} = \frac{8^x}{2^x} - \frac{1}{2^x} = 4^x - 2^{-x}$ geeft $F(x) = \frac{4^x}{\ln(4)} + \frac{2^{-x}}{\ln(2)} + c$

25 $F(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^x$ geeft
$F'(x) = (2ax + b) \cdot e^x + (ax^2 + bx + c) \cdot e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)\,e^x$
Dit moet gelijk zijn aan $f(x) = (x^2 + 1)\,e^x$, dus $a = 1$, $2a + b = 0$ en $b + c = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + b = 0 \\ b = -2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} b = -2 \\ b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + c = 1 \\ c = 3 \end{array}$$

Dus $a = 1$, $b = -2$ en $c = 3$.

26 $f(x) = px$ geeft $x^3 - 3x = px$
$x^3 = px + 3x$
$x^3 = (p + 3)x$
$x = 0 \vee x^2 = p + 3$
$x = 0 \vee x = \sqrt{p+3} \vee x = -\sqrt{p+3}$
vold. niet

$$O(V) = \int_0^{\sqrt{p+3}} (px - f(x))\,dx = \int_0^{\sqrt{p+3}} (px - (x^3 - 3x))\,dx = \int_0^{\sqrt{p+3}} (-x^3 + (p+3)x)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + (p+3) \cdot \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{p+3}} = -\tfrac{1}{4} \cdot (p+3)^2 + (p+3) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (p+3) - 0 = \tfrac{1}{4}(p+3)^2$$

$O(V) = 9$ geeft $\tfrac{1}{4}(p+3)^2 = 9$
$(p+3)^2 = 36$
$p + 3 = 6 \vee p + 3 = -6$
$p = 3 \vee p = -9$
vold. niet

Dus $p = 3$.

27 $O(ABCD) = 5 \cdot (2 - p) = 10 - 5p$
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en het lijnstuk CD.

$$O(V) = \int_0^5 (2 - f(x))\,dx = \int_0^5 \left(2 - \tfrac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{x+1}\right) dx = \int_0^5 \left(3 - \tfrac{1}{2}x - \frac{3}{x+1}\right) dx = \left[3x - \tfrac{1}{4}x^2 - 3\ln|x+1|\right]_0^5$$

$$= 15 - 6\tfrac{1}{4} - 3\ln(6) - (0 - 0 - 0)) = 8\tfrac{3}{4} - 3\ln(6)$$

$O(V) = \tfrac{1}{2}O(ABCD)$ geeft $8\tfrac{3}{4} - 3\ln(6) = 5 - 2\tfrac{1}{2}p$
$2\tfrac{1}{2}p = 3\ln(6) - 3\tfrac{3}{4}$
$p = 1\tfrac{1}{5}\ln(6) - 1\tfrac{1}{2}$

Bladzijde 232

28 **a** 54 km/uur = 15 m/s
Versnelling van de wielrenner constant a en beginsnelheid 15 geeft snelheid $v_w(t) = at + 15$.
$v_w(t) = at + 15$ geeft $s_w(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + 15t + c$

$$\left.\begin{array}{l} s_w(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + 15t + c \\ s_w(0) = 0 \end{array}\right\} s_w(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + 15t$$

$v_w(t) = 0$ geeft $at + 15 = 0$
$at = -15$
$t = -\dfrac{15}{a}$

$s_w\left(-\frac{15}{a}\right) = 40$ geeft $\frac{1}{2}a \cdot \left(-\frac{15}{a}\right)^2 + 15 \cdot -\frac{15}{a} = 40$

$\frac{1}{2}a \cdot \frac{225}{a^2} - \frac{225}{a} = 40$

$\frac{112\frac{1}{2}}{a} - \frac{225}{a} = 40$

$-\frac{112\frac{1}{2}}{a} = 40$

$a = -\frac{112\frac{1}{2}}{40} = -2{,}8125$

Dus de versnelling van de wielrenner is $-2{,}8125$ m/s^2.

b $a = -2{,}5$, $v_w(0) = 15$ en $s_w(0) = 0$ geeft $v_w(t) = -2{,}5t + 15$ en $s_w(t) = -1{,}25t^2 + 15t$

6 km/uur $= 1\frac{2}{3}$ m/s

Voor de auto geldt $v_a(t) = 1\frac{2}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} v_a(t) = 1\frac{2}{3} \text{ geeft } s_a(t) = 1\frac{2}{3}t + b \\ s_a(0) = 40 \end{array}\right\} s_a(t) = 1\frac{2}{3}t + 40$

$v_w(t) = v_a(t)$

$-2{,}5t + 15 = 1\frac{2}{3}$

$-2{,}5t = -13\frac{1}{3}$

$t = 5\frac{1}{3}$

$s_w(5\frac{1}{3}) = -1{,}25 \cdot (5\frac{1}{3})^2 + 15 \cdot 5\frac{1}{3} = 44\frac{4}{9}$

$s_a(5\frac{1}{3}) = 1\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{3} + 40 = 48\frac{8}{9}$

Dus op het moment dat de wielrenner en de auto dezelfde snelheid hebben, rijdt de auto $48\frac{8}{9} - 44\frac{4}{9} = 4\frac{4}{9}$ meter voor de wielrenner.

De wielrenner kan dus op tijd stoppen.

29 **a** $O(V) = \int_0^1 (3^x + 1)\,dx = \left[\frac{3^x}{\ln(3)} + x\right]_0^1 = \frac{3}{\ln(3)} + 1 - \frac{1}{\ln(3)} = \frac{2}{\ln(3)} + 1$

b $I(L) = \pi\int_0^1 (3^x + 1)^2\,dx = \pi\int_0^1 (3^{2x} + 2 \cdot 3^x + 1)\,dx = \pi\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2x}}{\ln(3)} + 2 \cdot \frac{3^x}{\ln(3)} + x\right]_0^1$

$= \pi\left(\frac{4\frac{1}{2}}{\ln(3)} + \frac{6}{\ln(3)} + 1 - \left(\frac{\frac{1}{2}}{\ln(3)} + \frac{2}{\ln(3)} + 0\right)\right) = \pi\left(\frac{4\frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{2} - 2}{\ln(3)} + 1\right) = \frac{8\pi}{\ln(3)} + \pi$

c $y = 3^x + 1$ geeft $3^x + 1 = y$

$3^x = y - 1$

$x = {}^3\log(y - 1)$

$f(0) = 2$ en $f(1) = 4$

$I(M) = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 - \pi\int_2^4 ({}^3\log(y - 1))^2\,dy \approx 9{,}89$

30 **a** $I = \pi\int_{\frac{1}{3}r}^{\frac{1}{2}r} y^2\,dx = \pi\int_{\frac{1}{3}r}^{\frac{1}{2}r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{3}r}^{\frac{1}{2}r} = \pi(r^2 \cdot \frac{1}{2}r - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2}r)^3) - \pi(r^2 \cdot \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3}r)^3)$

$= \pi(\frac{1}{2}r^3 - \frac{1}{24}r^3) - \pi(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{81}r^3) = \frac{11}{24}\pi r^3 - \frac{26}{81}\pi r^3 = \frac{89}{648}\pi r^3$

b $I_{bol} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$I = \pi\int_{-pr}^{pr} y^2\,dx = \pi\int_{-pr}^{pr} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-pr}^{pr} = \pi(r^2 \cdot pr - \frac{1}{3}(pr)^3) - \pi(r^2 \cdot -pr - \frac{1}{3}(-pr)^3)$

$= \pi(pr^3 - \frac{1}{3}p^3r^3) + \pi(pr^3 - \frac{1}{3}p^3r^3) = \pi(2pr^3 - \frac{2}{3}p^3r^3) = (2p - \frac{2}{3}p^3)\pi r^3$

$I = \frac{1}{2}I_{bol}$ geeft $(2p - \frac{2}{3}p^3)\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

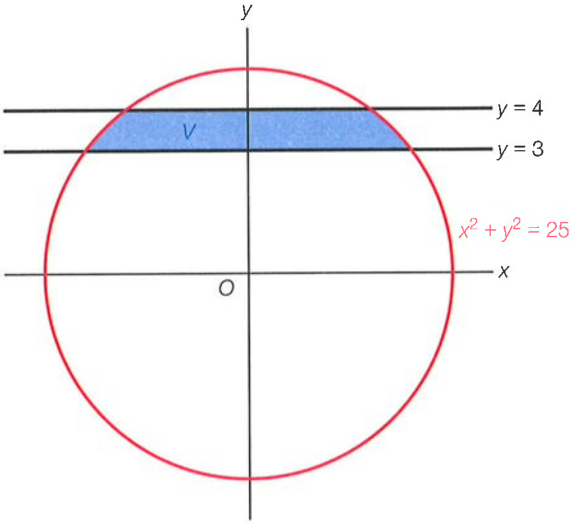
$2p - \frac{2}{3}p^3 = \frac{2}{3}$

Voer in $y_1 = 2x - \frac{2}{3}x^3$ en $y_2 = \frac{2}{3}$.

De optie snijpunt geeft $x = 0{,}347...$

Dus $p \approx 0{,}35$.

31



Substitutie van $y = 3$ in $x^2 + y^2 = 25$ geeft $x^2 + 9 = 25$

$x^2 = 16$

$x = 4 \vee x = -4$

Substitutie van $y = 4$ in $x^2 + y^2 = 25$ geeft $x^2 + 16 = 25$

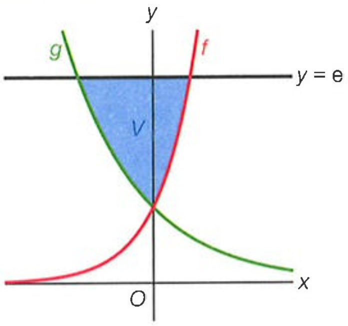
$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

$$I(L) = \pi\int_{-4}^{-3} y^2\,dx + \pi\int_{-3}^{3} 4^2\,dx + \pi\int_{3}^{4} y^2\,dx - \pi\int_{-4}^{4} 3^2\,dx$$
$$= \pi\int_{-4}^{-3} (25 - x^2)\,dx + \pi\big[16x\big]_{-3}^{3} + \pi\int_{3}^{4}(25 - x^2)\,dx - \pi\big[9x\big]_{-4}^{4}$$
$$= \pi\big[25x - \tfrac{1}{3}x^3\big]_{-4}^{-3} + \pi(48 - -48) + \pi\big[25x - \tfrac{1}{3}x^3\big]_{3}^{4} - \pi(36 - -36)$$
$$= \pi(-75 + 9) - \pi(-100 + \tfrac{64}{3}) + 96\pi + \pi(100 - \tfrac{64}{3}) - \pi(75 - 9) - 72\pi$$
$$= -66\pi + 78\tfrac{2}{3}\pi + 96\pi + 78\tfrac{2}{3}\pi - 66\pi - 72\pi = 49\tfrac{1}{3}\pi$$

Bladzijde 233

32 **a**



$e^{2x} = e$	$e^{-x} = e$	$e^{2x} = e^{-x}$
$2x = 1$	$-x = 1$	$2x = -x$
$x = \frac{1}{2}$	$x = -1$	$x = 0$

e omlaag schuiven geeft

$$I(L) = \pi\int_{-1}^{0}(e^{-x} - e)^2\,dx + \pi\int_{0}^{\frac{1}{2}}(e^{2x} - e)^2\,dx = \pi\int_{-1}^{0}(e^{-2x} - 2\,e^{-x+1} + e^2)\,dx + \pi\int_{0}^{\frac{1}{2}}(e^{4x} - 2\,e^{2x+1} + e^2)\,dx$$
$$= \pi\big[-\tfrac{1}{2}e^{-2x} + 2\,e^{-x+1} + e^2x\big]_{-1}^{0} + \pi\big[\tfrac{1}{4}e^{4x} - e^{2x+1} + e^2x\big]_{0}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \pi(-\tfrac{1}{2} + 2e) - \pi(-\tfrac{1}{2}e^2 + 2e^2 - e^2) + \pi(\tfrac{1}{4}e^2 - e^2 + \tfrac{1}{2}e^2) - \pi(\tfrac{1}{4} - e) = (-\tfrac{3}{4}e^2 + 3e - \tfrac{3}{4})\pi$$

b $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_{-1}^{0} = -1 + e$

$\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{2x}\,dx = [\frac{1}{2}e^{2x}]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$

Dus $O(W) = -1 + e + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}e - 1\frac{1}{2}$.

$\int_{-1}^{\ln(\frac{4}{e+3})} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{\ln(\frac{4}{e+3})} = -e^{-\ln(\frac{4}{e+3})} + e = -e^{\ln(\frac{e+3}{4})} + e = -\frac{e+3}{4} + e = -\frac{1}{4}e - \frac{3}{4} + e = \frac{3}{4}e - \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}O(W) = \frac{1}{2}(1\frac{1}{2}e - 1\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}e - \frac{3}{4}$

Dus de lijn $x = \ln\left(\dfrac{4}{e+3}\right)$ verdeelt W in twee delen met gelijke oppervlakte.

12 Goniometrische formules

33 **a** $\sin(x + \frac{1}{3}\pi) = -\cos(x - \frac{2}{3}\pi)$

$\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$

$x - \frac{1}{6}\pi = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{6}\pi = -x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

geen oplossing $\quad 2x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$

b $2\sin(x)\cos(x) = \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$

$\sin(2x) = \sin(x + \frac{2}{3}\pi)$

$2x = x + \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi - x - \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

c $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) \cdot \cos(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$\cos(x + \frac{1}{2}\pi) \cdot \sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\sin(2x + \pi) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$\sin(2x + \pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$2x + \pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$

d $\sqrt{3} \cdot \sin(2x) + \cos(2x) = 1$

$2\sqrt{3}\sin(x)\cos(x) + 1 - 2\sin^2(x) = 1$

$2\sqrt{3}\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) = 0$

$2\sin(x)(\sqrt{3} \cdot \cos(x) - \sin(x)) = 0$

$2\sin(x) = 0 \vee \sqrt{3} \cdot \cos(x) - \sin(x) = 0$

$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$

$x = k \cdot \pi \vee \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3}$

$x = k \cdot \pi \vee \tan(x) = \sqrt{3}$

$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

34 **a** $f(x) = (2 - \sin(x))^2 = 4 - 4\sin(x) + \sin^2(x) = 4 - 4\sin(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$= 4\frac{1}{2} - 4\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$F(x) = 4\frac{1}{2}x + 4\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$

b $g(x) = \sin(3x)\cos(\frac{1}{2}x) + \cos(3x)\sin(\frac{1}{2}x) = \sin(3\frac{1}{2}x)$

$G(x) = -\frac{2}{7}\cos(3\frac{1}{2}x) + c$

c $h(x) = 4\cos^4(x) - \cos^2(2x) = (2\cos^2(x))^2 - \cos^2(2x) = (1 + \cos(2x))^2 - \cos^2(2x)$

$= 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) - \cos^2(2x) = 1 + 2\cos(2x)$

$H(x) = x + \sin(2x) + c$

35 **a** $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \sqrt{2}$ geeft $f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$
$f'(x) = 0$ geeft $\cos(x) + \sin(x) = 0$
$\sin(x) = -\cos(x)$
$\tan(x) = -1$
$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
$f(-\frac{1}{4}\pi) = \sin(-\frac{1}{4}\pi) - \cos(-\frac{1}{4}\pi) + \sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$
$f(-\frac{1}{4}\pi) = 0$ en $f'(-\frac{1}{4}\pi) = 0$, dus de grafiek van f raakt de x-as.

b $f(\frac{1}{4}\pi - p) + f(\frac{1}{4}\pi + p) = \sin(\frac{1}{4}\pi - p) - \cos(\frac{1}{4}\pi - p) + \sqrt{2} + \sin(\frac{1}{4}\pi + p) - \cos(\frac{1}{4}\pi + p) + \sqrt{2}$
$= \sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\frac{1}{4}\pi)\sin(p)) + \sqrt{2}$
$+ \sin(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{1}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{1}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\frac{1}{4}\pi)\sin(p)) + \sqrt{2}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$
$+ \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2y_A$
Dus de grafiek van f is puntsymmetrisch in $A(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2})$.

c $f(\frac{3}{4}\pi - p) = \sin(\frac{3}{4}\pi - p) - \cos(\frac{3}{4}\pi - p) + \sqrt{2}$
$= \sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) + \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(p)) + \sqrt{2}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$
$= \sqrt{2} \cdot \cos(p) + \sqrt{2}$
$f(\frac{3}{4}\pi + p) = \sin(\frac{3}{4}\pi + p) - \cos(\frac{3}{4}\pi + p) + \sqrt{2}$
$= \sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{3}{4}\pi)\sin(p) - (\cos(\frac{3}{4}\pi)\cos(p) - \sin(\frac{3}{4}\pi)\sin(p)) + \sqrt{2}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos(p) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin(p) + \sqrt{2}$
$= \sqrt{2} \cdot \cos(p) + \sqrt{2}$
$f(\frac{3}{4}\pi - p) = f(\frac{3}{4}\pi + p)$
Dus de lijn $x = \frac{3}{4}\pi$ is symmetrieas van de grafiek van f.

36 **a** $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab\sin(bt) \\ ab\cos(bt) \end{pmatrix}$
$v(t) = \sqrt{(-ab\sin(bt))^2 + (ab\cos(bt))^2} = \sqrt{a^2b^2\sin^2(bt) + a^2b^2\cos^2(bt)}$
$= \sqrt{a^2b^2(\sin^2(bt) + \cos^2(bt))} = \sqrt{a^2b^2} = ab$

b $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab^2\cos(bt) \\ -ab^2\sin(bt) \end{pmatrix}$
$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -ab\sin(bt) \\ ab\cos(bt) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -ab^2\cos(bt) \\ -ab^2\sin(bt) \end{pmatrix} = a^2b^3\sin(bt)\cos(bt) - a^2b^3\cos(bt)\sin(bt) = 0$
Dus $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$.

c $|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-ab^2\cos(bt))^2 + (-ab^2\sin(bt))^2} = \sqrt{a^2b^4\cos^2(bt) + a^2b^4\sin^2(bt)}$
$= \sqrt{a^2b^4(\sin^2(bt) + \cos^2(bt))} = \sqrt{a^2b^4} = ab^2$
$v = 10$ en $|\vec{a}(t)| = 5$ geeft $ab = 10$ en $ab^2 = 5$
$\frac{ab^2}{ab} = \frac{5}{10}$
$b = \frac{1}{2}$
$b = \frac{1}{2}$ en $ab = 10$ geeft $a = 20$
Dus de straal van de cirkel is 20.

Bladzijde 234

37 **a** $f(x) = 2\cos^2(x) + \sin(2x) = 2\cos^2(x) - 1 + 1 + \sin(2x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$
$f(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$ geeft $f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(2x)$
$f'(x) = 0$ geeft $-2\sin(2x) + 2\cos(2x) = 0$
$\sin(2x) = \cos(2x)$
$\tan(2x) = 1$
$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
x in $[0, \pi]$ geeft $x = \frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{5}{8}\pi$
max. is $f(\frac{1}{8}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi) + \sin(\frac{1}{4}\pi) + 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$
min. is $f(\frac{5}{8}\pi) = \cos(1\frac{1}{4}\pi) + \sin(1\frac{1}{4}\pi) + 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2}$
Dus $B_f = [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $2\cos^2(x) + \sin(2x) = 2\sin(2x)$
$2\cos^2(x) = \sin(2x)$
$2\cos^2(x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$2\cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \sin(x)$
$\cos(x) = 0 \vee \tan(x) = 1$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
x in $[0, \pi]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi$

$$O(V) = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(2x) - (2\cos^2(x) + \sin(2x)))\,dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(2x) - (\cos(2x) + \sin(2x) + 1))\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin(2x) - \cos(2x) - \sin(2x) - 1)\,dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(2x) - \cos(2x) - 1)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{2}\sin(2x) - x\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = -\tfrac{1}{2}\cos(\pi) - \tfrac{1}{2}\sin(\pi) - \tfrac{1}{2}\pi - (-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{2}\pi) - \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{1}{2}\pi) - \tfrac{1}{4}\pi)$$

$$= \tfrac{1}{2} - 0 - \tfrac{1}{2}\pi + 0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{4}\pi$$

c C is het midden van AB als $g(p) = \frac{1}{2}f(p)$.
Dit geeft $2\sin(2p) = \cos^2(p) + \frac{1}{2}\sin(2p)$
$1\frac{1}{2}\sin(2p) = \cos^2(p)$
$3\sin(p)\cos(p) = \cos^2(p)$
$\cos(p) = 0 \vee 3\sin(p) = \cos(p)$
$p = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee 3 \cdot \dfrac{\sin(p)}{\cos(p)} = 1$
vold. niet $\quad \tan(p) = \frac{1}{3}$

38 **a** $u_P = 25\sin(8\pi t)$
Per trilling wordt $4 \cdot 25 = 100$ mm afgelegd.
Er zijn $\dfrac{8\pi}{2\pi} = 4$ trillingen per seconde,
dus P legt per minuut $60 \cdot 4 \cdot 100 = 24\,000$ mm $= 24$ m af.
$u_Q = 40\sin(6\pi t)$.
Per trilling wordt $4 \cdot 40 = 160$ mm afgelegd.
Er zijn $\dfrac{6\pi}{2\pi} = 3$ trillingen per seconde,
dus Q legt per minuut $60 \cdot 3 \cdot 160 = 28\,800$ mm $= 28{,}8$ m af.
Het punt Q legt de grootste afstand per minuut af. Het verschil is 4,8 m.

b Op $t = 0$ beginnen P en Q beide aan een nieuwe trilling.
P heeft trillingstijd $\frac{1}{4}$ seconde en Q heeft trillingstijd $\frac{1}{3}$ seconde. Dus na 1 seconde heeft P 4 trillingen gemaakt en Q 3 trillingen, dus beginnen P en Q na 1 seconde beide de tweede keer aan een nieuwe trilling.
Dus op $t = 1$.

c De afstand tussen P en Q is $|25\sin(8\pi t) - 40\sin(6\pi t)|$.
Voer in $y_1 = |25\sin(8\pi x) - 40\sin(6\pi x)|$ en $y_2 = 30$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}2360...$
Dus het eerste tijdstip is $t \approx 0{,}236$.

39 **a** $f(x) = 0$ geeft $2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$
$\sin(x)(2\sin(x) + 1) = 0$
$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$
$x = k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi \vee x = 2\pi$

$$O = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (2\sin^2(x) + \sin(x))\,dx = \int_0^{\pi} (2\sin^2(x) - 1 + 1 + \sin(x))\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} (-\cos(2x) + \sin(x) + 1)\,dx = \left[-\tfrac{1}{2}\sin(2x) - \cos(x) + x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sin(2\pi) - \cos(\pi) + \pi - (-\tfrac{1}{2}\sin(0) - \cos(0) + 0) = 0 - -1 + \pi + 0 + 1 = 2 + \pi$$

b $f(x) = 2\sin^2(x) + \sin(x)$ geeft $f'(x) = 4\sin(x)\cos(x) + \cos(x)$

$f'(x) = 0$ geeft $4\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$

$\cos(x)(4\sin(x) + 1) = 0$

$\cos(x) = 0 \vee \sin(x) = -\frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi \vee \sin(x) = -\frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{2}\pi) = 2\sin^2(\frac{1}{2}\pi) + \sin(\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$f(1\frac{1}{2}\pi) = 2\sin^2(1\frac{1}{2}\pi) + \sin(1\frac{1}{2}\pi) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$\sin(x) = -\frac{1}{4}$ geeft $f(x) = 2 \cdot (-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$

$f(x) = p$ heeft precies vier oplossingen voor $-\frac{1}{8} < p < 0 \vee 0 < p < 1$.

c $f(\frac{1}{2}\pi - p) = 2\sin^2(\frac{1}{2}\pi - p) + \sin(\frac{1}{2}\pi - p)$

$= 2(\sin(\frac{1}{2}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{1}{2}\pi)\sin(p))^2 + \sin(\frac{1}{2}\pi)\cos(p) - \cos(\frac{1}{2}\pi)\sin(p)$

$= 2(1 \cdot \cos(p) - 0)^2 + 1 \cdot \cos(p) - 0$

$= 2\cos^2(p) + \cos(p)$

$f(\frac{1}{2}\pi + p) = 2\sin^2(\frac{1}{2}\pi + p) + \sin(\frac{1}{2}\pi + p)$

$= 2(\sin(\frac{1}{2}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{1}{2}\pi)\sin(p))^2 + \sin(\frac{1}{2}\pi)\cos(p) + \cos(\frac{1}{2}\pi)\sin(p)$

$= 2(1 \cdot \cos(p) + 0)^2 + 1 \cdot \cos(p) + 0$

$= 2\cos^2(p) + \cos(p)$

Er geldt $f(\frac{1}{2}\pi - p) = f(\frac{1}{2}\pi + p)$, dus de grafiek van f is symmetrisch op het interval $[0, \pi]$.

$p = f(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi) = f(\frac{1}{6}\pi) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = 1$

40 **a** $\begin{cases} x(t) = \sin(t) + \cos(t) \\ y(t) = 1 + 2\sin(2t + \pi) \end{cases}$

$x^2 = (\sin(t) + \cos(t))^2 = \sin^2(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t) = 1 + \sin(2t)$

$\left.\begin{array}{l} y = 1 + 2\sin(2t + \pi) = 1 - 2\sin(2t) \\ x^2 = 1 + \sin(2t) \text{ geeft } \sin(2t) = x^2 - 1 \end{array}\right\} y = 1 - 2(x^2 - 1)$

$y = 1 - 2x^2 + 2$

$y = -2x^2 + 3$

Dus de baan van P is een deel van de bergparabool $y = -2x^2 + 3$.

Dus $a = -2$ en $b = 3$.

b $\left.\begin{array}{l} x^2 = 1 + \sin(2t) \\ -1 \le \sin(2t) \le 1 \end{array}\right\} 0 \le x^2 \le 2$

$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2}$ en $y = -2x^2 + 3$ geeft $y = -1$

$x = \sqrt{2}$ en $y = -2x^2 + 3$ geeft $y = -1$

Dus de keerpunten zijn $(-\sqrt{2}, -1)$ en $(\sqrt{2}, -1)$.

Bladzijde 235

41 **a** De baan van P is de cirkel met middelpunt O en straal 4, de baan van Q is de cirkel met middelpunt O en straal 5.

De minimale afstand tussen P en Q is $5 - 4 = 1$ voor $5t = 3t + k \cdot 2\pi$

$2t = k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot \pi$

Dus de minimale afstand wordt bereikt voor $t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$.

De maximale afstand tussen P en Q is $5 + 4 = 9$ voor $5t = 3t + \pi + k \cdot 2\pi$

$2t = \pi + k \cdot 2\pi$

$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Dus de maximale afstand wordt bereikt voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$.

b $PQ^2 = (5\cos(3t) - 4\cos(5t))^2 + (5\sin(3t) - 4\sin(5t))^2$

$= 25\cos^2(3t) - 40\cos(3t)\cos(5t) + 16\cos^2(5t) + 25\sin^2(3t) - 40\sin(3t)\sin(5t) + 16\sin^2(5t)$

$= 25(\cos^2(3t) + \sin^2(3t)) + 16(\cos^2(5t) + \sin^2(5t)) - 40(\cos(3t)\cos(5t) + \sin(3t)\sin(5t))$

$= 25 + 16 - 40\cos(3t - 5t) = 41 - 40\cos(-2t) = 41 - 40\cos(2t) = 41 - 40(1 - 2\sin^2(t))$

$= 41 - 40 + 80\sin^2(t) = 1 + 80\sin^2(t)$

Dus $PQ = \sqrt{1 + 80\sin^2(t)}$.

c $PQ = \sqrt{41}$
$\sqrt{1 + 80\sin^2(t)} = \sqrt{41}$
$1 + 80\sin^2(t) = 41$
$80\sin^2(t) = 40$
$\sin^2(t) = \frac{1}{2}$
$\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
t in $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{1}{4}\pi \vee t = \frac{3}{4}\pi \vee t = 1\frac{1}{4}\pi \vee t = 1\frac{3}{4}\pi$

d Evenwijdig met de y-as, dus $x_P = x_Q$
$4\cos(5t) = 5\cos(3t)$
Voer in $y_1 = 4\cos(5x)$ en $y_2 = 5\cos(3x)$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}756...$
Dus voor $t \approx 0{,}76$.

42 **a** $y = 0$ geeft $\cos(3t) = 0$
$3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft het punt $(\frac{1}{2}, 0)$.
$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(-1, 0)$.
$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft het punt $(\frac{1}{2}, 0)$.

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases} \text{ geeft } \begin{cases} x'(t) = -2\sin(2t) \\ y'(t) = -3\sin(3t) \end{cases} \text{ en dus } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ -3\sin(3t) \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v}(\tfrac{1}{6}\pi) = \begin{pmatrix} -2\sin(\frac{1}{3}\pi) \\ -3\sin(\frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(\tfrac{5}{6}\pi) = \begin{pmatrix} -2\sin(1\frac{2}{3}\pi) \\ -3\sin(2\frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Dus $\varphi = 60°$.

b $x = 0$ geeft $\cos(2t) = 0$
$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
$t = \frac{1}{4}\pi$ geeft het punt $(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.
$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft het punt $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

$$\vec{v}(\tfrac{3}{4}\pi) = \begin{pmatrix} -2 \cdot -1 \\ -3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$ en k door $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.
Dus k: $y = -\frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c De baansnelheid is $v(\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{(-2\sin(\pi))^2 + (-3\sin(1\frac{1}{2}\pi))^2} = \sqrt{0 + 9} = 3$.

d $d(A, B) = 1$, dus A op de lijn $y = \frac{1}{2}$, omdat de baan symmetrisch is in de x-as.
$\cos(3t) = \frac{1}{2}$
$3t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$t = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
t in $[0, \pi]$ geeft $t = \frac{1}{9}\pi \vee t = \frac{7}{9}\pi \vee t = \frac{5}{9}\pi$
$x(\frac{1}{9}\pi) = \cos(\frac{2}{9}\pi) = 0{,}766...$
$x(\frac{7}{9}\pi) = \cos(\frac{14}{9}\pi) = 0{,}173...$
$x(\frac{5}{9}\pi) = \cos(\frac{10}{9}\pi) = -0{,}939...$
Dus $p \approx -0{,}94 \vee p \approx 0{,}17 \vee p \approx 0{,}77$.

43 **a** $y = 0$ geeft $2\cos(2t) = 0$

$\cos(2t) = 0$

$2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$t = -\frac{1}{4}\pi$ geeft het punt $(1\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$.

$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ y(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -3\sin(t + \frac{1}{2}\pi) \\ y'(t) = -4\sin(2t) \end{cases}$

Dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t + \frac{1}{2}\pi) \\ -4\sin(2t) \end{pmatrix}$.

$\vec{v}(-\frac{1}{4}\pi) = \begin{pmatrix} -3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -4 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

$\tan(\varphi) = \dfrac{4}{-1\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ geeft $\varphi = -62{,}061...°$

Dus de hoek waaronder de baan de positieve x-as snijdt is ongeveer 62,1°.

b De baansnelheid is $v(-\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{(-1\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{4\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{\frac{41}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{82}$

c $x = 0$ geeft $3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) = 0$

$\cos(t + \frac{1}{2}\pi) = 0$

$t + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$t = k \cdot \pi$

$t = 0$ geeft $y = 2$, dus de baan snijdt de y-as in het punt $(0, 2)$.

Dus de vergelijking van de parabool is van de vorm $y = ax^2 + 2$.

$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + 2 \\ t = \frac{1}{2}\pi \text{ geeft het punt } (-3, -2) \end{array}\right\}$ $a \cdot (-3)^2 + 2 = -2$

$9a = -4$

$a = -\frac{4}{9}$

Dus $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$.

Substitutie van $x = 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi)$ en $y = 2\cos(2t)$ in $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$ geeft

$2\cos(2t) = -\frac{4}{9} \cdot (3\cos(t + \frac{1}{2}\pi))^2 + 2$

$2\cos(2t) = -\frac{4}{9} \cdot 9(\cos(t + \frac{1}{2}\pi))^2 + 2$

$2\cos(2t) = -4(\sin(t + \pi))^2 + 2$

$\cos(2t) = -2(-\sin(t))^2 + 1$

$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$

Dit klopt voor elke t, dus de baan van P is een deel van de parabool $y = -\frac{4}{9}x^2 + 2$.

d $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{p}_L = \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix}$

$\vec{q} = \vec{p} + \vec{p}_L = \begin{pmatrix} 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) - 2\cos(2t) \\ 2\cos(2t) + 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix}$

Dus de bewegingsvergelijkingen van Q zijn $\begin{cases} x_Q = 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) - 2\cos(2t) \\ y_Q = 2\cos(2t) + 3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$

e Q op de y-as geeft $x_Q = 0$

$3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) - 2\cos(2t) = 0$

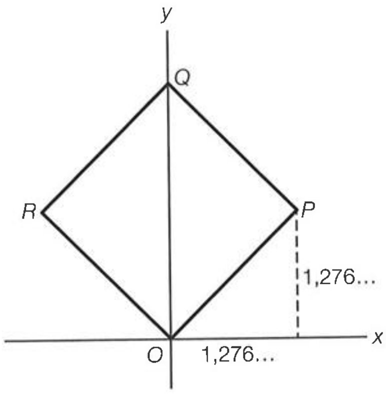
$3\cos(t + \frac{1}{2}\pi) = 2\cos(2t)$

Voer in $y_1 = 3\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$ en $y_2 = 2\cos(2x)$.

De optie snijpunt geeft $x = -0{,}439...$

Dus $t = -0{,}439...$ en dit geeft $P(1{,}276...; 1{,}276...)$.

$O(OPQR) = OP^2 = 1{,}276...^2 + 1{,}276...^2 \approx 3{,}26$.



K Voortgezette integraalrekening

Bladzijde 236

44 **a** $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4x+8} = \dfrac{x-2+4}{x^2-4x+8} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x-4)+4}{x^2-4x+8} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+8} + \dfrac{4}{x^2-4x+8}$

$\int \dfrac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2-4x+8}(2x-4)\,dx = \int \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2-4x+8}\,d(x^2-4x+8) = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + c$

$\int \dfrac{4}{x^2-4x+8}\,dx = \int \dfrac{4}{(x-2)^2-4+8}\,dx = \int \dfrac{1}{\frac{1}{4}(x-2)^2+1}\,dx = \int \dfrac{1}{(\frac{1}{2}(x-2))^2+1}\,dx$

$= \int \dfrac{1}{(\frac{1}{2}x-1)^2+1}\,dx = 2\arctan(\frac{1}{2}x-1) + c$

Dus $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + 2\arctan(\frac{1}{2}x-1) + c$.

b $F(x) = \int 3x^2\sin(x^3)\,dx = \int \sin(x^3)\,dx^3 = -\cos(x^3) + c$

c $F(x) = \int \cos(x) \cdot \sqrt[3]{1+\sin(x)}\,dx = \int \sqrt[3]{1+\sin(x)}\,d\sin(x) = \int \sqrt[3]{1+u}\,du = \int (1+u)^{\frac{1}{3}}\,du$

$= \frac{3}{4}(1+u)^{1\frac{1}{3}} + c = \frac{3}{4}(1+u) \cdot \sqrt[3]{1+u} + c = \frac{3}{4}(1+\sin(x)) \cdot \sqrt[3]{1+\sin(x)} + c$

d $F(x) = \int (2x+4)\cos(2x)\,dx = \int (2x+4)\,d\frac{1}{2}\sin(2x) = (2x+4) \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) - \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,d(2x+4)$

$= (x+2)\sin(2x) - \int \sin(2x)\,dx = (x+2)\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + c$

e $F(x) = \int \dfrac{2x+1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \left(\dfrac{2x}{\sqrt{16-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$

$= \int -\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,d(16-x^2) + \int \dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-(\frac{1}{4}x)^2}}\,dx$

$= \int -\dfrac{1}{\sqrt{u}}\,du + \arcsin(\frac{1}{4}x) = -2\sqrt{u} + \arcsin(\frac{1}{4}x) + c = -2\sqrt{16-x^2} + \arcsin(\frac{1}{4}x) + c$

f $F(x) = \int \dfrac{2x+4}{\sqrt{-x^2-4x-3}}\,dx = \int \dfrac{-1}{\sqrt{-x^2-4x-3}}\,d(-x^2-4x-3) = \int \dfrac{-1}{\sqrt{u}}\,du = -2\sqrt{u} + c$

$= -2\sqrt{-x^2-4x-3} + c$

g $f(x) = \dfrac{2x+7}{x^2+6x+8} = \dfrac{2x+7}{(x+2)(x+4)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x+4} = \dfrac{a(x+4)+b(x+2)}{(x+2)(x+4)} = \dfrac{(a+b)x+4a+2b}{(x+2)(x+4)}$

$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+2b=7 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2a+2b=4 \\ 4a+2b=7 \end{cases}$ $-$

$-2a=-3$

$\left.\begin{array}{l} a=1\frac{1}{2} \\ a+b=2 \end{array}\right\}$ $1\frac{1}{2}+b=2$

$b=\frac{1}{2}$

$f(x) = \dfrac{1\frac{1}{2}}{x+2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x+4}$ geeft $F(x) = 1\frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+4| + c$

45 **a** $f(x) = 4\sin^2(x)\cos(x)$ geeft

$f'(x) = 8\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x) + 4\sin^2(x) \cdot -\sin(x) = 8\sin(x)\cos^2(x) - 4\sin^3(x)$

$f(x) = 0$ geeft $4\sin^2(x) \cdot \cos(x) = 0$

$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0$

$x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

$f'(0) = 8 \cdot 0 \cdot 1^2 - 4 \cdot 0 = 0$

$f'(\pi) = 8 \cdot 0 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot 0 = 0$

$f'(2\pi) = 8 \cdot 0 \cdot 1^2 - 4 \cdot 0 = 0$

Dus de grafiek raakt de x-as in $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$.

b Stel $k{:}\ y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{2}\pi) = 8 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4$.

$\left.\begin{array}{l} y = -4x + b \\ f(\frac{1}{2}\pi) = 0, \text{ dus } A(\frac{1}{2}\pi, 0) \end{array}\right\}$ $-4 \cdot \frac{1}{2}\pi + b = 0$

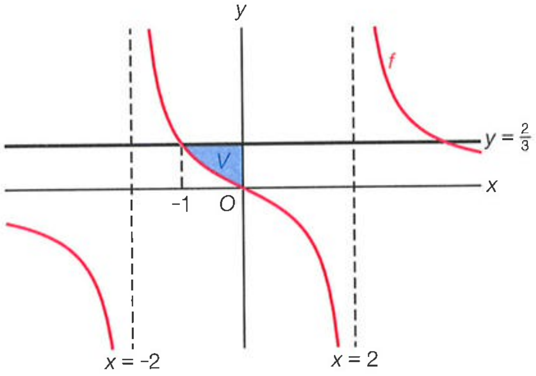
$b = 2\pi$

Dus $k{:}\ y = -4x + 2\pi$.

c $O(V) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 4\sin^2(x)\cos(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}\pi} 4\sin^2(x)\,d\sin(x) = \left[\frac{4}{3}\sin^3(x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 0 = 1\frac{1}{3}$

46 **a** $f(x) = \frac{2}{3}$ geeft $\frac{2x}{x^2-4} = \frac{2}{3}$

$2x^2 - 8 = 6x$
$2x^2 - 6x - 8 = 0$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x+1)(x-4) = 0$
$x = -1 \vee x = 4$



$O(V) = \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{3} - \frac{2x}{x^2-4}\right)dx$

$\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{x^2-4}\,2x\,dx = \int \frac{1}{x^2-4}\,d(x^2-4) = \ln|x^2-4| + c$

Dus $O(V) = \left[\frac{2}{3}x - \ln|x^2-4|\right]_{-1}^{0} = 0 - \ln(4) - (-\frac{2}{3} - \ln(3)) = -\ln(4) + \frac{2}{3} + \ln(3) = \frac{2}{3} + \ln(\frac{3}{4})$.

b $\int_p^{p+4} f(x)\,dx = \int_p^{p+4} \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \left[\ln(x^2-4)\right]_p^{p+4} = \ln((p+4)^2-4) - \ln(p^2-4)$

Omdat $p^2 - 4 > 0$ als $p > 2$, kan de modulus wegblijven.

$= \ln(p^2 + 8p + 16 - 4) - \ln(p^2-4) = \ln\left(\frac{p^2+8p+12}{p^2-4}\right)$

$\int_p^{p+4} f(x)\,dx = \ln(2)$

$\ln\left(\frac{p^2+8p+12}{p^2-4}\right) = \ln(2)$

$\frac{p^2+8p+12}{p^2-4} = 2$

$p^2 + 8p + 12 = 2p^2 - 8$
$p^2 - 8p - 20 = 0$
$(p+2)(p-10) = 0$
$p = -2 \quad \vee \quad p = 10$
vold. niet
Dus voor $p = 10$.

47 **a** $f(x) = \dfrac{x^3 + 10x}{x^2 + 1}$ geeft

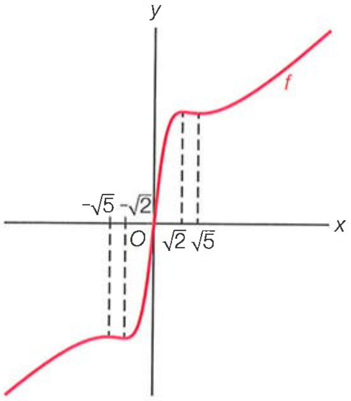
$$f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot (3x^2+10) - (x^3+10x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 10x^2 + 3x^2 + 10 - 2x^4 - 20x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

$(x^2 - 2)(x^2 - 5) = 0$

$x^2 = 2 \vee x^2 = 5$

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$



$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^3 + 10 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{2\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{2+1} = \frac{12\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^3 + 10 \cdot -\sqrt{2}}{(-\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{-2\sqrt{2} - 10\sqrt{2}}{2+1} = \frac{-12\sqrt{2}}{3} = -4\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{5}) = \frac{(\sqrt{5})^3 + 10 \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 + 1} = \frac{5\sqrt{5} + 10\sqrt{5}}{5+1} = \frac{15\sqrt{5}}{6} = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$f(-\sqrt{5}) = \frac{(-\sqrt{5})^3 + 10 \cdot -\sqrt{5}}{(-\sqrt{5})^2 + 1} = \frac{-5\sqrt{5} - 10\sqrt{5}}{5+1} = \frac{-15\sqrt{5}}{6} = -2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

De toppen zijn $(-\sqrt{5}, -2\frac{1}{2}\sqrt{5})$, $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ en $(\sqrt{5}, 2\frac{1}{2}\sqrt{5})$.

b Stel $k{:}\, y = ax + b$ met $a = f'(1) = \dfrac{1 - 7 + 10}{(1+1)^2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ f(1) = 5\frac{1}{2}, \text{ dus } A(1, 5\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 + b = 5\frac{1}{2} \\ b = 4\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus $k{:}\, y = x + 4\frac{1}{2}$.

c $f(x) = p$ heeft precies één oplossing voor $p < -4\sqrt{2} \vee -2\frac{1}{2}\sqrt{5} < p < 2\frac{1}{2}\sqrt{5} \vee p > 4\sqrt{2}$.

d $x^2 + 1 \,/\, x^3 + 10x \,\backslash\, x$

$$\frac{x^3 + x}{9x} -$$

$$f(x) = x + \frac{9x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{9x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 4\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int 4\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1) = 4\tfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$$

$$O(V) = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(x + \frac{9x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 + 4\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^3$$

$$= 4\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}\ln(10) - 0 = 4\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}\ln(10)$$

Bladzijde 237

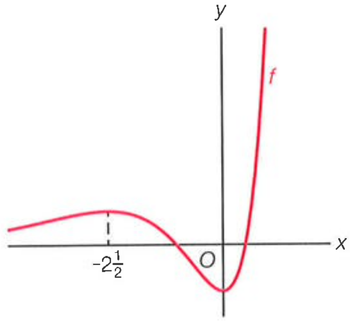
48 **a** $f(x) = (2x^2 + x - 1)e^x$ geeft $f'(x) = (4x + 1) \cdot e^x + (2x^2 + x - 1) \cdot e^x = (2x^2 + 5x)e^x$

$f'(x) = 0$ geeft $(2x^2 + 5x)e^x = 0$

$2x^2 + 5x = 0$

$x(2x + 5) = 0$

$x = 0 \vee x = -2\frac{1}{2}$



$f(0) = -1$ en $f(-2\frac{1}{2}) = 9e^{-2\frac{1}{2}} = \dfrac{9}{e^{2\frac{1}{2}}} = \dfrac{9}{e^2 \cdot \sqrt{e}}$

Dus de toppen zijn $(0, -1)$ en $\left(-2\frac{1}{2}, \dfrac{9}{e^2 \cdot \sqrt{e}}\right)$.

b $f(x) = 0$ geeft $(2x^2 + x - 1)e^x = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$

$x = \dfrac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \dfrac{-1 - 3}{4} = -1$

$\int(2x^2 + x - 1)e^x\,dx = \int(2x^2 + x - 1)\,de^x = (2x^2 + x - 1)e^x - \int e^x d(2x^2 + x - 1)$

$= (2x^2 + x - 1)e^x - \int(4x + 1)e^x\,dx = (2x^2 + x - 1)e^x - \int(4x + 1)\,de^x$

$= (2x^2 + x - 1)e^x - (4x + 1)e^x + \int e^x d(4x + 1) = (2x^2 + x - 1)e^x - (4x + 1)e^x + \int 4e^x\,dx$

$= (2x^2 + x - 1)e^x - (4x + 1)e^x + 4e^x = (2x^2 - 3x + 2)e^x$

$O(V) = -\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = -[(2x^2 - 3x + 2)e^x]_{-1}^{\frac{1}{2}} = -(\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} + 2)e^{\frac{1}{2}} + (2 + 3 + 2)e^{-1} = -e^{\frac{1}{2}} + 7e^{-1} = \dfrac{7}{e} - \sqrt{e}$

c $-\int_{-1}^{p} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\dfrac{7}{e} - \sqrt{e}\right)$ geeft $-[(2x^2 - 3x + 2)e^x]_{-1}^{p} = \dfrac{7}{2e} - \frac{1}{2}\sqrt{e}$

$-(2p^2 - 3p + 2)e^p + \dfrac{7}{e} = \dfrac{7}{2e} - \frac{1}{2}\sqrt{e}$

$-(2p^2 - 3p + 2)e^p = -\dfrac{7}{2e} - \frac{1}{2}\sqrt{e}$

$(2p^2 - 3p + 2)e^p = \dfrac{7}{2e} + \frac{1}{2}\sqrt{e}$

Voer in $y_1 = (2x^2 - 3x + 2)e^x$ en $y_2 = \dfrac{7}{2e} + \frac{1}{2}\sqrt{e}$.

De optie snijpunt geeft $x = -0{,}1130...$

Dus $p \approx -0{,}113$.

49 **a** $F(x) = \int x^3 \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\,d(\frac{1}{4}x^4) = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \frac{1}{4}x^4\,d\ln(x) = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \dfrac{1}{x}dx$

$= \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \frac{1}{4}x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + c$

b $F(x) = \int x\ln(x^3)\,dx = \int 3x\ln(x)\,dx = \int 3\ln(x)\,d\frac{1}{2}x^2 = 3\ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 d\,3\ln(x)$

$= 1\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \dfrac{3}{x}dx = 1\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int 1\frac{1}{2}x\,dx = 1\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{3}{4}x^2 + c$

c $F_n(x) = \int x^n\ln(x)\,dx = \int \ln(x)\,d\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \int \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\,d\ln(x)$

$= \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \int \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \dfrac{1}{x}dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \int \dfrac{1}{n+1}x^n\,dx$

$= \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \dfrac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c$

d Er geldt $x > 0$, omdat anders x^m niet bestaat.

Uit c volgt $\int x\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$.

$F_m(x) = \int x\ln(x^m)\,dx = \int mx\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}mx^2\ln(x) - \frac{1}{4}mx^2 + c$

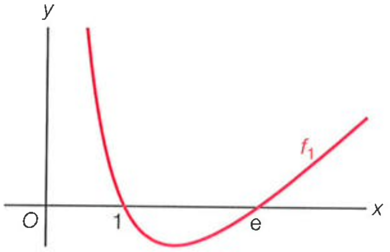
50 **a** $f_1(x) = 2\ln^2(x) - 2\ln(x)$

$f_1(x) = 0$ geeft $2\ln^2(x) - 2\ln(x) = 0$

$2\ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$

$\ln(x) = 0 \vee \ln(x) = 1$

$x = 1 \vee x = \mathrm{e}$



$$\int 2\ln^2(x)\,dx = 2x\ln^2(x) - \int 2x\,d\ln^2(x) = 2x\ln^2(x) - \int 2x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= 2x\ln^2(x) - \int 4\ln(x)\,dx$$
$$= 2x\ln^2(x) - 4(x\ln(x) - x) + c = 2x\ln^2(x) - 4x\ln(x) + 4x + c$$

$$\int 2\ln(x)\,dx = 2(x\ln(x) - x) + c = 2x\ln(x) - 2x + c$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} f_1(x)\,dx = \int_1^{\mathrm{e}} (2\ln^2(x) - 2\ln(x))\,dx = \left[2x\ln^2(x) - 4x\ln(x) + 4x - (2x\ln(x) - 2x)\right]_1^{\mathrm{e}}$$
$$= \left[2x\ln^2(x) - 6x\ln(x) + 6x\right]_1^{\mathrm{e}} = 2\mathrm{e} - 6\mathrm{e} + 6\mathrm{e} - (0 - 0 + 6) = 2\mathrm{e} - 6$$

De oppervlakte is $-(2\mathrm{e} - 6) = 6 - 2\mathrm{e}$.

b $f_p(x) = 0$ geeft $2\ln^2(x) - 2p\ln(x) = 0$

$2\ln(x)(\ln(x) - p) = 0$

$\ln(x) = 0 \vee \ln(x) = p$

$x = 1 \vee x = \mathrm{e}^p$

Uit a volgt $F_p(x) = 2x\ln^2(x) - 4x\ln(x) + 4x - 2px\ln(x) + 2px + c$.

$$\int_1^{\mathrm{e}^p} f_p(x)\,dx = \left[2x\ln^2(x) - 4x\ln(x) + 4x - 2px\ln(x) + 2px\right]_1^{\mathrm{e}^p}$$
$$= 2\mathrm{e}^p \cdot p^2 - 4\mathrm{e}^p \cdot p + 4\mathrm{e}^p - 2p\mathrm{e}^p \cdot p + 2p\mathrm{e}^p - (0 - 0 + 4 - 0 + 2p)$$
$$= 2p^2\mathrm{e}^p - 4p\mathrm{e}^p + 4\mathrm{e}^p - 2p^2\mathrm{e}^p + 2p\mathrm{e}^p - 4 - 2p$$
$$= -2p\mathrm{e}^p + 4\mathrm{e}^p - 4 - 2p = (4 - 2p)\mathrm{e}^p - 4 - 2p$$

$f_p(x) \leq 0$ voor $1 \leq x \leq \mathrm{e}^p$, dus opp $= (2p - 4)\mathrm{e}^p + 2p + 4$.

opp = 8 geeft $(2p - 4)\mathrm{e}^p + 2p + 4 = 8$

$(2p - 4)\mathrm{e}^p + 2p - 4 = 0$

$(2p - 4)(\mathrm{e}^p + 1) = 0$

$2p - 4 = 0 \vee \mathrm{e}^p + 1 = 0$

$2p = 4$ geen opl.

$p = 2$

Dus voor $p = 2$.

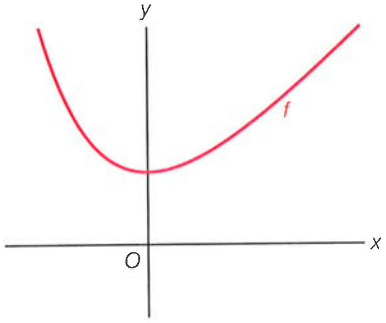
51 **a** $f(x) = x + e^{-x}$ geeft $f'(x) = 1 - e^{-x}$

$f'(x) = 0$ geeft $1 - e^{-x} = 0$

$e^{-x} = 1$

$-x = 0$

$x = 0$



min. is $f(0) = 1$

$B_f = [1, \rightarrow\rangle$

b $p > 0$

$O(V_p) = 6$ geeft $\int_{-p}^{p} (x + e^{-x})\,dx = 6$

$\left[\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\right]_{-p}^{p} = 6$

$\frac{1}{2}p^2 - e^{-p} - (\frac{1}{2}p^2 - e^{p}) = 6$

$\frac{1}{2}p^2 - e^{-p} - \frac{1}{2}p^2 + e^{p} = 6$

$e^{p} - 6 - e^{-p} = 0$

$(e^{p})^2 - 6\,e^{p} - 1 = 0$

Stel $e^{p} = u$.

$u^2 - 6u - 1 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 40$

$u = \frac{6 + 2\sqrt{10}}{2} \vee u = \frac{6 - 2\sqrt{10}}{2}$

$u = 3 + \sqrt{10} \;\vee\; u = 3 - \sqrt{10}$

$e^{p} = 3 + \sqrt{10} \vee e^{p} = 3 - \sqrt{10}$

$p = \ln(3 + \sqrt{10})$ geen opl.

$p < 0$

$O(V_p) = 6$ geeft $\int_{p}^{-p} (x + e^{-x})\,dx = 6$

$\left[\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\right]_{p}^{-p} = 6$

$\frac{1}{2}p^2 - e^{p} - (\frac{1}{2}p^2 - e^{-p}) = 6$

$\frac{1}{2}p^2 - e^{p} - \frac{1}{2}p^2 + e^{-p} = 6$

$-e^{p} - 6 + e^{-p} = 0$

$(e^{p})^2 + 6\,e^{p} - 1 = 0$

Stel $e^{p} = u$.

$u^2 + 6u - 1 = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 40$

$u = \frac{-6 + 2\sqrt{10}}{2} \vee u = \frac{-6 - 2\sqrt{10}}{2}$

$u = -3 + \sqrt{10} \;\vee\; u = -3 - \sqrt{10}$

$e^{p} = -3 + \sqrt{10} \vee e^{p} = -3 - \sqrt{10}$

$p = \ln(-3 + \sqrt{10})$ geen opl.

Dus voor $p = \ln(3 + \sqrt{10})$ en voor $p = \ln(-3 + \sqrt{10})$.

c $I = \pi\int_{-1}^{0} (f(x))^2\,dx = \pi\int_{-1}^{0} (x + e^{-x})^2\,dx = \pi\int_{-1}^{0} (x^2 + 2x\,e^{-x} + e^{-2x})\,dx$

$\int 2x\,e^{-x}\,dx = \int 2x\,d\,{-e^{-x}} = -2x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,d\,2x = -2x\,e^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx = -2x\,e^{-x} - 2\,e^{-x} + c$

$I = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\,e^{-x} - 2\,e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$

$= \pi(0 - 0 - 2 - \frac{1}{2}) - \pi(-\frac{1}{3} + 2e - 2e - \frac{1}{2}e^2)$

$= \pi(-2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^2) = (\frac{1}{2}e^2 - 2\frac{1}{6})\pi$

52 **a** $F(x) = \int \frac{1}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}\,dx = \int \frac{-1}{1 + e^{-x}}\,d(1 + e^{-x}) = \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln(1 + e^{-x}) + c$

b $F(x) = \int \frac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)}\,dx = \int \ln(\sin(x))\,d\tan(x) = \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - \int \tan(x)\,d\ln(\sin(x))$

$= \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - \int \tan(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,dx$

$= \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)\,dx$

$= \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - \int 1\,dx$

$= \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) - x + c$

c $\sqrt{2x+1} = u$
$2x + 1 = u^2$
$2x = u^2 - 1$
$x = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}$
$F(x) = \int x\sqrt{2x+1}\,dx = \int(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}) \cdot u\,d(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}) = \int(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}) \cdot u \cdot u\,du = \int(\frac{1}{2}u^4 - \frac{1}{2}u^2)\,du$
$= \frac{1}{10}u^5 - \frac{1}{6}u^3 + c = \frac{1}{10}(2x+1)^2 \cdot \sqrt{2x+1} - \frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1} + c$

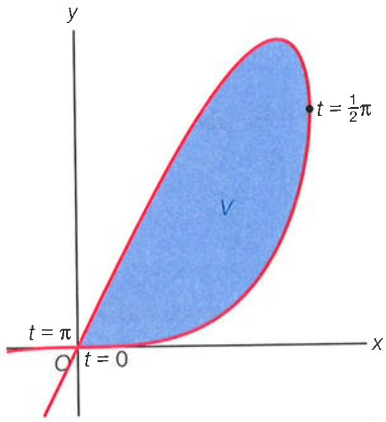
Bladzijde 238

53 **a** $x = 11$ geeft $t^2 - 4 = 11$
$t^2 = 15$
$t = \sqrt{15} \vee t = -\sqrt{15}$
$y(\sqrt{15}) = \sqrt{15}\ln(4 + \sqrt{15})$
$y(-\sqrt{15}) = -\sqrt{15}\ln(4 - \sqrt{15}) = \sqrt{15}\ln((4 - \sqrt{15})^{-1}) = \sqrt{15}\ln\left(\frac{1}{4 - \sqrt{15}}\right)$
$= \sqrt{15}\ln\left(\frac{1}{4 - \sqrt{15}} \cdot \frac{4 + \sqrt{15}}{4 + \sqrt{15}}\right) = \sqrt{15}\ln\left(\frac{4 + \sqrt{15}}{16 - 15}\right) = \sqrt{15}\ln(4 + \sqrt{15})$
Dus $y(\sqrt{15}) = y(-\sqrt{15})$ en dus snijdt K zichzelf in het punt $(11, \sqrt{15}\ln(4 + \sqrt{15}))$.
Dit snijpunt ligt op de lijn $x = 11$, dus K snijdt zichzelf op de lijn $x = 11$.

b $\int y\,dx = \int t\ln(t+4)\,d(t^2 - 4) = \int t\ln(t+4) \cdot 2t\,dt = \int 2t^2\ln(t+4)\,dt$
De GR geeft $\int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} 2x^2\ln(x+4)\,dx = 67{,}636...$
Dus oppervlakte $\approx 67{,}64$.

54 **a** $x = 0$ geeft $4\sin(t) = 0$
$t = k \cdot \pi$
$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(4, 4)$ en $t = \frac{1}{4}\pi$ geeft het punt $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$.
Dus V wordt in positieve richting omlopen.
$O(V) = \int_{t=\pi}^{t=0} y\,dx = \int_{t=\pi}^{t=0} (4\sin(t) - 2\sin(2t))\,d\,4\sin(t) = \int_{\pi}^{0}(4\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t)) \cdot 4\cos(t)\,dt$
$= \int_{\pi}^{0}(16\sin(t)\cos(t) - 16\sin(t)\cos^2(t))\,dt = \int_{\pi}^{0}16\sin(t)\cos(t)\,dt - \int_{\pi}^{0}16\sin(t)\cos^2(t)\,dt$
$= \int_{\pi}^{0}8\sin(2t)\,dt + \int_{t=\pi}^{t=0} 16\cos^2(t)\,d\cos(t) = [-4\cos(2t)]_{\pi}^{0} + [5\frac{1}{3}\cos^3(t)]_{\pi}^{0}$
$= -4\cos(0) + 4\cos(2\pi) + 5\frac{1}{3}\cos^3(0) - 5\frac{1}{3}\cos^3(\pi) = -4 + 4 + 5\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 5\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = 10\frac{2}{3}$

b x is maximaal 4 voor $t = \frac{1}{2}\pi$.



$$I(L) = \pi \int_{t=\pi}^{t=\frac{1}{2}\pi} y^2\,\mathrm{d}x - \pi \int_{t=0}^{t=\frac{1}{2}\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{t=\pi}^{t=\frac{1}{2}\pi} y^2\,\mathrm{d}x + \pi \int_{t=\frac{1}{2}\pi}^{t=0} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{t=\pi}^{t=0} y^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_{t=\pi}^{t=0} (4\sin(t) - 2\sin(2t))^2\,\mathrm{d}\,4\sin(t) = \pi \int_{\pi}^{0} (4\sin(t) - 2\sin(2t))^2 \cdot 4\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

De GR geeft $\pi \int_{\pi}^{0} (4\sin(x) - 2\sin(2x))^2 \cdot 4\cos(x)\,\mathrm{d}x = 157{,}913...$

Dus $I(L) \approx 157{,}91$.

Gemengde opgaven

13 Limieten en asymptoten

Bladzijde 218

1 **a** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} x = 3$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2a - x^2}{(x + a)(x - a)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2a - x^2}{x^2 - a^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{2a}{x^2} - 1}{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \dfrac{0 - 1}{1 - 0} = -1$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{3 + \ln(x^4)} = \lim\limits_{\ln(x) \to \infty} \dfrac{\frac{1}{2}\ln(x)}{3 + 4\ln(x)} = \lim\limits_{\ln(x) \to \infty} \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{\ln(x)} + 4} = \dfrac{\frac{1}{2}}{0 + 4} = \frac{1}{8}$

d $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^{2x} - e^6}{e^3 - e^x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(e^x - e^3)(e^x + e^3)}{-(e^x - e^3)} = \lim\limits_{x \to 3} -(e^x + e^3) = -(e^3 + e^3) = -2e^3$

e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{2x+2}}{e^{2x} + 2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{e^{2x+2}}{e^{2x}}}{1 + \frac{2}{e^{2x}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^2}{1 + \frac{2}{e^{2x}}} = \dfrac{e^2}{1 + 0} = e^2$

f $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{2 + \ln(x^3)} = \lim\limits_{\ln(x) \to -\infty} \dfrac{\ln(x^{-1})}{2 + 3\ln(x)} = \lim\limits_{\ln(x) \to -\infty} \dfrac{-\ln(x)}{2 + 3\ln(x)} = \lim\limits_{\ln(x) \to -\infty} \dfrac{-1}{\frac{2}{\ln(x)} + 3} = \dfrac{-1}{0 + 3} = -\frac{1}{3}$

2 **a** $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 1)}$

Er is een perforatie als $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 2}{x - 1} = \dfrac{-1 + 2}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}$

Dus de perforatie is $A(-1, -\frac{1}{2})$.

$g(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 3)}$

Er is een perforatie als $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{3 + 1} = \frac{1}{4}$

Dus de perforatie is $B(3, \frac{1}{4})$.

Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{4} - -\frac{1}{2}}{3 - -1} = \dfrac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{3}{16}$.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{16}x + b \\ \text{door } A(-1, -\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{16} + b = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{16} \end{array}$

Dus k: $y = \frac{3}{16}x - \frac{5}{16}$

$16y = 3x - 5$

$3x - 16y = 5$

b $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$ mits $x \neq -1$ geeft

$f'(x) = \dfrac{(x-1)\cdot 1-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rc}_l = f'(0) = \dfrac{-3}{(-1)^2} = -3 \\ f(0) = -2, \text{ dus } C(0, -2) \end{array}\right\} l\text{: } y = -3x-2$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $y = 1$.

$g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{x-3}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{1}{x+1}$ mits $x \neq 3$

$x+1=0$ geeft $x=-1$

Dus de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x=-1$.

Dus $D(-1, 1)$.

$x=-1$ en $y=-3x-2$ geeft $y=1$

Dus D ligt op l.

3 **a** $f_3(x) = \dfrac{4x^2+4x-15}{2x+3} = \dfrac{2x(2x+3)-6x+4x-15}{2x+3} = 2x + \dfrac{-2x-15}{2x+3} = 2x + \dfrac{-(2x+3)+3-15}{2x+3}$

$= 2x-1-\dfrac{12}{2x+3}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{12}{2x+3} = 0$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = 2x-1$.

$2x+3=0 \wedge 4x^2+4x-15 \neq 0$ geeft $x = -1\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x=-1\frac{1}{2}$.

b $f_a(x) = \dfrac{4x^2+4x-15}{2x+a} = \dfrac{2x(2x+a)-2ax+4x-15}{2x+a} = 2x + \dfrac{-2ax+4x-15}{2x+a}$

Voor scheve asymptoot $y = 2x$ moet gelden dat $-2a=-4$, dus $a=2$.

Want dan is $f_a(x) = 2x - \dfrac{15}{2x+a}$ en $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{15}{2x+a} = 0$.

c $f_a(x) = \dfrac{4x^2+4x-15}{2x+a} = \dfrac{(2x-3)(2x+5)}{2x+a}$

Er is een perforatie als $a=-3$ en als $a=5$.

$$\lim_{x\to 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim_{x\to 1\frac{1}{2}} \frac{(2x-3)(2x+5)}{2x-3} = \lim_{x\to 1\frac{1}{2}} (2x+5) = 3+5=8$$

Voor $a=-3$ is de perforatie $(1\frac{1}{2}, 8)$.

$$\lim_{x\to -2\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim_{x\to -2\frac{1}{2}} \frac{(2x-3)(2x+5)}{2x+5} = \lim_{x\to -2\frac{1}{2}} (2x-3) = -5-3=-8$$

Voor $a=5$ is de perforatie $(-2\frac{1}{2}, -8)$.

4 **a** $2e^{-x}-4=0 \wedge e^x+1 \neq 0$

$2e^{-x}=4 \wedge e^x \neq -1$

$e^{-x}=2$

$-x=\ln(2)$

$x=-\ln(2)$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x=-\ln(2)$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x+1}{2e^{-x}-4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}+e^x}{2-4e^x} = \frac{0+0}{2-0} = 0$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y=0$.

b $f(x) = -1$ geeft $\dfrac{e^x + 1}{2e^{-x} - 4} = -1$

$e^x + 1 = -2e^{-x} + 4$

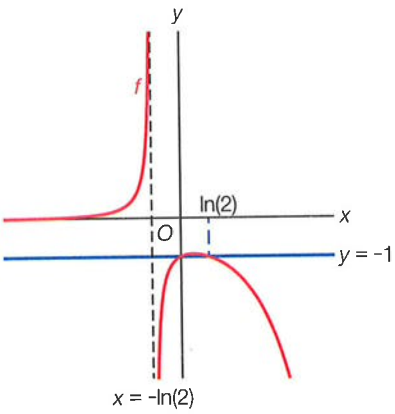
$e^x - 3 + 2e^{-x} = 0$

$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

$(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$

$e^x = 1 \vee e^x = 2$

$x = 0 \vee x = \ln(2)$



$f(x) \geq -1$ geeft $x < -\ln(2) \vee 0 \leq x \leq \ln(2)$

Bladzijde 219

5 **a** $\lim\limits_{x \to 2} f_{p,q}(x)$ bestaat als $\lim\limits_{x \uparrow 2}(x^2 + 4px) = \lim\limits_{x \downarrow 2}(2x + q)$

$4 + 8p = 4 + q$

$q = 8p$

$\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$ bestaat als $\lim\limits_{x \uparrow 3}(2x + q) = \lim\limits_{x \downarrow 3}(x^3 - 4x + p)$

$6 + q = 27 - 12 + p$

$q = p + 9$

$8p = p + 9$

$7p = 9$

$p = 1\frac{2}{7}$

$q = 1\frac{2}{7} + 9 = 10\frac{2}{7}$

b $A(3, 10)$ is een perforatie als $\lim\limits_{x \uparrow 3}(2x + q) = 10 \wedge \lim\limits_{x \downarrow 3}(x^3 - 4x + p) = 10$

$6 + q = 10 \wedge 27 - 12 + p = 10$

$q = 4 \wedge p = -5$

c $f_{p,q}$ heeft een extreme waarde voor $x = -1$ als $\dfrac{-4p}{2} = -1$

$p = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$ bestaat als $q = p + 9$, dus $q = \frac{1}{2} + 9 = 9\frac{1}{2}$.

6 **a** De grafiek heeft een knik voor $x = p$.
De top met horizontale raaklijn ligt rechts van de knik.
Rechts van de knik is $x > p$, dus $f_p(x) = (x - p)(e^x - 3)$ en

$f_p'(x) = 1 \cdot (e^x - 3) + (x - p) \cdot e^x = (x - p + 1)e^x - 3.$

$f_p'(-1) = 0$ geeft $(-1 - p + 1)e^{-1} - 3 = 0$

$-pe^{-1} = 3$

$p = -3e$

b $f_p'(x) = \begin{cases} (x-p+1)e^x - 3 \text{ voor } x > p \\ -(x-p+1)e^x + 3 \text{ voor } x < p \end{cases}$

$\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \uparrow p}(-(x-p+1)e^x + 3) = -e^p + 3$

$\lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow p}((x-p+1)e^x - 3) = e^p - 3$

Geen knik als $\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) = \lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x)$, dus als $-e^p + 3 = e^p - 3$

$2e^p = 6$

$e^p = 3$

$p = \ln(3)$

c $f_2(x) = |x-2|(e^x - 3) = \begin{cases} (x-2)(e^x-3) \text{ voor } x \geq 2 \\ -(x-2)(e^x-3) \text{ voor } x < 2 \end{cases}$

$f_2'(x) = \begin{cases} (x-1)e^x - 3 \text{ voor } x > 2 \\ -(x-1)e^x + 3 \text{ voor } x < 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \uparrow 2} f_2'(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2}(-(x-1)e^x + 3) = -e^2 + 3$

$\lim\limits_{x \downarrow 2} f_2'(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2}((x-1)e^x - 3) = e^2 - 3$

$\text{rc}_k = \tan(\alpha) = -e^2 + 3$ geeft $\alpha = -77{,}1...^\circ$

$\text{rc}_l = \tan(\beta) = e^2 - 3$ geeft $\beta = 77{,}1...^\circ$

$\beta - \alpha \approx 154^\circ$

$\angle(k, l) \approx 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ$

d $\angle(k, l) = 90^\circ$ geeft $\lim\limits_{x \uparrow p} f_p'(x) \cdot \lim\limits_{x \downarrow p} f_p'(x) = -1$

$(-e^p + 3) \cdot (e^p - 3) = -1$

$(e^p - 3)^2 = 1$

$e^p - 3 = 1 \vee e^p - 3 = -1$

$e^p = 4 \vee e^p = 2$

$p = \ln(4) \vee p = \ln(2)$

7 **a** $e^{\frac{1}{x}} - a = 0 \wedge 2e^{\frac{1}{x}} \neq 0$

$e^{\frac{1}{x}} = a$

$\frac{1}{x} = \ln(a)$

$x = \frac{1}{\ln(a)}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{\ln(a)}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a} = \frac{2e^0}{e^0 - a} = \frac{2}{1-a}$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{2}{1-a}$.

Het snijpunt van de asymptoten in het punt $\left(\frac{1}{\ln(a)}, \frac{2}{1-a}\right)$.

Dit punt ligt op de lijn $y = x - 1$ geeft $\frac{2}{1-a} = \frac{1}{\ln(a)} - 1$.

Voer in $y_1 = \frac{2}{1-x}$ en $y_2 = \frac{1}{\ln(x)} - 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 5{,}700...$

Dus $a \approx 5{,}70$.

b $f_a(x) = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a}$ geeft $f_a'(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}} - a) \cdot 2\,e^{\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2} - 2\,e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{x^2}}{(e^{\frac{1}{x}} - a)^2} = \dfrac{2\,e^{\frac{2}{x}} - 2a\,e^{\frac{1}{x}} - 2\,e^{\frac{2}{x}}}{-x^2 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - a)^2} = \dfrac{2a\,e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - a)^2}$

$f_a'(1) - 4$ geeft $\dfrac{2a\,e}{(e - a)^2} = 4$

$2(e - a)^2 = a\,e$

$2(e^2 - 2a\,e + a^2) = a\,e$

$2\,e^2 - 4a\,e + 2a^2 = a\,e$

$2a^2 - 5a\,e + 2\,e^2 = 0$

$D = (-5\,e)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2\,e^2 = 9\,e^2$

$a = \dfrac{5\,e + 3\,e}{4} = 2\,e \vee a = \dfrac{5\,e - 3\,e}{4} = \frac{1}{2}e$

c Voor f_a geldt $y = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a}$, dus voor f_a^{inv} geldt $x = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{y}}}{e^{\frac{1}{y}} - a}$.

$x = \dfrac{2\,e^{\frac{1}{y}}}{e^{\frac{1}{y}} - a}$ geeft $x(e^{\frac{1}{y}} - a) = 2\,e^{\frac{1}{y}}$

$x\,e^{\frac{1}{y}} - 2\,e^{\frac{1}{y}} = ax$

$e^{\frac{1}{y}}(x - 2) = ax$

$e^{\frac{1}{y}} = \dfrac{ax}{x - 2}$

$\dfrac{1}{y} = \ln\left(\dfrac{ax}{x - 2}\right)$

$y = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{ax}{x - 2}\right)}$

Dus $f_a^{\text{inv}}(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{ax}{x - 2}\right)}$.

Bladzijde 220

8 **a** De grafiek van $f_a(x) = \dfrac{ax + 4}{2x - 3}$ heeft een perforatie als $2x - 3 = 0 \wedge ax + 4 = 0$.

$2x - 3 = 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$

$ax + 4 = 0$ en $x = 1\frac{1}{2}$ geeft $1\frac{1}{2}a + 4 = 0$

$1\frac{1}{2}a = -4$

$a = -2\frac{2}{3}$

b De grafieken van f_a en f_a^{inv} snijden elkaar op de lijn $y = x$, dus $f_a(4) = 4$

$\dfrac{4a + 4}{8 - 3} = 4$

$4a + 4 = 20$

$4a = 16$

$a = 4$

c $\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax + 4}{2x - 3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a + \frac{4}{x}}{2 - \frac{3}{x}} = \dfrac{a + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}a$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{1}{2}a$.

$2x - 3 = 0 \wedge ax + 4 \neq 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2} \wedge a \neq -2\frac{2}{3}$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{2}$.

Het snijpunt $(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ ligt op de parabool $y = x^2$ als $\frac{1}{2}a = (1\frac{1}{2})^2$

$\frac{1}{2}a = 2\frac{1}{4}$

$a = 4\frac{1}{2}$

9 **a** $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2 - |x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{2 - (x-1)} = \dfrac{x^2 - x}{3 - x} \text{ voor } x \geq 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{2 - (-x+1)} = \dfrac{x^2 - x}{x+1} \text{ voor } x < 1 \end{cases}$

noemer = 0 voor $x \geq 1$ geeft $3 - x = 0$, dus $x = 3$.
noemer = 0 voor $x < 1$ geeft $x + 1 = 0$, dus $x = -1$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 3$ en $x = -1$.

$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{3 - x} = \dfrac{-x(3-x) + 3x - x}{3 - x} = -x + \dfrac{2x}{3-x} = -x + \dfrac{-2(3-x) + 6}{3 - x} = -x - 2 + \dfrac{6}{3-x}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6}{3-x} = 0$, dus de lijn $y = -x - 2$ is scheve asymptoot.

$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1} = \dfrac{x(x+1) - x - x}{x+1} = x - \dfrac{2x}{x+1} = x - \dfrac{2(x+1) - 2}{x+1} = x - 2 + \dfrac{2}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$, dus de lijn $y = x - 2$ is scheve asymptoot.

b $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot (2x-1) - (x^2 - x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 - x + 2x - 1 - x^2 + x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2x - 1 = 0$
$(x+1)^2 - 1 - 1 = 0$
$(x+1)^2 = 2$
$x + 1 = \sqrt{2} \vee x + 1 = -\sqrt{2}$
$x = -1 + \sqrt{2} \vee x = -1 - \sqrt{2}$
vold. niet

$y_A = f(-1 - \sqrt{2}) = \dfrac{(-1-\sqrt{2})^2 - (-1 - \sqrt{2})}{-1 - \sqrt{2} + 1} = \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 + \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 3$

c Voer in $y_1 = \dfrac{x^2 - x}{2 - |x-1|}$.
De optie maximum geeft $x \approx -2{,}41$ en $y \approx -5{,}83$ en ook $x \approx 5{,}45$ en $y \approx -9{,}90$.
De optie minimum geeft $x \approx 0{,}41$ en $y \approx -0{,}17$.
$f(x) = p$ heeft twee oplossingen voor $-9{,}90 < p < -5{,}83 \vee p > -0{,}17$.

d $x < 1$ en $f(x) = 2$ geeft $\dfrac{x^2 - x}{x+1} = 2$
$x^2 - x = 2x + 2$
$x^2 - 3x - 2 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -2 = 17$
$x = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2} \vee x = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$
vold. niet

$x \geq 1$ en $f(x) = 2$ geeft $\dfrac{x^2 - x}{3 - x} = 2$
$x^2 - x = 6 - 2x$
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x-2)(x+3) = 0$
$x = 2 \vee x = -3$
vold. niet

$f(x) \leq 2$ geeft $x < -1 \vee \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2} \leq x \leq 2 \vee x > 3$

10 **a** $f_a(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x} = \dfrac{x(x^2 - 2x) + 2x^2 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x} = x + \dfrac{(a+2)x^2 + 4}{x^2 - 2x} =$

$= x + \dfrac{(a+2)(x^2 - 2x) + 2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x} = x + a + 2 + \dfrac{2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2ax + 4x + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2a}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{0 + 0 + 0}{1 - 0} = 0$$

Dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + a + 2$.

$A(2, 3)$ op de scheve asymptoot geeft $2 + a + 2 = 3$

$a = -1$

b $f_a(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x}$ geeft $f_a'(x) = \dfrac{(x^2 - 2x) \cdot (3x^2 + 2ax) - (x^3 + ax^2 + 4) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$

Top op de lijn $x = 1$ geeft $f_a'(1) = 0$

$$\frac{(1-2)(3 + 2a) - (1 + a + 4)(2 - 2)}{(1-2)^2} = 0$$

$-3 - 2a - 0 = 0$

$-2a = 3$

$a = -1\frac{1}{2}$

c De grafiek van $f_a(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x}$ heeft een perforatie als $x^2 - 2x = 0 \wedge x^3 + ax^2 + 4 = 0$.

$x^2 - 2x = 0$ geeft $x(x - 2) = 0$

$x = 0 \vee x = 2$

$x = 0$ en $x^3 + ax^2 + 4 = 0$ geeft $4 = 0$, dus voldoet niet.

$x = 2$ en $x^3 + ax^2 + 4 = 0$ geeft $8 + 4a + 4 = 0$

$4a = -12$

$a = -3$

Dus voor $a = -3$ heeft de grafiek van f_a een perforatie.

Echter $f_{-3}(x) = x - 3 + 2 + \dfrac{2 \cdot -3x + 4x + 4}{x^2 - 2x} = x - 1 + \dfrac{-2x + 4}{x^2 - 2x}$.

Dus de grafiek van f_{-3} is geen rechte lijn.

Dus voor geen enkele waarde van a is de grafiek een rechte lijn met een perforatie.

11 **a** $\ln(x^2) + 1 = 0 \wedge \ln(x^2) - 1 \neq 0$

$\ln(x^2) = -1 \wedge \ln(x^2) \neq 1$

$x^2 = e^{-1} \wedge x^2 \neq e$

$x = e^{-\frac{1}{2}} \vee x = -e^{-\frac{1}{2}}$

Dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = e^{-\frac{1}{2}}$ en $x = -e^{-\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

b Voor $x > 0$ is $f(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1}$ en voor $x < 0$ is $f(x) = \dfrac{2\ln(-x) - 1}{2\ln(-x) + 1}$.

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{2\ln(x) - 1}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(x)}}{2 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{2\ln(-x) - 1}{2\ln(-x) + 1} = \lim_{\ln(-x) \to -\infty} \frac{2\ln(-x) - 1}{2\ln(-x) + 1} = \lim_{\ln(-x) \to -\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln(-x)}}{2 + \frac{1}{\ln(-x)}} = \frac{2 - 0}{2 + 0} = 1$$

Dus de perforatie is het punt $(0, 1)$.

c $f(x) = \frac{3}{5}$ geeft $\frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1} = \frac{3}{5}$

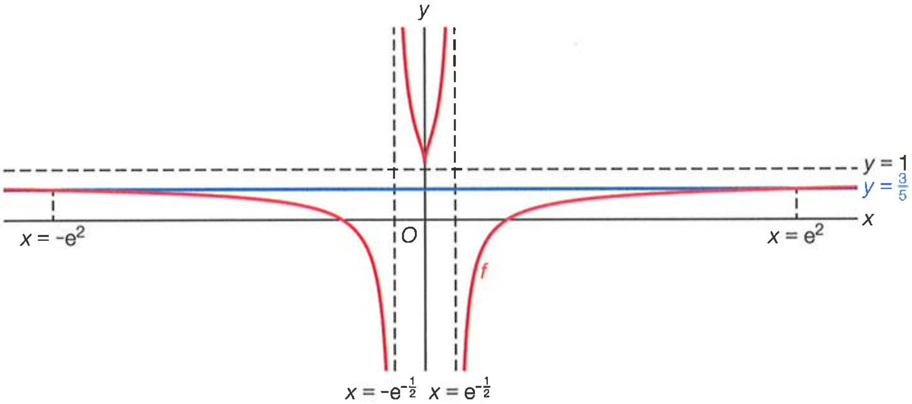
$3\ln(x^2) + 3 = 5\ln(x^2) - 5$

$-2\ln(x^2) = -8$

$\ln(x^2) = 4$

$x^2 = e^4$

$x = e^2 \vee x = -e^2$



$f(x) \geq \frac{3}{5}$ geeft $x \leq -e^2 \vee -e^{-\frac{1}{2}} < x < e^{-\frac{1}{2}} \vee x \geq e^2$

d $f(x) = \frac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(\ln(x^2) + 1) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x - (\ln(x^2) - 1) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{(\ln(x^2) + 1)^2} = \frac{(\ln(x^2) + 1) \cdot 2 - (\ln(x^2) - 1) \cdot 2}{x(\ln(x^2) + 1)^2}$

$= \frac{2\ln(x^2) + 2 - 2\ln(x^2) + 2}{x(\ln(x^2) + 1)^2} = \frac{4}{x(\ln(x^2) + 1)^2}$

Stel $y = ax + b$ met $a = f'(e) = \frac{4}{e(\ln(e^2) + 1)^2} = \frac{4}{e(2 + 1)^2} = \frac{4}{9e}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{4}{9e}x + b \\ f(e) = \frac{1}{3}, \text{ dus } A(e, \frac{1}{3}) \end{array}\right\} \frac{4}{9e} \cdot e + b = \frac{1}{3}$$

$\frac{4}{9} + b = \frac{1}{3}$

$b = -\frac{1}{9}$

$y = \frac{4}{9e}x - \frac{1}{9}$ snijden met de x-as geeft $\frac{4}{9e}x - \frac{1}{9} = 0$

$4x - e = 0$

$4x = e$

$x = \frac{1}{4}e$

Dus $B(\frac{1}{4}e, 0)$.

14 Meetkunde toepassen

Bladzijde 221

12 **a** Een parametervoorstelling van c is $x = 3\cos(t) \wedge y = 6 + 3\sin(t)$ met $-\pi \leq t \leq 0$.
Het midden Q van $B(3, 0)$ en $P(3\cos(t), 6 + 3\sin(t))$ is
$Q(\frac{1}{2}(3 + 3\cos(t), \frac{1}{2}(0 + 6 + 3\sin(t))) = Q(1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\cos(t), 3 + 1\frac{1}{2}\sin(t))$.
$-\pi \leq t \leq 0$ geeft $-1 \leq \sin(t) \leq 0$, dus $1\frac{1}{2} \leq 3 + 1\frac{1}{2}\sin(t) \leq 3$, dus $1\frac{1}{2} \leq y_Q \leq 3$.
De baan van Q is de kromme met vergelijking $(x - 1\frac{1}{2})^2 + (y - 3)^2 = 2\frac{1}{4} \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$

$x^2 - 3x + 2\frac{1}{4} + y^2 - 6y + 9 = 2\frac{1}{4} \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$

$x^2 + y^2 - 3x - 6y + 9 = 0 \wedge 1\frac{1}{2} \leq y \leq 3$

Dus $a = -3$, $b = -6$, $c = 9$, $d = 1\frac{1}{2}$ en $e = 3$.

b De totale massa is $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10$.

$y_{Z_1} = \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot y_O + 1 \cdot y_A + 1 \cdot y_B + 2 \cdot y_C + 2 \cdot y_D + 3 \cdot y_E)$

$= \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3) = \frac{1}{10} \cdot 33 = 3\frac{3}{10}$

c Het zwaartepunt (0, 3) van het vierkant heeft massa 36.

De y-coördinaat van het zwaartepunt van de halve cirkel is $6 - \frac{4}{3\pi} \cdot 3 = 6 - \frac{4}{\pi}$.

De massa van het zwaartepunt van de halve cirkel is $\frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = 4\frac{1}{2}\pi$.

De totale massa is $36 - 4\frac{1}{2}\pi$.

$$y_{Z_2} = \frac{1}{36 - 4\frac{1}{2}\pi} \cdot \left(36 \cdot 3 - 4\frac{1}{2}\pi \cdot \left(6 - \frac{4}{\pi}\right)\right) \approx 1{,}88$$

13 **a** $\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\frac{2}{3}\\1\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ en $Z(1\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3})$.

Dus het zwaartepunt Z van driehoek ABC ligt op de lijn $y = x$.

b $M(\frac{1}{2}(-1 + 4), \frac{1}{2}(-1 + 1)) = M(1\frac{1}{2}, 0)$, dus $c : (x - 1\frac{1}{2})^2 + y^2 = r^2$.

c door $A(-1, -1)$ geeft c: $(x - 1\frac{1}{2})^2 + y^2 = 7\frac{1}{4}$.

$\vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{s}_{AC} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ geeft AC: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

AC snijden met c geeft $(-1 + t - 1\frac{1}{2})^2 + (-1 + 2t)^2 = 7\frac{1}{4}$

$(t - 2\frac{1}{2})^2 + (-1 + 2t)^2 = 7\frac{1}{4}$

$t^2 - 5t + 6\frac{1}{4} + 1 - 4t + 4t^2 = 7\frac{1}{4}$

$5t^2 - 9t = 0$

$t(5t - 9) = 0$

$t = 0 \vee 5t - 9 = 0$

$t = 0 \vee t = 1\frac{4}{5}$

$t = 0$ geeft punt A

$t = 1\frac{4}{5}$ geeft $x = -1 + 1\frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}$ en $y = -1 + 1\frac{4}{5} \cdot 2 = 2\frac{3}{5}$

Dus $D(\frac{4}{5}, 2\frac{3}{5})$.

c Noem in driehoek ABC de hoogte die bij de zijde AB hoort h_1.

Noem in driehoek BMP de hoogte die bij de zijde BM hoort h_2.

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_1$

$O(\triangle BMP) = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot h_2 = \frac{1}{4}AB \cdot h_2$

$O(\triangle ABC) = 5 \cdot O(\triangle BMP)$ geeft $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_1 = 5 \cdot \frac{1}{4}AB \cdot h_2$

$h_1 = \frac{5}{2}h_2$

$h_2 = \frac{2}{5}h_1$

Dus ook $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

$$\vec{p} = \vec{b} + \overrightarrow{BP} = \vec{b} + \tfrac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \tfrac{2}{5}(\vec{c} - \vec{b}) = \tfrac{3}{5}\vec{b} + \tfrac{2}{5}\vec{c} = \tfrac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \tfrac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\frac{1}{5}\\2\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

Dus $P(3\frac{1}{5}, 2\frac{3}{5})$.

Bladzijde 222

14 **a** $y = 0$ geeft $x^2 - 10x + 9 = 0$

$(x - 1)(x - 9) = 0$

$x = 1 \vee x = 9$

Dus $A(1, 0)$ en $B(9, 0)$.

$y = 7$ geeft $x^2 + 49 - 10x - 42 + 9 = 0$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x - 2)(x - 8) = 0$

$x = 2 \vee x = 8$

Dus $C(2, 7)$ en $D(8, 7)$.

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$

$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 9 = 0$

$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 9 = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Dus $M(5, 3)$.

De totale massa is $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

$\vec{z} = \frac{1}{16}(1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{d} + 6 \cdot \vec{m})$

$= \frac{1}{16}\left(1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{16}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}18\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\21\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}32\\28\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}30\\18\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix}87\\67\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\frac{7}{16}\\4\frac{3}{16}\end{pmatrix}$

Dus $Z(5\frac{7}{16}, 4\frac{3}{16})$.

b $x_M = 5$ en $r_c = 5$, dus de cirkel raakt de y-as.
Dus een van de raaklijnen heeft vergelijking $x = 0$.
De andere raaklijn heeft een vergelijking van de vorm $y = ax$ oftewel $ax - y = 0$.

$d(M, \text{raaklijn}) = r_c$ geeft $\dfrac{|5a - 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5$

$|5a - 3| = 5\sqrt{a^2 + 1}$

$25a^2 - 30a + 9 = 25a^2 + 25$

$-30a = 16$

$a = -\frac{8}{15}$

Dus de andere raaklijn heeft vergelijking $y = -\frac{8}{15}x$.

c Stel van deze cirkel de straal gelijk aan r.
Dan is $N(r, r)$.
Zie de figuur hiernaast.
De stelling van Pythagoras geeft

$(5 - r)^2 + (3 - r)^2 = (r + 5)^2$

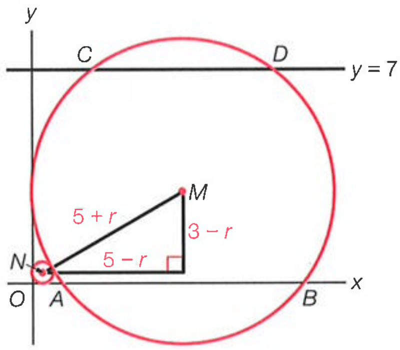
$25 - 10r + r^2 + 9 - 6r + r^2 = r^2 + 10r + 25$

$r^2 - 26r + 9 = 0$

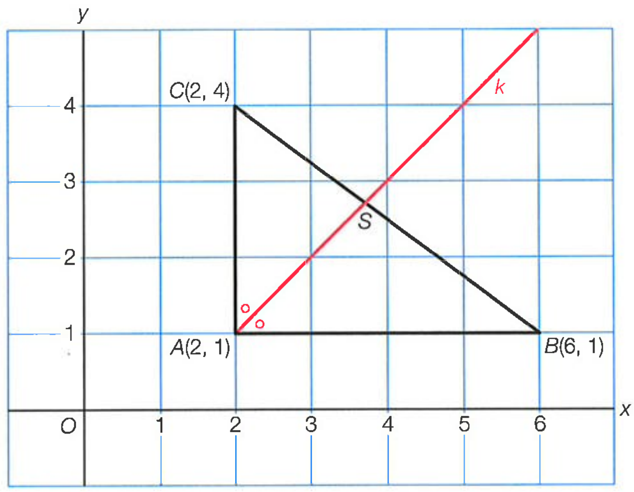
$D = (-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 640$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{640} = 8\sqrt{10}$

$r = \dfrac{26 + 8\sqrt{10}}{2} = 13 + 4\sqrt{10} \vee r = 13 - 4\sqrt{10}$

De straal is $13 - 4\sqrt{10}$.



15 **a**



$k: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\text{rc}_{BC} = \dfrac{1 - 4}{6 - 2} = \dfrac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

$\left.\begin{array}{l} BC: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } B(6, 1) \end{array}\right\}$ $-\frac{3}{4} \cdot 6 + b = 1$

$-4\frac{1}{2} + b = 1$

$b = 5\frac{1}{2}$

Dus $BC: y = -\frac{3}{4}x + 5\frac{1}{2}$.

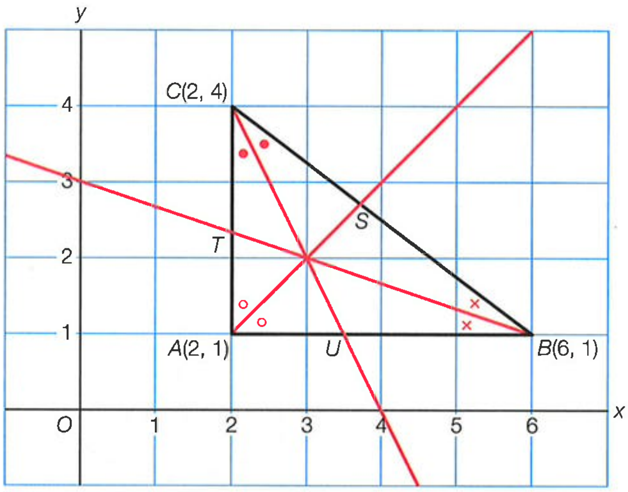
k snijden met BC geeft $1 + t = -\frac{3}{4}(2 + t) + 5\frac{1}{2}$
$4 + 4t = -3(2 + t) + 22$
$4 + 4t = -6 - 3t + 22$
$7t = 12$
$t = 1\frac{5}{7}$

$t = 1\frac{5}{7}$ geeft $x = 2 + 1\frac{5}{7} = 3\frac{5}{7}$ en $y = 1 + 1\frac{5}{7} = 2\frac{5}{7}$.
Dus $S(3\frac{5}{7}, 2\frac{5}{7})$.

b $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$
$BS = \sqrt{(3\frac{5}{7} - 6)^2 + (2\frac{5}{7} - 1)^2} = \sqrt{(-\frac{16}{7})^2 + (\frac{12}{7})^2} = \sqrt{\frac{256}{49} + \frac{144}{49}} = \sqrt{\frac{400}{49}} = \frac{20}{7}$
$CS = 5 - \frac{20}{7} = \frac{15}{7}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BS}{CS} = \dfrac{\frac{20}{7}}{\frac{15}{7}} = \dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \dfrac{BS}{CS} = \dfrac{AB}{AC}$$

c



$p = 4$ en $q = 5$ geeft $\vec{t} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{9} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\frac{1}{3}\end{pmatrix}$
Dus $T(2, 2\frac{1}{3})$.

d $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$
Dus $U(3\frac{1}{2}, 1)$.

Bladzijde 223

16 **a** $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-4\frac{1}{2}\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{22\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10}$

$\vec{r}_b = \overrightarrow{BA} + 1\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\frac{1}{2}\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix} + 1\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_b = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en b: $x + y = 4$.

$\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}6\frac{1}{2}\\4\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\frac{1}{6}\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ en $Z(2\frac{1}{6}, 1\frac{1}{2})$.
$2\frac{1}{6} + 1\frac{1}{2} = 4$ klopt niet, dus Z ligt niet op b.

b b snijden met de y-as geeft het punt $D(0, 4)$.
$\vec{n}_m = \vec{r}_{BC} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, dus m: $-x + 3y = c$.
m door het punt $(\frac{1}{2}(4 + 3), \frac{1}{2}(0 + 3)) = (3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ geeft $c = -3\frac{1}{2} + 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 1$.
Dus m: $-x + 3y = 1$.
m snijden met de y-as geeft het punt $E(0, \frac{1}{3})$.
Dus $DE = 4 - \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$.

c De straal van de cirkel is $r = d(O, A) = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.
Stel $y = ax + b$.
Door $F(3, 1)$ geeft $3a + b = 1$ oftewel $b = 1 - 3a$, dus $y = ax + 1 - 3a$ oftewel $ax - y + 1 - 3a = 0$.

$d(A, \text{raaklijn}) = r$ geeft $\frac{|-\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{2} + 1 - 3a|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2\frac{1}{2}}$

$|-3\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}| = \sqrt{2\frac{1}{2}a^2 + 2\frac{1}{2}}$

$|-7a - 1| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$49a^2 + 14a + 1 = 10a^2 + 10$

$39a^2 + 14a - 9 = 0$

$D = 14^2 - 4 \cdot 39 \cdot -9 = 1600$

$a = \frac{-14+40}{78} = \frac{1}{3} \vee a = \frac{-14-40}{78} = -\frac{9}{13}$

$a = \frac{1}{3}$ geeft de raaklijn $y = \frac{1}{3}x + 1 - 3 \cdot \frac{1}{3}$ oftewel $y = \frac{1}{3}x$.
$a = -\frac{9}{13}$ geeft de raaklijn $y = -\frac{9}{13}x + 1 - 3 \cdot -\frac{9}{13}$ oftewel $y = -\frac{9}{13}x + 3\frac{1}{13}$.

17 **a** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0 \end{cases}$ $-$

$5x - 15 = 0$

$5x = 15$

$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0 \end{array}\right\} 9 + y^2 - 15 - 2y + 6 = 0$

$y^2 - 2y = 0$

$y(y-2) = 0$

$y = 0 \vee y = 2$

Dus $A(3, 0)$ en $B(3, 2)$.

b $x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0$

$x^2 - 5x + y^2 - 2y + 6 = 0$

$(x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 + 6 = 0$

$(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = 1\frac{1}{4}$

Dus $M(2\frac{1}{2}, 1)$ en $r_c = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$

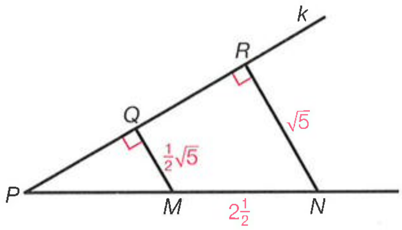
$x^2 - 10x + y^2 - 2y + 21 = 0$

$(x-5)^2 - 25 + (y-1)^2 - 1 + 21 = 0$

$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 5$

Dus $N(5, 1)$ en $r_d = \sqrt{5}$.

De punten Q en R zijn raakpunten.
Zie de figuur hiernaast.
$\triangle PMQ \sim \triangle PNR$ en $NR = 2MQ$, dus
$PN = 2PM$ geeft $PM = 2\frac{1}{2}$.
Dus $P(0, 1)$.



c Stel k: $y = ax + 1$ oftewel k: $ax - y + 1 = 0$.

$d(N, k) = r_d$ geeft $\frac{|5a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$

$|5a| = \sqrt{5a^2 + 5}$

$25a^2 = 5a^2 + 5$

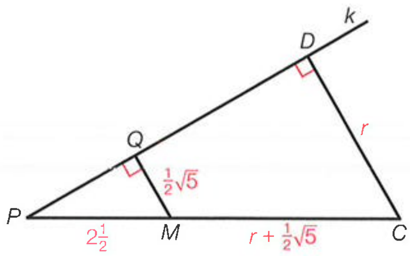
$20a^2 = 5$

$a^2 = \frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$

Dus k_1: $y = \frac{1}{2}x + 1$ en k_2: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

d Het middelpunt van deze cirkel is C en de straal is r.
De punten Q en D zijn raakpunten.
Zie de figuur hiernaast.



$\triangle PMQ \sim \triangle PCD$ geeft

$$\frac{PM}{PC}=\frac{MQ}{CD}$$

$$\frac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}+r+\frac{1}{2}\sqrt{5}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}}{r}$$

$$\frac{5}{5+2r+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2r}$$

$10r=5\sqrt{5}+2r\sqrt{5}+5$

$10r-2r\sqrt{5}=5\sqrt{5}+5$

$(10-2\sqrt{5})r=5\sqrt{5}+5$

$$r=\frac{5\sqrt{5}+5}{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{10+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}=\frac{50\sqrt{5}+50+50+10\sqrt{5}}{100-20}=\frac{100+60\sqrt{5}}{80}=1\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\sqrt{5}$$

De gevraagde straal is $1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{5}$.

18 **a** $(t-2)^4=((t-2)^2)^2=(t^2-4t+4)^2=t^4-4t^3+4t^2-4t^3+16t^2-16t+4t^2-16t+16=$
$t^4-8t^3+24t^2-32t+16$

b Substitutie van $x=t^2-4$ en $y=(t-2)^2$ in de cirkelvergelijking geeft

$(t^2-4)^2+((t-2)^2)^2-2(t^2-4)-8(t-2)^2-8=0$

$t^4-8t^2+16+t^4-8t^3+24t^2-32t+16-2t^2+8-8(t^2-4t+4)-8=0$

$t^4-8t^2+16+t^4-8t^3+24t^2-32t+16-2t^2+8-8t^2+32t-32-8=0$

$2t^4-8t^3+6t^2=0$

$2t^2(t^2-4t+3)=0$

$2t^2(t-1)(t-3)=0$

$t=0 \vee t=1 \vee t=3$

$t=0$ geeft $(-4, 4)$

$t=1$ geeft $(-3, 1)$

$t=3$ geeft $(5, 1)$

c $(-3, 1)$ op K geeft $9+1=-3a+b$ oftewel $-3a+b=10$.
$(5, 1)$ op K geeft $25+1=5a+b$ oftewel $5a+b=26$.

$$\begin{cases}-3a+b=10\\5a+b=26\end{cases}\;-$$

$-8a=-16$

$$\left.\begin{array}{l}a=2\\5a+b=26\end{array}\right\}\begin{array}{l}10+b=26\\b=16\end{array}$$

Dus $a=2$ en $b=16$.

d Voor het midden Q van $A(4, -4)$ en $P(t^2-4, (t-2)^2)$ geldt $Q(\frac{1}{2}(4+t^2-4), \frac{1}{2}(-4+(t-2)^2)$

$Q(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}(-4+t^2-4t+4))$

$Q(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^2-2t)$

Substitutie van $x=\frac{1}{2}t^2$ en $y=\frac{1}{2}t^2-2t$ in $x^2+y^2=2xy+8x$ geeft

$(\frac{1}{2}t^2)^2+(\frac{1}{2}t^2-2t)^2=2\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot(\frac{1}{2}t^2-2t)+8\cdot\frac{1}{2}t^2$

$\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2=\frac{1}{2}t^4-2t^3+4t^2$

$\frac{1}{2}t^4-2t^3+4t^2=\frac{1}{2}t^4-2t^3+4t^2$

Dit klopt voor elke waarde van t.
Dus Q ligt op de kromme met vergelijking $x^2+y^2=2xy+8x$.

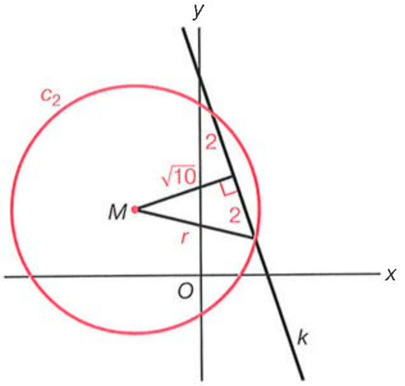
Bladzijde 224

19 **a** k: $3x + y - 6 = 0$

$d(M, k) = \dfrac{|3 \cdot -2 + 2 - 6|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Dus c_1: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

b $d(M, k) = \sqrt{10}$



$r^2 = (\sqrt{10})^2 + 2^2 = 14$

Dus c_2: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 14$.

c m loodrecht op k geeft m: $x - 3y = c$.

$d(M, m) = \sqrt{10}$

$\dfrac{|-2 - 3 \cdot 2 - c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$|-8 - c| = 10$

$-8 - c = 10 \vee -8 - c = -10$

$c = -18 \vee c = 2$

Dus m_1: $x - 3y = -18$ en m_2: $x - 3y = 2$.

d Stel n: $y = ax - 2$ oftewel n: $ax - y - 2 = 0$.

$d(M, n) = \sqrt{10}$

$\dfrac{|-2a - 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|-2a - 4| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$4a^2 + 16a + 16 = 10a^2 + 10$

$-6a^2 + 16a + 6 = 0$

$3a^2 - 8a - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

$a = \dfrac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \dfrac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$

Dus n_1: $y = 3x - 2$ en n_2: $y = -\frac{1}{3}x - 2$.

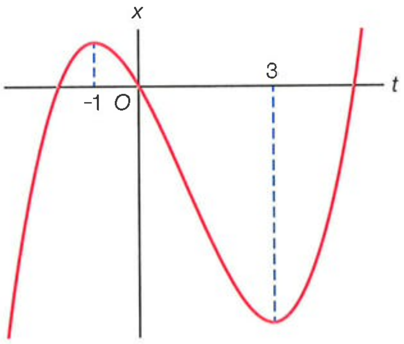
20 **a** $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ geeft $x'(t) = 3t^2 - 6t - 9$

$x'(t) = 0$ geeft $3t^2 - 6t - 9 = 0$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t + 1)(t - 3) = 0$

$t = -1 \vee t = 3$



max. is $x(-1) = 5$ en min. is $x(3) = -27$.

Dus $x = p$ snijdt de baan in drie punten voor $-27 < p < 5$.

b $y(t) = 0$ geeft $t^2 - 1 = 0$

$t^2 = 1$

$t = 1 \vee t = -1$

$t = 1$ geeft het punt $(-11, 0)$

$x'(t) = 3t^2 - 6t - 9$ en $y'(t) = 2t$ geeft

$v(t) = \sqrt{(3t^2 - 6t - 9)^2 + (2t)^2}$

$= \sqrt{9t^4 - 18t^3 - 27t^2 - 18t^3 + 36t^2 + 54t - 27t^2 + 54t + 81 + 4t^2}$

$= \sqrt{9t^4 - 36t^3 - 14t^2 + 108t + 81}$

$a(t) = v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{9t^4 - 36t^3 - 14t^2 + 108t + 81}} \cdot (36t^3 - 108t^2 - 28t + 108)$

$v(1) = \sqrt{9 - 36 - 14 + 108 + 81} = \sqrt{148} \approx 12{,}17$ cm/s

$a(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{9 - 36 - 14 + 108 + 81}} \cdot (36 - 108 - 28 + 108) = \dfrac{4}{\sqrt{148}} \approx 0{,}33$ cm/s^2

c $y = 3$ geeft $t^2 - 1 = 3$

$t^2 = 4$

$t = 2 \vee t = -2$

$t = 2$ geeft het punt $A(-22, 3)$ en $t = -2$ geeft het punt $B(-2, 3)$.

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 6t - 9 \\ 2t \end{pmatrix}$

$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $\text{rc}_k = -\frac{4}{9}$.

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = -\frac{4}{9}x + b \\ \text{door } A(-22, 3) \end{array}\right\} -\frac{4}{9} \cdot -22 + b = 3$

$9\frac{7}{9} + b = 3$

$b = -6\frac{7}{9}$

Dus $k\colon y = -\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9}$.

$\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$, dus $\text{rc}_l = -\frac{4}{15}$.

$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -\frac{4}{15}x + b \\ \text{door } B(-2, 3) \end{array}\right\} -\frac{4}{15} \cdot -2 + b = 3$

$\frac{8}{15} + b = 3$

$b = 2\frac{7}{15}$

Dus $l\colon y = -\frac{4}{15}x + 2\frac{7}{15}$.

k en l snijden geeft $-\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9} = -\frac{4}{15}x + 2\frac{7}{15}$

$-20x - 305 = -12x + 111$

$-8x = 416$

$x = -52$

$x = -52$ en $y = -\frac{4}{9}x - 6\frac{7}{9}$ geeft $y = 16\frac{1}{3}$

Dus $S(-52, 16\frac{1}{3})$.

21 **a** $x(t) = \cos^2(t) - \cos(t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(t) \cdot -\sin(t) + \sin(t) = -\sin(2t) + \sin(t)$

$y(t) = \sin(t)$ geeft $y'(t) = \cos(t)$

Raaklijn horizontaal, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

$y'(t) = 0$ geeft $\cos(t) = 0$

$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$-\pi \leq t \leq \pi$ geeft $t = -\frac{1}{2}\pi \vee t = \frac{1}{2}\pi$

$t = -\frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, -1)$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 1)$.

Dus de raaklijn is horizontaal in de punten $(0, -1)$ en $(0, 1)$.

Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$.

$x'(t) = 0$ geeft $-\sin(2t) + \sin(t) = 0$

$\sin(2t) = \sin(t)$

$2t = t + k \cdot 2\pi \vee 2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot 2\pi \vee 3t = \pi + k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot 2\pi \vee t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$-\pi \leq t \leq \pi$ geeft $t = -\pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi \vee t = 0 \vee t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \pi$

$t = -\pi$ en $t = \pi$ geven het punt $(2, 0)$.

$t = -\frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = \frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = 0$ geeft het punt $(0, 0)$.

Dus de raaklijn is verticaal in de punten $(2, 0)$, $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

b $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

P gaat door de oorsprong voor $t = 0$ (zie a).

$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de gevraagde baansnelheid is 1 cm/s.

c $x(t) = 0$ geeft $\cos^2(t) - \cos(t) = 0$

$\cos(t)(\cos(t) - 1) = 0$

$\cos(t) = 0 \vee \cos(t) = 1$

$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \vee t = k \cdot 2\pi$

$-\pi \leq t \leq \pi$ geeft $t = -\frac{1}{2}\pi \vee t = 0 \vee t = \frac{1}{2}\pi$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(0, 1)$.

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$
$$= \sqrt{(-\sin(2t) + \sin(t))^2 + (\cos(t))^2}$$
$$= \sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)}$$
$$= \sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1}} \cdot (2\sin(2t) \cdot \cos(2t) \cdot 2 - 2\cos(t) \cdot \sin(2t) - 2\sin(t) \cdot \cos(2t) \cdot 2)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(2t) - 2\sin(t)\sin(2t) + 1}} \cdot (4\sin(2t)\cos(2t) - 2\cos(t)\sin(2t) - 4\sin(t)\cos(2t))$$

$$a(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2\sqrt{0 - 0 + 1}} \cdot (0 - 0 + 4) = 2$$

De gevraagde baanversnelling is 2 cm/s^2.

d $x(-p) = \cos^2(-p) - \cos(-p) = \cos^2(p) - \cos(p) = x(p)$

$y(-p) = \sin(-p) = -\sin(p) = -y(p)$

Dus de baan van P is symmetrisch in de x-as.

e $x = \frac{3}{4}$ geeft $\cos^2(t) - \cos(t) = \frac{3}{4}$

$\cos^2(t) - \cos(t) - \frac{3}{4} = 0$

$(\cos(t) - 1\frac{1}{2})(\cos(t) + \frac{1}{2}) = 0$

$\cos(t) = 1\frac{1}{2} \vee \cos(t) = -\frac{1}{2}$

$t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$-\pi \leq t \leq \pi$ geeft $t = \frac{2}{3}\pi \vee t = -\frac{2}{3}\pi$

$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $C(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

$t = -\frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $D(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

f $x = \cos^2(t) - \cos(t)$ en $y = \sin(t)$ substitueren in $y = x^2$ geeft $\sin(t) = (\cos^2(t) - \cos(t))^2$.

Voer in $y_1 = \sin(x)$ en $y_2 = (\cos^2(x) - \cos(x))^2$.

De optie snijpunt geeft $x = 0$ en $y = 0$ en ook $x = 2{,}182...$ en $y = 0{,}818...$

Dus $E(2{,}18; 0{,}82)$.

15 Afgeleiden en primitieven

Bladzijde 225

22 **a** Stel $x_A = a$, dan is $x_B = -a$.

$f(a) = g(-a)$ geeft $e^{\frac{1}{2}a} = e^{-a-1}$

$\frac{1}{2}a = -a - 1$

$1\frac{1}{2}a = -1$

$a = -\frac{2}{3}$

$p = f(-\frac{2}{3}) = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

b Stel $x_E = 3b$, dan is $x_D = 4b$.

$g(3b) = f(4b)$ geeft $e^{3b-1} = e^{2b}$

$3b - 1 = 2b$

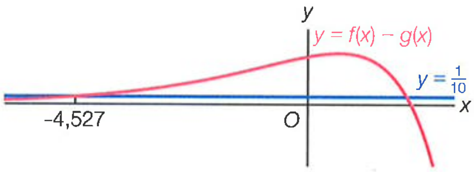
$b = 1$

$q = f(4) = e^2$

c $PQ = f(r) - g(r) = e^{\frac{1}{2}r} - e^{r-1}$

Voer in $y_1 = e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1}$ en $y_2 = \frac{1}{10}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -4{,}527$.



$PQ < \frac{1}{10}$ geeft $r < -4{,}527$

d $f(x) = g(x)$ geeft $e^{\frac{1}{2}x} = e^{x-1}$

$\frac{1}{2}x = x - 1$

$-\frac{1}{2}x = -1$

$x = 2$

$$O(V) = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^2 (e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1})\,dx = \left[2\,e^{\frac{1}{2}x} - e^{x-1}\right]_0^2 = 2e - e - (2 - e^{-1}) = e - 2 + \frac{1}{e}$$

e $$I(L) = \pi\int_0^2 ((f(x))^2 - (g(x))^2)\,dx = \pi\int_0^2 ((e^{\frac{1}{2}x})^2 - (e^{x-1})^2)\,dx = \pi\int_0^2 (e^x - e^{2x-2})\,dx$$

$$= \pi\left[e^x - \tfrac{1}{2}e^{2x-2}\right]_0^2 = \pi(e^2 - \tfrac{1}{2}e^2 - (e^0 - \tfrac{1}{2}e^{-2})) = \pi\left(\tfrac{1}{2}e^2 - 1 + \frac{1}{2\,e^2}\right)$$

23 **a** $f_p(x) = \frac{px^2 + px + 1}{x^2 + 1}$ geeft

$$f_p'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot(2px + p) - (px^2 + px + 1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2px^3 + px^2 + 2px + p - 2px^3 - 2px^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-px^2 + (2p - 2)x + p}{(x^2+1)^2}$$

b $f_2(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_2'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2}$

$f_2'(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^2 - x - 1 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$x_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $x_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ geeft $x_A + x_B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1$

Dus $x_A + x_B = 1$.

c $f_4(x) = \dfrac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_4'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$

$f_4'(x) = 0$ geeft $-4x^2 + 6x + 4 = 0$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$

$x = \dfrac{3 + 5}{4} = 2 \vee x = \dfrac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$

$f_4(-\frac{1}{2}) = \dfrac{1 - 2 + 1}{\frac{1}{4} + 1} = 0$, dus $A(-\frac{1}{2}, 0)$.

$f_4(2) = \dfrac{16 + 8 + 1}{4 + 1} = 5$, dus $B(2, 5)$.

$AB = \sqrt{(2 - -\frac{1}{2})^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + 25} = \sqrt{31\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}\sqrt{5}$

d $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_1'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

$f_1'(x) = 0$ geeft $-x^2 + 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

$f_1(-1) = \dfrac{1 - 1 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$, dus $A(-1, \frac{1}{2})$.

$f_1(1) = \dfrac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = 1\frac{1}{2}$, dus $B(1, 1\frac{1}{2})$.

Dus $y_B = 1\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot y_A$.

e $f_{-3}(x) = \dfrac{-3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ geeft $f_{-3}'(x) = \dfrac{3x^2 - 8x - 3}{(x^2 + 1)^2}$

$f_{-3}'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 8x - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

$x = \dfrac{8 + 10}{6} = 3 \vee x = \dfrac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$

$f_{-3}(-\frac{1}{3}) = 1\frac{1}{2}$, dus $A(-\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2})$ en $OA = \sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{85}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{85}$

$f_{-3}(3) = -3\frac{1}{2}$, dus $B(3, -3\frac{1}{2})$ en $OB = \sqrt{3^2 + (-3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{85}$

Dus $OB = \frac{1}{2}\sqrt{85} = 3 \cdot \frac{1}{6}\sqrt{85} = 3 \cdot OA$.

f $\lim\limits_{x\to\infty} f_p(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{px^2 + px + 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p + \frac{p}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{p + 0 + 0}{1 + 0} = p$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = p$.

$f_p(2) = p$ geeft $\dfrac{4p + 2p + 1}{5} = p$

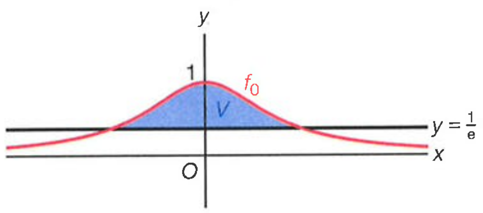
$6p + 1 = 5p$

$p = -1$

g $f_0(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ geeft $x^2 + 1 = \dfrac{1}{y}$

$x^2 = \dfrac{1}{y} - 1$



$I(L) = \pi\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^2\,dy = \pi\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = \pi\left[\ln(y) - y\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = \pi\left(0 - 1 - \left(-1 - \frac{1}{e}\right)\right) = \pi\left(-1 + 1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{\pi}{e}$

Bladzijde 226

24 **a** $f_{p+1}(x) = (x-(p+1))^2 + p + 1 - 2 = (x-(p+1))^2 + p - 1$
De top van de grafiek van f_{p+1} is het punt $(p+1, p-1)$.
$x = p + 1$ geeft $f_p(p+1) = (p+1-p)^2 + p - 2 = 1^2 + p - 2 = p - 1$
Dus voor elke p ligt de top van de grafiek van f_{p+1} op de grafiek van f_p.

b De top $(p, p-2)$ van de grafiek van f_p ligt op k: $y = ax + b$.
$x = p$ en $y = p - 2$ geeft k: $y = x - 2$, dus $\text{rc}_k = 1$.
$l \,//\, k$, dus $\text{rc}_l = \text{rc}_k = 1$.
Er is gegeven dat l evenwijdig is met k, en dat l de grafieken van f_p raakt.
Dus l raakt de grafiek van f_0.
$f_0(x) = x^2 - 2$ geeft $f_0'(x) = 2x$
$f_0'(x) = 1$ geeft $2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$
$f_0(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - 2 = -1\frac{3}{4}$
$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = x + b \\ \text{door } (\frac{1}{2}, -1\frac{3}{4}) \end{array}\right\} \frac{1}{2} + b = -1\frac{3}{4}$
$b = -2\frac{1}{4}$
Dus l: $y = x - 2\frac{1}{4}$.

c $f_1(x) = (x-1)^2 + 1 - 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 - 2 = x^2 - 2x$
$f_2(x) = (x-2)^2 + 2 - 2 = x^2 - 4x + 4$
$f_3(x) = (x-3)^2 + 3 - 2 = x^2 - 6x + 9 + 3 - 2 = x^2 - 6x + 10$
$f_1(x) = f_2(x)$ geeft $x^2 - 2x = x^2 - 4x + 4$
$2x = 4$
$x = 2$
$f_1(x) = f_3(x)$ geeft $x^2 - 2x = x^2 - 6x + 10$
$4x = 10$
$x = 2\frac{1}{2}$
$f_2(x) = f_3(x)$ geeft $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 6x + 10$
$2x = 6$
$x = 3$

$$O(V) = \int_2^{2\frac{1}{2}} (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (f_3(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_2^{2\frac{1}{2}} (x^2 - 2x - (x^2 - 4x + 4))\,\mathrm{d}x + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (x^2 - 6x + 10 - (x^2 - 4x + 4))\,\mathrm{d}x = \int_2^{2\frac{1}{2}} (2x - 4)\,\mathrm{d}x + \int_{2\frac{1}{2}}^3 (-2x + 6)\,\mathrm{d}x$$
$$= [x^2 - 4x]_2^{2\frac{1}{2}} + [-x^2 + 6x]_{2\frac{1}{2}}^3 = 6\tfrac{1}{4} - 10 - (4 - 8) + (-9 + 18 - (-6\tfrac{1}{4} + 15)) = \tfrac{1}{2}$$

25 **a** $L = AB = f(p) - g(p) = (p^2 + 2p) \cdot 2^{-p} - (p^2 - p) \cdot 2^{-p} = (p^2 + 2p - p^2 + p) \cdot 2^{-p} = 3p \cdot 2^{-p}$
$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 3 \cdot 2^{-p} + 3p \cdot 2^{-p} \cdot \ln(2) \cdot -1 = (3 - 3p\ln(2)) \cdot 2^{-p}$
$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $(3 - 3p\ln(2)) \cdot 2^{-p} = 0$
$3 - 3p\ln(2) = 0$
$3p\ln(2) = 3$
$p = \frac{1}{\ln(2)}$
Dus de lengte van het lijnstuk AB is maximaal voor $p = \frac{1}{\ln(2)}$.

b Stel $x_C = r$, dan is $x_D = r + 3$.

$f(r) = f(r+3)$ geeft $(r^2 + 2r) \cdot 2^{-r} = ((r+3)^2 + 2(r+3)) \cdot 2^{-(r+3)}$

$(r^2 + 2r) \cdot 2^{-r} = (r^2 + 6r + 9 + 2r + 6) \cdot 2^{-r} \cdot \frac{1}{8}$

$8(r^2 + 2r) = r^2 + 8r + 15$

$8r^2 + 16r = r^2 + 8r + 15$

$7r^2 + 8r - 15 = 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot 7 \cdot -15 = 484$

$r = \frac{-8 + 22}{14} = 1 \vee r = \frac{-8 - 22}{14} = -2\frac{1}{7}$

vold. niet

$q = f(1) = (1+2) \cdot 2^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Bladzijde 227

26 **a** $L = AB = f(p) - g(p) = \sqrt{25 - p^2} - (\frac{3}{4}p - 4) = \sqrt{25 - p^2} - \frac{3}{4}p + 4$

$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{25 - p^2}} \cdot -2p - \frac{3}{4} = -\frac{p}{\sqrt{25 - p^2}} - \frac{3}{4}$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $\frac{p}{\sqrt{25 - p^2}} = -\frac{3}{4}$

$4p = -3\sqrt{25 - p^2}$

kwadrateren geeft

$16p^2 = 9(25 - p^2)$

$16p^2 = 225 - 9p^2$

$25p^2 = 225$

$p^2 = 9$

$p = 3 \quad \vee \quad p = -3$

vold. niet

De maximale lengte van het lijnstuk AB is $\sqrt{25 - (-3)^2} - \frac{3}{4} \cdot -3 + 4 = 10\frac{1}{4}$.

b $L = AC = h(p) - f(p) = -\frac{4}{3}p + 10 - \sqrt{25 - p^2}$

$\frac{dL}{dp} = -\frac{4}{3} - \frac{1}{2\sqrt{25 - p^2}} \cdot -2p = -\frac{4}{3} + \frac{p}{\sqrt{25 - p^2}}$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $\frac{p}{\sqrt{25 - p^2}} = \frac{4}{3}$

$3p = 4\sqrt{25 - p^2}$

kwadrateren geeft

$9p^2 = 16(25 - p^2)$

$9p^2 = 400 - 16p^2$

$25p^2 = 400$

$p^2 = 16$

$p = 4 \vee p = -4$

vold. niet

De minimale lengte van het lijnstuk AC is $-\frac{4}{3} \cdot 4 + 10 - \sqrt{25 - 4^2} = 1\frac{2}{3}$.

27 **a** $f(x) = (x^2 + x)\,e^x$ geeft $f'(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x) \cdot e^x = (x^2 + 3x + 1)\,e^x$

$g(x) = (x^2 - x)\,e^x$ geeft $g'(x) = (2x - 1) \cdot e^x + (x^2 - x) \cdot e^x = (x^2 + x - 1)\,e^x$

$rc_k = f'(0) = 1 \cdot e^0 = 1$

$rc_l = g'(0) = -1 \cdot e^0 = -1$

$rc_k \cdot rc_l = 1 \cdot -1 = -1$

Dus k en l snijden elkaar loodrecht.

b $g'(x) = (x^2 + x - 1)\,e^x$ geeft $g''(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x - 1) \cdot e^x = (x^2 + 3x)\,e^x$

$g'(-2) = (4 - 2 - 1)\,e^{-2} = e^{-2} > 0$

$g''(-2) = (4 - 6)\,e^{-2} = -2\,e^{-2} < 0$

Dus in A is sprake van afnemende stijging.

c $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)\,e^x$ geeft $f''(x) = (2x + 3) \cdot e^x + (x^2 + 3x + 1) \cdot e^x = (x^2 + 5x + 4)\,e^x$
$f''(x) = 0$ geeft $x^2 + 5x + 4 = 0$
$(x + 1)(x + 4) = 0$
$x = -1 \vee x = -4$
Dus $x_B = -4$ en $x_C = -1$.
$g''(x) = 0$ geeft $x^2 + 3x = 0$
$x(x + 3) = 0$
$x = 0 \vee x = -3$
Dus $x_D = -3$ en $x_E = 0$.
$x_C - x_B = -1 - -4 = 3$
$x_E - x_D = 0 - -3 = 3$
Dus $x_C - x_B = x_E - x_D$.

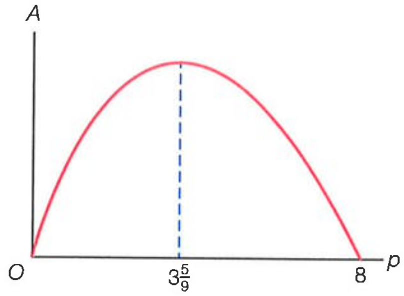
d $L = FG = g(p) - f(p) = (p^2 - p)\,e^p - (p^2 + p)\,e^p = (p^2 - p - p^2 - p)\,e^p = -2p\,e^p$
$\dfrac{dL}{dp} = -2 \cdot e^p - 2p \cdot e^p = (-2p - 2)\,e^p$
$\dfrac{dL}{dp} = 0$ geeft $-2p - 2 = 0$
$-2p = 2$
$p = -1$
De maximale lengte van het lijnstuk FG is $-2 \cdot -1 \cdot e^{-1} = \dfrac{2}{e}$.

e $H'(x) = a \cdot e^x + (ax + b) \cdot e^x = (ax + a + b)\,e^x$
Dus de primitieven van de functies $h(x) = (px + q)\,e^x$ zijn van de vorm
$H(x) = (ax + b)\,e^x + c$ met $p = a$ en $q = a + b$.

f $O(V) = \int_{-3}^{0} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-3}^{0} ((x^2 - x)\,e^x - (x^2 + x)\,e^x)\,dx = \int_{-3}^{0} (x^2 - x - x^2 - x)\,e^x\,dx = \int_{-3}^{0} -2x\,e^x\,dx$
$h(x) = (px + q)\,e^x$ met $p = -2$ en $q = 0$ geeft $h(x) = -2\,e^x$.
Uit e volgt dat $H(x) = (ax + b)\,e^x + c$ met $a = p = -2$ en $b = q - a = 0 - -2 = 2$.
Dus $O(V) = \int_{-3}^{0} -2x\,e^x\,dx = \left[(-2x + 2)\,e^x\right]_{-3}^{0} = 2\,e^0 - (6 + 2)\,e^{-3} = 2 - \dfrac{8}{e^3}$.

28 **a** $f(x) = 0$ geeft $4 - \sqrt{2x} = 0$
$\sqrt{2x} = 4$
$2x = 16$
$x = 8$
$O(V) = \int_0^8 (4 - \sqrt{2x})\,dx = \int_0^8 (4 - (2x)^{\frac{1}{2}})\,dx = \left[4x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x)^{1\frac{1}{2}}\right]_0^8 = \left[4x - \frac{2}{3}x\sqrt{2x}\right]_0^8 = 32 - \frac{16}{3}\sqrt{16} = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3}$

b $A = p \cdot f(p) = p(4 - \sqrt{2p}) = 4p - p\sqrt{2p}$
$\dfrac{dA}{dp} = 4 - 1 \cdot \sqrt{2p} - p \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2p}} \cdot 2 = 4 - \sqrt{2p} - \dfrac{p}{\sqrt{2p}}$
$\dfrac{dA}{dp} = 0$ geeft $4 - \sqrt{2p} - \dfrac{p}{\sqrt{2p}} = 0$
$4\sqrt{2p} - 2p - p = 0$
$4\sqrt{2p} = 3p$
kwadrateren geeft
$32p = 9p^2$
$p = 0 \quad \vee \quad 32 = 9p$
vold. niet $p = 3\frac{5}{9}$



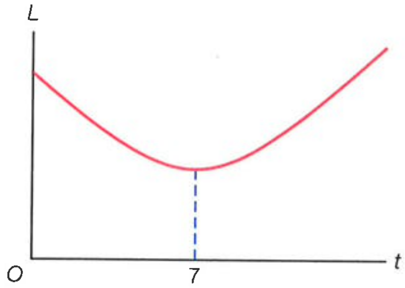
Dus voor $p = 3\frac{5}{9}$ is de oppervlakte van rechthoek $OPQR$ maximaal.

c $S(8, 4)$ en $T(t, 4 - \sqrt{2t})$ geeft

$L = \sqrt{(t-8)^2 + (4 - \sqrt{2t} - 4)^2} = \sqrt{t^2 - 16t + 64 + 2t} = \sqrt{t^2 - 14t + 64}$

$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t^2 - 14t + 64}} \cdot (2t - 14) = \frac{t - 7}{\sqrt{t^2 - 14t + 64}}$

$\frac{dL}{dt} = 0$ geeft $t - 7 = 0$, dus $t = 7$.



Het minimum van L is $\sqrt{49 - 98 + 64} = \sqrt{15}$.

Bladzijde 228

29 **a** $f_p(x) = p\sqrt{x} - \ln(x)$ geeft

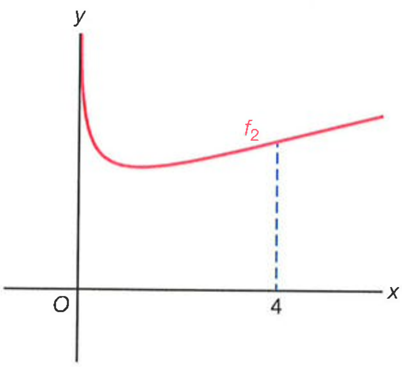
$f_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}px^{-\frac{1}{2}} - x^{-1}$ en

$f_p''(x) = -\frac{1}{4}px^{-1\frac{1}{2}} + x^{-2} = -\frac{p}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

$f_p''(4) = 0$ geeft $-\frac{p}{16\sqrt{4}} + \frac{1}{16} = 0$

$-\frac{p}{32} = -\frac{1}{16}$

$p = 2$



Dus voor $p = 2$ gaat de grafiek van f_p bij $x = 4$ over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

b $f_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{p\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x} = \frac{p\sqrt{x} - 2}{2x}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $p\sqrt{x} - 2 = 0$

$p\sqrt{x} = 2$

$\sqrt{x} = \frac{2}{p}$

$x = \frac{4}{p^2}$ (met $p > 0$)

$f_p\left(\frac{4}{p^2}\right) = 2 - \ln\left(\frac{4}{p^2}\right)$

Het punt $\left(\frac{4}{p^2}, 2 - \ln\left(\frac{4}{p^2}\right)\right)$ ligt op de grafiek van $g(x) = 2\ln(x) - 4$ geeft

$2\ln\left(\frac{4}{p^2}\right) - 4 = 2 - \ln\left(\frac{4}{p^2}\right)$

$3\ln\left(\frac{4}{p^2}\right) = 6$

$\ln\left(\frac{4}{p^2}\right) = 2$

$\frac{4}{p^2} = \mathrm{e}^2$

$p^2 = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$

$p = \frac{2}{\mathrm{e}} \vee p = -\frac{2}{\mathrm{e}}$

vold. niet

Dus voor $p = \frac{2}{\mathrm{e}}$.

30 **a** $f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{(2x+1) \cdot 4 - (4x-3) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{8x + 4 - 8x + 6}{(2x+1)^2} = \frac{10}{(2x+1)^2}$

$\text{rc}_k = f'(-3) = \frac{10}{(-6+1)^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$\text{rc}_l = f'(2) = \frac{10}{(4+1)^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$\text{rc}_k = \text{rc}_l$, dus k en l zijn evenwijdig.

$\left.\begin{array}{l} l\colon y = \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) \end{array}\right\} \frac{2}{5} \cdot 2 + b = 1$

$\frac{4}{5} + b = 1$

$b = \frac{1}{5}$

Dus $l\colon y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ oftewel $l\colon 2x - 5y + 1 = 0$.

$d(k, l) = d(A, l) = \frac{|2 \cdot -3 - 5 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{29}} = \frac{20}{29}\sqrt{29}$

b $f(x) = 0$ geeft $4x - 3 = 0$

$4x = 3$

$x = \frac{3}{4}$

Dus het snijpunt van de grafiek van f met de x-as is $C(\frac{3}{4}, 0)$.

Stel $m\colon y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{2--3} = -\frac{2}{5}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) \end{array}\right\} -\frac{2}{5} \cdot 2 + b = 1$

$-\frac{4}{5} + b = 1$

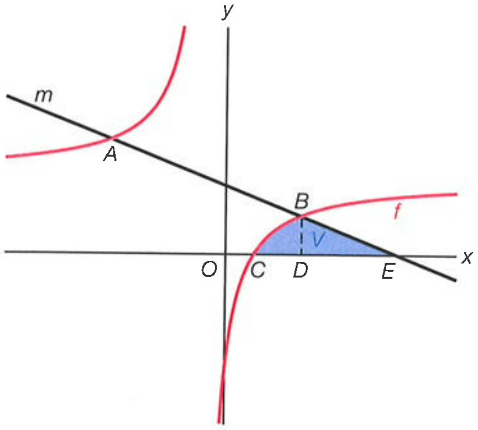
$b = 1\frac{4}{5}$

$m\colon y = -\frac{2}{5}x + 1\frac{4}{5}$ snijden met de x-as geeft $-\frac{2}{5}x + 1\frac{4}{5} = 0$

$-\frac{2}{5}x = -1\frac{4}{5}$

$x = 4\frac{1}{2}$

Dus het snijpunt van m met de x-as is $E(4\frac{1}{2}, 0)$.



$$f(x) = \frac{4x-3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-2-3}{2x+1} = 2 - \frac{5}{2x+1}$$

$$O(V) = \int_{\frac{3}{4}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + O(\triangle DEB) = \int_{\frac{3}{4}}^{2}\left(2 - \frac{5}{2x+1}\right)\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\cdot DE \cdot BD$$

$$= \left[2x - 5\cdot\tfrac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_{\frac{3}{4}}^{2} + \tfrac{1}{2}\cdot 2\tfrac{1}{2}\cdot 1 = 4 - 2\tfrac{1}{2}\ln(5) - (1\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{2}\ln(2\tfrac{1}{2})) + 1\tfrac{1}{4}$$

$$= 4 - 2\tfrac{1}{2}\ln(5) - 1\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}\ln(2\tfrac{1}{2}) + 1\tfrac{1}{4} = 3\tfrac{3}{4} + 2\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2\frac{1}{2}}{5}\right) = 3\tfrac{3}{4} + 2\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2})$$

$$= 3\tfrac{3}{4} - 2\tfrac{1}{2}\ln(2)$$

31 **a** $f(x) = g_a(x)$ geeft $\dfrac{4}{\sqrt{x}} = a\sqrt{x}$

$$ax = 4$$

$$x = \frac{4}{a}$$

$f(x) = h_a(x)$ geeft $\dfrac{4}{\sqrt{x}} = 4a\sqrt{x}$

$$4ax = 4$$

$$x = \frac{1}{a}$$

$$O(V) = \int_0^{\frac{1}{a}} (h_a(x) - g_a(x))\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} (f(x) - g_a(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{a}} (4a\sqrt{x} - a\sqrt{x})\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - a\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{1}{a}} 3ax^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} (4x^{-\frac{1}{2}} - ax^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x = \left[2ax^{1\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{a}} + \left[8x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}ax^{1\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}}$$

$$= \left[2ax\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{a}} + \left[8\sqrt{x} - \tfrac{2}{3}ax\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{4}{a}} = 2a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}} - 0 + 8\sqrt{\frac{4}{a}} - \tfrac{2}{3}a\cdot\frac{4}{a}\sqrt{\frac{4}{a}} - \left(8\sqrt{\frac{1}{a}} - \tfrac{2}{3}a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{a}} + 16\sqrt{\frac{1}{a}} - \tfrac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} - \left(8\sqrt{\frac{1}{a}} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 12\tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} - 7\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} = 5\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}$$

$O(V) = 4$ geeft $\tfrac{16}{3}\sqrt{\dfrac{1}{a}} = 4$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = 4\cdot\tfrac{3}{16}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \tfrac{3}{4}$$

$$\frac{1}{a} = \tfrac{9}{16}$$

$$a = \tfrac{16}{9}$$

Dus voor $a = 1\tfrac{7}{9}$.

b $O(V_1) = \int_0^{\frac{1}{a}} (h_a(x) - g_a(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{a}} 3ax^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[2ax^{1\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{a}} = 2a \cdot \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{1}{a}}$

$O(V_2) = O(V) - O(V_1) = 5\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} - 2\sqrt{\frac{1}{a}} = 3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}$

$O(V_1) : O(V_2) = 2\sqrt{\frac{1}{a}} : 3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}} = 2 : 3\frac{1}{3} = 3 : 5$

32 **a** $f(x) = g_a(x)$ geeft $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = a - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

$$2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = a$$
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = \tfrac{1}{2}a$$
$$\tfrac{1}{2}x = \ln(\tfrac{1}{2}a)$$
$$x = 2\ln(\tfrac{1}{2}a)$$

$$O(V) = \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (g_a(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a - 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[ax - 4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} = 2a\ln(\tfrac{1}{2}a) - 4\,\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{2}a)} - (0 - 4)$$
$$= 2a\ln(\tfrac{1}{2}a) - 4 \cdot \tfrac{1}{2}a + 4 = 2a\ln(\tfrac{1}{2}a) - 2a + 4$$

$O(V) = 10$ geeft $2a\ln(\frac{1}{2}a) - 2a + 4 = 10$

Voer in $y_1 = 2x\ln(\frac{1}{2}x) - 2x + 4$ en $y_2 = 10$.

De optie snijpunt geeft $x = 7{,}9346...$

Dus $a \approx 7{,}935$.

b $I(L) = \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} ((g_a(x))^2 - (f(x))^2)\,\mathrm{d}x =$

$$= \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} ((a - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})^2 - (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})^2)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a^2 - 2a\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi \int_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)} (a^2 - 2a\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = \pi\left[a^2x - 4a\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(\frac{1}{2}a)}$$
$$= \pi(2a^2\ln(\tfrac{1}{2}a) - 4a\,\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{2}a)} - (0 - 4a)) = \pi(2a^2\ln(\tfrac{1}{2}a) - 4a \cdot \tfrac{1}{2}a + 4a)$$
$$= \pi(2a^2\ln(\tfrac{1}{2}a) - 2a^2 + 4a)$$

Voer in $y_1 = \pi(2x^2\ln(\frac{1}{2}x) - 2x^2 + 4x)$ en $y_2 = 400$.

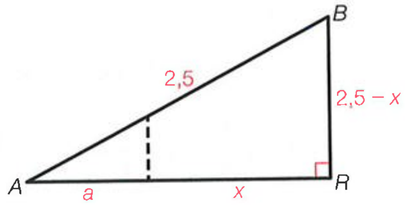
De optie snijpunt geeft $x = 9{,}2351...$

Dus $a \approx 9{,}235$.

Bladzijde 229

33 $AQ + BR = 2{,}5$, dus $BR = 2{,}5 - AQ = 2{,}5 - x$

In $\triangle ARB$ is $AR^2 + BR^2 = AB^2$



$$(a + x)^2 + (2{,}5 - x)^2 = 2{,}5^2$$
$$(a + x)^2 + 6{,}25 - 5x + x^2 = 6{,}25$$
$$(a + x)^2 = 5x - x^2$$
$$a + x = \sqrt{5x - x^2}$$
$$a = -x + \sqrt{5x - x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = -1 + \frac{1}{2\sqrt{5x - x^2}} \cdot (5 - 2x) = -1 + \frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}}$$

$\frac{da}{dx} = 0$ geeft $-1 + \frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}} = 0$

$\frac{5 - 2x}{2\sqrt{5x - x^2}} = 1$

$2\sqrt{5x - x^2} = 5 - 2x$

kwadrateren geeft

$4(5x - x^2) = 25 - 20x + 4x^2$

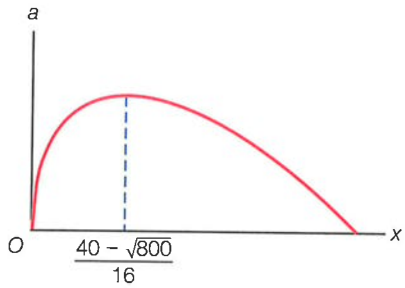
$20x - 4x^2 = 25 - 20x + 4x^2$

$8x^2 - 40x + 25 = 0$

$D = (-40)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 25 = 800$

$x = \frac{40 + \sqrt{800}}{16} \vee x = \frac{40 - \sqrt{800}}{16}$

vold. niet



De onderkant van de garagedeur komt maximaal

$-\frac{40 - \sqrt{800}}{16} + \sqrt{5 \cdot \frac{40 - \sqrt{800}}{16} - \left(\frac{40 - \sqrt{800}}{16}\right)^2} \approx 1{,}04$ meter naar buiten.

34 **a** $\cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}AP}{0{,}3}$

$\frac{1}{2}AP = 0{,}3\cos(\alpha)$

$AP = 0{,}6\cos(\alpha)$

$AB = 0{,}6 + 0{,}6\cos(\alpha)$

De cosinusregel in $\triangle ABR$ geeft

$BR^2 = AR^2 + AB^2 - 2 \cdot AR \cdot AB \cdot \cos(\angle BAR)$

$BR^2 = 1{,}2^2 + (0{,}6 + 0{,}6\cos(\alpha))^2 - 2 \cdot 1{,}2 \cdot (0{,}6 + 0{,}6\cos(\alpha)) \cdot \cos(\alpha)$

$BR^2 = 1{,}44 + 0{,}36 + 0{,}72\cos(\alpha) + 0{,}36\cos^2(\alpha) - 1{,}44\cos(\alpha) - 1{,}44\cos^2(\alpha)$

$BR^2 = 1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)$

$BR = \sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}$

b $BR > 1$ geeft $\sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)} > 1$

Voer in $y_1 = \sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(x) - 1{,}08\cos^2(x)}$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 0{,}940...$

Dus de lengte van het uitgerolde doek is meer dan 1 meter bij een hoek α die groter is dan 0,94 rad.

c $L = BR = \sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}$ geeft

$\frac{dL}{d\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}} \cdot (0{,}72\sin(\alpha) - 2{,}16\cos(\alpha) \cdot -\sin(\alpha))$

$= \frac{0{,}36\sin(\alpha) + 1{,}08\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}}$

$\frac{dL}{d\alpha} = 0$ geeft $0{,}36\sin(\alpha) + 1{,}08\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0$

$0{,}36\sin(\alpha)(1 + 3\cos(\alpha)) = 0$

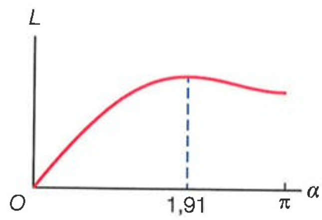
$0{,}36\sin(\alpha) = 0 \vee 1 + 3\cos(\alpha) = 0$

$\sin(\alpha) = 0 \vee \cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$

$\alpha = k \cdot \pi \vee \alpha \approx 1{,}91 + k \cdot 2\pi \vee \alpha \approx -1{,}91 + k \cdot 2\pi$

Schets van L, zie hiernaast.

Dus de lengte BR is maximaal bij $a \approx 1{,}91$ rad.



Bladzijde 230

35 **a** E_v is evenredig met $M_v^{-0,13}$, dus $E_v = aM_v^{-0,13}$.
$M_v = 0,2$ en $E_v = 3,3$ geeft $a \cdot 0,2^{-0,13} = 3,3$
$a = 3,3 \cdot 0,2^{0,13} \approx 2,68$

b Uit de gegevens van het konijn volgt $a \cdot 2^b = 2,5$ oftewel $a = 2,5 \cdot 2^{-b}$.
Uit de gegevens van de neushoorn volgt $a \cdot 2500^b = 0,24$ oftewel $a = 0,24 \cdot 2500^{-b}$.
Voer in $y_1 = 2,5 \cdot 2^{-x}$ en $y_2 = 0,24 \cdot 2500^{-x}$.
De optie snijpunt geeft $x = -0,328...$ en $y = 3,139...$
Dus $a \approx 3,14$ en $b \approx -0,33$.

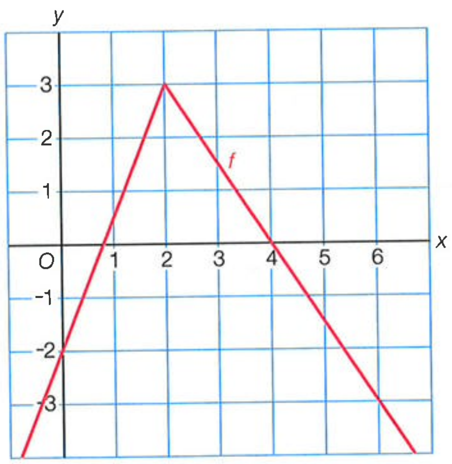
c $E_v = E_l$ geeft $2,7M_v^{-0,13} = 3,2M_l^{-0,33}$
Voer in $y_1 = 2,7x^{-0,13}$ en $y_2 = 3,2x^{-0,33}$.
De optie snijpunt geeft $x = 2,33...$
Dus bij ongeveer 2,3 kg.

d Neem in de formule van de vogels $2M_v$ voor M_v.
$E_v = 2,7(2M_v)^{-0,13} = 2,7 \cdot 2^{-0,13} \cdot M_v^{-0,13} = 2^{-0,13} \cdot 2,7M_v^{-0,13}$
Dus $p = 2^{-0,13}$.
Neem in de formule van de landdieren $2M_l$ voor M_l.
$E_l = 3,2(2M_l)^{-0,33} = 3,2 \cdot 2^{-0,33} \cdot M_l^{-0,33} = 2^{-0,33} \cdot 3,2M_l^{-0,33}$
Dus $q = 2^{-0,33}$.
$p : q = 2^{-0,13} : 2^{-0,33}$
$p : q = (2^{-0,13} : 2^{-0,33}) : 1$
$p : q = 2^{0,2} : 1$
$p : q = 2^{\frac{1}{5}} : 1$
$p : q = \sqrt[5]{2} : 1$

16 Examentraining

Bladzijde 231

36 $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - |4 - 2x| = \frac{1}{2}x + 2 - 4 + 2x = 2\frac{1}{2}x - 2$ als $4 - 2x \geq 0$, dus als $x \leq 2$.
$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - |4 - 2x| = \frac{1}{2}x + 2 + 4 - 2x = -1\frac{1}{2}x + 6$ als $4 - 2x < 0$, dus als $x > 2$.



37 $f(x) = \cos(\pi(x - 3))$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi(x - 3)) + c$

38 $x^3 + 10x = 7x^2$
$x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
$x(x^2 - 7x + 10) = 0$
$x(x - 2)(x - 5) = 0$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5$

39 $f(x) = \dfrac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x^2} = x + 2x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 - 3x^{-2\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{3}{x^2\sqrt{x}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 1 - \dfrac{3}{1} = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(1) = 3, \text{ dus } A(1, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

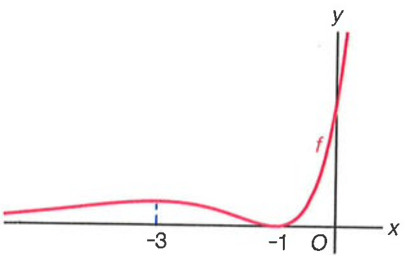
Dus k: $y = -2x + 5$.

40 $y = a + b\sin(c(x - d))$
$a = \dfrac{5 + -1}{2} = 2$
$5 - 2 = 3$, dus $b = -3$.
periode $= 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$, dus $c = \dfrac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.
Dalend door de evenwichtsstand voor $x = \pi$, dus $d = \pi$.
Dus $y = 2 - 3\sin(1\frac{1}{2}(x - \pi))$.

$y = a + b\cos(c(x - d))$
$a = 2$, $b = 3$ en $c = 1\frac{1}{2}$.
$(\frac{2}{3}\pi, 5)$ is een hoogste punt, dus $d = \frac{2}{3}\pi$.
Dus $y = 2 + 3\cos(1\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}\pi))$.

41 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 8 = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 8 = 0$
$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$
Een parametervoorstelling van c is $x = 3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t) \wedge y = -2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t)$.
Het midden Q van $P(3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t), -2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t))$ en $A(10, 0)$ is
$Q(\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5} \cdot \cos(t) + 10), \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5} \cdot \sin(t) + 0)) = Q(6\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \cos(t), -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \sin(t))$.
Dus Q ligt op de kromme met vergelijking $(x - 6\frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = 1\frac{1}{4}$.

42 $f(x) = (x^2 + 2x + 1)\,e^x$ geeft $f'(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 3)\,e^x$
$f'(x) = 0$ geeft $x^2 + 4x + 3 = 0$
$(x + 1)(x + 3) = 0$
$x = -1 \vee x = -3$



max. is $f(-3) = (9 - 6 + 1)\,e^{-3} = \dfrac{4}{e^3}$
min. is $f(-1) = (1 - 2 + 1)\,e^{-1} = 0$

43 $x(t) = 0$ geeft $4 - t^2 = 0$

$$t^2 = 4$$
$$t = 2 \vee t = -2$$

$t = -2$ geeft het punt $(0, -2)$, dus voldoet niet.
$t = 2$ geeft het punt $(0, 2)$, dus voldoet.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 3t^2 - 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$, dus de gevraagde baansnelheid is $v(2) = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{97}$.

$v(t) = \sqrt{(-2t)^2 + (3t^2 - 3)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9} = \sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}$ geeft

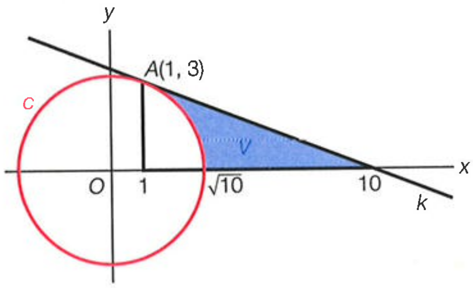
$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}} \cdot (36t^3 - 28t) = \frac{18t^3 - 14t}{\sqrt{9t^4 - 14t^2 + 9}}$$

De gevraagde baanversnelling is $a(2) = \dfrac{18 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2}{\sqrt{9 \cdot 2^4 - 14 \cdot 2^2 + 9}} = \dfrac{116}{\sqrt{97}}$.

44 $\left.\begin{array}{l} \text{twee oplossingen als } D > 0 \\ D = (-5)^2 - 4 \cdot p \cdot 3 = 25 - 12p \end{array}\right\} \begin{array}{l} 25 - 12p > 0 \\ -12p > -25 \\ p < 2\frac{1}{12} \end{array}$

45 $\vec{n}_k = \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $k\colon x + 3y = c$.

k door $A(1, 3)$ geeft $c = 1 + 3 \cdot 3 = 10$.
Dus $k\colon x + 3y = 10$.
k snijden met de x-as geeft $x = 10$.



$x^2 + y^2 = 10$ oftewel $y^2 = 10 - x^2$

$$I(L) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9 - \pi \int_1^{\sqrt{10}} y^2\,dx = 27\pi - \pi \int_1^{\sqrt{10}} (10 - x^2)\,dx = 27\pi - \pi\left[10x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_1^{\sqrt{10}}$$

$$= 27\pi - \pi(10\sqrt{10} - \tfrac{1}{3} \cdot 10\sqrt{10}) + \pi(10 - \tfrac{1}{3}) = 27\pi - \pi \cdot 6\tfrac{2}{3}\sqrt{10} + \pi \cdot 9\tfrac{2}{3} = \pi(36\tfrac{2}{3} - 6\tfrac{2}{3}\sqrt{10})$$

Bladzijde 232

46 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 11x - 7y + 24 = 0 \end{cases}$ $-$

$9x + 9y - 27 = 0$
$x + y = 3$

$\left.\begin{array}{l} y = 3 - x \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + (3 - x)^2 - 2x + 2(3 - x) - 3 = 0 \\ x^2 + 9 - 6x + x^2 - 2x + 6 - 2x - 3 = 0 \\ 2x^2 - 10x + 12 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \\ (x - 2)(x - 3) = 0 \\ x = 2 \vee x = 3 \end{array}$

$x = 2$ en $y = 3 - x$ geeft het snijpunt $(2, 1)$.
$x = 3$ en $y = 3 - x$ geeft het snijpunt $(3, 0)$.
Dus $A(2, 1)$ en $B(3, 0)$.

47 $f_p(x) = \dfrac{2x}{x^2+p}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{(x^2+p)\cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2+p)^2} = \dfrac{2x^2+2p-4x^2}{(x^2+p)^2} = \dfrac{-2x^2+2p}{(x^2+p)^2}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $-2x^2+2p=0$

$x^2 = p$

$x = \sqrt{p} \vee x = -\sqrt{p}$

$f(\sqrt{p}) = \dfrac{2\sqrt{p}}{p+p} = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ en $f(-\sqrt{p}) = \dfrac{-2\sqrt{p}}{p+p} = -\dfrac{1}{\sqrt{p}}$

Dus $A\left(\sqrt{p}, \dfrac{1}{\sqrt{p}}\right)$ en $B\left(-\sqrt{p}, -\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right)$.

$AB = \sqrt{(2\sqrt{p})^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{p}}\right)^2} = \sqrt{4p + \dfrac{4}{p}}$

$AB = \sqrt{10}$ geeft $4p + \dfrac{4}{p} = 10$

$4p^2 + 4 = 10p$

$4p^2 - 10p + 4 = 0$

$2p^2 - 5p + 2 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$p = \dfrac{5+3}{4} = 2 \vee p = \dfrac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

48 $x^4 + 9 = 6\frac{1}{4}x^2$

$x^4 - 6\frac{1}{4}x^2 + 9 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$u^2 - 6\frac{1}{4}u + 9 = 0$

$4u^2 - 25u + 36 = 0$

$D = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$

$u = \dfrac{25+7}{8} = 4 \vee u = \dfrac{25-7}{8} = 2\frac{1}{4}$

$x^2 = 4 \vee x^2 = 2\frac{1}{4}$

$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1\frac{1}{2}$

49 $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \dfrac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot 3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 8 \cdot x^5 = \frac{2}{9}x^3$

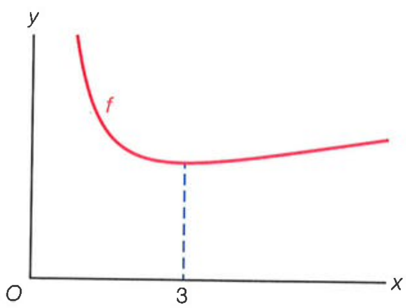
50 $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{9}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \dfrac{x^2-9}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = 3 \vee x = -3$

vold. niet



min. is $f(3) = \dfrac{9+3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{12}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

51 $f(x) = 2$ geeft $1 + \tan(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi) = 2$

$\tan(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi) = 1$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$\frac{1}{2}x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

$x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{6}\pi$

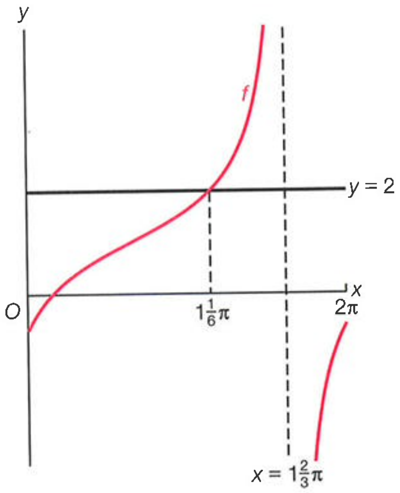
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\frac{1}{2}x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi$

$x = 1\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{2}{3}\pi$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{2}{3}\pi$.



$f(x) > 2$ geeft $1\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$

52 Snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x - 1)(x - 5) = 0$

$x = 1 \vee x = 5$

Dus $A(1, 0)$ en $B(5, 0)$.

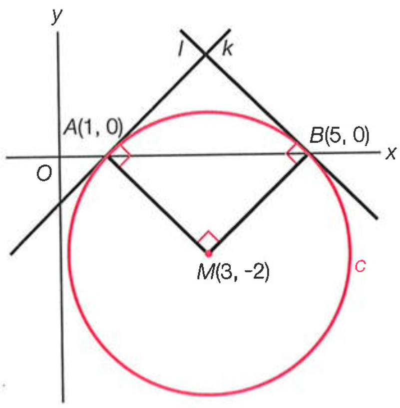
$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 5 = 0$

$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 5 = 0$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$

Dus het middelpunt van c is $M(3, -2)$.



$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Omdat ook $AM \perp k$ en $BM \perp l$, is $k \perp l$.

Dus de gevraagde hoek is 90°.

53 $\ln^2(x) - 8\ln(x) + 12 = 0$
Stel $\ln(x) = u$.
$u^2 - 8u + 12 = 0$
$(u-2)(u-6) = 0$
$u = 2 \vee u = 6$
$\ln(x) = 2 \vee \ln(x) = 6$
$x = e^2 \vee x = e^6$

54 $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - \frac{1}{2} \\ 2t - 2 \end{pmatrix}$, dus $v(t) = \sqrt{(2t-\frac{1}{2})^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{4t^2 - 2t + \frac{1}{4} + 4t^2 - 8t + 4} = \sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}$
en $v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}} \cdot (16t - 10) = \dfrac{8t-5}{\sqrt{8t^2 - 10t + 4\frac{1}{4}}}$.
$v'(t) = 0$ geeft $8t - 5 = 0$, dus $t = \frac{5}{8}$.
$t = \frac{5}{8}$ geeft het punt $(1\frac{5}{64}, -\frac{55}{64})$.
Dus de baansnelheid is minimaal in het punt $(1\frac{5}{64}, -\frac{55}{64})$.

55 $a(t) = 0{,}12t^2$ geeft $v(t) = 0{,}04t^3 + v(0)$
$v(0) = 0$ geeft $v(t) = 0{,}04t^3$
$v(t) = 0{,}04t^3$ geeft $s(t) = 0{,}01t^4 + s(0)$
$s(0) = 0$ geeft $s(t) = 0{,}01t^4$
$v(5) = 0{,}04 \cdot 5^3 = 5$
$s(5) = 0{,}01 \cdot 5^4 = 6{,}25$
De eerste vijf seconden wordt 6,25 meter afgelegd.
De tweede vijf seconden wordt $5 \cdot 5 = 25$ meter afgelegd.
Dus in de eerste tien seconden wordt 31,25 meter afgelegd.

56 Stel $x_B = p$, dan is $x_C = 4p$.
$f(p) = f(4p)$ geeft $4\sqrt{p} - p = 4\sqrt{4p} - 4p$
$4\sqrt{p} - p = 8\sqrt{p} - 4p$
$3p = 4\sqrt{p}$
kwadrateren geeft
$9p^2 = 16p$
$p = 0 \vee 9p = 16$
$p = 0 \vee p = \frac{16}{9}$
vold. niet
$q = f(\frac{16}{9}) = 4\sqrt{\frac{16}{9}} - \frac{16}{9} = 4 \cdot \frac{4}{3} - \frac{16}{9} = 3\frac{5}{9}$

Bladzijde 233

57 $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2p} = \dfrac{3}{p}$
$y_{\text{top}} = f_p\left(\dfrac{3}{p}\right) = p \cdot \left(\dfrac{3}{p}\right)^2 - 6 \cdot \dfrac{3}{p} + 2 = \dfrac{9}{p} - \dfrac{18}{p} + 2 = 2 - \dfrac{9}{p}$
top$\left(\dfrac{3}{p}, 2 - \dfrac{9}{p}\right)$ op de lijn $y = x$ geeft $2 - \dfrac{9}{p} = \dfrac{3}{p}$
$\dfrac{12}{p} = 2$
$p = 6$

58 $(-2, -3)$ op $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ geeft $-2 - 2b + c = -3$ oftewel $2b - c = 1$.
$(6, 5)$ op $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ geeft $-18 + 6b + c = 5$ oftewel $6b + c = 23$.
$\begin{cases} 2b - c = 1 \\ 6b + c = 23 \end{cases}$ +
$8b = 24$
$\left.\begin{array}{l} b = 3 \\ 6b + c = 23 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 18 + c = 23 \\ c = 5 \end{array}$
Dus $b = 3$ en $c = 5$.

59 $\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^4}{\sqrt[5]{a^2}} = a^{-2} \cdot \frac{a^4}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{-2} \cdot a^{3\frac{3}{5}} = a^{1\frac{3}{5}}$

60 $f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(\sqrt{x}+1) \cdot 3x^2 - (x^3+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2\sqrt{x} \cdot 3x^2 \cdot (\sqrt{x}+1) - (x^3+1)}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{6x^3 + 6x^2 \cdot \sqrt{x} - x^3 - 1}{2(\sqrt{x}+1)^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{5x^3 + 6x^2 \cdot \sqrt{x} - 1}{2(\sqrt{x}+1)^2 \cdot \sqrt{x}}$

61 $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{x^2 \cdot (\cos(x) + \sin(x)) - (\sin(x) - \cos(x)) \cdot 2x}{x^4}$

$= \frac{x(\cos(x) + \sin(x)) - 2(\sin(x) - \cos(x))}{x^3} = \frac{(x+2)\cos(x) + (x-2)\sin(x)}{x^3}$

62 Substitutie van $x = 3t + p$ en $y = t + 1$ in $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$ geeft

$(3t+p)^2 + (t+1)^2 + 4(3t+p) - 8(t+1) + 10 = 0$

$9t^2 + 6pt + p^2 + t^2 + 2t + 1 + 12t + 4p - 8t - 8 + 10 = 0$

$10t^2 + (6p+6)t + p^2 + 4p + 3 = 0$

$D = (6p+6)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (p^2 + 4p + 3) = 36p^2 + 72p + 36 - 40p^2 - 160p - 120 = -4p^2 - 88p - 84$

$D = 0$ geeft $-4p^2 - 88p - 84 = 0$

$p^2 + 22p + 21 = 0$

$(p+1)(p+21) = 0$

$p = -1 \vee p = -21$

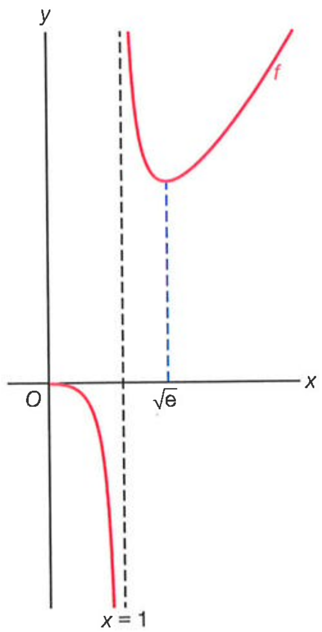
63 $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$ geeft $f'(x) = \frac{\ln(x) \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{2x\ln(x) - x}{\ln^2(x)}$

$f'(x) = 0$ geeft $2x\ln(x) - x = 0$

$x(2\ln(x) - 1) = 0$

$x = 0 \;\vee\; \ln(x) = \frac{1}{2}$

vold. niet $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$



min. is $f(\sqrt{e}) = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$

64 $f(x) = (2x+4)^3 + e^{2x+4}$ geeft
$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(2x+4)^4 + \frac{1}{2}e^{2x+4} + c = \frac{1}{8}(2x+4)^4 + \frac{1}{2}e^{2x+4} + c$

65 $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$
$2(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2 = 0$
$2 - 2\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$
$-2\sin^2(x) + \sin(x) = 0$
$\sin(x)(-2\sin(x) + 1) = 0$
$\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = \frac{1}{2}$
$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$

66 Stel $M(p, p-1)$.
l: $y = 2x - 1$ oftewel l: $2x - y - 1 = 0$
$d(M, l) = \sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|2p - p + 1 - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
$|p| = 5$
$p = 5 \vee p = -5$
$p = 5$ geeft $M_1(5, 4)$ en c_1: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 5$.
$p = -5$ geeft $M_2(-5, -6)$ c_2: $(x+5)^2 + (y+6)^2 = 5$.

67 Stel $x_A = p$. Dan is $x_B = p + 4$.
$f(p) = f(p+4)$ geeft $4\sqrt{p} - p = 4\sqrt{p+4} - p - 4$
$4\sqrt{p} = 4\sqrt{p+4} - 4$
$\sqrt{p} = \sqrt{p+4} - 1$
kwadrateren geeft
$p = p + 4 - 2\sqrt{p+4} + 1$
$2\sqrt{p+4} = 5$
$\sqrt{p+4} = 2\frac{1}{2}$
$p + 4 = 6\frac{1}{4}$
$p = 2\frac{1}{4}$
$q = f(2\frac{1}{4}) = 4\sqrt{2\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{4} = 4 \cdot 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$

68 $x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-p}{2 \cdot \frac{1}{2}} = p$, dus $p = x_{top}$.
$y_{top} = \frac{1}{2}x_{top}^2 - x_{top} \cdot x_{top} + 2 = \frac{1}{2}x_{top}^2 - x_{top}^2 + 2 = -\frac{1}{2}x_{top}^2 + 2$
Dus de formule van de kromme is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Bladzijde 234

69 $(x^2 - 4)\sqrt{x} = x^3 - 4x$
$(x^2 - 4)\sqrt{x} = x(x^2 - 4)$
$x^2 - 4 = 0 \vee \sqrt{x} = x$
$x^2 = 4 \vee x = x^2$
$x = 2 \vee x = -2 \;\vee\; x = 0 \vee x = 1$
vold. niet

70 $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \dfrac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot 3^{-2} \cdot x^{-2} \cdot 8 \cdot x^5 = \frac{2}{9}x^3$
$\frac{2}{9}x^3 = y$
$x^3 = \frac{9}{2}y$
$x = (\frac{9}{2}y)^{\frac{1}{3}} = (\frac{9}{2})^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = 1{,}650...y^{\frac{1}{3}}$
Dus $x = 1{,}65y^{\frac{1}{3}}$.

71 $y = \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = \frac{2x^{1\frac{1}{2}}}{x^2+3}$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+3) \cdot 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{1\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{3x^{2\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}} - 4x^{2\frac{1}{2}}}{(x^2+3)^2} = \frac{9\sqrt{x} - x^2 \cdot \sqrt{x}}{(x^2+3)^2}$

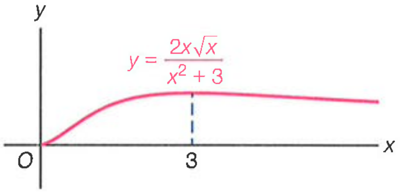
$\frac{dy}{dx} = 0$ geeft $9\sqrt{x} - x^2 \cdot \sqrt{x} = 0$

$(9 - x^2) \cdot \sqrt{x} = 0$

$x^2 = 9 \vee \sqrt{x} = 0$

$x = 3 \ \vee \ x = -3 \vee x = 0$

vold. niet



min. is $f(0) = 0$ en max. is $f(3) = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x\sqrt{x}}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Dus de vergelijking $\frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3} = p$ heeft twee oplossingen als $0 < p < \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

72 $f(x) = x \cdot \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi)$ geeft

$f'(x) = 1 \cdot \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi) + x \cdot 3\tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi) \cdot 3 \cdot (1 + \tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi))$

$= \tan^3(3x - \frac{1}{2}\pi) + 9x\tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi) \cdot (1 + \tan^2(3x - \frac{1}{2}\pi))$

73 $f(x) = g(x)$ geeft ${}^3\log(x+2) = 1 + {}^3\log(2x - 11)$

${}^3\log(x+2) = {}^3\log(3) + {}^3\log(2x - 11)$

${}^3\log(x+2) = {}^3\log(6x - 33)$

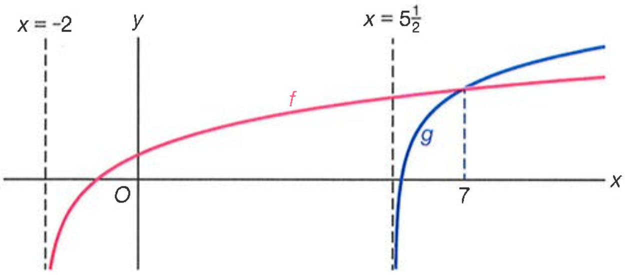
$x + 2 = 6x - 33$

$-5x = -35$

$x = 7$

$x + 2 > 0$ geeft $x > -2$, dus $D_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$.

$2x - 11 > 0$ geeft $x > 5\frac{1}{2}$, dus $D_g = \langle 5\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.



$f(x) \geq g(x)$ geeft $5\frac{1}{2} < x \leq 7$

74 Stel k: $y = ax + b$ met $a = \frac{-25 - -43}{3 - -3} = \frac{18}{6} = 3$.

$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } A(-3, -43) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -9 + b = -43 \\ b = -34 \end{array}$

Dus k: $y = 3x - 34$.

k snijden met l geeft $-4 + 2t = 3(3 + 3t) - 34$

$-4 + 2t = 9 + 9t - 34$

$-7t = -21$

$t = 3$

$t = 3$ geeft het snijpunt $(12, 2)$.

75 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$ geeft $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED}$

$\frac{47}{26} = \frac{AC}{18} = \frac{21}{ED}$

Uit $\frac{47}{26} = \frac{AC}{18}$ volgt $AC = \frac{18 \cdot 47}{26} = 32{,}53...$

$CE = AC - AE = 32{,}53... - 26 \approx 6{,}5$

Uit $\frac{47}{26} = \frac{21}{ED}$ volgt $DE = \frac{21 \cdot 26}{47} \approx 11{,}6.$

76 Voor g geldt $y = \frac{x-4}{x-6}$, dus voor g^{inv} geldt $x = \frac{y-4}{y-6}$

$xy - 6x = y - 4$

$xy - y = 6x - 4$

$y(x-1) = 6x - 4$

$y = \frac{6x-4}{x-1} = \frac{5(x-1)+5+x-4}{x-1} = 5 + \frac{x+1}{x-1}$

Dus g is de inverse van f voor $a = 5$.

77 m: $3x + 7y = 13$ oftewel m: $3x = -7y + 13$, dus m: $x = -\frac{7}{3}y + \frac{13}{3}$.

Stel $y_M = p$, dan is $x_M = -\frac{7}{3}p + \frac{13}{3}$.

$d(M, k) = d(M, l)$ geeft $\frac{|2(-\frac{7}{3}p + \frac{13}{3}) - p - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|-\frac{7}{3}p + \frac{13}{3} - 2p - 2|}{\sqrt{5}}$

$|-\frac{14}{3}p + \frac{26}{3} - p - 1| = |-\frac{13}{3}p + \frac{7}{3}|$

$|-\frac{17}{3}p + \frac{23}{3}| = |-\frac{13}{3}p + \frac{7}{3}|$

$-\frac{17}{3}p + \frac{23}{3} = -\frac{13}{3}p + \frac{7}{3} \vee -\frac{17}{3}p + \frac{23}{3} = \frac{13}{3}p - \frac{7}{3}$

$-\frac{4}{3}p = -\frac{16}{3} \vee -10p = -10$

$p = 4 \vee p = 1$

$p = 1$ geeft $M(2, 1)$ en $p = 4$ geeft $N(-5, 4)$.

Dus $d(M, N) = \sqrt{(-5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$.

78 Raken, dus $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$

$\sqrt{5-x^2} = ax + 5 \wedge \frac{1}{2\sqrt{5-x^2}} \cdot -2x = a$

$\sqrt{5-x^2} = ax + 5 \wedge \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} = a$

Substitutie van $a = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$ in $\sqrt{5-x^2} = ax + 5$ geeft $\sqrt{5-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \cdot x + 5$

$5 - x^2 = -x^2 + 5\sqrt{5-x^2}$

$5 = 5\sqrt{5-x^2}$

$1 = \sqrt{5-x^2}$

$1 = 5 - x^2$

$x^2 = 4$

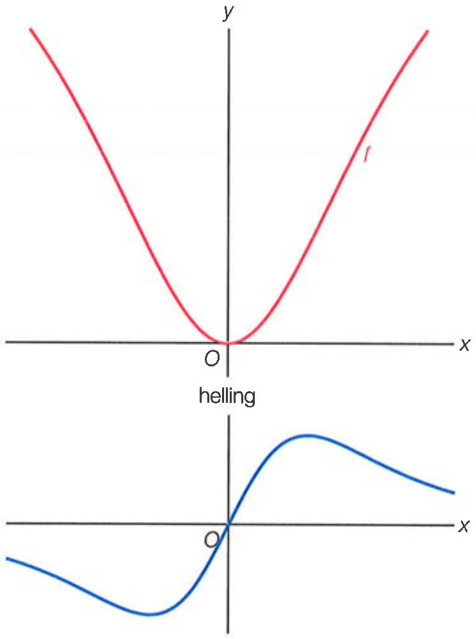
$x = 2 \vee x = -2$

$x = 2$ geeft $a = \frac{-2}{\sqrt{5-4}} = -2$ en $x = -2$ geeft $a = \frac{2}{\sqrt{5-4}} = 2$.

Dus de grafieken van f en g raken elkaar voor $a = 2$ en voor $a = -2$.

Bladzijde 235

79



80 $\frac{3x-5}{x^2+4} = \frac{6x-10}{x+36}$

$\frac{3x-5}{x^2+4} = \frac{2(3x-5)}{x+36}$

$3x-5=0 \vee \frac{1}{x^2+4} = \frac{2}{x+36}$

$3x=5 \vee 2x^2+8=x+36$

$x=1\frac{2}{3} \vee 2x^2-x-28=0$

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot -28=225$

$x=1\frac{2}{3} \vee x=\frac{1+15}{4}=4 \vee x=\frac{1-15}{4}=-3\frac{1}{2}$

81 $4\cdot 2^x = 4^{2x-1}$

$2^2\cdot 2^x=(2^2)^{2x-1}$

$2^{2+x}=2^{4x-2}$

$2+x=4x-2$

$-3x=-4$

$x=1\frac{1}{3}$

82 $f_p(x)=\frac{x^2+5}{x+p}$ geeft $f_p'(x)=\frac{(x+p)\cdot 2x-(x^2+5)\cdot 1}{(x+p)^2}=\frac{2x^2+2px-x^2-5}{(x+p)^2}=\frac{x^2+2px-5}{(x+p)^2}$

$f_p'(2)=0$ geeft $\frac{4+4p-5}{(2+p)^2}=0$

$4p-1=0$

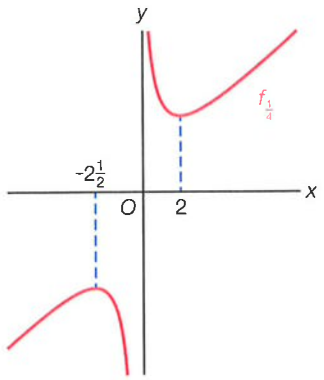
$p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$ geeft $f_{\frac{1}{4}}(x)=\frac{x^2+5}{x+\frac{1}{4}}$ en $f_{\frac{1}{4}}'(x)=\frac{x^2+\frac{1}{2}x-5}{(x+\frac{1}{4})^2}$

$f_{\frac{1}{4}}'(x)=0$ geeft $x^2+\frac{1}{2}x-5=0$

$(x-2)(x+2\frac{1}{2})=0$

$x=2 \vee x=-2\frac{1}{2}$



Dus $p = \frac{1}{4}$ en max. is $f_{\frac{1}{4}}(-2\frac{1}{2}) = \dfrac{6\frac{1}{4}+5}{-2\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = -5$.

83 $l: \begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = 2t + b \end{cases}$ oftewel $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ geeft } \vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ dus } l\text{: } 2x - 3y = c \\ \text{door } (-3, b) \end{array}\right\} c = 2 \cdot -3 - 3 \cdot b = -6 - 3b$$

Dus l: $2x - 3y = -6 - 3b$.

k: $2x + ay = 12$ en l: $2x - 3y = -6 - 3b$ vallen samen als $a = -3 \wedge 12 = -6 - 3b$

$a = -3 \wedge 3b = -18$

$a = -3 \wedge b = -6$

84 $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$

$2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$

$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

$\cos^4(x) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x))^2$

$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$

$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x))$

$\cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x)$

$\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

Dus $y = \cos^4(x)$ is te herleiden tot $y = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$.

85 $x^2 - 1 = 0$ geeft $x^2 = 1$

$x = 1 \vee x = -1$

Dus de verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $x = -1$.

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 - 1} = x + \frac{3x^2 - 4x + 8}{x^2 - 1}$$

$$= x + \frac{3(x^2 - 1) + 3 - 4x + 8}{x^2 - 1} = x + 3 + \frac{-4x + 11}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-4x + 11}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-4}{x} + \frac{11}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$$

Dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + 3$.

86 Loodrecht snijden, dus $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$$\ln(x) = x^2 + px \wedge \frac{1}{x} \cdot (2x + p) = -1$$
$$\ln(x) = x^2 + px \wedge 2x + p = -x$$
$$\ln(x) = x^2 + px \wedge p = -3x$$

Substitutie van $p = -3x$ in $\ln(x) = x^2 + px$ geeft $\ln(x) = x^2 + -3x \cdot x$

$$\ln(x) = -2x^2$$

Voer in $y_1 = \ln(x)$ en $y_2 = -2x^2$.
De optie snijpunt geeft $x = 0{,}548...$
Dus $p = -3 \cdot 0{,}548... \approx -1{,}64$.

87 k: $2x + y = 8$ oftewel k: $y = 8 - 2x$
Stel $M(p, 8 - 2p)$.
l: $3x - 4y = 8$ oftewel l: $3x - 4y - 8 = 0$

$d(M, l) = d(M, y\text{-as})$ geeft $\dfrac{|3p - 4(8 - 2p) - 8|}{\sqrt{25}} = |p|$

$$\frac{|3p - 32 + 8p - 8|}{5} = |p|$$
$$|11p - 40| = 5|p|$$
$$11p - 40 = 5p \vee 11p - 40 = -5p$$
$$6p = 40 \vee 16p = 40$$
$$p = 6\tfrac{2}{3} \vee p = 2\tfrac{1}{2}$$

$p = 6\frac{2}{3}$ geeft $N(6\frac{2}{3}, -5\frac{1}{3})$ en $p = 2\frac{1}{2}$ geeft $M(2\frac{1}{2}, 3)$.

Bladzijde 236

88 $$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)}{x - 3} = \frac{(2^2 + 4)(2 + 2)}{2 - 3} = -32$$

89 $f(x) = x^3 + \dfrac{5x^2 + 1}{2x - 3}$ geeft

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{(2x - 3) \cdot 10x - (5x^2 + 1) \cdot 2}{(2x - 3)^2} = 3x^2 + \frac{20x^2 - 30x - 10x^2 - 2}{(2x - 3)^2} = 3x^2 + \frac{10x^2 - 30x - 2}{(2x - 3)^2}$$

90 $x^5 + 9 = 10x^2\sqrt{x}$
Stel $x^2\sqrt{x} = u$.
$u^2 + 9 = 10u$
$u^2 - 10u + 9 = 0$
$(u - 1)(u - 9) = 0$
$u = 1 \vee u = 9$
$x^2\sqrt{x} = 1 \vee x^2\sqrt{x} = 9$
$x^5 = 1 \vee x^5 = 81$
$x = 1 \vee x = \sqrt[5]{81}$

91 Stel $H = b \cdot g^t$.

$$g_{3\text{ dagen}} = \frac{795}{942}$$
$$g_{\text{dag}} = \left(\frac{795}{942}\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}9450...$$

$$\left.\begin{array}{l} H = b \cdot 0{,}9450...^t \\ t = 5 \text{ en } H = 942 \end{array}\right\} b \cdot 0{,}9450...^5 = 942$$
$$b = \frac{942}{0{,}9450...^5} = 1249{,}8...$$

Dus $H = 1250 \cdot 0{,}945^t$.

92 $f_p(x) = \dfrac{x^2+1}{x+p}$ geeft $f_p'(x) = \dfrac{(x+p)\cdot 2x - (x^2+1)\cdot 1}{(x+p)^2} = \dfrac{2x^2+2px-x^2-1}{(x+p)^2} = \dfrac{x^2+2px-1}{(x+p)^2}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2px - 1 = 0$

$2px = -x^2 + 1$

$p = \dfrac{-x^2+1}{2x}$

$y = \dfrac{x^2+1}{x + \dfrac{-x^2+1}{2x}} = \dfrac{2x(x^2+1)}{2x^2 - x^2 + 1} = \dfrac{2x(x^2+1)}{x^2+1} = 2x$

Dus alle toppen liggen op de lijn k: $y = 2x$.

93 k: $\dfrac{x}{2p} + \dfrac{y}{p} = 1$ oftewel k: $x + 2y = 2p$

Door (6, 1) geeft $6 + 2 = 2p$

$8 = 2p$

$p = 4$

94 $f(x) = \dfrac{x^3+5x^2+6x+4+\sqrt{x}}{x^2} = x + 5 + \dfrac{6}{x} + 4x^{-2} + x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 6\ln|x| - 4x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 6\ln|x| - \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + c$

95 Er moet gelden $f(\frac{1}{2}\pi - p) = f(\frac{1}{2}\pi + p)$.

$f(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 + (\frac{1}{2}\pi - p - \frac{1}{2}\pi)\cos(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 - p\cos(\frac{1}{2}\pi - p) = 2 - p\cos(p - \frac{1}{2}\pi)$

$f(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 + (\frac{1}{2}\pi + p - \frac{1}{2}\pi)\cos(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 + p\cos(\frac{1}{2}\pi + p) = 2 - p\cos(p - \frac{1}{2}\pi)$

Voor elke p is $f(\frac{1}{2}\pi - p) = f(\frac{1}{2}\pi + p)$.

Dus de grafiek van f is lijnsymmetrisch in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

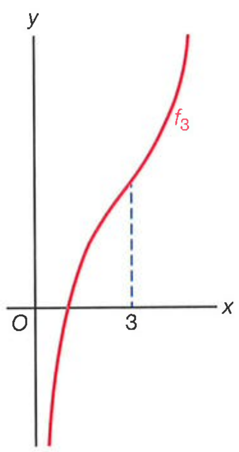
96 $f_a(x) = (x+a)\ln(x)$

$f_a'(x) = 1 \cdot \ln(x) + (x+a)\cdot\dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 + \dfrac{a}{x} = \ln(x) + 1 + ax^{-1}$

$f_a''(x) = \dfrac{1}{x} - ax^{-2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{x^2}$

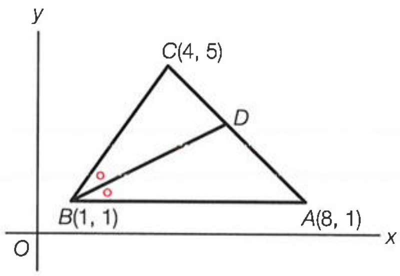
$f_a''(3) = 0$ geeft $\frac{1}{3} - \dfrac{a}{9} = 0$

$a = 3$



De grafiek van f_a gaat voor $a = 3$ bij $x = 3$ over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.

97



$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

$\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ en $\left|\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right| = 5$, dus $\vec{r}_{BD} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ en BD: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en AC: $x + y = 9$.

BD snijden met AC geeft $1 + 2t + 1 + t = 9$

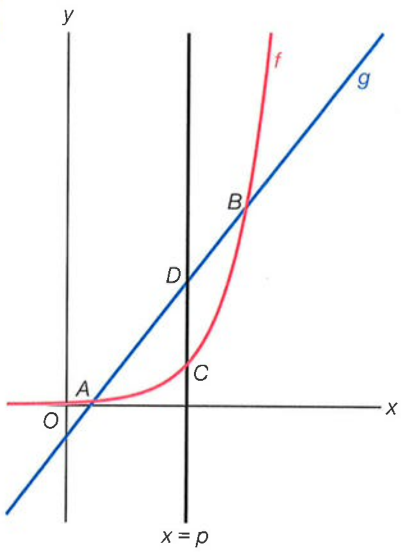
$3t = 7$

$t = 2\frac{1}{3}$

$t = 2\frac{1}{3}$ geeft $x_D = 1 + 2 \cdot 2\frac{1}{3} = 5\frac{2}{3}$ en $y_D = 1 + 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Dus $D(5\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3})$.

98



$L = g(p) - f(p) = 3p - 1 - e^{2p-3}$

$\frac{dL}{dp} = 3 - e^{2p-3} \cdot 2 = 3 - 2e^{2p-3}$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $2e^{2p-3} = 3$

$e^{2p-3} = 1\frac{1}{2}$

$2p - 3 = \ln(1\frac{1}{2})$

$2p = 3 + \ln(1\frac{1}{2})$

$p = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})$

Dus voor $p = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})$ is de lengte van CD maximaal.

Deze maximale lengte is $3(1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})) - 1 - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2}) - 2\frac{1}{2} = 2 + 1\frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{2})$.

99 $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}$

Er is een perforatie als $x = 5$.

$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x-1}{x+5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Dus de perforatie is $(5, \frac{2}{5})$.

100 $\frac{x^4 - x^2 - 20}{x^4 - 2x^2 - 24} = \frac{(x^2+4)(x^2-5)}{(x^2+4)(x^2-6)} = \frac{x^2-5}{x^2-6}$

Bladzijde 237

101 $2^{x-4} + 2^{x+1} = 66$
$2^x \cdot 2^{-4} + 2^x \cdot 2^1 = 66$
$\frac{1}{16} \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x = 66$
$2\frac{1}{16} \cdot 2^x = 66$
$2^x = 32$
$x = 5$

102 De draaiingshoek van A is $\frac{1}{3}\pi$.
Dus de draaiingshoeken van B, C en D zijn respectievelijk $\frac{5}{6}\pi$, $1\frac{1}{3}\pi$ en $1\frac{5}{6}\pi$.
Dit geeft $B(\cos(\frac{5}{6}\pi), \sin(\frac{5}{6}\pi)) = B(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, $C(\cos(1\frac{1}{3}\pi), \sin(1\frac{1}{3}\pi)) = C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $D(\cos(1\frac{5}{6}\pi), \sin(1\frac{5}{6}\pi)) = D(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

103 De lijnen l_1 en l_2 zijn evenwijdig met k, op afstand $\sqrt{2}$ van k.
$\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en k: $x + y = 4$.
$l \,//\, k$ geeft l: $x + y = c$ oftewel l: $x + y - c = 0$.
Het punt (4, 0) ligt op k.
$d(k, l) = d((4, 0), l) = \sqrt{2}$ geeft $\frac{|4 + 0 - c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
$|4 - c| = 2$
$4 - c = 2 \vee 4 - c = -2$
$c = 2 \vee c = 6$
Dus l_1: $x + y = 2$ en l_2: $x + y = 6$.
l_1: $x + y = 2$ oftewel l_1: $y = 2 - x$ snijden met c geeft $x^2 + (2 - x)^2 - 2x + 6(2 - x) = 0$
$x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x + 12 - 6x = 0$
$2x^2 - 12x + 16 = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$(x - 2)(x - 4) = 0$
$x = 2 \vee x = 4$
$x = 2$ en $y = 2 - x$ geeft het punt (2, 0).
$x = 4$ en $y = 2 - x$ geeft het punt (4, -2).
l_2: $x + y = 6$ oftewel l_2: $y = 6 - x$ snijden met c geeft $x^2 + (6 - x)^2 - 2x + 6(6 - x) = 0$
$x^2 + 36 - 12x + x^2 - 2x + 36 - 6x = 0$
$2x^2 - 20x + 72 = 0$
$x^2 - 10x + 36 = 0$
$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = -44$
$D < 0$, dus geen oplossingen.
De gevraagde punten zijn (2, 0) en (4, -2).

104 $O(V) = \int_0^p x^2\sqrt{x}\,dx = \int_0^p x^{2\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{7}x^{3\frac{1}{2}}\right]_0^p = \frac{2}{7}p^{3\frac{1}{2}} - 0 = \frac{2}{7}p^{3\frac{1}{2}}$
$O(V) = 10$ geeft $\frac{2}{7}p^{3\frac{1}{2}} = 10$
$p^{3\frac{1}{2}} = 35$
$p = 35^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{35^2} = \sqrt[7]{1225}$

105 $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$
$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
$2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$
$\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

$f(x) = \cos^2(4x) + \sin^2(6x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(12x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(8x) - \frac{1}{2}\cos(12x)$ geeft
$F(x) = x + \frac{1}{16}\sin(8x) - \frac{1}{24}\sin(12x) + c$

106 De grafiek van f_a heeft een perforatie als $\sin^2(x) - a\cos(x) = 0 \wedge \sin(x) + \frac{1}{2} = 0$.
$\sin(x) + \frac{1}{2} = 0$ geeft $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

$x = 1\frac{1}{6}\pi$ geeft $\sin^2(1\frac{1}{6}\pi) - a\cos(1\frac{1}{6}\pi) = 0$

$$(-\tfrac{1}{2})^2 - a \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$
$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = 0$$
$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = -\tfrac{1}{4}$$
$$a = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3} = -\tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$

$x = 1\frac{5}{6}\pi$ geeft $\sin^2(1\frac{5}{6}\pi) - a\cos(1\frac{5}{6}\pi) = 0$

$$(-\tfrac{1}{2})^2 - a \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$
$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = 0$$
$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}$$
$$a = \tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$

Er is een perforatie als $a = -\frac{1}{6}\sqrt{3}$ en als $a = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

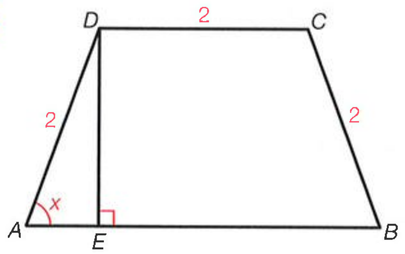
107 Van c is het middelpunt $M(-4, 5)$ en de straal $r = \sqrt{5}$.
k: $y = ax + b$ door $A(-1, 4)$ geeft $-a + b = 4$, dus $b = a + 4$.
Dit geeft k: $y = ax + a + 4$ oftewel k: $ax - y + a + 4 = 0$.

$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|-4a - 5 + a + 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}$

$$|-3a - 1| = \sqrt{5a^2 + 5}$$
$$9a^2 + 6a + 1 = 5a^2 + 5$$
$$4a^2 + 6a - 4 = 0$$
$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$
$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$
$$a = \frac{-3 + 5}{4} = \tfrac{1}{2} \vee a = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$a = \frac{1}{2}$ geeft $b = 4\frac{1}{2}$ en k_1: $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.
$a = -2$ geeft $b = 2$ en k_2: $y = -2x + 2$.

108



$\sin(x) = \dfrac{DE}{2}$ geeft $DE = 2\sin(x)$

$\cos(x) = \dfrac{AE}{2}$ geeft $AE = 2\cos(x)$

$AB = 2 + 2 \cdot AE = 2 + 2 \cdot 2\cos(x) = 2 + 4\cos(x)$
$O = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(2 + 4\cos(x) + 2) \cdot 2\sin(x) = \sin(x)(4 + 4\cos(x))$
$\dfrac{dO}{dx} = \cos(x) \cdot (4 + 4\cos(x)) + \sin(x) \cdot -4\sin(x) = 4\cos(x) + 4\cos^2(x) - 4\sin^2(x)$

$\frac{dO}{dx} = 0$ geeft $4\cos(x) + 4\cos^2(x) - 4\sin^2(x) = 0$
$4\cos(x) + 4(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 0$
$4\cos(x) + 4\cos(2x) = 0$
$4\cos(2x) = -4\cos(x)$
$\cos(2x) = -\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos(x + \pi)$
$2x = x + \pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -x - \pi + k \cdot 2\pi$
$x = \pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi$

$x = \frac{1}{3}\pi$ geeft $O_{max} = \sin(\frac{1}{3}\pi)(4 + 4\cos(\frac{1}{3}\pi)) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (4 + 4 \cdot \frac{1}{2}) = 3\sqrt{3}$

109 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 3 - 8 + 3 = -2$.
$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(1) = 1, \text{ dus } A(1, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = 1 \\ b = 3 \end{array}$
Dus k: $y = -2x + 3$.

Bladzijde 238

110 $F = 10 - \frac{K}{K + 1}$
$F(K + 1) = 10(K + 1) - K$
$FK + F = 10K + 10 - K$
$FK - 9K = 10 - F$
$K(F - 9) = 10 - F$
$K = \frac{10 - F}{F - 9}$

111 $9^x + 54 = 15 \cdot 3^x$
$(3^x)^2 - 15 \cdot 3^x + 54 = 0$
Stel $3^x = u$.
$u^2 - 15u + 54 = 0$
$(u - 6)(u - 9) = 0$
$u = 6 \vee u = 9$
$3^x = 6 \vee 3^x = 9$
$x = {}^3\log(6) \vee x = 2$

112 $\cos^2(\frac{1}{2}x) - \cos(\frac{1}{2}x) - 2 = 0$
$(\cos(\frac{1}{2}x) + 1)(\cos(\frac{1}{2}x) - 2) = 0$
$\cos(\frac{1}{2}x) = -1 \vee \cos(\frac{1}{2}x) = 2$
$\frac{1}{2}x = \pi + k \cdot 2\pi$
$x = 2\pi + k \cdot 4\pi$

113 $y = 2 + 3^{0,2x - 1}$
$3^{0,2x - 1} = y - 2$
$0,2x - 1 = {}^3\log(y - 2)$
$0,2x = 1 + {}^3\log(y - 2)$
$x = 5 + 5 \cdot {}^3\log(y - 2)$

114 Stel k: $y = 2x + b$.
Substitutie van $y = 2x + b$ in de cirkelvergelijking geeft
$x^2 + (2x + b)^2 + 2x - 6(2x + b) + 5 = 0$
$x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 + 2x - 12x - 6b + 5 = 0$
$5x^2 + 4bx - 10x + b^2 - 6b + 5 = 0$
$5x^2 + (4b - 10)x + b^2 - 6b + 5 = 0$
$D = (4b - 10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 6b + 5) = 16b^2 - 80b + 100 - 20b^2 + 120b - 100 = -4b^2 + 40b$
$D = 0$ geeft $-4b^2 + 40b = 0$
$4b(-b + 10) = 0$
$b = 0 \vee b = 10$
Dus de gevraagde raaklijnen zijn $y = 2x$ en $y = 2x + 10$.

Alternatieve uitwerking
Stel k: $y = 2x + b$ oftewel k: $2x - y + b = 0$
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$
$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$
$(x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 5 = 0$
$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$
Dus van de cirkel is het middelpunt $M(-1, 3)$ en de straal $r = \sqrt{5}$.
$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|-2 - 3 + b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
$|-5 + b| = 5$
$-5 + b = 5 \vee -5 + b = -5$
$b = 10 \vee b = 0$
Dus de gevraagde raaklijnen zijn $y = 2x + 10$ en $y = 2x$.

115 $f(x) = \dfrac{16}{(4x + 10)^5} = 16(4x + 5)^{-5}$ geeft $F(x) = 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{4}(4x + 10)^{-4} + c = \dfrac{-1}{(4x + 10)^4} + c$

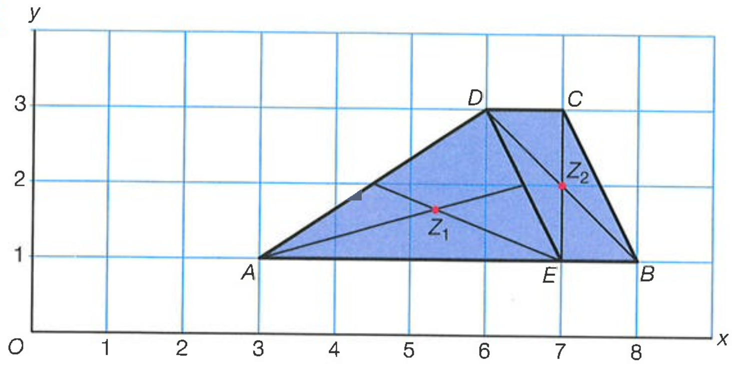
116 $x = 0$ geeft $2 + 4\cos(2t) = 0$
$4\cos(2t) = -2$
$\cos(2t) = -\frac{1}{2}$
$2t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
$t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$
t in $[0, \pi]$ geeft $t = \frac{1}{3}\pi \vee t = \frac{2}{3}\pi$
$x < 0$ geeft $\frac{1}{3}\pi < t < \frac{2}{3}\pi$

$y = 1$ geeft $1 + 4\sin(2t) = 1$
$4\sin(2t) = 0$
$\sin(2t) = 0$
$2t = k \cdot \pi$
$t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$
t in $[0, \pi]$ geeft $t = 0 \vee t = \frac{1}{2}\pi$
$y > 1$ geeft $0 < t < \frac{1}{2}\pi$

$x < 0 \wedge y > 1$ geeft $\frac{1}{3}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$
Dus P bevindt zich $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$ seconden links van de y-as en boven de lijn $y = 1$.

117 $f_a(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{2x + a} = \dfrac{(x - 1)(x + 5)}{2x + a} = \dfrac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x + a}$
De grafiek van f_a heeft een perforatie als $a = -2$ en als $a = 10$.
$a = -2$ geeft $\lim\limits_{x \to 1} f_{-2}(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{4}(2x + 10) = 3$
$a = 10$ geeft $\lim\limits_{x \to -5} f_{10}(x) = \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{\frac{1}{4}(2x - 2)(2x + 10)}{2x + 10} = \lim\limits_{x \to -5} \frac{1}{4}(2x - 2) = -3$
Dus voor $a = -2$ is de perforatie het punt $(1, 3)$ en voor $a = 10$ is de perforatie het punt $(-5, -3)$.

118



$\vec{z}_1 = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{d} + \vec{e}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}16\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\frac{1}{3}\\1\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

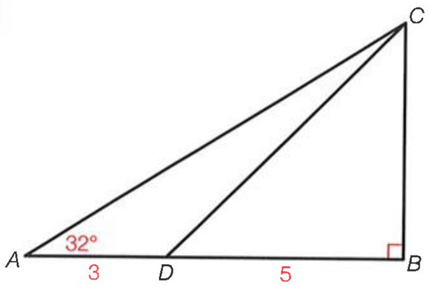
$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

$m_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$, $m_2 = 1 \cdot 2 = 2$ en de totale massa is 6.

$\vec{z} = \frac{1}{6}\left(4 \cdot \begin{pmatrix}5\frac{1}{3}\\1\frac{2}{3}\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}21\frac{1}{3}\\6\frac{2}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}35\frac{1}{3}\\10\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\frac{8}{9}\\1\frac{7}{9}\end{pmatrix}$, dus $Z(5\frac{8}{9}, 1\frac{7}{9})$.

119 $f(x) = \frac{6x-5}{2x+1} = \frac{3(2x+1)-3-5}{2x+1} = 3 - \frac{8}{2x+1}$ geeft $F(x) = 3x - 8 \cdot \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c = 3x - 4\ln|2x+1| + c$

120



$\angle ACB = 180° - 90° - 32° = 58°$

$\tan(32°) = \frac{BC}{8}$ geeft $BC = 8\tan(32°) = 4{,}99...$

$\tan(\angle BCD) = \frac{BD}{BC} = \frac{5}{4{,}99...} = 1{,}00...$ geeft $\angle BCD = 45{,}00...°$

$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 58° - 45{,}00...° \approx 13{,}0°$

121 Voor f geldt $y = \frac{1}{2} - \frac{5}{4x-6}$, dus voor f^{inv} geldt $x = \frac{1}{2} - \frac{5}{4y-6}$

$x(4y-6) = \frac{1}{2}(4y-6) - 5$
$4xy - 6x = 2y - 3 - 5$
$4xy - 2y = 6x - 8$
$y(4x-2) = 6x - 8$
$y = \frac{6x-8}{4x-2} = \frac{2(3x-4)}{2(2x-1)} = \frac{3x-4}{2x-1}$

Dus $g(x) = \frac{3x-4}{2x-1}$ is de inverse van $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4x-6}$.

122 $\vec{n}_k = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_k = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

$l: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$.

$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-9-14|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{58}} = \frac{23}{\sqrt{754}}$

$\angle(k, l) \approx 33{,}1°$

Bladzijde 239

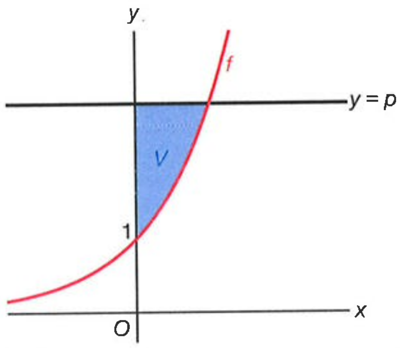
123 ${}^3\log(x+1) = 4 + {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1)$
${}^3\log(x+1) = 4 - {}^3\log(x-1)$
${}^3\log(x+1) + {}^3\log(x-1) = 4$
${}^3\log((x+1)(x-1)) = 4$
${}^3\log(x^2-1) = 4$
$x^2 - 1 = 81$
$x^2 = 82$
$x = \sqrt{82} \vee x = -\sqrt{82}$ (vold. niet)

124 Van c is het middelpunt $M(3, -1)$ en de straal $r = \sqrt{10}$.
k: $y = ax + b$ door $A(-1, -3)$ geeft $-a + b = -3$, dus $b = a - 3$.
Dit geeft k: $y = ax + a - 3$ oftewel k: $ax - y + a - 3 = 0$.

$d(M, k) = r$ geeft $\dfrac{|3a+1+a-3|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$
$|4a-2| = \sqrt{10a^2+10}$
$16a^2 - 16a + 4 = 10a^2 + 10$
$6a^2 - 16a - 6 = 0$
$3a^2 - 8a - 3 = 0$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100$
$a = \dfrac{8+10}{6} = 3 \vee a = \dfrac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$

$a = 3$ geeft $b = 0$ en k_1: $y = 3x$.
$a = -\frac{1}{3}$ geeft $b = -3\frac{1}{3}$ en k_2: $y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$.

125



$f(x) = p$ geeft $e^x = p$ oftewel $x = \ln(p)$

$O(V) = \int_0^{\ln(p)} (p - e^x)\,dx = [px - e^x]_0^{\ln(p)} = p\ln(p) - p - (0-1) = p\ln(p) - p + 1$

$O(V) = 1$ geeft $p\ln(p) - p + 1 = 1$
$p\ln(p) - p = 0$
$p(\ln(p) - 1) = 0$
$p = 0 \vee \ln(p) = 1$
vold. niet $p = e$

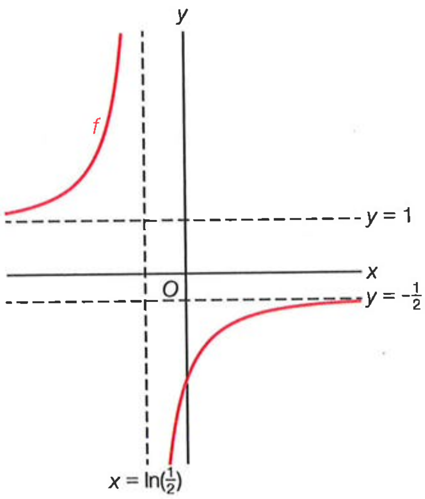
Dus voor $p = e$.

126 $1 - 2e^x = 0$
$e^x = \frac{1}{2}$
$x = \ln(\frac{1}{2})$
De verticale asymptoot is de lijn $x = \ln(\frac{1}{2})$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+1}{1-2e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-2} = \dfrac{1+0}{0-2} = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+1}{1-2e^x} = \dfrac{0+1}{1-2\cdot 0} = \dfrac{1}{1} = 1$

De horizontale asymptoten zijn de lijnen $y = -\frac{1}{2}$ en $y = 1$.
Zie de figuur hiernaast.



127 $y(t) = 0$ geeft $\cos(2t) = 0$

$$2t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$
$$t = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

De eerste keer is voor $t = \frac{1}{4}\pi$.

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin(3t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}$

$\vec{v}(\frac{1}{4}\pi) = \begin{pmatrix} -3\sin(\frac{3}{4}\pi) \\ -2\sin(\frac{1}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

$v(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{(-1\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (-2)^2} = \sqrt{8\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{34}$

Dus de gevraagde baansnelheid is $\frac{1}{2}\sqrt{34}$.

128 $y(t) = 0$ geeft $t^2 - 2t + 1 = 0$

$$(t-1)^2 = 0$$
$$t = 1$$

Het raakpunt is $(1, 0)$.

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 + 2t + 3 \\ 2t - 2 \end{pmatrix}$

$\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} -1 + 2 + 3 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $v(1) = 4$.

De gevraagde baansnelheid is 4.

$v(t) = \sqrt{(-t^2 + 2t + 3)^2 + (2t-2)^2}$ geeft

$a(t) = v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{(-t^2 + 2t + 3)^2 + (2t-2)^2}} \cdot (2(-t^2 + 2t + 3) \cdot (-2t + 2) + 2(2t - 2) \cdot 2)$

$a(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{(-1 + 2 + 3)^2 + (2-2)^2}} \cdot (2(-1 + 2 + 3) \cdot (-2 + 2) + 2(2-2) \cdot 2) = \dfrac{1}{2\sqrt{16}} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 2) = 0$

De gevraagde baanversnelling is 0.

129 $y = \sqrt{x-1}$

$y^2 = x - 1$

$x = y^2 + 1$

$I(L) = \pi\int_0^q x^2\,dy = \pi\int_0^q (y^2+1)^2\,dy = \pi\int_0^q (y^4 + 2y^2 + 1)\,dy = \pi\left[\frac{1}{5}y^5 + \frac{2}{3}y^3 + y\right]_0^q = \pi(\frac{1}{5}q^5 + \frac{2}{3}q^3 + q)$

$q = \sqrt{p-1}$ geeft $I(L) = \pi(\frac{1}{5}(\sqrt{p-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{p-1})^3 + \sqrt{p-1})$

$I(M) = \pi\int_1^p y^2\,dx = \pi\int_1^p (x-1)\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^p = \pi(\frac{1}{2}p^2 - p - (\frac{1}{2} - 1)) = \pi(\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{1}{2})$

$I(L) = 2 \cdot I(M)$ geeft $\pi(\frac{1}{5}(\sqrt{p-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{p-1})^3 + \sqrt{p-1}) = 2 \cdot \pi(\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{1}{2})$ oftewel

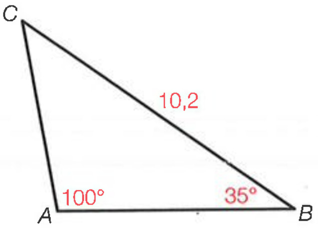
$\frac{1}{5}(\sqrt{p-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{p-1})^3 + \sqrt{p-1} = p^2 - 2p + 1$.

Voer in $y_1 = \frac{1}{5}(\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + \sqrt{x-1}$ en $y_2 = x^2 - 2x + 1$.

De optie snijpunt geeft $x = 3{,}448...$

Dus $p \approx 3{,}45$.

130



$\angle C = 180° - 100° - 35° = 45°$

De sinusregel geeft $\dfrac{10{,}2}{\sin(100°)} = \dfrac{AB}{\sin(45°)}$ en $\dfrac{10{,}2}{\sin(100°)} = \dfrac{AC}{\sin(35°)}$

$AB = \dfrac{10{,}2\sin(45°)}{\sin(100°)} = 7{,}32...$ $\quad AC = \dfrac{10{,}2\sin(35°)}{\sin(100°)} = 5{,}94...$

Dus $AB \approx 7{,}3$ en $AC \approx 5{,}9$.

131 $2\sin(2x) = -\sqrt{3}$

$\sin(2x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$

132 $d(A, B) = \sqrt{(2-2p)^2 + (p+1-3)^2} = \sqrt{(2-2p)^2 + (p-2)^2} = \sqrt{4 - 8p + 4p^2 + p^2 - 4p + 4} = \sqrt{5p^2 - 12p + 8}$

$\sqrt{5p^2 - 12p + 8}$ is minimaal als $5p^2 - 12p + 8$ minimaal is. Dus als $p = -\dfrac{-12}{2 \cdot 5} = \frac{6}{5}$.

De minimale afstand is $\sqrt{5 \cdot (\frac{6}{5})^2 - 12 \cdot \frac{6}{5} + 8} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

133 $25^x + 6 = 5^{x+1}$

$(5^2)^x - 5^{x+1} + 6 = 0$

$(5^x)^2 - 5 \cdot 5^x + 6 = 0$

Stel $5^x = u$.

$u^2 - 5u + 6 = 0$

$(u-2)(u-3) = 0$

$u = 2 \vee u = 3$

$5^x = 2 \vee 5^x = 3$

$x = {}^5\log(2) \vee x = {}^5\log(3)$

134 $\vec{r}_{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

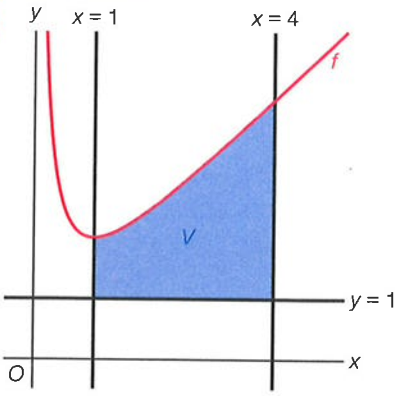
$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$$\cos(\angle(AB, AC)) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{|-3+12|}{5 \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{9}{5\sqrt{10}}$$

$\angle(AB, AC) \approx 55{,}3°$

Bladzijde 240

135



$$I(L) = \pi\int_1^4 \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 dx - \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = \pi\int_1^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx - 3\pi = \pi\int_1^4 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx - 3\pi$$
$$= \pi\int_1^4 (x^2 + 2 + x^{-2})\, dx - 3\pi = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 + 2x - x^{-1}\right]_1^4 - 3\pi$$
$$= \pi(\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 4^{-1} - (\tfrac{1}{3} + 2 - 1)) - 3\pi = 27\tfrac{3}{4}\pi - 3\pi = 24\tfrac{3}{4}\pi$$

136 $y(t) = 0$ geeft $\sin(2t) = 0$
$2t = k \cdot \pi$
$t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$
Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ snijdt de baan de positieve x-as.
$\begin{cases} x(t) = \sin(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = \cos(t - \frac{1}{4}\pi) \\ y'(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=\frac{1}{2}\pi} = \frac{2\cos(\pi)}{\cos(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

$\tan(\alpha) = -2\sqrt{2}$ geeft $\alpha = -70{,}5...°$
Dus de gevraagde hoek is 71°.

137 $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^{2x} - 3}$ geeft

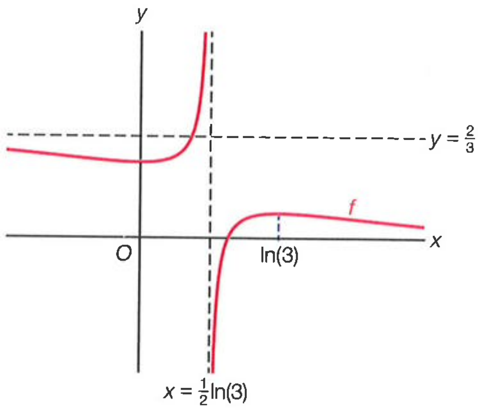
$$f'(x) = \frac{(e^{2x}-3) \cdot e^x - (e^x - 2) \cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x}-3)^2} = \frac{e^{3x} - 3e^x - 2e^{3x} + 4e^{2x}}{(e^{2x}-3)^2} = \frac{-e^{3x} + 4e^{2x} - 3e^x}{(e^{2x}-3)^2} = \frac{-e^x(e^{2x} - 4e^x + 3)}{(e^{2x}-3)^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $-e^x(e^{2x} - 4e^x + 3) = 0$
$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
$(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$
$e^x = 1 \vee e^x = 3$
$x = 0 \vee x = \ln(3)$

$f(0) = \dfrac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2}$ en $f(\ln(3)) = \dfrac{3-2}{9-3} = \frac{1}{6}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{2}{e^{2x}}}{1 - \frac{3}{e^{2x}}} = \frac{0-0}{1-0} = 0 \text{ en } \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 3} = \frac{0-2}{0-3} = \frac{2}{3}$$

$e^{2x} - 3 = 0$ geeft $e^{2x} = 3$
$2x = \ln(3)$
$x = \frac{1}{2}\ln(3)$
Schets, zie hiernaast.
Het bereik van f bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow, \frac{1}{6}]$ en $[\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$.



138 $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t^2 + 4t \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t - 4 \\ y'(t) = 4t + 4 \end{cases}$

Evenwijdig met de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$4t + 4 = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$

$4t = -4 \wedge 2t \neq 4$

$t = -1 \wedge t \neq 2$

$t = -1$ geeft het punt $(5, -2)$.

Evenwijdig met de y-as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$2t - 4 = 0 \wedge 4t + 4 \neq 0$

$t = 2 \wedge t \neq -1$

$t = 2$ geeft het punt $(-4, 16)$.

139 Er geldt $-1 \leq \cos(t) \leq 1$, dus $-1 \leq x \leq 1$.

Substitutie van $x = \cos(t)$ en $y = 2\sin(2t - \frac{1}{2}\pi)$ in $y = 2 - 4x^2$ geeft $2\sin(2t - \frac{1}{2}\pi) = 2 - 4\cos^2(t)$

$\sin(2t - \frac{1}{2}\pi) = 1 - 2\cos^2(t)$

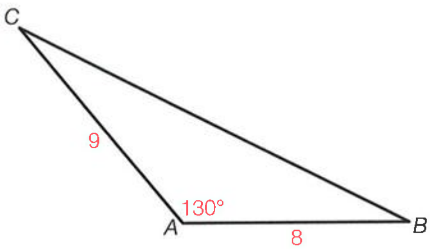
$\cos(2t - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \cos(2t)$

$\cos(2t) = \cos(2t)$

Dit klopt voor elke waarde van t.

Dus bij de grafiek met de gegeven parametervoorstelling hoort de parabool $y = 2 - 4x^2$ met $-1 \leq x \leq 1$.

140



De cosinusregel geeft $BC^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos(130°) = 237{,}56...$

$BC = \sqrt{237{,}56...} \approx 15{,}4$

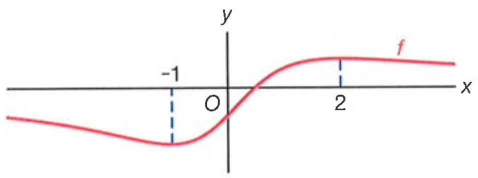
141 $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 2}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 2) \cdot 2 - (2x - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{2x^2 + 4 - 4x^2 + 2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{(x^2 + 2)^2}$

$f'(x) = 0$ geeft $-2x^2 + 2x + 4 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$

$x = -1 \vee x = 2$



min. is $f(-1) = -1$, max. is $f(2) = \frac{1}{2}$ en $B_f = [-1, \frac{1}{2}]$.

142 $\cos(2x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$

$2x - \frac{1}{2}\pi = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{2}\pi = -x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

143 Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{1 - 2}{0 - -1} = -1$.

k: $y = -x + b$ door $C(0, 1)$ geeft k: $y = -x + 1$ oftewel k: $x + y - 1 = 0$.

$d(A, k) = \dfrac{|9 + 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

144 $g_{103\text{ jaar}} = \frac{1}{2}$

$g_{\text{jaar}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{103}} \approx 0{,}9933$

Dus per jaar is de afname 0,67%.

145 $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|15+4|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} = \frac{19}{\sqrt{377}}$$

$\angle(k, l) \approx 11{,}9°$

Bladzijde 241

146 Schuif de grafiek van f 1 omlaag, dit geeft de grafiek van $g(x) = \frac{x^2+1}{x} - 1$.

$$I(L) = \pi\int_1^4 (g(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^4 \left(\frac{x^2+1}{x} - 1\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_1^4 \left(\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2+1}{x} \cdot 1 + 1\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_1^4 \left(\frac{x^4+2x^2+1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right)\mathrm{d}x = \pi\int_1^4 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2x - \frac{2}{x} + 1\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_1^4 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + x^{-2}\right)\mathrm{d}x = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 2\ln|x| - x^{-1}\right]_1^4$$

$$= \pi(\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 - 4^2 + 3 \cdot 4 - 2\ln(4) - \tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{3} - 1 + 3 - 2\ln(1) - 1))$$

$$= \pi(21\tfrac{1}{3} - 16 + 12 - 2\ln(2^2) - \tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{3} - 1 + 3 - 0 - 1)) = 15\tfrac{3}{4}\pi - 4\pi\ln(2)$$

147 $y = {}^5\log(x)$

$\downarrow$ translatie (3, -2)

$y = -2 + {}^5\log(x-3)$

$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$

$f(x) = -2 + {}^5\log(2x-3)$

148 c heeft middelpunt $M(1, 0)$ en straal $\sqrt{2}$.

d heeft middelpunt $N(4, 1)$ en straal $2\sqrt{2}$.

Stel k: $y = ax + b$ oftewel k: $ax - y + b = 0$.

$d(M, k) = \sqrt{2}$ geeft $\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2}$ oftewel $|a+b| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+1}$.

$d(N, k) = 2\sqrt{2}$ geeft $\frac{|4a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 2\sqrt{2}$ oftewel $|4a-1+b| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+1}$.

Hieruit volgt $2|a+b| = |4a-1+b|$

$2(a+b) = 4a - 1 + b \lor 2(a+b) = -4a + 1 - b$

$2a + 2b = 4a - 1 + b \lor 2a + 2b = -4a + 1 - b$

$b = 2a - 1 \lor 3b = -6a + 1$

$b = 2a - 1 \lor b = -2a + \frac{1}{3}$

$b = 2a - 1$ invullen bij $|a+b| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+1}$ geeft $|a + 2a - 1| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+1}$

$|3a-1| = \sqrt{2a^2+2}$

$9a^2 - 6a + 1 = 2a^2 + 2$

$7a^2 - 6a - 1 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot -1 = 64$

$a = \frac{6+8}{14} = 1 \lor a = \frac{6-8}{14} = -\frac{1}{7}$

$a = 1$ geeft $b = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ en k_1: $y = x + 1$.

$a = -\frac{1}{7}$ geeft $b = 2 \cdot -\frac{1}{7} - 1 = -1\frac{2}{7}$ en k_2: $y = -\frac{1}{7}x - 1\frac{2}{7}$.

Hiermee zijn de twee lijnen gevonden, dus $b = -2a + \frac{1}{3}$ voldoet niet.

149 $\ln(x) + 1 = 0$

$\ln(x) = -1$

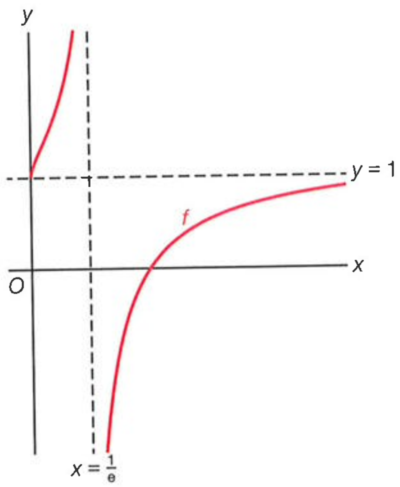
$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{e}$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(2x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{\ln(2) + \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1 - \frac{1}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{0 + 1 - 0}{1 + 0} = 1$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(2x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{\ln(2) + \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1 - \frac{1}{\ln(x)}}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{0 + 1 - 0}{1 + 0} = 1$$



150 $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = -t^2 + 2t + 3 \\ y'(t) = 2t - 4 \end{cases}$

Raaklijn verticaal, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$-t^2 + 2t + 3 = 0 \wedge 2t - 4 \neq 0$

$t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge 2t \neq 4$

$(t + 1)(t - 3) = 0 \wedge t \neq 2$

$t = -1 \vee t = 3$

$t = -1$ geeft het punt $(-1\frac{2}{3}, 9)$ en $t = 3$ geeft het punt $(9, 1)$.

$y = 9$ geeft $t^2 - 4t + 4 = 9$

$t^2 - 4t - 5 = 0$

$(t + 1)(t - 5) = 0$

$t = -1 \vee t = 5$

$t = 5$ geeft het punt $(-1\frac{2}{3}, 9)$.

Dus de baan snijdt zichzelf op $t = 5$ in een punt waarin de raaklijn aan de baan verticaal is.

$t = 5$ geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=5} = \frac{10 - 4}{-25 + 10 + 3} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = -26{,}5...°$

De gevraagde hoek is $180° - 90° - 26{,}5...° \approx 63°$.

151 $f(x) = -\frac{1}{5}(x-3)^4 - 2$
$\downarrow$ verm. x-as, -10
$y = 2(x-3)^4 + 20$
$\downarrow$ translatie $(5, -15)$
$g(x) = 2(x-8)^4 + 5$
min. is $g(8) = 5$

152 $2 + \frac{3}{x+4}$ is omgekeerd evenredig met y, dus $2 + \frac{3}{x+4} = \frac{c}{y}$.

$x = 2$ en $y = 4$ geeft $2 + \frac{3}{2+4} = \frac{c}{4}$

$$2\tfrac{1}{2} = \frac{c}{4}$$

$$c = 10$$

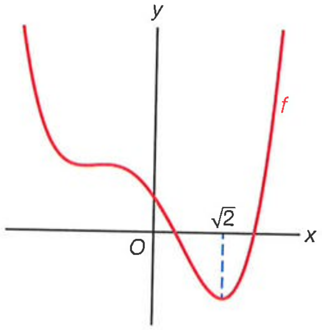
Dit geeft $2 + \frac{3}{x+4} = \frac{10}{y}$

$$\frac{2x+11}{x+4} = \frac{10}{y}$$

$$y = \frac{10(x+4)}{2x+11}$$

$$y = \frac{10x+40}{2x+11}$$

153 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$
$f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2 = 0$



Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

Bladzijde 242

154 De vergelijking van c is van de vorm $(x-8)^2 + (y-5)^2 = r^2$.
Substitutie van $x = t + 2$ en $y = 3t + 1$ geeft
$(t-6)^2 + (3t-4)^2 = r^2$
$t^2 - 12t + 36 + 9t^2 - 24t + 16 = r^2$
$10t^2 - 36t + 52 - r^2 = 0$
$D = (-36)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (52 - r^2) = 1296 - 2080 + 40r^2 = 40r^2 - 784$
$D = 0$ geeft $40r^2 - 784 = 0$

$$40r^2 = 784$$

$$r^2 = 19{,}6$$

Dus c: $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 19{,}6$.

155 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - x$
$f'(x) = 6$ geeft $x^2 - x = 6$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

$f(-2) = -2\frac{2}{3}$ en $f(3) = 6\frac{1}{2}$
Dus $A(-2, -2\frac{2}{3})$ en $B(3, 6\frac{1}{2})$.

156 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ c \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - a \end{pmatrix}$

D op de y-as geeft $a - c = 0$ oftewel $c = a$.

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} a - b \\ -c \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{BA}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - c \\ -a + b + c \end{pmatrix}$

$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} b - c \\ -a + b + c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a - c \\ b - a \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a + b - 2c \\ -2a + 2b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - c \\ -a + b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$

BM is horizontaal als geldt $-a + b + \frac{1}{2}c = c$ oftewel $-a + b - \frac{1}{2}c = 0$.

Substitutie van $c = a$ in $-a + b - \frac{1}{2}c = 0$ geeft $-a + b - \frac{1}{2}a = 0$ oftewel $b = 1\frac{1}{2}a$.

$c = a$ en $b = 1\frac{1}{2}a$ geeft $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix}$ en $\vec{m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a - a \\ -a + 1\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a \\ a \end{pmatrix}$.

$BM = 3$ geeft $|1\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a| = 3$

$|1\frac{1}{4}a| = 3$

$1\frac{1}{4}a = 3$

$a = 2\frac{2}{5}$

Dus $a = 2\frac{2}{5}$, $b = 3\frac{3}{5}$ en $c = 2\frac{2}{5}$.

157 $f(x) = 0$ geeft $4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x = 0 \vee x = 4$

$g(x) = 0$ geeft $5 - 2x = 0$

$2x = 5$

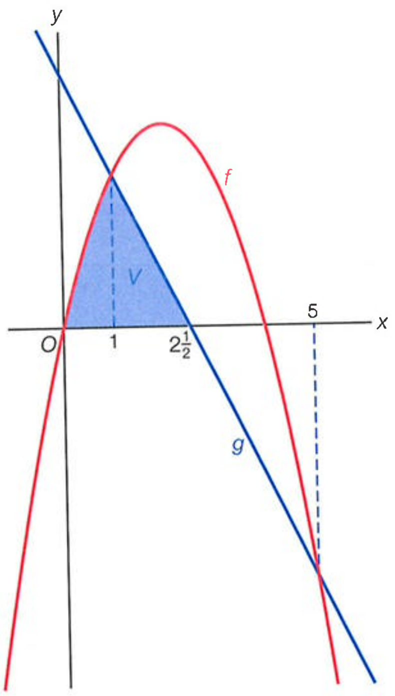
$x = 2\frac{1}{2}$

$f(x) = g(x)$ geeft $4x - x^2 = 5 - 2x$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x - 1)(x - 5) = 0$

$x = 1 \vee x = 5$



$$I(L) = \pi\int_0^1 (4x - x^2)^2\,\mathrm{d}x + \pi\int_1^{2\frac{1}{2}} (5 - 2x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (16x^2 - 8x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x + \pi\int_1^{2\frac{1}{2}} (25 - 20x + 4x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[\tfrac{16}{3}x^3 - 2x^4 + \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 + \pi\left[25x - 10x^2 + \tfrac{4}{3}x^3\right]_1^{2\frac{1}{2}}$$

$$= \pi(\tfrac{16}{3} - 2 + \tfrac{1}{5}) - \pi(0 - 0 + 0) + \pi(25 \cdot 2\tfrac{1}{2} - 10 \cdot (2\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{3} \cdot (2\tfrac{1}{2})^3) - \pi(25 - 10 + \tfrac{4}{3})$$

$$= \tfrac{53}{15}\pi + \tfrac{125}{6}\pi - \tfrac{49}{3}\pi = 8\tfrac{1}{30}\pi$$

158 $y = \sqrt{x}$
$\downarrow$ translatie (4, -2)
$y = -2 + \sqrt{x-4}$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$f(x) = -2 + \sqrt{2x-4}$
$D_f = [2, \rightarrow\rangle$, $B_f = [-2, \rightarrow\rangle$ en randpunt (2, -2).

159 De grafiek van f_a heeft een perforatie als $\ln(ax^2) + 2 = 0 \wedge \ln(x) + 4 = 0$
$\ln(ax^2) = -2 \wedge \ln(x) = -4$
$ax^2 = e^{-2} \wedge x = e^{-4}$
Substitutie van $x = e^{-4}$ in $ax^2 = e^{-2}$ geeft $a(e^{-4})^2 = e^{-2}$
$a\,e^{-8} = e^{-2}$
$a = e^6$

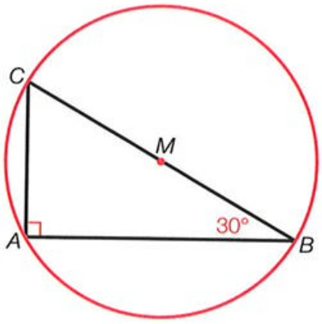
160 $f(x) = \dfrac{1-3x}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot -3 - (1-3x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-3(x+1) - 2(1-3x)}{(x+1)^3} = \frac{-3x-3-2+6x}{(x+1)^3} = \frac{3x-5}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^3 \cdot 3 - (3x-5) \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{3(x+1) - 3(3x-5)}{(x+1)^4} = \frac{3x+3-9x+15}{(x+1)^4} = \frac{-6x+18}{(x+1)^4}$$

$f'(-3) = \dfrac{-14}{(-2)^3} > 0$ en $f''(-3) = \dfrac{36}{(-2)^4} > 0$
Dus in A toenemend stijgend.
$f'(1) = \dfrac{-2}{2^3} < 0$ en $f''(1) = \dfrac{12}{2^4} > 0$
Dus in B afnemend dalend.
$f'(4) = \dfrac{7}{5^3} > 0$ en $f''(4) = \dfrac{-6}{5^4} < 0$
Dus in C afnemend stijgend.

161 Volgens de omgekeerde stelling van Thales is het middelpunt van de omgeschreven cirkel het midden van BC.



Noem de straal van de cirkel r.
Dan moet gelden $\pi r^2 = 36\pi$
$r^2 = 36$
$r = 6$
Dus $BC = 12$.
$\sin(30°) = \dfrac{AC}{12}$ geeft $AC = 12\sin(30°) = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$
$\cos(30°) = \dfrac{AB}{12}$ geeft $AB = 12\cos(30°) = 12 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
De omtrek van driehoek ABC is $12 + 6 + 6\sqrt{3} = 18 + 6\sqrt{3}$.

162 $y = \sin(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, 2
$y = \sin(\frac{1}{2}x)$
$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{4}\pi, -2)$
$y = -2 + \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}\pi))$
Dus $f(x) = -2 + \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi)$.

Bladzijde 243

163 $A = 12 - 3\sqrt{1 - 2B}$
$3\sqrt{1 - 2B} = 12 - A$
kwadrateren geeft
$9(1 - 2B) = 144 - 24A + A^2$
$9 - 18B = 144 - 24A + A^2$
$-18B = A^2 - 24A + 135$
$B = -\frac{1}{18}A^2 + 1\frac{1}{3}A - 7\frac{1}{2}$

164 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 4x + b$ geeft $f'(x) = x^2 - 2ax + 4$ en $f''(x) = 2x - 2a$.
$f''(x) = 0$ geeft $2x - 2a = 0$
$2x = 2a$
$x = a$
Er moet gelden $f'(a) = rc_k$.
$f'(a) = -5$ geeft $a^2 - 2a \cdot a + 4 = -5$
$a^2 - 2a^2 = -9$
$-a^2 = -9$
$a^2 = 9$
$a = 3 \vee a = -3$
$f_3(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + b = b - 6$
$\left.\begin{array}{l} y = -5x + 2 \\ \text{door } (3, b - 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} b - 6 = -5 \cdot 3 + 2 \\ b = -15 + 2 + 6 = -7 \end{array}$
$f_{-3}(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot -3 + b = b + 6$
$\left.\begin{array}{l} y = -5x + 2 \\ \text{door } (-3, b + 6) \end{array}\right\} \begin{array}{l} b + 6 = -5 \cdot -3 + 2 \\ b = 15 + 2 - 6 = 11 \end{array}$
Dus $a = 3$ en $b = -7$ of $a = -3$ en $b = 11$.

165 $-\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = \cos(2x + 1\frac{1}{3}\pi) = \sin(2x + 1\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(2x + 1\frac{5}{6}\pi)$

166 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$
$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0$
$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 8 = 0$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$
Dus middelpunt $M(-2, 3)$ en straal $r = \sqrt{5}$.
$d(A, M) = \sqrt{(2 - -2)^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
$d(A, c) = d(A, M) - r = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

167 $e^{2x} - 6e^{x+1} + 5e^2 = 0$
$(e^x)^2 - 6e \cdot e^x + 5e^2 = 0$
$(e^x - e)(e^x - 5e) = 0$
$e^x = e \vee e^x = 5e$
$x = 1 \vee x = \ln(5e)$
$x = 1 \vee x = 1 + \ln(5)$

168 $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - 6t \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$ geeft $\begin{cases} x'(t) = 2t^2 - 4t - 6 \\ y'(t) = 2t \end{cases}$

Evenwijdig met de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$

$2t = 0 \wedge 2t^2 - 4t - 6 \neq 0$

$t = 0$

$t = 0$ geeft het punt $(0, -4)$.

Evenwijdig met de y-as, dus $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$

$2t^2 - 4t - 6 = 0 \wedge 2t \neq 0$

$t^2 - 2t - 3 = 0 \wedge t \neq 0$

$(t+1)(t-3) = 0 \wedge t \neq 0$

$t = -1 \vee t = 3$

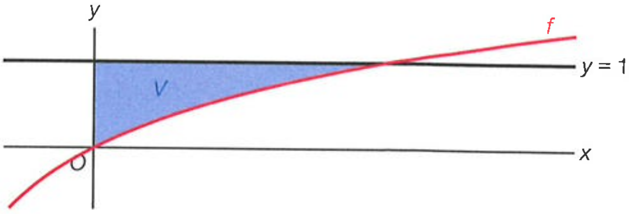
$t = -1$ geeft het punt $(3\frac{1}{3}, -3)$ en $t = 3$ geeft het punt $(-18, 5)$.

169 $y = \ln(\frac{1}{2}x + 1)$ geeft $\ln(\frac{1}{2}x + 1) = y$

$\frac{1}{2}x + 1 = e^y$

$\frac{1}{2}x = e^y - 1$

$x = 2e^y - 2$



$$I(L) = \pi\int_0^1 x^2\,dy = \pi\int_0^1 (2e^y - 2)^2\,dy = \pi\int_0^1 (4e^{2y} - 8e^y + 4)\,dy = \pi\left[2e^{2y} - 8e^y + 4y\right]_0^1$$

$$= \pi(2e^2 - 8e + 4) - \pi(2 - 8 + 0) = (2e^2 - 8e + 10)\pi$$

170 $k\colon x + 7y = 21$ oftewel $k\colon x = 21 - 7y$

Stel $M(21 - 7p, p)$.

$d(M, l) = d(M, m)$ geeft $\dfrac{|21 - 7p + 2p - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|2(21 - 7p) - p - 2|}{\sqrt{5}}$

$|20 - 5p| = |42 - 14p - p - 2|$

$|20 - 5p| = |40 - 15p|$

$20 - 5p = 40 - 15p \vee 20 - 5p = -40 + 15p$

$10p = 20 \vee -20p = -60$

$p = 2 \vee p = 3$

$p = 2$ geeft $M_1(7, 2)$ en $r_1 = d(M_1, l) = \dfrac{|7 + 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$p = 3$ geeft $M_2(0, 3)$ en $r_2 = d(M_2, l) = \dfrac{|0 + 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Dus $c_1\colon (x-7)^2 + (y-2)^2 = 20$ en $c_2\colon x^2 + (y-3)^2 = 5$.