

12 Examentraining

12.1 Vergelijkingen en ongelijkheden

Bladzijde 142

- 1 a** $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{3}x^3 - 5x = 0$
 $\frac{1}{3}x(x^2 - 15) = 0$
 $\frac{1}{3}x = 0 \vee x^2 - 15 = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 15$
 $x = 0 \vee x = \sqrt{15} \vee x = -\sqrt{15}$
 Dus $AB = 2\sqrt{15}$.
- b** $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ \frac{1}{4}a + b = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ \frac{1}{2}a + 2b = 8 \end{cases}$
 $\frac{1}{2}a = -3$
 $a = -6$
 $a + 2b = 5 \Rightarrow -6 + 2b = 5$
 $2b = 11$
 $b = 5\frac{1}{2}$
 Dus $(a, b) = (-6, 5\frac{1}{2})$.
- c** $\frac{5}{12x^4} = \frac{1}{6}$
 $12x^4 = 5 \cdot 6$
 $12x^4 = 30$
 $x^4 = 2\frac{1}{2}$
 $x = \sqrt[4]{2\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt[4]{2\frac{1}{2}}$
- d** $f(x) = g(x)$ geeft $\sqrt{9-4x} = -\frac{2}{3}x + 2\frac{5}{6}$
 $6\sqrt{9-4x} = -4x + 17$
 kwadrateren geeft
 $36(9-4x) = 16x^2 - 136x + 289$
 $324 - 144x = 16x^2 - 136x + 289$
 $16x^2 + 8x - 35 = 0$
 $D = 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot -35 = 2304$
 $x = \frac{-8 \pm 48}{32} = 1\frac{1}{4} \vee x = \frac{-8 - 48}{32} = -1\frac{3}{4}$
 $f(1\frac{1}{4}) = \sqrt{9 - 4 \cdot 1\frac{1}{4}} = 2$ en $f(-1\frac{3}{4}) = \sqrt{9 - 4 \cdot -1\frac{3}{4}} = 4$
 Dus de snijpunten zijn $(1\frac{1}{4}, 2)$ en $(-1\frac{3}{4}, 4)$.
- e** $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x} = 0$
 $x^3 + x^2 - 6x = 0$
 $x(x^2 + x - 6) = 0$
 $x(x-2)(x+3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2 \vee x = -3$
- f** $f(x) - g(x) = \frac{1}{10}$ geeft $\frac{x^2 - 2x + 5}{2x} - (\frac{1}{2}x - 1) = \frac{1}{10}$
 $\frac{1}{2}x - 1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{10}$
 $\frac{5}{2x} = \frac{1}{10}$
 $2x = 50$
 $x = 25$
- g** $\sqrt{500 - \frac{5}{9}(x-6)^2} = 0$
 $500 - \frac{5}{9}(x-6)^2 = 0$
 $\frac{5}{9}(x-6)^2 = 500$
 $(x-6)^2 = 900$
 $x-6 = 30 \vee x-6 = -30$
 $x = 36 \vee x = -24$

h $f(x) = -2\frac{1}{2}x - 5$ geeft $\frac{1}{x+4} - 1\frac{1}{2}x + 1 = -2\frac{1}{2}x - 5$

$$\frac{1}{x+4} = -x - 6$$

$$(x+4)(-x-6) = 1$$

$$-x^2 - 6x - 4x - 24 = 1$$

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$$

$D = 0$, dus de vergelijking heeft één oplossing en dus hebben de lijn en de grafiek van f precies één punt gemeenschappelijk.

i $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{5}{4}x + \frac{3}{x} = \frac{1}{8}x + \frac{5}{x}$

$$\frac{9}{8}x = \frac{2}{x}$$

$$9x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{9}$$

$$x = \frac{4}{3} \vee x = -\frac{4}{3} \text{ (vold. niet)}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{\left(\frac{4}{3}\right)} = 3\frac{11}{12}$$

Het snijpunt is $(1\frac{1}{3}, 3\frac{11}{12})$.

j $f(x) = \frac{1}{4}x - 5$ geeft $(\frac{1}{4}x - 5)^3 = \frac{1}{4}x - 5$

$$\frac{1}{4}x - 5 = 0 \vee (\frac{1}{4}x - 5)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}x = 5 \vee \frac{1}{4}x - 5 = 1 \vee \frac{1}{4}x - 5 = -1$$

$$x = 20 \vee \frac{1}{4}x = 6 \vee \frac{1}{4}x = 4$$

$$x = 20 \vee x = 24 \vee x = 16$$

$$x = 16 \text{ geeft } y = \frac{1}{4} \cdot 16 - 5 = -1, \text{ dus } A(16, -1).$$

$$x = 24 \text{ geeft } y = \frac{1}{4} \cdot 24 - 5 = 1, \text{ dus } B(24, 1).$$

$$\text{Dus } AB = \sqrt{(24-16)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}.$$

k Voer in $y_1 = 0,0045x(x+50)^2$ en $y_2 = 251$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 13,73$.

l Voer in $y_1 = \frac{3+0,6x}{(2-x)^4}$ en $y_2 = 5\frac{2}{13}$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 2,9818$, dus $p \approx 2,9818$.

m Voer in $y_1 = 0,1x^4 - x^2 - x + 1$.

De optie minimum geeft $x = -1,923...$ en $y = 0,592...$

De optie maximum geeft $x = -0,592...$ en $y = 1,256...$

De optie minimum geeft $x = 2,453...$ en $y = -3,849...$

Voor $-3,85 < p < 0,59 \vee p > 1,26$ snijdt de lijn $y = p$ de grafiek van f in twee punten.

n Voer in $y_1 = 15 \cdot \log(x-3) + \frac{18}{x-3} + \frac{6}{5(x-3)^2}$ en $y_2 = 35$.

De optie snijpunt geeft $x = 215,6...$

$K > 35$ geeft $p \geq 216$

Bladzijde 147

2 $f(x) = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$ geeft $\sqrt{-3x+6} = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$

$$4\sqrt{-3x+6} = -7x + 14$$

kwadrateren geeft

$$16(-3x+6) = 49x^2 - 196x + 196$$

$$-48x + 96 = 49x^2 - 196x + 196$$

$$49x^2 - 148x + 100 = 0$$

$$D = (-148)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 100 = 2304$$

$$x = \frac{148 \pm 48}{98} = 2 \vee x = \frac{148 - 48}{98} = 1\frac{1}{49}$$

De x -coördinaten van deze twee punten zijn 2 en $1\frac{1}{49}$.

3 a $f(x) = 0$ geeft $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x} = 0$
 $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$
 $x(x^2 + 3x + 2) = 0$
 $x = 0 \vee x^2 + 3x + 2 = 0$
 $x = 0 \vee (x+1)(x+2) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = -2$

$x_A = -2$ en $x_B = -1$ geeft $AB = 1$

$x_B = -1$ en $x_O = 0$ geeft $BO = 1$

Dus AB en BO zijn even lang.

b Voer in $y_1 = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x}$.

De optie maximum geeft $x = -1,577...$ en $y = 0,7274...$

De optie minimum geeft $x = -0,422...$ en $y = -0,7274...$

Dit is het geval voor $-0,727 < p < 0,727$.

4 a $f(x) - g(x) = \frac{1}{100}$ geeft $\frac{x^2 - x + 4}{x} - (x - 1) = \frac{1}{100}$

$$x - 1 + \frac{4}{x} - x + 1 = \frac{1}{100}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{100}$$

$$x = 400$$

$f(x) - g(x) < \frac{1}{100}$ geeft $x > 400$

b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{x^2 - x + 4}{x} = x - 1$

$$x^2 - x + 4 = x(x - 1)$$

$$x^2 - x + 4 = x^2 - x$$

$$4 = 0 \text{ kan niet}$$

De vergelijking $f(x) = g(x)$ geeft geen oplossingen, dus de grafieken van f en g snijden elkaar niet.

5 $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}x^3 - 4x = 0$
 $\frac{1}{2}x(x^2 - 8) = 0$
 $\frac{1}{2}x = 0 \vee x^2 - 8 = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 8$
 $x = 0 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$
 $x_M = -2\sqrt{2}$ en $x_N = 2\sqrt{2}$ geeft $MN = 4\sqrt{2}$

Bladzijde 148

6 $f(x) = g(x)$ geeft $x + \frac{1}{x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$

$$\frac{3}{4}x = \frac{3}{x}$$

$$\frac{3}{4}x^2 = 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2 \text{ (vold. niet)}$$

Dus de x -coördinaat van dit snijpunt is 2.

7 a Bij 4 tegels is de maximale overhang $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$.

Bij 5 tegels is de maximale overhang $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24}$.

Dus vanaf 5 tegels.

Bladzijde 149

b $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

Voer in $y_1 = 34,54 \cdot \log(x-1) + 8,658 + \frac{15}{2(x-1)} + \frac{5}{4(x-1)^2}$ en maak een tabel.

Hieruit volgt

$$n = 441 \text{ geeft } M \approx 99,98$$

$$n = 442 \text{ geeft } M \approx 100,01.$$

$$\text{Dus minstens } 442 \cdot 3 = 1326 \text{ cm.}$$

c Het verschil tussen formule (1) en formule (2) is $\frac{15}{2(n-1)} + \frac{5}{4(n-1)^2}$.

Voer in $y_1 = \frac{15}{2(x-1)} + \frac{5}{4(x-1)^2}$ en maak een tabel.

Heruit volgt

$$n = 76 \text{ geeft verschil } \approx 0,1002$$

$$n = 77 \text{ geeft verschil } \approx 0,099.$$

$$\text{Dus voor } n = 77.$$

8 $y = 0$ geeft $\sqrt{1500 - \frac{15}{16}(x-10)^2} = 0$

$$1500 - \frac{15}{16}(x-10)^2 = 0$$

$$\frac{15}{16}(x-10)^2 = 1500$$

$$(x-10)^2 = 1600$$

$$x-10 = 40 \vee x-10 = -40$$

$$x = 50 \vee x = -30$$

Dus in het perihelium is de afstand 30 AE en in het aphelium 50 AE.

Bladzijde 150

9 $f(x) = \frac{1}{32}$ geeft $\frac{3}{16x^4} = \frac{1}{32}$

$$16x^4 = 96$$

$$x^4 = 6$$

$$x = \sqrt[4]{6} \vee x = -\sqrt[4]{6}$$

Dus de afstand is $2 \cdot \sqrt[4]{6}$.

10 a Zijn tijd in 2016 was $\frac{22,5}{60} = 0,375$ uur.

$$\text{Zijn snelheid in 2016 was } \frac{8,5}{0,375} = 22,66... \text{ km/uur.}$$

Het vermogen dat hij in 2016 leverde was

$$P = 0,00386 \cdot 22,66... \cdot (22,66... + 80)^2 = 922,2... \text{ W.}$$

Het vermogen dat hij moet leveren is

$$P = 0,00386 \cdot 22,66... \cdot (22,66... + 1,05 \cdot 80)^2 = 995,4... \text{ W.}$$

$$\text{Hij zou dan } \frac{995,4... - 922,2...}{922,2...} \times 100\% \approx 8\% \text{ meer vermogen moeten leveren.}$$

Bladzijde 151

b $h = 5,9$, $P_{\text{bergop}} = 210$ en $m = 72$ geeft $0,0273 \cdot 72 \cdot 5,9 \cdot v = 210$

$$v = \frac{210}{0,0273 \cdot 72 \cdot 5,9} = 18,1...$$

$$\frac{1,2 \text{ km}}{18,1... \text{ km/uur}} = 0,066... \text{ uur, dus hij doet er } 0,066... \cdot 60 \approx 4 \text{ minuten over.}$$

c Los op $0,00386 \cdot v \cdot (v+70)^2 = 0,0273 \cdot 78 \cdot 8,4 \cdot 19$.

$$\text{Voer in } y_1 = 0,00386 \cdot x \cdot (x+70)^2 \text{ en } y_2 = 0,0273 \cdot 78 \cdot 8,4 \cdot 19.$$

$$\text{De optie snijpunt geeft } x = 12,83...$$

$$\text{De snelheid is } 12,8 \text{ km/uur.}$$

Bladzijde 152

- 11** $2x - 3 = 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is $x = 1\frac{1}{2}$.

$$f(x) = -\frac{11}{9}x \text{ geeft } \frac{1}{2x-3} - x - 1 = -\frac{11}{9}x$$

$$\frac{1}{2x-3} = 1 - \frac{2}{9}x$$

$$(2x-3)(1 - \frac{2}{9}x) = 1$$

$$2x - \frac{4}{9}x^2 - 3 + \frac{2}{3}x = 1$$

$$-\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 4 = 0$$

$$4x^2 - 24x + 36 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$3 > 1\frac{1}{2}$, dus lijn l snijdt de linkertak van de grafiek van f niet.

- 12** Los op $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

Voer in $y_1 = (\frac{1}{2}x - 2)^3$ en $y_2 = \frac{1}{2}x - 2$.

De optie snijpunt geeft $x = 2$ en $y = -1$, $x = 4$ en $y = 0$, en $x = 6$ en $y = 1$.

$P(2, -1)$ en $Q(6, 1)$ geeft $PQ = \sqrt{(6-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$

Alternatieve uitwerking

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 \text{ geeft } (\frac{1}{2}x - 2)^3 = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0 \vee (\frac{1}{2}x - 2)^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}x = 2 \vee \frac{1}{2}x - 2 = 1 \vee \frac{1}{2}x - 2 = -1$$

$$x = 4 \vee \frac{1}{2}x = 3 \vee \frac{1}{2}x = 1$$

$$x = 4 \vee x = 6 \vee x = 2$$

$$x_P = 2 \text{ geeft } y_P = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1$$

$$x_Q = 6 \text{ geeft } y_Q = \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1$$

$$PQ = \sqrt{(6-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$$

- 13** $C = 0,17$ geeft $V = \frac{1 + 0,5 \cdot 0,17}{(1 - 0,17)^4} = 2,28...$

Los op $V = 2 \cdot 2,28...$ oftewel $V = 4,57...$

Voer in $y_1 = \frac{1 + 0,5x}{(1-x)^4}$ en $y_2 = 4,57...$

De optie snijpunt geeft $x = 0,292...$

Dus $C \approx 0,29$.

12.2 Werken met formules**Bladzijde 153**

- 14** a Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5-3}{\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi} = \frac{-8}{\frac{4}{3}\pi} = -\frac{6}{\pi}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{6}{\pi}x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{3}\pi, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{3}\pi + b = 3 \\ -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{6}{\pi}x + 5.$$

$$\text{b } -\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x = 0$$

$$\frac{1}{2}x(-x + 7) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 7$$

Dus $A(7, 0)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{0+7}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ en } y_{\text{top}} = -\frac{1}{2} \cdot (3\frac{1}{2})^2 + 3\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = 6\frac{1}{8}, \text{ dus } T(3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{8}).$$

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 6\frac{1}{8}}{7 - 3\frac{1}{2}} = -1\frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} k: y = -1\frac{3}{4}x + b \quad & \left. \begin{aligned} & -1\frac{3}{4} \cdot 7 + b = 0 \\ & -12\frac{1}{4} + b = 0 \end{aligned} \right\} \\ \text{door } A(7, 0) \quad & b = 12\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{3}{4}x + 12\frac{1}{4}.$$

$$\text{c } \text{Stel } p: y = a(x - p)^2 + q.$$

$$\text{Top } T(3, 1) \text{ geeft } p: y = a(x - 3)^2 + 1.$$

$$\text{Door } A(5, 4), \text{ dus } a(5 - 3)^2 + 1 = 4$$

$$4a + 1 = 4$$

$$4a = 3$$

$$a = \frac{3}{4}$$

$$\text{Dus } p: y = \frac{3}{4}(x - 3)^2 + 1.$$

$$\text{d } \text{Door } A(-6,5; 3) \text{ en } B(6,5; 3), \text{ dus de parabool heeft een top met } x\text{-coördinaat } 0 \text{ en is dus van de vorm } p: y = ax^2 + c.$$

$$\text{Door } C(0; 1,31) \text{ geeft } c = 1,31.$$

$$p: y = ax^2 + 1,31 \text{ door } (6,5; 3) \text{ geeft } a \cdot 6,5^2 + 1,31 = 3$$

$$42,25a = 1,69$$

$$a = 0,04$$

$$\text{Dus } p: y = 0,04x^2 + 1,31.$$

$$\text{e } \text{Door } O(0, 0) \text{ en } A(125, 0) \text{ geeft } y = ax(x - 125).$$

$$x_{\text{top}} = \frac{0 + 125}{2} = 62,5 \text{ en } y_{\text{top}} = 44,92 \text{ geeft } a \cdot 62,5 \cdot (62,5 - 125) = 44,92$$

$$a \cdot 62,5 \cdot -62,5 = 44,92$$

$$-3906,25a = 44,92$$

$$a = \frac{44,92}{-3906,25} = -0,01149...$$

$$\text{Dit geeft } y = -0,01149...x(x - 125) \text{ oftewel } y = -0,01149...x^2 + 1,43744x.$$

$$\text{Dus } a \approx -0,0115 \text{ en } b \approx 1,4374.$$

$$\text{f } y = x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (4, 0)} y = (x - 4)^3 \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } \frac{2}{3}} y = (\frac{1}{2}x - 4)^3$$

$$\text{g } T(3, 4) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } a} P(3, 4a)$$

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{3^2 + (4a)^2} = \sqrt{9 + 16a^2} \\ OP &= 7 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & 9 + 16a^2 = 49 \\ & 16a^2 = 40 \end{aligned} \right\}$$

$$a^2 = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \vee a = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$\text{h } b = 1,8pq \text{ oftewel } 1,8pq = b \text{ geeft } pq = \frac{b}{1,8} \text{ en } q = \frac{b}{1,8p}.$$

$$\text{Substitutie van } pq = \frac{b}{1,8} \text{ en } q = \frac{b}{1,8p} \text{ in } A = 0,9pq - 8,1q^2 \text{ geeft } A = 0,9 \cdot \frac{b}{1,8} - 8,1 \cdot \left(\frac{b}{1,8p}\right)^2$$

$$A = \frac{0,9b}{1,8} - 8,1 \cdot \frac{b^2}{(1,8p)^2}$$

$$A = 0,5b - \frac{8,1}{3,24p^2} \cdot b^2$$

$$A = 0,5b - \frac{2,5}{p^2} \cdot b^2$$

i R is evenredig met $Q^{4,15}$, dus $R = aQ^{4,15}$.

$$Q = 15 \text{ geeft } R = a \cdot 15^{4,15}$$

$$Q = 85 \text{ geeft } R = a \cdot 85^{4,15}$$

$$\frac{a \cdot 85^{4,15}}{a \cdot 15^{4,15}} = \frac{85^{4,15}}{15^{4,15}} \approx 1338$$

Dus 1338 keer zo groot.

j Evenredig verband tussen b en $\sqrt{d}$, dus $b = a\sqrt{d}$.

$$d = 342 \text{ en } b = 370 \text{ geeft } a\sqrt{342} = 370, \text{ dus } a = \frac{370}{\sqrt{342}} = 20,0\dots$$

$$a = 20,0\dots \text{ en } b = 500 \text{ geeft } 20,0\dots \cdot \sqrt{d} = 500$$

$$\sqrt{d} = \frac{500}{20,0\dots} = 24,99\dots$$

$$d \approx 625$$

Bladzijde 156

15 G is evenredig met $L^{3,13}$, dus $G = aL^{3,13}$.

$$L = 10 \text{ geeft } G = a \cdot 10^{3,13}$$

$$L = 94 \text{ geeft } G = a \cdot 94^{3,13}$$

$$\frac{a \cdot 94^{3,13}}{a \cdot 10^{3,13}} = \frac{94^{3,13}}{10^{3,13}} \approx 1100$$

Dus 1100 keer.

16 $T(2, 3) \xrightarrow{\text{verm. x-as, } a} P(2, 3a)$

$$\left. \begin{array}{l} OP = \sqrt{2^2 + (3a)^2} = \sqrt{4 + 9a^2} \\ OP = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + 9a^2 = 25 \\ 9a^2 = 21 \\ a^2 = \frac{21}{9} \end{array}$$

$$a = \sqrt{\frac{21}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{21} \vee a = -\frac{1}{3}\sqrt{21}$$

17 Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 - 2}{\frac{9}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi} = \frac{-4}{2\pi} = -\frac{2}{\pi}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -\frac{2}{\pi}x + b \\ \text{door } A(\frac{1}{4}\pi, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4}\pi + b = 2 \\ -\frac{1}{2} + b = 2 \\ b = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{5}{2}.$$

18 $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 6x = 0$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6$$

Dus $A(6, 0)$.

$$\text{Verder is } x_{\text{top}} = \frac{0 + 6}{2} = 3 \text{ en } y_{\text{top}} = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9, \text{ dus } T(3, -9).$$

$$\text{Stel } g(x) = a(x - p)^2 + q.$$

$$\text{De grafiek van } g \text{ raakt de x-as in } A(6, 0), \text{ dus } g(x) = a(x - 6)^2.$$

$$\text{De grafiek van } g \text{ gaat door } T(3, -9), \text{ dus } g(3) = -9$$

$$a(3 - 6)^2 = -9$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

$$\text{Dus } g(x) = -(x - 6)^2.$$

- 19** Substitutie van $t = \frac{d}{0,707 \cdot b}$ in $h = 0,707 \cdot b \cdot t - 4,91 \cdot t^2$ geeft

$$h = 0,707 \cdot b \cdot \frac{d}{0,707 \cdot b} - 4,91 \cdot \left(\frac{d}{0,707 \cdot b}\right)^2$$

$$h = d - 4,91 \cdot \frac{d^2}{(0,707 \cdot b)^2}$$

$$h = d - \frac{4,91d^2}{0,499849b^2}$$

$$h \approx d - \frac{9,8d^2}{b^2}$$

$$\text{Dus } h = d - \frac{9,8d^2}{b^2}.$$

Bladzijde 157

- 20 a** Voer in $y_1 = 0,00623x^3 - 0,58274x^2 + 16,47524x - 46,76666$.

De optie maximum geeft $x = 21,65...$

$T = 19,65...$ geeft $P \approx 99,2$

$T = 23,65...$ geeft $P \approx 99,3$

Dus de productiviteit neemt het meest af bij twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur.

- b** $T = 30$ geeft $P = 91,23...$ en $T = 35$ geeft $P = 83,12...$

$$a = \frac{83,12... - 91,23...}{35 - 30} = -1,6226...$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{\text{benaderd}} = -1,6226... \cdot T + b \\ T = 30 \text{ en } P_{\text{benaderd}} = 91,23... \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1,6226... \cdot 30 + b = 91,23... \\ -48,67... + b = 91,23... \\ b = 139,91... \end{array}$$

Dus $a \approx -1,623$ en $b \approx 139,9$.

Bladzijde 158

- 21 a** $40 \text{ km} = 40\,000 \text{ m}$

Aflezen geeft: bij $a = 40\,000$ hoort $\sqrt{h} \approx 10,7$.

$\sqrt{h} \approx 10,7$ geeft $h \approx 10,7^2 = 114,49$

De gevraagde kijkhoogte is 114 meter.

Bladzijde 159

- b** $a = 1000k$ geeft $1000k = 3741\sqrt{h}$

$$\begin{aligned} k &= 3,741\sqrt{h} \\ k &= \sqrt{3,741^2 \cdot h} \\ k &= \sqrt{14 \cdot h} \\ k &\approx \sqrt{14 \cdot h} \end{aligned}$$

Dus $c \approx 14$.

- c** 30 zeemijl komt overeen met $30 \cdot 1,852 = 55,56 \text{ km}$.

$d = 55,56$ en $h = 2$ geeft $3,74 \cdot (\sqrt{H} + \sqrt{2}) = 55,56$

Voer in $y_1 = 3,74 \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})$ en $y_2 = 55,56$.

De optie snijpunt geeft $x = 180,67...$

Dus $\frac{180,67...}{57} \approx 3,2$ keer zo hoog.

Alternatieve uitwerking

30 zeemijl komt overeen met $30 \cdot 1,852 = 55,56 \text{ km}$.

$d = 55,56$ en $h = 2$ geeft $3,74 \cdot (\sqrt{H} + \sqrt{2}) = 55,56$

$$\sqrt{H} + \sqrt{2} = 14,85...$$

$$\sqrt{H} = 13,44...$$

$$H = 180,67...$$

Dus $\frac{180,67...}{57} \approx 3,2$ keer zo hoog.

Bladzijde 160

22 Bij $x = 0$ hoort $y = 0,91$, dus $q = 0,91$.

$$\left. \begin{array}{l} y = px^2 + 0,91 \\ x = 5,03 \text{ en } y = 1,07 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \cdot 5,03^2 + 0,91 = 1,07 \\ 25,3009p = 0,16 \\ p \approx 0,006 \end{array}$$

23 $y = x^3 \xrightarrow{\text{translatie } (2, 0)} y = (x - 2)^3 \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 2} y = (\frac{1}{2}x - 2)^3$

Bladzijde 161

24 De parabool gaat door $(0, 0)$ en $(165, 0)$.

Dit geeft een formule van de vorm $y = ax(x - 165)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{0 + 165}{2} = 82,5 \text{ en } y_{\text{top}} = 51,858, \text{ dus } a \cdot 82,5 \cdot (82,5 - 165) = 51,858$$

$$a \cdot 82,5 \cdot -82,5 = 51,858$$

$$-6806,25a = 51,858$$

$$a = -0,00761...$$

Dit geeft $y = -0,00761...x(x - 165)$ oftewel $y = -0,00761...x^2 + 1,25716...$

Dus $a \approx -0,0076$ en $b \approx 1,2572$.

12.3 Differentiaalrekening**Bladzijde 162**

25 a Op maandag werden er $3 + 2 = 5$ fietsen verkocht.

Op dinsdag $5 + 3 = 8$.

Op woensdag $8 - 1 = 7$.

In de tweede helft van week 15 werden er $32 - 5 - 8 - 7 = 12$ fietsen verkocht.

b $f(x) = (x + 2)(x^2 - 6x + 12) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2x^2 - 12x + 24 = x^3 - 4x^2 + 24$ geeft

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 - 8x = 0$$

$$x(3x - 8) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x - 8 = 0$$

$$x = 0 \vee 3x = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2\frac{2}{3}$$

De x -coördinaten van de toppen zijn 0 en $2\frac{2}{3}$.

c $f(x) = \sqrt{2x} + \frac{3}{x} = (2x)^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 - 3x^{-2} = \frac{1}{(2x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{3}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{3}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{3}{x^2}$$

$$x^2 = 3\sqrt{2x}$$

kwadrateren geeft

$$x^4 = 9 \cdot 2x$$

$$x^4 = 18x$$

$$x^4 - 18x = 0$$

$$x(x^3 - 18) = 0$$

$$x = 0 \vee x^3 - 18 = 0$$

$$x = 0 \vee x^3 = 18$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt[3]{18}$$

vold. niet

Dus de x -coördinaat van de top is $\sqrt[3]{18}$.

d $f(x) = \frac{5}{4x + 6} = 5(4x + 6)^{-1}$ geeft $f'(x) = -5(4x + 6)^{-2} \cdot 4 = \frac{-20}{(4x + 6)^2}$

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{-20}{(0 + 6)^2} = -\frac{5}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{5}{9}x + b \\ f(0) = \frac{5}{6} \end{array} \right\} l: y = -\frac{5}{9}x + \frac{5}{6}$$

e $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$ geeft $f'(x) = -3x^2 + 2x$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = -3 + 2 = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -x + b \\ f(1) = 2, \text{ dus } A(1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 + b = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus $k: y = -x + 3$.

Lijn l staat loodrecht op k en gaat door de oorsprong geeft $l: y = x$.

Het snijpunt van k en l is punt B .

$$-x + 3 = x$$

$$-2x = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1\frac{1}{2} \\ y = x \end{array} \right\} y = 1\frac{1}{2}$$

Dus $B(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

$$d(O, k) = d(O, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{4\frac{1}{2}}$$

f $f(x) = \sqrt[3]{2x - 10} = (2x - 10)^{\frac{1}{3}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 10)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3(2x - 10)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 10)^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{6} \text{ geeft } \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 10)^2}} = \frac{1}{6}$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 10)^2} = 12$$

$$\sqrt[3]{(2x - 10)^2} = 4$$

$$(2x - 10)^2 = 64$$

$$2x - 10 = 8 \vee 2x - 10 = -8$$

$$2x = 18 \vee 2x = 2$$

$$x = 9 \vee x = 1$$

$$f(1) = \sqrt[3]{2 - 10} = \sqrt[3]{-8} = -2 \text{ en } f(9) = \sqrt[3]{18 - 10} = \sqrt[3]{8} = 2$$

De raakpunten zijn $(1, -2)$ en $(9, 2)$.

g $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{5}{2x} = \frac{1}{2}x - 1 + 2\frac{1}{2}x^{-1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2}$

$$f'(x) = \frac{2}{5} \text{ geeft } \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{5}{2x^2}$$

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \vee x = -5 \text{ (vold. niet)}$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{2}{5}x + b \\ f(5) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot 5 + b = 2 \\ 2 + b = 2 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{2}{5}x$ en dus gaat k door de oorsprong.

h $f(x) = \frac{10}{2x - 5} + 2 = 10(2x - 5)^{-1} + 2$ geeft $f'(x) = -10(2x - 5)^{-2} \cdot 2 = \frac{-20}{(2x - 5)^2}$

$$rc_k = f'(0) = \frac{-20}{(0 - 5)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1 \text{ en dit geeft } rc_l = 1\frac{1}{4}.$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{4}x$.

$$f(x) = 1\frac{1}{4}x \text{ geeft } \frac{10}{2x - 5} + 2 = 1\frac{1}{4}x$$

$$10 + 2(2x - 5) = 1\frac{1}{4}x(2x - 5)$$

$$10 + 4x - 10 = 2\frac{1}{2}x^2 - 6\frac{1}{4}x$$

$$2\frac{1}{2}x^2 - 10\frac{1}{4}x = 0$$

$$x(2\frac{1}{2}x - 10\frac{1}{4}) = 0$$

$$x = 0 \vee 2\frac{1}{2}x - 10\frac{1}{4} = 0$$

$$x = 0 \vee 2\frac{1}{2}x = 10\frac{1}{4}$$

$$x = 0 \vee x = 4\frac{1}{10}$$

$$x = 4\frac{1}{10} \text{ geeft } y = 1\frac{1}{4} \cdot 4\frac{1}{10} = 5\frac{1}{8}, \text{ dus } A(4\frac{1}{10}, 5\frac{1}{8}).$$

Bladzijde 165

26 $y_A = -\frac{7}{4}p + \frac{7}{2}$ en $y_B = \sqrt{-3p+6}$

Stel de afstand tussen A en B is L.

Dan is $L = y_B - y_A = \sqrt{-3p+6} - (-\frac{7}{4}p + \frac{7}{2}) = \sqrt{-3p+6} + \frac{7}{4}p - \frac{7}{2} = (-3p+6)^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4}p - \frac{7}{2}$ en

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{2}(-3p+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot -3 + \frac{7}{4} = \frac{-3}{2(-3p+6)^{\frac{1}{2}}} + \frac{7}{4} = \frac{-3}{2\sqrt{-3p+6}} + \frac{7}{4}.$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{-3}{2\sqrt{-3p+6}} + \frac{7}{4} = 0$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{-3p+6}} = -\frac{7}{4}$$

$$14\sqrt{-3p+6} = 12$$

$$\sqrt{-3p+6} = \frac{6}{7}$$

$$-3p+6 = \frac{36}{49}$$

$$-3p = -5\frac{13}{49}$$

$$p = 1\frac{37}{49}$$

27 $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x} = x - 1 + \frac{4}{x} = x - 1 + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \text{ geeft } 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4 \text{ (vold. niet)}$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = \frac{3}{4}x + b \\ f(4) = 4, \text{ dus } R(4, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 4 + b = 4 \\ 3 + b = 4 \\ b = 1 \end{array}$$

Dus $l: y = \frac{3}{4}x + 1$ en $y_S = 1$.

Bladzijde 166

28 a $f(x) = \frac{12}{x-3} + 4 = 12(x-3)^{-1} + 4$ geeft $f'(x) = -12(x-3)^{-2} = \frac{-12}{(x-3)^2}$

$$rc_l = f'(0) = \frac{-12}{(-3)^2} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$$

b $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, dus $rc_k = \frac{3}{4}$.

k door de oorsprong, dus $k: y = \frac{3}{4}x$.

$$f(x) = \frac{3}{4}x \text{ geeft } \frac{12}{x-3} + 4 = \frac{3}{4}x$$

$$12 + 4(x-3) = \frac{3}{4}x(x-3)$$

$$12 + 4x - 12 = \frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{4}x$$

$$\frac{3}{4}x^2 - 6\frac{1}{4}x = 0$$

$$x(\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}) = 0$$

$$x = 0 \vee \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4} = 0$$

$$x = 0 \vee \frac{3}{4}x = 6\frac{1}{4}$$

$$x = 0 \vee x = 8\frac{1}{3}$$

$$x = 8\frac{1}{3} \text{ geeft } y = \frac{3}{4} \cdot 8\frac{1}{3} = 6\frac{1}{4}$$

De coördinaten van dit punt zijn $(8\frac{1}{3}, 6\frac{1}{4})$.

29 a $f(x) = 0$ geeft $(x+1)(x^2 - 5x + 5) = 0$
 $x+1 = 0 \vee x^2 - 5x + 5 = 0$
 $x = -1 \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 5$

$$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x_A = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ en } x_B = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ geeft } x_M = \frac{2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

b $f(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 5) = x^3 - 5x^2 + 5x + x^2 - 5x + 5 = x^3 - 4x^2 + 5$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 8x$
 $f'(x) = 0$ geeft $3x^2 - 8x = 0$

$$x(3x - 8) = 0$$

$$x = 0 \vee 3x - 8 = 0$$

$$x = 0 \vee 3x = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2\frac{2}{3}$$

$$x_C - x_M = 2\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{4}{6} - 2\frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

30 $f(x) = \frac{1}{2x+3} = (2x+3)^{-1}$ geeft $f'(x) = -(2x+3)^{-2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x+3)^2}$

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{-2}{(0+3)^2} = -\frac{2}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{2}{9}x + b \\ f(0) = \frac{1}{3}, \text{ dus } A(0, \frac{1}{3}) \end{array} \right\} l: y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$$

Bladzijde 167

31 $f(x) = g(x)$ geeft $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x}$

$$-2\sqrt{x} = -\frac{4}{x}$$

$$2x\sqrt{x} = 4$$

kwadrateren geeft

$$4x^3 = 16$$

$$x^3 = 4$$

$$x = \sqrt[3]{4}$$

Dus $x_S = \sqrt[3]{4}$.

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$2\sqrt{x} = x^2$$

kwadrateren geeft

$$4x = x^4$$

$$4x - x^4 = 0$$

$$x(4 - x^3) = 0$$

$$x = 0 \vee 4 - x^3 = 0$$

$$\text{vold. niet } x^3 = 4$$

$$x = \sqrt[3]{4}$$

Dus $x_{\text{top}} = \sqrt[3]{4}$.

Dus S is een top van de grafiek van f .

32 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x$ geeft $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \frac{3}{2} \cdot 4 - 4 = 2$.

$$\begin{aligned} k: y = 2x + b \\ A(-2, 4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot -2 + b = 4 \\ -4 + b = 4 \end{array} \right. \\ b = 8 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 2x + 8$.

De lijn door O die loodrecht staat op k heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x$.

Deze lijn snijden met k geeft $2x + 8 = -\frac{1}{2}x$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x &= -8 \\ x &= -3\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$x = -3\frac{1}{5} \text{ geeft } y = -\frac{1}{2} \cdot -3\frac{1}{5} = 1\frac{3}{5}$$

$$d(O, k) = d(O, (-3\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5})) = \sqrt{(-3\frac{1}{5})^2 + (1\frac{3}{5})^2} = \sqrt{12\frac{4}{5}}$$

$$\text{Dus } d(k, l) = 2 \cdot d(O, k) = 2 \cdot \sqrt{12\frac{4}{5}} \approx 7,16.$$

33 $f(x) = \frac{2x^2 + 18}{3x} = \frac{2}{3}x + 6x^{-1}$ geeft $f'(x) = \frac{2}{3} - 6x^{-2} = \frac{2}{3} - \frac{6}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{2}{3} - \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{x^2}$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$f(3) = \frac{18 + 18}{9} = 4 \text{ en } f(-3) = \frac{18 + 18}{-9} = -4$$

Dus $A(-3, -4)$ en $B(3, 4)$.

Bladzijde 168

34 a $f(0) = \sqrt[3]{-27} = -3$, dus $A(0, -3)$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \text{ geeft } \sqrt[3]{9x - 27} &= 0 \\ 9x - 27 &= 0 \\ 9x &= 27 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Dus $B(3, 0)$.

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-3)}{3 - 0} = 1$$

b $f(x) = \sqrt[3]{9x - 27} = (9x - 27)^{\frac{1}{3}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3}(9x - 27)^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 = 3(9x - 27)^{-\frac{2}{3}}$
 $f'(x) = 1$ geeft $3(9x - 27)^{-\frac{2}{3}} = 1$

Voer in $y_1 = 3(9x - 27)^{-\frac{2}{3}}$ en $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 2,42$ en $x \approx 3,58$.

Dus $x_P \approx 2,42$ en $x_Q \approx 3,58$.

35 a $h(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{1}{a} \cdot x + ax^{-1}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{a} - ax^{-2} = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2}{ax^2} - \frac{a^2}{ax^2} = \frac{x^2 - a^2}{ax^2}$

b $h'(x) = 0$ geeft $\frac{x^2 - a^2}{ax^2} = 0$

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 = a^2$$

$$x = a \vee x = -a$$

vold. niet

$$y_{\text{top}} = h(a) = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$$

Bladzijde 169

- 36** In januari 2012 was de elektriciteitsopbrengst $520 + 300 = 820$ kWh.
 In februari 2012 was dat $820 + 875 = 1695$ kWh.
 In maart 2012 was dat $1695 + 2575 = 4270$ kWh.
 In april 2012 was dat $4270 + 550 = 4820$ kWh.
 In mei 2012 was dat $4820 + 1875 = 6695$ kWh.
 In juni 2012 was dat $6695 - 1000 = 5695$ kWh.
 In het eerste halfjaar van 2012 was de elektriciteitsopbrengst dus
 $820 + 1695 + 4270 + 4820 + 6695 + 5695 = 23\,995$ kWh.
 Dus in het tweede halfjaar van 2012 werd er $45\,000 - 5000 - 23\,995 \approx 16\,000$ kWh geproduceerd.

Bladzijde 170

37 $g(x) = -1 + \sqrt{16x - 8} = -1 + (16x - 8)^{\frac{1}{2}}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}(16x - 8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16 = \frac{8}{(16x - 8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{\sqrt{16x - 8}}$

$g(x) = 0$ geeft $-1 + \sqrt{16x - 8} = 0$

$$\sqrt{16x - 8} = 1$$

$$16x - 8 = 1$$

$$16x = 9$$

$$x = \frac{9}{16}$$

helling = $g'(\frac{9}{16}) = \frac{8}{\sqrt{9 - 8}} = 8$

38 $f(x) = \frac{2}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{2}x$ geeft $f'(x) = 2(x - 1)^2 - \frac{1}{2}$

$f'(x) = 3\frac{1}{2}$ geeft $2(x - 1)^2 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

$$2(x - 1)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 = 2$$

$$x - 1 = \sqrt{2} \vee x - 1 = -\sqrt{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}$$

De helling van de grafiek van f is groter dan $3\frac{1}{2}$ voor $x < 1 - \sqrt{2}$ of $x > 1 + \sqrt{2}$.

39 $f(x) = \frac{1}{2x - 3} - x - 1 = (2x - 3)^{-1} - x - 1$ geeft $f'(x) = -(2x - 3)^{-2} \cdot 2 - 1 = \frac{-2}{(2x - 3)^2} - 1$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = \frac{-2}{(-1)^2} - 1 = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -3x + b \\ A(1, -3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 1 + b = -3 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x$, dus k gaat door de oorsprong.

40 $f(x) = \frac{3}{16x^4} = \frac{3}{16}x^{-4}$ geeft $f'(x) = -\frac{12}{16}x^{-5} = -\frac{3}{4x^5}$

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(1) = -\frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{3}{4}x + b \\ A(1, \frac{3}{16}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 1 + b = \frac{3}{16} \\ -\frac{12}{16} + b = \frac{3}{16} \\ b = \frac{15}{16} \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{16}$ en $y_B = \frac{15}{16}$.

41 $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^3$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - 2)^2$

$f(x) = 0$ geeft $(\frac{1}{2}x - 2)^3 = 0$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = 4$$

$f'(x_A) = f'(4) = 1\frac{1}{2}(2 - 2)^2 = 0$

Dus de grafiek van f heeft een horizontale raaklijn in A .

Bladzijde 171

- 42 a** Gelijke watertemperatuur en gelijke waterdiepte, dus het verschil wordt bepaald door het verschil in zoutgehalte.
Het gevraagde verschil is $1,391(337 - 35) - 1,391(12 - 35) \approx 452$ m/s.
- b** $v = 1449,2 + 4,623T - 0,0546T^2 + 1,391(Z - 35) + \frac{D}{60}$ waarbij Z en D constanten zijn geeft
- $$\frac{dv}{dT} = 4,623 - 0,1092T$$
- $$\frac{dv}{dT} = 0 \text{ geeft } 4,623 - 0,1092T = 0$$
- $$0,1092T = 4,623$$
- $$T \approx 42,3$$
- Dus bij een temperatuur van $42,3^\circ\text{C}$ is de geluidssnelheid in zeewater maximaal.
- c** $D = 20$, $T = 10$ en $Z = 35$ geeft
- $$v = 1449,2 + 4,623 \cdot 10 - 0,0546 \cdot 10^2 + 1,391(35 - 35) + \frac{20}{60} = 1490,3\dots$$
- De door het geluid afgelegde afstand is $12,45 \cdot 1490,3\dots = 18\,554,2\dots$ meter.
Dus het object is $18\,554,2\dots : 2 \approx 9300$ meter van de onderzeeboot verwijderd.

Bladzijde 172

- 43** Op $[0; 0,001]$ is $\frac{\Delta V}{\Delta C} = \frac{V(0,001) - V(0)}{0,001} = \frac{1,004512\dots - 1}{0,001} = 4,51\dots$, dus $a \approx 4,5$.
- $$b = V(0) = \frac{1 + 0,5 \cdot 0}{(1 - 0)^4} = 1$$
- Dus $V_{\text{lin}} = 4,5C + 1$.
- 44 a** $f(x) = -(2x - 3)^3 + 3x^2 - 6x + 4$ geeft $f'(x) = -3(2x - 3)^2 \cdot 2 + 6x - 6$
- $$= -6(4x^2 - 12x + 9) + 6x - 6$$
- $$= -24x^2 + 72x - 54 + 6x - 6$$
- $$= -24x^2 + 78x - 60$$
- b** $f'(x) = 0$ geeft $-24x^2 + 78x - 60 = 0$
- $$4x^2 - 13x + 10 = 0$$
- $$D = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10 = 9$$
- $$x = \frac{13 \pm 3}{8} = 2 \vee x = \frac{13 - 3}{8} = 1\frac{1}{4}$$
- $f(1\frac{1}{4}) = 1\frac{5}{16}$, dus $A(1\frac{1}{4}, 1\frac{5}{16})$ en $f(2) = 3$, dus $B(2, 3)$.
- Stel $k: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 1\frac{5}{16}}{2 - 1\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}$.
- $$k: y = 2\frac{1}{4}x + b \quad \left. \begin{array}{l} B(2, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{4} \cdot 2 + b = 3 \\ 4\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = -1\frac{1}{2} \end{array}$$
- Dus $k: y = 2\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$ en $M(0, -1\frac{1}{2})$.
- Stel $l: y = ax + b$ met $a = rc_l = rc_k = 2\frac{1}{4}$.
- $$l: y = 2\frac{1}{4}x + b \quad \left. \begin{array}{l} P(1, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{4} \cdot 1 + b = 2 \\ 2\frac{1}{4} + b = 2 \\ b = -\frac{1}{4} \end{array}$$
- Dus $l: y = 2\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ en $N(0, -\frac{1}{4})$.
- Uit de gelijkvormigheid volgt $z = \frac{OM}{ON} = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 6$.

12.4 Exponenten en logaritmen

Bladzijde 173

- 45 a** $g_{\text{week}} = 1,075$, dus los op $1,075^T = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,075^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 9,58...$
 De verdubbelingstijd is $9,58... \times 7 \approx 67$ dagen.
- b** $1,075^6 \cdot 1,068^4 = 2,007...$
 Dus de hoeveelheid is in deze 10 jaar verdubbeld.
- c** $g_{10 \text{ jaar}} = 5$
 $g_{\text{jaar}} = 5^{\frac{1}{10}} = 1,174...$
 Los op $3 \cdot 10^8 \cdot 1,174...^t = 4,5 \cdot 10^{10}$ oftewel $1,174...^t = 150$.
 Voer in $y_1 = 1,174...^x$ en $y_2 = 150$.
 De optie snijpunt geeft $x = 31,1...$
 Dus in het jaar 2051.
- d** $170 \text{ cm} = 1700 \text{ mm}$
 $\left(\frac{1700}{5,5}\right)^{\frac{1}{49}} \approx 1,124$
 Het gevraagde percentage is 12,4%.
- e** $3^{\frac{1}{4}x+7} = 9^x$
 $3^{\frac{1}{4}x+7} = (3^2)^x$
 $3^{\frac{1}{4}x+7} = 3^{2x}$
 $\frac{1}{4}x + 7 = 2x$
 $-1\frac{3}{4}x = -7$
 $x = 4$
- f** $5^{2x-1} - 25 = 3100$
 $5^{2x-1} = 3125$
 $5^{2x-1} = 5^5$
 $2x - 1 = 5$
 $2x = 6$
 $x = 3$
- g** $y = 2^x \xrightarrow{\text{translatie } (2, -12)} y = 2^{x-2} - 12 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } \frac{1}{8}} y = \frac{1}{8}(2^{x-2} - 12)$
 Er geldt $\frac{1}{8}(2^{x-2} - 12) = \frac{1}{8} \cdot 2^{x-2} - 1\frac{1}{2} = 2^{-3} \cdot 2^{x-2} - 1\frac{1}{2} = 2^{x-5} - 1\frac{1}{2}$.
 Dus $g(x) = 2^{x-5} - 1\frac{1}{2}$ en $a = -5$ en $b = -1\frac{1}{2}$.
- h** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } a} y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{a}}$, dus $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{a}}$.
 $g(-16) = 16$ geeft $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-16}{a}} = 16$
 $(2^{-1})^{\frac{-16}{a}} = 2^4$
 $2^{\frac{16}{a}} = 2^4$
 $\frac{16}{a} = 4$
 $a = 4$
- i** $y = 5 - 3^{0,4x-1} \xrightarrow{\text{translatie } (-10, 6)} y = 5 - 3^{0,4(x+10)-1} + 6$
 Er geldt $5 - 3^{0,4(x+10)-1} + 6 = 11 - 3^{0,4x+4-1} = 11 - 3^{0,4x+3} = 11 - 3^{0,4x} \cdot 3^3 = 11 - 27 \cdot 3^{0,4x}$.
 Dus $a = 11$ en $b = -27$.
- j** Bij $K = 2,4$ hoort $F = 3,5$ geeft $0,15 \cdot 2,4^b = 3,5$
 $2,4^b = \frac{3,5}{0,15}$
 $b = {}^{2,4}\log\left(\frac{3,5}{0,15}\right) \approx 3,6$
- k** $70 \cdot 10^{-x} = 65$
 $10^{-x} = \frac{65}{70}$
 $-x = \log\left(\frac{65}{70}\right)$
 $x = -\log\left(\frac{65}{70}\right) \approx 0,032$

$$\begin{aligned}
 \text{I } y &= 3^{\frac{1}{4}x+2} \\
 3^{\frac{1}{4}x+2} &= y \\
 \frac{1}{4}x + 2 &= {}^3\log(y) \\
 \frac{1}{4}x &= -2 + {}^3\log(y) \\
 x &= -8 + 4 \cdot {}^3\log(y)
 \end{aligned}$$

Bladzijde 174

- 46 a** $A = 5$ geeft $\log(A) = \log(5) \approx 0,7$
 Aflezen: bij $\log(A) = 0,7$ hoort $\log(B) \approx 0,06$.
 $\log(B) = 0,06$ geeft $B = 10^{0,06} \approx 1,15$
- b** $N = 0,25 \cdot M^{1,75}$
 $\log(N) = \log(0,25 \cdot M^{1,75})$
 $\log(N) = \log(0,25) + \log(M^{1,75})$
 $\log(N) \approx -0,60 + 1,75 \cdot \log(M)$
 Dus $\log(N) = -0,60 + 1,75 \cdot \log(M)$.
- c** $P = 5,6 \cdot 10^{18}$ geeft $\log(5,6 \cdot 10^{18}) = 0,006q + 12,5$
 $18,748... = 0,006q + 12,5$
 $-0,006q = -6,248...$
 $q \approx 1041$
- d** Lees af: $g_{5 \text{ uur}} = \frac{10^{5,5}}{10^2} = 10^{3,5}$.
 Dit geeft $g_{\text{minuut}} = (10^{3,5})^{\frac{1}{300}} \approx 1,027$.
 Dus N neemt per minuut met 2,7% toe.
- e** $3 + {}^2\log(5x + 1) = 8$
 ${}^2\log(5x + 1) = 5$
 $5x + 1 = 32$
 $5x = 31$
 $x = 6\frac{1}{5}$
- f** $f(x) = 3 + {}^2\log(4x + 5) = 3 + {}^2\log(4(x + 1\frac{1}{4})) = 3 + {}^2\log(4) + {}^2\log(x + 1\frac{1}{4})$
 $= 3 + 2 + {}^2\log(x + 1\frac{1}{4}) = 5 + {}^2\log(x + 1\frac{1}{4})$
 $y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-1\frac{1}{4}, 5)} y = 5 + {}^2\log(x + 1\frac{1}{4})$
 Dus de horizontale translatie is $1\frac{1}{4}$ naar links en de verticale translatie is 5 omhoog.
- g** $A = 500$ en $G = 7$ geeft $\log(500) + 5 \cdot \log(B) - 8,5 = 7$
 $5 \cdot \log(B) = 15,5 - \log(500)$
 $\log(B) = \frac{15,5 - \log(500)}{5} = 2,560...$
 $B = 10^{2,560...} \approx 363$
- h** $H = \log(P) + 1,75 \cdot \log(Q) - 0,25$
 $H = \log(P) + \log(Q^{1,75}) + \log(10^{-0,25})$
 $H = \log(10^{-0,25} \cdot P \cdot Q^{1,75})$
 $H \approx \log(0,56 \cdot P \cdot Q^{1,75})$
 Dus $a \approx 0,56$ en $b = 1,75$.
- i** Voor een verticale asymptoot zou moeten gelden $x^2 - 4x + 5 = 0$.
 Van deze vergelijking is de discriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$.
 $D < 0$, dus geen oplossingen en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot.
- j** $f(x) = 0$ geeft ${}^2\log(x^2 - 5x + 4) = 0$
 $x^2 - 5x + 4 = 1$
 $x^2 - 5x + 3 = 0$
 $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$
 $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$
 De nulpunten van f zijn $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ en $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$.

Bladzijde 179

- 47 a** $L = 0,8$ geeft $\log(L) = \log(0,8) \approx -0,1$
 Aflezen geeft: bij $\log(L) = 0,1$ hoort $\log(G) \approx -2,3$.
 $\log(G) = -2,3$ geeft $G = 10^{-2,3} \approx 0,005$
 Het gevraagde gewicht is 5 mg.
- b** $L = 1,9$ en $G = 0,25$ geeft $0,014 \cdot 1,9^b = 0,25$
 Voer in $y_1 = 0,014 \cdot 1,9^x$ en $y_2 = 0,25$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 4,49$.
 Dus $b \approx 4,49$.
- c** $G = 0,014 \cdot L^{4,5}$
 $\log(G) = \log(0,014 \cdot L^{4,5})$
 $\log(G) = \log(0,014) + \log(L^{4,5})$
 $\log(G) = -1,85... + 4,5 \cdot \log(L)$
 Dus $p \approx -1,9$ en $q = 4,5$.

Bladzijde 180

- 48 a** Aflezen geeft: bij 1950 hoort $\log(E) \approx 19,6$.
 $\log(E) = 19,6$ geeft $E = 10^{19,6} \approx 3,98 \cdot 10^{19}$
 Het gevraagde energieverbruik is 40 exajoule.
- b** $E = 3,0 \cdot 10^{20}$ geeft $\log(3,0 \cdot 10^{20}) = 0,0125t + 15,8$
 $20,47... = 0,0125t + 15,8$
 $-0,0125t = -4,67...$
 $t \approx 374,2$
 Dus in het jaar 2025.
- c** Los op $1,2 \cdot 10^{13} \cdot 10^t = 1,7 \cdot 10^{17}$. Hierin is t in honderden jaren.
 Dit geeft $10^t = 14166,6...$
 $t = \log(14166,6...) \approx 4,15$
 Dus over ruim 4 eeuwen.

Bladzijde 181

- 49 a** Bij $t = 0$ hoort $\log(N) = 1$, dus $N = 10$.
 Bij $t = 8$ hoort $\log(N) = 7$, dus $N = 10^7$.
 8 uur = 480 minuten
 $g_{480 \text{ minuten}} = \frac{10^7}{10} = 10^6$
 $g_{\text{minuut}} = (10^6)^{\frac{1}{480}} \approx 1,029$
 Dus het gevraagde percentage is 2,9%.
- b** Los op $1,029^T = 2$.
 Voer in $y_1 = 1,029^x$ en $y_2 = 2$.
 De optie snijpunt geeft $x = 24,2...$
 De verdubbelingstijd is ongeveer 24 minuten.
- c** $L = 84$ geeft $100 \cdot 10^{-D} = 84$
 Voer in $y_1 = 100 \cdot 10^{-x}$ en $y_2 = 84$.
 De optie snijpunt geeft $x \approx 0,076$.
 Aflezen geeft: bij $D = 0,076$ hoort $N \approx 1,6 \cdot 10^7$.
 Dus 16 miljoen bacteriën in de reageerbuis.

Alternatieve uitwerking

$L = 84$ geeft $100 \cdot 10^{-D} = 84$
 $10^{-D} = 0,84$
 $-D = \log(0,84)$
 $D = -\log(0,84) \approx 0,076$
 Aflezen geeft: bij $D = 0,076$ hoort $N \approx 1,6 \cdot 10^7$.
 Dus 16 miljoen bacteriën in de reageerbuis.

Bladzijde 182

- 50 a** $p = 0,31$ geeft $\log(p) = \log(0,31) \approx -0,51$
 Aflezen geeft: bij $\log(p) = -0,51$ hoort $T \approx 69$.
 Dus bij een temperatuur van 69°C .
- b** $T = 130$ geeft $\log(p) = 5,68 - \frac{2120}{273 + 130} = 0,419\dots$
 $p = 10^{0,419\dots} \approx 2,6$
 Dus de gevraagde druk is 2,6 bar.
- c** $\log(p) = 5,68 - \frac{2120}{273 + T}$
 $\frac{2120}{273 + T} = 5,68 - \log(p)$
 $\frac{2120}{5,68 - \log(p)} = 273 + T$
 $\frac{2120}{5,68 - \log(p)} - 273 = T$
 $T = \frac{2120}{5,68 - \log(p)} - 273$

Bladzijde 183

- 51 a** $1,02 \cdot 1,01 \cdot 1,07 \cdot 1,14 \cdot 1,26 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,08 \cdot 1,06 \approx 2,02$
 Dus de prijs is in 10 jaar tijd ongeveer verdubbeld.
- b** $g_{10 \text{ jaar}} = 2$
 $g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{10}} \approx 1,072$
 Het gevraagde percentage per jaar is 7,2%.
- c** $B = 13\,000$, $V = 2250$ en $P = 7$ geeft $\frac{19,9 \cdot 2250}{7} \cdot \left(\left(1 + \frac{7}{100} \right)^t - 1 \right) = 13\,000$
 Voer in $\frac{19,9 \cdot 2250}{7} \cdot \left(\left(1 + \frac{7}{100} \right)^x - 1 \right)$ en $y_2 = 13\,000$.
 De optie snijpunt geeft $x = 16,3\dots$
 Dus na 17 jaar.

Bladzijde 184

- 52 a** $f(x) = 2$ geeft $4 - 2^{0,3x-2} = 2$
 $2^{0,3x-2} = 2^1$
 $0,3x - 2 = 1$
 $0,3x = 3$
 $x = 10$
 Dus $x_R = 10$.
- b** Voer in $y_1 = 4 - 2^{0,3x-2}$.
 De optie nulpunt geeft $x = 13,33\dots$, dus $Q(13,33\dots; 0)$.
 Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 5}{13,33\dots - 0} = -0,375$.
 $l: y = -0,375x + b$
 door $P(0, 5)$ } $l: y = -0,375x + 5$
 Voer in $y_2 = -0,375x + 5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 4,295\dots$ en $y = 3,389\dots$
 Dus $S(4,30; 3,39)$.
- c** $y = 4 - 2^{0,3x-2} \xrightarrow{\text{translatie } (-20, 10)} y = 4 - 2^{0,3(x+20)-2} + 10$
 Er geldt $4 - 2^{0,3(x+20)-2} + 10 = 14 - 2^{0,3x+6-2} = 14 - 2^{0,3x+4} = 14 - 2^{0,3x} \cdot 2^4 = 14 - 16 \cdot 2^{0,3x}$.
 Dus $a = 14$ en $b = -16$.

- 53 a** $s_2 = 2s_1$ geeft $v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0,06} \approx 0,959v_1$
 De afname is ongeveer 4,1%, dus de formule voldoet niet aan deze vuistregel.

Bladzijde 185

- b** 2 uur = 7200 seconden en 2 minuten = 120 seconden, dus de wereldrecordtijd op de marathon is $7200 + 120 + 57 = 7377$ seconden.

$$\frac{7377 \text{ seconden}}{42,195 \text{ km}} \approx 175 \text{ seconden/km}$$

Dus het looptempo is 2 minuten en 55 seconden.

- c** $s = 50$ geeft $\log(s) = \log(50) \approx 1,7$
 Aflezen geeft: bij $\log(s) = 1,7$ hoort $\log(t) \approx 0,39$
 $\log(t) = 0,39$ geeft $t = 10^{0,39} = 2,45...$
 Dus het verwachte wereldrecord is 2 uur en $0,45... \times 60 \approx 27$ minuten.

Bladzijde 186

- 54 a** Voor een verticale asymptoot zou moeten gelden $x^2 - 3x + 3 = 0$.
 Van deze vergelijking is de discriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$.
 $D < 0$, dus geen oplossingen en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot.

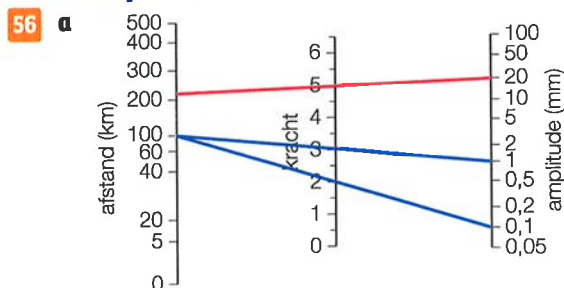
- b** $f(x) = 0$ geeft ${}^2\log(x^2 - 3x + 3) = 0$
 $x^2 - 3x + 3 = 1$
 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 1)(x - 2) = 0$
 $x = 1 \vee x = 2$
 $(1, 0) \xrightarrow{\text{translatie } (3, 0)} (4, 0)$, dus $a = 3$.
 $(2, 0) \xrightarrow{\text{translatie } (2, 0)} (4, 0)$, dus $a = 2$.

- 55 a** $f(x) = g(x)$ geeft $2^{\frac{1}{2}x+3} = 4^x$
 $2^{\frac{1}{2}x+3} = (2^2)^x$
 $2^{\frac{1}{2}x+3} = 2^{2x}$
 $\frac{1}{2}x + 3 = 2x$
 $-1\frac{1}{2}x = -3$
 $x = 2$

$$g(2) = 4^2 = 16$$

Dus $A(2, 16)$.

- b** $y = 2^{\frac{1}{2}x+3}$
 $2^{\frac{1}{2}x+3} = y$
 $\frac{1}{2}x + 3 = {}^2\log(y)$
 $\frac{1}{2}x = -3 + {}^2\log(y)$
 $x = -6 + 2 \cdot {}^2\log(y)$

Bladzijde 187

De beving met amplitude 1 mm heeft kracht 3,0.
 De beving met amplitude 0,1 mm heeft kracht 2,0.
 Het verschil in kracht is 1,0.

- b** $K = 7,85$ en $A = 1000$ geeft $\log(1000) + 3 \cdot \log(D) - 3,38 = 7,85$
 Voer in $y_1 = \log(1000) + 3 \cdot \log(x) - 3,38$ en $y_2 = 7,85$.
 De optie snijpunt geeft $x = 553,7...$
 Dus de gevraagde oppervlakte van het rampgebied is $\pi \cdot 553,7...^2 \approx 963\,000 \text{ km}^2$.

Alternatieve uitwerking

$$\begin{aligned} K = 7,85 \text{ en } A = 1000 \text{ geeft } \log(1000) + 3 \cdot \log(D) - 3,38 &= 7,85 \\ 3 + 3 \cdot \log(D) - 3,38 &= 7,85 \\ 3 \cdot \log(D) &= 8,23 \\ \log(D) &= 2,74... \\ D &= 10^{2,74...} = 553,7... \end{aligned}$$

Dus de gevraagde oppervlakte van het rampgebied is $\pi \cdot 553,7...^2 \approx 963\,000 \text{ km}^2$.

- c** $K = \log(A) + 1,6 \cdot \log(D) - 0,15$
 $K = \log(A) + \log(D^{1,6}) + \log(10^{-0,15})$
 $K = \log(A \cdot D^{1,6} \cdot 10^{-0,15})$
 $K = \log(0,70... \cdot A \cdot D^{1,6})$
 Dus $p \approx 0,7$ en $q = 1,6$.

Bladzijde 188

57 a $g^{48} = \frac{440}{27,5}$ geeft $g = \left(\frac{440}{27,5}\right)^{\frac{1}{48}} \approx 1,0595$

Het gevraagde percentage is 5,95%.

- b** Voer in $y_1 = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(x-69)}$ en maak een tabel.
 Hieruit volgt
 $m = 15$ geeft $f \approx 19,4$
 $m = 16$ geeft $f \approx 20,6$
 $m = 135$ geeft $f \approx 19912$
 $m = 136$ geeft $f \approx 21\,096$.
 Het laagste MIDI-nummer is dus 16 en het hoogste is 135.
 Dus zo'n piano zal 120 toetsen hebben.

Bladzijde 189

58 a $f(x) = 13$ geeft $4^{x+1} - 3 = 13$

$$4^{x+1} = 16$$

$$4^{x+1} = 4^2$$

$$x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

$$g(x) = 13 \text{ geeft } 8 + {}^2\log(4(x + 1\frac{1}{2})) = 13$$

$${}^2\log(4(x + 1\frac{1}{2})) = 5$$

$$4(x + 1\frac{1}{2}) = 32$$

$$x + 1\frac{1}{2} = 8$$

$$x = 6\frac{1}{2}$$

$$x_A = 1 \text{ en } x_B = 6\frac{1}{2} \text{ geeft } AB = 5\frac{1}{2}$$

b $g(x) = 8 + {}^2\log(4(x + 1\frac{1}{2})) = 8 + {}^2\log(4) + {}^2\log(x + 1\frac{1}{2}) = 8 + 2 + {}^2\log(x + 1\frac{1}{2}) = {}^2\log(x + 1\frac{1}{2}) + 10$

$$y = {}^2\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-1\frac{1}{2}, 10)} y = {}^2\log(x + 1\frac{1}{2}) + 10$$

Dus door de translatie $1\frac{1}{2}$ naar links en 10 omhoog.

59 a $f(x) = 241$ geeft $3^{x-1} - 2 = 241$

$$3^{x-1} = 243$$

$$3^{x-1} = 3^5$$

$$x - 1 = 5$$

$$x = 6$$

b $y = 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (0, -6)} y = 3^x - 6 \xrightarrow{\text{verm. x-as, } \frac{1}{3}} y = \frac{1}{3}(3^x - 6)$

$$\text{Er geldt } \frac{1}{3}(3^x - 6) = \frac{1}{3} \cdot 3^x - 2 = 3^{-1} \cdot 3^x - 2 = 3^{x-1} - 2.$$

$$\text{Dus } h(x) = 3^{x-1} - 2.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } y &= 3^x \xrightarrow{\text{verm. } y=as, a} y = 3^{\frac{1}{a} \cdot x}, \text{ dus } k(x) = 3^{\frac{x}{a}}. \\
 k(-20) &= 81 \text{ geeft } 3^{\frac{-20}{a}} = 81 \\
 3^{\frac{-20}{a}} &= 3^4 \\
 \frac{-20}{a} &= 4 \\
 a &= -5
 \end{aligned}$$

12.5 Goniometrie

Bladzijde 190

60 a $f(x) = 0$ geeft $3 \cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = 0$

$$\cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = 0$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 1\frac{1}{8}\pi + k \cdot 1\frac{1}{2}\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{8}\pi$

Dus de gevraagde x -coördinaat is $1\frac{1}{8}\pi$.

b Voor het hoogste punt geldt $\cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = 1$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi = k \cdot 2\pi$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot 3\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{3}{8}\pi$ en top $(\frac{3}{8}\pi, 3)$.

Voor het laagste punt geldt $\cos(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi) = -1$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\pi = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{2}{3}x = 1\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1\frac{7}{8}\pi + k \cdot 3\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{7}{8}\pi$ en top $(1\frac{7}{8}\pi, -3)$.

c $f(x) = 0$ geeft $2 + 4 \sin(1\frac{1}{2}\pi x) = 0$

$$4 \sin(1\frac{1}{2}\pi x) = -2$$

$$\sin(1\frac{1}{2}\pi x) = -\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2}\pi x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}\pi x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{9} + k \cdot 1\frac{1}{3} \vee x = \frac{7}{9} + k \cdot 1\frac{1}{3}$$

x in $[0, 1\frac{1}{2}]$ geeft $x = \frac{7}{9}$ en top $x = 1\frac{2}{9}$

Dus de gevraagde x -coördinaten zijn $\frac{7}{9}$ en $1\frac{2}{9}$.

d Voor het hoogste punt geldt $\sin(1\frac{1}{2}\pi x) = 1$

$$1\frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{3} + k \cdot 1\frac{1}{3}$$

x in $[0, 1\frac{1}{2}]$ geeft $x = \frac{1}{3}$ en top $(\frac{1}{3}, 6)$.

Voor het laagste punt geldt $\sin(1\frac{1}{2}\pi x) = -1$

$$1\frac{1}{2}\pi x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 1 + k \cdot 1\frac{1}{3}$$

x in $[0, 1\frac{1}{2}]$ geeft $x = 1$ en top $(1, -2)$.

$$\begin{aligned} \text{e } f(x) = \frac{2}{11} \text{ geeft } \frac{1}{3 \sin(x) + 4} &= \frac{2}{11} \\ 2(3 \sin(x) + 4) &= 11 \\ 6 \sin(x) + 8 &= 11 \\ 6 \sin(x) &= 3 \\ \sin(x) &= \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x &= \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$, dus $x_A = \frac{1}{6}\pi$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2}{5} \text{ geeft } \frac{1}{3 \sin(x) + 4} &= \frac{2}{5} \\ 2(3 \sin(x) + 4) &= 5 \\ 6 \sin(x) + 8 &= 5 \\ 6 \sin(x) &= -3 \\ \sin(x) &= -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x &= 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$, dus $x_D = 1\frac{5}{6}\pi$.

$$x_D - x_A = 1\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = 1\frac{2}{3}\pi$$

f $\cos(\alpha)$ is maximaal 1, dus $1 + 0,15 \cdot \cos(\alpha)$ is maximaal 1,15, dus $\frac{391}{1 + 0,15 \cdot \cos(\alpha)}$ is minimaal $\frac{391}{1,15} = 340$.

$\cos(\alpha)$ is minimaal -1 , dus $1 + 0,15 \cdot \cos(\alpha)$ is minimaal 0,85, dus $\frac{391}{1 + 0,15 \cdot \cos(\alpha)}$ is maximaal $\frac{391}{0,85} = 460$.

Dus de minimale waarde van F is 340 en de maximale waarde van F is 460.

g Voer in $y_1 = 1 + 3 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) - \cos(2x + \frac{1}{4}\pi)$.
De optie maximum geeft $x = 1,2764...$ en $y = 4,9743...$
De optie minimum geeft $x = 2,8472...$ en $y = -2,9743...$
evenwichtsstand = $\frac{4,9743... + -2,9743...}{2} = 1$, dus $a = 1$.

amplitude = $4,9743... - 1 = 3,9743...$, dus $b \approx 3,974$.

$\frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 2,8472... - 1,2764... = 1,5707...$, dus periode = $3,1415...$ en $c = \frac{2\pi}{3,1415...} = 2$.

Voer in $y_2 = 1$.

De optie snijpunt geeft dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat voor $x = 0,4910...$, dus $d \approx 0,491$.

Bladzijde 191

h $g(x) = a + b \cdot \cos(c(x - d))$

De periode is 3, dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

De amplitude van de grafiek van f is 2, dus de amplitude van de grafiek van g is 8, dus $b = 8$.

Het hoogste punt van de grafiek van f heeft y -coördinaat 5, dus het hoogste punt van de grafiek van g heeft y -coördinaat 5. Uit evenwichtsstand = hoogste stand - amplitude volgt voor de grafiek van g dat evenwichtsstand = $5 - 8 = -3$, dus $a = -3$.

De x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van f is $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, dus de x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van g is $\frac{5}{6}$, dus $d = \frac{5}{6}$.

i $f(x) = 0$ geeft $4 \sin(\frac{2}{3}\pi(x-1)) = 0$

$$\sin(\frac{2}{3}\pi(x-1)) = 0$$

$$\frac{2}{3}\pi(x-1) = k \cdot \pi$$

$$x-1 = k \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

x in $[0, 3]$ geeft $x = 1 \vee x = 2\frac{1}{2}$

Dus $A(1, 0)$ en $B(2\frac{1}{2}, 0)$.

Verder is $T(\frac{1}{2}(1 + 2\frac{1}{2}), 4) = T(1\frac{3}{4}, 4)$.

Stel $p: y = a(x-p)^2 + q$.

top $T(1\frac{3}{4}, 4)$ geeft $y = a(x - 1\frac{3}{4})^2 + 4$

Door $A(1, 0)$ geeft $a(1 - 1\frac{3}{4})^2 + 4 = 0$

$$a(-\frac{3}{4})^2 + 4 = 0$$

$$\frac{9}{16}a = -4$$

$$a = -7\frac{1}{9}$$

Dus $p: y = -7\frac{1}{9}(x - 1\frac{3}{4})^2 + 4$.

$$-7\frac{1}{9}(x - 1\frac{3}{4})^2 + 4 = -7\frac{1}{9}(x^2 - 3\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{16}) + 4 = -7\frac{1}{9}x^2 + 24\frac{8}{9}x - 21\frac{7}{9} + 4 = -7\frac{1}{9}x^2 + 24\frac{8}{9}x - 17\frac{7}{9}$$

Dus $a = -7\frac{1}{9}$, $b = 24\frac{8}{9}$ en $c = -17\frac{7}{9}$.

Bladzijde 194

61 $g(x) = \frac{1}{4}$ geeft $\frac{1}{2\sin(x) + 3} = \frac{1}{4}$

$$2\sin(x) + 3 = 4$$

$$2\sin(x) = 1$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[-2\pi, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = -1\frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = -1\frac{1}{6}\pi$

$x_B = -1\frac{5}{6}\pi$ en $x_E = \frac{5}{6}\pi$ geeft $BE = \frac{5}{6}\pi - (-1\frac{5}{6}\pi) = 2\frac{2}{3}\pi$

Bladzijde 195

62 a $\frac{2\pi}{0,212769} = 29,53\dots$

29 dagen

$$0,53\dots \cdot 24 \text{ uur} = 12,73\dots \text{ uur}$$

$$0,73\dots \cdot 60 \text{ minuten} \approx 44 \text{ minuten}$$

De periode van P is 29 dagen, 12 uur en 44 minuten.

b $P = 0$ geeft $50 + 50 \sin(0,212769t - 1,042563) = 0$

Voer in $y_1 = 50 + 50 \sin(0,212769x - 1,042563)$.

De optie nulpunt geeft $x = 27,04\dots$

Dus op 28 januari 2017.

c 22 februari ligt tussen $t = 52$ en $t = 53$.

$t = 52$ geeft $P = 21,9\dots$

$t = 53$ geeft $P = 13,8\dots$

$P < 50$ en P neemt af, dus de maan bevindt zich op 22 februari 2017 tussen laatste kwartier en nieuwe maan.

63 a $f(x) = 0$ geeft $1 - 2 \sin(\pi x) = 0$

$$2 \sin(\pi x) = 1$$

$$\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6} + k \cdot 2 \vee x = \frac{5}{6} + k \cdot 2$$

x in $[0, 2]$ geeft $x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{5}{6}$

De nulpunten zijn $\frac{1}{6}$ en $\frac{5}{6}$.

b Voor P geldt $\sin(\pi x) = 1$

$$\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2} + k \cdot 2$$

x in $[0, 2]$ geeft $x = \frac{1}{2}$ en $P(\frac{1}{2}, -1)$.

$g(\frac{1}{2}) = -1 + \sqrt{8-8} = -1$, dus P op de grafiek van g .

Voor Q geldt $\sin(\pi x) = -1$

$$\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2} + k \cdot 2$$

x in $[0, 2]$ geeft $x = \frac{1}{2}$ en $Q(\frac{1}{2}, 3)$.

$g(\frac{1}{2}) = -1 + \sqrt{24-8} = -1 + \sqrt{16} = 3$, dus Q op de grafiek van g .

Bladzijde 196

64 a $f(x) = 0$ geeft $2\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi) = 0$

$$\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi) = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{8}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

x in $[0, \frac{5}{2}\pi]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi$

De x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as is $\frac{1}{4}\pi$.

b Voor het hoogste punt van de grafiek van g geldt $\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = 1$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, \frac{5}{2}\pi]$ geeft $x = \frac{3}{4}\pi$ en top $(\frac{3}{4}\pi, 1)$.

$x = \frac{3}{4}\pi$ geeft $y = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$, dus $(\frac{3}{4}\pi, 1)$ op k .

Voor het laagste punt van de grafiek van g geldt $\sin(x - \frac{1}{4}\pi) = -1$

$$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, \frac{5}{2}\pi]$ geeft $x = \frac{3}{4}\pi$ en top $(\frac{3}{4}\pi, -1)$.

$x = \frac{3}{4}\pi$ geeft $y = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = -1$, dus $(\frac{3}{4}\pi, -1)$ op k .

Dus de toppen van de grafiek van g liggen op k .

65 $\cos(\alpha)$ is maximaal 1, dus $1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)$ is maximaal 1,25, dus $\frac{37,5}{1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)}$ is minimaal $\frac{37,5}{1,25} = 30$.

$\cos(\alpha)$ is minimaal -1, dus $1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)$ is minimaal 0,75, dus $\frac{37,5}{1 + 0,25 \cdot \cos(\alpha)}$ is maximaal $\frac{37,5}{0,75} = 50$.

Dus de minimale afstand van Pluto tot de zon is 30 AE en de maximale afstand 50 AE.

Bladzijde 197

66 a $f(x) = \frac{7}{2}$ geeft $2 + 3\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = \frac{7}{2}$

$$3\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = \frac{3}{2}$$

$$\sin(\pi(x + \frac{1}{4})) = \frac{1}{2}$$

$$\pi(x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi(x + \frac{1}{4}) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + k \cdot 2 \vee x + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} + k \cdot 2$$

$$x = -\frac{1}{12} + k \cdot 2 \vee x = \frac{7}{12} + k \cdot 2$$

x in $[0, 2]$ geeft $x = \frac{11}{12} \vee x = \frac{7}{12}$

De x -coördinaten van deze punten zijn $\frac{7}{12}$ en $\frac{11}{12}$.

b $g(x) = p + q \cdot \cos(r(x-s))$

De periode is 4, dus $r = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

De amplitude van de grafiek van f is 3, dus de amplitude van de grafiek van g is 6, dus $q = 6$.

Het hoogste punt van de grafiek van f heeft y -coördinaat 5, dus het hoogste punt van de grafiek van g heeft y -coördinaat 5. Uit evenwichtsstand = hoogste stand – amplitude volgt voor de grafiek van g dat evenwichtsstand = $5 - 6 = -1$, dus $p = -1$.

De x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van f is $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, dus de x -coördinaat van het hoogste punt van de grafiek van g is $\frac{1}{4}$, dus $s = \frac{1}{4}$.

67 a $f(x) = \frac{3}{2}$ geeft $3 \sin(\pi x) = \frac{3}{2}$

$$\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee \pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6} + k \cdot 2 \vee x = \frac{5}{6} + k \cdot 2$$

x in $[-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}]$ geeft $x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{5}{6}$

Dus $x_P = \frac{1}{6}$ en $x_Q = \frac{5}{6}$.

b $f(x) = 0$ geeft $3 \sin(\pi x) = 0$

$$\sin(\pi x) = 0$$

$$\pi x = k \cdot \pi$$

$$x = k \cdot 1$$

x in $[-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}]$ geeft $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$, dus $x_A = 1$ en $A(1, 0)$.

Verder is $T(\frac{1}{2}(0+1), 3) = T(\frac{1}{2}, 3)$.

$g(1) = 0$ geeft $a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 0$ oftewel $a + b = 0$.

$g(\frac{1}{2}) = 3$ geeft $a \cdot (\frac{1}{2})^3 + b \cdot \frac{1}{2} = 3$ oftewel $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$.

c $a + b = 0$ oftewel $a = -b$

Substitutie van $a = -b$ in $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$ geeft $-\frac{1}{8}b + \frac{1}{2}b = 3$

$$\frac{3}{8}b = 3$$

$$b = 8$$

$b = 8$ geeft $a = -8$

Bladzijde 198

68 a $f(x) = 0$ geeft $1 + 2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$

$$2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = -1$$

$$\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x + \frac{1}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + \pi$

$x_P = \frac{1}{6}\pi$ en $x_S = \frac{1}{2}\pi$ geeft $PS = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$

$x_Q = \frac{1}{2}\pi$ en $x_R = \frac{1}{6}\pi$ geeft $QR = \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{3}\pi$

Dus $a = \frac{1\frac{1}{3}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 2$.

b $g(x) = 1 + 2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) - 2 + 5 \cos(2(x - \frac{1}{4}\pi)) = -1 + 2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) + 5 \cos(2(x - \frac{1}{4}\pi))$

Voer in $y_1 = -1 + 2 \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) + 5 \cos(2(x - \frac{1}{4}\pi))$.

De optie maximum geeft $x = 0,6369...$ en $y = 2,4175...$, dus $s \approx 0,637$.

De optie minimum geeft $x = 2,2077...$ en $y = -4,4175...$

evenwichtsstand = $\frac{2,4175... + (-4,4175...)}{2} = -1$, dus $p = -1$.

amplitude = $2,4175... - (-1) = 3,4175...$, dus $q \approx 3,418$.

$\frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 2,2077... - 0,6369... = 1,5707...$, dus periode = $3,1415...$ en $r = \frac{2\pi}{3,1415...} = 2$.

69 a $f(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $-1 + \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$
 $\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$
 $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

Deze vier waarden van x zijn $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$.

b $f(x) = 0$ geeft $-1 + \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = 0$
 $\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = 1$
 $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$

Dus $x_A = \frac{1}{3}\pi$.

In $\triangle OAB$ is $\angle OAB = 75^\circ$ (overstaande hoeken), dus $\cos(75^\circ) = \frac{\frac{1}{3}\pi}{AB}$

$$AB = \frac{\frac{1}{3}\pi}{\cos(75^\circ)} \approx 4,05$$

- c** $g(x) = d + a \cdot \cos(bx)$
 De periode van de grafiek van g is drie keer zo klein als de periode van de grafiek van f , dus $b = 3 \cdot 2 = 6$.
 De amplitude van de grafiek van f is 1, dus de amplitude van de grafiek van g is $\frac{1}{4}$.
 $f(0) = -1\frac{1}{2}$, dus een laagste punt van de grafiek van g is $(0, -1\frac{1}{2})$ en dus $a = -\frac{1}{4}$.
 Uit evenwichtsstand = laagste stand + amplitude volgt voor de grafiek van g dat
 evenwichtsstand $= \frac{1}{4} + -1\frac{1}{2} = -1\frac{1}{4}$, dus $d = -1\frac{1}{4}$.

12.6 Meetkunde zonder coördinaten

Bladzijde 199

70 a $AM = r$
 $AN = \frac{1}{2}AB = 38$
 $MN = r - NP = r - 15$
 De stelling van Pythagoras in driehoek AMN geeft $AM^2 = AN^2 + MN^2$
 $r^2 = 38^2 + (r - 15)^2$
 $r^2 = 1444 + r^2 - 30r + 225$
 $30r = 1669$
 $r = 55,63\dots$

De gevraagde straal is 55,6.

b $\angle ADC = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$
 $\angle ACD = 180^\circ - 25^\circ - 145^\circ = 10^\circ$

De sinusregel in driehoek ACD geeft $\frac{6}{\sin(10^\circ)} = \frac{CD}{\sin(25^\circ)}$

$$CD = \frac{6 \sin(25^\circ)}{\sin(10^\circ)} = 14,60\dots$$

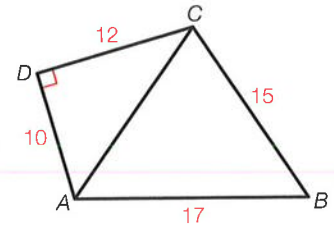
In driehoek BCD is $\sin(35^\circ) = \frac{BC}{14,60\dots}$, dus $BC = 14,60\dots \cdot \sin(35^\circ) \approx 8,38$.

c De cosinusregel geeft $BC^2 = 1^2 + 6^2 - 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos(25^\circ) = 26,12\dots$
 $BC \approx 5,111$

d De cosinusregel in driehoek OAB geeft
 $AB^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(75^\circ - 35^\circ) = 15,22\dots$
 $AB \approx 3,90$

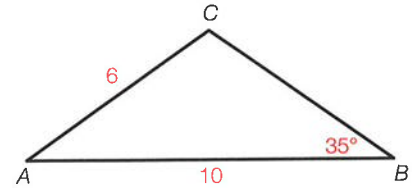
e De cosinusregel in driehoek OBC geeft $8^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(\angle BOC)$
 $64 = 36 + 16 - 48 \cdot \cos(\angle BOC)$
 $48 \cdot \cos(\angle BOC) = -12$
 $\cos(\angle BOC) = -\frac{1}{4}$
 $\angle BOC \approx 104,5^\circ$

- f** Teken diagonaal AC , zie de figuur hiernaast.
 De stelling van Pythagoras in driehoek ACD geeft
 $AC^2 = 10^2 + 12^2 = 244$.
 De cosinusregel in driehoek ABC geeft
 $244 = 15^2 + 17^2 - 2 \cdot 15 \cdot 17 \cdot \cos(\angle B)$
 $244 = 225 + 289 - 510 \cdot \cos(\angle B)$
 $510 \cdot \cos(\angle B) = 270$
 $\cos(\angle B) = 0,529...$
 $\angle B \approx 58,0^\circ$



- g** Zie de figuur hiernaast.

De sinusregel geeft $\frac{6}{\sin(35^\circ)} = \frac{10}{\sin(\angle C)}$
 $\sin(\angle C) = \frac{10 \sin(35^\circ)}{6} = 0,955...$

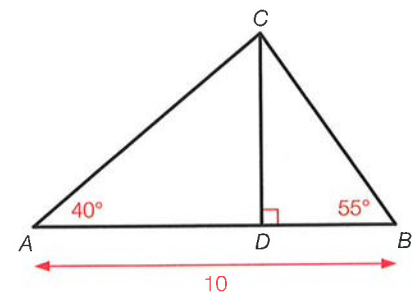


De GR geeft $72,93...^\circ$.
 Dus $\angle C = 180^\circ - 72,93...^\circ = 107,06...^\circ$.
 $\angle A = 180^\circ - 35^\circ - 107,06...^\circ \approx 37,9^\circ$

- h** Zie de figuur hiernaast.

$\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 55^\circ = 85^\circ$

De sinusregel in driehoek ABC geeft $\frac{10}{\sin(85^\circ)} = \frac{AC}{\sin(55^\circ)}$
 $AC = \frac{10 \sin(55^\circ)}{\sin(85^\circ)} = 8,222...$



In driehoek ACD is $\sin(40^\circ) = \frac{CD}{8,222...}$, dus

$CD = 8,222... \cdot \sin(40^\circ) = 5,285...$

De oppervlakte van driehoek ABC is $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5,285... \approx 26,43$.

i $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ geeft $\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD}$
 $\frac{10}{6} = \frac{8}{BD}$

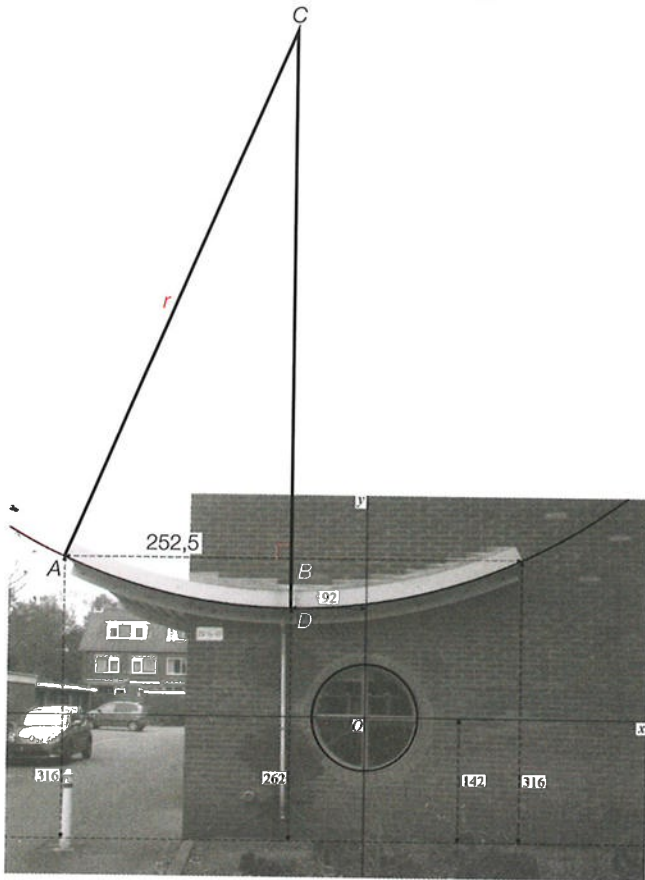
$BD = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$

De cosinusregel in driehoek BDE geeft $DE^2 = 4,8^2 + 6^2 - 2 \cdot 4,8 \cdot 6 \cdot \cos(40^\circ) = 14,91...$
 $DE \approx 3,86$

Bladzijde 201

- 71** Om 0:00 uur staan beide wijzers precies op 12.
 Ten opzichte van deze stand heeft de grote wijzer $\frac{25}{60} \cdot 360^\circ = 150^\circ$ gedraaid
 en de kleine wijzer $\frac{2}{12} \cdot 360^\circ + \frac{25}{60} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 72,5^\circ$.
 Dus de hoek tussen de wijzers is $150^\circ - 72,5^\circ = 77,5^\circ$.
 De cosinusregel geeft $AB^2 = 8,5^2 + 12,5^2 - 2 \cdot 8,5 \cdot 12,5 \cdot \cos(77,5^\circ) = 182,50...$
 $AB = 13,50...$
 Dus de gevraagde afstand tussen A en B is 135 mm.

- 72 a Zie de figuur hieronder, waarin $AC = r$ is gesteld.



$$AB = 505 : 2 = 252,5$$

$$CD = r \text{ en } BD = 316 - 262 = 54 \text{ geeft } BC = r - 54$$

De stelling van Pythagoras in driehoek ABC geeft $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$r^2 = 252,5^2 + (r - 54)^2$$

$$r^2 = 63\,756,25 + r^2 - 108r + 2916$$

$$108r = 66\,672,25$$

$$r = 617,3...$$

Dus de straal van de cirkel is ongeveer 617 cm.

- b Van het middelpunt M van de cirkel is $y_M = 262 - 142 + 617,3... = 737,3...$

$$d(O, M) = \sqrt{92^2 + 737,3...^2} = 743,0...$$

De straal van de cirkel is 617,3... cm en de straal van het raam is 60 cm.

Dus de afstand tussen het raam en het afdakje is $743,0... - 617,3... - 60 \approx 66$ cm.

Bladzijde 202

73 $\angle ABT = 180^\circ - 7,4^\circ = 172,6^\circ$

$$\angle ATB = 180^\circ - 5,3^\circ - 172,6^\circ = 2,1^\circ$$

De sinusregel in driehoek ABT geeft $\frac{10}{\sin(2,1^\circ)} = \frac{BT}{\sin(5,3^\circ)}$

$$BT = \frac{10 \sin(5,3^\circ)}{\sin(2,1^\circ)} = 25,20...$$

In de rechthoekige driehoek met schuine zijde BT is $\sin(7,4^\circ) = \frac{h}{25,20...}$

$$h = 25,20... \cdot \sin(7,4^\circ) = 3,2466...$$

De gevraagde hoogte is 3250 meter.

74 a De sinusregel in driehoek ABC geeft $\frac{6}{\sin(\angle ACB)} = \frac{5}{\sin(55^\circ)}$

$$\sin(\angle ACB) = \frac{6 \sin(55^\circ)}{5}$$

De GR geeft $79,4146...^\circ$, dus $\angle ACB = 180^\circ - 79,4146...^\circ = 100,5853...^\circ$.

$$\angle BAC = 180^\circ - 55^\circ - 100,5853...^\circ = 24,4146...^\circ \approx 24,415^\circ$$

b Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In driehoek } ACE \text{ is } \sin(24,4146\dots^\circ) = \frac{h}{5}$$

$$h = 5 \sin(24,4146\dots^\circ) = 2,066\dots$$

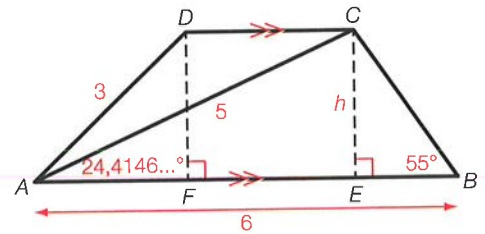
$$\text{In driehoek } ADF \text{ is } AF = \sqrt{3^2 - 2,066\dots^2} = 2,174\dots$$

$$\text{In driehoek } BCE \text{ is } \tan(55^\circ) = \frac{2,066\dots}{BE}$$

$$BE = \frac{2,066\dots}{\tan(55^\circ)} = 1,447\dots$$

$$CD = EF = AB - AF - BE = 6 - 2,174\dots - 1,447\dots = 2,378\dots$$

$$\text{De oppervlakte van het trapezium is } 2,066\dots \cdot \frac{6 + 2,378\dots}{2} \approx 8,7.$$



Bladzijde 203

75 De cosinusregel geeft

$$(\text{werkelijk geworpen afstand})^2 = 8^2 + (84,58 + 8)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (84,58 + 8) \cdot \cos(28,65^\circ)$$

$$(\text{werkelijk geworpen afstand})^2 = 7335,137\dots$$

$$\text{werkelijk geworpen afstand} = 85,645\dots$$

$$\text{Het gevraagde verschil is } 85,645\dots - 84,58 \approx 1,07 \text{ meter, oftewel } 107 \text{ cm.}$$

76 De cosinusregel in driehoek ABC geeft $8^2 = 11^2 + 5^2 - 2 \cdot 11 \cdot 5 \cdot \cos(\angle BAC)$

$$64 = 121 + 25 - 110 \cos(\angle BAC)$$

$$110 \cos(\angle BAC) = 82$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{82}{110}$$

$$\text{In driehoek } ACD \text{ is } \cos(\angle BAC) = \frac{AD}{5}, \text{ dus } AD = 5 \cdot \frac{82}{110} = \frac{41}{11}.$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ geeft } \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{\frac{41}{11}}{11} = \frac{DE}{8}$$

$$DE = \frac{8 \cdot \frac{41}{11}}{11} \approx 2,71$$

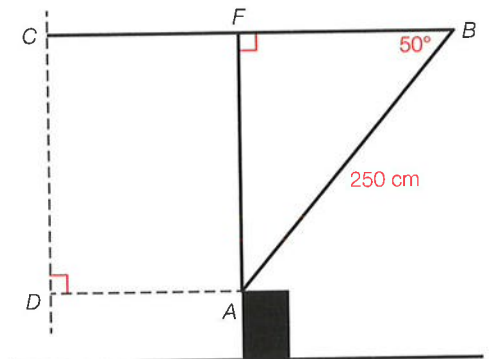
Bladzijde 204

77 a Zie de figuur hiernaast.

$$\text{In driehoek } ABF \text{ is } \cos(50^\circ) = \frac{BF}{250}$$

$$BF = 250 \cos(50^\circ) \approx 161$$

$$AD = CF = BC - BF \approx 300 - 161 = 139 \text{ cm}$$



b Zie de figuur hiernaast.

De stelling van Pythagoras in driehoek ACD geeft

$$AC^2 = 139^2 + 292^2 = 104585.$$

De cosinusregel in driehoek ABC geeft

$$104585 = 250^2 + 300^2 - 2 \cdot 250 \cdot 300 \cdot \cos(\angle ABC)$$

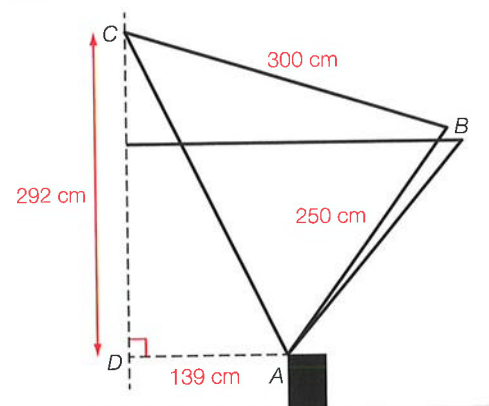
$$104585 = 62500 + 90000 - 150000 \cos(\angle ABC)$$

$$150000 \cos(\angle ABC) = 47915$$

$$\cos(\angle ABC) = 0,319\dots$$

$$\angle ABC \approx 71^\circ$$

$$\text{De gevraagde toename is } 71^\circ - 50^\circ = 21^\circ.$$



Bladzijde 205

78 $\angle ATB = 180^\circ - 45,4^\circ - 44,2^\circ = 90,4^\circ$

De sinusregel in driehoek ABT geeft $\frac{AT}{\sin(44,2^\circ)} = \frac{10,97}{\sin(90,4^\circ)}$

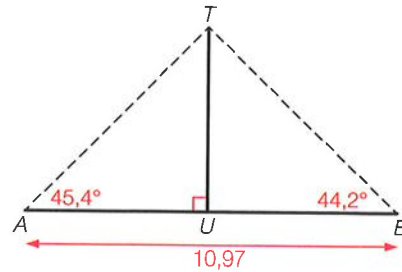
$$AT = \frac{10,97 \sin(44,2^\circ)}{\sin(90,4^\circ)} = 7,648...$$

In driehoek ATU is $\sin(45,4^\circ) = \frac{TU}{7,648...}$

$$TU = 7,648... \cdot \sin(45,4^\circ) = 5,445... \text{ meter}$$

$$d(P, AB) = 11,89 - 6,40 = 5,49 \text{ meter.}$$

$d(T, AB) = TU < d(P, AB)$, dus de bal is niet in rechthoek $PQDR$ op de grond gekomen.

**12.7 Meetkunde met coördinaten****Bladzijde 206**

79 a $rc_l = \frac{0-5}{3-0} = -\frac{5}{3}$

$k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, dus $rc_k = \frac{3}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{3}{5}x + b \\ \text{door } A(-2, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{5} \cdot -2 + b = 0 \\ -1\frac{1}{5} + b = 0 \end{array}$$

$$b = 1\frac{1}{5}$$

Dus $k: y = \frac{3}{5}x + 1\frac{1}{5}$ en het snijpunt van k met de y -as is $(0, 1\frac{1}{5})$.

b $\left. \begin{array}{l} (x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = r^2 \\ \text{door } A(1, 6) \end{array} \right\} r^2 = (1 - 2\frac{1}{2})^2 + (6 - 3\frac{1}{2})^2 = 8\frac{1}{2}$

Dus $(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y - 3\frac{1}{2})^2 = 8\frac{1}{2}$.

c $d(M, N) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5$

$$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 5 - 1 - 2 = 2$$

d Substitutie van $y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$ in $x^2 + y^2 = 13$ geeft $x^2 + (-\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3})^2 = 13$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 - 5\frac{7}{9}x + 18\frac{7}{9} = 13$$

$$1\frac{4}{9}x^2 - 5\frac{7}{9}x + 5\frac{7}{9} = 0$$

$$13x^2 - 52x + 52 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

Dus lijn k raakt cirkel c .

e $rc_l = \frac{0-5}{3\frac{1}{3}-0} = 1\frac{1}{2}$

$$rc_k \cdot rc_l = -\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = -1$$

Dus l snijdt k loodrecht.

f Lijn l gaat door de oorsprong en snijdt k loodrecht in het punt A .

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1, \text{ dus } rc_l = 2\frac{1}{2}.$$

$$l: y = 2\frac{1}{2}x \text{ snijden met } k \text{ geeft } 2\frac{1}{2}x = -\frac{2}{5}x + 4$$

$$2\frac{9}{10}x = 4$$

$$29x = 40$$

$$x = 1\frac{11}{29}$$

$$x = 1\frac{11}{29} \text{ geeft } y = 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{11}{29} = 3\frac{13}{29}, \text{ dus } A(1\frac{11}{29}, 3\frac{13}{29}).$$

$$d(k, O) = d(A, O) = \sqrt{(1\frac{11}{29})^2 + (3\frac{13}{29})^2} = \sqrt{(\frac{40}{29})^2 + (\frac{100}{29})^2} = \sqrt{\frac{40^2}{29^2} + \frac{100^2}{29^2}} = \sqrt{\frac{100}{29^2} (16 + 100)} = \frac{10}{29} \sqrt{116}$$

- g** Van de lijn l door het middelpunt $M(3, 1)$ van c en A is $rc_l = \frac{4-1}{5-3} = 1\frac{1}{2}$.

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_k = -\frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} k: y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(5, 4) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & -\frac{2}{3} \cdot 5 + b = 4 \\ & -3\frac{1}{3} + b = 4 \\ & b = 7\frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3}.$$

$$-\frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3} = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -7\frac{1}{3}$$

$$x = 11$$

$$\text{Dus } B(11, 0).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \quad x^2 + y^2 - 20x - 12y + 120 &= 0 \\ x^2 - 20x + y^2 - 12y + 120 &= 0 \\ (x-10)^2 - 100 + (y-6)^2 - 36 + 120 &= 0 \\ (x-10)^2 + (y-6)^2 &= 16 \end{aligned}$$

De cirkel heeft middelpunt $(10, 6)$ en straal 4.

Dus de afstand van c tot de x -as is $6 - 4 = 2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \quad x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 &= 0 \\ x^2 - 6x + y^2 - 12y + 20 &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 + 20 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y-6)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Dus $M(3, 6)$ en de straal is 5.

$$\cos(\frac{1}{2}\angle AMB) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2}\angle AMB = 53,13\dots^\circ$$

$$\angle AMB \approx 106,3^\circ$$

- j** De lijn l door M en A staat loodrecht op k .

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1, \text{ dus } rc_l = -2.$$

$$\begin{aligned} l: y = -2x + b \\ \text{door } A(6, 3) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & -2 \cdot 6 + b = 3 \\ & -12 + b = 3 \end{aligned} \right\}$$

$$b = 15$$

$$\begin{aligned} l: y = -2x + 15 \\ y_M = 7 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & -2x_M + 15 = 7 \\ & -2x_M = -8 \end{aligned} \right\}$$

$$x_M = 4$$

$$M(4, 7) \text{ en } r = d(A, M) = \sqrt{(4-6)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{Dus } c: (x-4)^2 + (y-7)^2 = 20.$$

$$x = 0 \text{ geeft } (0-4)^2 + (y-7)^2 = 20$$

$$16 + (y-7)^2 = 20$$

$$(y-7)^2 = 4$$

$$y-7 = 2 \vee y-7 = -2$$

$$y = 9 \vee y = 5$$

Dus $B(0, 5)$ en $C(0, 9)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \quad k: y = 2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(3, 3) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & 2\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 3 \\ & 7\frac{1}{2} + b = 3 \end{aligned} \right\}$$

$$b = -4\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } k: y = 2\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}.$$

Substitutie van $y = 2\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$ in $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 29$ geeft

$$(x-10)^2 + (2\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2} - 6)^2 = 29$$

$$(x-10)^2 + (2\frac{1}{2}x - 10\frac{1}{2})^2 = 29$$

$$x^2 - 20x + 100 + 6\frac{1}{4}x^2 - 52\frac{1}{2}x + 110\frac{1}{4} = 29$$

$$7\frac{1}{4}x^2 - 72\frac{1}{2}x + 181\frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$$

Dus k raakt de cirkel.

Bladzijde 208

$$80 \quad f(x) = \frac{1}{2x+3} = (2x+3)^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -(2x+3)^{-2} \cdot 2 = \frac{-2}{(2x+3)^2}$$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = f'(0) = \frac{-2}{(0+3)^2} = -\frac{2}{9}.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{2}{9}x + b \\ f(0) = \frac{1}{3}, \text{ dus } A(0, \frac{1}{3}) \end{array} \right\} l: y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$$

De lijn k gaat door de oorsprong en snijdt l loodrecht in het punt B .

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_k = 4\frac{1}{2}.$$

$$k: y = 4\frac{1}{2}x \text{ snijden met } l \text{ geeft } 4\frac{1}{2}x = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$$

$$4\frac{13}{18}x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{6}{85}$$

$$x = \frac{6}{85} \text{ geeft } y = 4\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{85} = \frac{27}{85}, \text{ dus } B(\frac{6}{85}, \frac{27}{85}).$$

$$d(l, O) = d(B, O) = \sqrt{(\frac{6}{85})^2 + (\frac{27}{85})^2} = \sqrt{\frac{9}{85}}$$

Bladzijde 209

$$81 \quad a \quad c: \left. \begin{array}{l} (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = r^2 \\ \text{door } A(0, 4) \end{array} \right\} r^2 = (0 - \frac{1}{2})^2 + (4 - \frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } c: (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}.$$

$$b \quad x = \frac{1}{3} \text{ geeft } y = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{5} = \frac{4}{3}, \text{ dus } S \text{ ligt op } k.$$

$$P(\frac{1}{2}(0 + -3), \frac{1}{2}(4 + 0)) = P(-1\frac{1}{2}, 2)$$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{4 - -1\frac{1}{2}} = -\frac{4}{11}.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{4}{11}x + b \\ \text{door } C(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{4}{11} \cdot 4 + b = 0 \\ -\frac{16}{11} + b = 0 \\ b = \frac{16}{11} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{4}{11}x + \frac{16}{11}.$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ geeft } y = -\frac{4}{11} \cdot \frac{1}{3} + \frac{16}{11} = \frac{4}{3}, \text{ dus } S \text{ ligt op } l.$$

$$\text{Dus } S(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) \text{ is het snijpunt van } k \text{ en } l.$$

$$c \quad \text{De lijn } m \text{ gaat door } M \text{ en } S.$$

$$\text{Stel } m: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = -5.$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -5x + b \\ \text{door } M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5 \cdot \frac{1}{2} + b = \frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} + b = \frac{1}{2} \\ b = 3 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -5x + 3.$$

$$rc_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{0 - -3} = 1\frac{1}{3}$$

$$n \perp AB, \text{ dus } rc_n \cdot rc_{AB} = -1, \text{ dus } rc_n = -\frac{3}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} n: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } C(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 4 + b = 0 \\ -3 + b = 0 \\ b = 3 \end{array}$$

$$\text{Dus } n: y = -\frac{3}{4}x + 3 \text{ en } T(0, 3).$$

$$T(0, 3) \text{ ligt op de lijn } m: y = -5x + 3.$$

$$\text{Dus } M, S \text{ en } T \text{ liggen op één lijn.}$$

- 82 a**
- Lijn
- k
- gaat door
- P
- en staat loodrecht op
- l
- .

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_k = -1\frac{1}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } P(6, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 6 + b = 1 \\ -8 + b = 1 \end{array}$$

$$b = 9$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{1}{3}x + 9.$$

k en l snijden geeft het punt Q .

$$-1\frac{1}{3}x + 9 = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

$$-2\frac{1}{12}x = -6\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \end{array} \right\} y = \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{11}{4} = 5$$

Dus $Q(3, 5)$.

$$d(P, l) = d(P, Q) = \sqrt{(3-6)^2 + (5-1)^2} = 5$$

- b**
- $x^2 + y^2 - 28x - 32y = -308$

$$x^2 - 28x + y^2 - 32y + 308 = 0$$

$$(x-14)^2 - 196 + (y-16)^2 - 256 + 308 = 0$$

$$(x-14)^2 + (y-16)^2 = 144$$

Dus $M(14, 16)$.

$$d(M, x\text{-as}) = y_M = 16$$

$$d(M, P) = \sqrt{(6-14)^2 + (1-16)^2} = 17$$

Het gevraagde verschil is 1.

Bladzijde 210

- 83 a**
- Substitutie van
- $y = -\frac{4}{3}x + 5$
- in
- $x^2 + y^2 = 9$
- geeft
- $x^2 + (-\frac{4}{3}x + 5)^2 = 9$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 25 = 9$$

$$2\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 16 = 0$$

$$25x^2 - 120x + 144 = 0$$

$$D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$$

Dus l raakt aan c .

- b**
- $x = 0$
- geeft bij
- c
- dat
- $y^2 = 9$

$$y = 3 \vee y = -3$$

Dus $A(0, -3)$.

$$y = 0 \text{ geeft bij } l \text{ dat } -\frac{4}{3}x + 5 = 0$$

$$-\frac{4}{3}x = -5$$

$$x = 3\frac{3}{4}$$

Dus $B(3\frac{3}{4}, 0)$.

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - -3}{3\frac{3}{4} - 0} = \frac{4}{5}$$

$$rc_k \cdot rc_l = \frac{4}{5} \cdot -\frac{4}{3} = -\frac{16}{15} \neq -1$$

Dus k en l snijden elkaar niet loodrecht.

- 84 a**
- Van de lijn
- m
- door
- M
- en
- D
- is
- $rc_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-5}{4-0} = \frac{3}{4}$
- .

$$l \perp m, \text{ dus } rc_l \cdot rc_m = -1, \text{ dus } rc_l = -1\frac{1}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } D(4, 8) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 8 \\ -5\frac{1}{3} + b = 8 \end{array}$$

$$b = 13\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } l: y = -1\frac{1}{3}x + 13\frac{1}{3}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -1\frac{1}{3}x + 13\frac{1}{3} = 0$$

$$-1\frac{1}{3}x = -13\frac{1}{3}$$

$$x = 10$$

Dus $B(10, 0)$.

b $d(B, D) = \sqrt{(10-4)^2 + (0-8)^2} = 10$

$d(A, C) = d(B, D) = 10$

Zie de figuur hiernaast.

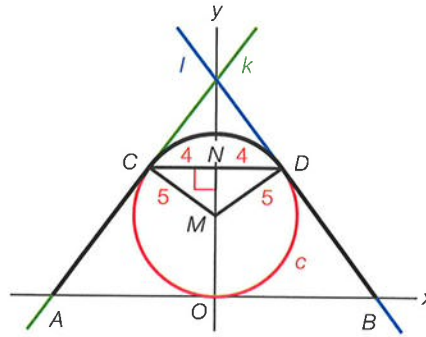
In driehoek CMN is $\sin(\angle CMN) = \frac{4}{5}$

$\angle CMN = 53,13\dots^\circ$

$\angle CMD = 2 \cdot 53,13\dots^\circ = 106,26\dots^\circ$

boog $CD = \frac{106,26\dots}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 9,3$

De gevraagde lengte van het touwtje is $10 + 10 + 9,3 = 29,3$.



Bladzijde 211

85

a $R(-4, 5)$ en $T(p, 0)$ geeft

$$d(R, T) = \sqrt{(p - (-4))^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{(p + 4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{p^2 + 8p + 16 + 25} = \sqrt{p^2 + 8p + 41}$$

b $r_c = 7$ geeft $r_e = d(R, T) - r_c = \sqrt{p^2 + 8p + 41} - 7$

$r_d = 4$ geeft $r_e = d(S, T) - r_d = \sqrt{p^2 - 28p + 260} - 4$

Dus er geldt $\sqrt{p^2 + 8p + 41} - 7 = \sqrt{p^2 - 28p + 260} - 4$.

Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 + 8x + 41} - 7$ en $y_2 = \sqrt{x^2 - 28x + 260} - 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 8$ en $y = 6$.

Dus de straal van e is 6.

86

a $\left. \begin{array}{l} l: y = -x + b \\ \text{door } A(4, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 + b = 4 \\ b = 8 \end{array}$

Dus $l: y = -x + 8$.

Substitutie van $y = -x + 8$ in $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$ geeft $x^2 + (-x + 8)^2 - 10x + 16(-x + 8) = 56$

$$x^2 + x^2 - 16x + 64 - 10x - 16x + 128 = 56$$

$$2x^2 - 42x + 136 = 0$$

$$x^2 - 21x + 68 = 0$$

$$(x - 4)(x - 17) = 0$$

$$x = 4 \vee x = 17$$

$x = 17$ geeft $y = -17 + 8 = -9$, dus $B(17, -9)$.

b $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$

$$x^2 - 10x + y^2 + 16y = 56$$

$$(x - 5)^2 - 25 + (y + 8)^2 - 64 = 56$$

$$(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 145$$

Dus $M(5, -8)$ en $r = \sqrt{145}$.

$$\cos\left(\frac{1}{2}\angle CMD\right) = \frac{8}{\sqrt{145}}$$

$$\frac{1}{2}\angle CMD = 48,36\dots^\circ$$

$$\angle CMD \approx 96,7^\circ$$

Bladzijde 212

87

a $f(x) = -3 + 3\sqrt{x} = -3 + 3x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x_A) = f'(4) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

$x = 4$ geeft $y = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$, dus A ligt op l .

Dus l raakt de grafiek in A .

- b** De lijn k door A en M staat loodrecht op l .

$$k \perp l, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_k = -1\frac{1}{3}.$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 3 \\ -5\frac{1}{3} + b = 3 \\ b = 8\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -1\frac{1}{3}x + 8\frac{1}{3}.$$

$$M \text{ op } k \text{ en } x_M = 5 \text{ geeft } y_M = -1\frac{1}{3} \cdot 5 + 8\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}, \text{ dus } M(5, 1\frac{2}{3}).$$

$$\text{Van } c \text{ is de straal } r = d(A, M) = \sqrt{(5-4)^2 + (1\frac{2}{3}-3)^2} = \sqrt{2\frac{7}{9}} = 1\frac{2}{3}.$$

Omdat ook $y_M = 1\frac{2}{3}$ raakt de cirkel de x -as.

- 88** De lijn m door M en A staat loodrecht op l .

$$m \perp l, \text{ dus } rc_m \cdot rc_l = -1, \text{ dus } rc_m = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } M(-1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -1 + b = 3 \\ 2 + b = 3 \\ b = 1 \end{array}$$

$$\text{Dus } m: y = -2x + 1.$$

m snijden met l geeft het punt A .

$$-2x + 1 = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$$

$$-2\frac{1}{2}x = -2\frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = -2 \cdot 1 + 1 = -1, \text{ dus } A(1, -1).$$

$$d(A, M) = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$d(B, M) = d(A, M) = \sqrt{20}$$

$$\text{De lengte van de kortste cirkelboog } AB \text{ is } \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{20} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{20}.$$

$$\text{De gevraagde omtrek is } \sqrt{20} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\pi\sqrt{20} \approx 15,97.$$

- 89 a** $f(x) = 1 + 4\sqrt{x} = 1 + 4x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = f'(4) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = x + b \\ \text{door } A(4, 9) \end{array} \right\} l: y = x + 5$$

$$\begin{aligned} \text{Substitutie van } y = x + 5 \text{ in } (x+2)^2 + (y+1)^2 = 8 \text{ geeft } (x+2)^2 + (x+6)^2 &= 8 \\ x^2 + 4x + 4 + x^2 + 12x + 36 &= 8 \\ 2x^2 + 16x + 32 &= 0 \\ x^2 + 8x + 16 &= 0 \\ D &= 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0 \end{aligned}$$

Dus l en c raken elkaar.

- b** $x = 0$ geeft $(0+2)^2 + (y+1)^2 = 8$
 $4 + (y+1)^2 = 8$
 $(y+1)^2 = 4$
 $y+1 = 2 \vee y+1 = -2$
 $y = 1 \vee y = -3$

Dus $S(0, -3)$.

$S(0, -3)$ als randpunt van de grafiek van $g(x) = p\sqrt{x} + q$ geeft $q = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = p\sqrt{x} - 3 \\ g(4) = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p\sqrt{4} - 3 = 9 \\ 2p = 12 \\ p = 6 \end{array}$$