

Gemengde opgaven

1 Formules, grafieken en vergelijkingen

Bladzijde 174

1 Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(1, -4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + b = -4 \\ -2 + b = -4 \\ b = -2 \end{array}$$

Dus $k: y = -2x - 2$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{1 - (-5)} = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } C(1, 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + b = 5 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $l: y = x + 4$.

k en l snijden geeft $-2x - 2 = x + 4$

$$\left. \begin{array}{l} -3x = 6 \\ x = -2 \\ y = x + 4 \end{array} \right\} y = -2 + 4 = 2$$

Dus het snijpunt is $S(-2, 2)$.

2 a $y = \frac{1}{2}x + a + 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 12 + a + 1 = -6 \\ 6 + a + 1 = -6 \\ a = -13 \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(12, -6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 12 + b = -6 \\ -18 + b = -6 \\ b = 12 \end{array}$$

Dus $a = -13$ en $b = 12$.

b l en m zijn evenwijdig geeft $rc_m = rc_l$

$$\begin{aligned} 3a &= -1\frac{1}{2} \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $m: y = -1\frac{1}{2}x - 6 \cdot (-\frac{1}{2})^2$ oftewel $m: y = -1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$.

De lijn m snijdt de y -as in het punt $(0, -1\frac{1}{2})$.

c $y = \frac{1}{2}x + a + 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + a + 1 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= -a - 1 \\ x &= -2a - 2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3ax - 6a^2 \\ y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3ax - 6a^2 = 0 \\ 3ax = 6a^2 \\ x = 2a \end{array} \quad a \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2a - 2 \\ x = 2a \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a - 2 = 2a \\ -4a = 2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{array}$$

3 a $3x - ay = b$ $\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 2 - a \cdot (-1) = b \\ a - b = -6 \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = b \\ \text{door } A(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + 3 \cdot (-1) = b \\ b = -1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} a - b = -6 \\ b = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a - (-1) = -6 \\ a = -7 \end{array}$$

Dus $a = -7$ en $b = -1$.

$$\text{b } \left. \begin{array}{l} 3x - ay = 4 \\ \text{door } B(0, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 0 - a \cdot 2 = 4 \\ -2a = 4 \\ a = -2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = b \\ \text{door } C(4, 0) \end{array} \right\} b = 4 + 3 \cdot 0 = 4$$

Dus $k: 3x + 2y = 4$ en $l: x + 3y = 4$.

k snijden met l geeft

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ x + 3y = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 3x + 9y = 12 \end{array} \right. -$$

$$\begin{array}{r} -7y = -8 \\ y = 1\frac{1}{7} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{7} \\ x + 3y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 3 \cdot 1\frac{1}{7} = 4 \\ x + 3\frac{3}{7} = 4 \\ x = \frac{4}{7} \end{array}$$

Dus $S(\frac{4}{7}, 1\frac{1}{7})$.

$$\text{c } \begin{array}{l} 3x - ay = b \\ -ay = -3x + b \\ y = \frac{3}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \end{array}$$

Dus $rc_k = \frac{3}{a}$.

$$x + 3y = b$$

$$3y = -x + b$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}b$$

Dus $rc_l = -\frac{1}{3}$.

k evenwijdig met l geeft $rc_k = rc_l$

$$\begin{array}{l} \frac{3}{a} = -\frac{1}{3} \\ a = -9 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 9y = b \\ x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9y = b \\ y = \frac{1}{9}b \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = b \\ x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3y = b \\ y = \frac{1}{3}b \end{array}$$

$$\text{Er geldt } \frac{1}{3}b - \frac{1}{9}b = 2 \vee \frac{1}{9}b - \frac{1}{3}b = 2$$

$$\frac{2}{9}b = 2 \vee -\frac{2}{9}b = 2$$

$$b = 9 \vee b = -9$$

Dus voor $a = -9$ en $b = 9$ en voor $a = -9$ en $b = -9$.

$$\text{4 a } \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 11 \\ 2x + 5y = 17 \end{array} \right| \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 25x + 10y = 55 \\ 4x + 10y = 34 \end{array} \right. -$$

$$\begin{array}{r} 21x = 21 \\ x = 1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ 5x + 2y = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 1 + 2y = 11 \\ 5 + 2y = 11 \\ 2y = 6 \\ y = 3 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (1, 3)$.

$$\text{b } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 4y = 38 \end{cases} \begin{array}{l} |4| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 8x - 4y = 28 \\ 3x + 4y = 38 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 11x = 66 \\ x = 6 \end{array} \begin{cases} 2 \cdot 6 - y = 7 \\ 12 - y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -y = -5 \\ y = 5 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (6, 5)$.

$$\text{c } \begin{cases} x = 3y - 10 \\ y = 3x - 10 \end{cases}$$

Substitueren van $y = 3x - 10$ in $x = 3y - 10$ geeft $x = 3(3x - 10) - 10$

$$x = 9x - 30 - 10$$

$$-8x = -40$$

$$x = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3x - 10 \end{array} \right\} y = 3 \cdot 5 - 10 = 5$$

De oplossing is $(x, y) = (5, 5)$.

$$\text{d } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y = 5 \end{cases} \begin{array}{l} |12| \\ |20| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 6x - 4y = -12 \\ 5x + 4y = 100 \end{cases} +$$

$$\begin{array}{r} 11x = 88 \\ x = 8 \end{array} \begin{cases} 5 \cdot 8 + 4y = 100 \\ 40 + 4y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4y = 60 \\ y = 15 \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (8, 15)$.

$$\text{5 a I } rc_I = \frac{5}{1} = 5$$

door $(0, 0)$, dus I: $y = 5x$.

$$\text{II } rc_{II} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } (1, 5) \end{array} \begin{cases} -3 \cdot 1 + b = 5 \\ -3 + b = 5 \end{cases}$$

$$b = 8$$

Dus II: $y = -3x + 8$.

$$\text{III } rc_{III} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } (2, 2) \end{array} \begin{cases} 2 \cdot 2 + b = 2 \\ 4 + b = 2 \end{cases}$$

$$b = -2$$

Dus III: $y = 2x - 2$.

$$\text{IV } rc_{IV} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$\begin{array}{l} y = -6x + b \\ \text{door } (5, 0) \end{array} \begin{cases} -6 \cdot 5 + b = 0 \\ -30 + b = 0 \end{cases}$$

$$b = 30$$

Dus IV: $y = -6x + 30$.

b $y = 5x$ snijden met $y = -6x + 30$ geeft $5x = -6x + 30$

$$11x = 30$$

$$x = 2\frac{8}{11}$$

$$\begin{array}{l} x = 2\frac{8}{11} \\ y = 5x \end{array} \left\} y = 5 \cdot 2\frac{8}{11} = 13\frac{7}{11}$$

Het snijpunt is $(2\frac{8}{11}, 13\frac{7}{11})$ en dit ligt onder de lijn $y = 14$.
Luuk heeft dus geen gelijk.

- 6** Stel x leerlingen lopen 5 km en y leerlingen lopen 3 km.

$$\text{Hieruit volgt het stelsel } \begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 3y = 126 \end{cases} \begin{array}{l} |3| \\ |1| \end{array} \text{ geeft } \begin{cases} 3x + 3y = 90 \\ 5x + 3y = 126 \\ \hline -2x = -36 \\ x = 18 \end{cases}$$

Er lopen dus 18 leerlingen de 5 km.

Bladzijde 175

- 7** De lijn k is evenwijdig met $l: x + 3y = 2$, dus stel $k: x + 3y = c$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = c \\ \text{door } A(4, 8) \end{array} \right\} c = 4 + 3 \cdot 8 = 28$$

Dus $k: x + 3y = 28$.

$$\text{Stel } m: y = ax + b \text{ met } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 8}{6 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(2, 8) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 8 \\ -1 + b = 8 \\ b = 9 \end{array}$$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}x + 9$.

$$y = -\frac{1}{2}x + 9 \text{ substitueren in } x + 3y = 28 \text{ geeft } x + 3(-\frac{1}{2}x + 9) = 28$$

$$x - 1\frac{1}{2}x + 27 = 28$$

$$-\frac{1}{2}x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{array} \right\} y = -\frac{1}{2} \cdot -2 + 9 = 10$$

Dus $S(-2, 10)$.

8 a $3(\frac{1}{2}x - 4)^2 - 10 = 20$

$$3(\frac{1}{2}x - 4)^2 = 30$$

$$(\frac{1}{2}x - 4)^2 = 10$$

$$\frac{1}{2}x - 4 = \sqrt{10} \vee \frac{1}{2}x - 4 = -\sqrt{10}$$

$$\frac{1}{2}x = 4 + \sqrt{10} \vee \frac{1}{2}x = 4 - \sqrt{10}$$

$$x = 8 + 2\sqrt{10} \vee x = 8 - 2\sqrt{10}$$

b $(2x + 3)^2 = 10x + 29$

$$4x^2 + 12x + 9 = 10x + 29$$

$$4x^2 + 2x - 20 = 0$$

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81, \text{ dus } \sqrt{D} = 9$$

$$x = \frac{-1 + 9}{4} = 2 \vee x = \frac{-1 - 9}{4} = -2\frac{1}{2}$$

c $(2x - 1)(x + 6) - 7 = (x + 4)(x - 1)$

$$2x^2 + 12x - x - 6 - 7 = x^2 - x + 4x - 4$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(x - 1)(x + 9) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -9$$

d $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 = 8x$

$$4x^2 - 4x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 = 8x$$

$$8x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

e $2x^2 + 5 = 9x$

$$2x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 41$$

$$x = \frac{9 + \sqrt{41}}{4} \vee x = \frac{9 - \sqrt{41}}{4}$$

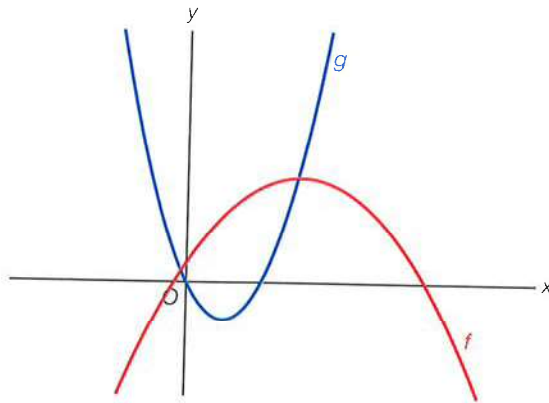
f $(x^2 - 8)(x^2 + 8) = (x^2 - 18)(x^2 - 2)$

$$x^4 - 64 = x^4 - 2x^2 - 18x^2 + 36$$

$$20x^2 = 100$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

9 a

- b** Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$.
De optie nulpunt geeft de nulpunten $-0,32$ en $6,32$.
- c** De optie maximum geeft de top $(3; 5,5)$.
 $g(3) = 6$, dus de top van de grafiek van f ligt niet op de grafiek van g .
- d** Voer in $y_2 = 2x^2 - 4x$ en $y_3 = 4$.
De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft de punten $B(1,267...; 4)$ en $D(4,732...; 4)$.
De optie snijpunt met y_2 en y_3 geeft de punten $A(-0,732...; 4)$ en $C(2,732...; 4)$.
 $AB = 1,267... - (-0,732...) = 2$
 $CD = 4,732... - 2,732... = 2$
Dus de lijnstukken AB en CD zijn even lang.
- e** De optie minimum bij y_2 geeft de top $(1, -2)$.
De top van de grafiek van h is dus $(1, -2 + c)$.
 $f(1) = 3,5$, dus $-2 + c = 3,5$
 $c = 5,5$
Dus $c = 5,5$.
- f** De top van de grafiek van g is $(1, -2)$, dus voer in $y_4 = -2$.
De optie snijpunt met y_1 en y_4 geeft de punten $E(-0,872...; -2)$ en $F(6,872...; -2)$.
 $EF = 6,872... - (-0,872...) \approx 7,75$

10

- a** Voer in $y_1 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 - 12x$.
De optie minimum geeft de toppen $(-3; 6,75)$ en $(2,65; -31,74)$.
De optie maximum geeft de top $(-1,56; 9,15)$.
- b** $a > -31,735...$, dus $a = -31, -30, -29, -28, ...$
Uitproberen geeft
 $a = -26$ geeft $x_A = 1,765...$ en $x_B = 3,209...$, dus $AB = 3,209... - 1,765... = 1,443... < 1,5$
 $a = -25$ geeft $x_A = 1,688...$ en $x_B = 3,259...$, dus $AB = 3,259... - 1,688... = 1,570... > 1,5$.
Dus a kan de waarden $-31, -30, -29, -28, -27$ of -26 aannemen.

11

- a** 30 km/uur oftewel $30 \text{ km}/60 \text{ minuten}$, dus $\frac{1}{2} \text{ km/minuut}$.
Dus voor Harm geldt de formule $s = \frac{1}{2}t$ met s de afgelegde afstand in km en t de tijd in minuten.
- b** Stel $s = at + b$ met $a = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$.

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{11}{20}t + b \\ t = 5 \text{ en } s = 0 \end{array} \right\} \frac{11}{20} \cdot 5 + b = 0$$

$$b = -2\frac{3}{4}$$
- Dus voor Marc geldt de formule $s = \frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4}$.

$$\frac{11}{20}t - 2\frac{3}{4} = \frac{1}{2}t$$

$$11t - 55 = 10t$$

$$t = 55$$
Dus om 8:55 uur wordt Harm door Marc ingehaald.

c Stel $s = at + b$ met $a = -\frac{42}{60} = -\frac{7}{10}$.

Op $t = 0$ is $s = 30$, dus $b = 30$ en voor Gerrit geldt de formule $s = -\frac{7}{10}t + 30$.

$$\frac{1}{2}t = -\frac{7}{10}t + 30$$

$$5t = -7t + 300$$

$$12t = 300$$

$$t = 25$$

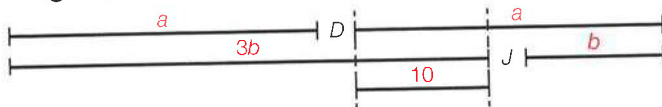
Dus om 8:25 uur komen Harm en Gerrit elkaar tegen.

Bladzijde 176

- 12 Stel dat er a lopers voor Dion bij de finish kwamen en dus ook a lopers erna.
Stel het aantal lopers dat na Jaap bij de finish kwam b , dan zijn er dus $3b$ voor Jaap bij de finish gekomen.

Tussen Dion en Jaap staan 10 andere deelnemers.

Dit geeft het volgende schema.



Hieruit volgt de vergelijking $2a + 1 = 4b + 1$ oftewel $2a = 4b$ en dus $a = 2b$.

Verder zie je dat $3b - 10 = a + 1$ oftewel $-a + 3b = 11$.

Hieruit volgt het stelsel
$$\begin{cases} a = 2b \\ -a + 3b = 11 \end{cases}$$

Substitueren van $a = 2b$ in $-a + 3b = 11$ geeft $-2b + 3b = 11$

$$\left. \begin{array}{l} b = 11 \\ a = 2b \end{array} \right\} a = 2 \cdot 11 = 22$$

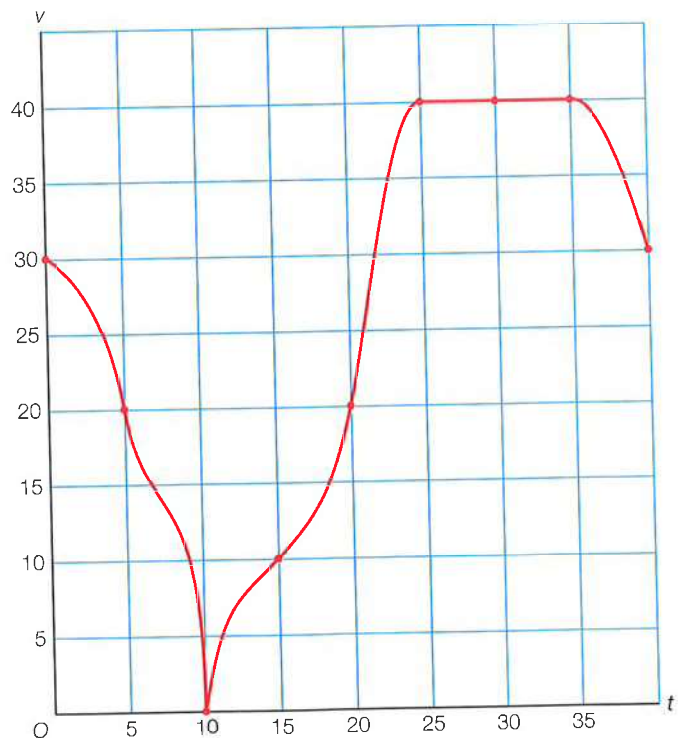
Het totale aantal lopers is $2a + 1 = 2 \cdot 22 + 1 = 45$.

2 Veranderingen

- 13 a Op $t = 10$ is $v = 0$ km/uur, dus op $t = 0$ is $v = 20 + 10 = 30$ km/uur.
Dus de snelheid waarmee hij aan de klim begon was 30 km/uur.

b

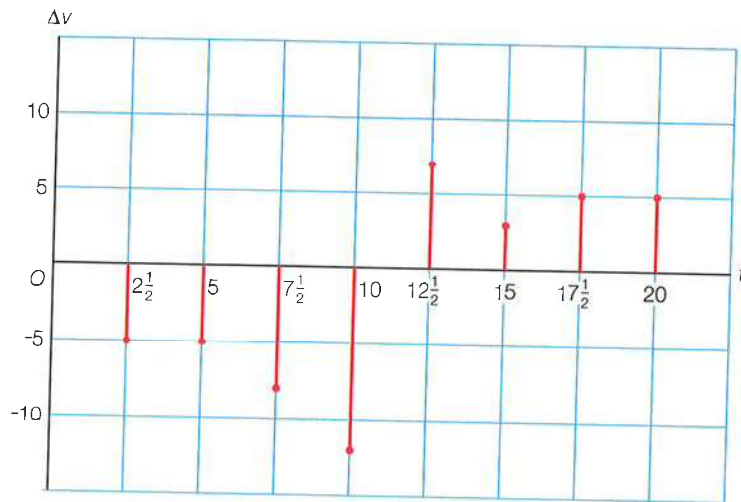
t	Δv	v
0	-	30
5	-10	20
10	-20	0
15	10	10
20	10	20
25	20	40
30	0	40
35	0	40
40	-10	30



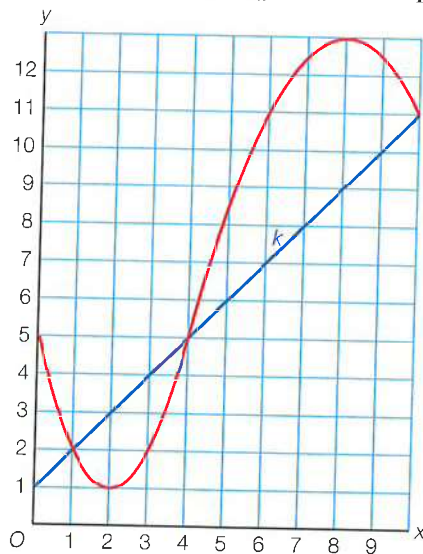
- c** Hij kan geen gelijk hebben. Uit het toenamediagram volgt dat zijn gemiddelde snelheid tijdens de afdaling 40 km/uur was, dus dan kan hij niet gedurende de hele afdaling sneller dan 40 km/uur hebben gereden. Tevens lag zijn snelheid aan het begin van de afdaling sowieso lager.
- d** Zie een mogelijk toenamediagram hieronder.

Merk op: bij $t = 2\frac{1}{2}$ is $\Delta v = -5$, bij $t = 5$ is $\Delta v = -5$, dat geeft samen $\Delta v = -10$;

bij $t = 7\frac{1}{2}$ is $\Delta v = -8$, bij $t = 10$ is $\Delta v = -12$, dat geeft samen $\Delta v = -20$; enzovoort.



- 14 a** Afnemend dalend op $\langle \leftarrow, 2 \rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 2, 4 \rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 4, 8 \rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 8, \rightarrow \rangle$.
- b** Teken de lijn k met $rc_k = 1$ door het punt $(10, 11)$ van de grafiek.



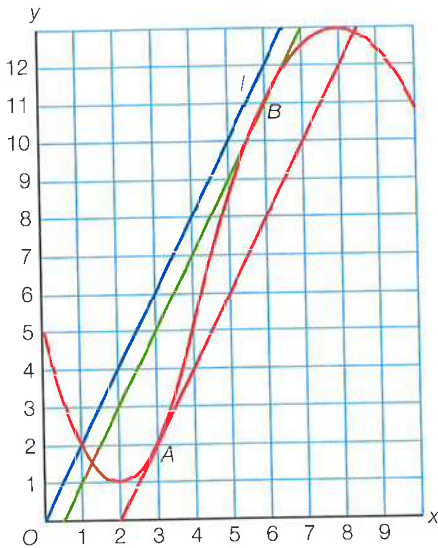
k snijdt de grafiek links van $(10, 11)$ in de punten $(1, 2)$ en $(4, 5)$.

Dus op $[1, 10]$ en op $[4, 10]$ is de gemiddelde verandering gelijk aan 1.

- c** De intervallen $[0, 4]$, $[1, 3]$ en $[6, 10]$ zijn de intervallen waarvan de grenzen gehele getallen zijn en waarop het differentiequotiënt gelijk is aan 0.
Dus $[1, 3]$ is het gevraagde interval.

- d Teken een lijn met richtingscoëfficiënt 2, bijvoorbeeld lijn l met $rc_l = 2$ door O in de figuur hieronder.

Teken lijnen evenwijdig met l die de grafiek raken.



In de raakpunten $A(3, 2)$ en $B(6, 11)$ is de helling van de grafiek gelijk aan 2.

- e Er zijn geen lijnen met richtingscoëfficiënt -7 die de grafiek raken,
Dus er ligt geen punt op de grafiek waarin de helling van de grafiek gelijk is aan -7 .

Bladzijde 177

15 Op $[0, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16a + 4b + c - (0 + 0 + c)}{4} = \frac{16a + 4b}{4}$.

Dus $\frac{16a + 4b}{4} = 2$ oftewel $16a + 4b = 8$, dus $4a + b = 2$.

Op $[2, 3]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9a + 3b + c - (4a + 2b + c)}{1} = \frac{5a + b}{1} = 5a + b$.

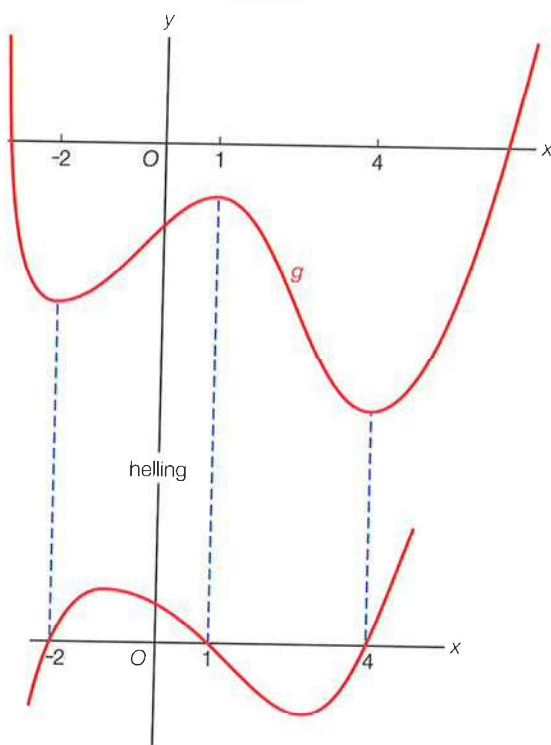
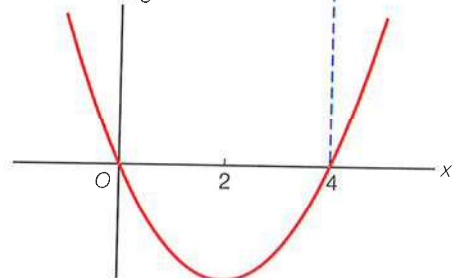
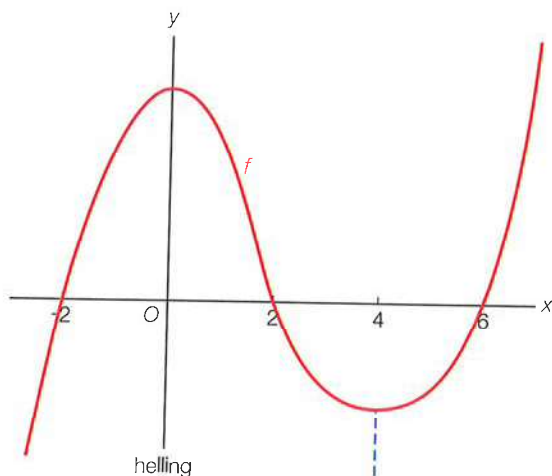
Dus $5a + b = 4$.

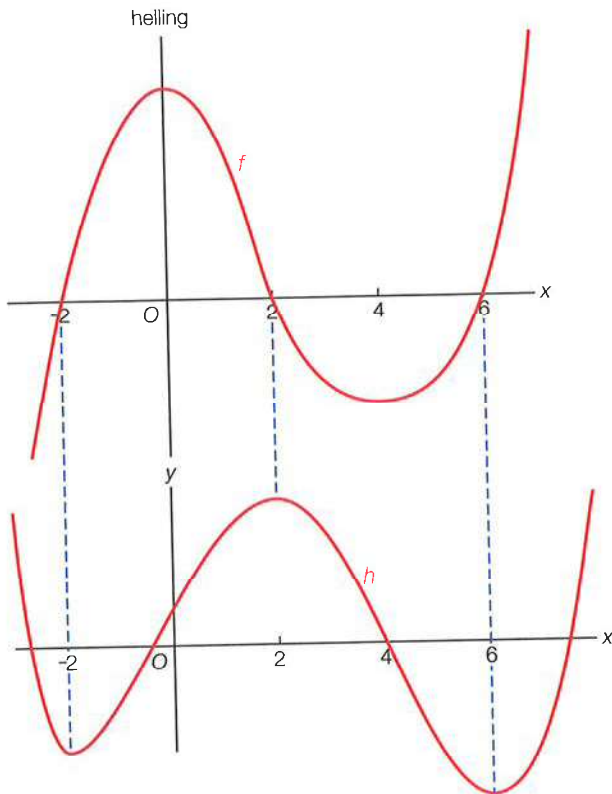
$$\begin{cases} 5a + b = 4 \\ 4a + b = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a = 2 \\ 5a + b = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \cdot 2 + b = 4 \\ 10 + b = 4 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus $f(x) = 2x^2 - 6x + c$.

Op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{50 - 30 + c - (2 - 6 + c)}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

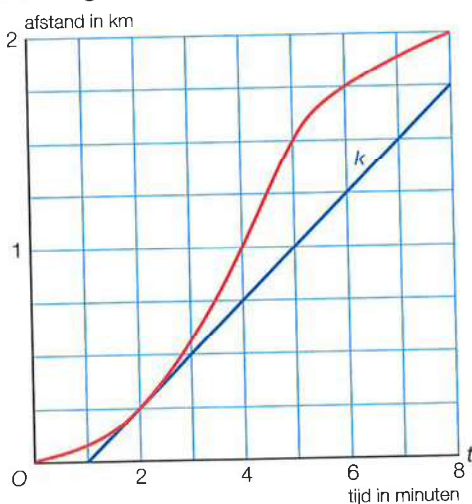
16 a



b**17**

a $\frac{2}{8} = 0,25$ km/minuut, dat is $60 \cdot 0,25 = 15$ km/uur.

Dus de gevraagde gemiddelde snelheid is 15 km/uur.

b

Raaklijn k door $(1, 0)$ en $(5, 1)$, dus $rc_k = \frac{1-0}{5-1} = 0,25$.

De snelheid op $t = 2$ is 0,25 km/minuut oftewel 15 km/uur.

c Tussen $t = 4$ en $t = 5$ is de helling van de grafiek het grootst, waarbij de grafiek tussen $t = 4$ en $t = 5$ constant stijgend is.

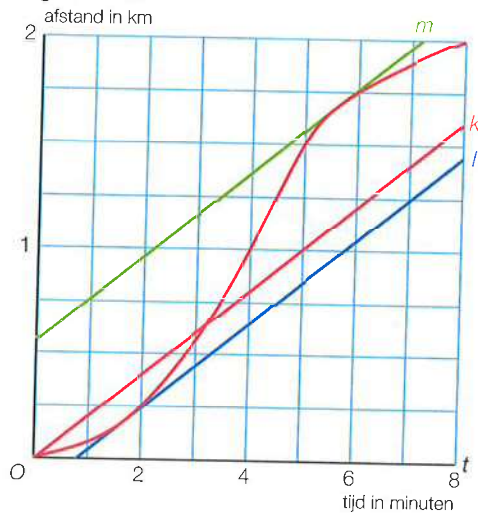
Dus de snelheid is maximaal tussen $t = 4$ en $t = 5$. Deze maximale snelheid is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van het constant stijgende deel van de grafiek.

Op $[4, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1,5 - 1}{5 - 4} = 0,5$ km/minuut.

Dus de maximale snelheid is $60 \cdot 0,5 = 30$ km/uur.

- d 12 km/uur = 0,2 km/minuut

Teken een lijn met $rc = 0,2$, dus bijvoorbeeld de lijn k door $(0, 0)$ en $(5, 1)$ in de figuur hieronder.



Teken de lijnen l en m evenwijdig met k , waarbij l en m de tijd-afstandgrafiek raken. l raakt de tijd-afstandgrafiek voor $t \approx 1,5$ en m raakt de tijd-afstandgrafiek voor $t \approx 5,5$. Dus op $t \approx 1,5$ en op $t \approx 5,5$ is de snelheid 12 km/uur.

- 18 a Voer in $y_1 = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 0,5$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,5x + b \\ f(1) = 0,5, \text{ dus } A(1; 0,5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,5 + b = 0,5 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $k: y = 0,5x$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ f(0) = -1, \text{ dus } B(0, -1) \end{array} \right\} b = -1$$

Dus $l: y = 2x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Snijden van } k \text{ en } l \text{ geeft } 0,5x &= 2x - 1 \\ -1,5x &= -1 \\ x &= 0,666... \end{aligned}$$

$$x = 0,666... \text{ geeft } y = 0,5 \cdot 0,666... = 0,333...$$

Dus $S(0,67; 0,33)$.

- b Voer in $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$ en $y_3 = -0,5$ en zet y_1 uit.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,59$ en $x = -1$.

Dus voor $x \approx -1,59$ en voor $x = -1$ is de helling van de grafiek gelijk aan $-0,5$.

Bladzijde 178

- 19 a Voer in $y_1 = 2x\sqrt{x+1}$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = 5,5$$

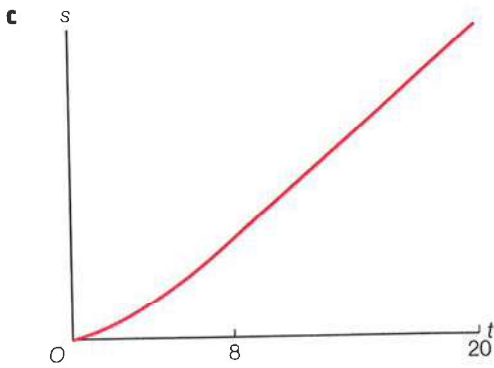
Op $t = 3$ is de snelheid 5,5 m/s.

- b $t = 8$ geeft $s = 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{8+1} = 48$

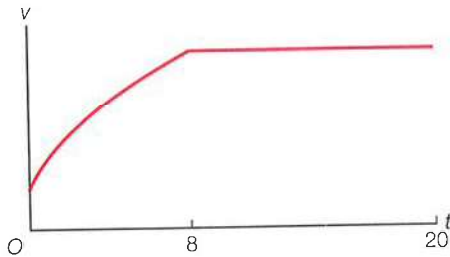
$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=8} = 8,66..., \text{ dus op } t = 8 \text{ is de snelheid } 8,66... \text{ m/s.}$$

$$\frac{126 - 48}{8,66...} = 9$$

Dus $8 + 9 = 17$ seconden na $t = 0$ heeft de boot 126 meter afgelegd.



d Voer in $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1) \Big|_{x=x}$ en zet y_1 uit.



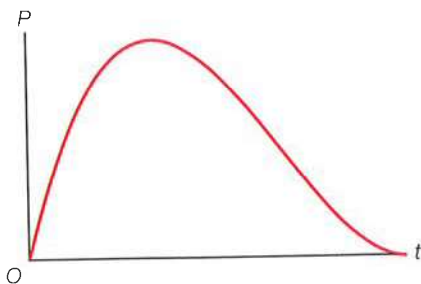
- 20**
- a** $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 3x^2$ geeft $f'(x) = 20x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 6x$
 - b** $g(t) = -5t^6 + 6t^3 - 3$ geeft $g'(t) = -30t^5 + 18t^2$
 - c** $h(x) = (3x - p)(3x + p)(9x^2 + p^2) = (9x^2 - p^2)(9x^2 + p^2) = 81x^4 - p^4$ geeft $h'(x) = 324x^3$
 - d** $k(q) = (2q^2 - 1)^2 = 4q^4 - 4q^2 + 1$ geeft $k'(q) = 16q^3 - 8q$
- 21**
- a** $f(x) = 4x^2(3x - 2)(x + 5) = 4x^2(3x^2 + 15x - 2x - 10) = 4x^2(3x^2 + 13x - 10) = 12x^4 + 52x^3 - 40x^2$ geeft $f'(x) = 48x^3 + 156x^2 - 80x$
 - b** $g(x) = (x^2 + 2x)^2 - (2x - 3)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - (4x^2 - 12x + 9) = x^4 + 4x^3 + 12x - 9$ geeft $g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12$
 - c** $h(x) = x^5 + p^4 + q^3$ geeft $h'(x) = 5x^4$
 - d** $s(t) = (2t^2 - 4)^2 + 4t^4 + 16t^2 = 4t^4 - 16t^2 + 16 + 4t^4 + 16t^2 = 8t^4 + 16$ geeft $s'(t) = 32t^3$
- 22**
- a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x - 2$ geeft $f'(x) = x^2 - 6x + 7$
Dus de formule van de hellinggrafiek is $y = x^2 - 6x + 7$.
 - b** helling = 2 geeft $x^2 - 6x + 7 = 2$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 2\frac{1}{3} \text{ en } f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 - 2 = -\frac{1}{3}$$
Dus in de punten $(1, 2\frac{1}{3})$ en $(5, -\frac{1}{3})$ is de helling van de grafiek gelijk aan 2.
- 23**
- a** Voer in $y_1 = 0,0025x^3 - 0,08x^2 + 0,64x$.



- b** De optie maximum geeft $x = 5,33...$
Dus na $5,33... \cdot 15 = 80$ minuten is het alcoholpromillage maximaal.
- c** $\left[\frac{dP}{dt} \right]_{t=7} = -0,1125$
De snelheid waarmee P op $t = 7$ afneemt, is ongeveer 0,1 promille per kwartier.

d Voer in $y_2 = 0,5$.

De optie snijpunt geeft $x = 11,90\dots$

Dus na ongeveer 12 kwartier mag de proefpersoon weer autorijden.

$$\left[\frac{dP}{dt} \right]_{t=11,90\dots} = -0,201\dots$$

De snelheid waarmee het alcoholpromillage dan afneemt, is ongeveer 0,2 promille per kwartier.

3 Hoeken en afstanden

Bladzijde 179

24 In $\triangle ACD$ is $\tan(68^\circ) = \frac{7}{AD}$, dus $AD = \frac{7}{\tan(68^\circ)} = 2,82\dots$

$$AB = AD + BD = 2,82\dots + 4 = 6,82\dots$$

In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle ACB) = \frac{AB}{AC} = \frac{6,82\dots}{7}$

$$\angle ACB \approx 44,3^\circ$$

$$\angle ACD = 180^\circ - 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$$

$$\angle BCD = \angle ACB - \angle ACD \approx 44,3^\circ - 22^\circ = 22,3^\circ$$

25 $\left. \begin{array}{l} \angle ABS = \angle CDS \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle BAS = \angle DCS \text{ (Z-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ABS \sim \triangle CDS \text{ dus } \frac{AB}{CD} = \frac{BS}{DS}$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$ geeft $BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
Stel $DS = x$, dan is $BS = 13 - x$.

Dit geeft $\frac{12}{7\frac{1}{2}} = \frac{13-x}{x}$

$$12x = 7\frac{1}{2}(13 - x)$$

$$12x = 97\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}x$$

$$19\frac{1}{2}x = 97\frac{1}{2}$$

$$x = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} DS = 5 \\ AD = 5 \end{array} \right\} \text{ dus } \triangle ADS \text{ is gelijkbenig.}$$

26 $\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle CAD \\ \angle ABC = \angle ACD \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle ACD$

Dit geeft $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$

$$AC \cdot AC = AB \cdot AD$$

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$$

27 $\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle DCE \\ \angle ABC = \angle CED \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ dus } \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}$

Stel $CD = x$, dan is $BC = x + 1$.

Dit geeft $\frac{7}{x} = \frac{x+1}{4}$

$$x(x+1) = 28$$

$$x^2 + x = 28$$

$$x^2 + x - 28 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -28 = 113$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{113}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{113}}{2}$$

$$x \approx 4,8 \vee x \approx -5,8 \text{ (kan niet)}$$

Dus $CD \approx 4,8$.

Bladzijde 180

- 28** Stel $AD = x$, dan is $BD = x + 2$.
 $BC = AB = AD + BD = x + x + 2 = 2x + 2$

In $\triangle BCD$ is $\tan(55^\circ) = \frac{2x+2}{x+2}$.

Voer in $y_1 = \tan(55^\circ)$ en $y_2 = \frac{2x+2}{x+2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 1,497...$

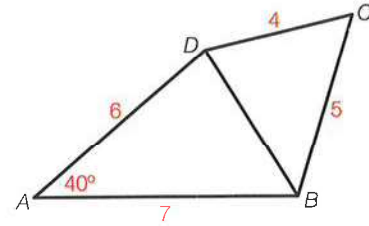
In $\triangle BCD$ is $\cos(55^\circ) = \frac{x+2}{CD} = \frac{1,497...+2}{CD}$.

Dus $CD = \frac{1,497...+2}{\cos(55^\circ)} \approx 6,10$.

- 29** Teken BD . Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $BD^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(40^\circ)$
 $BD^2 = 20,65...$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $20,65... = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(\angle C)$
 $20,65... = 16 + 25 - 40 \cos(\angle C)$
 $40 \cos(\angle C) = 20,34...$
 $\cos(\angle C) = \frac{20,34...}{40}$
 $\angle C \approx 59,4^\circ$



- 30** De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(48^\circ)$
 $AD^2 = 28,793...$
 $AD = 5,365...$

De sinusregel in $\triangle ACD$ geeft $\frac{7}{\sin(\angle ADC)} = \frac{5,365...}{\sin(48^\circ)}$
 $\sin(\angle ADC) = \frac{7 \sin(48^\circ)}{5,365...} = 0,969...$
 $\angle ADC = 75,80...^\circ$

$\angle BDC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 75,80...^\circ = 104,19...^\circ$

$\angle B = 180^\circ - \angle BDC - \angle BCD = 180^\circ - 104,19...^\circ - 25^\circ = 50,80...^\circ$

De sinusregel in $\triangle BCD$ geeft $\frac{BD}{\sin(25^\circ)} = \frac{6}{\sin(50,80...^\circ)}$
 $BD = \frac{6 \sin(25^\circ)}{\sin(50,80...^\circ)} = 3,272...$
 en ook
 $\frac{BC}{\sin(104,19...^\circ)} = \frac{6}{\sin(50,80...^\circ)}$
 $BC = \frac{6 \sin(104,19...^\circ)}{\sin(50,80...^\circ)} = 7,505...$

De omtrek van driehoek ABC is

$AC + AD + BD + BC = 7 + 5,365... + 3,272... + 7,505... \approx 23,14$.

- 31 a** Teken AC . Zie de figuur hiernaast.

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
 $AC^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos(50^\circ)$
 $AC^2 = 38,861\dots$
 $AC = 6,233\dots \approx 6,23$

- b** De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft

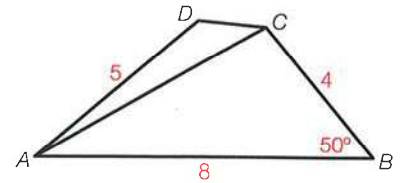
$$\frac{6,233\dots}{\sin(50^\circ)} = \frac{4}{\sin(\angle BAC)}$$

$$\sin(\angle BAC) = \frac{4 \sin(50^\circ)}{6,233\dots} = 0,491\dots$$

$$\angle BAC = 29,44\dots^\circ$$

$$\angle CAD = 40^\circ - \angle BAC = 40^\circ - 29,44\dots^\circ = 10,55\dots^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle CAD$ geeft $CD^2 = 38,861\dots + 5^2 - 2 \cdot 6,233\dots \cdot 5 \cdot \cos(10,55\dots^\circ)$
 $CD^2 = 2,578\dots$
 $CD \approx 1,61$



- 32 a** $\sqrt{4\frac{1}{2}} + \sqrt{12\frac{1}{2}} + \sqrt{24\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2} = 7\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- b** $2\sqrt{\frac{2}{3}} + 3\sqrt{24} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 3 \cdot 2\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 6\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 6\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 6\frac{2}{3}\sqrt{6}$
- c** $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\sqrt{6}$
- d** $\sqrt{\frac{5}{9}a^2} + \sqrt{20a^2} = \sqrt{\frac{1}{9}a^2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{3}a\sqrt{5} + 2a\sqrt{5} = 2\frac{1}{3}a\sqrt{5}$
- e** $3\sqrt{800} - 30\sqrt{8} = 3 \cdot 20\sqrt{2} - 30 \cdot 2\sqrt{2} = 60\sqrt{2} - 60\sqrt{2} = 0$
- f** $\frac{6\sqrt{12}}{4\sqrt{\frac{1}{3}}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{36} = 1\frac{1}{2} \cdot 6 = 9$

Bladzijde 181

- 33 a** $x\sqrt{3} - 8 = \sqrt{48}$
 $x\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 8$
 $x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}}$
 $x = 4 + \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
 $x = 4 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$
 $x = 4 + 2\frac{2}{3}\sqrt{3}$
- b** $3x\sqrt{24} - x\sqrt{6} = \sqrt{18}$
 $3x \cdot 2\sqrt{6} - x\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$
 $6x\sqrt{6} - x\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$
 $5x\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$
 $x = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$
- c** $(x - \sqrt{2})^2 = (x + 2)^2 - 3$
 $x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = x^2 + 4x + 4 - 3$
 $4x + 2x\sqrt{2} = 1$
 $x(4 + 2\sqrt{2}) = 1$
 $x = \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}}$

34 Zie de figuur hiernaast.

Stel $AD = x$.

In $\triangle ACD$ is $CD = \sqrt{3} \cdot AD = x\sqrt{3}$ en $AC = 2 \cdot AD = 2x$.

In $\triangle BCD$ is $BD = CD = x\sqrt{3}$ en $BC = \sqrt{2} \cdot CD = \sqrt{2} \cdot x\sqrt{3} = x\sqrt{6}$.

$$AB = AD + BD = x + x\sqrt{3}$$

$$\text{opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (x + x\sqrt{3}) \cdot x\sqrt{3} \quad \left\} \frac{1}{2} \cdot (x + x\sqrt{3}) \cdot x\sqrt{3} = 12\right.$$

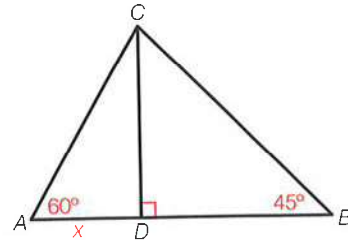
$$\text{opp } \triangle ABC = 12$$

Voer in $y_1 = \frac{1}{2} \cdot (x + x\sqrt{3}) \cdot x\sqrt{3}$ en $y_2 = 12$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,25...$

De omtrek van driehoek ABC is $AD + BD + BC + AC =$

$$x + x\sqrt{3} + x\sqrt{6} + 2x = 2,25... + 2,25... \cdot \sqrt{3} + 2,25... \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot 2,25... \approx 16,17.$$



35 $\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle CDB = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$$

Stel $BD = x$, dan is $AB = x + 5$.

In $\triangle ABC$ is $BC = AB = x + 5$.

In $\triangle BCD$ is $BC = \sqrt{3} \cdot BD = x\sqrt{3}$.

$$x\sqrt{3} = x + 5$$

$$x\sqrt{3} - x = 5$$

$$x(\sqrt{3} - 1) = 5$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\text{Dus } BC = \frac{5}{\sqrt{3} - 1} \cdot \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \text{ en } O(\triangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{25\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}.$$

36 a De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

$$BM = \frac{1}{2} BC = 2,5$$

Zie de figuur hiernaast.

$$AM = BM = 2,5 \text{ (straal cirkel)}$$

$$\text{In } \triangle AMN \text{ is } \sin(\angle AMN) = \frac{2}{2,5}$$

$$\angle AMN = 53,13...^\circ$$

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle AMN = 2 \cdot 53,13...^\circ = 106,26...^\circ$$

$$\text{De lengte van de kortste cirkelboog } AB \text{ is } \frac{106,26...}{360} \cdot 2\pi \cdot 2,5 = 4,636...$$

De omtrek van het groene gebied is $4 + 4,636... \approx 8,64$.

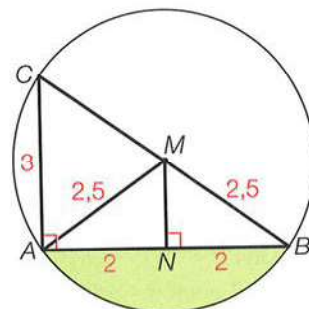
b De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door AM , BM en de kortste cirkelboog AB is

$$\frac{106,26...}{360} \cdot \pi \cdot 2,5^2 = 5,795...$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle AMN$ geeft $MN = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5$.

$$\text{opp } \triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 = 3$$

De oppervlakte van het groene gebied is $5,795... - 3 \approx 2,80$.



4 Werken met formules

37 a De top is $(5, 8)$, dus $y = a(x - 5)^2 + 8$.

Door $(9, 0)$, dus $a(9 - 5)^2 + 8 = 0$

$$16a = -8$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Dus $y = -\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 8$.

$$x = 0 \text{ geeft } y = -\frac{1}{2}(0 - 5)^2 + 8 = -4\frac{1}{2}$$

Het snijpunt met de y -as is $(0, -4\frac{1}{2})$.

- b** Snijpunten met de x -as $(5, 0)$ en $(9, 0)$, dus $y = a(x - 5)(x - 9)$.

Door $(3, -6)$, dus $a(3 - 5)(3 - 9) = -6$

$$a \cdot -2 \cdot -6 = -6$$

$$12a = -6$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Dit geeft $y = -\frac{1}{2}(x - 5)(x - 9) = -\frac{1}{2}(x^2 - 9x - 5x + 45) = -\frac{1}{2}(x^2 - 14x + 45) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 22\frac{1}{2}$.

De formule is $y = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 22\frac{1}{2}$.

- c** Voor de top geldt $x_{\text{top}} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$, dus $y = a(x + 1)^2 + q$.

Door $(1, 12)$ geeft $a(1 + 1)^2 + q = 12$ oftewel $4a + q = 12$.

Door $(2, 2)$ geeft $a(2 + 1)^2 + q = 2$ oftewel $9a + q = 2$.

$$\begin{cases} 4a + q = 12 \\ 9a + q = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4a + q = 12 \\ -5a \quad = 10 \\ \hline \end{array}$$

$$-5a = 10$$

$$a = -2$$

$$4a + q = 12 \quad \left. \begin{array}{l} -8 + q = 12 \\ q = 20 \end{array} \right\}$$

Dus $y = -2(x + 1)^2 + 20$.

De top is $(-1, 20)$.

- d** $y = ax^2 + bx + c$ door $(0, 6)$ geeft $c = 6$, dus $y = ax^2 + bx + 6$.

Door $(4, 0)$ geeft $16a + 4b + 6 = 0$ oftewel $8a + 2b = -3$.

Door $(6, 1)$ geeft $36a + 6b + 6 = 1$ oftewel $36a + 6b = -5$.

$$\begin{cases} 8a + 2b = -3 \\ 36a + 6b = -5 \end{cases} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right| \text{ geeft } \begin{cases} 24a + 6b = -9 \\ 36a + 6b = -5 \end{cases} \\ \begin{array}{r} -12a \quad = -4 \\ a = \frac{1}{3} \\ 36a + 6b = -5 \end{array} \end{array} \left. \begin{array}{l} 12 + 6b = -5 \\ 6b = -17 \\ b = -2\frac{5}{6} \end{array} \right\}$$

De formule is $y = \frac{1}{3}x^2 - 2\frac{5}{6}x + 6$.

Bladzijde 182

- 38 a** De top is $(4,6; 105,8)$, dus $h = a(t - 4,6)^2 + 105,8$.

Door $(0, 0)$, dus $a(0 - 4,6)^2 + 105,8 = 0$

$$21,16a = -105,8$$

$$a = -5$$

Dus $h = -5(t - 4,6)^2 + 105,8$.

$t = 2$ geeft $h = -5(2 - 4,6)^2 + 105,8 = 72$

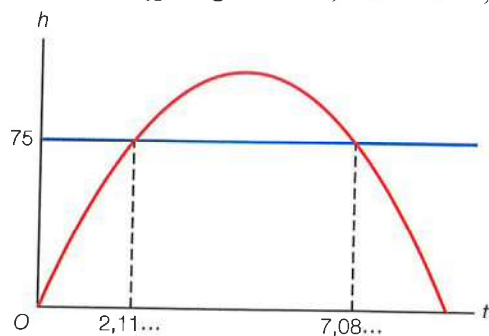
Dus na 2 seconden is de hoogte 72 meter.

- b** $t = \frac{1}{10}$ geeft $h = -5(\frac{1}{10} - 4,6)^2 + 105,8 = 4,55$

De gemiddelde snelheid op $[0, \frac{1}{10}]$ is $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4,55}{\frac{1}{10}} = 45,5$ m/s.

- c** Voer in $y_1 = -5(x - 4,6)^2 + 105,8$ en $y_2 = 75$.

De optie snijpunt geeft $x = 2,11\dots$ en $x = 7,08\dots$



De pijl is gedurende $7,08\dots - 2,11\dots \approx 5,0$ seconden hoger dan 75 meter.

39 Uit $y = a(x-1)^2 + q$ volgt $x_{\text{top}} = 1$.

Uit $y = ax^2 + 2\frac{1}{2}x + c$ volgt $x_{\text{top}} = -\frac{2\frac{1}{2}}{2a}$.

$$-\frac{2\frac{1}{2}}{2a} = 1$$

$$2a = -2\frac{1}{2}$$

$$a = -1\frac{1}{4}$$

$$a = -1\frac{1}{4} \text{ geeft } y = -1\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x + c \quad \left. \begin{array}{l} -1\frac{1}{4} \cdot 3^2 + 2\frac{1}{2} \cdot 3 + c = 0 \\ \text{door } (3, 0) \end{array} \right\} c = 3\frac{3}{4}$$

De formule is $y = -1\frac{1}{4}x^2 + 2\frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4}$.

40 Breng een assenstelsel aan zoals in de figuur hiernaast.

De top is $(5, 7)$, dus $h = a(x-5)^2 + 7$.

Door $(0, 3)$, dus $a(0-5)^2 + 7 = 3$

$$25a = -4$$

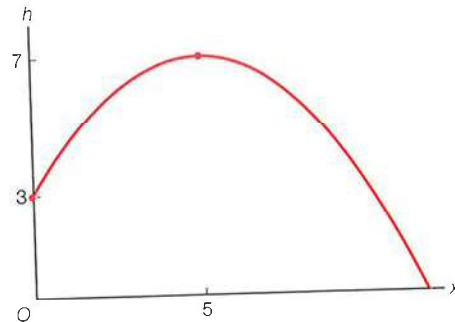
$$a = -0,16$$

Dus $h = -0,16(x-5)^2 + 7$.

Voer in $y_1 = -0,16(x-5)^2 + 7$.

De optie nulpunt geeft $x = 11,61\dots$

Dus de bal komt op 11,6 meter van de schuur op de grond.



41 a $6x^3 = 216$

$$x^3 = 36$$

$$x = \sqrt[3]{36}$$

b $2x^4 + 5 = 17$

$$2x^4 = 12$$

$$x^4 = 6$$

$$x = \sqrt[4]{6} \vee x = -\sqrt[4]{6}$$

c $(3x+1)^5 = -32$

$$3x+1 = -2$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

d $81(1-4x)^4 = 1$

$$(1-4x)^4 = \frac{1}{81}$$

$$1-4x = \frac{1}{3} \vee 1-4x = -\frac{1}{3}$$

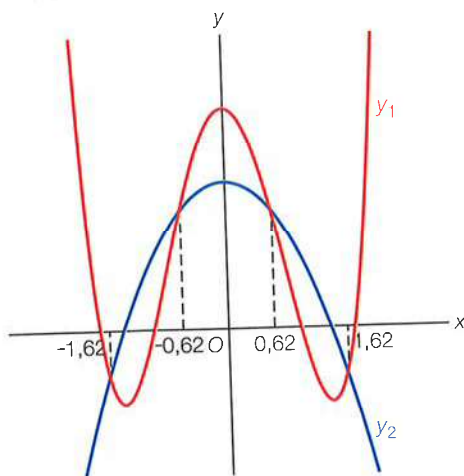
$$-4x = -\frac{2}{3} \vee -4x = -1\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{1}{3}$$

42 a $x^4 - 4x^2 + 3 < 2 - x^2$

Voer in $y_1 = x^4 - 4x^2 + 3$ en $y_2 = 2 - x^2$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,62 \vee x \approx -0,62 \vee x \approx 0,62 \vee x \approx 1,62$.

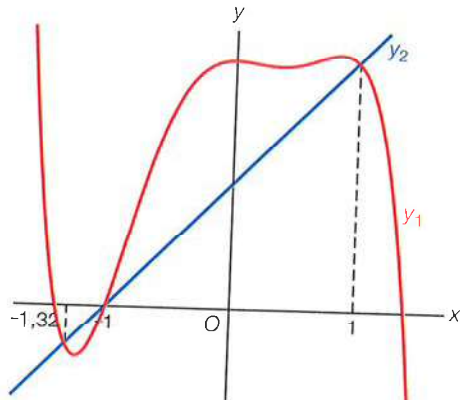


$$x^4 - 4x^2 + 3 < 2 - x^2 \text{ geeft } -1,62 < x < -0,62 \vee 0,62 < x < 1,62$$

b $(2 - x^2)(x^3 + 1) > x + 1$

Voer in $y_1 = (2 - x^2)(x^3 + 1)$ en $y_2 = x + 1$.

De optie snijpunt geeft $x \approx -1,32 \vee x = -1 \vee x = 1$.



$(2 - x^2)(x^3 + 1) > x + 1$ geeft $x < -1,32 \vee -1 < x < 1$

43

a $\underbrace{\frac{1}{2}(2x - 1)^5}_{f(x)} < \underbrace{-16}_{g(x)}$

$$\frac{1}{2}(2x - 1)^5 = -16$$

$$(2x - 1)^5 = -32$$

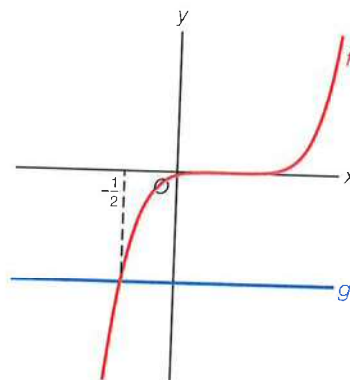
$$2x - 1 = -2$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Schets, zie hiernaast.

$\frac{1}{2}(2x - 1)^5 < -16$ geeft $x < -\frac{1}{2}$



b $\underbrace{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}_{f(x)} > \underbrace{-6x^2}_{g(x)}$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = -6x^2$$

$$x^4 - 16 = -6x^2$$

$$x^4 + 6x^2 - 16 = 0$$

Stel $x^2 = u$.

$$u^2 + 6u - 16 = 0$$

$$(u - 2)(u + 8) = 0$$

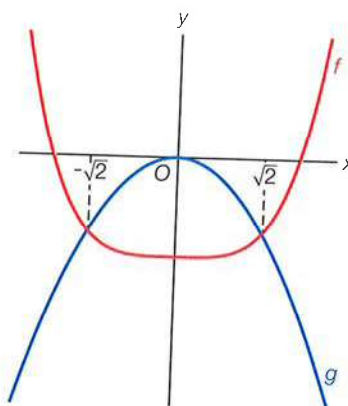
$$u = 2 \vee u = -8$$

$$x^2 = 2 \vee x^2 = -8$$

$$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

Schets, zie hiernaast.

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) > -6x^2$ geeft $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$



44 a $x^4 + 14 = 9x^2$
 $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 9u + 14 = 0$
 $(u - 2)(u - 7) = 0$
 $u = 2 \vee u = 7$
 $x^2 = 2 \vee x^2 = 7$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$

b $x^3 = x^2 + 20x$
 $x^3 - x^2 - 20x = 0$
 $x(x^2 - x - 20) = 0$
 $x(x + 4)(x - 5) = 0$
 $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 5$

c $4x^4 + 44x^2 - 48 = 0$
 $x^4 + 11x^2 - 12 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 + 11u - 12 = 0$
 $(u - 1)(u + 12) = 0$
 $u = 1 \vee u = -12$
 $x^2 = 1 \vee x^2 = -12$
 $x = 1 \vee x = -1$

d $2x^2 - x^3 = x$
 $x^3 - 2x^2 + x = 0$
 $x(x^2 - 2x + 1) = 0$
 $x(x - 1)(x - 1) = 0$
 $x = 0 \vee x = 1$

e $(x^2 + 1)(x - 3) = 5x - 3$
 $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 5x - 3$
 $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$
 $x(x^2 - 3x - 4) = 0$
 $x(x + 1)(x - 4) = 0$
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 4$

f $(x^2 - 6)(x^2 + 6) = 5x^2$
 $x^4 - 36 = 5x^2$
 $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
 Stel $x^2 = u$.
 $u^2 - 5u - 36 = 0$
 $(u + 4)(u - 9) = 0$
 $u = -4 \vee u = 9$
 $x^2 = -4 \vee x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

Bladzijde 183

45 a inhoud kubus $= 2^3 = 8$
 oppervlakte kubus $= 6 \cdot 2^2 = 24$
 lengte ribben $= 12 \cdot 2 = 24$
 Zo krijg je som $= 8 + 24 + 24 = 56$.

b Stel de ribbe x .
 inhoud kubus $= x^3$
 oppervlakte kubus $= 6x^2$
 lengte ribben $= 12x$
 Er geldt $x^3 + 3 \cdot 6x^2 = 144x$
 $x^3 + 18x^2 - 144x = 0$
 $x(x^2 + 18x - 144) = 0$
 $x(x - 6)(x + 24) = 0$
 $x = 0 \vee x = 6 \vee x = -24$

Dus de ribbe is 6.

46 $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (3, 4)} y = \frac{1}{x - 3} + 4$
 $\frac{1}{x - 3} + 4 = 2x - 1$
 $\frac{1}{x - 3} = 2x - 5$
 $1 = (2x - 5)(x - 3)$
 $1 = 2x^2 - 6x - 5x + 15$
 $2x^2 - 11x + 14 = 0$
 $D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 9$
 $x = \frac{11 \pm 3}{4} = 3\frac{1}{2} \vee x = \frac{11 - 3}{4} = 2$

vold. vold.

 $x = 3\frac{1}{2}$ geeft $y = 2 \cdot 3\frac{1}{2} - 1 = 6$ en $x = 2$ geeft $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.De snijpunten zijn $(3\frac{1}{2}, 6)$ en $(2, 3)$.

47

a $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+5}$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$(x+2)(x+5) = x(x-1)$$

$$x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 - x$$

$$8x = -10$$

$$x = -1\frac{1}{4}$$

vold.

b $\frac{x^2+2x}{x^2+3} = \frac{4-x}{x^2+3}$

$$x^2 + 2x = 4 - x$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x+4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -4$$

vold. vold.

c $\frac{18x-6x^3}{2x^2+1} = 0$

$$18x - 6x^3 = 0$$

$$6x(3 - x^2) = 0$$

$$6x = 0 \vee x^2 = 3$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

vold. vold. vold.

d

$$\frac{7}{3x^2-5x} = \frac{2}{x^2-3x}$$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$7(x^2 - 3x) = 2(3x^2 - 5x)$$

$$7x^2 - 21x = 6x^2 - 10x$$

$$x^2 - 11x = 0$$

$$x(x - 11) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 11$$

vold. niet vold.

e $\frac{2x^2-8}{3x+4} = \frac{2x^2-8}{x-2}$

$$2x^2 - 8 = 0 \vee 3x + 4 = x - 2$$

$$x^2 = 4 \vee 2x = -6$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = -3$$

vold. niet vold. vold.

f $\frac{4+2x}{x} = \frac{12}{x+1}$

kruislings vermenigvuldigen geeft

$$(x+1)(4+2x) = 12x$$

$$4x + 2x^2 + 4 + 2x = 12x$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 2$$

vold. vold.

48

a $\left. \begin{array}{l} \angle ADF = \angle FEC \text{ (rechte hoek)} \\ \angle DAF = \angle EFC \text{ (F-hoeken)} \end{array} \right\} \triangle ADF \sim \triangle FEC$

Dit geeft $\frac{AD}{EF} \left| \frac{DF}{CE} \right.$ oftewel $\frac{AD}{1} \left| \frac{1}{x} \right.$, dus $AD = \frac{1}{x}$.

b $AB = AD + BD = \frac{1}{x} + 1$

$$BC = BE + CE = 1 + x$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + (1+x)^2 = 4^2$$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + (1+x)^2 = 16$$

c Voer in $y_1 = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + (1+x)^2$ en $y_2 = 16$.

De optie snijpunt geeft $x = 0,362...$ en $x = 2,760...$

Dus $BC = 1,362...$ of $BC = 3,760...$

Zie de figuur in het leerboek. De ladder staat op een hoogte van 376 cm tegen de muur.

Bladzijde 184

49

- a** De grafiek gaat door $(0, 0)$.

$x = 0$ en $h = 0$ invullen in $h = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geeft $0 + 0 + 0 + d = 0$, dus $d = 0$.

- b** $h = ax^3 + bx^2 + cx$ geeft $h' = 3ax^2 + 2bx + c$

Bij $x = 0$ hoort $h' = 0$. Dit geeft $0 + 0 + c = 0$, dus $c = 0$.

- c** De grafiek gaat door de punten $(6, 4)$ en $(12, 0)$.

$x = 6$ en $h = 4$ invullen in $h = ax^3 + bx^2$ geeft $216a + 36b = 4$ oftewel $54a + 9b = 1$.

$x = 12$ en $h = 0$ invullen in $h = ax^3 + bx^2$ geeft $1728a + 144b = 0$ oftewel $b = -12a$.

Substitutie van $b = -12a$ in $54a + 9b = 1$ geeft $54a + 9 \cdot -12a = 1$

$$54a - 108a = 1$$

$$-54a = 1$$

$$a = -\frac{1}{54}$$

$$a = -\frac{1}{54} \text{ geeft } b = -12 \cdot -\frac{1}{54} = \frac{2}{9}$$

- d** Uit a, b en c volgt $h = -\frac{1}{54}x^3 + \frac{2}{9}x^2$.

Voer in $y_1 = -\frac{1}{54}x^3 + \frac{2}{9}x^2$.

De optie maximum geeft $x = 8$ en $y = 4,740...$

De maximale hoogte is 474 cm.

- e** Voer in $y_2 = 4$.

De optie snijpunt geeft $x = 6$ en $x = 9,708...$

Dus de snelheid waarmee de golf voortbeweegt is $9,708... - 6 = 3,708...$ meter per 0,7 seconden.

Dat is $\frac{3,708...}{0,7} = 5,297...$ m/s.

De gevraagde procentuele afwijking is $\frac{5,297... - 5}{5} \times 100\% \approx 5,9\%$.

Gemengde opgaven

5 Machten, exponenten en logaritmen

Bladzijde 182

1 a $a^2 \cdot \sqrt[4]{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{2\frac{1}{4}}$

b $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$

c $\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^2} = a^{-1\frac{2}{3}}$

d $\frac{\sqrt{a}}{a \cdot \sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{4}}} = a^{-1\frac{1}{4}}$

2 a $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}}$

b $(a^{-\frac{1}{3}})^9 = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

c $(16a^2)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{(16a^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

d $\frac{6b^{-2}}{3a^{-1\frac{1}{4}}} = 2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot a^{\frac{1}{4}} = \frac{2a \cdot \sqrt[4]{a}}{b^2}$

3 a $y = \frac{6x^4}{(2\sqrt{x})^3} = \frac{6x^4}{2^3 \cdot (x^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{6x^4}{8x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$
Dus $y = \frac{3}{4}x^{2\frac{1}{2}}$.

b $y = (\frac{1}{4})^{2-\frac{1}{2}x} = (4^{-1})^{2-\frac{1}{2}x} = 4^{-2+\frac{1}{2}x} = 4^{-2} \cdot 4^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{16} \cdot (4^{\frac{1}{2}})^x = \frac{1}{16} \cdot 2^x$
Dus $y = \frac{1}{16} \cdot 2^x$.

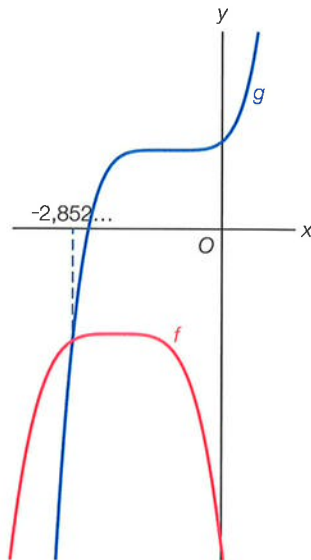
c $y = 0,4x^{2,3} \cdot (3x^{4,1})^3 = 0,4x^{2,3} \cdot 3^3 \cdot (x^{4,1})^3 = 0,4 \cdot 27 \cdot x^{2,3} \cdot x^{12,3} = 10,8x^{14,6}$
Dus $y = 10,8x^{14,6}$.

d $y = 12 \cdot 4^{2x-1} \cdot (\frac{1}{2})^{2-3x} = 12 \cdot \frac{4^{2x}}{4^1} \cdot (2^{-1})^{2-3x} = 3 \cdot 4^{2x} \cdot 2^{-2+3x} = 3 \cdot (2^2)^{2x} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{3x} = 3 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 2^{4x} \cdot 2^{3x}$
 $= \frac{3}{4} \cdot 2^{7x} = \frac{3}{4} \cdot (2^7)^x = \frac{3}{4} \cdot 128^x$
Dus $y = \frac{3}{4} \cdot 128^x$.

4 a $y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x}$
↓ verm. x-as, 2 $\downarrow$ verm. x-as, -2
 $y = 2\sqrt{x}$ $y = -2\sqrt{x}$
↓ translatie (-3, -1) $\downarrow$ translatie (4, 3)
 $y = f(x)$ $y = g(x)$

b Bijvoorbeeld achtereenvolgens verm. x-as, -1 en translatie (7, 2).

- 5 a** $y = x^4$
 $\downarrow$ verm. x-as, $-\frac{1}{2}$
 $y = -\frac{1}{2}x^4$
 $\downarrow$ translatie $(-2, -4)$
 $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - 4$
- b** Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - 4$ en $y_2 = \frac{1}{3}(x+1)^5 + 3$.
 De optie snijpunt geeft $x = -2,852...$



$f(x) > g(x)$ geeft $x < -2,85$

- c** De top van de grafiek van f is het punt $(-2, -4)$.
 $(-2, -4) \xrightarrow{\text{verm. x-as, } -4} (-2, 16) \xrightarrow{\text{translatie } (4, -8)} (2, 8)$
 De top van de beeldgrafiek is het punt $(2, 8)$.
- d** Het punt van symmetrie van de grafiek van g is het punt $(-1, 3)$.
 $(-1, 3) \xrightarrow{\text{verm. x-as, } -3} (-1, -9) \xrightarrow{\text{translatie } (a, b)} (-1 + a, -9 + b)$
 Het punt $(-1 + a, -9 + b)$ is het punt $(4, 6)$ geeft $a = 5$ en $b = 15$.

Bladzijde 183

- 6 a** $6 - 3x \geq 0$
 $-3x \geq -6$
 $x \leq 2$, dus $D_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$
 randpunt $(2, -2)$
 Voer in $y_1 = -2 + \sqrt{6 - 3x}$.

x	-5	-1	0	1	2
$f(x)$	2,6	1	0,4	-0,3	-2

$$4x + 10 \geq 0$$

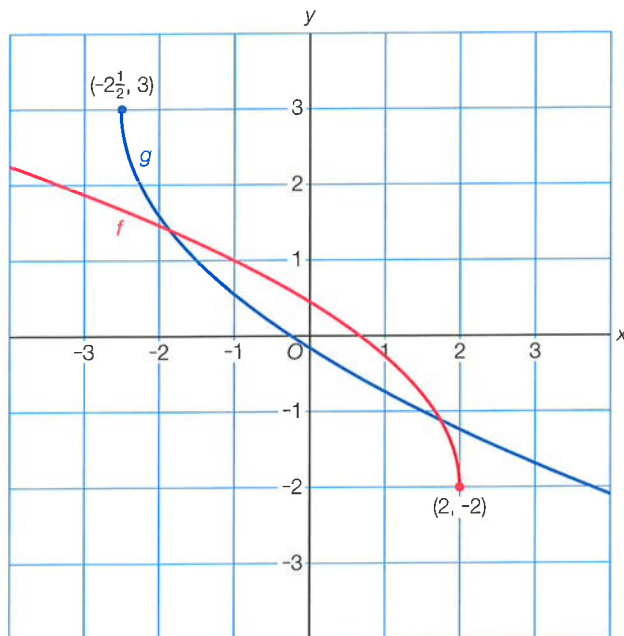
$$4x \geq -10$$

$$x \geq -2\frac{1}{2}, \text{ dus } D_g = [-2\frac{1}{2}, \rightarrow)$$

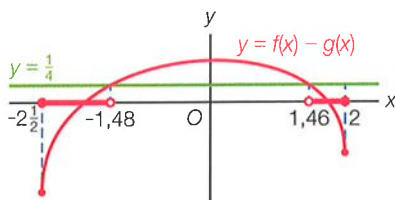
$$\text{randpunt } (-2\frac{1}{2}, 3)$$

$$\text{Voer in } y_2 = 3 - \sqrt{4x + 10}.$$

x	$-2\frac{1}{2}$	-2	-1	0	1	2	5
$g(x)$	3	1,6	0,6	-0,2	-0,7	-1,2	-2,5

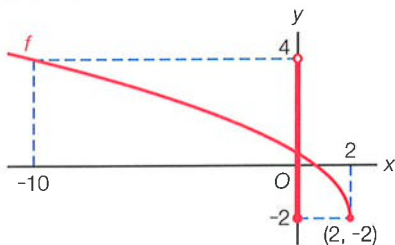


- b** De optie snijpunt geeft $x = -1,863\dots$ en $x = 1,741\dots$
 $f(x) \geq g(x)$ geeft $-1,86 \leq x \leq 1,74$
- c** Zet y_1 en y_2 uit en voer in $y_3 = y_1 - y_2$ en $y_4 = \frac{1}{4}$.



De optie snijpunt geeft $x = -1,481\dots$ en $x = 1,464\dots$
 $f(x) - g(x) < \frac{1}{4}$ geeft $-2\frac{1}{2} \leq x < -1,48 \vee 1,46 < x \leq 2$

- d** $f(-10) = 4$



$x > -10$ geeft $-2 \leq f(x) < 4$

7 a $3\sqrt{2-4x} = 21$

$$\sqrt{2-4x} = 7$$

$$2-4x = 49$$

$$-4x = 47$$

$$x = -11\frac{3}{4}$$

b $2^{\frac{1}{2}x-2} = 2\sqrt{2}$

$$2^{\frac{1}{2}x-2} = 2^{1\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$$

$$x = 7$$

c $5 \cdot {}^2\log(x) = 15$

$${}^2\log(x) = 3$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

d $2\sqrt{x-1} + 7 = 15$

$$2\sqrt{x-1} = 8$$

$$\sqrt{x-1} = 4$$

$$x-1 = 16$$

$$x = 17$$

e $3^{5-2x} = 81$

$$3^{5-2x} = 3^4$$

$$5-2x = 4$$

$$-2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

f ${}^4\log(2x+3) = 3$

$$2x+3 = 4^3$$

$$2x+3 = 64$$

$$2x = 61$$

$$x = 30\frac{1}{2}$$

- 8 a** $G = 4000$ geeft $L = 7,5 \cdot 4000^{0,25} = 59,64\dots$
Dus de levensverwachting van deze olifanten is 60 jaar.
- b** Voer in $y_1 = 7,5x^{0,25}$ en $y_2 = 34$.
De optie snijpunt geeft $x = 422,34\dots$
Dus het gemiddelde gewicht is 422 kg.
- c** $G = 300$ geeft $H = 280 \cdot 300^{-0,25} = 67,27\dots$
 $G = 300$ geeft $L = 7,5 \cdot 300^{0,25} = 31,21\dots$
 $67,27\dots$ hartslagen per minuut geeft $67,27\dots \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 31,21\dots \approx 1,1$ miljard hartslagen in zijn gehele leven.
- d** Voer in $y_3 = 280x^{-0,25}$ en $y_4 = 900$.
De optie snijpunt geeft $x = 0,00936\dots$
 $G = 0,00936\dots$ geeft $L = 7,5 \cdot 0,00936\dots^{0,25} = 2,33\dots$
900 hartslagen per minuut geeft $900 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 2,33\dots = 1,1$ miljard hartslagen in zijn gehele leven.
- e** L is de levensverwachting in jaren, dus $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot L$ is de levensverwachting in minuten.
 H is het aantal hartslagen per minuut, dus $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot L \cdot H$ is het aantal hartslagen in het hele leven.
Als dit voor elk zoogdier gelijk is, dan moet $L \cdot H$ constant zijn.
Er geldt $L \cdot H = 7,5 G^{0,25} \cdot 280 G^{-0,25} = 2100 \cdot G^0 = 2100 \cdot 1 = 2100$.
Dus is inderdaad $L \cdot H$ constant en het is gelijk aan 2100.

- 9 a** $\sqrt{2-2x} + 2x = 0$
 $\sqrt{2-2x} = -2x$
kwadrateren geeft
 $2-2x = 4x^2$
 $-4x^2 - 2x + 2 = 0$
 $2x^2 + x - 1 = 0$
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 9$
 $x = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-1-3}{4} = -1$
 $x = \frac{1}{2}$ geeft $\sqrt{2-2 \cdot \frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ vold. niet
 $x = -1$ geeft $\sqrt{2-2 \cdot -1} + 2 \cdot -1 = 0$ vold.
- b** $0,2^{2x+1} = 0,04$
 $0,2^{2x+1} = 0,2^2$
 $2x+1 = 2$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
- c** $5^{0,02x} = 5\sqrt{5}$
 $5^{0,02x} = 5^{1\frac{1}{2}}$
 $0,02x = 1\frac{1}{2}$
 $x = 75$
- d** $3x = \sqrt{8x+1}$
kwadrateren geeft
 $9x^2 = 8x+1$
 $9x^2 - 8x - 1 = 0$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -1 = 100$
 $x = \frac{8 \pm 10}{18} = 1 \vee x = \frac{8-10}{18} = -\frac{1}{9}$
 $x = 1$ geeft $3 = \sqrt{8+1}$ vold.
 $x = -\frac{1}{9}$ geeft $-\frac{1}{3} = \sqrt{-\frac{8}{9}+1}$ vold. niet
- e** $6^{2x} + 4 = 220$
 $6^{2x} = 216$
 $6^{2x} = 6^3$
 $2x = 3$
 $x = 1\frac{1}{2}$
- f** ${}^3\log(8x + \sqrt{3}) = 2\frac{1}{2}$
 $8x + \sqrt{3} = 3^{2\frac{1}{2}}$
 $8x = 9\sqrt{3} - \sqrt{3}$
 $8x = 8\sqrt{3}$
 $x = \sqrt{3}$

Bladzijde 184

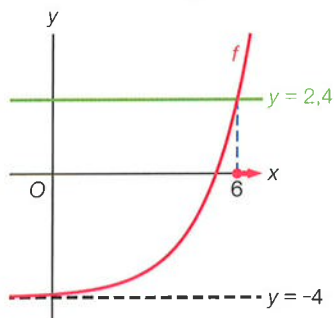
- 10 a** $2 + 3x\sqrt{x} = 26$
 $3x\sqrt{x} = 24$
 $x\sqrt{x} = 8$
 $x^3 = 64$
 $x = 4$
- b** $3 \cdot 2^{x^2-2} + 12 = 60$
 $3 \cdot 2^{x^2-2} = 48$
 $2^{x^2-2} = 16$
 $2^{x^2-2} = 2^4$
 $x^2 - 2 = 4$
 $x^2 = 6$
 $x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$
- c** ${}^2\log(x^2 - 2) = 3$
 $x^2 - 2 = 2^3$
 $x^2 - 2 = 8$
 $x^2 = 10$
 $x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$
- d** $\frac{2\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}} = \frac{2}{3}$
kruislings vermenigvuldigen geeft
 $3 \cdot 2\sqrt{x} = 2(4 + \sqrt{x})$
 $6\sqrt{x} = 8 + 2\sqrt{x}$
 $4\sqrt{x} = 8$
 $\sqrt{x} = 2$
 $x = 4$ vold.

$$\begin{aligned} \text{e } 128 - 4 \cdot 3^{x+1} &= 20 \\ -4 \cdot 3^{x+1} &= -108 \\ 3^{x+1} &= 27 \\ 3^{x+1} &= 3^3 \\ x+1 &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f } 5 - {}^3\log(4x-7) &= 3 \\ -{}^3\log(4x-7) &= -2 \\ {}^3\log(4x-7) &= 2 \\ 4x-7 &= 3^2 \\ 4x-7 &= 9 \\ 4x &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{11 a } y &= 2^x & y &= 3^x \\ \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 0,4 & & \downarrow \text{verm. } x\text{-as, } -0,2 \\ y &= 0,4 \cdot 2^x & y &= -0,2 \cdot 3^x \\ \downarrow \text{translatie } (2, -4) & & \downarrow \text{translatie } (-1, 5) \\ f(x) &= 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 & y &= -0,2 \cdot 3^{x+1} + 5 \\ & & \downarrow \text{verm. } y\text{-as, } 2 \\ & & g(x) &= 5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) = 2,4 \text{ geeft } 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 &= 2,4 \\ 0,4 \cdot 2^{x-2} &= 6,4 \\ 2^{x-2} &= 16 \\ 2^{x-2} &= 2^4 \\ x-2 &= 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$



$$f(x) \geq 2,4 \text{ geeft } x \geq 6$$

$$\text{c } AB = f(p) - g(p) \vee AB = g(p) - f(p)$$

$$\text{Voer in } y_1 = 0,4 \cdot 2^{x-2} - 4 - (5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1}), y_2 = 5 - 0,2 \cdot 3^{\frac{1}{2}x+1} - (0,4 \cdot 2^{x-2} - 4) \text{ en } y_3 = 3.$$

De optie snijpunt met y_1 en y_3 geeft $x = 4,923\dots$ en met y_2 en y_3 geeft de optie snijpunt $x = 3,735\dots$

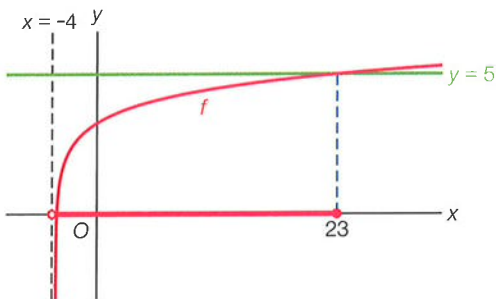
Dus $p \approx 4,92$ of $p \approx 3,74$.

$$\begin{aligned} \text{d } f(x) = q \text{ één oplossing geeft } q &> -4. \\ g(x) = q \text{ geen oplossing geeft } q &\geq 5. \\ \text{Dus } q &\geq 5. \end{aligned}$$

$$\text{12 a } D_f = \langle -4, \rightarrow \rangle \text{ en verticale asymptoot } x = -4.$$

$$D_g = \langle 1, \rightarrow \rangle \text{ en verticale asymptoot } x = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b } f(x) = 5 \text{ geeft } 2 + {}^3\log(x+4) &= 5 \\ {}^3\log(x+4) &= 3 \\ x+4 &= 3^3 \\ x+4 &= 27 \\ x &= 23 \end{aligned}$$



$$f(x) \leq 5 \text{ geeft } -4 < x \leq 23$$

$$\begin{aligned} \text{c } f(x) = 2 \text{ geeft } 2 + {}^3\log(x+4) &= 2 \\ {}^3\log(x+4) &= 0 \\ x+4 &= 3^0 \\ x+4 &= 1 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Dus $P(-3, 2)$.

$$\begin{aligned} g(x) = 2 \text{ geeft } 3 + {}^2\log(x-1) &= 2 \\ {}^2\log(x-1) &= -1 \\ x-1 &= 2^{-1} \\ x-1 &= \frac{1}{2} \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus $Q(1\frac{1}{2}, 2)$.

$$PQ = x_Q - x_P = 1\frac{1}{2} - (-3) = 4\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d } y &= 3 + {}^2\log(x-1) \\ &\downarrow \text{translatie } (4, 0) \\ y &= 3 + {}^2\log(x-4-1), \text{ oftewel } y = 3 + {}^2\log(x-5) \\ &\downarrow \text{verm. } y\text{-as, } \frac{1}{2} \\ y &= 3 + {}^2\log(2x-5) \\ \text{Dus } h(x) &= 3 + {}^2\log(2x-5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \quad f(x) &= 2^x - 2 \\ &\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } a \\ y &= a \cdot 2^x - 2a \\ &\downarrow \text{translatie } (4, 1) \\ y &= a \cdot 2^{x-4} - 2a + 1 \\ y &= a \cdot 2^{x-4} - 2a + 1 \Bigg\} \begin{aligned} a \cdot 2^{6-4} - 2a + 1 &= 5 \\ 4a - 2a &= 4 \\ 2a &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned} \\ \text{door } S(6, 5) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 3^x + b \\ &\downarrow \text{verm. } x\text{-as, } 2 \\ y &= 2 \cdot 3^x + 2b \\ &\downarrow \text{translatie } (4, 1) \\ y &= 2 \cdot 3^{x-4} + 2b + 1 \\ y &= 2 \cdot 3^{x-4} + 2b + 1 \Bigg\} \begin{aligned} 2 \cdot 3^{6-4} + 2b + 1 &= 5 \\ 18 + 2b + 1 &= 5 \\ 2b &= -14 \\ b &= -7 \end{aligned} \\ \text{door } S(6, 5) & \end{aligned}$$

Dus $a = 2$ en $b = -7$.

6 De afgeleide functie

Bladzijde 185

$$\begin{aligned} 14 \quad \text{a } f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \text{ geeft } f'(x) = x^2 - x - 2 \\ \text{rc}_k &= f'(4) = 4^2 - 4 - 2 = 10 \Bigg\} \begin{aligned} \text{rc}_l \cdot 10 &= -1 \\ \text{rc}_l &= -\frac{1}{10} \end{aligned} \\ l \perp k, \text{ dus } \text{rc}_l \cdot \text{rc}_k &= -1 \\ y &= -\frac{1}{10}x + b \Bigg\} \begin{aligned} -\frac{1}{10} \cdot 4 + b &= 6\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} + b &= 6\frac{1}{3} \\ b &= 6\frac{11}{15} \end{aligned} \\ f(4) &= 6\frac{1}{3}, \text{ dus } A(4, 6\frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{10}x + 6\frac{11}{15}$ en $B(0, 6\frac{11}{15})$.

- b** Raaklijn horizontaal, dus $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot -1 + 1 = 2\frac{1}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = -2\frac{1}{3}$$

De punten zijn $(-1, 2\frac{1}{6})$ en $(2, -2\frac{1}{3})$.

- c** Raaklijn evenwijdig met $m: y = 4x + 10$, dus $rc_{\text{raaklijn}} = 4$.

Dit geeft van $f' f'(x) = 4$

$$x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 3$$

$$x_C = -2 \text{ geeft } y_C = f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot -2 + 1 = \frac{1}{3}, \text{ dus } C(-2, \frac{1}{3}).$$

$$x_D = 3 \text{ geeft } y_D = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = -\frac{1}{2}, \text{ dus } D(3, -\frac{1}{2}).$$

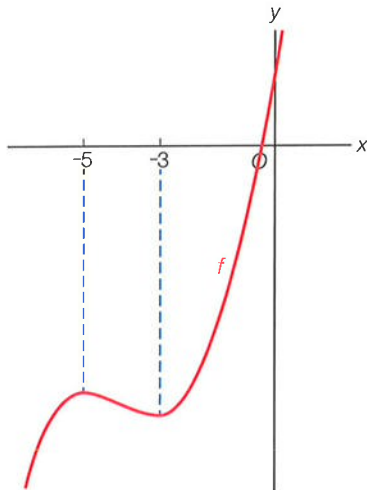
- 15 a** $f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + 17$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 24x + 45$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 + 24x + 45 = 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(x+3)(x+5) = 0$$

$$x = -3 \vee x = -5$$



max. is $f(-5) = -33$ en min. is $f(-3) = -37$.

- b** $f(x) = p$ heeft drie oplossingen voor $-37 < p < -33$.

- c** $f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p < -37 \vee p > -33$.

- d** Door op de grafiek van f de translatie $(0, 33)$ of de translatie $(0, 37)$ toe te passen, raakt de beeldgrafiek van f de x -as.

Dus $a = 17 + 33 = 50$ of $a = 17 + 37 = 54$.

- 16 a** $f(x) = \frac{2x+5}{x^2} = 2x^{-1} + 5x^{-2}$ geeft $f'(x) = -2x^{-2} - 10x^{-3} = -\frac{2}{x^2} - \frac{10}{x^3}$

b $f(x) = \frac{6x^2}{5} - \frac{x^2+2}{5x^3} = \frac{6}{5}x^2 - \frac{1}{5}x^{-1} - \frac{2}{5}x^{-3}$ geeft $f'(x) = 2\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}x^{-2} + \frac{6}{5}x^{-4} = 2\frac{2}{5}x + \frac{1}{5x^2} + \frac{6}{5x^4}$

c $f(x) = 4(3x-1)^5$ geeft $f'(x) = 4 \cdot 5(3x-1)^4 \cdot 3 = 60(3x-1)^4$

d $f(x) = \frac{5}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{5}{x^{2\frac{1}{2}}} = 5x^{-2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = -12\frac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}} = -\frac{25}{2x^{3\frac{1}{2}}} = -\frac{25}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$

e $f(x) = \frac{5}{(6-2x)^4} = 5(6-2x)^{-4}$ geeft $f'(x) = 5 \cdot -4(6-2x)^{-5} \cdot -2 = \frac{40}{(6-2x)^5}$

f $f(x) = 3\sqrt{5x+10} + (5x+10)^3$ geeft

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x+10}} + 3(5x+10)^2 \cdot 5 = \frac{15}{2\sqrt{5x+10}} + 15(5x+10)^2$$

17 a $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x} = x - 3 + 4x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(4) = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + b \\ f(4) = 2, \text{ dus } A(4, 2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4} \cdot 4 + b = 2 \\ 3 + b = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{3}{4}x - 1$.

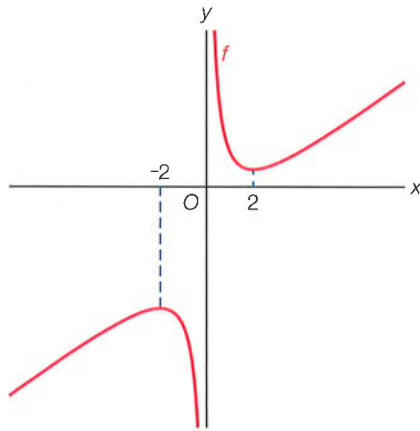
b $f'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{4}{x^2} = 0$

$$-\frac{4}{x^2} = -1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

vold. vold.



max. is $f(-2) = -7$ en min. is $f(2) = 1$.

c $rc_{\text{raaklijn}} = -3$, dus $f'(x) = -3$

$$1 - \frac{4}{x^2} = -3$$

$$-\frac{4}{x^2} = -4$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

vold. vold.

$$f(1) = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 4}{1} = 2, \text{ dus raakpunt } (1, 2).$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 4}{-1} = -8, \text{ dus raakpunt } (-1, -8).$$

d $rc > 1$, dus $f'(x) > 1$

$$1 - \frac{4}{x^2} > 1$$

$$-\frac{4}{x^2} > 0$$

Omdat $-\frac{4}{x^2}$ voor elke x kleiner is dan 0 heeft $-\frac{4}{x^2} > 0$ geen oplossingen.

Dus de grafiek heeft geen raaklijn met richtingscoëfficiënt groter dan 1.

Bladzijde 186

18 a $f(0) = \sqrt{16} = 4$, dus $A(0, 4)$.

$$g_a(0) = 4 + \frac{8}{(-2)^2} = 4 + 2 = 6, \text{ dus } B(0, 6).$$

b $f(x) = \sqrt{4x+16}$ geeft $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+16}} = \frac{2}{\sqrt{4x+16}}$, dus $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$.

$$g_a(x) = 4 + \frac{8}{(ax-2)^2} = 4 + 8(ax-2)^{-2} \text{ geeft } g_a'(x) = 8 \cdot -2(ax-2)^{-3} \cdot a = -\frac{16a}{(ax-2)^3},$$

$$\text{dus } g_a'(0) = -\frac{16a}{(-2)^3} = 2a.$$

De raaklijnen in A en B zijn evenwijdig geeft $f'(0) = g_a'(0)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 2a \\ a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

19 a Stel $m: y = ax + b$ met $a = rc_m = rc_k = -1$.

$$f(x) = \sqrt{6-2x} \text{ geeft } f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{6-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{6-2x}}$$

$$rc_m = -1, \text{ dus } f'(x) = -1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6-2x}} = -1$$

$$\sqrt{6-2x} = 1$$

$$6-2x = 1$$

$$-2x = -5$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ vold.}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= -x + b \\ f(2\frac{1}{2}) &= \sqrt{6-5} = 1, \text{ dus } (2\frac{1}{2}, 1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2\frac{1}{2} + b &= 1 \\ b &= 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } m: y = -x + 3\frac{1}{2}.$$

b $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$ geeft $\sqrt{6-2x} = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

$$2\sqrt{6-2x} = -x + 3$$

kwadrateren geeft

$$4(6-2x) = (-x+3)^2$$

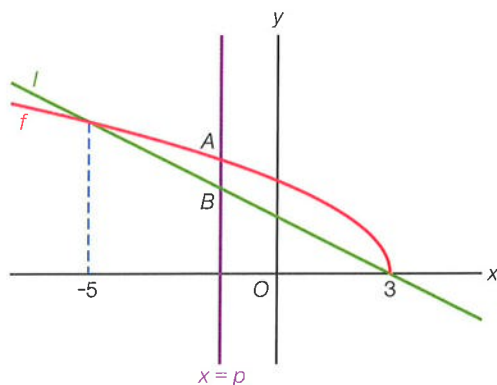
$$24 - 8x = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x-3)(x+5) = 0$$

$$x = 3 \vee x = -5$$

$$\text{vold. vold.}$$



Stel L is de lengte van het lijnstuk AB .

$$x = p \text{ geeft } y_A = \sqrt{6-2p} \text{ en } y_B = -\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{2}.$$

Voor $x = p$ met $-5 < p < 3$ ligt de grafiek van f boven de lijn l , dus

$$L = y_A - y_B = \sqrt{6-2p} - (-\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{2}) = \sqrt{6-2p} + \frac{1}{2}p - 1\frac{1}{2}.$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{-2}{2\sqrt{6-2p}} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{\sqrt{6-2p}} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{dL}{dp} = 0 \text{ geeft } \frac{-1}{\sqrt{6-2p}} + \frac{1}{2} = 0$$

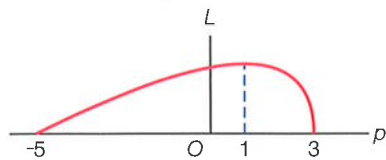
$$\frac{1}{\sqrt{6-2p}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{6-2p} = 2$$

$$6-2p = 4$$

$$2p = 2$$

$$p = 1 \text{ vold.}$$



L is maximaal voor $p = 1$.

$$L_{\max} = \sqrt{6-2} + \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 1$$

20 a $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2\frac{1}{2}} - x^{1\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$$

b $f'(x) = 0$ geeft $\frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}} = 0$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 49$$

$$x = \frac{3+7}{10} = 1 \vee x = \frac{3-7}{10} = -\frac{2}{5}$$

vold.

vold. niet

Zie figuur G.3 in het leerboek.

min. is $f(1) = -2$.

c $f(x) = 0$ geeft $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{\sqrt{x}} = 0$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2$$

$$\text{vold. niet} \quad \text{vold. niet} \quad \text{vold.}$$

Dus $A(2, 0)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = \frac{5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2}{2\sqrt{2}} = \frac{12}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} y &= 3\sqrt{2} \cdot x + b \\ \text{door } A(2, 0) \quad &\left\{ \begin{aligned} 3\sqrt{2} \cdot 2 + b &= 0 \\ 6\sqrt{2} + b &= 0 \\ b &= -6\sqrt{2} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: y = 3x\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$.

d $rc_l = 16\frac{1}{2}$, dus $f'(x) = 16\frac{1}{2}$.

Voer in $y_1 = \frac{5x^2 - 3x - 2}{2\sqrt{x}}$ en $y_2 = 16\frac{1}{2}$.

De optie snijpunt geeft $x = 4$.

$$f(4) = 20, \text{ dus } B(4, 20).$$

21 $x = p$ geeft $y_P = 6p - p^2$ en $y_Q = \frac{1}{2}p^2 - 3p$.

$$PQ = y_P - y_Q = 6p - p^2 - (\frac{1}{2}p^2 - 3p) = 6p - p^2 - \frac{1}{2}p^2 + 3p = -\frac{1}{2}p^2 + 9p$$

Stel A is de oppervlakte van driehoek OPQ .

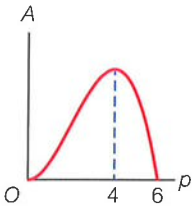
$$A = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot p = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + 9p) \cdot p = -\frac{3}{4}p^3 + 4\frac{1}{2}p^2$$

Dit geeft $\frac{dA}{dp} = -2\frac{1}{4}p^2 + 9p$.

$$\frac{dA}{dp} = 0 \text{ geeft } -2\frac{1}{4}p^2 + 9p = 0$$

$$-2\frac{1}{4}p(p - 4) = 0$$

$$p = 0 \vee p = 4$$



$$p = 4 \text{ geeft } A = -\frac{3}{4} \cdot 4^3 + 4\frac{1}{2} \cdot 4^2 = 24$$

Dus de maximale oppervlakte van driehoek OPQ is 24.

Bladzijde 187

22 a $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x = -2 \vee x = 4$$

Dus $P(-2, 0)$, $Q(4, 0)$ en $-2 < p < 4$.

$$QR = OQ - OR = 4 - p$$

$$RS = y_S = -\frac{1}{2}p^2 + p + 4$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot RS = \frac{1}{2} \cdot (4 - p) \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + p + 4) = (2 - \frac{1}{2}p) \cdot (-\frac{1}{2}p^2 + p + 4) \\ = -p^2 + 2p + 8 + \frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 - 2p = \frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + 8$$

b $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ geeft $\frac{dy}{dx} = -x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ geeft } x = 1$$

Dus $x_T = 1$.

$$A = \frac{1}{4}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + 8 \text{ geeft } \frac{dA}{dp} = \frac{3}{4}p^2 - 3p$$

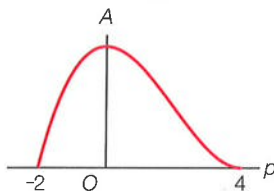
$$\left[\frac{dA}{dp} \right]_{p=1} = \frac{3}{4} \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -2\frac{1}{4}$$

$\frac{dA}{dp}$ is ongelijk aan 0 voor $p = x_T$, dus A is niet maximaal voor $p = x_T$.

c $\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $\frac{3}{4}p^2 - 3p = 0$

$$\frac{3}{4}p(p - 4) = 0$$

$$p = 0 \vee p = 4$$



A is maximaal voor $p = 0$.

De maximale oppervlakte is 8.

23 a $f(x) = \sqrt{8x+12} - x^2$ geeft $f'(x) = \frac{8}{2\sqrt{8x+12}} - 2x = \frac{4}{\sqrt{8x+12}} - 2x$

Stel $l: y = ax + b$.

$$rc_k = f'(3) = \frac{4}{\sqrt{24+12}} - 6 = -5\frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} rc_l \cdot -5\frac{1}{3} = -1 \\ rc_l \cdot -\frac{16}{3} = -1 \end{array} \right.$$

$$l \perp k, \text{ dus } rc_l \cdot rc_k = -1$$

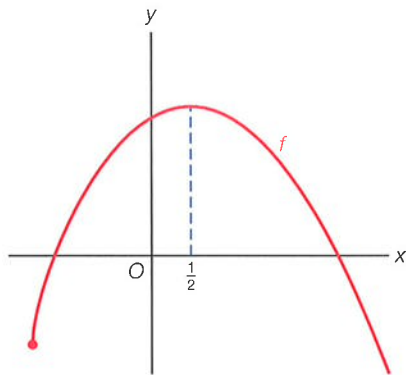
$$rc_l = \frac{3}{16}$$

$$y = \frac{3}{16}x + b$$

$$f(3) = -3, \text{ dus } A(3, -3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{16} \cdot 3 + b = -3 \\ \frac{9}{16} + b = -3 \\ b = -3\frac{9}{16} \end{array} \right.$$

Dus $l: y = \frac{3}{16}x - 3\frac{9}{16}$ en $S(0, -3\frac{9}{16})$.

b $f'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{\sqrt{8 \cdot \frac{1}{2} + 12}} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{16}} - 1 = 1 - 1 = 0$



$f'(\frac{1}{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}$.

24 a $x_P = p$ geeft $y_P = f(p) = \frac{4}{p}$

Met de stelling van Pythagoras krijg je $L = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{p^2 + \left(\frac{4}{p}\right)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{16}{p^2}}$.

b $g(p) = p^2 + \frac{16}{p^2} = p^2 + 16p^{-2}$ geeft $g'(p) = 2p - 32p^{-3} = 2p - \frac{32}{p^3}$

$g'(p) = 0$ geeft $2p - \frac{32}{p^3} = 0$

$$2p = \frac{32}{p^3}$$

$$2p^4 = 32$$

$$p^4 = 16$$

$$p = 2 \vee p = -2$$

vold. vold. niet

Zie de figuur hiernaast.

g is minimaal voor $p = 2$, dus L is minimaal voor $p = 2$.

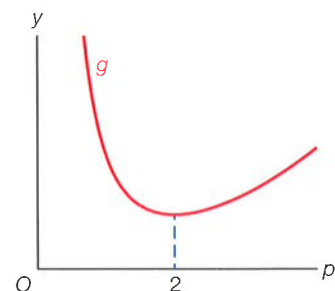
$p = 2$ geeft $x_P = 2$ en $y_P = f(2) = \frac{4}{2} = 2$, dus $P(2, 2)$.

$$rc_{OP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{2-0} = 1$$

$$f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

$$rc_k = f'(2) = -\frac{4}{2^2} = -1$$

$rc_k \cdot rc_{OP} = -1 \cdot 1 = -1$, dus k en OP staan loodrecht op elkaar.



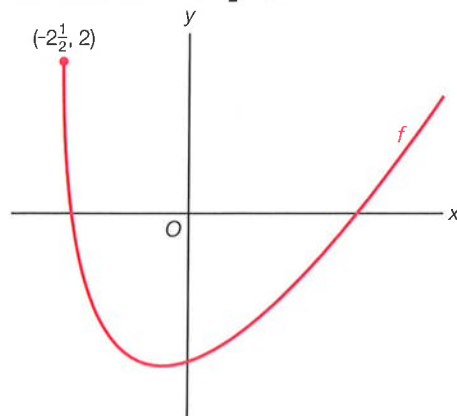
25 a $2x + 5 = 0$

$$2x = -5$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

$$f(-2\frac{1}{2}) = 2 \cdot -2\frac{1}{2} + 7 - 4 \cdot 0 = 2$$

Het randpunt is $(-2\frac{1}{2}, 2)$.



b $f(x) = 2x + 7 - 4\sqrt{2x+5}$ geeft $f'(x) = 2 - 4 \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = 2 - \frac{4}{\sqrt{2x+5}}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = 2 - \frac{4}{\sqrt{4+5}} = 2 - 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + b \\ f(2) = -1, \text{ dus } A(2, -1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 2 + b = -1 \\ 1\frac{1}{3} + b = -1 \\ b = -2\frac{1}{3} \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3}$.

k snijden met de x -as geeft $\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3} = 0$

$$\frac{2}{3}x = 2\frac{1}{3}$$

$$2x = 7$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

Dus $B(3\frac{1}{2}, 0)$.

c $f'(x) = 0$ geeft $2 - \frac{4}{\sqrt{2x+5}} = 0$

$$\frac{4}{\sqrt{2x+5}} = 2$$

$$\sqrt{2x+5} = 2$$

$$2x + 5 = 4$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ vold.}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = -1 + 7 - 4\sqrt{-1+5} = -1 + 7 - 4 \cdot 2 = -2$$

Zie de schets bij a.

$$B_f = [-2, \rightarrow)$$

d m loodrecht op p , dus $rc_m \cdot rc_p = -1$

$$rc_m \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$rc_m = -2$$

$rc_m = -2$, dus $f'(x) = -2$

$$2 - \frac{4}{\sqrt{2x+5}} = -2$$

$$\frac{4}{\sqrt{2x+5}} = 4$$

$$\sqrt{2x+5} = 1$$

$$2x+5 = 1$$

$$2x = -4$$

$$x = -2 \text{ vold.}$$

$x_C = -2$ geeft $y_C = f(-2) = -4 + 7 - 4\sqrt{-4+5} = -4 + 7 - 4 \cdot 1 = -1$, dus $C(-2, -1)$.

7 Lijnen en cirkels

Bladzijde 188

26 a $k: 3x + y = 6$ oftewel $k: y = -3x + 6$ geeft $rc_k = -3$.

$\tan(\alpha) = -3$ geeft $\alpha = -71,56\dots^\circ$

$l: y = -2x + 3$ geeft $rc_l = -2$

$\tan(\beta) = -2$ geeft $\beta = -63,43\dots^\circ$

$\beta - \alpha = -63,43\dots - -71,56\dots^\circ \approx 8,1^\circ$

De gevraagde hoek is $8,1^\circ$.

b $rc_m = \frac{0-4}{3-0} = -1\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = -1\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -53,13\dots^\circ$

$$rc_n = \frac{3-1}{3-1} = 1$$

$\tan(\beta) = 1$ geeft $\beta = 45^\circ$

$\beta - \alpha = 45^\circ - -53,13\dots^\circ \approx 98,1^\circ$

De gevraagde hoek is $180^\circ - 98,1^\circ = 81,9^\circ$.

c $p: 3x + 2y = 7$ oftewel $p: y = -1\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$ geeft $rc_p = -1\frac{1}{2}$

$\tan(\alpha) = -1\frac{1}{2}$ geeft $\alpha = -56,30\dots^\circ$

$$rc_q = \frac{2-3}{6-2} = -\frac{1}{4}$$

$\tan(\beta) = -\frac{1}{4}$ geeft $\beta = -14,03\dots^\circ$

$\beta - \alpha = -14,03\dots^\circ - -56,30\dots^\circ \approx 42,3^\circ$

De gevraagde hoek is $42,3^\circ$.

27 a $d(A, B) = \sqrt{(2-7)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b $rc_{BC} = \frac{1-4}{3-2} = -3$

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } B(2, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 2 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \end{array}$$

$$b = 10$$

Dus $BC: y = -3x + 10$.

De lijn k door A loodrecht op BC heeft dus $rc_k = \frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(7, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 7 + b = 9 \\ 2\frac{1}{3} + b = 9 \end{array}$$

$$b = 6\frac{2}{3}$$

Dus $k: y = \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$.

k snijden met BC geeft het punt S .

$$\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3} = -3x + 10$$

$$3\frac{1}{3}x = 3\frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -3x + 10 \end{array} \right\} y = -3 \cdot 1 + 10 = 7$$

Dus $S(1, 7)$.

$$d(A, BC) = d(A, S) = \sqrt{(1-7)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{c } BC = d(B, C) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(A, BC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 10$$

$$\text{d } r = d(A, BC) = 2\sqrt{10} \text{ geeft } r^2 = 40$$

$$\text{Dus c: } (x-7)^2 + (y-9)^2 = 40.$$

$$\text{e } AB = \sqrt{50} \text{ (zie a), } BC = \sqrt{10} \text{ (zie c) en } AC = \sqrt{(3-7)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$\text{De cosinusregel geeft } (\sqrt{80})^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\angle ABC)$$

$$80 = 50 + 10 - 20\sqrt{5} \cdot \cos(\angle ABC)$$

$$20\sqrt{5} \cdot \cos(\angle ABC) = -20$$

$$\cos(\angle ABC) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\angle ABC \approx 116,6^\circ$$

$$\text{28 a } k \perp l, \text{ dus } k: 3x + 2y = c \left\{ \begin{array}{l} c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \\ \text{door } A(1, 2) \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: 3x + 2y = 7.$$

$$\text{b } rc_{OB} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}, \text{ dus } rc_m = -1\frac{1}{2}.$$

$$m: y = -1\frac{1}{2}x + b \left\{ \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 2 \\ \text{door } B(3, 2) \end{array} \right.$$

$$-4\frac{1}{2} + b = 2$$

$$b = 6\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } m: y = -1\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}.$$

$$\text{c } rc_n = rc_p = \frac{0-3}{5-0} = \frac{3}{5}$$

$$n: y = \frac{3}{5}x + b \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5} \cdot 3 + b = -1 \\ \text{door } C(3, -1) \end{array} \right.$$

$$1\frac{4}{5} + b = -1$$

$$b = -2\frac{4}{5}$$

$$\text{Dus } n: y = \frac{3}{5}x - 2\frac{4}{5}.$$

$$\text{29 a } M(\frac{1}{2}(2p+3+2), \frac{1}{2}(0+p+6)) = M(p+2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}p+3)$$

$$c_1 \text{ raakt de } x\text{-as en de } y\text{-as, dus } x_M = y_M \vee x_M = -y_M.$$

$$\text{Dit geeft } p+2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p+3 \vee p+2\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}p-3$$

$$\frac{1}{2}p = \frac{1}{2} \vee 1\frac{1}{2}p = -5\frac{1}{2}$$

$$p = 1 \vee p = -3\frac{2}{3}$$

$$p > -1\frac{1}{2}, \text{ dus } p = 1.$$

$$\text{b } d(A, B) = d(O, B) \text{ geeft } \sqrt{(2-(2p+3))^2 + (p+6-0)^2} = \sqrt{2^2 + (p+6)^2}$$

$$\sqrt{(-1-2p)^2 + (p+6)^2} = \sqrt{4 + (p+6)^2}$$

$$\text{Voer in } y_1 = \sqrt{(-1-2x)^2 + (x+6)^2} \text{ en } y_2 = \sqrt{4 + (x+6)^2}.$$

$$\text{De optie snijpunt geeft } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } p = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c } rc_{AB} &= \frac{p+6-0}{2-(2p+3)} = \frac{p+6}{-2p-1} \\ AB \perp k \text{ geeft } rc_{AB} \cdot rc_k &= -1 \\ \frac{p+6}{-2p-1} \cdot \frac{9}{10} &= -1 \\ \frac{9p+54}{-20p-10} &= -1 \\ 9p+54 &= 20p+10 \\ -11p &= -44 \\ p &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } OABC \text{ is een rechthoek} &\left\{ \begin{array}{l} x_A = x_B \\ 2p+3 = 2 \end{array} \right. \\ OA \text{ ligt op de } x\text{-as} &\left\{ \begin{array}{l} 2p = -1 \\ p = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$p = -\frac{1}{2}$ geeft $A(2, 0)$ en $B(2, 5\frac{1}{2})$, dus $C(0, 5\frac{1}{2})$.

30 a $k: ax + 4y = 8$ en $l: y = bx + 2a$ oftewel $l: -bx + y = 2a$ vallen samen als $\frac{a}{-b} = \frac{4}{1} = \frac{8}{2a}$.

$$\frac{4}{1} = \frac{8}{2a} \text{ geeft } 8a = 8, \text{ dus } a = 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{-b} &= \frac{4}{1} \text{ en } a = 1 \text{ geeft } \frac{1}{-b} = \frac{4}{1} \\ -4b &= 1 \\ b &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dus $a = 1$ en $b = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{b } k: ax + 4y = 8 &\left\{ \begin{array}{l} 4a + 4 \cdot -3 = 8 \\ 4a - 12 = 8 \end{array} \right. \\ \text{door } (4, -3) &\left\{ \begin{array}{l} 4a = 20 \\ a = 5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus $l: y = bx + 10$.

$$\begin{aligned} l: y = bx + 10 &\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot b + 10 = -3 \\ 4b = -13 \end{array} \right. \\ \text{door } (4, -3) &\left\{ \begin{array}{l} b = -3\frac{1}{4} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus $a = 5$ en $b = -3\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{c } k: ax + 4y = 8 &\left\{ \begin{array}{l} 4y = 8 \\ y = 2 \end{array} \right. \\ x = 0 &\left\{ \begin{array}{l} 4y = 8 \\ y = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 2)$.

$$\begin{aligned} l: y = bx + 2a &\left\{ \begin{array}{l} 0 + 2a = 2 \\ a = 1 \end{array} \right. \\ \text{door } (0, 2) &\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dus $k: x + 4y = 8$

$$4y = -x + 8$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 2$$

$$k \perp l \text{ geeft } rc_k \cdot rc_l = -1$$

$$-\frac{1}{4} \cdot b = -1$$

$$b = 4$$

Dus $a = 1$ en $b = 4$.

- 31 a** $d(A, B) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
b $c_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$ geeft $M_1(2, 3)$ en $r = \sqrt{10}$
 $d(A, M_1) = \sqrt{(2-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $d(A, c_1) = r - d(A, M_1) = \sqrt{10} - \sqrt{2}$
c $c_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$
 $(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 0$
 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$
Dus $M_2(2, -1)$ en $r = \sqrt{5}$.
 $d(A, M_2) = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$
 $d(A, c_2) = d(A, M_2) - r = \sqrt{26} - \sqrt{5}$
d $l \perp k$, dus $l: 4x - 3y = c$
door $A(3, 4)$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} c = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0$

Dus $l: 4x - 3y = 0$.

k en l snijden geeft het punt S .

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = 15 \\ 4x - 3y = 0 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right. & \text{geeft} \left\{ \begin{array}{l} 9x + 12y = 45 \\ 16x - 12y = 0 \end{array} \right. + \\ & & \frac{25x}{25} = 45 \\ & & x = \frac{9}{5} \\ & & \left. \begin{array}{l} x = \frac{9}{5} \\ 4x - 3y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{9}{5} - 3y = 0 \\ \frac{36}{5} - 3y = 0 \\ -3y = -\frac{36}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{array} \end{array}$$

Dus $S(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.

$$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(\frac{9}{5}-3)^2 + (\frac{12}{5}-4)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

Bladzijde 189

- 32 a** De loodlijn uit N op de y -as snijdt de y -as in het punt $Q(0, 4)$.
In driehoek MNQ geeft de stelling van Pythagoras $QN^2 + QM^2 = MN^2$
 $QN^2 + 5^2 = 13^2$
 $QN^2 = 169 - 25 = 144$
 $QN = 12$
- Vierhoek $OPNM$ is een trapezium.
De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(9+4) \cdot 12 = 78$.
- b** De loodlijn uit N op de y -as snijdt de y -as in het punt $Q(0, s)$.
In driehoek MNQ geeft de stelling van Pythagoras $QN^2 + QM^2 = MN^2$
 $QN^2 + (r-s)^2 = (r+s)^2$
 $QN^2 + r^2 - 2rs + s^2 = r^2 + 2rs + s^2$
 $QN^2 = 4rs$
 $QN = \sqrt{4rs} = 2\sqrt{rs}$
- De oppervlakte van $OPNM$ is $\frac{1}{2}(r+s) \cdot 2\sqrt{rs} = (r+s)\sqrt{rs}$.
- c** In driehoek QNM geeft de stelling van Pythagoras $QM^2 + QN^2 = MN^2$
 $(r-s)^2 + OP^2 = MN^2$
 $(r-s)^2 + 15^2 = 25^2$
 $(r-s)^2 = 625 - 225$
 $(r-s)^2 = 400$
 $r-s = 20$

$$MN = 25 \text{ geeft } r + s = 25$$

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{l} r + s = 25 \\ r - s = 20 \end{array} \right. & + & \\ \frac{2r}{2} = 45 & & \\ r = 22\frac{1}{2} & & \\ r + s = 25 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} & 22\frac{1}{2} + s = 25 \\ & & s = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{Dus } r = 22\frac{1}{2} \text{ en } s = 2\frac{1}{2}.$$

33 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$

$$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 15 = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 15 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Dus $M(4, 2)$ en $r = \sqrt{5}$.

$$d(A, M) = \sqrt{(4-15)^2 + (2-9)^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$$

$$d(A, c) = d(A, M) - r = \sqrt{170} - \sqrt{5}$$

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k .

$$\left. \begin{array}{l} l: x + 2y = c \\ \text{door } M(4, 2) \end{array} \right\} c = 4 + 2 \cdot 2 = 8$$

Dus $l: x + 2y = 8$.

k en l snijden geeft het punt B .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 21 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right. \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \text{ geeft } \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 42 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} 5x & = & 50 \\ x = 10 & & \\ x + 2y = 8 & \left. \begin{array}{l} 10 + 2y = 8 \\ 2y = -2 \\ y = -1 \end{array} \right\} & \end{array}$$

Dus $B(10, -1)$.

$$d(B, M) = \sqrt{(4-10)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$d(k, c) = d(B, c) = d(B, M) - r = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Geldt $d(A, c) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c)$?

$$\sqrt{170} - \sqrt{5} > 2\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{170} - \sqrt{5} > 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{170} > 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{170} > \sqrt{180}$$

Dit klopt niet dus $d(A, c) > 2\frac{1}{2} \cdot d(k, c)$ geldt niet.

34 a $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 5 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

Dus middelpunt $(-1, -2)$.

$(-1, -2)$ op k geeft $p = -1 + -2 = -3$.

b $l: x - 3y = q$ oftewel $l: x = 3y + q$

$x = 3y + q$ substitueren in $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ geeft

$$(3y + q)^2 + y^2 + 2(3y + q) + 4y - 5 = 0$$

$$9y^2 + 6qy + q^2 + y^2 + 6y + 2q + 4y - 5 = 0$$

$$10y^2 + (6q + 10)y + q^2 + 2q - 5 = 0$$

$$D = (6q + 10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (q^2 + 2q - 5) = 36q^2 + 120q + 100 - 40q^2 - 80q + 200 = -4q^2 + 40q + 300$$

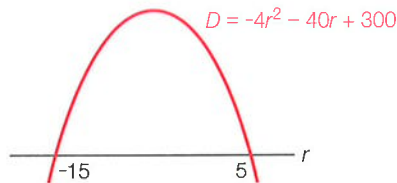
$$D = 0 \text{ geeft } -4q^2 + 40q + 300 = 0$$

$$q^2 - 10q - 75 = 0$$

$$(q + 5)(q - 15) = 0$$

$$q = -5 \vee q = 15$$

c $m: 3x + y = r$ oftewel $m: y = -3x + r$
 $y = -3x + r$ substitueren in $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ geeft
 $x^2 + (-3x + r)^2 + 2x + 4(-3x + r) - 5 = 0$
 $x^2 + 9x^2 - 6rx + r^2 + 2x - 12x + 4r - 5 = 0$
 $10x^2 + (-6r - 10)x + r^2 + 4r - 5 = 0$
 $D = (-6r - 10)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (r^2 + 4r - 5) = 36r^2 + 120r + 100 - 40r^2 - 160r + 200 = -4r^2 - 40r + 300$
 $D = 0$ geeft $-4r^2 - 40r + 300 = 0$
 $r^2 + 10r - 75 = 0$
 $(r - 5)(r + 15) = 0$
 $r = 5 \vee r = -15$



Geen gemeenschappelijke punten, dus $D < 0$.
Dus $r < -15 \vee r > 5$.

- 35 a** c_1 gaat door A en B , dus het middelpunt M_1 ligt op de lijn $y = 5$.
 c_1 raakt de x -as in C , dus M_1 ligt op de lijn $x = 4$.
Dus is $M_1(4, 5)$ en is de straal gelijk aan 5.
Dit geeft $c_1: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
Het middelpunt M_2 van c_2 is $M_2(0, 5)$ en de straal is gelijk aan 3.
Dit geeft $c_2: x^2 + (y - 5)^2 = 9$.

- b** Noem de raakpunten D en E .

$$\sin(\angle DOM_2) = \frac{DM_2}{OM_2} = \frac{3}{5} \text{ geeft } \angle DOM_2 = 36,86\dots^\circ$$

De hoek tussen de raaklijnen is $2 \cdot 36,86\dots^\circ \approx 73,7^\circ$.

- c** c_3 raakt de y -as in $A(0, 2)$, dus $x_{M_3} = r$ en $y_{M_3} = 2$, dus $M_3(r, 2)$.
 c_3 gaat door $M_1(4, 5)$, dus $d(M_1, M_3) = r$.

$$d(M_1, M_3) = r$$

$$\sqrt{(r - 4)^2 + (2 - 5)^2} = r$$

$$(r - 4)^2 + (-3)^2 = r^2$$

$$r^2 - 8r + 16 + 9 = r^2$$

$$-8r = -25$$

$$r = 3\frac{1}{8}$$

$$\text{Dus } c_3: (x - 3\frac{1}{8})^2 + (y - 2)^2 = 9\frac{49}{64}.$$

Bladzijde 190

- 36 a** Met dit werkschema wordt het middelpunt M van de cirkel gevonden door de coördinaten van het snijpunt van twee middelloodlijnen van driehoek ABC te berekenen. Daarna geeft $d(M, A)$ de straal van de cirkel.

- b** $rc_{AB} = \frac{1-8}{7-6} = -7$, dus $rc_k = \frac{1}{7}$.

Het midden van AB is $(\frac{1}{2}(6+7), \frac{1}{2}(8+1)) = (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$.

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \frac{1}{7}x + b \\ \text{door } (6\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{7} \cdot 6\frac{1}{2} + b = 4\frac{1}{2} \\ \frac{13}{14} + b = 4\frac{1}{2} \\ b = 3\frac{4}{7} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7}.$$

$$rc_{AC} = \frac{4-8}{-2-6} = \frac{1}{2}, \text{ dus } rc_l = -2.$$

Het midden van AC is $(\frac{1}{2}(6+2), \frac{1}{2}(8+4)) = (2, 6)$.

$$\begin{aligned} l: y = -2x + b \\ \text{door } (2, 6) \quad \left. \begin{aligned} -2 \cdot 2 + b &= 6 \\ -4 + b &= 6 \\ b &= 10 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dus $l: y = -2x + 10$.

k en l snijden geeft

$$\frac{1}{7}x + 3\frac{4}{7} = -2x + 10$$

$$2\frac{1}{7}x = 6\frac{3}{7}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -2x + 10 \end{aligned} \right\} y = -2 \cdot 3 + 10 = 4$$

Dus $M(3, 4)$.

$$d(M, A) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Dus } c: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

37 a $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
 $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$
 $(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$
 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

Dus $M(1, 3)$ en $r = \sqrt{5}$.

$$\text{rc}_{AM} = \frac{3-0}{1-5} = -\frac{3}{4}, \text{ dus } \angle OAM = 36,86\dots^\circ.$$

$$\text{rc}_{OM} = \frac{3-0}{1-0} = 3, \text{ dus } \angle AOM = 71,56\dots^\circ.$$

$$\angle OMA = 180^\circ - 36,86\dots^\circ - 71,56\dots^\circ \approx 71,6^\circ$$

b $d(A, M) = \sqrt{(1-5)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$$\sin(\angle BAM) = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ geeft } \angle BAM = 26,56\dots^\circ$$

$$\varphi = 2 \cdot \angle BAM = 2 \cdot 26,56\dots^\circ \approx 53,1^\circ$$

c De cirkel die de x -as in A raakt en ook de y -as raakt heeft middelpunt $N(5, 5)$ en straal 5.

$$d(M, N) = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \neq 5$$

Deze cirkel gaat niet door M . Dit is dus niet cirkel d . Dus d raakt niet de y -as.

38 a Het middelpunt van de cirkel is het midden M van AB , dus $M(9, 8)$.

S ligt even ver boven de lijn $y = 8$ als A eronder ligt, dus $S(3, 16)$.

$y_S = y_B$, dus BS is horizontaal en hieruit volgt $BS \parallel AR$.

Dus $ARBS$ is een trapezium.

b $\text{rc}_{AB} = \frac{16-0}{15-3} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$, dus $\text{rc}_l = -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} l: y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } S(3, 16) \quad \left. \begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot 3 + b &= 16 \\ -2\frac{1}{4} + b &= 16 \\ b &= 18\frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } l: y = -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4} = 0$$

$$-\frac{3}{4}x = -18\frac{1}{4}$$

$$x = 24\frac{1}{3}$$

Dus $R(24\frac{1}{3}, 0)$.

c $AR = 24\frac{1}{3} - 3 = 21\frac{1}{3}$, $BS = 15 - 3 = 12$ en $AS = 16$, dus

$$O(ARBS) = \frac{1}{2}(AR + BS) \cdot AS = \frac{1}{2}(21\frac{1}{3} + 12) \cdot 16 = \frac{1}{2} \cdot 33\frac{1}{3} \cdot 16 = 266\frac{2}{3}.$$

$$\text{d } AB: y = \frac{4}{3}x + b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot 3 + b = 0 \\ b = -4 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } AB: y = \frac{4}{3}x - 4.$$

AB snijden met l geeft het punt T .

$$\frac{4}{3}x - 4 = -\frac{3}{4}x + 18\frac{1}{4}$$

$$\frac{25}{12}x = 22\frac{1}{4}$$

$$x = 10,68$$

$$x = 10,68 \text{ geeft } y = \frac{4}{3} \cdot 10,68 - 4 = 10,24$$

$$\text{Dus } T(10,68; 10,24).$$

$$d(A, l) = d(A, T) = \sqrt{(10,68 - 3)^2 + (10,24 - 0)^2} = \sqrt{163,84} = 12,8$$

8 Goniometrie

39 $x_P = -0,4$, dus $\cos(\alpha_P) = -0,4$.

De GR geeft 1,982...

$$\text{Dus } \alpha_P = 1,982...$$

$$y_Q = 0,6, \text{ dus } \sin(\alpha_Q) = 0,6.$$

De GR geeft 0,643...

$$\text{Dus } \alpha_Q = 0,643...$$

$$\alpha_P - \alpha_Q = 1,982... - 0,643... \approx 1,34$$

$$\text{Bij } y_Q = 0,6 \text{ hoort ook } \alpha_Q = \pi - 0,643... = 2,498...$$

$$\alpha_Q - \alpha_P = 2,498... - 1,982... \approx 0,52$$

$$1,34 < \frac{1}{2}\pi \text{ en } 0,52 < \frac{1}{2}\pi$$

Dus $\angle POQ \approx 0,52$ of $\angle POQ \approx 1,34$.

Bladzijde 191

40 a $f(x) = 2 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$

evenwichtsstand 2

amplitude 3

$$\text{periode } \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{beginpunt } (\frac{1}{6}\pi, 2)$$

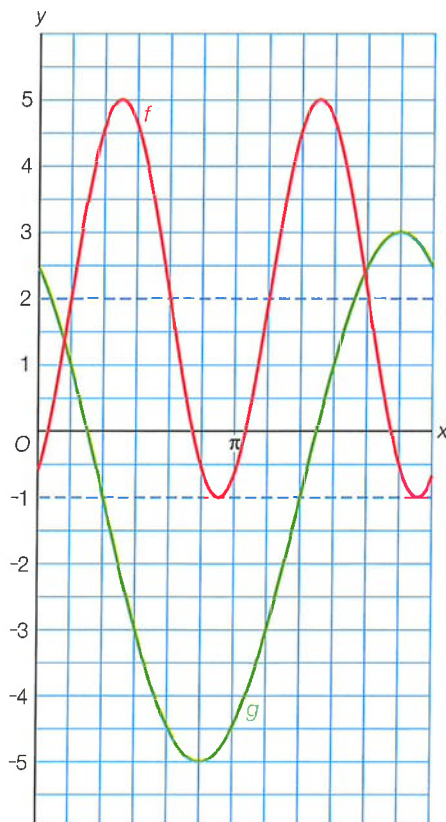
$$g(x) = -1 + 4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi)$$

evenwichtsstand -1

amplitude 4

$$\text{periode } 2\pi$$

$$\text{beginpunt } (-\frac{1}{6}\pi, 3)$$



- b** $p = 2, q = 3$ en $r = 2$.

De grafiek van $f(x) = 2 + 3 \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ heeft een hoogste punt bij $x = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{12}\pi$, dus een hoogste punt is $(\frac{5}{12}\pi, 5)$.
Dus $y = 2 + 3 \cos(2(x - \frac{5}{12}\pi))$.

- c** De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $x = \frac{1}{6}\pi$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=\frac{1}{6}\pi} = 6$$

Dus de maximale helling is 6.

- d** $g(x) = 1$ geeft $-1 + 4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi) = 1$

$$4 \cos(x + \frac{1}{6}\pi) = 2$$

$$\cos(x + \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

Zie de figuur bij a.

$g(x) < 1$ geeft $\frac{1}{6}\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$

41 a $a = \frac{3\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = 1$

$$b = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi, \text{ dus periode} = 1\frac{1}{3}\pi, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}.$$

Dalend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \pi$,
dus $d = \pi$.

Dit geeft $y = 1 - 2\frac{1}{2} \sin(1\frac{1}{2}(x - \pi))$.

b $a = \frac{40 + 0}{2} = 20$

$$b = 40 - 20 = 20$$

$$\frac{1}{4} \text{ periode} = 4 - 1 = 3, \text{ dus periode} = 12, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi.$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4 - \frac{1}{2} \cdot \text{periode} = 4 - \frac{1}{2} \cdot 12 = -2$, dus $d = -2$.

Dit geeft $N = 20 + 20 \sin(\frac{1}{6}\pi(t + 2))$.

42 a $f(x) = 0$ geeft $\sin(\pi(x - 1)) \cdot \cos(\pi(x - \frac{1}{4})) = 0$

$$\sin(\pi(x - 1)) = 0 \vee \cos(\pi(x - \frac{1}{4})) = 0$$

$$\pi(x - 1) = k \cdot \pi \vee \pi(x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$x - 1 = k \cdot 1 \vee x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + k \cdot 1$$

$$x = 1 + k \cdot 1 \vee x = \frac{3}{4} + k \cdot 1$$

$$x \text{ in } [0, 3] \text{ geeft } x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = \frac{3}{4} \vee x = 1\frac{3}{4} \vee x = 2\frac{3}{4}$$

b Voer in $f(x) = \sin(\pi(x - 1)) \cdot \cos(\pi(x - \frac{1}{4}))$.

De optie minimum geeft $x = 0,375$ en $y = -0,853...$

De optie maximum geeft $x = 0,875$ en $y = 0,146...$

$$a = \frac{0,146... + -0,853...}{2} = -0,353... \approx -0,35$$

$$b = 0,146... - -0,353... = 0,5$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 0,875 - 0,375 = 0,5, \text{ dus periode} = 1, \text{ dus } c = \frac{2\pi}{1} \approx 6,28$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 0,375 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 0,375 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0,625$,
dus $d \approx 0,63$.

- c De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

Dat is bij $x = 0,625$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0,625} \approx 3,14$$

Dus de maximale helling is ongeveer 3,14.

Bladzijde 192

43 a $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi$$

b $\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi(x + \frac{1}{3})) = 0$

$$\sin(2x - \frac{1}{4}\pi) = 0 \vee \cos(\frac{1}{4}\pi(x + \frac{1}{3})) = 0$$

$$2x - \frac{1}{4}\pi = k \cdot \pi \vee \frac{1}{4}\pi(x + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \vee x + \frac{1}{3} = 2 + k \cdot 4$$

$$x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \vee x = \frac{2}{3} + k \cdot 4$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{5}{8}\pi \vee x = \frac{1}{8}\pi \vee x = \frac{5}{8}\pi \vee x = \frac{2}{3} \vee x = \frac{5}{3}$$

c $5 \sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$$\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x = k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi$$

d $\sin^2(\frac{1}{2}x) + \sin(\frac{1}{2}x) = 0$

$$\sin(\frac{1}{2}x) \cdot (\sin(\frac{1}{2}x) + 1) = 0$$

$$\sin(\frac{1}{2}x) = 0 \vee \sin(\frac{1}{2}x) = -1$$

$$\frac{1}{2}x = k \cdot \pi \vee \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot 2\pi \vee x = 3\pi + k \cdot 4\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = 0 \vee x = 2\pi$$

e $\sin(\pi(x-1)) \cdot \sin(\frac{3}{2}x) = 0$

$$\sin(\pi(x-1)) = 0 \vee \sin(\frac{3}{2}x) = 0$$

$$\pi(x-1) = k \cdot \pi \vee \frac{3}{2}x = k \cdot \pi$$

$$x-1 = k \cdot 1 \vee x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x = 1 + k \cdot 1 \vee x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft}$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4 \vee x = 5 \vee x = 6 \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi \vee x = 2\pi$$

f $(\cos(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot (\cos(x) + \sqrt{2}) = 0$

$$\cos(x) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0 \vee \cos(x) + \sqrt{2} = 0$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \cos(x) = -\sqrt{2}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x \text{ in } [0, 2\pi] \text{ geeft } x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{1}{4}\pi$$

44 a Van de grafiek van $y = \cos(x)$ is de evenwichtsstand 0, de amplitude 1 en de periode 2π .

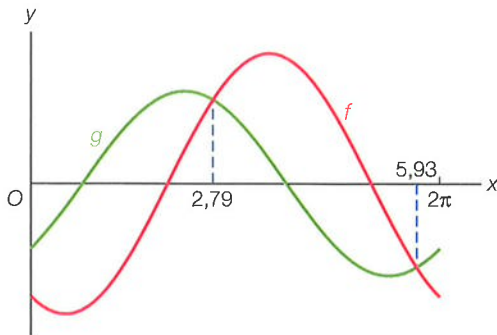
Verder gaat de grafiek van $y = \cos(x)$ stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2}\pi$.

Dus de formule $y = \cos(x)$ is ook te schrijven als $y = \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$.

$$y = \sin(x - \frac{1}{2}\pi) \xrightarrow{\text{translatie } (-\frac{5}{6}\pi, 0)} y = \sin(x + \frac{5}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -2} y = -2 \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$$

Dus de grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door hierop de verschuiving $\frac{5}{6}\pi$ naar links en de vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -2 toe te passen.

- b** Voer in $y_1 = -2 \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ en $y_2 = \sin(x) - \cos(x)$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 2,79$ en $x \approx 5,93$.



$f(x) < g(x)$ geeft $0 \leq x < 2,79 \vee 5,93 < x \leq 2\pi$

- c** Zet y_1 uit.
De optie maximum geeft $x \approx 2,36$ en $y \approx 1,41$, dus $a \approx 1,41$.
De optie nulpunt geeft $x \approx 0,79$, dus $b \approx 0,79$.

- 45 a** Voer in $y_1 = 1 + 2 \sin(\frac{1}{2}\pi(x-1)) + \cos(\frac{1}{2}\pi(x+\frac{1}{3}))$.
De optie minimum geeft $x = 0,264...$ en $y = -0,239...$
De optie maximum geeft $x = 2,264...$ en $y = 2,239...$
$$p = \frac{2,239... + -0,239...}{2} = 1$$

$$q = 2,239... - 1 \approx 1,24$$

$$\frac{1}{2} \text{ periode} = 2,264... - 0,264... = 2, \text{ dus periode} = 4, \text{ dus } r = \frac{2\pi}{4} \approx 1,57.$$

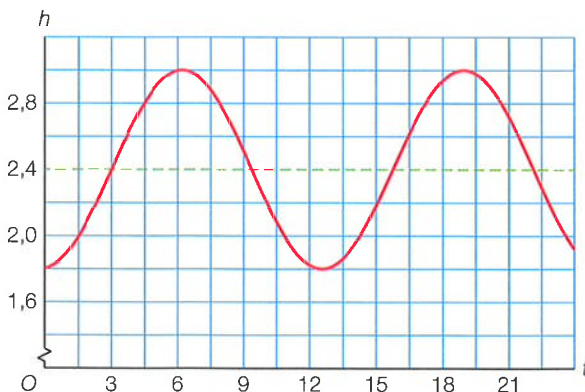
Stijgend door de evenwichtsstand bij
 $x = 0,264... + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 0,264... + \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,264...$, dus $s \approx 1,26$.
$$b \quad a = \frac{2,239... + 0}{2} = 1,119... \approx 1,12$$

$$b = 2,239... - 1,119... \approx 1,12$$

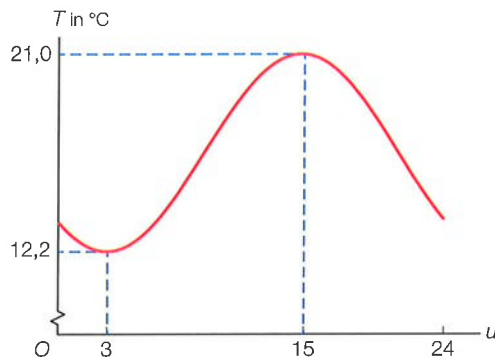
periode $= 3 \cdot 4 = 12$, dus $c = \frac{2\pi}{12} \approx 0,52$.
Een hoogste punt bij $x = 2,264...$, dus $d \approx 2,26$.

Bladzijde 193

- 46 a** $h = 2,4 + 0,6 \sin(0,51(t-3))$
evenwichtsstand 2,4
amplitude 0,6
periode $\frac{2\pi}{0,51} = 12,319... \approx 12,32$
beginpunt (3; 2,4)



- b** Voer in $y_1 = 2,4 + 0,6 \sin(0,51(x - 3))$.
 De optie maximum geeft $x = 6,079...$ en $x = 18,399...$
 $0,079... \text{ uur} = 0,079... \cdot 60 = 4,799... \text{ minuten} \approx 5 \text{ minuten}$
 $0,399... \text{ uur} = 0,399... \cdot 60 = 23,997... \text{ minuten} \approx 24 \text{ minuten}$
 Dus om 6:05 uur en om 18:24 uur.
- c** De periode is $12,319... \text{ uur} = 12 \text{ uur en } 19,19... \text{ minuten}$.
 Elke dag komt er dus $2 \cdot 19,19... = 38,39... \text{ minuten}$ bij.
 Dus op 5 mei is het voor de tweede keer hoogwater om
 $18:24 \text{ uur} + 3 \cdot 38,39... \text{ minuten} = 18:24 \text{ uur} + 115,18... \text{ minuten} \approx 20:19 \text{ uur}$.
- d** Er moet gelden dat $h > 2,60 + 0,30$, dus $h > 2,90$.
 Voer in $y_2 = 2,90$.
 De optie snijpunt geeft $x = 4,931...$ en $x = 7,228...$
 $0,931... \cdot 60 = 55,89...$
 $0,228... \cdot 60 = 13,70...$
 Dus tussen 4:56 uur en 7:14 uur.

47 a

- b** Stel $T = a + b \sin(c(u - d))$.

$$a = \frac{21,0 + 12,2}{2} = 16,6$$

 $b = 21,0 - 16,6 = 4,4$
 De periode is 24 uur, dus $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $u = \frac{3 + 15}{2} = 9$, dus $d = 9$.
 Dus $T = 16,6 + 4,4 \sin(\frac{1}{12}\pi(u - 9))$.
- c** Voer in $y_1 = 7,6 + 4,3 \sin(\frac{1}{12}\pi(x - 10))$ en $y_2 = 11,5$.
 De optie snijpunt geeft $x = 14,339...$ en $x = 17,660...$
 $17,660... - 14,339... = 3,321...$
 Dus gedurende $3,321... \cdot 60 \approx 199 \text{ minuten}$.
- d** De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $u = 10$, dus maximale stijging bij $u = 10$.

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=10} \approx 1,1$$

 Dus de maximale stijging is ongeveer $1,1^\circ\text{C/uur}$.

Bladzijde 194**48 a**

- Uit de gegevens volgt dat $O(0, 0)$ en $B(75, 0)$ laagste punten zijn en dat $D(37\frac{1}{2}, 24)$ een hoogste punt is.
 Stel $y = a + b \sin(c(x - d))$.

$$a = \frac{24 + 0}{2} = 12$$

 $b = 24 - 12 = 12$
 De periode is 75 meter, dus $c = \frac{2\pi}{75} = \frac{2}{75}\pi$.
 Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{2} \cdot 75 = 37\frac{1}{2}$, dus $d = 37\frac{1}{2}$.
 Dus $y = 12 + 12 \sin(\frac{2}{75}\pi(x - 37\frac{1}{2}))$.

- b** Voer in $y_1 = 12 + 12 \sin(\frac{2}{75}\pi(x - 18\frac{3}{4}))$.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=18\frac{3}{4}} = 1,005...$$

$$\tan(\alpha) = 1,005... \text{ geeft } \alpha \approx 45^\circ$$

Dus de maximale hellingshoek is 45° .

- c** Uit de gegevens volgen het hoogste punt $(0, 18)$ en het laagste punt $(37\frac{1}{2}, 12)$.

Stel $y = a + b \cos(c(x - d))$.

$$a = \frac{18 + 12}{2} = 15$$

$$b = 18 - 15 = 3$$

$$\text{De halve periode is } 37\frac{1}{2} \text{ meter, dus } c = \frac{2\pi}{2 \cdot 37\frac{1}{2}} = \frac{2}{75}\pi.$$

Het hoogste punt is $(0, 18)$, dus $d = 0$.

$$\text{Dus } y = 15 + 3 \cos(\frac{2}{75}\pi x).$$

$$\text{Voer in } y_2 = 15 + 3 \cos(\frac{2}{75}\pi x).$$

De optie snijpunt geeft $x = -21,15...$ en $x = 21,15...$

$$21,15... - (-21,15...) = 42,30...$$

Dus de afstand is ongeveer 42 meter.