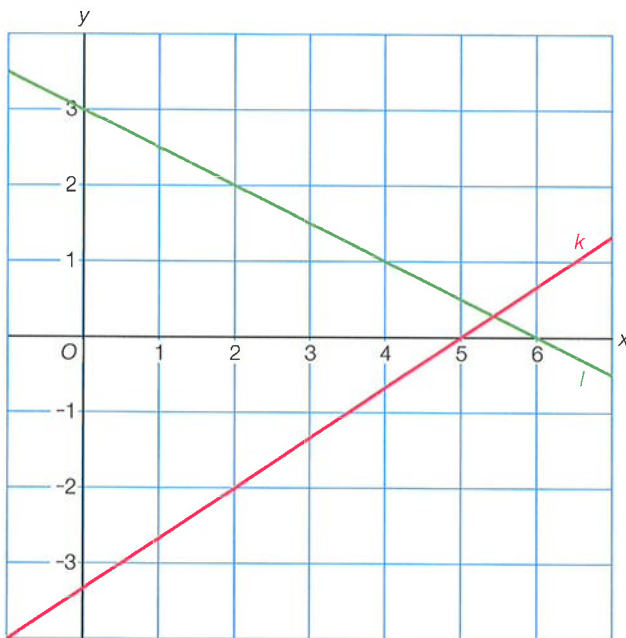


7 Lijnen en cirkels

Voorkennis Lijnen en stelsels

Bladzijde 96

- 1 a $A(2, p)$ op k , dus $2 \cdot 2 - 3 \cdot p = 10$
 $4 - 3p = 10$
 $-3p = 6$
 $p = -2$
- b $(q, -3)$ op l , dus $q + 2 \cdot -3 = 6$
 $q - 6 = 6$
 $q = 12$
- c $(x, y) = (r, 2r)$ is een oplossing, dus $2 \cdot r - 3 \cdot 2r = 10$
 $2r - 6r = 10$
 $-4r = 10$
 $r = -2\frac{1}{2}$
- d $k: 2x - 3y = 10$ geeft $\begin{array}{c|c|c} x & 5 & 2 \\ \hline y & 0 & -2 \end{array}$
- $l: x + 2y = 6$ geeft $\begin{array}{c|c|c} x & 6 & 0 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$



- e m evenwijdig met $k: 2x - 3y = 10$ geeft
 $\left. \begin{array}{l} m: 2x - 3y = c \\ \text{door } O(0, 0) \end{array} \right\} c = 0$
 Dus $m: 2x - 3y = 0$.
- f n evenwijdig met $l: x + 2y = 6$ geeft
 $\left. \begin{array}{l} n: x + 2y = c \\ \text{door } C(2, -3) \end{array} \right\} c = 2 + 2 \cdot -3 = -4$
 Dus $n: x + 2y = -4$.

2 a $x - 3y = 6$
 $-3y = -x + 6$
 $y = \frac{1}{3}x - 2$
 Dus $rc_k = \frac{1}{3}$.

b $2x + 5y = 20$
 $5y = -2x + 20$
 $y = -\frac{2}{5}x + 4$
 Dus $rc_l = -\frac{2}{5}$.

c $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1$
 $\frac{1}{3}y = -\frac{1}{2}x + 1$
 $y = -1\frac{1}{2}x + 3$
 Dus $rc_m = -1\frac{1}{2}$.

3 a $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 20x - 28y = 4 \\ 20x - 15y = 30 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 20x - 28y = 4 \\ \underline{20x - 15y = 30} \\ -13y = -26 \\ y = 2 \\ 5x - 7y = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5x - 7 \cdot 2 = 1 \\ 5x - 14 = 1 \\ 5x = 15 \\ x = 3 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (3, 2)$.

b $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases} +$

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 45 \\ \underline{10x - 9y = -5} \\ 16x = 40 \\ x = 2\frac{1}{2} \\ 2x + 3y = 15 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 2\frac{1}{2} + 3y = 15 \\ 5 + 3y = 15 \\ 3y = 10 \\ y = 3\frac{1}{3} \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3})$.

c $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x - 15y = 48 \\ 6x + 8y = 20 \end{cases} -$

$$\begin{array}{r} 6x - 15y = 48 \\ \underline{6x + 8y = 20} \\ -23y = 28 \\ y = -1\frac{5}{23} \\ 2x - 5y = 16 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x - 5 \cdot -1\frac{5}{23} = 16 \\ 2x + 6\frac{2}{23} = 16 \\ 2x = 9\frac{21}{23} \\ x = 4\frac{22}{23} \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (4\frac{22}{23}, -1\frac{5}{23})$.

4 a $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 4y = 11 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ x - 4y = 11 \end{cases} +$

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = 10 \\ \underline{x - 4y = 11} \\ 7x = 21 \\ x = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9 + 2y = 5 \\ 2y = -4 \\ y = -2 \end{array}$$

Dus $P(3, -2)$.

$$\text{b } \begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 12x - 15y = 18 \\ 12x - 8y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -7y &= 14 \\ y &= -2 \\ 4x - 5y &= 6 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} 4x + 10 &= 6 \\ 4x &= -4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Dus $Q(-1, -2)$.

7.1 Lijnen en hoeken

Bladzijde 97

- 1 a** $x - 2y = 4$
 $-2y = -x + 4$
 $y = \frac{1}{2}x - 2$
 Dus $rc_k = \frac{1}{2}$.
 $x - 2y = 5$
 $-2y = -x + 5$
 $y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$
 Dus $rc_l = \frac{1}{2}$.
 $rc_k = rc_l$, dus k en l zijn evenwijdig.
- b** De evenwijdige lijnen k en l hebben geen gemeenschappelijk punt, dus het stelsel $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ heeft geen oplossingen.

Bladzijde 98

- 2 a** Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{2}{4} = \frac{p}{3} \neq \frac{5}{q}$.
 Dit geeft, zie het voorbeeld, $p = 1\frac{1}{2}$ en $q \neq 10$.
- b** $p = 2$ en $q = 9$ geeft $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 4x + 4y = 10 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$
- $$\begin{aligned} y &= 1 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} 2x + 2 &= 5 \\ 2x &= 3 \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus het snijpunt is $(1\frac{1}{2}, 1)$.

- c** $\begin{cases} 2x + py = 5 \\ 4x + 3y = q \end{cases}$
 door $(3, 1)$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} 6 + p &= 5 \\ p &= -1 \\ q &= 12 + 3 = 15 \end{aligned}$
 Dus $p = -1$ en $q = 15$.

- 3 a** Samenvallen, dus $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1} = \frac{6}{q}$.
 $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1}$ geeft $p = -15$
 $\frac{-3}{1} = \frac{6}{q}$ geeft $q = \frac{1 \cdot 6}{-3} = -2$
- b** Een snijpunt, dus $\frac{p}{5} \neq \frac{-3}{1}$ geeft $p \neq -15$.
 Een snijpunt voor $p \neq -15$ en q mag elk getal zijn.
- c** Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1} \neq \frac{6}{q}$.
 $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1}$ geeft $p = -15$
 $\frac{-3}{1} \neq \frac{6}{q}$ geeft $q \neq -2$

$$\begin{aligned} \text{d } px - 3y = 6 & \left\{ \begin{array}{l} 2p - 3 \cdot 4 = 6 \\ 2p - 12 = 6 \\ 2p = 18 \\ p = 9 \end{array} \right. \\ 5x + y = q & \left\{ \begin{array}{l} q = 5 \cdot 2 + 4 = 14 \end{array} \right. \\ \text{door } (2, 4) & \end{aligned}$$

$$\text{4 a } y = ax + 4 \left\{ \begin{array}{l} a \cdot 1 + 4 = 6 \\ a = 2 \end{array} \right. \text{ door } (1, 6)$$

$$3x - 2y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -9 \end{array} \right. \text{ door } (1, 6)$$

$$\text{b } k: y = ax + 4 \\ -ax + y = 4$$

Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{-a}{3} = \frac{1}{-2} \neq \frac{4}{c}$.

$$\frac{-a}{3} = \frac{1}{-2} \text{ geeft } -a = \frac{1 \cdot 3}{-2} = -1\frac{1}{2}, \text{ dus } a = 1\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{4}{c} \text{ geeft } c \neq -8$$

$$\begin{aligned} \text{c } k: y = 2x + 4 \text{ snijden met } l: 3x - 2y = c & \text{ geeft } 3x - 2(2x + 4) = c \\ & 3x - 4x - 8 = c \\ & -x = c + 8 \\ & x = -c - 8 \\ & y = 2x + 4 \left\{ \begin{array}{l} y = 2(-c - 8) + 4 \\ y = -2c - 16 + 4 \\ y = -2c - 12 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Snijpunt boven de } x\text{-as geeft } y > 0 \\ -2c - 12 > 0 \\ -2c > 12 \\ c < -6 \end{aligned}$$

$$\text{5 a } q: y = 2x + b \\ -2x + y = b$$

$$\begin{aligned} \text{Een snijpunt, dus } \frac{a}{-2} & \neq \frac{-5}{1} \\ a & \neq 10 \end{aligned}$$

Een snijpunt voor $a \neq 10$ en b mag elk getal zijn.

$$\text{b } ax - 5y = 10 \left\{ \begin{array}{l} 3a - 5 \cdot 4 = 10 \\ 3a - 20 = 10 \\ 3a = 30 \\ a = 10 \end{array} \right. \text{ door } (3, 4)$$

$$\begin{aligned} y = 2x + b & \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = 4 \\ 6 + b = 4 \\ b = -2 \end{array} \right. \\ \text{door } (3, 4) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } p: 5x - 5y = 10 \text{ snijden met } q: y = 2x + b & \text{ geeft } 5x - 5(2x + b) = 10 \\ & 5x - 10x - 5b = 10 \\ & -5x = 5b + 10 \\ & x = -b - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Het snijpunt rechts van de lijn } x = 4 & \text{ geeft } -b - 2 > 4 \\ -b & > 6 \\ b & < -6 \end{aligned}$$

Bladzijde 99

6 Samenvallen, dus $\frac{a}{2} = \frac{8}{a} = \frac{12}{pa}$.

$$\frac{a}{2} = \frac{8}{a} \text{ geeft } a^2 = 16$$

$$a = 4 \vee a = -4$$

$$a = 4 \text{ geeft } \frac{4}{2} = \frac{12}{4p}$$

$$16p = 24$$

$$p = 1\frac{1}{2}$$

$$a = -4 \text{ geeft } \frac{-4}{2} = \frac{12}{-4p}$$

$$16p = 24$$

$$p = 1\frac{1}{2}$$

Dus $p = 1\frac{1}{2}$ en $a = 4 \vee a = -4$.

7 $k: y = \frac{1}{2}x + b$

$$2y = x + 2b$$

$$-x + 2y = 2b$$

$l: 2x + qy = b + 10$

Samenvallen, dus $\frac{-1}{2} = \frac{2}{q} = \frac{2b}{b+10}$.

$$\frac{-1}{2} = \frac{2}{q} \text{ geeft } -q = 4$$

$$q = -4$$

$$\frac{-1}{2} = \frac{2b}{b+10} \text{ geeft } 4b = -b - 10$$

$$5b = -10$$

$$b = -2$$

8 a $\tan(\angle CAB) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{1} = 2$

$$\angle CAB = 63,4349\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle CAB \approx 63,435^\circ.$$

b De tangens van de hoek tussen l en de x -as is $\frac{1}{4}$.

$$\text{Dit geeft dat de hoek gelijk is aan } 14,0362\dots^\circ.$$

c Dus de hoek tussen k en l is $63,4349\dots^\circ + 14,0362\dots^\circ \approx 77,5^\circ$.

Bladzijde 100

9 Als de eenheden langs de assen verschillend zijn, dan maakt bijvoorbeeld de lijn $y = x$ geen hoek van 45° met de x -as, maar is elke hoek mogelijk.

Bladzijde 101

10 a $k: y = 3x + 4$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 3 \text{ geeft } \alpha = 71,5\dots^\circ$$

$$l: y = 2x - 1$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_l = 2 \text{ geeft } \beta = 63,4\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 71,5\dots^\circ - 63,4\dots^\circ \approx 8^\circ$$

$$\text{De gevraagde hoek is } 8^\circ.$$

b $m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$

$$\tan(\alpha) = \text{rc}_m = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 56,3\dots^\circ$$

$$n: y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,5\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 56,3\dots^\circ - (-26,5\dots^\circ) \approx 83^\circ$$

$$\text{De gevraagde hoek is } 83^\circ.$$

c $p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = 3\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 74,0\dots^\circ$
 $q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_q = -1\frac{1}{4}$ geeft $\beta = -51,3\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 74,0\dots^\circ - (-51,3\dots^\circ) \approx 125^\circ$
 De gevraagde hoek is $180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

11 a $k: 3x - 2y = 5$
 $-2y = -3x + 5$
 $y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 56,30\dots^\circ$
 $l: 4x - 3y = 6$
 $-3y = -4x + 6$
 $y = 1\frac{1}{3}x - 2$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{3}$ geeft $\beta = 53,13\dots^\circ$
 $\alpha - \beta = 56,30\dots^\circ - 53,13\dots^\circ \approx 3,2^\circ$
 De gevraagde hoek is $3,2^\circ$.

b $m: 4x + y = 1$
 $y = -4x + 1$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_m = -4$ geeft $\alpha = -75,96\dots^\circ$
 $n: 3x + 4y = 2$
 $4y = -3x + 2$
 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_n = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,86\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = -36,86\dots^\circ - (-75,96\dots^\circ) \approx 39,1^\circ$
 De gevraagde hoek is $39,1^\circ$.

c $p: 5x + 3y = 4$
 $3y = -5x + 4$
 $y = -1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_p = -1\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -59,03\dots^\circ$
 $q: 6x - 5y = 1$
 $-5y = -6x + 1$
 $y = 1\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_q = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50,19\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19\dots^\circ - (-59,03\dots^\circ) \approx 109,2^\circ$
 De gevraagde hoek is $180^\circ - 109,2^\circ = 70,8^\circ$.

12 a $k: y = \frac{2}{3}x + 4$
 $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33,69\dots^\circ$
 $l: 6x - 5y = 3$
 $-5y = -6x + 3$
 $y = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$
 $\tan(\beta) = \text{rc}_l = 1\frac{1}{5}$ geeft $\beta = 50,19\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = 50,19\dots^\circ - 33,69\dots^\circ \approx 16,5^\circ$
 De gevraagde hoek is $16,5^\circ$.

b $\text{rc}_m = \frac{0-5}{4-0} = -1\frac{1}{4}$
 $\tan(\alpha) = -1\frac{1}{4}$ geeft $\alpha = -51,34\dots^\circ$
 $\text{rc}_n = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$
 $\tan(\beta) = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26,56\dots^\circ$
 $\beta - \alpha = -26,56\dots^\circ - (-51,34\dots^\circ) \approx 24,8^\circ$
 De gevraagde hoek is $24,8^\circ$.

$$c \quad rc_p = \frac{6-1}{5-2} = 1\frac{2}{3}$$

$$\tan(\alpha) = 1\frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = 59,03\dots^\circ$$

$$rc_q = \frac{-6-1}{2-3} = -1\frac{2}{5}$$

$$\tan(\beta) = -1\frac{2}{5} \text{ geeft } \beta = -54,46\dots^\circ$$

$$\alpha - \beta = 59,03\dots^\circ - (-54,46\dots^\circ) \approx 113,5^\circ$$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 113,5^\circ = 66,5^\circ$.

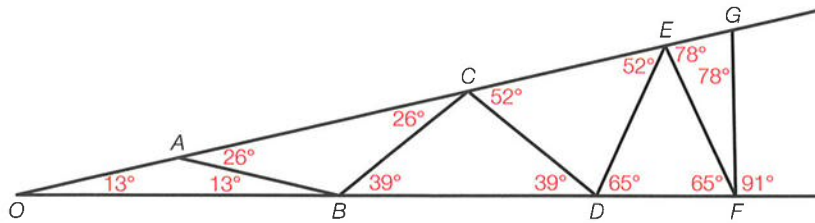
- 13 De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .

$$\tan(\alpha) = rc_k = 2 \text{ geeft } \alpha = 63,434\dots^\circ$$

$$\beta = \alpha + 20^\circ = 63,434\dots^\circ + 20^\circ = 83,434\dots^\circ \text{ en dit geeft } rc_l = \tan(83,434\dots^\circ) \approx 8,69.$$

$$\beta = \alpha - 20^\circ = 63,434\dots^\circ - 20^\circ = 43,434\dots^\circ \text{ en dit geeft } rc_l = \tan(43,434\dots^\circ) \approx 0,95.$$

- 14 De hoeken die de sprongen maken met de benen van de hoek zijn opeenvolgende veelvouden van 13° . Zie de figuur.



Youssef stopt bij de letter G .

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

Bladzijde 103

- 15 a In $\triangle ABC$ geeft de stelling van Pythagoras

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 2^2 + 3^2$$

$$AB^2 = 13$$

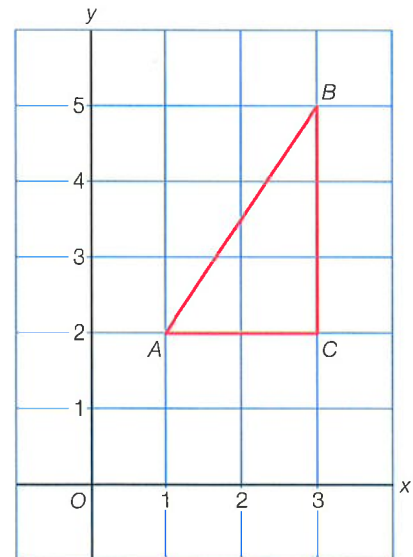
$$AB = \sqrt{13}$$

b $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$

$$M(2, 3\frac{1}{2})$$

c $x_N = \frac{1}{2}(83 + 89) = 86$ en $y_N = \frac{1}{2}(61 + 69) = 65$,

dus $N(86, 65)$.



Bladzijde 104

16 a $d(A, B) = \sqrt{(12-0)^2 + (7-12)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

b $M_1(\frac{1}{2}(0 + -2), \frac{1}{2}(-2 + 7)) = M_1(-1, 2\frac{1}{2})$

c $d(A, B) = \sqrt{(4-0)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$$d(A, M_2) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$$

d $M_3(\frac{1}{2}(0 + p), \frac{1}{2}(p + 7)) = M_3(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p + 3\frac{1}{2})$

e $d(A, B) = \sqrt{(p-0)^2 + (7-p)^2} = \sqrt{p^2 + 49 - 14p + p^2} = \sqrt{2p^2 - 14p + 49}$

17 a $M(\frac{1}{2}(p+p+2), \frac{1}{2}(3+2p)) = M(p+1, p+1\frac{1}{2})$

b $d(A, B) = \sqrt{(p+2-p)^2 + (2p-3)^2} = \sqrt{2^2 + 4p^2 - 12p + 9} = \sqrt{4p^2 - 12p + 13}$

c Voer in $y_1 = \sqrt{4x^2 - 12x + 13}$ en $y_2 = 5$.
De optie snijpunt geeft $x = 3,791\dots$
Dus $p \approx 3,79$.

18 a $x_M = 10$

$$\frac{1}{2}(3+p+5) = 10$$

$$\frac{1}{2}p + 4 = 10$$

$$\frac{1}{2}p = 6$$

$$p = 12$$

$$y_M = \frac{1}{2}(4+14) = 9$$

b $M(\frac{1}{2}(3+p+5), \frac{1}{2}(4+p+2))$

$$M(\frac{1}{2}p + 4, \frac{1}{2}p + 3) \left\{ \begin{array}{l} 2(\frac{1}{2}p + 4) - 3 = \frac{1}{2}p + 3 \\ p + 8 - 3 = \frac{1}{2}p + 3 \end{array} \right.$$

$$M \text{ op } k: y = 2x - 3$$

$$\frac{1}{2}p = -2$$

$$p = -4$$

c $d = \sqrt{(p+5-3)^2 + (p+2-4)^2} = \sqrt{(p+2)^2 + (p-2)^2} = \sqrt{p^2 + 4p + 4 + p^2 - 4p + 4} = \sqrt{2p^2 + 8}$
Dus $a = 2$ en $b = 8$.

19 a $k: 2x - y = 2$

$$-y = -2x + 2$$

$$y = 2x - 2$$

$$rc_k = 2$$

$$l: x + 2y = 3$$

$$2y = -x + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

$$rc_l = -\frac{1}{2}$$

b Er geldt $rc_k \cdot rc_l = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$, dus $k \perp l$.

Bladzijde 105

20 In de theorie gaat het over de breuken $-\frac{a}{b}$ en $\frac{b}{a}$, dus $b \neq 0$ en $a \neq 0$.

Als in de kernzin

- $b = 0$, dan is k een verticale lijn en l een horizontale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar;
- $a = 0$, dan is k een horizontale lijn en l een verticale lijn, dus staan k en l loodrecht op elkaar.

Dus in de kernzin zijn de voorwaarden $b \neq 0$ en $a \neq 0$ niet nodig.

21 a $k \perp l$, dus $k: 3x + 2y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14 \\ \text{door } A(4, 1) \end{array} \right.$

Dus $k: 3x + 2y = 14$.

b $m \perp n$, dus $m: 5x - 4y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 5 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 19 \\ \text{door } B(3, -1) \end{array} \right.$

Dus $m: 5x - 4y = 19$.

c $p \perp q$, dus $p: x + 2y = c \left\{ \begin{array}{l} c = -4 + 2 \cdot 3 = 2 \\ \text{door } C(-4, 3) \end{array} \right.$

$$x + 2y = 2$$

$$2y = -x + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Dus $p: y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Bladzijde 106

22 a $rc_k = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$\frac{1}{2} \cdot rc_l = -1$$

$$rc_l = -2$$

$$l: y = -2x + b \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 6 \\ -8 + b = 6 \end{array} \right.$$

$$b = 14$$

Dus $l: y = -2x + 14$.

b $rc_m = \frac{-6-4}{2-3} = \frac{-10}{-1} = 10$

$$n \perp m, \text{ dus } rc_m \cdot rc_n = -1$$

$$10 \cdot rc_n = -1$$

$$rc_n = -\frac{1}{10}$$

$$n: y = \frac{1}{10}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{10} \cdot 3 + b = 7 \\ \frac{1}{10} + b = 7 \end{array} \right.$$

$$b = 6\frac{9}{10}$$

$$y = \frac{1}{10}x + 6\frac{9}{10}$$

$$2y = x + 13\frac{8}{10}$$

$$-x + 2y = 13\frac{8}{10}$$

Dus $n: x - 2y = -13\frac{8}{10}$.

23 a $rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $rc_k \cdot -\frac{3}{5} = -1$

$$rc_k = \frac{5}{3}$$

$$k: y = \frac{5}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{3} \cdot 6 + b = 15 \\ 10 + b = 15 \end{array} \right.$$

$$b = 5$$

$$y = \frac{5}{3}x + 5$$

$$3y = 5x + 15$$

$$-5x + 3y = 15$$

Dus $k: 5x - 3y = -15$.

b $m \perp n$, dus $m: 7x + 6y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 7 \cdot 2 + 6 \cdot -2 = 2 \end{array} \right.$

Dus $m: 7x + 6y = 2$.

c $rc_{DE} = \frac{-1-5}{5-1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

$$p \perp DE, \text{ dus } rc_p = \frac{2}{3}$$

$$p: y = \frac{2}{3}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot -6 + b = 4 \\ -4 + b = 4 \end{array} \right.$$

$$b = 8$$

$$y = \frac{2}{3}x + 8$$

$$3y = 2x + 24$$

$$-2x + 3y = 24$$

Dus $p: 2x - 3y = -24$.

d $q \parallel r$, dus $rc_q = rc_r = \frac{2}{5}$.

$$q: y = \frac{2}{5}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5} \cdot -2 + b = 5 \\ -\frac{4}{5} + b = 5 \end{array} \right.$$

$$b = 5\frac{4}{5}$$

$$y = \frac{2}{5}x + 5\frac{4}{5}$$

$$5y = 2x + 29$$

$$-2x + 5y = 29$$

Dus $q: 2x - 5y = -29$.

$$\text{e } s // t, \text{ dus } s: 4x - 2y = c \left\{ \begin{array}{l} \text{door } G(1, -4) \end{array} \right\} c = 4 - 2 \cdot -4 = 12$$

Dus $s: 4x - 2y = 12$ oftewel $s: 2x - y = 6$.

$$24 \quad rc_k = \frac{5 - -3}{-2 - 5} = \frac{8}{3}$$

$l \perp k$, dus $rc_l = -\frac{3}{8}$.

$$l: y = -\frac{3}{8}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{8} \cdot -2 + b = 5 \\ \frac{3}{4} + b = 5 \end{array} \right.$$

$$b = 4\frac{1}{4}$$

$$l: y = -\frac{3}{8}x + 4\frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{8} \cdot 6 + 4\frac{1}{4} = 2 \\ -2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{4} = 2 \end{array} \right.$$

klopt

Dus l gaat door C .

$$25 \quad k: 3x + py = -7 \left\{ \begin{array}{l} 3 - 5p = -7 \\ -5p = -10 \\ p = 2 \end{array} \right.$$

Dus $k: 3x + 2y = -7$.

$$l \perp k, \text{ dus } l: 2x - 3y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 2 - 3 \cdot -5 = 17 \end{array} \right.$$

Dus $l: 2x - 3y = 17$.

$$26 \quad \text{a } rc_k = \frac{3p - 0}{0 - 2p} = \frac{3p}{-2p} = -\frac{3}{2}$$

$$rc_l = \frac{aq - 0}{0 - 3q} = \frac{aq}{-3q} = -\frac{a}{3}$$

$$k \perp l \text{ geeft } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$-\frac{3}{2} \cdot -\frac{a}{3} = -1$$

$$\frac{1}{2}a = -1$$

$$a = -2$$

$$\text{b } rc_k = rc_l \text{ geeft } -\frac{3}{2} = -\frac{1}{3}a$$

$$a = 4\frac{1}{2}$$

Geen punten gemeenschappelijk, dus $3q \neq 2p = 6$ oftewel $q \neq 2$.

$$\text{c } \tan(\alpha) = rc_k = -\frac{3}{2} \text{ geeft } \alpha = -56,30...^\circ$$

$$\beta = -56,30...^\circ + 45^\circ = -11,30...^\circ$$

$$rc_l = \tan(-11,30...^\circ) = -0,2 \left\{ \begin{array}{l} a = 0,6 \\ rc_l = -\frac{1}{3}a \end{array} \right.$$

$$-56,30...^\circ - 45^\circ = -101,30...^\circ \text{ geeft } \beta = -101,30...^\circ + 180^\circ = 78,69...^\circ$$

$$rc_l = \tan(78,69...^\circ) = 5 \left\{ \begin{array}{l} a = -15 \\ rc_l = -\frac{1}{3}a \end{array} \right.$$

Dus $a = 0,6$ of $a = -15$.

$$27 \quad \text{a } rc_k \cdot rc_l = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1, \text{ dus } l \perp k.$$

$$l: y = -2x + 5 \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + 5 = 3 \\ -2 + 5 = 3 \end{array} \right.$$

klopt

Dus l gaat door $A(1, 3)$.

$$\begin{aligned} \text{b} \quad \frac{1}{2}x &= -2x + 5 \\ 2\frac{1}{2}x &= 5 \\ x &= 2 \\ y &= \frac{1}{2}x \end{aligned} \Bigg\} y = 1$$

Dus $B(2, 1)$.

$$\text{c} \quad AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Dus de afstand van A tot k is $\sqrt{5}$.

Bladzijde 107

- 28 a** De lijn p gaat door A en staat loodrecht op k .
 $rc_k \cdot rc_p = -1$ geeft $\frac{1}{2} \cdot rc_p = -1$, dus $rc_p = -2$.

$$\begin{aligned} p: y &= -2x + b \\ \text{door } A(3, 0) \end{aligned} \Bigg\} \begin{aligned} -2 \cdot 3 + b &= 0 \\ -6 + b &= 0 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Dus $p: y = -2x + 6$.

k en p snijden geeft het punt C .

$$\frac{1}{2}x + 1 = -2x + 6$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= \frac{1}{2}x + 1 \end{aligned} \Bigg\} y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

Dus $C(2, 2)$.

$$d(A, k) = d(A, C) = \sqrt{(2-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

- b** De lijn q gaat door B en staat loodrecht op l .

$$\begin{aligned} q: x - 2y &= c \\ \text{door } B(6, 0) \end{aligned} \Bigg\} c = 6 - 2 \cdot 0 = 6$$

Dus $q: x - 2y = 6$.

l en q snijden geeft het punt D .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \Bigg\} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases} + \\ \begin{aligned} 5x &= 10 \\ x &= 2 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned} \Bigg\} \begin{aligned} 2 \cdot 2 + y &= 2 \\ 4 + y &= 2 \\ y &= -2 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $D(2, -2)$.

$$d(B, l) = d(B, D) = \sqrt{(2-6)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

- c** De lijn r gaat door O en staat loodrecht op m .

$$rc_m \cdot rc_r = -1 \text{ geeft } -3 \cdot rc_r = -1, \text{ dus } rc_r = \frac{1}{3}.$$

r door O geeft $r: y = \frac{1}{3}x$.

m en r snijden geeft het punt E .

$$\frac{1}{3}x = -3x + 10$$

$$3\frac{1}{3}x = 10$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= \frac{1}{3}x \end{aligned} \Bigg\} y = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Dus $E(3, 1)$.

$$d(O, m) = d(O, E) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Bladzijde 108

- 29** De lijn k door de punten $B(2, 1)$ en $C(7, 3)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{3-1}{7-2} = \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} k: y &= \frac{2}{5}x + b \\ \text{door } B(2, 1) \quad &\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot 2 + b &= 1 \\ \frac{4}{5} + b &= 1 \\ b &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k .

$rc_k \cdot rc_l = -1$ geeft $\frac{2}{5} \cdot rc_l = -1$, dus $rc_l = -\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} l: y &= -\frac{5}{2}x + b \\ \text{door } A(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \quad &\left\{ \begin{aligned} -\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} + b &= \frac{9}{2} \\ -8\frac{3}{4} + b &= 4\frac{1}{2} \\ b &= 13\frac{1}{4} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $l: y = -2\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{4}$.

k en l snijden geeft het punt D .

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} = -2\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{4}$$

$$8x + 4 = -50x + 265$$

$$58x = 261$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{9}{2} \\ y &= \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} y = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{2} + \frac{1}{5} = 2$$

Dus $D(4\frac{1}{2}, 2)$.

$$d(A, k) = d(A, D) = \sqrt{(4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (2 - 4\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1^2 + (-2\frac{1}{2})^2} \approx 2,69$$

- 30** De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k .

$$\begin{aligned} m: 3x - y &= c \\ \text{door } A(1, 4) \quad &\left\{ c = 3 \cdot 1 - 4 = -1 \right. \end{aligned}$$

Dus $m: 3x - y = -1$.

k en m snijden geeft het punt B .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \quad &\left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 9x - 3y = -3 \end{cases} + \\ &\quad \quad \quad 10x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x + 3y &= 3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} 3y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \right.$$

Dus $B(0, 1)$.

$$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(0-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

De lijn n gaat door A en staat loodrecht op l .

$$\begin{aligned} n: x - y &= c \\ \text{door } A(1, 4) \quad &\left\{ c = 1 - 4 = -3 \right. \end{aligned}$$

Dus $n: x - y = -3$.

l en n snijden geeft het punt C .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -3 \end{cases} + \\ 2x = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ x + y &= 9 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} 3 + y &= 9 \\ y &= 6 \end{aligned} \right.$$

Dus $C(3, 6)$.

$$d(A, l) = d(A, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Het punt A ligt dichterbij l dan bij k .

Dus Frans heeft niet gelijk.

- 31 a** De lijn k door $A(1, 0)$ en $B(7, 4)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{4-0}{7-1} = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} k: y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(1, 0) \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot 1 + b &= 0 \\ \frac{2}{3} + b &= 0 \\ b &= -\frac{2}{3} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}.$$

De lijn l gaat door C en staat loodrecht op k .

$$rc_k \cdot rc_l = -1 \text{ geeft } \frac{2}{3} \cdot rc_l = -1, rc_l = -\frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} l: y = -\frac{3}{2}x + b \\ \text{door } C(3\frac{1}{2}, 6) \left\{ \begin{aligned} -\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + b &= 6 \\ -\frac{21}{4} + b &= 6 \\ b &= 11\frac{1}{4} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } l: y = -1\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{4}.$$

k en l snijden geeft het punt D .

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = -1\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{4}$$

$$8x - 8 = -18x + 135$$

$$26x = 143$$

$$\begin{aligned} x = 5\frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned} \left\{ y = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{2} - \frac{2}{3} = 3 \right.$$

$$\text{Dus } D(5\frac{1}{2}, 3).$$

$$d(C, k) = d(C, D) = \sqrt{(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2})^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\text{b } d(A, B) = \sqrt{(7-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot d(A, B) \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$$

- 32** De lijnen k en l zijn evenwijdig, dus de afstand tussen k en l is gelijk aan de afstand van een punt van k tot l .

Neem het punt $A(1, 0)$ op k .

De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k .

$$\begin{aligned} m: 3x + y = c \\ \text{door } A(1, 0) \left\{ c = 3 + 0 = 3 \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } m: 3x + y = 3.$$

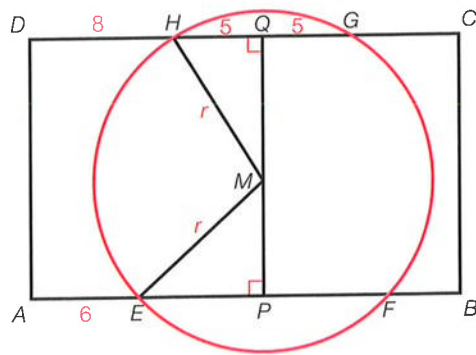
l en m snijden geeft het punt B .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} x - 3y = 6 \\ 9x + 3y = 9 \end{cases} + \\ \hline 10x = 15 \\ x = 1\frac{1}{2} \\ 3x + y = 3 \left\{ \begin{aligned} 3 \cdot 1\frac{1}{2} + y &= 3 \\ 4\frac{1}{2} + y &= 3 \\ y &= -1\frac{1}{2} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } B(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}).$$

$$d(k, l) = d(A, B) = \sqrt{(1\frac{1}{2} - 1)^2 + (-1\frac{1}{2} - 0)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

- 33 a** Teken het lijnstuk PQ door M loodrecht op AB .



Q is het midden van GH , dus $HQ = 5$.
 $APQD$ is een rechthoek, dus $AP = DQ$
 $6 + EP = 8 + 5$
 $EP = 7$
 P is het midden van EF , dus $EF = 14$.

- b** De stelling van Pythagoras in $\triangle EPM$ geeft $MP = \sqrt{r^2 - 49}$.
 De stelling van Pythagoras in $\triangle HQM$ geeft $MQ = \sqrt{r^2 - 25}$.
 $PQ = AD = 14,5$ geeft $\sqrt{r^2 - 49} + \sqrt{r^2 - 25} = 14,5$.
 Voer in $y_1 = \sqrt{x^2 - 49} + \sqrt{x^2 - 25}$ en $y_2 = 14,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 9,499\dots$
 Dus $r = 9,499\dots$ en $d(M, AB) = MP = \sqrt{9,499\dots^2 - 49} \approx 6,4$.

7.3 Cirkelvergelijkingen

Bladzijde 110

- 34 a** Dit volgt rechtstreeks uit de formule van de afstand tussen twee punten.
b Als de afstand van $P(x, y)$ tot $M(1, 4)$ gelijk is aan 5, dan ligt P op de cirkel met middelpunt M en straal 5.
c Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10 is $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10^2$, oftewel $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 100$.
d Middelpunt $(-2, 3)$ en straal $\sqrt{16} = 4$.

Bladzijde 111

- 35 a** $c_1: (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$
b $c_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ } $r^2 = (0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 9 + 16 = 25$
 door $O(0, 0)$
 Dus $c_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
c $c_3: (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = r^2$ } $r^2 = (-1 + 3)^2 + (2 - 5)^2 = 4 + 9 = 13$
 door $A(-1, 2)$
 Dus $c_3: (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 13$.
d c_4 raakt de x -as, dus $r = d(M_4, x\text{-as}) = 1$.
 $c_4: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$
e c_5 raakt de y -as, dus $r = d(M_5, y\text{-as}) = 4$.
 $c_5: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Bladzijde 112

- 36** De cirkels raken de x -as en de straal is 2, dus $y_M = -2$ of $y_M = 2$.
 M op k , dus $M_1(-6, -2)$ en $M_2(6, 2)$.
 $c_1: (x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 4$ en $c_2: (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 4$
37 De cirkels raken de y -as en de straal is 10, dus $x_M = -10$ of $x_M = 10$.
 M op k , dus $M_1(-10, 6)$ en $M_2(10, -6)$.
 $c_1: (x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 100$ en $c_2: (x - 10)^2 + (y + 6)^2 = 100$

- 38 a** Middelpunt A en c_1 raakt de x -as, dus $r = y_A = 7$.
 $c_1: (x-3)^2 + (y-7)^2 = 49$
- b** Middelpunt B en c_2 door A , dus de straal is
 $d(A, B) = \sqrt{(9-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$.
 $c_2: (x-9)^2 + (y-1)^2 = 72$
- c** Middellijn AB dus het middelpunt is het midden van AB , dus $M(6, 4)$.
 De straal is $d(A, M) = \sqrt{(6-3)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$.
 $c_3: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 18$
- d** De cirkels raken de y -as en de straal is 2, dus $x_M = -2$ of $x_M = 2$.
 $x_M = -2$ en M op k geeft $5 \cdot -2 + 2y_M = 12$
 $-10 + 2y_M = 12$
 $2y_M = 22$
 $y_M = 11$
 Dus $M_4(-2, 11)$ en $c_4: (x+2)^2 + (y-11)^2 = 4$.
 $x_M = 2$ en M op k geeft $5 \cdot 2 + 2y_M = 12$
 $10 + 2y_M = 12$
 $2y_M = 2$
 $y_M = 1$
 Dus $M_5(2, 1)$ en $c_5: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

- 39 a** Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k , dus $r = d(M, A)$.
- b** De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .
 $rc_k = \frac{1}{2}$, dus $rc_l = -2$.
 $l: y = -2x + b$
 door $M(3, 4)$ $\left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \\ b = 10 \end{array} \right.$
 Dus $l: y = -2x + 10$.
 Een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt, dus het snijpunt van k en l is het raakpunt A .
 k en l snijden geeft $\frac{1}{2}x = -2x + 10$
 $2\frac{1}{2}x = 10$
 $\left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = \frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = 2$
 Dus $A(4, 2)$.
- c** $r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
 Dus $c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

- 40 a** De lijn l gaat door $M_1(5, 3)$ en staat loodrecht op $k: y = x$.
 $rc_k = 1$, dus $rc_l = -1$.
 $l: y = -x + b$
 door $M_1(5, 3)$ $\left\{ \begin{array}{l} -5 + b = 3 \\ b = 8 \end{array} \right.$
 Dus $l: y = -x + 8$.
 k en l snijden geeft het punt A .
 $x = -x + 8$
 $2x = 8$
 $x = 4$
 $y = x$ $\left\{ \right. y = 4$
 Dus $A(4, 4)$.
 $r = d(M_1, l) = d(M_1, A) = \sqrt{(4-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 Dus $c_1: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 2$.

- b** De lijn n gaat door $M_2(-1, 3)$ en staat loodrecht op $m: y = -\frac{1}{2}x$.

$$rc_m = -\frac{1}{2}, \text{ dus } rc_n = 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} n: y = 2x + b \\ \text{door } M_2(-1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + b = 3 \\ -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

$$\text{Dus } n: y = 2x + 5.$$

m en n snijden geeft het punt B .

$$-\frac{1}{2}x = 2x + 5$$

$$-2\frac{1}{2}x = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = \frac{1}{2}x \end{array} \right\} y = 1$$

$$\text{Dus } B(-2, 1).$$

$$r = d(M_2, n) = d(M_2, B) = \sqrt{(-2 - -1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\text{Dus } c_2: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5.$$

Bladzijde 113

- 41 a** De lijn l gaat door M_1 en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: 3x - 2y = c \\ \text{door } M_1(8, 3) \end{array} \right\} c = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = 18$$

$$\text{Dus } l: 3x - 2y = 18.$$

k en l snijden geeft

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 18 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 24 \\ 9x - 6y = 54 \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} 13x & = & 78 \\ x & = & 6 \\ 2x + 3y = 12 & \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 6 + 3y = 12 \\ 12 + 3y = 12 \\ 3y = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Dus het snijpunt is $A(6, 0)$.

$$r = d(M_1, k) = d(M_1, A) = \sqrt{(6 - 8)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\text{Dus } c_1: (x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 13.$$

- b** De cirkels raken de x -as en straal = 8, dus $y_M = -8$ of $y_M = 8$.

$$y_M = -8 \text{ en } M \text{ op } k \text{ geeft } 2x_M + 3 \cdot -8 = 12$$

$$2x_M - 24 = 12$$

$$2x_M = 36$$

$$x_M = 18$$

$$\text{Dus } M_2(18, -8) \text{ en } c_2: (x - 18)^2 + (y + 8)^2 = 64.$$

$$y_M = 8 \text{ en } M \text{ op } k \text{ geeft } 2x_M + 3 \cdot 8 = 12$$

$$2x_M + 24 = 12$$

$$2x_M = -12$$

$$x_M = -6$$

$$\text{Dus } M_3(-6, 8) \text{ en } c_3: (x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 64.$$

- c** k snijden met de x -as geeft $A(6, 0)$.

k snijden met de y -as geeft $B(0, 4)$.

M_4 is het midden van AB , dus $M_4(3, 2)$.

$$r = d(A, M_4) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\text{Dus } c_4: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13.$$

- 42 a** k snijden met de x -as geeft $A(10, 0)$.
 k raakt c_1 , dus $MB \perp k$.
 $MB: 2x + y = c$
 door $M(-1, 2)$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} c = 2 \cdot -1 + 2 = 0$
 Dus $MB: 2x + y = 0$ oftewel $MB: y = -2x$.
 MB snijden met k geeft $x - 2 \cdot -2x = 10$
 $x + 4x = 10$
 $5x = 10$
 $x = 2$
 $y = -2x$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y = -4$

Dus $B(2, -4)$.

$$r_1 = d(M, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

$$r_2 = d(A, B) = \sqrt{(2 - 10)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

Dus $c_1: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 45$ en $c_2: (x - 10)^2 + y^2 = 80$.

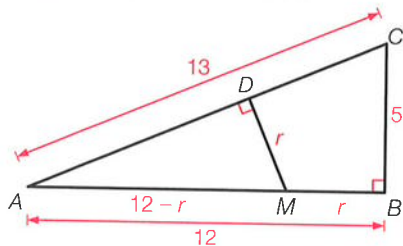
- b** Het midden van AM is $M_3(\frac{1}{2}(10 + (-1)), \frac{1}{2}(0 + 2)) = M_3(4\frac{1}{2}, 1)$.

$$r_3 = d(M_3, A) = \sqrt{(10 - 4\frac{1}{2})^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{30\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$$

$$d(M_3, B) = \sqrt{(2 - 4\frac{1}{2})^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + 25} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$$

Dus c_3 gaat door B .

- 43** De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
 c raakt AC , dus $MD \perp AC$.



$$\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle DAM \\ \angle B = \angle D (= 90^\circ) \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ADM$$

Hieruit volgt $\frac{BC}{DM} = \frac{AC}{AM}$ en dit geeft $\frac{5}{r} = \frac{13}{12 - r}$
 $13r = 5(12 - r)$
 $13r = 60 - 5r$
 $18r = 60$
 $r = 3\frac{1}{3}$

- 44** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
 $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$
 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Bladzijde 115

- 45 a** $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 10y - 6 = 0$
 $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 10y + 25 - 25 - 6 = 0$
 $(x - 2)^2 - 4 + (y + 5)^2 - 25 - 6 = 0$
 $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 35$
b $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 13 = 0$
 $x^2 + 8x + y^2 - 6y + 13 = 0$
 $x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 13 = 0$
 $(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + 13 = 0$
 $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 12$

c $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
 $x^2 + 3x + y^2 - y - 1 = 0$
 $x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0$
 $(x + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$
 $(x + 1\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 3\frac{1}{2}$

d $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0$
 $x^2 - 5x + y^2 + 5y + 10 = 0$
 $x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4} + y^2 + 5y + 6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4} + 10 = 0$
 $(x - 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + 10 = 0$
 $(x - 2\frac{1}{2})^2 + (y + 2\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{2}$

46 a $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 4 = 0$
 $x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 4 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 + 4 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
Dus van c_1 is het middelpunt $(-3, 2)$ en de straal 3.

b $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 + 10y + 31 = 0$
 $x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 10y + 25 - 25 + 31 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 + 31 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$
Dus van c_2 is het middelpunt $(4, -5)$ en de straal $\sqrt{10}$.

c $x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
 $x^2 + 5x + y^2 + 3y + 3 = 0$
 $x^2 + 5x + 6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4} + y^2 + 3y + 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} + 3 = 0$
 $(x + 2\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4} + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 3 = 0$
 $(x + 2\frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 = 5\frac{1}{2}$
Dus van c_3 is het middelpunt $(-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$ en de straal $\sqrt{5\frac{1}{2}}$.

d $x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$
 $x^2 - 7x + y^2 + 8y = 0$
 $x^2 - 7x + 12\frac{1}{4} - 12\frac{1}{4} + y^2 + 8y + 16 - 16 = 0$
 $(x - 3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} + (y + 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3\frac{1}{2})^2 + (y + 4)^2 = 28\frac{1}{4}$
Dus van c_4 is het middelpunt $(3\frac{1}{2}, -4)$ en de straal $\sqrt{28\frac{1}{4}}$.

47 a $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 15 = 0$
 $x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 + 15 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 15 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(-3, 4)$ en $r = \sqrt{10}$.

b $d(A, M) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$
A ligt binnen c want $d(A, M) < r$.

c $d(B, M) = \sqrt{(-3 - -3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4$
B ligt buiten c want $d(B, M) > r$.

d $d(C, M) = \sqrt{(-3 - -2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$
C ligt op c want $d(C, M) = r$.

48 a $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$
 $x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 = 0$
 $(x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = 0$
 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(3, 4)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$d(A, M) < r$, dus A ligt binnen de cirkel c_1 .

b $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$
 $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 2 = 0$
 $x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 2 = 0$
 $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 18$
Dus $r = \sqrt{18}$ en $M(4, 2)$.

$$d(O, M) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$d(O, M) > r$, dus O ligt buiten de cirkel c_2 .

c $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 3 = 0$
 $x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 3 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$

Dus $r = \sqrt{10}$ en $M(-2, 3)$.

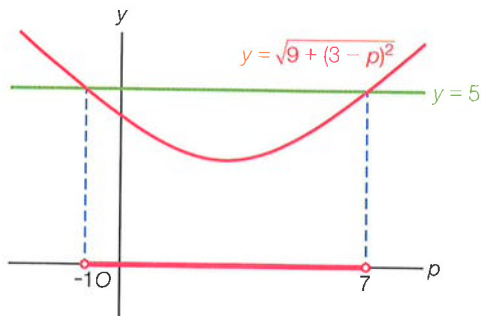
$$d(B, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$d(B, M) = r$, dus B ligt op de cirkel c_3 .

49 a $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$
 $x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 - 12 = 0$
 $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 12 = 0$
 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
Dus $r = 5$ en $M(-2, 3)$.

$$d(P, M) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - p)^2} = \sqrt{9 + (3 - p)^2}$$

$$\begin{aligned} d(P, M) = r \text{ geeft } \sqrt{9 + (3 - p)^2} &= 5 \\ \sqrt{9 + 9 - 6p + p^2} &= 5 \\ \sqrt{p^2 - 6p + 18} &= 5 \\ p^2 - 6p + 18 &= 25 \\ p^2 - 6p - 7 &= 0 \\ (p + 1)(p - 7) &= 0 \\ p &= -1 \vee p = 7 \end{aligned}$$



$d(P, M) < 5$ geeft $-1 < p < 7$

Dus voor $-1 < p < 7$ ligt P binnen c_1 .

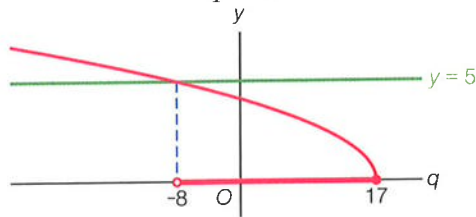
$$\begin{aligned}
 \text{b } x^2 + y^2 - 8x - 2y + q &= 0 \\
 x^2 - 8x + y^2 - 2y + q &= 0 \\
 x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 2y + 1 - 1 + q &= 0 \\
 (x-4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + q &= 0 \\
 (x-4)^2 + (y-1)^2 &= 17 - q \\
 \text{Dus } r &= \sqrt{17 - q} \text{ en } M(4, 1).
 \end{aligned}$$

$$d(Q, M) = \sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(Q, M) = r \text{ geeft } 5 = \sqrt{17 - q}$$

$$25 = 17 - q$$

$$q = -8$$



$d(Q, M) > r$ oftewel $5 > \sqrt{17 - q}$ geeft $-8 < q \leq 17$.
Dus voor $-8 < q \leq 17$ ligt Q buiten c_2 .

7.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

Bladzijde 117

- 50 a** $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$
 $x^2 - 10x + y^2 - 6y + 18 = 0$
 $(x-5)^2 - 25 + (y-3)^2 - 9 + 18 = 0$
 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$
Dus $M(5, 3)$ en $r = \sqrt{16} = 4$.
- b** $d(P, M) = \sqrt{(5-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
 $d(P, M) > r$, dus P ligt buiten c .
 $d(Q, M) = \sqrt{(5-6)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $d(Q, M) < r$, dus Q ligt binnen c .
- c** $5 < \sqrt{26}$, dus P ligt dichterbij het middelpunt M dan Q .
Dus $d(P, c) < d(Q, c)$.

Bladzijde 118

- 51 a** $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$
 $(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0$
 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$
Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.
 $d(A, M) = \sqrt{(3-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $d(A, c) = r - d(A, M) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$
- b** $d(B, M) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
 $d(B, c) = d(B, M) - r = \sqrt{13} - \sqrt{10}$
- c** $d(C, M) = \sqrt{(3-9)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 $d(C, c) = d(C, M) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

52 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
 $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$
 $(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 0$
 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$
 Dus $M(1, -2)$ en $r = \sqrt{5}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$d(A, c) = d(A, M) - r = \sqrt{13} - \sqrt{5}$$

De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k .

$$l: 6x - 4y = c \quad \left. \begin{array}{l} \text{door } A(4, 0) \end{array} \right\} c = 6 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 24$$

Dus $l: 6x - 4y = 24$ oftewel $l: 3x - 2y = 12$.

l snijden met k geeft het punt S .

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + 6y = 29 \end{cases} \begin{array}{l} |3| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 9x - 6y = 36 \\ 4x + 6y = 29 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{rcl} 13x & = & 65 \\ x & = & 5 \\ 4x + 6y = 29 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} & \begin{array}{l} 4 \cdot 5 + 6y = 29 \\ 20 + 6y = 29 \\ 6y = 9 \\ y = 1\frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

Dus $S(5, 1\frac{1}{2})$.

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(5-4)^2 + (1\frac{1}{2}-0)^2} = \sqrt{1+2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

Geldt $d(A, c) < d(A, k)$ oftewel $\sqrt{13} - \sqrt{5} < \frac{1}{2}\sqrt{13}$?

$$\sqrt{13} - \sqrt{5} < \frac{1}{2}\sqrt{13} \text{ geeft } \frac{1}{2}\sqrt{13} < \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{13}{4}} < \sqrt{5}$$

$$\sqrt{3\frac{1}{4}} < \sqrt{5}$$

Dit klopt, dus A ligt dichterbij c dan bij k .

53 a $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$
 $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$
 $(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$
 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$
 Dus $r = 3$ en $M(-2, 1)$.

b $l \perp k$, dus $l: x - 2y = c$
 door $M(-2, 1)$ $\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} c = -2 - 2 \cdot 1 = -4$

Dus $l: x - 2y = -4$.

l snijden met k geeft het punt A .

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \begin{array}{l} |1| \\ |2| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{rcl} 5x & = & 10 \\ x & = & 2 \\ 2x + y = 7 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} & \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + y = 7 \\ 4 + y = 7 \\ y = 3 \end{array} \end{array}$$

Dus $A(2, 3)$.

c $d(A, M) = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 Dus $d(k, c) = d(A, M) - r = 2\sqrt{5} - 3$.

$$\begin{aligned}
 54 \quad & x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0 \\
 & x^2 - 6x + y^2 + 4y - 3 = 0 \\
 & (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 3 = 0 \\
 & (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16
 \end{aligned}$$

Dus $r = 4$ en $M(3, -2)$.

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{aligned} l: 2x + y = c \\ \text{door } M(3, -2) \end{aligned} \right\} c = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

Dus $l: 2x + y = 4$.

k en l snijden geeft het punt A .

$$\left\{ \begin{aligned} x - 2y = -13 \\ 2x + y = 4 \end{aligned} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{aligned} x - 2y &= -13 \\ 4x + 2y &= 8 \end{aligned} \right. + \\
 \frac{5x}{5} = -5 + \\
 \left. \begin{aligned} x &= -1 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2 \cdot -1 + y &= 4 \\ -2 + y &= 4 \end{aligned} \\
 y &= 6$$

Dus $A(-1, 6)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$d(k, c) = d(A, c) = d(A, M) - r = 4\sqrt{5} - 4 = 4(\sqrt{5} - 1)$$

$$\begin{aligned}
 55 \quad & x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0 \\
 & x^2 + 8x + y^2 + 2y - 8 = 0 \\
 & (x+4)^2 - 16 + (y+1)^2 - 1 - 8 = 0 \\
 & (x+4)^2 + (y+1)^2 = 25
 \end{aligned}$$

Dus $r = 5$ en $M(-4, -1)$.

Van de lijn k door M loodrecht op l is $rc_k = \frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } M(-4, -1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot -4 + b &= -1 \\ -1\frac{1}{3} + b &= -1 \\ b &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

k en l snijden geeft het punt A .

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = -3x + 17$$

$$3\frac{1}{3}x = 16\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= -3x + 17 \end{aligned} \right\} y = -3 \cdot 5 + 17 = 2$$

Dus $A(5, 2)$.

$$d(A, M) = \sqrt{(-4 - 5)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$$

$$d(l, c) = d(A, c) = d(A, M) - r = \sqrt{90} - 5$$

Is $\sqrt{90} - 5 < 5$ oftewel $\sqrt{90} < 10$?

Ja, dit klopt, dus $d(l, c) < r$.

$$\begin{aligned}
 56 \quad & x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0 \\
 & x^2 + 8x + y^2 + 4y - 5 = 0 \\
 & (x+4)^2 - 16 + (y+2)^2 - 4 - 5 = 0 \\
 & (x+4)^2 + (y+2)^2 = 25
 \end{aligned}$$

Dus $r = 5$ en $M(-4, -2)$.

Stel de punten $P(p, p)$.

$$d(P, M) = \sqrt{(-4 - p)^2 + (-2 - p)^2} = \sqrt{16 + 8p + p^2 + 4 + 4p + p^2} = \sqrt{2p^2 + 12p + 20}$$

$$d(P, c) = d(P, M) - r = \sqrt{2p^2 + 12p + 20} - 5$$

$$d(P, c) = 5 \text{ geeft } \sqrt{2p^2 + 12p + 20} - 5 = 5$$

$$\sqrt{2p^2 + 12p + 20} = 10$$

$$2p^2 + 12p + 20 = 100$$

$$2p^2 + 12p - 80 = 0$$

$$p^2 + 6p - 40 = 0$$

$$(p-4)(p+10) = 0$$

$$p = 4 \vee p = -10$$

Dus de punten zijn $(4, 4)$ en $(-10, -10)$.

Bladzijde 119

$$\begin{aligned} \text{57 a } (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 10 \\ A(5, 2) \quad &\left\{ \begin{aligned} (5-2)^2 + (2-1)^2 &= 10 \\ 3^2 + 1^2 &= 10 \\ 10 &= 10 \end{aligned} \right. \\ &\text{klopt} \end{aligned}$$

Dus A op c .

$$\begin{aligned} \text{b } M(2, 1) \text{ en } A(5, 2), \text{ dus } rc_l &= \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}. \\ \text{c } k \text{ staat loodrecht op } l \text{ geeft } rc_k \cdot \frac{1}{3} &= -1, \text{ dus } rc_k = -3. \\ k: y &= -3x + b \\ \text{door } A(5, 2) \quad &\left\{ \begin{aligned} -3 \cdot 5 + b &= 2 \\ -15 + b &= 2 \\ b &= 17 \end{aligned} \right. \\ \text{Dus } k: y &= -3x + 17. \end{aligned}$$

Bladzijde 120

$$\begin{aligned} \text{58 a } y_B &= -1, \text{ dus } B(2, -1). \\ \text{Lijn } m \text{ door } M \text{ en } B \text{ heeft } rc_m &= \frac{-1-1}{2-3} = 2, \text{ dus } rc_l = -\frac{1}{2}. \\ l: y &= -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(2, -1) \quad &\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b &= -1 \\ -1 + b &= -1 \\ b &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x$.

$$\begin{aligned} \text{b } \text{De richtingshoek van } k \text{ is } \alpha. \\ \tan(\alpha) &= rc_k = \frac{1}{2} \text{ geeft } \alpha = 26,56\dots^\circ \\ \text{De richtingshoek van } l \text{ is } \beta. \\ \tan(\beta) &= rc_l = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,56\dots^\circ \\ \alpha - \beta &= 53,13\dots^\circ, \text{ dus de hoek tussen } k \text{ en } l \text{ is } 53,1^\circ. \\ \text{c } k: y &= \frac{1}{2}x + 2 \text{ snijden met } l: y = -\frac{1}{2}x \text{ geeft } \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}x \\ &\left\{ \begin{aligned} x &= -2 \\ y &= -\frac{1}{2}x \end{aligned} \right\} y = 1 \end{aligned}$$

Dus $S(-2, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{d } MS &= x_M - x_S = 3 - (-2) = 5 \text{ en } AM = \sqrt{5} \text{ geeft } \sin(\angle MSA) = \frac{AM}{MS} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ dus } \angle MSA = 26,56\dots^\circ. \\ \text{Op dezelfde manier is } \angle MSB &= 26,56\dots^\circ. \\ \text{De hoek tussen } k \text{ en } l \text{ is } \angle ASB &= 2 \cdot 26,56\dots^\circ \approx 53,1^\circ. \end{aligned}$$

Bladzijde 121

$$\begin{aligned} \text{59 a } x^2 + y^2 - 12x + 11 &= 0 \\ x &= 3 \quad \left\{ \begin{aligned} 3^2 + y^2 - 12 \cdot 3 + 11 &= 0 \\ 9 + y^2 - 36 + 11 &= 0 \\ y^2 &= 16 \\ y &= 4 \vee y = -4 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

 $y_A > y_B$, dus $A(3, 4)$ en $B(3, -4)$.

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 + 11 = 0$$

$$(x-6)^2 - 36 + y^2 + 11 = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 25$$

Dus c heeft middelpunt $M(6, 0)$.

$$\text{Lijn } m \text{ door } M \text{ en } A \text{ heeft } rc_m = \frac{0-4}{6-3} = -\frac{4}{3}, \text{ dus } rc_k = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} k: y &= \frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(3, 4) \quad &\left\{ \begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot 3 + b &= 4 \\ 2\frac{1}{4} + b &= 4 \\ b &= 1\frac{3}{4} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = \frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$.

Lijn n door M en B heeft $rc_n = \frac{0 - -4}{6 - 3} = \frac{4}{3}$, dus $rc_l = -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} l: y = -\frac{3}{4}x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } B(3, -4) \end{array} \right\} \begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b &= -4 \\ -2\frac{1}{4} + b &= -4 \\ b &= -1\frac{3}{4} \end{aligned} \end{aligned}$$

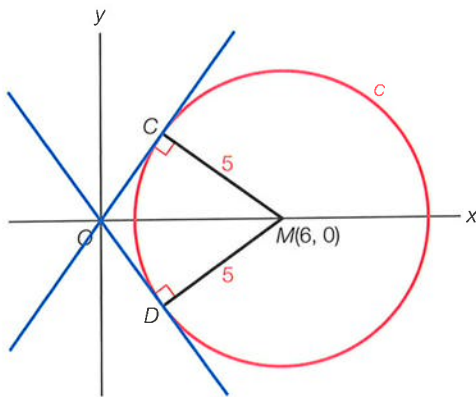
Dus $l: y = -\frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}$.

- b** De richtingshoek van k is α en de richtingshoek van l is β .
 $\tan(\alpha) = rc_k = \frac{3}{4}$ geeft $\alpha = 36,86...^\circ$

$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36,86...^\circ$

Dus de hoek tussen k en l is $36,86...^\circ - (-36,86...^\circ) \approx 74^\circ$.

- c** De raaklijnen door O raken de cirkel in de punten C en D .



In $\triangle OMC$ is $\angle C = 90^\circ$, $OM = 6$ en $MC = 5$.

$\sin(\angle MOC) = \frac{5}{6}$ geeft $\angle MOC = 56,44...^\circ$

$\angle COD = 2 \cdot \angle MOC = 2 \cdot 56,44...^\circ \approx 113^\circ$

De hoek tussen de raaklijnen door O is $180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$.

60 a $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$
 $x^2 + 6x + y^2 - 6y - 7 = 0$
 $(x + 3)^2 - 9 + (y - 3)^2 - 9 - 7 = 0$
 $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$
Dus c heeft middelpunt $M(-3, 3)$.
 $y = 0$ geeft $x^2 + 6x - 7 = 0$
 $(x - 1)(x + 7) = 0$
 $x = 1 \vee x = -7$

Dus $A(-7, 0)$ en $B(1, 0)$.

$rc_{MA} = \frac{3 - 0}{-3 - -7} = \frac{3}{4}$

$k \perp MA$, dus $rc_k = -\frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} y = -\frac{4}{3}x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } A(-7, 0) \end{array} \right\} \begin{aligned} -\frac{4}{3} \cdot -7 + b &= 0 \\ \frac{28}{3} + b &= 0 \\ b &= -9\frac{1}{3} \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $k: y = -1\frac{1}{3}x - 9\frac{1}{3}$.

$rc_{MB} = \frac{0 - 3}{1 - -3} = -\frac{3}{4}$

$l \perp MB$, dus $rc_l = \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} y = \frac{4}{3}x + b \quad & \left. \begin{array}{l} \text{door } B(1, 0) \end{array} \right\} \begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot 1 + b &= 0 \\ b &= -1\frac{1}{3} \end{aligned} \end{aligned}$$

Dus $l: y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

b $x = 0$ geeft $y^2 - 6y - 7 = 0$

$$(y+1)(y-7) = 0$$

$$y = -1 \vee y = 7$$

Dus $C(0, -1)$ en $D(0, 7)$.

$$rc_{MC} = \frac{-1-3}{0-3} = -\frac{4}{3}$$

$$p \perp MC, \text{ dus } rc_p = \frac{3}{4}.$$

$$p: y = \frac{3}{4}x + b \text{ door } C(0, -1), \text{ dus } p: y = \frac{3}{4}x - 1.$$

$$rc_{MD} = \frac{7-3}{0-3} = \frac{4}{3}$$

$$q \perp MD, \text{ dus } rc_q = -\frac{3}{4}.$$

$$q: y = -\frac{3}{4}x + b \text{ door } D(0, 7), \text{ dus } q: y = -\frac{3}{4}x + 7.$$

c $\tan(\alpha_k) = rc_k = -1\frac{1}{3}$ geeft $\alpha_k = -53,13\dots^\circ$

$$\tan(\alpha_l) = rc_l = 1\frac{1}{3} \text{ geeft } \alpha_l = 53,13\dots^\circ$$

$$\alpha_l - \alpha_k = 53,13\dots^\circ - (-53,13\dots^\circ) = 106,26\dots^\circ$$

De hoek tussen k en l is $180^\circ - 106,26\dots^\circ = 73,73\dots^\circ$.

$$\tan(\alpha_p) = rc_p = \frac{3}{4} \text{ geeft } \alpha_p = 36,86\dots^\circ$$

$$\tan(\alpha_q) = rc_q = -\frac{3}{4} \text{ geeft } \alpha_q = -36,86\dots^\circ$$

$$\alpha_p - \alpha_q = 36,86\dots^\circ - (-36,86\dots^\circ) = 73,73\dots^\circ$$

De hoek tussen p en q is $180^\circ - 106,26\dots^\circ = 73,73\dots^\circ$.

Dus de hoek tussen k en l is gelijk aan de hoek tussen p en q .

61 a $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 12 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 12 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 17$$

Dus van c is het middelpunt $M(2, -1)$

$$y = 0 \text{ geeft } x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 6$$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(6, 0)$.

$$rc_{MA} = \frac{0-1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$k \perp MA$, dus $rc_k = 4$ en dit geeft richtingshoek $\alpha = 75,9\dots^\circ$

$$rc_{MC} = \frac{3-1}{1-2} = -4$$

$m \perp MC$, dus $rc_m = \frac{1}{4}$ en dit geeft richtingshoek $\beta = 14,0\dots^\circ$

$$\alpha - \beta = 75,9\dots^\circ - 14,0\dots^\circ \approx 62^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is 62° .

b $rc_{MA} = -\frac{1}{4}$ geeft $\angle BAM = 14,0\dots^\circ$

$$\text{Ook } \angle ABM = 14,0\dots^\circ$$

$$\text{Dus } \angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot 14,0\dots^\circ \approx 152^\circ.$$

c $m: y = \frac{1}{4}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{3}{4} \end{array} \right.$

$$\text{Dus } m: y = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}.$$

$$rc_{MB} = \frac{0-1}{6-2} = -\frac{1}{4}$$

$$l \perp MB, \text{ dus } rc_l = 4.$$

$$l: y = -4x + b \left\{ \begin{array}{l} -4 \cdot 6 + b = 0 \\ -24 + b = 0 \end{array} \right.$$

$$b = 24$$

$$\text{Dus } l: y = -4x + 24.$$

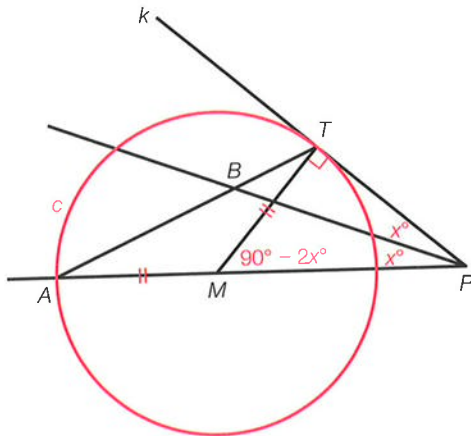
$$\begin{aligned}
 l \text{ en } m \text{ snijden geeft } -4x + 24 &= \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4} \\
 -4\frac{1}{4}x &= -21\frac{1}{4} \\
 x &= 5 \\
 y &= -4x + 24
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} -4x + 24 \\ -4\frac{1}{4}x \\ x \\ y \end{aligned}} \right\} y = -4 \cdot 5 + 24 = 4$$

Dus $D(5, 4)$.

$$d(D, M) = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$d(D, c) = d(D, M) - r = \sqrt{34} - \sqrt{17}$$

- 62** Stel $\angle APB = \angle BPT = x^\circ$.
 $k \perp MT$, dus $\angle PMT = 180^\circ - 90^\circ - 2x^\circ = 90^\circ - 2x^\circ$.



AMP is een gestrekte hoek, dus $\angle AMT = 180^\circ - (90^\circ - 2x^\circ) = 90^\circ + 2x^\circ$

$\triangle AMT$ is een gelijkbenige driehoek, dus

$$\angle ATM = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ + 2x^\circ)) = \frac{1}{2}(90^\circ - 2x^\circ) = 45^\circ - x^\circ$$

In $\triangle BPT$ is $\angle TBP = 180^\circ - \angle BPT - 90^\circ - \angle ATM = 90^\circ - x^\circ - (45^\circ - x^\circ) = 45^\circ$.

Dus $\angle TBP = 45^\circ$.

Bladzijde 122

63 a $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (x-1)^2 - 10x + 15 = 0 \\ x^2 + x^2 - 2x + 1 - 10x + 15 = 0 \\ 2x^2 - 12x + 16 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$

b $\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ (x-2)(x-4) &= 0 \\ x &= 2 \vee x = 4 \end{aligned}$
 De snijpunten zijn $A(2, 1)$ en $B(4, 3)$.

Bladzijde 124

64 a m loodrecht op $4x - y = q$ geeft $m: x + 4y = c$.

$$\left. \begin{aligned} x + 4y &= c \\ \text{door } M(5, 1) \end{aligned} \right\} c = 5 + 4 \cdot 1 = 9$$

Dus $m: x + 4y = 9$ oftewel $y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}$.

Substitutie van $y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}$ in $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 17$ geeft

$$(x-5)^2 + (-\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{4})^2 = 17$$

$$x^2 - 10x + 25 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{25}{16} = 17$$

$$1\frac{1}{16}x^2 - 10\frac{5}{8}x + 9\frac{9}{16} = 0$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 9$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = -\frac{1}{4} \cdot 1 + 2\frac{1}{4} = 2$$

$$x = 9 \text{ geeft } y = -\frac{1}{4} \cdot 9 + 2\frac{1}{4} = 0$$

Dus $A(1, 2)$ en $B(9, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{b } 4x - y = q & \left. \begin{array}{l} \text{door } A(1, 2) \\ 4x - y = q \end{array} \right\} q = 4 \cdot 1 - 2 = 2 \\ & \left. \begin{array}{l} \text{door } B(9, 0) \\ 4x - y = q \end{array} \right\} q = 4 \cdot 9 - 0 = 36 \end{aligned}$$

65 a Substitutie van $y = x + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$ geeft

$$x^2 + (x + 1)^2 - 10x - 2(x + 1) + 9 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x - 2x - 2 + 9 = 0$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 4$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = 1 + 1 = 2$$

$$x = 4 \text{ geeft } y = 4 + 1 = 5$$

De snijpunten zijn (1, 2) en (4, 5).

b Uit $2x - y = 1$ volgt $y = 2x - 1$.

Substitutie van $y = 2x - 1$ in $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ geeft

$$x^2 + (2x - 1)^2 - 8x - 4(2x - 1) + 10 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 8x - 8x + 4 + 10 = 0$$

$$5x^2 - 20x + 15 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 3$$

$$x = 1 \text{ geeft } y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

De snijpunten zijn (1, 1) en (3, 5).

66 a $2x - 3y + 4 = 0$ geeft $2x = 3y - 4$, oftewel $x = 1\frac{1}{2}y - 2$.

Substitutie van $x = 1\frac{1}{2}y - 2$ in $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$ geeft $(1\frac{1}{2}y - 2 - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$.

Voer in $y_1 = (1\frac{1}{2}x - 8)^2 + (x - 1)^2$ en $y_2 = 26$.

De optie snijpunt geeft $x = 2$ en $x = 6$.

Dus $y = 2$ en $y = 6$.

$$y = 2 \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = 1$$

$$y = 6 \text{ geeft } x = 1\frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 7$$

De snijpunten zijn (1, 2) en (7, 6).

b $3x + 4y = 19$ geeft $4y = -3x + 19$, oftewel $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$.

Substitutie van $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}$ in $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ geeft

$$x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12 = 0.$$

$$\text{Voer in } y_1 = x^2 + (-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{4}) - 12.$$

De optie nulpunt geeft $x = 5$.

$$x = 5 \text{ geeft } y = 1$$

Het gemeenschappelijke punt is (5, 1).

c Substitutie van $y = 2x$ in $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ geeft

$$(x - 3)^2 + (2x - 1)^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1 = 9$$

$$5x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$\text{Voer in } y_1 = 5x^2 - 10x + 1.$$

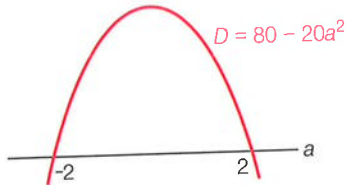
De optie nulpunt geeft $x = 0,105...$ en $x = 1,894...$

$x = 0,105$ geeft $y = 0,211...$ en $x = 1,894...$ geeft $y = 3,788...$

De snijpunten zijn (0,11; 0,21) en (1,89; 3,79).

- 67 a** Substitutie van $y = ax + 1$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$ geeft
- $$x^2 + (ax + 1)^2 - 10x - 2(ax + 1) + 6 = 0$$
- $$x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1 - 10x - 2ax - 2 + 6 = 0$$
- $$(a^2 + 1)x^2 - 10x + 5 = 0$$
- $$D = (-10)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 5 = 100 - 20 - 20a^2 = 80 - 20a^2$$
- $$D = 0 \text{ geeft } 20a^2 = 80$$
- $$a^2 = 4$$
- $$a = 2 \vee a = -2$$

- b** Geen gemeenschappelijke punten als $80 - 20a^2 < 0$.

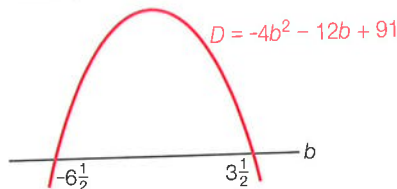


Dus $a < -2 \vee a > 2$.

- c** Twee snijpunten als $80 - 20a^2 > 0$.
Zie de figuur bij b.
Dus $-2 < a < 2$.

- 68 a** Substitutie van $y = \frac{1}{2}x + b$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$ geeft
- $$x^2 + (\frac{1}{2}x + b)^2 - 10x - 2(\frac{1}{2}x + b) + 6 = 0$$
- $$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2 - 10x - x - 2b + 6 = 0$$
- $$1\frac{1}{4}x^2 + (b - 11)x + b^2 - 2b + 6 = 0$$
- $$D = (b - 11)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot (b^2 - 2b + 6) = b^2 - 22b + 121 - 5b^2 + 10b - 30 = -4b^2 - 12b + 91$$
- $$D = 0 \text{ geeft } -4b^2 - 12b + 91 = 0$$
- $$D = (-12)^2 - 4 \cdot -4 \cdot 91 = 1600$$
- $$b = \frac{12 + 40}{-8} \vee b = \frac{12 - 40}{-8}$$
- $$b = -6\frac{1}{2} \vee b = 3\frac{1}{2}$$

- b** Geen gemeenschappelijke punten als $-4b^2 - 12b + 91 < 0$.



Dus $b < -6\frac{1}{2} \vee b > 3\frac{1}{2}$.

- c** Twee snijpunten als $-4b^2 - 12b + 91 > 0$.
Zie de figuur bij b.
Dus $-6\frac{1}{2} < b < 3\frac{1}{2}$.

- 69 a** Het midden M van het lijnstuk AB is $M(\frac{1}{2}(-1 + 7), \frac{1}{2}(3 + -1)) = M(3, 1)$.

$$r = d(A, M) = \sqrt{(3 - -1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \text{ en } M(3, 1) \text{ geeft}$$

$$c: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 20 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$$

Substitutie van $y = -2x + p$ in $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$ geeft

$$x^2 + (-2x + p)^2 - 6x - 2(-2x + p) - 10 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4px + p^2 - 6x + 4x - 2p - 10 = 0$$

$$5x^2 + (-4p - 2)x + p^2 - 2p - 10 = 0$$

$$D = (-4p - 2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (p^2 - 2p - 10) = 16p^2 + 16p + 4 - 20p^2 + 40p + 200 = -4p^2 + 56p + 204$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4p^2 + 56p + 204 = 0$$

$$p^2 - 14p - 51 = 0$$

$$(p + 3)(p - 17) = 0$$

$$p = -3 \vee p = 17$$

- b** Substitutie van $y = qx - 5\frac{1}{2}$ in $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$ geeft

$$x^2 + (qx - 5\frac{1}{2})^2 - 6x - 2(qx - 5\frac{1}{2}) - 10 = 0$$

$$x^2 + q^2x^2 - 11qx + 30\frac{1}{4} - 6x - 2qx + 11 - 10 = 0$$

$$(q^2 + 1)x^2 + (-13q - 6)x + 31\frac{1}{4} = 0$$

De lijn $y = qx - 5\frac{1}{2}$ heeft geen punten met c gemeenschappelijk als

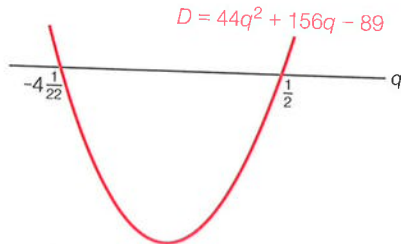
$$(q^2 + 1)x^2 + (-13q - 6)x + 31\frac{1}{4} = 0 \text{ geen oplossingen heeft.}$$

$$D = (-13q - 6)^2 - 4 \cdot (q^2 + 1) \cdot 31\frac{1}{4} = (13q + 6)^2 - 125(q^2 + 1)$$

$$\text{Voer in } y_1 = (13x + 6)^2 - 125(x^2 + 1).$$

De optie nulpunt geeft $x = -4,04\dots$ en $x = 0,5$.

$$-4,04\dots = -4\frac{1}{22} \text{ en } 0,5 = \frac{1}{2}$$



$$44q^2 + 156q - 89 < 0 \text{ geeft } -4\frac{1}{22} < q < \frac{1}{2}$$

Bladzijde 125

- 70 a** k door $A(0, 16)$, dus $k: y = ax + 16$.

Substitutie van $y = ax + 16$ in $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 80 = 0$ geeft

$$x^2 + (ax + 16)^2 - 12x - 16(ax + 16) + 80 = 0$$

$$x^2 + a^2x^2 + 32ax + 256 - 12x - 16ax - 256 + 80 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (16a - 12)x + 80 = 0$$

$$D = (16a - 12)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 80 = 256a^2 - 384a + 144 - 320a^2 - 320 = -64a^2 - 384a - 176$$

$$D = 0 \text{ geeft } -64a^2 - 384a - 176 = 0$$

$$4a^2 + 24a + 11 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 400$$

$$a = \frac{-24 \pm 20}{8} = -\frac{1}{2} \vee a = \frac{-24 - 20}{8} = -5\frac{1}{2}$$

Mogelijke raaklijnen zijn $y = -\frac{1}{2}x + 16$ en $y = -5\frac{1}{2}x + 16$.

Uit de figuur in het leerboek volgt $k: y = -\frac{1}{2}x + 16$.

- b** Het snijpunt van k en l is S .

$$\left. \begin{array}{l} MB = MC \\ \angle B = 90^\circ \\ \angle C = 90^\circ \\ k \perp l \end{array} \right\} \text{ vierhoek } MBSC \text{ is een vierkant.}$$

Dus $BS = CS = r$ en $BC = r\sqrt{2}$.

$$x^2 + y^2 - 12x - 16y + 80 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 16y + 80 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + (y - 8)^2 - 64 + 80 = 0$$

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 20$$

$$\text{Dus } r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$BC = r\sqrt{2} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned}
 71 \quad & x^2 + y^2 - 2x - 12y + 21 = 0 \\
 & x^2 - 2x + y^2 - 12y + 21 = 0 \\
 & (x-1)^2 - 1 + (y-6)^2 - 36 + 21 = 0 \\
 & (x-1)^2 + (y-6)^2 = 16
 \end{aligned}$$

Dus $M_1(1, 6)$ en $r_1 = 4$.

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 - 14x - 4y + 17 = 0 \\
 & x^2 - 14x + y^2 - 4y + 17 = 0 \\
 & (x-7)^2 - 49 + (y-2)^2 - 4 + 17 = 0 \\
 & (x-7)^2 + (y-2)^2 = 36
 \end{aligned}$$

Dus $M_2(7, 2)$ en $r_2 = 6$.

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(7-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\begin{aligned}
 M_1A^2 + M_2A^2 = r_1^2 + r_2^2 = 16 + 36 = 52 \\
 M_1M_2^2 = (\sqrt{52})^2 = 52
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M_1A^2 + M_2A^2 = r_1^2 + r_2^2 = 16 + 36 = 52 \\ M_1M_2^2 = (\sqrt{52})^2 = 52 \end{aligned}} \right\} M_1A^2 + M_2A^2 = M_1M_2^2$$

Dus uit de omgekeerde stelling van Pythagoras in $\triangle M_1M_2A$ volgt dat $\angle M_1AM_2 = 90^\circ$.

Diagnostische toets

Bladzijde 128

- 1 a $k: y = ax + 12$ oftewel $k: -ax + y = 12$ en $l: 4x + 5y = b$ hebben een snijpunt als geldt

$$\frac{-a}{4} \neq \frac{1}{5}$$

$$-5a \neq 4$$

$$a \neq -\frac{4}{5}$$

b mag elk getal zijn.

- b k en l vallen samen als geldt $\frac{-a}{4} = \frac{1}{5} = \frac{12}{b}$.

$$\frac{-a}{4} = \frac{1}{5} \text{ geeft } a = -\frac{4}{5} \text{ en } \frac{1}{5} = \frac{12}{b} \text{ geeft } b = 60.$$

- c $y = ax + 12$ } $2a + 8 = 12$
 door $(2, 8)$ } $2a = -4$
 $a = -2$

$$4x + 5y = b \text{ } \left. \vphantom{4x + 5y = b} \right\} b = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 48$$

Dus $a = -2$ en $b = 48$.

- 2 a $k: y = 4x + 2$

$$\tan(\alpha) = rc_k = 4 \text{ geeft } \alpha = 75,96...^\circ$$

$$l: y = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$\tan(\beta) = rc_l = -\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -26,56...^\circ$$

$$\alpha - \beta = 75,96...^\circ - (-26,56...^\circ) \approx 102,5^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is $180^\circ - 102,5 = 77,5^\circ$.

- b $rc_m = \frac{0 - (-2)}{3 - 0} = \frac{2}{3}$

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = 33,69...^\circ$$

$$rc_n = \frac{0 - 5}{2 - 0} = -2\frac{1}{2}$$

$$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2} \text{ geeft } \beta = -68,19...^\circ$$

$$\alpha - \beta = 33,69...^\circ - (-68,19...^\circ) \approx 101,9^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is $180^\circ - 101,9^\circ = 78,1^\circ$.

- c $p: 2x + 3y = 6$ geeft $3y = -2x + 6$
 $y = -\frac{2}{3}x + 2$

$$\tan(\alpha) = rc_p = -\frac{2}{3} \text{ geeft } \alpha = -33,69...^\circ$$

$$q: y = 8x - 6$$

$$\tan(\beta) = rc_q = 8 \text{ geeft } \beta = 82,87...^\circ$$

$$\beta - \alpha = 82,87...^\circ - (-33,69...^\circ) \approx 116,6^\circ$$

Dus de gevraagde hoek is $180^\circ - 116,6^\circ = 63,4^\circ$.

$$3 \quad a \quad d(A, B) = \sqrt{(3-2p)^2 + (p+1-0)^2} = \sqrt{9-12p+4p^2+p^2+2p+1} = \sqrt{5p^2-10p+10}$$

$$b \quad d(A, B) = 5 \text{ geeft } \begin{aligned} \sqrt{5p^2-10p+10} &= 5 \\ 5p^2-10p+10 &= 25 \\ 5p^2-10p-15 &= 0 \\ p^2-2p-3 &= 0 \\ (p+1)(p-3) &= 0 \\ p &= -1 \vee p = 3 \end{aligned}$$

$$c \quad \text{Het midden van het lijnstuk } AB \text{ is } M(\frac{1}{2}(2p+3), \frac{1}{2}(0+p+1)) = M(p+1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+\frac{1}{2}).$$

$$M \text{ op } x+y=6 \text{ geeft } p+1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}=6$$

$$1\frac{1}{2}p = 4$$

$$p = 2\frac{2}{3}$$

$$4 \quad a \quad k \text{ loodrecht op } l: 3x+2y=6 \text{ geeft } k: 2x-3y=c.$$

$$\left. \begin{aligned} 2x-3y &= c \\ \text{door } A(2, -4) \end{aligned} \right\} c = 2 \cdot 2 - 3 \cdot -4 = 16$$

$$\text{Dus } k: 2x-3y=16.$$

$$b \quad m \text{ loodrecht op } n: y = -\frac{1}{3}x + 5 \text{ geeft } rc_m = 3.$$

$$\left. \begin{aligned} m: y &= 3x+b \\ \text{door } B(2, 3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3 \cdot 2 + b &= 3 \\ 6 + b &= 3 \\ b &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } m: y = 3x - 3.$$

$$5 \quad a \quad \text{De lijn } l \text{ staat loodrecht op } k \text{ en gaat door } A(6, -1).$$

$$\left. \begin{aligned} l: x+2y &= c \\ \text{door } A(6, -1) \end{aligned} \right\} c = 6 + 2 \cdot -1 = 4$$

$$\text{Dus } l: x+2y=4.$$

k en l snijden geeft het punt S .

$$\left\{ \begin{aligned} 2x-y &= 3 \\ x+2y &= 4 \end{aligned} \right| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{aligned} 4x-2y &= 6 \\ x+2y &= 4 \end{aligned} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} 5x & & = 10 \\ x & = & 2 \\ \left. \begin{aligned} x+2y &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} 2+2y &= 4 \\ 2y &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \end{array}$$

$$\text{Dus } S(2, 1).$$

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(2-6)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$b \quad rc_m = \frac{1-5}{2-(-2)} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\left. \begin{aligned} m: y &= -x+b \\ \text{door } C(2, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2+b &= 1 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } m: y = -x + 3.$$

De lijn n staat loodrecht op m en gaat door $B(3, 5)$.

$$\text{Dus } rc_n = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} n: y &= x+b \\ \text{door } B(3, 5) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3+b &= 5 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } n: y = x + 2.$$

n en m snijden geeft het punt T .

$$x+2 = -x+3$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ y &= x+2 \end{aligned} \right\} y = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } T(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}).$$

$$d(B, m) = d(B, T) = \sqrt{(\frac{1}{2}-3)^2 + (2\frac{1}{2}-5)^2} = \sqrt{(-2\frac{1}{2})^2 + (-2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{6\frac{1}{4} + 6\frac{1}{4}} = \sqrt{12\frac{1}{2}}$$

- 6 a** De straal is gelijk aan $d(A, B)$, dus $r = \sqrt{(8-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$.
 Dus $c_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 61$.
- b** De cirkel heeft middelpunt B en raakt de y -as, dus $r = d(B, y\text{-as}) = 8$.
 Dus $c_2: (x-8)^2 + (y-2)^2 = 64$.
- c** Het middelpunt M_3 van c_3 is het midden van het lijnstuk AB , dus
 $M_3(\frac{1}{2}(2+8), \frac{1}{2}(-3+2)) = M_3(5, -\frac{1}{2})$.
 De straal van c_3 is de helft van $d(A, B)$, dus $r = \frac{1}{2}\sqrt{61}$. Dit geeft $r^2 = \frac{1}{4} \cdot 61 = 15\frac{1}{4}$.
 Dus $c_3: (x-5)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 15\frac{1}{4}$.
- d** De cirkel raakt de x -as in $C(5, 0)$, dus $x_{M_4} = 5$ en $M_4(5, r)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 6 \\ \text{door } M_4(5, r) \end{array} \right\} r = 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

 Dus $c_4: (x-5)^2 + (y-9)^2 = 81$.

Bladzijde 129

- 7** De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .
 $rc_k = 2$ en $l \perp k$, dus $rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } M(6, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 6 + b = -1 \\ -3 + b = -1 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

k snijden met l geeft het punt S .

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2x - 3 \end{array} \right\} y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

Dus $S(2, 1)$.

$$r = d(S, M) = \sqrt{(6-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Dus $c: (x-6)^2 + (y+1)^2 = 20$.

- 8 a** $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
 $x^2 - 6x + y^2 + 8y - 11 = 0$
 $(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 11 = 0$
 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$
 Dus het middelpunt is $(3, -4)$ en de straal is 6.
- b** $x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$
 $x^2 + 3x + y^2 - 7y = 0$
 $(x+1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + (y-3\frac{1}{2})^2 - 12\frac{1}{4} = 0$
 $(x+1\frac{1}{2})^2 + (y-3\frac{1}{2})^2 = 14\frac{1}{2}$
 Dus het middelpunt is $(-1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$ en de straal is $\sqrt{14\frac{1}{2}}$.

- 9** $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$
 $x^2 - 16x + y^2 + 8y - 1 = 0$
 $(x-8)^2 - 64 + (y+4)^2 - 16 - 1 = 0$
 $(x-8)^2 + (y+4)^2 = 81$
 Dus $M(8, -4)$ en $r = 9$.
 $d(A, M) = \sqrt{(8-3)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{25+0} = 5 < r$
 Dus A ligt binnen de cirkel.
 $d(B, M) = \sqrt{(8-2)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} > r$
 Dus B ligt buiten de cirkel.
 $d(C, M) = \sqrt{(8-8)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{0+81} = 9 = r$
 Dus C ligt op de cirkel.

10 a $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$
 $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 0$
 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$
 Dus $M(2, -1)$ en $r = \sqrt{5}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$d(A, c) = d(A, M) - r = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

b $d(B, M) = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$$d(B, c) = r - d(B, M) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

c De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$l \perp k, \text{ dus } l: x - 2y = c \left. \begin{array}{l} \text{door } M(2, -1) \end{array} \right\} c = 2 - 2 \cdot -1 = 4$$

$$\text{Dus } l: x - 2y = 4.$$

k en l snijden geeft het punt C .

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \begin{array}{l} |2| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 4x + 2y = 26 \\ x - 2y = 4 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 5x = 30 \\ x = 6 \\ 2x + y = 13 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 6 + y = 13 \\ y = 1 \end{array}$$

$$\text{Dus } C(6, 1).$$

$$d(C, M) = \sqrt{(2-6)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(k, c) = d(C, M) - r = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

11 a $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
 $x = 4$ $\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4^2 + y^2 - 4 \cdot 4 + 6y = 0 \\ 16 + y^2 - 16 + 6y = 0 \\ y^2 + 6y = 0 \\ y(y+6) = 0 \\ y = 0 \vee y = -6 \end{array}$

$$y_A > y_B, \text{ dus } A(4, 0) \text{ en } B(4, -6).$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$$

$$\text{Dus } M(2, -3).$$

$$rc_{MA} = \frac{0 - -3}{4 - 2} = \frac{3}{2}, \text{ dus } rc_k = -\frac{2}{3}.$$

$$k: y = -\frac{2}{3}x + b \left. \begin{array}{l} \text{door } A(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 4 + b = 0 \\ -2\frac{2}{3} + b = 0 \\ b = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}.$$

$$rc_{MB} = \frac{-6 - -3}{4 - 2} = -\frac{3}{2}, \text{ dus } rc_l = \frac{2}{3}.$$

$$l: y = \frac{2}{3}x + b \left. \begin{array}{l} \text{door } B(4, -6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 4 + b = -6 \\ 2\frac{2}{3} + b = -6 \\ b = -8\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Dus } l: y = \frac{2}{3}x - 8\frac{2}{3}.$$

b $\tan(\alpha) = rc_k = -\frac{2}{3}$ geeft $\alpha = -33,69...^\circ$

$$\tan(\beta) = rc_l = \frac{2}{3} \text{ geeft } \beta = 33,69...^\circ$$

$$\beta - \alpha = 33,69...^\circ - -33,69...^\circ \approx 67,4^\circ$$

Dus de hoek tussen k en l is $67,4^\circ$.

- 12 a** Substitutie van $y = -2x + 13$ in $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ geeft

$$x^2 + (-2x + 13)^2 - 4x - 8(-2x + 13) + 10 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 52x + 169 - 4x + 16x - 104 + 10 = 0$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$x = 3 \vee x = 5$$

$$x = 3 \text{ geeft } y = -2 \cdot 3 + 13 = 7$$

$$x = 5 \text{ geeft } y = -2 \cdot 5 + 13 = 3$$

Dus de snijpunten zijn (3, 7) en (5, 3).

- b** $l: x - y = 4$ oftewel $l: y = x - 4$
Substitutie van $y = x - 4$ in $x^2 + (y + 3)^2 = 5$ geeft $x^2 + (x - 4 + 3)^2 = 5$

$$x^2 + (x - 1)^2 = 5$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

$$x = -1 \text{ geeft } y = -1 - 4 = -5$$

$$x = 2 \text{ geeft } y = 2 - 4 = -2$$

Dus de snijpunten zijn (-1, -5) en (2, -2).

- 13 a** $c: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$
Substitutie van $y = ax - 1$ in $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ geeft

$$(x - 1)^2 + (ax - 1 - 2)^2 = 5$$

$$(x - 1)^2 + (ax - 3)^2 = 5$$

$$x^2 - 2x + 1 + a^2x^2 - 6ax + 9 - 5 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (-6a - 2)x + 5 = 0$$

$$D = (-6a - 2)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 5 = 36a^2 + 24a + 4 - 20a^2 - 20 = 16a^2 + 24a - 16$$

$$D = 0 \text{ geeft } 16a^2 + 24a - 16 = 0$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25$$

$$a = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{1}{2} \vee a = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

- b** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$
 $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 5$
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

Substitutie van $y = -2x + b$ in $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ geeft

$$x^2 + (-2x + b)^2 - 2x - 4(-2x + b) = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4bx + b^2 - 2x + 8x - 4b = 0$$

$$5x^2 + (-4b + 6)x + b^2 - 4b = 0$$

$$D = (-4b + 6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 4b) = 16b^2 - 48b + 36 - 20b^2 + 80b = -4b^2 + 32b + 36$$

$$D = 0 \text{ geeft } -4b^2 + 32b + 36 = 0$$

$$b^2 - 8b - 9 = 0$$

$$(b + 1)(b - 9) = 0$$

$$b = -1 \vee b = 9$$

Geen gemeenschappelijke punten als $D < 0$.

