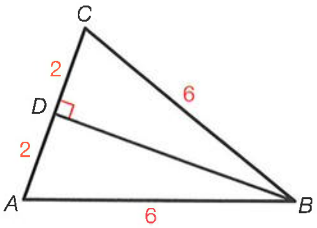
10 Meetkundige berekeningen

Voorkennis Oppervlakte en omtrek

Bladzijde 54

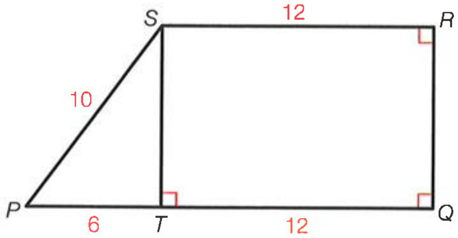
1 **a**



$BD = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{32} \approx 11{,}31$

b



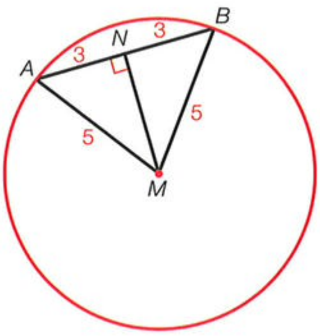
$ST = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$O(PQRS) = \frac{1}{2}(18 + 12) \cdot 8 = 120$

2 **a** langste boog $AB = \frac{360 - 73{,}73...}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 24{,}98$

b oppervlakte $= \frac{73{,}73...}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 16{,}09$

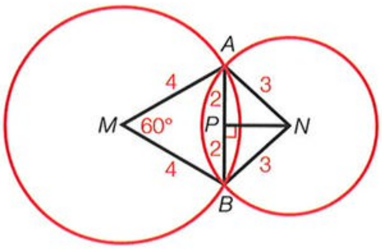
c



$MN = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ en $O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.
De gevraagde oppervlakte is $16{,}09 - 12 = 4{,}09$.

3 **a** kortste boog $AB = \frac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot 4 \approx 4{,}19$

b $AM = BM$, dus $\angle MAB = \angle MBA = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$.
Dus driehoek ABM is gelijkzijdig met zijde 4, dus $AB = 4$.
Zie de figuur hiernaast.



$\sin(\angle ANP) = \frac{AP}{AN} = \frac{2}{3}$ geeft $\angle ANP = 41{,}81...°$

$\angle ANB = 2 \cdot 41{,}81...° = 83{,}62...°$

kortste boog $AB = \frac{83{,}62...}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 \approx 4{,}38$

c $MP = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ en $O(\triangle ABM) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$.
$NP = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ en $O(\triangle ABN) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
$O(AMBN) = O(\triangle ABM) + O(\triangle ABN) = 2\sqrt{12} + 2\sqrt{5} \approx 11{,}40$

10.1 Afstanden en hoeken

Bladzijde 55

1 I $\sin(27°) = \dfrac{\frac{1}{2}AB}{8}$ geeft $\frac{1}{2}AB = 8\sin(27°)$, dus $AB = 16\sin(27°) \approx 7{,}26$.

II $\angle A = \angle B = \dfrac{180° - 54°}{2} = 63°$

De sinusregel geeft $\dfrac{AB}{\sin(\angle C)} = \dfrac{BC}{\sin(\angle A)}$

$$\frac{AB}{\sin(54°)} = \frac{8}{\sin(63°)}$$
$$AB = \frac{8\sin(54°)}{\sin(63°)} \approx 7{,}26$$

III De cosinusregel geeft $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle C)$

$$AB^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos(54°)$$
$$AB^2 = 52{,}76...$$
$$AB = \sqrt{52{,}76...} \approx 7{,}26$$

Bladzijde 57

2 **a** $\angle C \approx 180° - 40° - 115{,}9° = 24{,}1°$

b De cosinusregel geeft $BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(40°) = 15{,}03...$

$$BC \approx 3{,}88$$

c De cosinusregel geeft $4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(\angle A)$

$$16 = 36 + 25 - 60 \cdot \cos(\angle A)$$
$$60\cos(\angle A) = 45$$
$$\cos(\angle A) = 0{,}75$$
$$\angle A \approx 41{,}4°$$

3 **a** De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\dfrac{10}{\sin(\angle ADB)} = \dfrac{8{,}57...}{\sin(58°)}$

$$\sin(\angle ADB) = \frac{10\sin(58°)}{8{,}57...}$$

De GR geeft $81{,}29...°$.
Dus $\angle ADB = 81{,}29...°$ of $\angle ADB = 180° - 81{,}29...° = 98{,}70...°$.
Het probleem is dat je niet weet welke de juiste is.

b In $\triangle ACD$ is $\angle D$ stomp.
Het is niet mogelijk om in een driehoek twee stompe hoeken te hebben, dus vervalt in dit geval de tweede mogelijkheid bij het berekenen van een hoek met de sinusregel.

Bladzijde 58

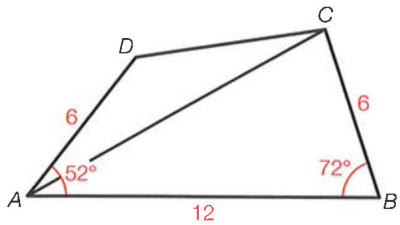
4 **a** De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $10^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle ADB)$

$$100 = 36 + 81 - 108 \cdot \cos(\angle ADB)$$
$$108\cos(\angle ADB) = 17$$
$$\cos(\angle ADB) = 0{,}15...$$
$$\angle ADB \approx 80{,}94°$$

b $\angle BDC = 150° - 80{,}94...° = 69{,}05...°$
De cosinusregel in $\triangle BDC$ geeft $BC^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos(69{,}05...°) = 71{,}26...$

$$BC \approx 8{,}4$$

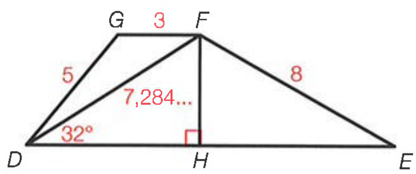
5 De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
$AC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos(72°) = 135{,}5...$
$AC = 11{,}64...$
De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
$6^2 = 12^2 + 135{,}5... - 2 \cdot 12 \cdot 11{,}64... \cdot \cos(\angle BAC)$
$36 = 279{,}5... - 279{,}3... \cdot \cos(\angle BAC)$
$279{,}3... \cdot \cos(\angle BAC) = 243{,}5...$
$\cos(\angle BAC) = 0{,}87...$
$\angle BAC = 29{,}35...°$
$\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 52° - 29{,}35...° = 22{,}64...°$
De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $CD^2 = 135{,}5... + 6^2 - 2 \cdot 11{,}64... \cdot 6 \cdot \cos(22{,}64...°) = 42{,}58...$
$CD \approx 6{,}5$
De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $135{,}5... = 36 + 42{,}58... - 2 \cdot 6 \cdot 6{,}52... \cdot \cos(\angle ADC)$
$135{,}5... = 78{,}58... - 78{,}30... \cdot \cos(\angle ADC)$
$78{,}30... \cdot \cos(\angle ADC) = -56{,}91...$
$\cos(\angle ADC) = -0{,}72...$
$\angle ADC \approx 136{,}6°$



6 **a** $\angle GFD = \angle EDF = 32°$ (Z-hoeken)
De sinusregel in $\triangle DFG$ geeft $\dfrac{5}{\sin(32°)} = \dfrac{3}{\sin(\angle FDG)}$
$\sin(\angle FDG) = \dfrac{3\sin(32°)}{5}$
De GR geeft $18{,}53...°$.
Dus $\angle FDG = 18{,}53...°$.
$\angle FGD = 180° - \angle DFG - \angle FDG = 180° - 32° - 18{,}53...° = 129{,}46...°$
De sinusregel in $\triangle DFG$ geeft $\dfrac{DF}{\sin(129{,}46...°)} = \dfrac{5}{\sin(32°)}$
$DF = \dfrac{5\sin(129{,}46...°)}{\sin(32°)} \approx 7{,}28$

Alternatieve uitwerking
$\angle GFD = \angle EDF = 32°$ (Z-hoeken)
Stel $DF = x$.
De cosinusregel in $\triangle DFG$ geeft $5^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos(32°)$
$25 = 9 + x^2 - 6x\cos(32°)$
Voer in $y_1 = 25$ en $y_2 = 9 + x^2 - 6x\cos(32°)$.
De optie snijpunt geeft $x = 7{,}284...$
Dus $DF \approx 7{,}28$.

b In $\triangle DFH$ is $\cos(32°) = \dfrac{DH}{7{,}284...}$, dus
$DH = 7{,}284... \cdot \cos(32°) = 6{,}17...$
In $\triangle DFH$ is $\sin(32°) = \dfrac{FH}{7{,}284...}$, dus
$FH = 7{,}284... \cdot \sin(32°) = 3{,}86...$
In $\triangle EFH$ is $EH = \sqrt{8^2 - 3{,}86...^2} = 7{,}00...$
$O(DEFG) = \frac{1}{2}(DE + FG) \cdot FH = \frac{1}{2}(DH + EH + FG) \cdot FH = \frac{1}{2}(6{,}17... + 7{,}00... + 3) \cdot 3{,}86... \approx 31{,}24$



7 De stelling van Pythagoras in $\triangle PEQ$ geeft $PQ = \sqrt{15^2 + 19^2} = 24{,}20...$
De cosinusregel in $\triangle KQZ$ geeft $QZ^2 = 19^2 + 42^2 - 2 \cdot 19 \cdot 42 \cdot \cos(155°) = 3571{,}46...$
$QZ = 59{,}76...$
De zadelhoogte is $PQ + QZ = 24{,}20... + 59{,}76... \approx 84$ cm.

Bladzijde 59

8 **a** omtrek $ABCD = 2 \cdot 16{,}5 + 2 \cdot (11 + 5{,}5 + 7{,}32 + 5{,}5 + 11) = 113{,}64$

$EH + GH + FG = 4 \cdot 5{,}5 + 7{,}32 = 29{,}32$

$\cos(\frac{1}{2}\angle MSN) = \frac{16{,}5 - 11}{9{,}15} = \frac{5{,}5}{9{,}15}$ geeft $\frac{1}{2}\angle MSN = 53{,}05...°$, dus $\angle MSN = 2 \cdot 53{,}05...° = 106{,}10...°$.

boog $MN = \frac{106{,}10...}{360} \cdot 2\pi \cdot 9{,}15 = 16{,}944...$

Hij gaat $113{,}64 + 29{,}32 + 16{,}944... \approx 159{,}90$ meter kalken.

b De loodrechte projectie van P op AB is punt U.

$\tan(\angle KPU) = \frac{3}{9}$ geeft $\angle KPU = 18{,}4...°$

$\tan(\angle LPU) = \frac{10{,}32}{9}$ geeft $\angle LPU = 48{,}9...°$

De schothoek is $48{,}9...° - 18{,}4...° \approx 30°$.

c In dat geval bevindt een speler zich midden voor het doel en is $KU = LU = 3{,}66$.

$\tan(\angle KPU) = \frac{3{,}66}{9}$ geeft $\angle KPU = 22{,}1...°$

De grootst mogelijke schothoek is dan $2 \cdot 22{,}1...° \approx 44°$.

d De cosinusregel geeft $7{,}32^2 = 14{,}5^2 + 17^2 - 2 \cdot 14{,}5 \cdot 17 \cdot \cos(\angle P)$

$53{,}5824 = 210{,}25 + 289 - 493 \cdot \cos(\angle P)$

$493 \cdot \cos(\angle P) = 445{,}6676$

$\cos(\angle P) = 0{,}903...$

$\angle P = 25{,}3...°$

Dus de schothoek is dan 25°.

Bladzijde 60

9 **a** Ze heeft 100 meter met een koers van 350° gevaren.

Noem het punt vanaf waar ze haar koers bijstelt P.

$\angle BAP = 350° - 330° = 20°$

De cosinusregel in $\triangle ABP$ geeft $BP^2 = 300^2 + 100^2 - 2 \cdot 300 \cdot 100 \cdot \cos(20°) = 43618{,}44...$

$BP = 208{,}85...$

Maaike heeft dus $100 + 208{,}85... - 300 \approx 9$ meter extra afgelegd.

b $\angle BCT = 180° - \angle TCU = 180° - 4{,}6° = 175{,}4°$

$\angle BTC = 180° - \angle CBT - \angle BCT = 180° - 2{,}7° - 175{,}4° = 1{,}9°$

De sinusregel in $\triangle BCT$ geeft $\frac{CT}{\sin(2{,}7°)} = \frac{500}{\sin(1{,}9°)}$

$CT = \frac{500\sin(2{,}7°)}{\sin(1{,}9°)} = 710{,}39...$

In $\triangle CUT$ is $\sin(4{,}6°) = \frac{TU}{710{,}39...}$, dus $TU = 710{,}39... \cdot \sin(4{,}6°) = 56{,}97...$

Dus de gevraagde hoogte van T ten opzichte van het water is 59 meter.

Alternatieve uitwerking

Stel $CU = x$.

In driehoek CUT is $\tan(4{,}6°) = \frac{TU}{x}$, dus $TU = x\tan(4{,}6°)$.

In driehoek BUT is $\tan(2{,}7°) = \frac{TU}{x + 500}$, dus $TU = (x + 500)\tan(2{,}7°)$.

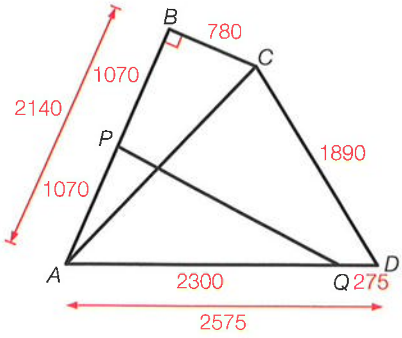
Hieruit volgt $x\tan(4{,}6°) = (x + 500)\tan(2{,}7°)$.

Voer in $y_1 = x\tan(4{,}6°)$ en $y_2 = (x + 500)\tan(2{,}7°)$.

De optie snijpunt geeft $x = 708{,}10...$ en $y = 56{,}97...$

Dus $TU = 56{,}97...$ en de gevraagde hoogte van T ten opzichte van het water is 59 meter.

10 Teken AC.



De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft
$AC = \sqrt{2140^2 + 780^2} = 2277{,}7...$
$\tan(\angle BAC) = \frac{780}{2140}$ geeft $\angle BAC = 20{,}02...°$

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft
$1890^2 = 2277{,}7...^2 + 2575^2 - 2 \cdot 2277{,}7... \cdot 2575 \cdot \cos(\angle CAD)$
$11\,730\,248{,}5... \cdot \cos(\angle CAD) = 8\,246\,525$
$\cos(\angle CAD) = 0{,}703...$
$\angle CAD = 45{,}33...°$
$\angle PAQ = 20{,}02...° + 45{,}33...° = 65{,}35...°$
$AQ = AD - DQ = 2575 - 275 = 2300$
De cosinusregel in $\triangle APQ$ geeft
$PQ^2 = 1070^2 + 2300^2 - 2 \cdot 1070 \cdot 2300 \cdot \cos(65{,}35...°) = 4\,382\,591{,}89...$
$PQ = 2093{,}46...$
De normale route is $2140 + 780 + 1890 = 4810$ meter.
De ingekorte route is $1070 + 2093{,}46... + 275 = 3438{,}46...$ meter.
Het verschil is $4810 - 3438{,}46... \approx 1372$ meter.

10.2 Vergelijkingen bij meetkunde

Bladzijde 62

11 Omdat je AB niet weet.

Bladzijde 63

12 **a** $\angle A$ (in $\triangle ADE$) $= \angle A$ (in $\triangle ABC$) en $\angle ADE = \angle ABC$ (F-hoeken), dus $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

b $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ geeft $\begin{array}{c|c} AE & DE \\ \hline AC & BC \end{array}$ oftewel $\begin{array}{c|c} AE & 4 \\ \hline 10{,}2 & 5 \end{array}$, dus $AE = \frac{4 \cdot 10{,}2}{5} = 8{,}16$.

Dus $CE = 10{,}2 - 8{,}16 = 2{,}04$.

13 $\triangle BDE \backsim \triangle BAC$ geeft $\begin{array}{c|c} BE & DE \\ \hline BC & AC \end{array}$

Stel $BE = x$, dan is $BC = x + 6$.

$\begin{array}{c|c} x & 12{,}5 \\ \hline x+6 & 20 \end{array}$ geeft $20x = 12{,}5(x+6)$
$20x = 12{,}5x + 75$
$7{,}5x = 75$
$x = 10$

Dus $BE = 10$ en $BC = 16$.
$BD = \sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = 7{,}5$ en $AB = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.
Dus $AD = 12 - 7{,}5 = 4{,}5$.

14 $\triangle PQR \backsim \triangle TQS$ geeft $\begin{array}{c|c} PQ & QR \\ \hline QT & QS \end{array}$

Stel $QT = x$, dan is $QR = x + 4$.

$\begin{array}{c|c} 32 & x+4 \\ \hline x & 15 \end{array}$ geeft $x(x+4) = 15 \cdot 32$
$x^2 + 4x = 480$
$x^2 + 4x - 480 = 0$
$(x - 20)(x + 24) = 0$
$x = 20 \vee x = -24$ (vold. niet)

Dus $QT = 20$.

$\triangle PQR \backsim \triangle TQS$ geeft $\begin{array}{c|c} PQ & PR \\ \hline QT & ST \end{array}$ oftewel $\begin{array}{c|c} 32 & 16 \\ \hline 20 & ST \end{array}$, dus $ST = \frac{16 \cdot 20}{32} = 10$.

15 $AC = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$
$CD = 9 - 5 = 4$
$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ geeft $\begin{array}{c|c} AB & AC \\ \hline DE & CD \end{array}$ oftewel $\begin{array}{c|c} 12 & 9 \\ \hline DE & 4 \end{array}$, dus $DE = \frac{4 \cdot 12}{9} = 5\frac{1}{3}$.

$\triangle ABS \sim \triangle EDS$ geeft $\begin{array}{c|c} AB & BS \\ \hline DE & DS \end{array}$

$BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$
Stel $BS = x$, dan is $DS = 13 - x$.

$\begin{array}{c|c} 12 & x \\ \hline 5\frac{1}{3} & 13 - x \end{array}$ geeft $5\frac{1}{3}x = 12(13 - x)$
$5\frac{1}{3}x = 156 - 12x$
$17\frac{1}{3}x = 156$
$x = 9$

Dus $BS = 9$.

16 Stel $BC = x$, dan is $CD = 12 - x$.
Stel $AC = y$, dan is $CE = 10{,}4 - y$.
$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ geeft $\begin{array}{c|c|c} AB & AC & BC \\ \hline DE & CD & CE \end{array}$ oftewel $\begin{array}{c|c|c} 4 & y & x \\ \hline 7{,}2 & 12 - x & 10{,}4 - y \end{array}$.

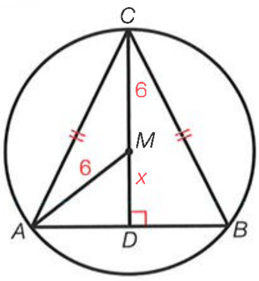
Uit $\begin{array}{c|c} 4 & y \\ \hline 7{,}2 & 12 - x \end{array}$ volgt $4(12 - x) = 7{,}2y$
$12 - x = 1{,}8y$
$x = 12 - 1{,}8y$

Uit $\begin{array}{c|c} 4 & x \\ \hline 7{,}2 & 10{,}4 - y \end{array}$ en $x = 12 - 1{,}8y$ volgt $\begin{array}{c|c} 4 & 12 - 1{,}8y \\ \hline 7{,}2 & 10{,}4 - y \end{array}$
$4(10{,}4 - y) = 7{,}2(12 - 1{,}8y)$
$41{,}6 - 4y = 86{,}4 - 12{,}96y$
$8{,}96y = 44{,}8$
$y = 5$

Dus $BC = x = 12 - 1{,}8 \cdot 5 = 3$.

Bladzijde 64

17 **a**

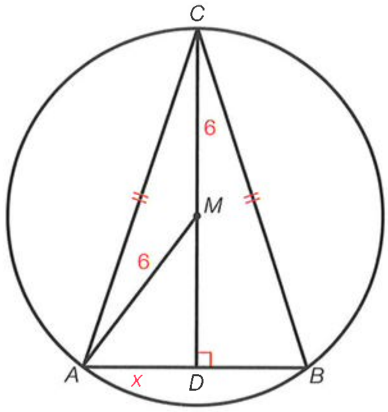


b $AB = CD = DM + CM = x + 6$
$AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}x + 3$

c De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft $AD^2 + DM^2 = AM^2$
$(\frac{1}{2}x + 3)^2 + x^2 = 6^2$
$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 + x^2 = 36$
$1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$

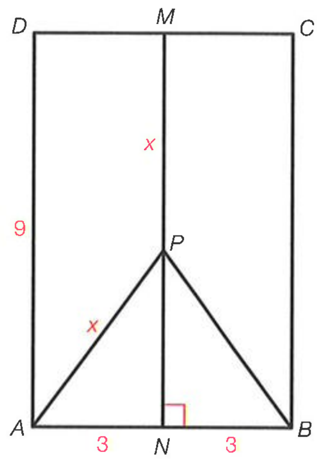
d $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$
$5x^2 + 12x - 108 = 0$
$D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot -108 = 2304$, dus $\sqrt{D} = 48$
$x = \frac{-12 + 48}{10} = 3\frac{3}{5} \vee x = \frac{-12 - 48}{10} = -6$ (vold. niet)
$AB = x + 6 = 9\frac{3}{5}$

18 Zie de figuur hiernaast.
M is het middelpunt van de cirkel.
Dus $AM = CM = 6$.
Stel $AD = x$, dan is $AB = 2x$, $CD = 3x$ en $DM = 3x - 6$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft
$AD^2 + DM^2 = AM^2$
$x^2 + (3x - 6)^2 = 6^2$
$x^2 + 9x^2 - 36x + 36 = 36$
$10x^2 - 36x = 0$
$2x(5x - 18) = 0$
$2x = 0 \vee 5x = 18$
$x = 0 \vee x = 3\frac{3}{5}$
Dus $AB = 2 \cdot 3\frac{3}{5} = 7\frac{1}{5}$.

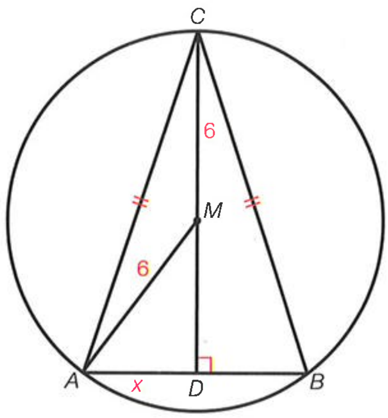


Bladzijde 65

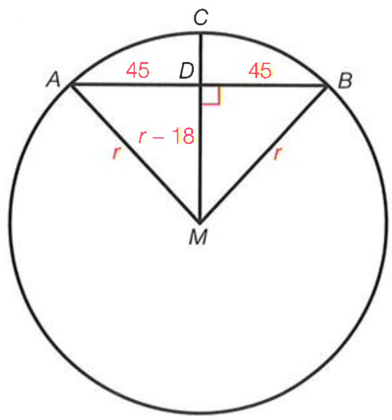
19 Verleng MP. Zie de figuur hiernaast.
Stel $AP = x$. Dan is $MP = x$ en $NP = MN - MP = 9 - x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ANP$ geeft $AN^2 + NP^2 = AP^2$
$3^2 + (9 - x)^2 = x^2$
$9 + 81 - 18x + x^2 = x^2$
$-18x = -90$
$x = 5$
Dus $AP = 5$.



20 Zie de figuur hiernaast. Hierin is M het middelpunt van de cirkel.
Stel $AD = x$. Dan is $AC = 1\frac{1}{2}AB = 1\frac{1}{2} \cdot 2x = 3x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft
$AD^2 + CD^2 = AC^2$
$x^2 + CD^2 = (3x)^2$
$CD^2 = 9x^2 - x^2$
$CD^2 = 8x^2$
$CD = \sqrt{8x^2} = 2x\sqrt{2}$
$DM = CD - CM = 2x\sqrt{2} - 6$
De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft
$AD^2 + DM^2 = AM^2$
$x^2 + (2x\sqrt{2} - 6)^2 = 6^2$
Voer in $y_1 = x^2 + (2x\sqrt{2} - 6)^2$ en $y_2 = 36$.
De optie snijpunt geeft $x = 3{,}771...$
Dus $AB = 2x = 2 \cdot 3{,}771... \approx 7{,}54$.

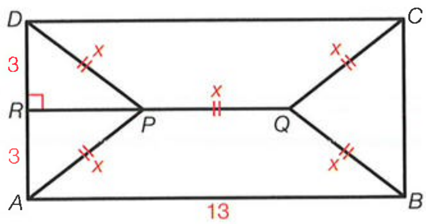


21 Zie de figuur hiernaast.
Stel de straal van de cirkel r.
Dan is $MD = r - 18$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft
$AD^2 + DM^2 = AM^2$
$45^2 + (r - 18)^2 = r^2$
$2025 + r^2 - 36r + 324 = r^2$
$-36r = -2349$
$r = 65\frac{1}{4}$
Dus de gevraagde straal is 65 cm.



Bladzijde 66

22 Zie de figuur hiernaast.
Stel $AP = DP = PQ = BQ = CQ = x$.



$PR = \dfrac{13 - x}{2} = 6\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$

De stelling van Pythagoras in $\triangle APR$ geeft

$PR^2 + AR^2 = AP^2$

$(6\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)^2 + 3^2 = x^2$

$42\frac{1}{4} - 6\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + 9 = x^2$

$\frac{3}{4}x^2 + 6\frac{1}{2}x - 51\frac{1}{4} = 0$

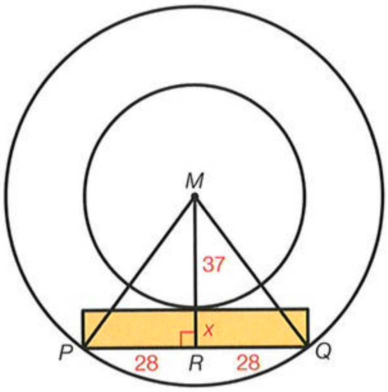
$3x^2 + 26x - 205 = 0$

$D = 26^2 - 4 \cdot 3 \cdot {-205} = 3136$, dus $\sqrt{D} = 56$

$x = \dfrac{-26 + 56}{6} = 5 \vee x = \dfrac{-26 - 56}{6} = -13\frac{2}{3}$ (vold. niet)

Dus $AP = 5$.

23 Zie de figuur hiernaast.
M is het middelpunt van de cirkels.
Stel de breedte van het vlot is x, dan is de breedte van de gracht $2x$.
Er geldt $MR = x + 37$ en $MP = 2x + 37$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle MPR$ geeft



$PR^2 + MR^2 = MP^2$

$28^2 + (x + 37)^2 = (2x + 37)^2$

$784 + x^2 + 74x + 1369 = 4x^2 + 148x + 1369$

$-3x^2 - 74x + 784 = 0$

$D = (-74)^2 - 4 \cdot -3 \cdot 784 = 14\,884$, dus $\sqrt{D} = 122$

$x = \dfrac{74 + 122}{-6} = -32\frac{2}{3}$ (vold. niet) $\vee x = \dfrac{74 - 122}{-6} = 8$

Dus de gracht is $2x = 2 \cdot 8 = 16$ meter breed.

24 Stel $BN = x$, dan is $AN = CN = 16 - x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABN$ geeft $AB^2 + BN^2 = AN^2$

$4^2 + x^2 = (16 - x)^2$

$16 + x^2 = 256 - 32x + x^2$

$32x = 240$

$x = 7\frac{1}{2}$

Dus $BN = 7\frac{1}{2}$ en $AN = 16 - 7\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$.
Verder is $AD' = CD = 4$ en $D'M = 7\frac{1}{2}$.

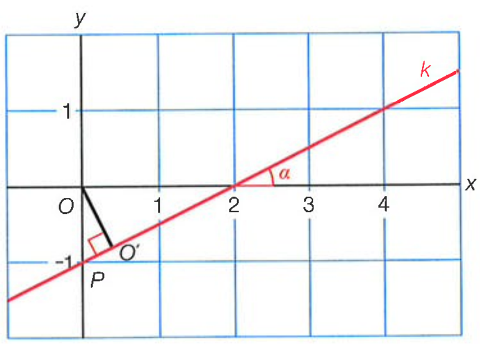
$O(ABNMD') = O(\triangle ABN) + O(\triangle ANMD') = \frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2}(8\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}) \cdot 4 = 47$

10.3 Lijnen en cirkels in een assenstelsel

Bladzijde 68

25 **a** $\tan(\text{hoek}) = \frac{1}{2}$ geeft hoek $\approx 26{,}6°$

b Noem het snijpunt van k met de y-as P.
De afstand van O tot k is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen O en de loodrechte projectie O' van O op k.
Teken je OO', dan ontstaat de rechthoekige driehoek $OO'P$ waarvan OO' een rechthoekszijde is en OP de schuine zijde.
Dus $OO' < OP$, met $OP = 1$.
Dus de afstand van de oorsprong tot k is kleiner dan 1.



Bladzijde 69

26 k snijden met l geeft

$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 3y = 12 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ $-$

$5x = 15$

$\left.\begin{matrix} x = 3 \\ 2x - y = 4 \end{matrix}\right\} 2 \cdot 3 - y = 4$

$6 - y = 4$

$y = 2$

Dus $S(3, 2)$.

$\left.\begin{matrix} n\colon x + 2y = c \\ \text{door } A(5, 6) \end{matrix}\right\} c = 5 + 2 \cdot 6 = 17$

Dus $n\colon x + 2y = 17$.

n snijden met l geeft

$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ x + 2y = 17 \end{cases}$ $-$

$-5y = -20$

$\left.\begin{matrix} y = 4 \\ x + 2y = 17 \end{matrix}\right\} x + 2 \cdot 4 = 17$

$x + 8 = 17$

$x = 9$

Dus $T(9, 4)$.

$d(S, T) = \sqrt{(9-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

27 **a** $k\colon 2x - 5y = -7$

$-5y = -2x - 7$

$y = \frac{2}{5}x + 1\frac{2}{5}$

$\tan(\alpha) = \frac{2}{5}$ geeft $\alpha = 21{,}80...°$

$l\colon x + 3y = 2$

$3y = -x + 2$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$\tan(\beta) = -\frac{1}{3}$ geeft $\beta = -18{,}43...°$

De hoek tussen k en l is $21{,}80...° - -18{,}43...° \approx 40{,}2°$.

b k snijden met l geeft

$\begin{cases} 2x - 5y = -7 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 15y = -21 \\ 5x + 15y = 10 \end{cases}$ $+$

$11x = -11$

$\left.\begin{matrix} x = -1 \\ x + 3y = 2 \end{matrix}\right\} -1 + 3y = 2$

$3y = 3$

$y = 1$

Dus $A(-1, 1)$.

$d(A, B) = \sqrt{(4 - -1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{29}$

c Lijn m door B loodrecht op l.

$\left.\begin{matrix} m\colon 3x - y = c \\ \text{door } B(4, 3) \end{matrix}\right\} c = 3 \cdot 4 - 3 = 9$

$m\colon 3x - y = 9$ snijden met l geeft het punt C.

$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 9x - 3y = 27 \end{cases}$ $+$

$10x = 29$

$\left.\begin{matrix} x = 2\frac{9}{10} \\ x + 3y = 2 \end{matrix}\right\} 2\frac{9}{10} + 3y = 2$

$3y = -\frac{9}{10}$

$y = -\frac{3}{10}$

Dus $C(2\frac{9}{10}, -\frac{3}{10})$.

$d(B, l) = d(B, C) = \sqrt{(2\frac{9}{10} - 4)^2 + (-\frac{3}{10} - 3)^2} = \sqrt{12\frac{1}{10}}$

Bladzijde 70

28 **a** $\left.\begin{array}{l} rc_{OC} = \dfrac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2} \\ rc_{BC} = \dfrac{1-3}{5-2} = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} rc_{OC} \cdot rc_{BC} = \frac{3}{2} \cdot -\frac{2}{3} = -1$

Dus $\angle OCB = 90°$.

b $rc_{OA} = \dfrac{-1-0}{3-0} = -\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -18{,}43...°$

$rc_{AB} = \dfrac{1--1}{5-3} = 1$

$\tan(\beta) = 1$ geeft $\beta = 45°$

De hoek tussen de lijn door O en A en de lijn door A en B is $45° - -18{,}43...° = 63{,}43...°$.

$\angle OAB$ is stomp, dus $\angle OAB = 180° - 63{,}43...° \approx 116{,}6°$.

c Stel AB: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{1--1}{5-3} = 1$.

$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } A(3, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$

Dus AB: $y = x - 4$.

Lijn l door C loodrecht op AB.

$\left.\begin{array}{l} l: y = -x + b \\ \text{door } C(2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$

Dus l: $y = -x + 5$.

l snijden met AB geeft het punt D.

$x - 4 = -x + 5$

$2x = 9$

$x = 4\frac{1}{2}$

$x = 4\frac{1}{2}$ geeft $y = \frac{1}{2}$, dus $D(4\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$d(C, AB) = d(C, D) = \sqrt{(4\frac{1}{2} - 2)^2 + (\frac{1}{2} - 3)^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} \approx 3{,}54$

29 **a** $rc_{AP} = \dfrac{0 - 2\frac{1}{2}}{6 - 3\frac{1}{2}} = -1$

$\tan(\alpha) = -1$ geeft $\alpha = -45°$

$rc_{BP} = \dfrac{6 - 2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}$

$\tan(\beta) = 3\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 74{,}05...°$

$\beta - \alpha = 74{,}05...° - -45° = 119{,}05...°$

$\angle APB$ is stomp, dus $\angle APB = 119{,}05...°$.

$rc_{CP} = \dfrac{2\frac{1}{2} - 2}{3\frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{7}$

$\tan(\gamma) = \frac{1}{7}$ geeft $\gamma = 8{,}13...°$

$\gamma - \alpha = 8{,}13...° - -45° = 53{,}13...°$

$\angle APC$ is stomp, dus $\angle APC = 180° - 53{,}13...° = 126{,}86...°$

$\angle BPC = 360° - \angle APB - \angle APC = 360° - 119{,}05...° - 126{,}86...° = 114{,}07...°$

Dus $\angle APC$ is de grootste hoek.

b $d(P, A) = \sqrt{(6 - 3\frac{1}{2})^2 + (0 - 2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 3{,}535...$

Stel AC: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3}$.

Door $C(0, 2)$, dus AC: $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Lijn k door P loodrecht op AC.

$\left.\begin{array}{l} k: y = 3x + b \\ \text{door } P(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 3\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2} \\ 10\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2} \\ b = -8 \end{array}$

Dus k: $y = 3x - 8$.

k snijden met AC geeft het punt D.
$3x - 8 = -\frac{1}{3}x + 2$
$3\frac{1}{3}x = 10$
$x = 3$
$x = 3$ geeft $y = 1$, dus $D(3, 1)$.
$d(P, AC) = d(P, D) = \sqrt{(3\frac{1}{2} - 3)^2 + (2\frac{1}{2} - 1)^2} = \sqrt{2\frac{1}{2}} = 1{,}581...$
$2 \cdot d(P, AC) = 2 \cdot 1{,}581... = 3{,}162...$ en dit is niet gelijk aan $d(P, A) = 3{,}535...$
Dus $d(P, A) \neq 2 \cdot d(P, AC)$.

Alternatieve uitwerking
De loodlijn uit P op AC snijdt AC in het punt D.
$\text{rc}_{AC} = \frac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3}$
$\tan(\alpha) = -\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -18{,}43...°$
$\text{rc}_{AP} = -1$
$\tan(\beta) = -1$ geeft $\beta = -45°$
$\alpha - \beta = -18{,}43...° - -45° = 26{,}56...°$
Dus $\angle PAD = 26{,}56...°$.
In $\triangle APD$ is $\sin(26{,}56...°) = \frac{d(P, AC)}{d(P, A)}$.
Dit geeft $d(P, A) = \frac{d(P, AC)}{\sin(26{,}56...°)} = \frac{d(P, AC)}{0{,}447...} = 2{,}23... \cdot d(P, AC)$.
Dus $d(P, A) \neq 2 \cdot d(P, AC)$.

30 **a** $\text{rc}_{PR} = \frac{6-3}{9-0} = \frac{1}{3}$
$\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ geeft $\alpha = 18{,}43...°$
$\text{rc}_{ST} = \frac{4-6}{10-2} = -\frac{1}{4}$
$\tan(\beta) = -\frac{1}{4}$ geeft $\beta = -14{,}03...°$
$\alpha - \beta = 18{,}43...° - -14{,}03...° = 32{,}47...°$
Dus de hoek tussen de routes is 32,5°.

b $\text{rc}_{PR} = \frac{1}{3}$ en $P(0, 3)$ geeft PR: $y = \frac{1}{3}x + 3$.
$\text{rc}_{FE} = \frac{3-2}{7-3} = \frac{1}{4}$
$\text{rc}_{FE} < \text{rc}_{PR}$, dus het punt F ligt het dichtst bij de route van schip I.
$\text{rc}_{PR} = \frac{1}{3}$, dus van de lijn k door F loodrecht op route PR is $\text{rc}_k = -3$.
$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } F(3, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 2 \\ -9 + b = 2 \\ b = 11 \end{array}$
Dus k: $y = -3x + 11$.
k snijden met PR geeft het punt G.
$\frac{1}{3}x + 3 = -3x + 11$
$3\frac{1}{3}x = 8$
$x = 2\frac{2}{5}$
$x = 2\frac{2}{5}$ geeft $y = \frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{5} + 3 = 3\frac{4}{5}$, dus $G(2\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5})$.
$d(F, \text{route I}) = d(F, G) = \sqrt{(2\frac{2}{5} - 3)^2 + (3\frac{4}{5} - 2)^2} = \sqrt{3\frac{3}{5}} = 1{,}89...$
De afstand is korter dan de voorgeschreven minimale afstand van 200 meter.
Route I voldoet dus niet aan de eis.

31 $A(0, 4)$ ligt op k.
Lijn m door A loodrecht op l.
$\left.\begin{array}{l} m\colon 2x - y = c \\ \text{door } A(0, 4) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 0 - 4 = -4$
$m\colon 2x - y = -4$ snijden met l geeft het punt B.
$\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 4x - 2y = -8 \end{cases}$ +
$5x = 5$
$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x + 2y = 13 \end{array}\right\} 1 + 2y = 13$
$2y = 12$
$y = 6$
Dus $B(1, 6)$.
$d(k, l) = d(A, l) = d(A, B) = \sqrt{(1-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{5}$

Bladzijde 71

32 **a** $rc_{k_1} = 3$, dus $\tan(\alpha) = 3$ geeft $\alpha = 71{,}56...°$
$rc_{k_3} = 1$, dus $\tan(\beta) = 1$ geeft $\alpha = 45°$.
$\angle(k_1, k_3) = 71{,}56...° - 45° = 26{,}56...°$
$rc_{k_9} = \frac{1}{3}$, dus $\tan(\gamma) = \frac{1}{3}$ geeft $\gamma = 18{,}43...°$
$\angle(k_3, k_9) = 45° - 18{,}43...° = 26{,}56...°$
Dus Maud heeft gelijk.

b $rc_{k_4} = \frac{3}{4}$, dus $rc_{\text{loodlijn}} = -1\frac{1}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} \text{loodlijn: } y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 6) \end{array}\right\} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 6$
$-5\frac{1}{3} + b = 6$
$b = 11\frac{1}{3}$
Dus loodlijn: $y = -1\frac{1}{3}x + 11\frac{1}{3}$.
k_4 snijden met de loodlijn geeft $\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{3}x + 11\frac{1}{3}$
$2\frac{1}{12}x = 11\frac{1}{3}$
$x = 5\frac{11}{25}$
$x = 5\frac{11}{25}$ geeft $y = \frac{3}{4} \cdot 5\frac{11}{25} = 4\frac{2}{25}$
$d(A, k_4) = d(A, (5\frac{11}{25}, 4\frac{2}{25})) = \sqrt{(5\frac{11}{25} - 4)^2 + (4\frac{2}{25} - 6)^2} = 2\frac{2}{5}$
$\left.\begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot d(A, k_4) = 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{5} = 6 \\ d(A, x\text{-as}) = 6 \end{array}\right\}$ Ischa heeft dus gelijk.

c $\tan(\alpha) < \tan(10°)$
$\frac{3}{a} < \tan(10°)$
Voer in $y_1 = \frac{3}{x}$ en $y_2 = \tan(10°)$.
De optie snijpunt geeft $x = 17{,}013...$
Dus vanaf $a = 18$ maakt k_a een hoek met de x-as die kleiner is dan $10°$.

33 **a** $f(-2) = -\frac{1}{3} \cdot -8 - \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 + 1 = -\frac{1}{3}$, dus $A(-2, -\frac{1}{3})$.
$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ geeft $f'(x) = -x^2 - x + 1$
$rc_k = f'(-2) = -4 + 2 + 1 = -1$
$rc_l = -1$, dus $f'(x) = -1$
$-x^2 - x + 1 = -1$
$-x^2 - x + 2 = 0$
$x^2 + x - 2 = 0$
$(x - 1)(x + 2) = 0$
$x = 1 \vee x = -2$
$f(1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + 1 = 1\frac{1}{6}$, dus $B(1, 1\frac{1}{6})$.
$d(A, B) = \sqrt{(1 - -2)^2 + (1\frac{1}{6} - -\frac{1}{3})^2} = \sqrt{11\frac{1}{4}}$

b $rc_{AO} = \dfrac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{6}$ geeft $\alpha = 9{,}46...°$

$rc_{OB} = \dfrac{1\frac{1}{6}}{1} = 1\frac{1}{6}$

$\tan(\beta) = 1\frac{1}{6}$ geeft $\beta = 49{,}39...°$

$49{,}39...° - 9{,}46...° = 39{,}93...°$

Dus $\angle AOB = 180° - 39{,}93...° \approx 140{,}1°$.

Alternatieve uitwerking

$AO^2 = (-2-0)^2 + (-\frac{1}{3}-0)^2 = 4\frac{1}{9}$

$BO^2 = (1-0)^2 + (1\frac{1}{6}-0)^2 = 2\frac{13}{36}$

De cosinusregel in $\triangle ABO$ geeft $11\frac{1}{4} = 4\frac{1}{9} + 2\frac{13}{36} - 2 \cdot \sqrt{4\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{13}{36}} \cdot \cos(\angle AOB)$

$6{,}23... \cdot \cos(\angle AOB) = -4{,}77...$

$\cos(\angle AOB) = -0{,}76...$

$\angle AOB \approx 140{,}1°$

c $\left.\begin{array}{l} k\colon y = -x + b \\ \text{door } A(-2, -\frac{1}{3}) \end{array}\right\} 2 + b = -\frac{1}{3}$

$b = -2\frac{1}{3}$

Dus $k\colon y = -x - 2\frac{1}{3}$.

Lijn m door B loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} m\colon y = x + b \\ \text{door } B(1, 1\frac{1}{6}) \end{array}\right\} 1 + b = 1\frac{1}{6}$

$b = \frac{1}{6}$

Dus $m\colon y = x + \frac{1}{6}$.

m snijden met k geeft het punt C.

$x + \frac{1}{6} = -x - 2\frac{1}{3}$

$2x = -2\frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} x = -1\frac{1}{4} \\ y = x + \frac{1}{6} \end{array}\right\} y = -1\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = -1\frac{1}{12}$

Dus $C(-1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{12})$.

$d(k, l) = d(B, k) = d(B, C) = \sqrt{(-1\frac{1}{4} - 1)^2 + (-1\frac{1}{12} - 1\frac{1}{6})^2} = \sqrt{(-2\frac{1}{4})^2 + (-2\frac{1}{4})^2} = 2\frac{1}{4}\sqrt{2}$

34 **a** $r = \sqrt{36} = 6$ en $M(3, 4)$

b $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 36$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 36$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$

Dus $a = -6$, $b = -8$ en $c = -11$.

Bladzijde 72

35 **a** $x = 2$ en $y = 0$ invullen in de cirkelvergelijking geeft $(2-2)^2 + (0+4)^2 = 16$ klopt.

Dus $A(2, 0)$ ligt op c.

b $d(B, M) = \sqrt{(2 - -2)^2 + (-4 - -3)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$r = 4$

$\sqrt{17} > 4$, dus $d(B, M) > r$, dus B ligt buiten c.

c $d(C, M) = \sqrt{(2-1)^2 + (-4 - -1)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

$d(C, M) < r$, dus C ligt binnen c.

36 **a** $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10 = 0$

$x^2 - 8x + y^2 - 2y + 10 = 0$

$(x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 10 = 0$

$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 7$

Dus de straal is $\sqrt{7}$ en het middelpunt is $(4, 1)$.

b $x^2 + y^2 + 6x - 5y + 13 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 5y + 13 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + (y - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 13 = 0$
$(x + 3)^2 + (y - 2\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4}$
Dus de straal is $1\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $(-3, 2\frac{1}{2})$.

c $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$
$x^2 - 9x + y^2 - 3y + 10 = 0$
$(x - 4\frac{1}{2})^2 - 20\frac{1}{4} + (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 10 = 0$
$(x - 4\frac{1}{2})^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{2}$
Dus de straal is $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ en het middelpunt is $(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

37 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 + 6 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
Cirkel met middelpunt $M(3, 1)$ en straal $r = 2$.
$d(A, M) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$
$d(A, M) < r$, dus A ligt binnen c_1.

b $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 21 = 0$
$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 21 = 0$
$(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 21 = 0$
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 26$
Cirkel met middelpunt $M(-1, 2)$ en straal $r = \sqrt{26}$.
$d(B, M) = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{26}$
$d(B, M) = r$, dus B ligt op c_2.

c $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 23$
$x^2 - 2x + y^2 - 8y = 23$
$(x - 1)^2 - 1 + (y - 4)^2 - 16 = 23$
$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$
Cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal $r = \sqrt{40}$.
$d(C, M) = \sqrt{(1 - -5)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{45}$
$d(C, M) > r$, dus C ligt buiten c_3.

38 **a** $\left.\begin{array}{l}(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = r^2 \\ \text{door } O(0, 0)\end{array}\right\} r^2 = (0 - 6)^2 + (0 - 3)^2 = 45$
c_1: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 45$
$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 45$
$x^2 + y^2 - 12x - 6y = 0$

b $\left.\begin{array}{l}(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = r^2 \\ \text{door } (0, 3)\end{array}\right\} r^2 = (0 + 3)^2 + (3 - 5)^2 = 13$
c_2: $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 13$
$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 13$
$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 21 = 0$

c Middellijn AB met $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$ geeft middelpunt $M(5, 0)$ en straal $r = 3$.
c_3: $(x - 5)^2 + y^2 = 9$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9$
$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

d Middellijn CD met $C(1, 2)$ en $D(7, 4)$ geeft middelpunt $M(4, 3)$ en straal
$r = d(C, M) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10}$.
c_4: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$
$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 10$
$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

39 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 24 = 0$
$(x-5)^2 - 25 + (y-3)^2 - 9 + 24 = 0$
$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$
Cirkel met middelpunt $M(5, 3)$.
$d(M, x\text{-as}) = 3$

b $d(M, y\text{-as}) = 5$

c De lijn m gaat door M en staat loodrecht op k.
$$\left.\begin{array}{l} m\colon y = -x + b \\ \text{door } M(5, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -5 + b = 3 \\ b = 8 \end{array}$$
Dus m: $y = -x + 8$.
m snijden met k geeft $x = -x + 8$
$2x = 8$
$x = 4$
$x = 4$ geeft $y = 4$
Dus m snijdt k in het punt $S(4, 4)$.
$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(4-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$

d De lijn n gaat door M en staat loodrecht op l.
$$\left.\begin{array}{l} n\colon 3x - y = c \\ \text{door } M(5, 3) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 5 - 3 = 12$$
Dus n: $3x - y = 12$.
n snijden met l geeft het punt T.
$$\begin{cases} 3x - y = 12 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 3y = 36 \\ x + 3y = 6 \end{cases} +$$
$10x = 42$
$$\left.\begin{array}{l} x = 4\frac{1}{5} \\ x + 3y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4\frac{1}{5} + 3y = 6 \\ 3y = 1\frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{array}$$
Dus $T(4\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$.
$d(M, l) = d(M, T) = \sqrt{(4\frac{1}{5} - 5)^2 + (\frac{3}{5} - 3)^2} = \sqrt{6\frac{2}{5}}$

40 **a** $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$
$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 12$
$(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 12$
$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$
Cirkel met middelpunt $M(-2, 3)$ en straal $r = 5$.
$d(A, M) = \sqrt{(-2-2)^2 + (3 - -1)^2} = \sqrt{32}$
$d(A, M) > r$, dus A ligt buiten c.

b De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k.
$$\left.\begin{array}{l} l\colon 2x - 3y = c \\ \text{door } M(-2, 3) \end{array}\right\} c = 2 \cdot -2 - 3 \cdot 3 = -13$$
Dus l: $2x - 3y = -13$.
l snijden met k geeft het punt S.
$$\begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 6y = -26 \\ 9x + 6y = 39 \end{cases} +$$
$13x = 13$
$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 + 2y = 13 \\ 2y = 10 \\ y = 5 \end{array}$$
Dus $S(1, 5)$.
$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(1 - -2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$

c De x-as snijden, dus $y = 0$ geeft $x^2 + 4x = 12$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$(x - 2)(x + 6) = 0$

$x = 2 \vee x = -6$

Dus $P(-6, 0)$ en $Q(2, 0)$, dus $PQ = 8$.

$BP^2 = (-6 - -3)^2 + (0 - 2)^2 = 13$

$BQ^2 = (2 - -3)^2 + (0 - 2)^2 = 29$

De cosinusregel in $\triangle BPQ$ geeft $8^2 = 13 + 29 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{29} \cdot \cos(\angle PBQ)$

$2\sqrt{377}\cos(\angle PBQ) = -22$

$\cos(\angle PBQ) = -0{,}566...$

$\angle PBQ \approx 124{,}5°$

41 Middellijn PR, dus middelpunt is het midden van PR, dus $M(2, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$.

De straal is

$r = d(R, M) = \sqrt{(2-5)^2 + (\frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2} - 7)^2} = \sqrt{9 + (\frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 12\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}}$.

Dus c: $(x - 2)^2 + (y - \frac{1}{2}p - 3\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$.

c door $Q(-2, 6)$ geeft $(-4)^2 + (2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$

$16 + 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - 3\frac{1}{2}p + 21\frac{1}{4}$

$p = -1$

$p = -1$ geeft $M(2, \frac{1}{2} \cdot -1 + 3\frac{1}{2}) = M(2, 3)$ en $r = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (-1)^2 - 3\frac{1}{2} \cdot -1 + 21\frac{1}{4}} = \sqrt{25} = 5$.

$d(O, M) = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$

$d(O, M) < r$, dus de oorsprong ligt binnen c.

10.4 Cirkels, raaklijnen en functies

Bladzijde 74

42 **a** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$

$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 7 = 0$

$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 7 = 0$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$

Dus de straal is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

b De lijn k gaat door M en staat loodrecht op l.

$\left.\begin{array}{l} k\colon x + 2y = c \\ \text{door } M(-2, 3) \end{array}\right\} c = -2 + 2 \cdot 3 = 4$

Dus k: $x + 2y = 4$.

k snijden met l geeft het punt A.

$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ $-$

$-5y = -5$

$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 2 \cdot 1 = 4 \\ x = 2 \end{array}$

Dus $A(2, 1)$.

$d(M, l) = d(M, A) = \sqrt{(2 - -2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c De afstand van M tot l is gelijk aan de straal van c, dus l raakt c.

Bladzijde 75

43 **a** Lijn l door M loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} l\colon 3x - 2y = c \\ \text{door } M(2, 5) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4$

Dus $l\colon 3x - 2y = -4$.

l snijden met k geeft het punt A.

$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 6y = 12 \\ 9x - 6y = -12 \end{cases}$ +

$13x = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3y = 6 \\ y = 2 \end{array}$

Dus $A(0, 2)$.

$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(0-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}$

Dus $c_1\colon (x-2)^2 + (y-5)^2 = 13$.

b c_2 is de cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$ en straal $\sqrt{29}$.

$\text{rc}_{BM} = \dfrac{3-1}{-1-4} = -\frac{2}{5}$, dus $\text{rc}_l = 2\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} l\colon y = 2\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(4, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 1 \\ 10 + b = 1 \\ b = -9 \end{array}$

Dus $l\colon y = 2\frac{1}{2}x - 9$.

44 Lijn l door M loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} l\colon 2x + 3y = c \\ \text{door } M(2, 1) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$

Dus $l\colon 2x + 3y = 7$.

l snijden met k geeft het punt A.

$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x - 6y = -27 \end{cases}$ +

$13x = -13$

$\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ 2x + 3y = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + 3y = 7 \\ 3y = 9 \\ y = 3 \end{array}$

Dus $A(-1, 3)$.

$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$

Dus $c\colon (x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$.

Bladzijde 76

45 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$

$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 12 = 0$

$(x-5)^2 - 25 + (y-2)^2 - 4 + 12 = 0$

$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 17$

Dus $M(5, 2)$.

$\text{rc}_{AM} = \dfrac{2-3}{5-1} = -\frac{1}{4}$, dus $\text{rc}_k = 4$.

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 4x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = -1 \end{array}$

Dus $k\colon y = 4x - 1$.

$\text{rc}_{BM} = \dfrac{2 - -2}{5-6} = -4$, dus $\text{rc}_l = \frac{1}{4}$.

$\left.\begin{array}{l} l\colon y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } B(6, -2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 6 + b = -2 \\ 1\frac{1}{2} + b = -2 \\ b = -3\frac{1}{2} \end{array}$

Dus $l\colon y = \frac{1}{4}x - 3\frac{1}{2}$.

b $\tan(\alpha) = 4$ geeft $\alpha = 75{,}96...°$
$\tan(\beta) = \frac{1}{4}$ geeft $\beta = 14{,}03...°$
$\alpha - \beta = 75{,}96...° - 14{,}03...° = 61{,}92...°$
Dus de hoek tussen k en l is ongeveer 61,9°.

46 **a** Lijn m door M loodrecht op k.
$\left.\begin{array}{l} m\colon x - 4y = c \\ \text{door } M(4, 3) \end{array}\right\} c = 4 - 4 \cdot 3 = -8$
Dus m: $x - 4y = -8$.
m snijden met k geeft het punt A.
$\begin{cases} 4x + y = 36 \\ x - 4y = -8 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 16x + 4y = 144 \\ x - 4y = -8 \end{cases}$ +
$17x = 136$
$\left.\begin{array}{l} x = 8 \\ 4x + y = 36 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 8 + y = 36 \\ 32 + y = 36 \\ y = 4 \end{array}$
Dus $A(8, 4)$.
$r_1 = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(8-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{17}$
Dus c_1: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.
c_1 snijden met de x-as, dus $y = 0$ geeft $(x-4)^2 + (-3)^2 = 17$
$(x-4)^2 + 9 = 17$
$(x-4)^2 = 8$
$x - 4 = \sqrt{8} \vee x - 4 = -\sqrt{8}$
$x - 4 = 2\sqrt{2} \vee x - 4 = -2\sqrt{2}$
$x = 4 + 2\sqrt{2} \vee x = 4 - 2\sqrt{2}$
Dus $B(4 - 2\sqrt{2}, 0)$ en $C(4 + 2\sqrt{2}, 0)$.

b Het middelpunt N van c_2 is $N(\frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2}), 0) = N(4, 0)$.
De straal r_2 van c_2 is $r_2 = \frac{1}{2} \cdot d(B, C) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 2\sqrt{2} - (4 - 2\sqrt{2})) = 2\sqrt{2}$.
Dus c_2: $(x-4)^2 + y^2 = 8$.
$x = 2$ geeft $(2-4)^2 + y^2 = 8$
$4 + y^2 = 8$
$y^2 = 4$
$y = 2 \vee y = -2$
Dus $D(2, 2)$.
Van de lijn n door D en N is $\text{rc}_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{4-2} = -1$.
$l \perp n$, dus $\text{rc}_l \cdot \text{rc}_n = -1$, dus $\text{rc}_l = 1$.
$\left.\begin{array}{l} l\colon y = x + b \\ \text{door } D(2, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + b = 2 \\ b = 0 \end{array}$
Dus l: $y = x$, dus l gaat door de oorsprong.

47 **a** Substitutie van $y = -2x + 5$ in $x^2 + y^2 = 5$ geeft $x^2 + (-2x+5)^2 = 5$
$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 5$
$5x^2 - 20x + 20 = 0$
$x^2 - 4x + 4 = 0$

b $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$
De vergelijking die na de substitutie is ontstaan, heeft één oplossing.
Dus de lijn l en de cirkel c hebben één punt gemeenschappelijk.
Dus l raakt c.

Bladzijde 77

48 **a** $D = 484$, dus $\sqrt{D} = 22$.
Dit geeft $x = \frac{12 + 22}{10} = 3\frac{2}{5} \vee x = \frac{12 - 22}{10} = -1$.
$x = 3\frac{2}{5}$ geeft $y = 2 \cdot 3\frac{2}{5} - 3 = 3\frac{4}{5}$ en $x = -1$ geeft $y = 2 \cdot -1 - 3 = -5$.
Dus de snijpunten zijn $(3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5})$ en $(-1, -5)$.

b $b = 5$ bij $5x^2 + (4b - 10)x + b^2 - 4b = 0$ geeft
$5x^2 + (4 \cdot 5 - 10)x + 5^2 - 4 \cdot 5 = 0$
$5x^2 + 10x + 5 = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$(x + 1)^2 = 0$
$x = -1$
$x = -1$ geeft $y = 2 \cdot -1 + 5 = 3$
Dus het raakpunt is $(-1, 3)$.

Bladzijde 78

49 **a** $x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 - 5x + 18x + 6b - 10 = 0$
$10x^2 + 6bx + 13x + b^2 + 6b - 10 = 0$
$10x^2 + (6b + 13)x + b^2 + 6b - 10 = 0$
$A = 10$, $B = 6b + 13$ en $C = b^2 + 6b - 10$
b $x^2 + x^2 - 2bx + b^2 - 6x - 2x + 2b + 5 = 0$
$2x^2 - 2bx - 8x + b^2 + 2b + 5 = 0$
$2x^2 + (-2b - 8)x + b^2 + 2b + 5 = 0$
$A = 2$, $B = -2b - 8$ en $C = b^2 + 2b + 5$
c $x^2 + a^2x^2 - 6ax + 9 + 2x - 8ax + 24 - 7 = 0$
$a^2x^2 + x^2 - 14ax + 2x + 26 = 0$
$(a^2 + 1)x^2 + (-14a + 2)x + 26 = 0$
$A = a^2 + 1$, $B = -14a + 2$ en $C = 26$

50 **a** Substitutie van $y = x - 4$ in $x^2 + y^2 = 13$ geeft
$x^2 + (x - 4)^2 = 13$
$x^2 + x^2 - 8x + 16 = 13$
$2x^2 - 8x + 3 = 0$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 40$
$D > 0$, dus k snijdt c_1 in twee punten.
b Substitutie van $y = -4x - 3$ in $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 4$ geeft
$x^2 + (-4x - 3)^2 - 6x - 4(-4x - 3) = 4$
$x^2 + 16x^2 + 24x + 9 - 6x + 16x + 12 = 4$
$17x^2 + 34x + 17 = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
$D = 0$, dus l raakt c_2.
c m: $2x - y = 1$ oftewel m: $y = 2x - 1$
Substitutie van $y = 2x - 1$ in $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$ geeft
$x^2 + (2x - 1)^2 + 6x - 4(2x - 1) = 0$
$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 6x - 8x + 4 = 0$
$5x^2 - 6x + 5 = 0$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = -64$
$D < 0$, dus m heeft geen punten gemeenschappelijk met c_3.

51 Stel $y = 3x + b$.
Substitutie van $y = 3x + b$ in $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ geeft
$x^2 + (3x + b)^2 - 4x - 2(3x + b) - 5 = 0$
$x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 - 4x - 6x - 2b - 5 = 0$
$10x^2 + (6b - 10)x + b^2 - 2b - 5 = 0$
$D = (6b - 10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 2b - 5)$
$= 36b^2 - 120b + 100 - 40b^2 + 80b + 200$
$= -4b^2 - 40b + 300$
$D = 0$ geeft $-4b^2 - 40b + 300 = 0$
$b^2 + 10b - 75 = 0$
$(b - 5)(b + 15) = 0$
$b = 5 \vee b = -15$
Dus de lijnen zijn $y = 3x + 5$ en $y = 3x - 15$.

52 **a** Stel $y = -2x + b$.
Substitutie van $y = -2x + b$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft
$x^2 + (-2x + b)^2 - 10x - 6(-2x + b) + 29 = 0$
$x^2 + 4x^2 - 4bx + b^2 - 10x + 12x - 6b + 29 = 0$
$5x^2 + (2 - 4b)x + b^2 - 6b + 29 = 0$
$D = (2 - 4b)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 6b + 29)$
$= 4 - 16b + 16b^2 - 20b^2 + 120b - 580$
$= -4b^2 + 104b - 576$
$D = 0$ geeft $-4b^2 + 104b - 576 = 0$
$b^2 - 26b + 144 = 0$
$(b - 8)(b - 18) = 0$
$b = 8 \vee b = 18$
Dus de lijnen zijn $y = -2x + 8$ en $y = -2x + 18$.

b $\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } A(0, 3) \end{array}\right\} b = 3$
Dus de lijnen $y = ax + 3$ gaan door $A(0, 3)$.
Substitutie van $y = ax + 3$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft
$x^2 + (ax + 3)^2 - 10x - 6(ax + 3) + 29 = 0$
$x^2 + a^2x^2 + 6ax + 9 - 10x - 6ax - 18 + 29 = 0$
$(1 + a^2)x^2 - 10x + 20 = 0$
$D = (-10)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 20$
$= 100 - 80 - 80a^2$
$= 20 - 80a^2$
$D = 0$ geeft $20 - 80a^2 = 0$
$-80a^2 = -20$
$a^2 = \frac{1}{4}$
$a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$

Bladzijde 79

53 **a** k: $x - 2y = 1$ oftewel k: $x = 2y + 1$
Substitutie van $x = 2y + 1$ in $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$ geeft
$(2y - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5$
$4y^2 - 20y + 25 + y^2 - 10y + 25 = 5$
$5y^2 - 30y + 45 = 0$
$y^2 - 6y + 9 = 0$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$
Dus dat is inderdaad het geval.

b $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 5$
$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 10y + 25 = 5$
$x^2 + y^2 - 12x - 10y + 56 = 0$
k: $x - 2y = 1$ oftewel k: $-2y = -x + 1$ oftewel k: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
$l \perp k$, dus $\text{rc}_l \cdot \text{rc}_k = -1$, dus $\text{rc}_l = -2$.
Stel l: $y = -2x + b$.
Substitutie van $y = -2x + b$ in $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 56 = 0$ geeft
$x^2 + (-2x + b)^2 - 12x - 10(-2x + b) + 56 = 0$
$x^2 + 4x^2 - 4bx + b^2 - 12x + 20x - 10b + 56 = 0$
$5x^2 - 4bx + 8x + b^2 - 10b + 56 = 0$
$5x^2 + (-4b + 8)x + b^2 - 10b + 56 = 0$
$D = (-4b + 8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 10b + 56)$
$= 16b^2 - 64b + 64 - 20b^2 + 200b - 1120$
$= -4b^2 + 136b - 1056$
$D = 0$ geeft $-4b^2 + 136b - 1056 = 0$
$b^2 - 34b + 264 = 0$
$(b - 12)(b - 22) = 0$
$b = 12 \vee b = 22$
Dus l_1: $y = -2x + 12$ en l_2: $y = -2x + 22$.

c Stel $m: y = ax + 4\frac{1}{2}$.
Substitutie van $y = ax + 4\frac{1}{2}$ in $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 56 = 0$ geeft
$x^2 + (ax + 4\frac{1}{2})^2 - 12x - 10(ax + 4\frac{1}{2}) + 56 = 0$
$x^2 + a^2x^2 + 9ax + 20\frac{1}{4} - 12x - 10ax - 45 + 56 = 0$
$a^2x^2 + x^2 - ax - 12x + 31\frac{1}{4} = 0$
$(a^2 + 1)x^2 + (-a - 12)x + 31\frac{1}{4} = 0$
$D = (-a - 12)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 31\frac{1}{4}$
$= a^2 + 24a + 144 - 125a^2 - 125$
$= -124a^2 + 24a + 19$
$D = 0$ geeft $-124a^2 + 24a + 19 = 0$
$D = 24^2 - 4 \cdot -124 \cdot 19 = 10\,000$
$a = \dfrac{-24 + 100}{-248} = -\frac{19}{62} \vee a = \dfrac{-24 - 100}{-248} = \frac{1}{2}$
Dus $m_1: y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ en $m_2: y = -\frac{19}{62}x + 4\frac{1}{2}$.

54 Punt $A(2, 1)$ ligt op k.
Lijn m door A loodrecht op k.
$\left.\begin{array}{l} m\text{: } 4x - 3y = c \\ \text{door } A(2, 1) \end{array}\right\} c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5$
Dus $m: 4x - 3y = 5$ oftewel $m: y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$.
De cirkel c met middelpunt A en straal 5 heeft vergelijking $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.
c snijden met m.
Substitutie van $y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$ in $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ geeft $(x - 2)^2 + (1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3} - 1)^2 = 25$
$(x - 2)^2 + (1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3})^2 = 25$
$x^2 - 4x + 4 + 1\frac{7}{9}x^2 - 7\frac{1}{9}x + 7\frac{1}{9} = 25$
$2\frac{7}{9}x^2 - 11\frac{1}{9}x - 13\frac{8}{9} = 0$
$25x^2 - 100x - 125 = 0$
$x^2 - 4x - 5 = 0$
$(x + 1)(x - 5) = 0$
$x = -1 \vee x = 5$
$x = -1$ geeft $y = 1\frac{1}{3} \cdot -1 - 1\frac{2}{3} = -3$ en $x = 5$ geeft $y = 1\frac{1}{3} \cdot 5 - 1\frac{2}{3} = 5$.
$\left.\begin{array}{l} l_1\text{: } 3x + 4y = c \\ \text{door } (-1, -3) \end{array}\right\} c = 3 \cdot -1 + 4 \cdot -3 = -15$
Dus $l_1: 3x + 4y = -15$.
$\left.\begin{array}{l} l_2\text{: } 3x + 4y = c \\ \text{door } (5, 5) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 35$
Dus $l_2: 3x + 4y = 35$.

55 Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + 2$ in $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$ geeft
$(x - 5)^2 + (\frac{1}{2}x + 2 - 2)^2 = 5$
$(x - 5)^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = 5$
$x^2 - 10x + 25 + \frac{1}{4}x^2 = 5$
$1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 20 = 0$
$x^2 - 8x + 16 = 0$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$
$D = 0$, dus k is raaklijn van c.

Bladzijde 81

56 Stel m: $y = -\frac{1}{2}x + b$.

$f'(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $-\dfrac{2}{x^2} = -\frac{1}{2}$

$x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(-2) = -1 \text{, dus } C(-2, -1) \end{array}\right\} -\frac{1}{2} \cdot -2 + b = -1$

$1 + b = -1$

$b = -2$

Dus m: $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x - 2$ in $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ geeft

$(x-2)^2 + (-\frac{1}{2}x - 1)^2 = 4$

$x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1 - 4 = 0$

$1\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$

$5x^2 - 12x + 4 = 0$

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64$

$x = \dfrac{12+8}{10} = 2 \vee x = \dfrac{12-8}{10} = \frac{2}{5}$

$x = 2$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -3$ en $x = \frac{2}{5}$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2 = -2\frac{1}{5}$.

Dus $D(\frac{2}{5}, -2\frac{1}{5})$ en $E(2, -3)$.

57 Van d is de straal 2 en $y_N = y_A + r = 1 + 2 = 3$, dus d: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{2}x + 2$ in $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ geeft

$(x-2)^2 + (-\frac{1}{2}x - 1)^2 = 4$

$x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1 - 4 = 0$

$1\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$

$5x^2 - 12x + 4 = 0$

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 64$

$x = \dfrac{12+8}{10} = 2 \vee x = \dfrac{12-8}{10} = \frac{2}{5}$

$x = \frac{2}{5}$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + 2 = 1\frac{4}{5}$

Dus $F(\frac{2}{5}, 1\frac{4}{5})$.

58 **a** $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6\frac{2}{3}x + 18$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{3}x - 6\frac{2}{3}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(4) = 1\frac{1}{3} \cdot 4 - 6\frac{2}{3} = -1\frac{1}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -1\frac{1}{3}x + b \\ f(4) = 2 \text{, dus } A(4, 2) \end{array}\right\} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 2$

$-5\frac{1}{3} + b = 2$

$b = 7\frac{1}{3}$

Dus k: $y = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{1}{3}$.

b 1 Stel de formule op van de lijn l door A loodrecht op k.

2 Bereken met behulp van de formule van l de y-coördinaat van M.

3 Bereken de afstand tussen M en A.

c Lijn l door A loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(4, 2) \end{array}\right\} \frac{3}{4} \cdot 4 + b = 2$

$3 + b = 2$

$b = -1$

Dus l: $y = \frac{3}{4}x - 1$.

M ligt op l.

$x = 3$ geeft $y = \frac{3}{4} \cdot 3 - 1 = 1\frac{1}{4}$, dus $M(3, 1\frac{1}{4})$.

$r = d(M, A) = \sqrt{(4-3)^2 + (2 - 1\frac{1}{4})^2} = \sqrt{1\frac{9}{16}} = 1\frac{1}{4}$

Er geldt $y_M = r$, dus c raakt de x-as.

Bladzijde 82

59 **a** 1 Stel met behulp van de afgeleide van f de formule op van k.
2 Stel met behulp van de coördinaten van M en R een vergelijking op van c.
3 Substitueer de formule van k in de vergelijking van c.
4 Toon aan dat de discriminant gelijk is aan nul.

b $f(x) = 1 + \sqrt{x-2} = 1 + (x-2)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$f'(x) = \frac{1}{4}$ geeft $\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{4}$

$2\sqrt{x-2} = 4$

$\sqrt{x-2} = 2$

$x - 2 = 4$

$x = 6$

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = \frac{1}{4}x + b \\ f(6) = 3, \text{ dus } A(6, 3) \end{array}\right\} \frac{1}{4} \cdot 6 + b = 3$

$1\frac{1}{2} + b = 3$

$b = 1\frac{1}{2}$

Dus $k\colon y = \frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} M(0, -7) \text{ geeft } x^2 + (y+7)^2 = r^2 \\ \text{door } R(2, 1) \end{array}\right\} r^2 = 2^2 + 8^2 = 68$

Dus $c\colon x^2 + (y+7)^2 = 68$.

Substitutie van $y = \frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$ in $x^2 + (y+7)^2 = 68$ geeft

$x^2 + (\frac{1}{4}x + 8\frac{1}{2})^2 = 68$

$x^2 + \frac{1}{16}x^2 + 4\frac{1}{4}x + 72\frac{1}{4} - 68 = 0$

$1\frac{1}{16}x^2 + 4\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4} = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$D = 0$, dus k raakt c.

c $x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x+2)^2 = 0$

$x = -2$

$x = -2$ geeft $y = \frac{1}{4} \cdot -2 + 1\frac{1}{2} = 1$, dus $B(-2, 1)$.

k raakt c, dus $\angle ABM = 90°$.

$d(A, B) = \sqrt{(-2-6)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{68}$

$d(M, B) = r = \sqrt{68}$

Dus driehoek ABM is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

60 $y_A = 7$, dus $f(x) = 7$

$1 + \sqrt{6x - 12} = 7$

$\sqrt{6x-12} = 6$

$6x - 12 = 36$

$6x = 48$

$x = 8$

Dus $A(8, 7)$.

$f(x) = 1 + \sqrt{6x-12} = 1 + (6x-12)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(6x-12)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 = \dfrac{3}{\sqrt{6x-12}}$

Stel $k\colon y = ax + b$ met $a = f'(8) = \dfrac{3}{\sqrt{6 \cdot 8 - 12}} = \dfrac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(8, 7) \end{array}\right\} \frac{1}{2} \cdot 8 + b = 7$

$4 + b = 7$

$b = 3$

Dus $k\colon y = \frac{1}{2}x + 3$.

$6x - 12 = 0$ geeft $x = 2$, dus randpunt $M(2, 1)$.
Lijn m door M loodrecht op k.
$\left.\begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ \text{door } M(2, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4 + b = 1 \\ b = 5 \end{array}$
Dus m: $y = -2x + 5$.
m snijden met k geeft $\frac{1}{2}x + 3 = -2x + 5$
$2\frac{1}{2}x = 2$
$x = \frac{4}{5}$
$x = \frac{4}{5}$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + 3 = 3\frac{2}{5}$, dus $B(\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5})$.
$r = d(M, k) = d(M, B) = \sqrt{(\frac{4}{5} - 2)^2 + (3\frac{2}{5} - 1)^2} = \sqrt{7\frac{1}{5}}$
Dus c: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 7\frac{1}{5}$.
$MBSC$ is een vierkant met $BS = CS = r = \sqrt{7\frac{1}{5}}$, dus $O(MBSC) = 7\frac{1}{5}$.
De oppervlakte van het deel van de cirkel dat wordt ingesloten door de lijnstukken BM en CM en de cirkelboog BC is $\frac{1}{4}\pi \cdot 7\frac{1}{5} = 1\frac{4}{5}\pi$.
Dus $O(V) = 7\frac{1}{5} - 1\frac{4}{5}\pi \approx 1{,}55$.

10.5 Afstanden bij cirkels

Bladzijde 84

61 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 9 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 9 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 4)^2 - 16 + 9 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 32$
Dus de straal is $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ en $M(5, 4)$.
$d(A, M) = \sqrt{(5 - 10)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{29}$

b $d(A, M) < r$, dus A ligt binnen de cirkel.
$d(A, c) = r - d(A, M) = 4\sqrt{2} - \sqrt{29}$

Bladzijde 85

62 M op k, dus $2 + 4y_M = 16$ en dit geeft $y_M = 3\frac{1}{2}$.
Dus de straal r_1 van c_1 is $3\frac{1}{2}$ en $M(2, 3\frac{1}{2})$.
N op k, dus $8 + 4y_N = 16$ en dit geeft $y_N = 2$.
Dus de straal r_2 van c_2 is 2 en $N(8, 2)$.
$d(M, N) = \sqrt{(8 - 2)^2 + (2 - 3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{36 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{38\frac{1}{4}}$
Dus $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{38\frac{1}{4}} - 3\frac{1}{2} - 2 \approx 0{,}685$.

63 **a** c_1 raakt de x-as en het middelpunt is $M(4, 2)$, dus de straal van c_1 is 2.
c_1: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$

b Substitutie van $y = 1\frac{1}{3}x$ in $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$ geeft $(x - 4)^2 + (1\frac{1}{3}x - 2)^2 = 4$
$x^2 - 8x + 16 + 1\frac{7}{9}x^2 - 5\frac{1}{3}x + 4 = 4$
$2\frac{7}{9}x^2 - 13\frac{1}{3}x + 16 = 0$
$25x^2 - 120x + 144 = 0$
$D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$
Dus c_1 raakt l.

c Lijn n door P loodrecht op k.
$rc_k = \frac{1}{2}$, dus $rc_n = -2$.
$\left.\begin{array}{l} n: y = -2x + b \\ \text{door } P(6, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 6 + b = 5 \\ -12 + b = 5 \\ b = 17 \end{array}$
Dus $n: y = -2x + 17$.
n snijden met k geeft het punt B.
$\frac{1}{2}x = -2x + 17$
$x = -4x + 34$
$5x = 34$
$x = 6\frac{4}{5}$
$x = 6\frac{4}{5}$ geeft $y = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{4}{5} = 3\frac{2}{5}$, dus $B(6\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5})$.
$d(P, k) = d(P, B) = \sqrt{(6\frac{4}{5} - 6)^2 + (3\frac{2}{5} - 5)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + 2\frac{14}{25}} = \sqrt{3\frac{1}{5}} = 1{,}78...$
De lijn p door P loodrecht op l.
$rc_l = 1\frac{1}{3}$, dus $rc_p = -\frac{3}{4}$.
$\left.\begin{array}{l} p: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } P(6, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 6 + b = 5 \\ -4\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = 9\frac{1}{2} \end{array}$
Dus $p: y = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$.
p snijden met l geeft het punt C.
$1\frac{1}{3}x = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$
$16x = -9x + 114$
$25x = 114$
$x = 4\frac{14}{25}$
$x = 4\frac{14}{25}$ geeft $y = 1\frac{1}{3} \cdot 4\frac{14}{25} = 6\frac{2}{25}$, dus $C(4\frac{14}{25}, 6\frac{2}{25})$.
$d(P, l) = d(P, C) = \sqrt{(4\frac{14}{25} - 6)^2 + (6\frac{2}{25} - 5)^2} = \sqrt{2\frac{46}{625} + 1\frac{104}{625}} = \sqrt{3\frac{6}{25}} = 1\frac{4}{5} = 1{,}8$
$d(P, M) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
$d(P, c_1) = \sqrt{13} - 2 = 1{,}60...$
Dus $d(P, c_1)$ is de kortste.

d Substitutie van $y = 1\frac{1}{3}x$ in $x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$ geeft $x^2 + (1\frac{1}{3}x)^2 + 2x - 14 \cdot 1\frac{1}{3}x + 25 = 0$
$x^2 + 1\frac{7}{9}x^2 + 2x - 18\frac{2}{3}x + 25 = 0$
$2\frac{7}{9}x^2 - 16\frac{2}{3}x + 25 = 0$
$25x^2 - 150x + 225 = 0$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$
Dus l is raaklijn van c_2.

e $c_2: x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$
$x^2 + 2x + y^2 - 14y + 25 = 0$
$(x + 1)^2 - 1 + (y - 7)^2 - 49 + 25 = 0$
$(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$
Van c_2 is het middelpunt $N(-1, 7)$ en de straal $r_2 = 5$.
$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (7 - 2)^2} - 2 - 5 = 5\sqrt{2} - 7$

Bladzijde 86

64 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 10 = 0$
$(x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 10 = 0$
$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$
Dus $M(4, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.
Lijn l door M loodrecht op k.
$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 3x - y = c \\ \text{door } M(4, 2) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 4 - 2 = 10$
Dus l: $3x - y = 10$.
l snijden met k geeft het punt S.
$\begin{cases} x + 3y = -10 \\ 3x - y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x + 3y = -10 \\ 9x - 3y = 30 \end{cases}$ +
$10x = 20$
$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x + 3y = -10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + 3y = -10 \\ 3y = -12 \\ y = -4 \end{array}$
Dus $S(2, -4)$.
$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(2-4)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$d(k, c) = d(M, k) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

65 **a** $M(4, 4)$ en $r = 4$ geeft c_1: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$.
$N(1, 4)$ en $r = 1$ geeft c_2: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$.
b Stel $T(p, 2)$.
$MT = 4 + 2$ geeft $\sqrt{(p-4)^2 + (2-4)^2} = 6$
$(p-4)^2 + (2-4)^2 = 36$
$(p-4)^2 + 4 = 36$
$(p-4)^2 = 32$
$p - 4 = \sqrt{32} \vee p - 4 = -\sqrt{32}$
$p - 4 = 4\sqrt{2} \vee p - 4 = -4\sqrt{2}$
$p = 4 + 4\sqrt{2} \vee p = 4 - 4\sqrt{2}$
vold. niet
Dus $x_T = 4 + 4\sqrt{2}$.
c $d(c_2, c_3) = d(N, T) - 1 - 2 = \sqrt{(4 + 4\sqrt{2} - 1)^2 + (2-4)^2} - 3 = \sqrt{(3 + 4\sqrt{2})^2 + 4} - 3 \approx 5{,}885$

66 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
Dus $M(3, 1)$ en $r_1 = 1$.
$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$
$x^2 - 12x + y^2 - 4y + 36 = 0$
$(x-6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 36 = 0$
$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$
Dus $N(6, 2)$ en $r_2 = 2$.
$d(M, N) = \sqrt{(6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
Dus $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{10} - 1 - 2 = \sqrt{10} - 3$.

b l: $3x - 4y = 0$ oftewel l: $y = \frac{3}{4}x$
Substitutie van $y = \frac{3}{4}x$ in $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ geeft $x^2 + (\frac{3}{4}x)^2 - 6x - 2 \cdot \frac{3}{4}x + 9 = 0$

$$x^2 + \tfrac{9}{16}x^2 - 6x - 1\tfrac{1}{2}x + 9 = 0$$
$$1\tfrac{9}{16}x^2 - 7\tfrac{1}{2}x + 9 = 0$$
$$25x^2 - 120x + 144 = 0$$
$$D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$$

Dus l raakt c_1.
Substitutie van $y = \frac{3}{4}x$ in $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$ geeft $x^2 + (\frac{3}{4}x)^2 - 12x - 4 \cdot \frac{3}{4}x + 36 = 0$

$$x^2 + \tfrac{9}{16}x^2 - 12x - 3x + 36 = 0$$
$$1\tfrac{9}{16}x^2 - 15x + 36 = 0$$
$$25x^2 - 240x + 576 = 0$$
$$D = (-240)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 576 = 0$$

Dus l raakt c_2.

c Lijn n door P loodrecht op l heeft richtingscoëfficiënt $-1\frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} n\text{: } y = -1\tfrac{1}{3}x + b \\ \text{door } P(2, 5) \end{array}\right\} -1\tfrac{1}{3} \cdot 2 + b = 5$$
$$-2\tfrac{2}{3} + b = 5$$
$$b = 7\tfrac{2}{3}$$

Dus n: $y = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$.
n snijden met l geeft het punt T.
$\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$
$9x = -16x + 92$
$25x = 92$
$x = 3\frac{17}{25}$
$x = 3\frac{17}{25}$ geeft $y = \frac{3}{4} \cdot 3\frac{17}{25} = 2\frac{19}{25}$, dus $T(3\frac{17}{25}, 2\frac{19}{25})$.
$d(P, T) = \sqrt{(3\frac{17}{25} - 2)^2 + (2\frac{19}{25} - 5)^2} = \sqrt{2\frac{514}{625} + 5\frac{11}{625}} = \sqrt{7\frac{21}{25}} = 2\frac{4}{5}$
De straal van c_3 is gelijk aan $d(P, T) = 2\frac{4}{5}$.
Dus c_3: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 7\frac{21}{25}$.

Bladzijde 87

67 **a** $A(-8, -8)$ en $B(12, 2)$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2 - -8}{12 - -8} = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = \tfrac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(12, 2) \end{array}\right\} \tfrac{1}{2} \cdot 12 + b = 2$$
$$6 + b = 2$$
$$b = -4$$

Dus k: $y = \frac{1}{2}x - 4$.
l loodrecht op k geeft l: $y = -2x + b$.
l door $P(0, 6)$ geeft l: $y = -2x + 6$.
k snijden met l geeft $\frac{1}{2}x - 4 = -2x + 6$

$$2\tfrac{1}{2}x = 10$$
$$x = 4$$

$x = 4$ geeft $y = -2 \cdot 4 + 6 = -2$, dus $Q(4, -2)$.
$d(a, l) = d(A, Q) - r_a = \sqrt{(4 - -8)^2 + (-2 - -8)^2} - 11 = \sqrt{12^2 + 6^2} - 11 = \sqrt{180} - 11 = 6\sqrt{5} - 11$
$d(b, l) = d(B, Q) - r_b = \sqrt{(4 - 12)^2 + (-2 - 2)^2} - 7 = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} - 7 = \sqrt{80} - 7 = 4\sqrt{5} - 7$
$d(a, l) - d(b, l) = 6\sqrt{5} - 11 - (4\sqrt{5} - 7) = 2\sqrt{5} - 4$

b $d(A, C) = \sqrt{(0 - -8)^2 + (q - -8)^2} = \sqrt{8^2 + (q + 8)^2} = \sqrt{64 + q^2 + 16q + 64} = \sqrt{q^2 + 16q + 128}$
$r = d(A, C) - r_a = \sqrt{q^2 + 16q + 128} - 11$

c $d(B, C) = \sqrt{(0 - 12)^2 + (q - 2)^2} = \sqrt{144 + q^2 - 4q + 4} = \sqrt{q^2 - 4q + 148}$
$r = d(B, C) - r_b = \sqrt{q^2 - 4q + 148} - 7$
Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 + 16x + 128} - 11$ en $y_2 = \sqrt{x^2 - 4x + 148} - 7$.
De optie snijpunt geeft $x = 7$ en $y = 6$.
$q = 7$ en $r = 6$ geeft c: $x^2 + (y - 7)^2 = 36$.

68 **a** $c: x^2 + y^2 - 8x - 6y - 20 = 0$

$x^2 - 8x + y^2 - 6y - 20 = 0$

$(x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 - 20 = 0$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 45$

Dus $M(4, 3)$ en straal $r_c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$y = 0$ geeft $x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x+2)(x-10) = 0$

$x = -2 \vee x = 10$

Dus $A(10, 0)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \text{rc}_k = \dfrac{0-3}{10-4} = -\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} k: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(10, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 10 + b = 0 \\ b = 5 \end{array}$

Dus $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$.

$d: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 5 = 0$

$(x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 5 = 0$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$

Dus $N(3, -1)$ en straal $r_d = \sqrt{5}$.

Lijn m door N loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} m: y = 2x + b \\ \text{door } N(3, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = -1 \\ b = -7 \end{array}$

Dus $m: y = 2x - 7$.

m snijden met k geeft het punt Q.

$-\frac{1}{2}x + 5 = 2x - 7$

$-2\frac{1}{2}x = -12$

$x = 4\frac{4}{5}$

$x = 4\frac{4}{5}$ geeft $y = 2 \cdot 4\frac{4}{5} - 7 = 2\frac{3}{5}$, dus $Q(4\frac{4}{5}, 2\frac{3}{5})$.

$d(k, N) = d(Q, N) = \sqrt{(3 - 4\frac{4}{5})^2 + (-1 - 2\frac{3}{5})^2} = \sqrt{16\frac{1}{5}} = 1\frac{4}{5}\sqrt{5}$

$d(k, l) = d(k, N) - d(l, N) = 1\frac{4}{5}\sqrt{5} - \sqrt{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

b $d(c, d) = r_c - d(M, N) - r_d$

$d(M, N) = \sqrt{(3-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{17}$

Dus $d(c, d) = 3\sqrt{5} - \sqrt{17} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - \sqrt{17}$.

Diagnostische toets

Bladzijde 90

1 $\angle BDC = 180° - \angle ADB = 180° - 50° = 130°$

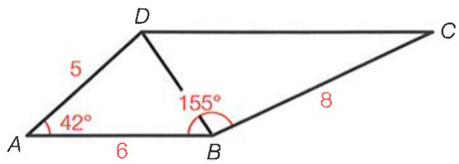
De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\dfrac{8}{\sin(\angle C)} = \dfrac{10}{\sin(130°)}$

$\sin(\angle C) = \dfrac{8 \sin(130°)}{10}$

De GR geeft 37,79...°.

Dus $\angle C \approx 37{,}8°$.

2 Zie de figuur hiernaast.



De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft
$BD^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(42°) = 16{,}41...$
$BD = 4{,}05...$
De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft
$5^2 = 6^2 + 16{,}41... - 2 \cdot 6 \cdot 4{,}05... \cdot \cos(\angle ABD)$
$48{,}61... \cdot \cos(\angle ABD) = 27{,}41...$
$\cos(\angle ABD) = 0{,}56...$
$\angle ABD = 55{,}67...°$
$\angle CBD = 155° - 55{,}67...° = 99{,}32...°$
De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $CD^2 = 8^2 + 16{,}41... - 2 \cdot 8 \cdot 4{,}05... \cdot \cos(99{,}32...°) = 90{,}91...$
$CD = 9{,}53...$
Dus $CD \approx 9{,}5$.

3 $\triangle ADS \sim \triangle CES$ geeft $\begin{array}{c|c} AD & AS \\ \hline CE & CS \end{array}$

Stel $CE = x$, dan is $AD = BC = x + 2$.

$\begin{array}{c|c} x+2 & 4 \\ \hline x & 2\frac{1}{2} \end{array}$ geeft $4x = 2\frac{1}{2}x + 5$
$1\frac{1}{2}x = 5$
$x = 3\frac{1}{3}$
Dus $CE = 3\frac{1}{3}$.

4 Stel $AB = x$, dan is $AC = 2\frac{1}{2}x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + BC^2 = AC^2$
$x^2 + BC^2 = (2\frac{1}{2}x)^2$
$x^2 + BC^2 = 6\frac{1}{4}x^2$
$BC^2 = 5\frac{1}{4}x^2$
$BC = x\sqrt{5\frac{1}{4}}$
$O(ABCD) = \sqrt{21}$ geeft $AB \cdot BC = \sqrt{21}$
$x \cdot x\sqrt{5\frac{1}{4}} = \sqrt{21}$
$x^2 = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{5\frac{1}{4}}} = \sqrt{4}$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$ (vold. niet)
Dus de straal is $AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

5 **a** $\text{rc}_{BC} = \dfrac{2-4}{5-4} = -2$
$\tan(\alpha) = -2$ geeft $\alpha = -63{,}43...°$
$\text{rc}_{CD} = \dfrac{4-3}{4-0} = \frac{1}{4}$
$\tan(\beta) = \frac{1}{4}$ geeft $\beta = 14{,}03...°$
De hoek tussen de lijn door B en C en de lijn door C en D is
$14{,}03...° - -63{,}43...° = 77{,}47...°$.
$\angle BCD$ is stomp, dus $\angle BCD = 180° - 77{,}47...° \approx 102{,}5°$.

Alternatieve uitwerking
$BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $CD = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ en $BD = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $26 = 5 + 17 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos(\angle BCD)$
$2\sqrt{85} \cdot \cos(\angle BCD) = -4$
$\cos(\angle BCD) = \dfrac{-4}{2\sqrt{85}}$
$\angle BCD \approx 102{,}5°$

b Stel BD: $y = ax + b$ met $a = \frac{2-3}{5-0} = -\frac{1}{5}$.

$\left.\begin{array}{l} BD: y = -\frac{1}{5}x + b \\ \text{door } D(0, 3) \end{array}\right\} BD: y = -\frac{1}{5}x + 3$

Lijn l door A loodrecht op BD.

$\left.\begin{array}{l} l: y = 5x + b \\ \text{door } A(2, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 2 + b = 0 \\ b = -10 \end{array}$

Dus l: $y = 5x - 10$.

l snijden met BD geeft het punt E.

$5x - 10 = -\frac{1}{5}x + 3$

$5\frac{1}{5}x = 13$

$x = 2\frac{1}{2}$

$x = 2\frac{1}{2}$ geeft $y = 5 \cdot 2\frac{1}{2} - 10 = 2\frac{1}{2}$, dus $E(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

$d(A, BD) = d(A, E) = \sqrt{(2\frac{1}{2} - 2)^2 + (2\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{6\frac{1}{2}} \approx 2{,}55$

Bladzijde 91

6 **a** c_1: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 4 = 0$

$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 4 = 0$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

Dus $M(-2, 3)$ en straal $r_1 = 3$.

$d(A, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$

$d(A, M) = r_1$, dus A ligt op c_1.

b $d(B, M) = \sqrt{(-2 - -5)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$d(B, M) > r_1$, dus B ligt buiten c_1.

c $r_2 = d(O, A) = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Dus c_2: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

d Het midden van AB is $N(\frac{1}{2}(1 + -5), \frac{1}{2}(3 + 5)) = N(-2, 4)$.

$r_3 = d(A, N) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

Dus c_3: $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$.

7 **a** Lijn m door M loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} m: x - 2y = c \\ \text{door } M(4, -3) \end{array}\right\} c = 4 - 2 \cdot -3 = 10$

Dus m: $x - 2y = 10$.

m snijden met k geeft het punt A.

$\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases}$ +

$5x = 30$

$\left.\begin{array}{l} x = 6 \\ x - 2y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6 - 2y = 10 \\ -2y = 4 \\ y = -2 \end{array}$

Dus $A(6, -2)$.

De straal r_1 van c_1 is $r_1 = d(M, A) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (-2 - -3)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

Dus c_1: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

b Substitutie van $y = -x + 3$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ geeft

$x^2 + (-x + 3)^2 - 4x + 6(-x + 3) + 4 = 0$

$x^2 + x^2 - 6x + 9 - 4x - 6x + 18 + 4 = 0$

$2x^2 - 16x + 31 = 0$

$D = (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 31 = 8$

$D > 0$, dus l raakt c_2 niet maar snijdt c_2 in twee punten.

8 **a** c: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

$x^2 - 8x + y^2 - 6y + 15 = 0$

$(x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + 15 = 0$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$

Het middelpunt van c is $M(4, 3)$.

Van de lijn n door A en M is $\text{rc}_n = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0-3}{5-4} = -3$.

$k \perp n$, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_n = -1$, dus $\text{rc}_k = \frac{1}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} k\colon y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(5, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 5 + b = 0 \\ b = -1\frac{2}{3} \end{array}$

Dus k: $y = \frac{1}{3}x - 1\frac{2}{3}$.

b Substitutie van $y = -3x + b$ in $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ geeft

$x^2 + (-3x + b)^2 - 8x - 6(-3x + b) + 15 = 0$

$x^2 + 9x^2 - 6bx + b^2 - 8x + 18x - 6b + 15 = 0$

$10x^2 - 6bx + 10x + b^2 - 6b + 15 = 0$

$10x^2 + (-6b + 10)x + b^2 - 6b + 15 = 0$

$D = (-6b + 10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 6b + 15)$

$= 36b^2 - 120b + 100 - 40b^2 + 240b - 600$

$= -4b^2 + 120b - 500$

$D = 0$ geeft $-4b^2 + 120b - 500 = 0$

$b^2 - 30b + 125 = 0$

$(b-5)(b-25) = 0$

$b = 5 \vee b = 25$

c Stel $y = ax + 1$.

Substitutie van $y = ax + 1$ in $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ geeft

$x^2 + (ax + 1)^2 - 8x - 6(ax + 1) + 15 = 0$

$x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1 - 8x - 6ax - 6 + 15 = 0$

$a^2x^2 + x^2 - 4ax - 8x + 10 = 0$

$(a^2 + 1)x^2 + (-4a - 8)x + 10 = 0$

$D = (-4a - 8)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 10$

$= 16a^2 + 64a + 64 - 40a^2 - 40$

$= -24a^2 + 64a + 24$

$D = 0$ geeft $-24a^2 + 64a + 24 = 0$

$3a^2 - 8a - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

$a = \dfrac{8 + 10}{6} = 3 \vee a = \dfrac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3}$

Dus m_1: $y = 3x + 1$ en m_2: $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

9 $f(x) = \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \dfrac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$\text{rc}_k = f'(4) = \dfrac{1}{\sqrt{8+1}} = \frac{1}{3}$

Lijn l door A en M staat loodrecht op k.

$l \perp k$, dus $\text{rc}_l \cdot \text{rc}_k = -1$, dus $\text{rc}_l = -3$.

$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -3x + b \\ f(4) = 3, \text{ dus } A(4, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 4 + b = 3 \\ -12 + b = 3 \\ b = 15 \end{array}$

Dus l: $y = -3x + 15$.

l snijden met de x-as geeft $-3x + 15 = 0$

$-3x = -15$

$x = 5$

Dus $M(5, 0)$.

De straal r van c is $d(A, M) = \sqrt{(5-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

Dus c: $(x-5)^2 + y^2 = 10$.

10 **a** $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

$x^2 - 8x + y^2 - 2y + 12 = 0$

$(x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 12 = 0$

$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$

Het middelpunt van c_1 is $M(4, 1)$ en de straal is $r_1 = \sqrt{5}$.

$d(A, M) = \sqrt{(4 - -1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$d(A, c_1) = d(A, M) - r_1 = \sqrt{26} - \sqrt{5}$.

b $c_2: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 27 = 0$

$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 27 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 27 = 0$

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 2$

Het middelpunt van c_2 is $N(2, 5)$ en de straal is $r_2 = \sqrt{2}$.

$d(M, N) = \sqrt{(2-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

c Lijn l door M loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} l: x - y = c \\ \text{door } M(4, 1) \end{array}\right\} c = 4 - 1 = 3$

Dus $l: x - y = 3$.

k snijden met l geeft het punt B.

$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ +

$2x = 4$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x + y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + y = 1 \\ y = -1 \end{array}$

Dus $B(2, -1)$.

$d(B, M) = \sqrt{(4-2)^2 + (1 - -1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$d(k, c_1) = d(B, c_1) = d(B, M) - r_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$