

7 Kansen

Voorkennis

- V1**
- a 1 van de 8, dus $\frac{1}{8}$.
 - b 5 van de 8, dus $\frac{5}{8} = 0,625$.
 - c 4 van de 8, dus $\frac{4}{8} \cdot 100\% = 50\%$.
 - d 3 van de 8, dus $\frac{3}{8} = 0,375$ of $37,5\%$.
 - e Haar redenering klopt aardig als ze erbij zet dat de wijzer *ongeveer* 125 keer op het getal 14 zal komen te staan.
- V2**
- a Van de 52 kaarten zijn er 13 kaarten met schoppen, dus de kans is $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
 - b Van de 52 kaarten is er één schoppen vrouw, dus de kans is $\frac{1}{52}$.
 - c Van de nog 51 kaarten zijn er nog drie vrouwen, dus de kans is $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$.
- V3**
- a In de tabel van het voorbeeld staan drie paren met som 7, dus de kans is $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
 - b Als het verschil 0 is, dan zijn de twee worpen gelijk. Er zijn zes van zulke paren, dus de kans is $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
 - c Er zijn negen paren zonder 1, 2 en 3, dus de kans is $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- V4**
- a Het aantal kortste routes met 5 stappen naar rechts en 2 stappen omhoog is $\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21$.
 - b Het aantal kortste routes van A naar C is $\binom{12}{7} = 792$.
 - c $\binom{12}{5}$ is het aantal routes in een rooster van 5 bij $12 - 5 = 7$. Dat is gelijk aan het aantal routes in een rooster van 7 bij 5.
 - d Het aantal routes van B naar C is $\binom{5}{2} = 10$, dus het aantal routes van A via B naar C is $21 \times 10 = 210$.
- V5**
- a Voor de eerste positie keus uit 8 knikkers, voor de volgende keus uit 7 enzovoort. In totaal $8 \times 7 \times 6 \times \dots \times 1 = 8! = 40\,320$.
 - b $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$
 - c Bij elke trekking zijn er acht mogelijkheden. In totaal is het aantal mogelijkheden $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^5 = 32\,768$.
- V6**
- a Bij elke worp zijn er zes mogelijkheden: $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5 = 7776$.
 - b Elk getal bestaat uit drie keer een 1 en twee keer een 6, dus $\binom{5}{3} = 10$ mogelijkheden.
 - c Voor de 5 zijn er vijf mogelijke plaatsen. Daarna zijn er voor de 6 nog vier mogelijke plaatsen. De drie open plaatsen moeten worden gevuld met 4-en. In totaal $5 \times 4 \times 1 = 20$ mogelijkheden.
 - d Voor de eerste worp zijn er zes mogelijkheden. Voor de tweede nog vijf enzovoort. In totaal $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ mogelijkheden.

7.1 Experimentele kansen

intro Je kunt niet met zekerheid zeggen of de kans wel of niet gelijk is aan 50%, maar het experiment op de foto suggereert dat de kans op rugligging groter is dan 50%. In dit experiment is het percentage rugligging $\frac{13}{20} \times 100\% = 65\%$.

- 1 a Het totaal aantal wedstrijden is 250.
De kans dat Masho wint is $\frac{148}{250} \approx 0,592$, dus ongeveer 59,2%.
- 2 a De kans is $\frac{5}{48} \approx 0,1042$.
b De kans is $\frac{9+10}{48} = \frac{19}{48} \approx 0,3958$.
c De kans is $\frac{9}{26} \approx 0,3462$.
d De kans is $\frac{10}{24} \approx 0,4167$.
- 3 a De kans op blauw is $\frac{48}{80} = \frac{3}{5} = 0,6$.
b De helft van de oppervlakte is blauw. Je verwacht dan ook de helft van 80 is 40 keer blauw. Het verschil is 6.
- 4 a Dit rijtje hoort bij een gezin met twee jongens en twee meisjes.
b Bij 100 keer werpen lag er 41 keer twee munt boven.
c Je kunt het beste de kolom met 100 keer werpen gebruiken. Hoe vaker je gooit, hoe kleiner de invloed van het toeval is.
d De schatting van de kans is $\frac{26}{100} = 0,26$ of 26%.
- 5 a Van de vijf kinderen die geboren worden zijn er gemiddeld drie jongens en twee meisjes. De kans op een meisje is $\frac{2}{5} = 0,4$.
b 61812 31184 20508 09542 98466 34426 72453 28176 30174 50175
24927 64264
c De kans op een meisje is $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$. Van de tien cijfers moeten er vier een meisje voorstellen, bijvoorbeeld de cijfers 0, 1, 2 en 3.
d Tellen in de groepjes van opdracht b levert vier gezinnen met drie meisjes.
e De kans is $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
f Van de tien rijtjes is er één met alle cijfers groter dan of gelijk aan 4.
De experimentele kans op een gezin met vijf jongens is $\frac{1}{10} = 0,1$.
- 6 a Het verwachte aantal is 50. De uitslag verschilt 8.
b Bij 500 keer: het verwachte aantal is 250; de uitslag verschilt 12.
Bij 5000 keer: het verwachte aantal is 2500; de uitslag verschilt 76.
c De afwijking van het verwachte aantal kop: bij 100 keer 8%, bij 500 keer 6%, bij 5000 keer 3,8%.
d Hoe groter het aantal simulaties, hoe kleiner de relatieve afwijking van het verwachte aantal.

7 Kansen

02 a

	geslacht		totaal
profiel	j	m	
CM	8	29	37
EM	83	86	169
NG	48	89	137
NT	114	83	197
totaal	253	287	540

- b Er zijn 169 leerlingen met profiel EM.
- c In totaal zijn er 540 leerlingen. Hiervan volgen 169 het profiel EM.
De kans is $\frac{169}{540} \approx 0,31$.
- d Er zijn 287 meisjes. Hiervan volgen er 29 het profiel CM.
De kans is $\frac{29}{287} \approx 0,10$.
- e Er zijn $137 + 197 = 334$ leerlingen met een NG of een NT profiel.
- f De kans is $\frac{334}{540} \approx 0,62$.
- g Er zijn 137 leerlingen met het profiel NG. Daarvan zijn er 89 meisjes.
De kans is $\frac{89}{137} \approx 0,65$.

U1 a Er zijn 15 naalden die de horizontale lijnen snijden. De kans is dus $\frac{15}{25} = 0,6$.

- b Uit $\frac{2}{\pi} \approx 0,6$ volgt $\pi \approx \frac{2}{0,6} \approx 3,33$.
- c Doe het experiment met een veel groter aantal naalden.

7.2 Theoretische kansen

intro Maak een tabel met alle mogelijke uitkomsten en noteer bij elke uitkomst of hij bij A of bij B of geen grondstof krijgt.

	1	2	3	4	5	6
1		A		B		
2	A		B			A
3		B			A	B
4	B			A	B	
5			A	B		
6		A	B			

Er zijn 7 uitkomsten die bij A een grondstof opleveren en 8 uitkomsten die bij B een grondstof opleveren. Bij B is dus gunstiger.

- 7 a Bij de tweede trekking zijn er nog vier rode knikkers in de vaas.
De kans op weer een rode knikker is $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$.
- b Er zitten nog 12 knikkers in de vaas, waarvan 5 rood.
De kans op een rode knikker is $\frac{5}{12}$.

8

	1	2	3	4	5	6
1	L	L	L	L	L	L
2	L	P	P	P	P	L
3	L	P	P	P	P	L
4	L	P	P	P	P	L
5	L	P	P	P	P	L
6	L	L	L	L	L	L

Van de 36 mogelijke uitkomsten zijn er $4 \times 4 = 16$ gunstig voor Peter.
De kans dat Peter wint is $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$. Dat is kleiner dan $\frac{1}{2}$, dus Peter heeft een kleinere kans dan Liesbeth om te winnen.

9 a Het tweede tolletje heeft geen sector met het getal 4.**b**

	1	2	3
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)

c Van de 12 mogelijke uitkomsten zijn er 3 die som 4 hebben. De kans op som 4 is dus $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

d

som	2	3	4	5	6	7
kans	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

e Van de 12 mogelijke uitkomsten zijn er 6 met een som van minstens 5. De kans is $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

10 a Bij elke worp zijn er twee mogelijkheden.

In totaal zijn er $2 \times 2 \times 2 = 8$ mogelijke uitkomsten.

b De gebeurtenis KMM is één van de acht mogelijke uitkomsten, dus $P(KMM) = \frac{1}{8}$.

c Er zijn $\binom{3}{1} = 3$ mogelijke volgorden: KMM , MKM en MMK .

d $P(1 \text{ keer kop}) = 3 \cdot P(KMM) = \frac{3}{8}$

e Er zijn 3 mogelijke volgorden, dus $P(2 \text{ keer kop}) = 3 \cdot P(KKM) = \frac{3}{8}$.

11 a Bij elke worp is het aantal ogen positief, dus elke uitkomst is gunstig voor

gebeurtenis A : $P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{6}{6} = 1$.

b $P(B) + P(C) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

c Elke uitkomst is gunstig voor óf gebeurtenis D óf gebeurtenis E .

$P(D) + P(E) = \frac{n(D)}{12} + \frac{n(E)}{12} = \frac{n(D) + n(E)}{12} = \frac{12}{12} = 1$.

d De uitkomsten 2 en 4 zijn gunstig voor beide gebeurtenissen. Ze worden meegeteld in zowel $n(C)$ als in $n(E)$.

7 Kansen

- 12** $P(\text{niet} - A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$
- b** $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
 $P(C) = \frac{5}{12}$, want er zijn vijf uitkomsten waar de twee waarden 1 verschillen.
- c** Er zijn drie uitkomsten bij gebeurtenis B en geen van deze uitkomsten heeft verschil 1.
 $P(X) = P(B \text{ en niet} - C) = P(B) = \frac{1}{4}$
- d** Het verschil is groter dan 1 in vier gevallen.
 $P(\text{niet} - D) = 1 - P(D) = 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

- 13 a** Bij elke dobbelsteen zijn er zes mogelijke uitkomsten. In totaal zijn er $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ mogelijke uitkomsten.
- b** Er zijn drie mogelijkheden waarbij de som 4 is: (2,1,1); (1,2,1); (1,1,2).
- c** $\text{niet} - A$: De som van de ogen is hoogstens 4.
- d** $P(\text{niet} - A) = P(\text{som} \leq 4) = P(\text{som} = 3 \text{ of } \text{som} = 4) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$
- e** $P(\text{som} < 17) = 1 - P(\text{som} \geq 17) = 1 - P(\text{som} = 17 \text{ of } \text{som} = 18) = 1 - \frac{4}{216} = \frac{53}{54}$

08 a

som	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- b** Er zijn 5 uitkomsten met som 8.
- c** Het totaal aantal mogelijkheden is 36, waarvan er 5 zijn met som 8:
 $P(\text{som} = 8) = \frac{5}{36}$
- d** Er zijn 20 uitkomsten waarbij er 2 of 5 ogen worden gegooid.
- e** De kans is $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

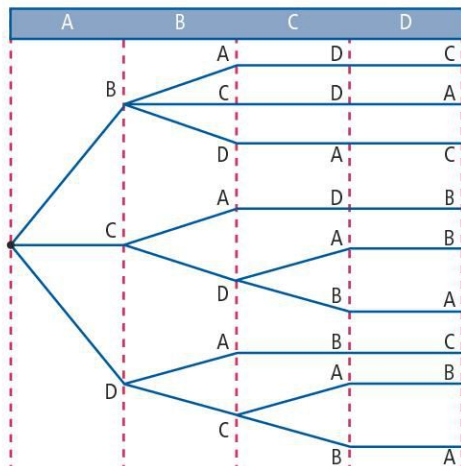
012 a

	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)

Er zijn $6 \times 4 = 24$ mogelijke uitkomsten.

- b** Er zijn 4 uitkomsten waarbij de som 7 is.
- c** $P(A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$; $P(\text{niet} - A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
- d** Er zijn 7 uitkomsten waarbij het verschil 1 is.
- e** $P(B) = \frac{7}{24}$; en $P(\text{niet} - B) = \frac{17}{24}$
- f** Er zijn 7 uitkomsten die voldoen aan gebeurtenis B .
 Daarvan zijn er 2, namelijk (4, 3) en (3, 4) die voldoen aan gebeurtenis A .
 Er zijn dus 5 van de 24 gebeurtenissen die wel aan B maar niet aan A voldoen. Dus $P(X) = \frac{5}{24}$.

- U2 a** Er zijn $4! = 24$ mogelijkheden waarop de lootjes verdeeld kunnen worden. In het boomdiagram staan alle mogelijkheden waarop niemand zijn eigen lootje heeft getrokken.



De kans dat niemand zijn eigen lootje heeft getrokken is $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

- b** De gebeurtenis dat minstens één persoon zichzelf trekt is het complement van de gebeurtenis dat niemand zijn eigen lootje trekt. Deze kans is $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
- c** De eerste drie personen mogen niet zichzelf en ook niet de laatste persoon trekken.

Er zijn twee mogelijke volgorden: (B, C, A) en (C, A, B) .

De kans is $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

7.3 Kansen berekenen

intro Maak een schema met alle mogelijke uitkomsten.

	R	R	B	B	B	B
R	RR	RR	RB	RB	RB	RB
R	RR	RR	RB	RB	RB	RB
B	BR	BR	BB	BB	BB	BB
B	BR	BR	BB	BB	BB	BB
B	BR	BR	BB	BB	BB	BB
B	BR	BR	BB	BB	BB	BB

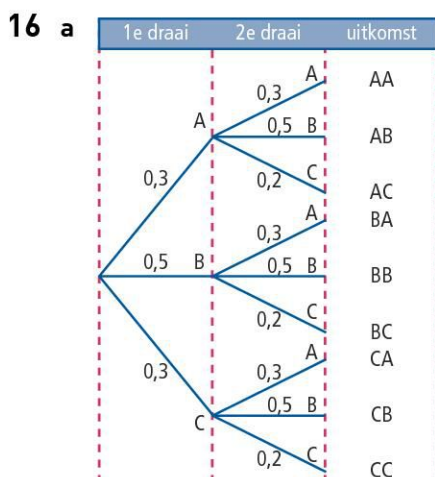
Er zijn $4 \times 4 = 16$ uitkomsten bij BB en $2 \times 2 = 4$ uitkomsten bij RR.

De kans op BB is dus vier keer zo groot als de kans op RR.

- 14 a** Het aantal vakjes in het schema is $8 \times 7 = 56$.
- b** Het aantal rode vakjes is $5 \times 4 = 20$. De kans is $P(RR) = \frac{5 \times 4}{8 \times 7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.
- c** $P(RG) = \frac{5 \times 3}{8 \times 7} = \frac{15}{56}$ en $P(GR) = \frac{3 \times 4}{7 \times 8} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$
De kansen zijn niet gelijk.
- d** $P(GG) = \frac{3 \times 3}{7 \times 8} = \frac{9}{56}$
- e** $P(RR) + P(RG) + P(GR) + P(GG) = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{12}{56} + \frac{9}{56} = \frac{56}{56} = 1$

7 Kansen

- 15 a** In vaas A zijn 5 van de 8 knikkers rood, dus de kans om een rode knikker uit vaas A te pakken is $\frac{5}{8}$.
- b** In vaas A zijn 3 van de 8 knikkers groen, dus de kans om een groene knikker uit vaas A te pakken is $\frac{3}{8}$.
- c** In vaas B zijn 4 van de 7 knikkers rood, dus de kans op een rode knikker uit vaas B is $\frac{4}{7}$.
In vaas B zijn 3 van de 7 knikkers groen, dus de kans op een groene knikker uit vaas B is $\frac{3}{7}$.
- d** $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 4}{8 \times 7}$, dus dit levert dezelfde kans.
- e** $P(RG) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5 \times 3}{8 \times 7} = \frac{15}{56}$ en $P(WR) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{8 \times 7} = \frac{3}{14}$.
- f** $P(GG) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{56}$
- g** $P(RR \text{ of } GG) = \frac{5 \times 4 + 3 \times 3}{8 \times 7} = \frac{5 \times 4}{8 \times 7} + \frac{3 \times 3}{8 \times 7} = \frac{20}{56} + \frac{9}{56} = \frac{29}{56}$



- b** $P(X) = P(AB) + P(BA) = 0,3 \times 0,5 + 0,5 \times 0,3 = 0,3$
- c** $P(AA) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$
- d** $P(Y) = P(AA) + P(BB) + P(CC) = 0,3 \times 0,3 + 0,5 \times 0,5 + 0,2 \times 0,2 = 0,38$
- 17 a** $P(RRRR) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,1344$
- b** $P(RGRG) = 0,6 \cdot (1 - 0,4) \cdot 0,7 \cdot (1 - 0,8) = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,0504$
- c** $P(GRRR) + P(RGRR) + P(RRGR) + P(RRRG) =$
 $0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 =$
 $\frac{896 + 2016 + 576 + 336}{10000} = 0,3824$
- 18 a** $P(RMRM) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{441}{10000}$
- b** Er zijn vier rijtjes met één raak en drie keer mis.
 $P(1 \text{ keer raak}) = 4 \cdot P(RMMM) = 4 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{756}{10000}$
- c** Het complement van hoogstens drie keer raak is vier keer raak.
 $P(\text{hoogstens 3 keer raak}) = 1 - P(4 \text{ keer raak}) =$
 $1 - P(RRRR) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^4 = \frac{7599}{10000}$
- d** $P(RRRR) = \left(\frac{7}{10}\right)^4 = \frac{2401}{10000}$
- e** Het complement van hoogstens drie keer raak is vier keer raak.
- 19 a** $P(\text{alles goed}) = P(GGGG) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256} = 0,0039$
- b** Het complement van minstens 1 fout is nul fouten.
 $P(\text{minstens 1 fout}) = 1 - P(\text{geen fouten}) =$
 $1 - P(\text{alles goed}) = 1 - 0,0039 = 0,9961$

- c Het complement van hoogstens 2 fouten is meer dan 2 fouten.

$$P(\text{hoogstens 2 fouten}) = 1 - P(\text{meer dan 2 fouten}) =$$

$$1 - (P(3 \text{ fouten}) + P(4 \text{ fouten})) =$$

$$1 - \left(4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{67}{256} = 0,2617$$

- d Ze moet minstens twee van de zeven vragen goed gokken.

$$P(\text{minstens 2 goed}) = 1 - P(\text{minder dan 2 goed}) =$$

$$1 - (P(0 \text{ goed}) + P(1 \text{ goed})) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^7 + 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \frac{1}{4} = 0,5551$$

- 20 a Maak gebruik van het complement:

$$P(\text{minstens 4 welpen}) = 1 - P(\text{hoogstens 3 welpen}) =$$

$$1 - P(1,1,1) = 1 - (0,2)^3 = 0,992$$

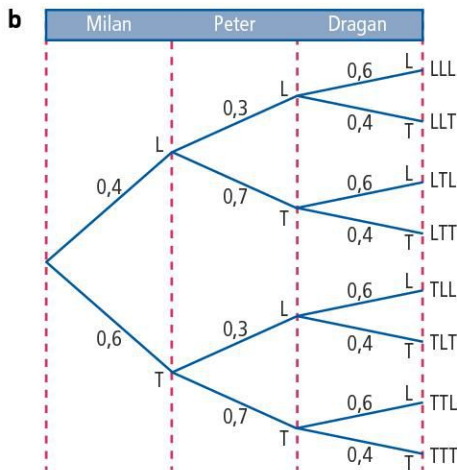
- b Maak gebruik van het complement:

$$P(\text{hoogstens 7 welpen}) = 1 - P(\text{minstens 8 welpen}) =$$

$$1 - (P(8 \text{ welpen}) + P(9 \text{ welpen})) = 1 - (3 \cdot P(2,3,3) + P(3,3,3)) =$$

$$1 - (3 \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3) = 0,838$$

- 017 a De kans om op tijd te komen is 1 min de kans om op te laat te komen, dus $1 - 0,4 = 0,6$.



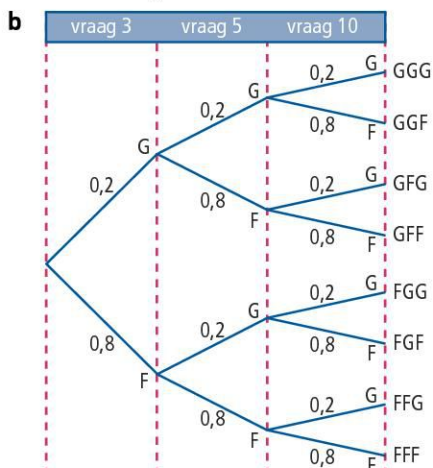
- c Volg de takken in de kansboom bij de volgorde TTT . Vermenigvuldigen van de bijgeschreven kansen geeft $P(TTT) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,168$.

- d De bijbehorende route is TTL . De kans is $P(TTL) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,252$.

- e Bij twee te laat en één op tijd horen de routes LLT , LTL en TLL .

- f $P(\text{twee te laat en één op tijd}) = P(LLT) + P(LTL) + P(TLL) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,324$

- 019 a Van de vijf antwoorden is er maar één goed. De kans is dus $\frac{1}{5} = 0,2$.



7 Kansen

- c In de kansboom zijn er 3 routes met twee goed.
De kans bij elk van die routes is $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,032$.
De kans op twee goed is $3 \cdot 0,032 = 0,096$.
- d Hoogstens betekent: niet meer dan.
De enige mogelijkheden zijn dan 0, 1 en 2.
- e Bereken de som de kansen bij de eerste zeven routes in de kansboom:
 $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,992$.
- f Hoogstens twee vragen goed betekent 0, 1 of 2 vragen goed.
De enige uitkomst die overblijft is drie vragen goed.
- g $P(\text{hoogstens 2 vragen goed}) = 1 - P(3 \text{ vragen goed}) = 1 - 0,2^3 = 0,992$.

- U3 a** Ga uit van (precies) 62 000 testen en van (precies) 8 op de 1000 mensen die aan de ziekte lijden. Dat zijn er dan $62 \times 8 = 496$ en dus $62\,000 - 496 = 61\,504$ gezonde mensen.
Van de zieken krijgt $0,85 \times 496 = 421,6 \approx 422$ te horen dat ze ziek zijn en van de gezonden $0,05 \times 61\,504 = 3075,2 \approx 3075$.
In totaal zijn dat $422 + 3075 = 3497 \approx 3500$ die te horen krijgen dat ze ziek zijn.
- b** Van de zieken krijgen $0,15 \times 496 = 74,4 \approx 74$ en van de gezonden $0,05 \times 61\,504 = 3075$ een verkeerde uitslag. Dat zijn 3149 van de 62 000.
De kans is $\frac{3149}{62\,000} = 0,0508$.
- c** Bij opdracht a is uitgerekend dat 3497 mensen te horen krijgen dat ze ziek zijn en dat er 422 daadwerkelijk ziek zijn.
De kans is $\frac{422}{3497} = 0,1207$ ofwel ongeveer 12,1%.
- d** Deze andere test heeft de voorkeur. Een test is voornamelijk bedoeld om zoveel mogelijk de ziektegevallen vast te stellen: daar wil je zo weinig mogelijk van missen.

7.4 Kansen en roosters

- intro** Er zijn $\binom{6}{4} = 15$ verschillende kortste routes van Huis naar School.
Er zijn $\binom{4}{3} = 4$ routes van Huis naar de Bakkerij en $\binom{2}{1} = 2$ routes van de Bakkerij naar School. Dat betekent dat er $4 \times 2 = 8$ routes van Huis naar School zijn die langs de Bakkerij gaan.
Als hij willekeurig een route kiest, dan is de kans $\frac{8}{15} \approx 0,5333$ dat hij langs de bakkerij komt. Dat is wel ongeveer de helft, dus de moeder kan wel gelijk hebben.
- 21 a** $P(AABABA) = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,6^4 \cdot 0,4^2 = 0,0207$
- b** Een andere volgorde bij dezelfde eindstand is bijvoorbeeld $ABBAAA$.
De kans op deze route is
 $P(ABBAAA) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,6^4 \cdot 0,4^2 = 0,0207$.
- c** Het aantal routes is $\binom{6}{4} = 15$.
- d** De kans op de uitslag $4 - 2$ is $15 \cdot 0,0207 = 0,3110$.

- e Bij de eindstand $5 - 1$ zijn er $\binom{6}{1} = 6$ mogelijke routes.

De kans op elk van die routes is $P(ABBBBB) = 0,6 \cdot 0,4^5 = 0,0061$.

De kans op de uitslag $1 - 5$ is $6 \cdot 0,0061 = 0,0369$.

- 22 a** De kans dat de eerste poging slaagt en de andere pogingen mislukken is $0,1 \cdot 0,9^{39}$.

Er zijn 40 mogelijke volgorden, dus de kans is

$$40 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{39} = 40 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{39} = 0,0657.$$

- b De kans dat de eerste vier pogingen lukken en de andere pogingen mislukken is $0,1^4 \cdot 0,9^{36}$. Er zijn $\binom{40}{4} = 91390$ mogelijke volgorden. De kans is $91390 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^{36} = 0,2059$.

- c $P(\text{maximaal 2 prooien}) = P(0) + P(1) + P(2) =$
 $0,9^{40} + 40 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{38} = 0,2228$.

- d $P(\text{minstens 1 prooi}) = 1 - P(0 \text{ prooien}) = 1 - 0,9^{40} = 0,9852$.

- 23 a** De kans op eerst twee keer lukken en daarna twee keer mislukken is $P(LLMM) = 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,0256$.

Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ mogelijke volgorden met twee keer lukken en twee keer mislukken.

$$P(\text{twee lukken}) = 6 \cdot 0,0256 = 0,1536$$

- b $P(\text{minstens 3 lukken}) = P(3 \text{ lukken}) + P(4 \text{ lukken}) =$
 $\binom{4}{3} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + \binom{4}{4} \cdot 0,8^4 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192$.

- c $P(MMMMMLLLLL) = 0,2^5 \cdot 0,8^5$

Er zijn $\binom{10}{5} = 252$ mogelijke volgorden.

$$P(5 \text{ van de } 10 \text{ mislukken}) = 252 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^5 = 0,0264$$

- 24 a** Eén vraag goed en dus elf fout.

De kans om de één goed en de rest fout te gokken is

$$\binom{12}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^{11} = 0,1267.$$

- b Vier vragen fout, dus acht vragen goed. De kans is

$$\binom{12}{8} \cdot 0,25^8 \cdot 0,75^4 = 0,0024.$$

- c $\binom{12}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^9 = 0,2581$

- d $P(\text{hoogstens 3 goed}) = P(0 \text{ goed}) + P(1 \text{ goed}) + P(2 \text{ goed}) + P(3 \text{ goed}) =$
 $\binom{12}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^{11} + \binom{12}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{10}$
 $+ \binom{12}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^9 = 0,6488$

- e $P(\text{minstens 10 goed}) = P(10 \text{ goed}) + P(11 \text{ goed}) + P(12 \text{ goed}) =$
 $\binom{12}{10} \cdot 0,25^{10} \cdot 0,75^2 + \binom{12}{11} \cdot 0,25^{11} \cdot 0,75^1 + \binom{12}{12} \cdot 0,25^{12} \cdot 0,75^0 = 3,54 \cdot 10^{-5}$

7 Kansen

- 25 a** De kans dat een jongen geen blessure krijgt is 0,85.
De kans op nul blessures is $0,85^{12} = 0,1422$.
- b** De kans op geen blessure is groter dan de kans op wel een blessure. Een volgorde met minder blessures heeft een grotere kans dan een volgorde met meer blessures. Bij de gebeurtenissen X en Y horen evenveel volgordes, dus $P(X)$ is groter dan $P(Y)$.
- c** $P(\text{minstens 1 blessure}) = 1 - P(0 \text{ blessures}) = 1 - 0,85^{12} \approx 0,8578$

- 26 a** Bij het derde lot voor de eerste keer een prijs, betekent dat de eerste twee loten geen prijs opleveren en het derde wel.

$$P(MMP) = 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,15 = 0,1084$$

- b** $P(6 \text{ loten}) = P(MMMMMMP) = 0,85^5 \cdot 0,15 \approx 0,0666$

c $P(2 \text{ prijzen}) = \binom{5}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^3 = 0,1382$

aantal prijzen	0	1	2	3	4	5
$P(\text{aantal prijzen})$	0,4437	0,3915	0,1382	0,0244	0,0022	0,0001

- e** Maak gebruik van het complement

$$P(\text{minstens 2 prijzen}) = 1 - (P(0 \text{ prijzen}) + P(1 \text{ prijs})) = 1 - 0,4437 - 0,3915 = 0,1648$$

- 022 a** De kans dat hij geen punten scoort is $1 - 0,7 = 0,3$.
- b** $P(RMRRRM) = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,7^4 \cdot 0,3^2 = 0,0216$
- c** Elke route met vier van de zes worpen punten heeft kans 0,0216.
- d** Het aantal routes is $\binom{6}{4} = 15$.
- e** De kans is $\binom{6}{4} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^2 = 15 \cdot 0,0216 = 0,3241$.
- f** De complementaire gebeurtenis is: in geen enkele worp punten.
- g** $P(\text{minstens 1 worp met punten}) = 1 - P(0 \text{ worpen met punten}) = 1 - P(6 \text{ worpen zonder punten}) = 1 - 0,3^6 = 0,9993$.

- U4** Een overzicht van de gegevens uit de opdracht.

test	A	B	C
aantal vragen	10	15	20
aantal zeker	7	10	18
gegokt	3	5	2
80%	8	12	16

Voor een voldoende op test A moet er minstens één van de gegokte antwoorden goed zijn:

$$P(\text{minstens 1 goed}) = 1 - P(3 \text{ fout}) = 1 - 0,75^3 \approx 0,5781$$

Voor een voldoende op test B moeten er minstens twee van de gegokte antwoorden goed zijn:

$$P(\text{minstens 2 goed}) = 1 - P(\text{hoogstens 1 goed}) = 1 - P(0 \text{ goed}) - P(1 \text{ goed}) = 1 - 0,75^5 - \binom{5}{1} \cdot 0,25 \cdot 0,75^4 \approx 0,3672$$

Voor een voldoende op test C weet Carolien genoeg antwoorden zeker.

$$\text{De kans om te worden toegelaten is } 0,5781 \cdot 0,3672 \cdot 1 \approx 0,2123.$$

7.5 Vaasmodel

intro Eén voor één pakken of in één keer vier pakken maakt voor de kans niet uit: Janna had net zo goed met de ogen dicht één voor één kunnen pakken en dan pas kijken welke kleuren ze heeft. Er is alleen een klein verschil omdat er al een aantal uit zijn als Janna pakt, maar omdat het er veel zijn, zal het weinig uitmaken.

27 a Willem: $P(RW) = \frac{20}{28} \cdot \frac{8}{28} = \frac{160}{784} = \frac{10}{49} \approx 0,2041$ en $P(WR) = \frac{8}{28} \cdot \frac{20}{28} = \frac{10}{49} \approx 0,2041$

Tom: $P(RW) = \frac{20}{28} \cdot \frac{8}{27} = \frac{160}{756} = \frac{40}{189} \approx 0,2116$ en $P(WR) = \frac{8}{28} \cdot \frac{20}{27} = \frac{40}{189} \approx 0,2116$

b Willem: $P(WW) = \frac{8}{28} \cdot \frac{8}{28} = \frac{4}{49} \approx 0,0816$

Tom: $P(WW) = \frac{8}{28} \cdot \frac{7}{27} = \frac{2}{27} \approx 0,0741$

c Het maakt niet uit of je in één greep twee knikkers pakt of één voor één en dan pas kijkt wat je hebt getrokken. Dus $P(WW) = \frac{8}{28} \cdot \frac{7}{27} = \frac{2}{27} \approx 0,0741$.

d Tom heeft dezelfde kans als Joe.

e Het maakt niet uit of je in één keer twee knikkers pakt of één voor één, waarbij je pas kijkt als je beide hebt getrokken.

28 a $P(WWW) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \approx 0,1715$

b $P(1W + 2R) = \binom{3}{1} \cdot P(WRR) = 3 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \approx 0,3292$

c $P(WWW) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \approx 0,1190$

$P(1W + 2R) = \binom{3}{1} \cdot P(WRR) = 3 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \approx 0,3571$

29 a Elk schot komt overeen met het trekken van een balletje.

Een schot in de roos komt overeen met een rood balletje trekken.

Met drie rode balletjes van de vijf is de kans op het trekken van een rood balletje hetzelfde als de kans dat ze de roos treft.

b De kans op een treffer blijft hetzelfde. Als je een vaasmodel zonder terugleggen gebruikt verandert de kans na elke trekking.

c Elke volgorde bevat 7 R's en 3 M's.

$P(7 \text{ raak en } 3 \text{ mis}) = \binom{10}{7} \cdot 0,6^7 \cdot 0,4^3 \approx 0,2150$

d Maak gebruik van de complementaire gebeurtenis.

$P(\text{hoogstens 8 keer raak}) = 1 - P(\text{meer dan 8 keer raak}) =$

$1 - (P(9 \text{ keer raak}) + P(10 \text{ keer raak})) = 1 - (10 \cdot 0,6^9 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6^{10}) \approx 0,9536$

30 a Neem een vaas met 6 balletjes waarvan drie rode voor de vakjes met een prijsteken en drie witte voor de vakjes zonder prijsteken.

b $P(2 \text{ keer prijs}) = \binom{3}{2} \cdot P(ppn) = 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0,45$

c $P(ppp) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,05$

d $P(\text{minstens 1 prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - P(nnn) = 1 - 0,05 = 0,95$.

7 Kansen

- 31 a** Uit een vaas met 52 balletjes, waarvan 13 rood en 39 wit, trek je in één keer vier balletjes.

$$\text{b } P(\text{twee harten}) = \binom{4}{2} \cdot P(HHAA) = \binom{4}{2} \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{39}{50} \cdot \frac{38}{49} \approx 0,2135$$

- c** Maak gebruik van de complementaire gebeurtenis.

$$P(\text{minstens 2 harten}) = 1 - P(\text{minder dan 2 harten}) =$$

$$1 - (P(0 \text{ harten}) + P(1 \text{ harten})) = 1 - \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{37}{50} \cdot \frac{36}{49} - 4 \cdot \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{38}{50} \cdot \frac{37}{49} \approx 0,2573$$

- 32** Om precies zes testen nodig te hebben, moet de laatste test een volle batterij opleveren (anders was ze eerder gestopt). Van de eerste vijf batterijen moeten er drie vol en twee leeg zijn.

$$\text{De kans is } \binom{5}{2} \cdot P(VVLLV) = \binom{5}{2} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \approx 0,3030.$$

- 33 a** De verhouding tussen het aantal blikken van kwaliteit A en de rest verandert nauwelijks door het trekken van 10 uit 20 000.

$$\text{b A } P(1 \text{ blik niet van kwaliteit A}) = 10 \cdot 0,10 \cdot 0,90^9 \approx 0,3874$$

$$\text{B } P(2 \text{ blikken niet van kwaliteit A}) = \binom{10}{2} \cdot 0,10^2 \cdot 0,90^8 \approx 0,1937$$

$$\text{C } P(\text{minstens 7 A}) =$$

$$\binom{10}{7} \cdot 0,9^7 \cdot 0,1^3 + \binom{10}{8} \cdot 0,9^8 \cdot 0,1^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,9^9 \cdot 0,1^1 + 0,9^{10} \approx 0,9872$$

- 030 a** Een rode knikker staat voor: er ligt een munt onder het bekertje.

- b** Het is trekken zonder terugleggen, want je tilt niet twee keer hetzelfde bekertje op.

- c** Je wint 1 euro als je 1 bekertje met een munt aantreft en het andere bekertje zonder. Dat betekent 1 rode en 1 witte knikker trekken.

$$\text{d } P(1 \text{ euro winst}) = P(RW) + P(WR) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \approx 0,5333$$

$$\text{e } P(WW) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0,0667$$

- 032 a** Als ze al eerder het derde werkende lampje had gehad, dan was ze al eerder gestopt.

$$\text{b } P(KWKWW) = \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{720}{15120} = \frac{1}{21} \approx 0,0476;$$

$$P(WWKWW) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{720}{15120} = \frac{1}{21} \approx 0,0476, \text{ dus gelijk.}$$

- c** In de eerste vier trekkingen moeten twee werkende en twee kapotte lampjes zitten: 2 W's en 2 K's. Het aantal mogelijke rijtjes is $\binom{4}{2} = 6$.

$$\text{d } P(5 \text{ lampjes testen}) = \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \approx 0,2857$$

- U5 a** In vaas A zitten alleen groene knikkers als uit vaas A de rode is getrokken en vervolgens uit vaas B een groene.

$$P(\text{alleen groen in vaas A}) = P(RG) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$\text{b } P(RR) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

7.6 Kansverdeling en verwachtingswaarde

intro Je verwacht dat ze eens per 40 trekkingen de prijs wint. In 80 weken is dat twee keer.

In totaal levert dat € 150,- op, ofwel $150 : 80 = 1,875$ euro per week.

34 a	<i>aantal keer kop</i>	0	1	2	3	4
	<i>uitbetaling</i>	0	0,50	1,00	2,00	4,00
	<i>P(uitbetaling)</i>	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625
	in 800 keer	50	200	300	200	50
	<i>opbrengst</i>	0	100	300	600	200

b De som van de kansen is 1.

c Je verwacht in 800 keer spelen $0,0625 \times 800 = 50$ keer een uitbetaling van 4 euro.

d Zie de tabel bij opdracht a.

e Hij verwacht in totaal

$$50 \times 0 + 200 \times 0,5 + 300 \times 1 + 200 \times 3 + 50 \times 4 = 1200 \text{ euro.}$$

f Gemiddelde uitbetaling is $1200 : 800 = 1,50$ euro per spel.

g $0,0625 \times 0 + 0,2500 \times 0,50 + 0,3750 \times 1,00 + 0,2500 \times 2,00 + 0,0625 \times 4,00$
Dat geeft een bedrag van € 1,50.

h
$$\frac{50 \times 0 + 200 \times 0,5 + 300 \times 1 + 200 \times 3 + 50 \times 4}{800} =$$

$$\frac{50}{800} \times 0 + \frac{200}{800} \times 0,5 + \frac{300}{800} \times 1 + \frac{200}{800} \times 2 + \frac{50}{800} \times 4 =$$

$$0,0625 \times 0 + 0,2500 \times 0,50 + 0,3750 \times 1,00 + 0,2500 \times 2,00 + 0,0625 \times 4,00$$

35 a $P(0 \text{ blauwe}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$

$$P(1 \text{ blauwe}) = 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(3 \text{ blauwe}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

b De verwachtingswaarde is een gemiddelde. Dat hoeft geen geheel getal te zijn.

36 a	<i>uitbetaling</i>	0	2	10	50
	<i>winst</i>	-2	0	8	48
	<i>kans</i>	0,63	0,3	0,06	0,01

b De verwachtingswaarde van de winst per spelletje is

$$-2 \times 0,63 + 0 \times 0,30 + 8 \times 0,06 + 48 \times 0,01 = -0,30 \text{ euro.}$$

37 a De verwachtingswaarde van het aantal examens is

$$1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,1 = 2,2.$$

b De verwachtingswaarde van de kosten is

$$1200 \cdot 0,4 + 1700 \cdot 0,3 + 2000 \cdot 0,1 + 2200 \cdot 0,1 + 2400 \cdot 0,1 = 1650 \text{ euro.}$$

38 a De mogelijke aantallen punten zijn 1, 2, 3, 4, 5 en 6.

b	<i>punten</i>	1	2	3	4	5	6
	<i>kans</i>	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

c De verwachtingswaarde van het aantal punten is

$$1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4\frac{17}{36}.$$

7 Kansen

- 39 a** 95% van 4000, dat zijn 3800 kochten geen ontbijtborden.

Van de overige 200 klanten kocht 35% vier borden, dat zijn 70 klanten.

- b** Van de klanten die ontbijtborden kochten, kocht $100 - 20 - 7 - 35 - 20 = 18$ % één bord.

<i>aantal</i>	0	1	2	3	4	6
<i>kans</i>	0,95	0,009	0,01	0,0035	0,0175	0,01

De verwachtingswaarde is

$$0 \times 0,95 + 1 \times 0,009 + 2 \times 0,01 + 3 \times 0,0035 + 4 \times 0,0175 + 6 \times 0,01 = 0,1695.$$

- 40 a** De wedstrijd duurt drie sets als één van de teams de eerste drie sets wint.

$$P(3 \text{ sets}) = P(AAA) + P(BBB) = 0,6^3 + 0,4^3 = 0,28.$$

- b** $P(4 \text{ sets}) =$

$$P(AABA) + P(ABAA) + P(BAAA) + P(BBAB) + P(BABB) + P(ABBB) = 3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 = 0,3744$$

$$P(5 \text{ sets}) = 1 - 0,28 - 0,3744 = 0,3456$$

De verwachtingswaarde van het aantal te spelen sets is

$$3 \times 0,28 + 4 \times 0,3744 + 5 \times 0,3456 = 4,0656.$$

- 036 a** De kans op een prijs van € 10,- is $\frac{80}{500} = \frac{4}{25}$.

<i>uitbetaling</i>	10	50	100
<i>kans</i>	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{500}$

- c** De gebeurtenis 'geen prijs' is niet opgenomen.

<i>uitbetaling</i>	10	50	100	0
<i>kans</i>	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{399}{500}$

- e** De verwachtingswaarde van de uitbetaling per lot is

$$0 \times \frac{399}{500} + 10 \times \frac{4}{25} + 50 \times \frac{1}{25} + 100 \times \frac{1}{500} = 3,80 \text{ euro.}$$

- f** De gemiddelde winst is $5 - 3,8 = 1,20$ euro per lot.

- 039 a** Van alle klanten kocht 60% oliebollen; dat zijn 480 klanten.

- b** Van de 480 klanten kocht 30% vijf oliebollen, dat zijn $480 \times 0,30 = 144$ klanten.

- c** 40% kocht geen oliebollen, dus 60% van 800 personen wel.
Dat aantal is $0,6 \times 800$.

Hiervan kocht 30% vijf oliebollen, dus $0,6 \times 800 \times 0,3$.

- d** $\frac{144}{800} = 0,18$

<i>aantal oliebollen</i>	0	1	5	10
<i>kans</i>	0,4	0,15	0,18	0,27

- f** De verwachtingswaarde van het aantal gekochte oliebollen is

$$0 \times 0,4 + 1 \times 0,15 + 5 \times 0,18 + 10 \times 0,27 = 3,75.$$

- U6 a** $P(\text{minstens 3 keer}) = 1 - P(\text{minder dan 3 keer}) =$

$$1 - (P(0 \text{ keer}) + P(1 \text{ keer}) + P(2 \text{ keer})) =$$

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{365} - 365 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{364} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^1 - \left(\frac{365}{2}\right) \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{363} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^2 =$$

$$1 - 0,3674 - 0,3684 - 0,1842 = 0,0800.$$

- b** Bij een kans van 0,08 komt overeen met 8 keer in 100 jaar, ofwel eens in de 12,5 jaar. Dat is wel ongeveer eens in de 12 jaar.

7.7 Gemengde opdrachten

- 41 a** Je verliest meer dan €0,50 als je de sector met 0,00 raakt.
De kans daarop is $\frac{1}{5} = 0,2$.
- b** $P(\text{inzet terug}) = P(0,00 + 2,50) + P(1,00 + 1,50) + P(1,50 + 1,00) + P(2,50 + 0,00) =$
 $4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = 0,16$.
- c** $P(\text{meer dan } 1,50) = 1 - P(\text{hoogstens } 1,50) = 1 - 10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} = 0,6$

- 42 a** Zonder terugleggen is de kans op vijf pennen die het doen
 $6 \times \frac{4000}{5000} \times \frac{3999}{4999} \times \frac{3998}{4998} \times \frac{3997}{4997} \times \frac{3996}{4996} \times \frac{1000}{4995} \approx 0,3934$.
- b** Met terugleggen is de kans op hoogstens twee pennen die het doen
 $P(0 \text{ of } 1 \text{ of } 2) = 0,2^6 + 6 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8 + \binom{6}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^2 \approx 0,0170$.
- c** Bij in één greep trekken is de kans op minstens vijf werken de pennen
 $P(\text{minstens } 5) = P(5 \text{ of } 6) = 6 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2 + 0,8^6 \approx 0,6554$.

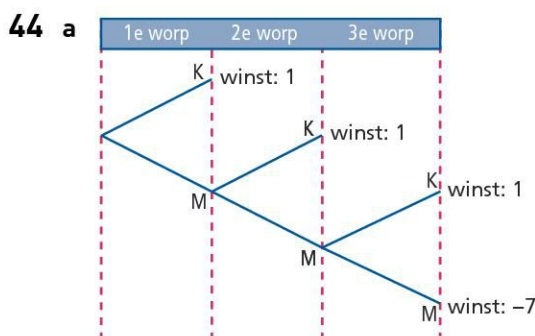
- 43 a** $P(4 \text{ keer gooien}) = P(XXX6) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{125}{1296} \approx 0,0965$
- b** $P(\text{hoogstens } 3 \text{ keer gooien}) = P(1 \text{ of } 2 \text{ of } 3 \text{ keer gooien}) =$
 $P(6) + P(X6) + P(XX6) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{66}{216} \approx 0,4213$
- c** $P(n \text{ keer gooien}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$

Met de rekenmachine:

Invoer: $y_1 = 5^{x-1} : 6^x$ en $y_2 = 0,01$

De optie SNIJPUNT geeft $x = 16,43$.

De waarde van n is minimaal 17.



- b** $P(1 \text{ euro winst}) = P(K) + P(MK) + P(MMK) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$
- c** $P(7 \text{ euro verlies}) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$
- | | | |
|-------|---------------|---------------|
| winst | 1 | -7 |
| kans | $\frac{7}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
- d** De verwachtingswaarde van de winst is $1 \times \frac{7}{8} + (-7) \times \frac{1}{8} = 0$.
- e** De verwachtingswaarde van het aantal worpen is $1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$.

7 Kansen

- f Met zijn inzetten a , b , en c wordt zijn winst:

volgorde	K	MK	MMK	MMM
kans	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
inzet	a	b	c	c
uitbetaald	$2a$	$2b$	$2c$	0
winst	$2a - a = a$	$2b - b - a = b - a$	$2c - c - b - a = c - b - a$	$-c - b - a$

De winstverwachting is

$$a \cdot \frac{1}{2} + (b - a) \cdot \frac{1}{4} + (c - b - a) \cdot \frac{1}{8} + (-c - b - a) \cdot \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}a + \frac{1}{8}c - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}a - \frac{1}{8}c - \frac{1}{8}b - \frac{1}{8}a =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)a + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)b + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)c =$$

$$0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ euro.}$$

Elke keuze van a , b of c levert dus altijd 0 euro op.

Onderzoeksoopdrachten

- 45 a** Er worden $20 + 3 \cdot 15 = 65$ tests uitgevoerd.
Dat zijn er $300 - 65 = 235$ minder dan bij iedereen testen.
- b** Er zijn dan $\frac{10000}{10} + 400 \cdot 10 = 5000$ bloedmonsters getest.
- c** De kans dat in een groep geen syfilis voorkomt, is $0,95^8 = 0,6634$.
De kans dat syfilis wel voorkomt, is $1 - 0,6634 = 0,3366$.
In $1250 \times 0,3366 = 421$ groepen verwacht je syfilis aan te treffen.
- d** In totaal vraagt dat om $1250 + 421 \cdot 8 = 4618$ tests.
- e** Noem de groepsgrootte g . Dan zijn er $\frac{10000}{g}$ groepen die getest worden.
De kans dat in zo'n groep syfilis wordt aangetroffen, is $1 - 0,95^g$, dus je verwacht dat $\frac{10000}{g} \cdot (1 - 0,95^g)$ groepen opnieuw getest moeten worden.
Dat zijn $\frac{10000}{g} \cdot (1 - 0,95^g) \cdot g = 10000 \cdot (1 - 0,95^g)$ personen.
Het totaal aantal testen is $\frac{10000}{g} + 10000 \cdot (1 - 0,95^g)$.
Plot de grafiek van $y_1 = 10000 : x + 10000(1 - 0,95^x)$.
De optie MINIMUM geeft $x = 5,02$.
Een groepsgrootte van 5 is het meest efficiënt.

Samenvatting

- S1 a** De experimentele kans op een even getal is $\frac{864}{1000} = 0,864$.
- b** Jill heeft $1000 - 864 = 136$ keer de 1 gedraaid.
Van de zeven even getallen zijn er drie rood; dat is $\frac{3}{7}$ -deel.
Je verwacht dat er $136 + \frac{3}{7} \cdot 864 \approx 136 + 370 = 506$ keer een rood vak is gedraaid.

- S2 a** De acht sectoren zijn even groot, dus elk gebied heeft een even grote kans om aangewezen te worden.

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

b $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

- S3 a** Het complement van gebeurtenis A is: De som van de ogen is minder dan 4.

b $P(A) = 1 - P(\text{niet} - A) = 1 - P(\text{som is minder dan } 4) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$

- S4 a** Eén van de drie antwoorden is goed.

b $P(GGG) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

c $P(1 \text{ vraag goed}) = P(GFF \text{ of } GFG \text{ of } FFG) = 3 \cdot P(GFF) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

- S5** Laat 0, 1, 2 en 3 winst voor Anke voorstellen en 4 tot en met 9 winst voor opa. Met de 30 toevalsgetallen in het voorbeeld zijn zeven series van vier spelletjes te simuleren. Het aantal keer winst voor Anke in zo'n serie:

serie	9251	7826	1762	4370	2242	3330	2491
aantal winst	2	1	2	2	3	1	2

Van de zeven series zijn er vier met 2 keer winst voor Anke. De experimentele kans is $\frac{4}{7} \approx 0,5714$.

S6 $P(3 \text{ goed}) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0,2601$

- S7 a** Op hetzelfde lot kan geen tweede prijs vallen.

b $P(1 \text{ prijs}) = \binom{5}{1} \cdot P(RWWW) = 5 \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{15}{16} \approx 0,3947$

- S8** Het aantal rode knikkers kan 1 of 2 zijn.

aantal rood	1	2
kans	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

- S9 a** Het aantal rode knikkers kan 0, 1 of 2 zijn.

aantal rood	0	1	2
kans	$\frac{2}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{56}{90}$

De verwachtingswaarde van het aantal rode knikkers is

$$0 \cdot \frac{2}{90} + 1 \cdot \frac{32}{90} + 2 \cdot \frac{56}{90} = \frac{138}{90} = 1,53.$$

b

aantal rood	0	1	2
kans	$\frac{4}{100}$	$\frac{32}{100}$	$\frac{64}{100}$

De verwachtingswaarde van het aantal rode knikkers is

$$0 \cdot \frac{4}{100} + 1 \cdot \frac{32}{100} + 2 \cdot \frac{64}{100} = \frac{160}{100} = 1,6.$$

7 Kansen

Test jezelf

- T1 a** $P(3, 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
b $P(4, 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
c Er zijn 15 uitkomsten waarbij het aantal ogen op de rode dobbelsteen groter is dan op de witte. De kans is $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.
d *niet - A*: de som van de ogen is meer dan 11, ofwel de som van de ogen is 12.
e $P(A) = 1 - P(\text{niet} - A) = 1 - P(6, 6) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{36}$

- T2 a** $P(KKKKMM) = (0,48)^4 \cdot (0,52)^2 = 0,0144$
b Er zijn $\binom{6}{4} = 15$ mogelijke volgorden met 4 keer *K* en 2 keer *M*.
 $P(4 \text{ keer } K \text{ en } 2 \text{ keer } M) = 15 \cdot 0,0144 = 0,2153$.
c $P(\text{hoogstens 4 kop}) = 1 - P(\text{meer dan 4 kop}) = 1 - P(5 \text{ kop}) - P(6 \text{ kop}) =$
 $1 - 6 \cdot 0,48^5 \cdot 0,52 - 0,48^6 = 0,9083$

- T3 a** Op 10 van de 100 loten valt een prijs.
 $P(2 \text{ prijzen}) = \binom{5}{2} \cdot P(PNPN) = 10 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} = 0,0702$
b $P(\text{minstens 1 prijs}) = 1 - P(\text{geen prijs}) = 1 - P(NNNNN) =$
 $1 - \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} \cdot \frac{87}{97} \cdot \frac{86}{96} = 0,4162$
c $P(1,2,3,N,N) = \frac{1}{100} \cdot \frac{3}{99} \cdot \frac{6}{98} \cdot \frac{90}{97} \cdot \frac{89}{96}$
Het aantal mogelijke rijtjes is $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
De kans op de eerste, een tweede en een derde prijs is
 $60 \cdot P(1,2,3,N,N) = 0,0001$.

- T4 a**
- | | | | | | |
|--------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <i>uitbetaling</i> | 0 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| <i>kans</i> | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |
- b** De verwachtingswaarde van het uitgekeerde bedrag is
 $0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{12} + 8 \times \frac{1}{12} = \frac{15}{12} = 1,25$.
De verwachtingswaarde van de winst voor de speler is $1,25 - 1 = 0,25$.
c Om in 400 spelletjes € 300,- te verdienen moet de winstverwachting voor de organisatie $300 : 400 = 0,75$ euro per spel zijn.
Dat betekent dat ze $1,25 + 0,75 = 2$ euro per spel moeten vragen.

- T5 a** Gebruik uit de toevalsgetallen de getallen 1 tot en met 8 en negeer de andere.
b Er zijn 32 worpen gesimuleerd. Daarin komt vier keer het cijfer 2 voor. De experimentele kans op een 2 is $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
c De kans op geen enkele 2 in twaalf worpen is $\left(\frac{7}{8}\right)^{12} = 0,2014$.

T6 a

<i>aantal goed</i>	0	1	2	3	4	5
<i>kans</i>	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0147	0,0010

b

<i>S</i>	-2,5	-1	0,5	2	3,5	5
<i>P(S)</i>	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0147	0,0010

c

<i>C</i>	1	2,8	4,6	6,4	8,2	10
<i>P(C)</i>	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0147	0,0010

De verwachtingswaarde van het cijfer is

$$1 \times 0,2373 + 2,8 \times 0,3955 + 4,6 \times 0,2637 + 6,4 \times 0,0879 + 8,2 \times 0,0147 + 10 \times 0,0010 = 3,2508.$$

T7 a $P(\text{eerste prijs}) = P(GGGGGG) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 0,00137$

$$P(\text{tweede prijs}) = \binom{6}{1} \cdot P(GGGGGF) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 0,01646$$

$$P(\text{derde prijs}) = \binom{6}{2} \cdot P(GGGGFF) = 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,08230$$

- b** Per wedstrijd is de kans $\frac{1}{3}$ op de juiste keus. Je verwacht dat je bij zes wedstrijden $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ uitslagen goed gokt.

Extra oefening

- E1 a** Er zijn evenveel even cijfers als oneven cijfers. Dat komt overeen met evenveel jongens als meisjes.
- b** Elk toevalsgetal bestaat uit tien cijfers. Daar kun je twee gezinnen met vijf kinderen mee simuleren. Met de zes toevalsgetallen simuleer je zo twaalf gezinnen met vijf kinderen.
- c** De aantallen oneven cijfers zijn achtereenvolgens 3, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3. De experimentele kans op een gezin met drie meisjes is $\frac{3}{12} = 0,25$.
- E2 a** $P(WWWNNNN) = 0,12^3 \cdot 0,88^5$. Er zijn $\binom{8}{3}$ rijtjes met drie keer een *W* en vijf keer een *N*. De kans dat drie Nederlanders op het CDA hebben gestemd is $\binom{8}{3} \cdot 0,12^3 \cdot 0,88^5 = 56 \cdot 0,12^3 \cdot 0,88^5 = 0,0511$.
- b** De kans op ten minste één van acht is $1 - \text{kans op geen enkele stem}$. De kans daarop is $1 - 0,88^8 \approx 0,6404$.
- E3 a** Neem een vaas met 60 knikkers: 15 groen en 45 rood. Neem zonder terugleggen twee knikkers uit de vaas.
- b** $P(1 \text{ drankje}) = P(GR) + P(RG) = 2 \cdot \left(\frac{15}{60}\right) \cdot \left(\frac{45}{59}\right) = 0,3814$

7 Kansen

E4

$R \backslash B$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	10	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	10	10	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	10	10	10	5	1	1	1	1	1	1	1	1
5	10	10	10	10	5	1	1	1	1	1	1	1
6	10	10	10	10	10	5	1	1	1	1	1	1
<i>punten</i>	1	5	10									
<i>aantal</i>	51	6	15									
<i>kans</i>	$\frac{51}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{15}{72}$									

E5 a De verwachtingswaarde is $1 \cdot \frac{51}{72} + 5 \cdot \frac{6}{72} + 10 \cdot \frac{15}{72} = \frac{231}{72} \approx 3,2$ punten.

b Gemiddeld krijgt zij per spelletje 3,2 punten, dus in 20 spelletjes $20 \cdot 3,2 = 64$ punten.

E6 De spelverlopen waarbij Peter wint zijn PP , PHP , HPP . De kans dat Peter wint is $0,6^2 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,648$.

E7 a

+	1	1	3	3	5	5
2	3	3	5	5	7	7
2	3	3	5	5	7	7
4	5	5	7	7	9	9
4	5	5	7	7	9	9
4	5	5	7	7	9	9
6	7	7	9	9	11	11

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \text{ dus } P(\text{niet} - G) = 1 - P(G) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

b De gebeurtenissen B en C zijn niet complementair want de uitkomst (3, 4) hoort bij beide gebeurtenissen.

E8 a $P(\text{minstens 1 strike}) = 1 - P(\text{geen strike}) = 1 - P(GGGG) = 1 - 0,4^4 = 0,9744$

b $P(2 \text{ strikes}) = \binom{4}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 = 0,3456$

c $P(\text{meer dan 2 strikes}) = P(3 \text{ strikes}) + P(4 \text{ strikes}) = 4 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 + 0,6^4 = 0,4752$

d $P(\text{hoogstens 3 strikes}) = 1 - P(\text{meer dan 3 strikes}) = 1 - P(4 \text{ strikes}) = 1 - 0,6^4 = 0,8704$

E9 a $P(WWWW) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210} = 0,0048$

b $P(BWRR) = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{70} \approx 0,1714$

8A De afgeleide

Voorkennis

- V1 a** Van 25 tot en met 29 april daalde het water steeds sneller.
De staafjes wijzen naar beneden en worden steeds langer.
- b** Het water stijgt van 3 tot en met 11 april. Daarna daalt het water op 13 april, maar de stijging tot 15 april is groter dan de daling ervoor. De hoogste waterstand is dus op 15 april.
- c** De toename was het hoogst op 9 april. Het staafje bij 9 april is het hoogst.
- d**
- | | | | | | | | | |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <i>dag in april</i> | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| <i>waterhoogte in m</i> | 5,45 | 5,44 | 5,42 | 5,50 | 5,58 | 5,63 | 5,59 | 5,65 |
-
- | | | | | | | | |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| <i>dag in april</i> | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
| <i>waterhoogte in m</i> | 5,61 | 5,57 | 5,55 | 5,52 | 5,49 | 5,45 | 5,39 |

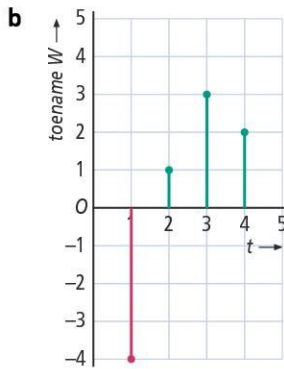
- V2 a** Bij $q = 2$ heeft N een maximum. Dit maximum is $N = 42$.
- b** Bij $q = 7$ is het minimum 10.
- c** De grafiek is toenemend stijgend voor $q > 7$.
- d** De grafiek is afnemend dalend van ongeveer 4,5 tot 7.

- V3 a** $h(1) = 10 + 30 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 35$
 $h(3) = 10 + 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 55$
 De toename tussen $t = 1$ en $t = 3$ is $55 - 35 = 20$.
- b** $h(0) = 10 + 30 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 = 10$
 $h(3) = 10 + 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 55$
 De gemiddelde toename is $\frac{55 - 10}{3 - 0} = 15$.
- c** $h(3) = 10 + 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 55$
 $h(5) = 10 + 30 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 35$
 $h(5)$ is kleiner dan $h(3)$, dus h neemt af.
- d** De gemiddelde toename is $\frac{35 - 55}{5 - 3} = -10$.
 De gemiddelde afname over het interval $[3, 5]$ is -10 .

- V4 a** $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ en $f(4) = 4^2 + 1 = 17$.
- b** De gemiddelde verandering van f over het interval $[2, 4]$ is
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{17 - 5}{2} = 6$.
- c** $f(-5) = (-5)^2 + 1 = 26$ en $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.
 Het differentiequotiënt van f over het interval $[-5, 1]$ is
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-5) - f(1)}{-5 - 1} = \frac{26 - 2}{-6} = -4$.
- d** De richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{1 - 17}{0 - -4} = \frac{-16}{4} = -4$.

8A De afgeleide

V5 a De grafiek is toenemend dalend tussen 6 en 7.



c $W(2) = 22$ en $W(4) = 27$

De gemiddelde toename over het interval $[1, 4]$ is $\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{27 - 22}{4 - 2} = 2,5$.

d De raaklijn gaat onder andere door de roosterpunten $(3, 35)$ en $(9, 5)$.

De helling van de grafiek bij $t = 5$, is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.

Deze is gelijk aan $\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{5 - 35}{9 - 3} = -5$.

V6 a Als de steen op de grond valt, geldt $h = 0$.

$$120 - 5t^2 = 0$$

$$5t^2 = 120$$

$$t^2 = \frac{120}{5} = 24, \text{ dus } t = \sqrt{24} \approx 4,90 \text{ seconden.}$$

(De negatieve oplossing $t = -\sqrt{24}$ is hier niet van toepassing.)

b 120 meter in 4,90 seconden geeft een gemiddelde snelheid van $\frac{120}{4,90} \approx 24,5 \text{ m/s}$.

c Punt A ligt op de grafiek bij $t = 1,5$, punt B ligt bij $t = 2,5$.

De lijn door de punten A en B gaat ongeveer door $(0, 140)$ en $(5, 40)$.

De helling van de lijn AB is $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{40 - 140}{5 - 0} = -20 \text{ m/s}$.

De snelheid waarmee de steen valt op $t = 2$ is ongeveer 20 m/s.

8A.1 Hellingen berekenen

intro Delen door 0 kan niet. De uitkomst van $\frac{0}{0}$ weet je niet.

Als de snelheid 0 m/s is, dan verplaatst de auto zich niet.

Toch kun je bij een rijdende auto spreken van een snelheid van bijvoorbeeld 110 km/u op een moment, de stand die de snelheidsmeter aangeeft.

1 a Op $t = 0$ is er nog geen afstand afgelegd. Dat betekent dus dat de auto nog geen snelheid had op tijdstip 0.

b De snelheid van de auto neemt toe.

c De gemiddelde snelheid in de eerste zes seconden is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(6) - s(0)}{6 - 0} = \frac{45 - 0}{6} = 7,5 \text{ m/s.}$$

d Het differentiequotiënt over het interval $[0, 4]$ is

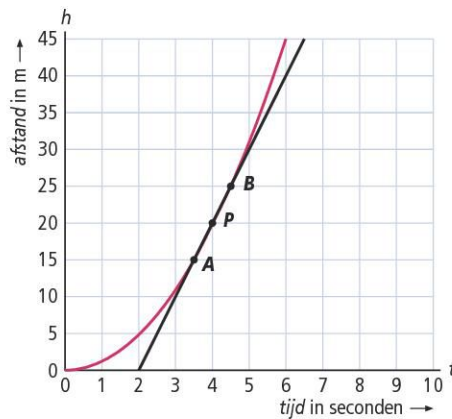
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(0)}{4 - 0} = \frac{20 - 0}{4} = 5 \text{ m/s.}$$

e De gemiddelde snelheid van de auto over de eerste vier seconden is 5 m/s.

- f 1. Kies twee punten A en B in de buurt van $P(4, 20)$ op de grafiek.
 2. Teken de lijn door A en B .
 3. De lijn gaat door $(2, 0)$ en (ongeveer) $(4, 40)$.

De richtingscoëfficiënt is ongeveer $\frac{40 - 0}{4 - 2} = 20$.

- g Dit betekent dat de snelheid van de auto op $t = 2$ ongeveer 20 m/s is.



2 a

t	4	4,1	4,01	4,001
s	20	21,0125	20,100125	20,01000125

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{21,0125 - 20}{4,1 - 4} = 10,125$$

b $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20,100125 - 20}{4,01 - 4} = 10,012$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20,01000125 - 20}{4,001 - 4} = 10,001$$

- c De laatste geeft de beste benadering voor de snelheid op $t = 4$.

3 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5,001) - s(5)}{5,001 - 5} = \frac{6,7088... - 6,7082...}{0,001} \approx 0,671$

- 4 a Kies het interval $[3; 3,001]$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3,001) - f(3)}{3 - 2,999} = \frac{33,02... - 33}{0,001} \approx 29,01, \text{ dus de helling is ongeveer } 29.$$

- b Kies het interval $[1; 1,001]$:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(1,001) - N(1)}{1 - 0,999} = \frac{300,121... - 300}{0,001} \approx 121,66, \text{ dus de helling is ongeveer } 121,7.$$

- c Kies het interval $[-4; -3,999]$:

$$\frac{\Delta U}{\Delta p} = \frac{U(-4) - U(-3,999)}{0,001} = \frac{13 - 12,99...}{0,001} \approx 2,50, \text{ dus de helling is ongeveer } 2,5.$$

- 5 a Neem als interval $[60, 60,001]$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(60,001) - s(60)}{0,001} \approx \frac{360,0066 - 360}{0,001} \approx 6,60 \text{ meter per seconde.}$$

- b Neem als interval $[100, 100,001]$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(100,001) - s(100)}{0,001} \approx \frac{625,0066 - 625}{0,001} \approx 6,64 \text{ meter per seconde.}$$

- 6 De lijn l gaat door de punten $(0, 1)$ en $(4, 5)$.

De richtingscoëfficiënt van de lijn is $\frac{5 - 1}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$.

Over het interval $[1; 1,001]$ is $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h(1) - h(0,999)}{1 - 0,999} = \frac{2 - 1,99899...}{0,001} \approx 1,00$.

De helling van de grafiek van h in het punt P is 1.

De richtingscoëfficiënt van de lijn l en de helling van de grafiek van h in het punt P zijn gelijk aan elkaar.

8A De afgeleide

- 7 a** De afgelegde weg is 6 km in 8 minuten.
De gemiddelde snelheid is $\frac{6}{8} = 0,75$ km/minuut.
- b** Een gemiddelde snelheid van 0,75 km per minuut is de snelheid als hij die snelheid constant had aangehouden tussen 0 en 8. Maar de grafiek laat zien dat zijn snelheid niet op elk ogenblik even groot was.
- c** De helling van de raaklijn in dat punt getekend is gelijk aan $\frac{4}{5} = 0,8$ (van (2, 0) naar (7, 4) op de raaklijn). Zijn snelheid is daar dus 0,8 km/minuut.
- d** Snelheid op $t = 4$ met interval $[4; 4,001]$ is

$$\frac{s(4,001) - s(4)}{0,001} = \frac{16,008... - 16}{0,001} \approx 0,8 \text{ km per minuut.}$$
 Snelheid op $t = 5$ met interval $[5; 5,001]$ is

$$\frac{s(5,001) - s(5)}{0,001} = \frac{2,501... - 2,5}{0,001} \approx 1,0 \text{ km per minuut.}$$
- e** De snelheid op $t = 6$ met interval $[6; 6,001]$ is

$$\frac{s(6,001) - s(6)}{0,001} = \frac{3,6012... - 3,6}{0,001} \approx 1,2 \text{ km per minuut.}$$
 Dus zijn snelheid op $t = 9$ is nog steeds 1,2 km/minuut.

03 a

t	4	4,001
s	6	6,00024....

b
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4,001) - s(4)}{4,001 - 4} = \frac{6,00024... - 6}{0,001} = 0,24998... \approx 0,25$$

04 a

x	2	2,001
$f(x)$	3	3,01200....

b $\Delta x = 2 - 2,001 = -0,001$ en $\Delta f(x) = 3 - 3,01200... = -0,01200....$

c
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{3,01200... - 3}{-0,001} \approx \frac{0,01200...}{-0,001} \approx -12,006$$

d De helling is 12,006.

e

p	5	5,001
U	7	7,00124998

f Neem interval $[5; 5,001]$.

$$\frac{\Delta U}{\Delta p} = \frac{7,00124998 - 7}{0,001} \approx \frac{0,00124998}{0,001} = 1,24998 \approx 1,25, \text{ dus de helling is ongeveer } 1,25.$$

U1 a
$$\frac{3308}{3482} \approx \frac{3482}{3665} \approx \frac{3665}{3858} \approx \frac{3858}{4061} \approx \frac{4061}{4275} \approx \frac{4275}{4500} \approx 0,95$$
 De factor is steeds gelijk en kleiner dan 1, dus er is sprake van een exponentiele afname.

b Een formule is $s(q) = 4500 \cdot 0,95^q$.

$$\frac{s(8,501) - s(8,5)}{8,501 - 8,5} = \frac{2909,65087... - 2909,80012...}{0,001} \approx -149$$
 De snelheid waarmee de straling afneemt is dus ongeveer 149 Bq per week.

8A.2 Hellinggrafieken

- intro**
- Hij heeft 1 bocht gedaan.
 - In 5 seconden reed hij met een snelheid van 250 km/uur. Dat is 250 000 meter in 3600 seconden. In 5 seconden is dat ongeveer 347 meter.

8 a $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1,001) - f(1)}{1,001 - 1} = \frac{1,002\,001 - 1}{0,001} = 2,001$

b De helling van de grafiek van f bij $x = 1$ is 2.

c $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2,999)}{3 - 2,999} = \frac{9 - 8,994\,001}{0,001} = 5,999$

De helling van de grafiek van f bij $x = 3$ is 6.

d Vanwege de symmetrie in de y -as weet je nu de helling van de grafiek in de punten $(-1, 1)$ en $(-3, 9)$.

De helling in deze punten is respectievelijk -2 en -6 .

e In het punt $(0, 0)$ is de helling gelijk aan 0.

f In het punt $(-2, 4)$ is de helling gelijk aan -4 .

9 a De grafiek van f daalt voor $x < 0$.

De grafiek met hellingen ligt voor die waarden van x onder de x -as.

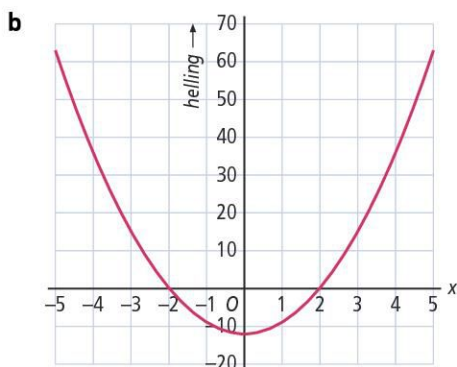
b De grafiek van f stijgt voor $x > 0$. De grafiek met hellingen ligt voor die waarden van x boven de x -as.

c De grafiek met hellingen snijdt bij $x = 0$ de x -as. Daar gaat de grafiek van de hellingen over van onder de x -as (hellingen negatief) naar boven de x -as (hellingen positief) en gaat de grafiek van f dus van dalend over naar stijgend. Dan moet f daar een minimum hebben.

10 a Invoer: $y_1 = x^3 - 12x + 1$ en $y_2 = \frac{y_1(x + 0,001) - y_1(x)}{0,001}$

X	Y ₁	Y ₂		
-5	-64	62.985		
-4	-15	35.988		
-3	10	14.991		
-2	17	-0.006		
-1	12	-9.003		
0	1	-12		
1	-10	-8.997		
2	-15	-0.006		
3	-8	15.009		
4	17	36.012		
5	66	63.015		

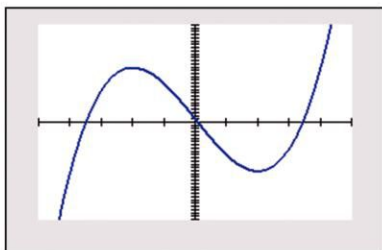
X = -5



- c** Voor $x < -2$ en voor $x > 2$ ligt de hellinggrafiek boven de x -as, dus voor $x < -2$ en voor $x > 2$ stijgt de grafiek van f .
- d** De hellinggrafiek snijdt de x -as bij $x = -2$ en $x = 2$, dus bij $x = -2$ en $x = 2$ heeft de grafiek van f een top.

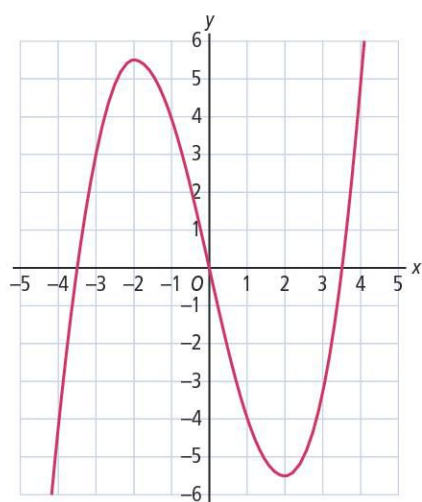
8A De afgeleide

- e Voor $x = -2$ is er sprake van een maximum, omdat de hellinggrafiek van boven de x -as naar onder de x -as loopt.
Voor $x = 2$ is er sprake van een minimum, omdat de hellinggrafiek van onder de x -as naar boven de x -as loopt.
- f Invoer: $y_1 = x^3 - 12x + 1$
Venster: $-5 \leq x \leq 5, -30 \leq y \leq 30$



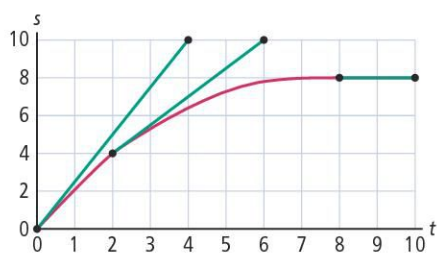
De antwoorden kloppen.

- 11 a De helling van f bij $x = -1$ is 0.
b De helling is negatief voor $x < -1$, dus de grafiek van f daalt daar.
De helling is positief voor $x > -1$, dus de grafiek van f stijgt daar.
c De grafiek gaat bij $x = -1$ over van dalend naar stijgend, dus daar is een top.
d De grafiek gaat van dalend naar stijgend, dus er is een minimum.
- 12 a De functie f heeft een maximum bij $x = -2$ en een minimum bij $x = 2$.
De raaklijn in die punten loopt horizontaal.
b Bij $x = 0$ is de helling -4 en dus niet gelijk aan nul. Er is geen sprake van een top.
c Voor $x > 2$ is de grafiek van f toenemend stijgend.
d Voor $0 < x < 2$ is de grafiek van f afnemend dalend.



13 a Grafisch wil zeggen: aan de hand van raaklijnen aan de grafiek.

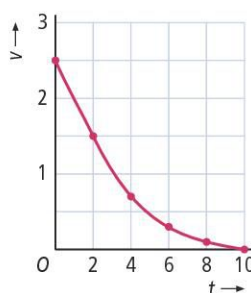
Je ziet er drie getekend: bij $t = 0$, $t = 3$ en $t = 8$



$$t = 0: \frac{10 - 0}{4 - 0} = 2,5 \text{ m/s}$$

$$t = 3: \frac{10 - 4}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ m/s}$$

$$t = 8: \frac{8 - 8}{10 - 0} = \frac{0}{10} = 0 \text{ m/s}$$

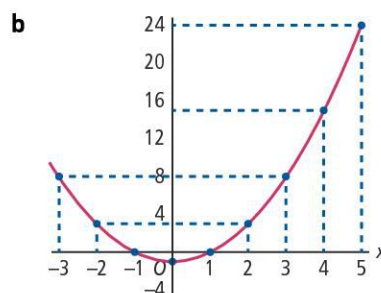


- b** Bij de verticale as hoort de variabele snelheid met bijbehorende eenheid m/s.
c De hellinggrafiek van opdracht a snijdt de x -as, de gegeven grafiek loopt daar horizontaal.

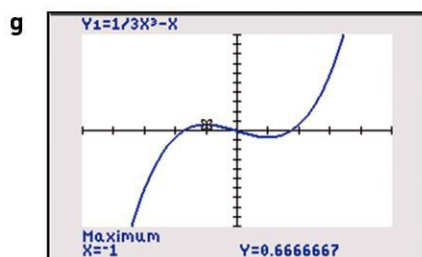
010 a

X	Y ₁	Y ₂
-3	-6	7.997
-2	-.6667	2.998
-1	.66667	-1E-3
0	0	-1
1	-.6667	.001
2	.66667	3.002
3	6	8.003
4	17.333	15.004
5	36.667	24.005
6	66	35.006
7	107.33	48.007

X = -3



- c** Bij $x < -1$ en $x > 1$.
d De grafiek van f is stijgend als $x < -1$ of $x > 1$.
e De hellinggrafiek gaat bij $x = -1$ over van positief naar negatief.
f Als de grafiek overgaat van stijgend naar dalend, is daar een maximum.



012 a Die is 0.

- b** Omdat de hellinggrafiek op het interval $\langle -3, 3 \rangle$ boven de x -as ligt, dus positief is.
c Omdat de hellinggrafiek daar onder de x -as ligt, dus negatief is.
d De hellinggrafiek gaat bij $x = -3$ over van negatief naar positief, dus de grafiek van dalend naar stijgend, Dan is daar een minimum.
e De hellinggrafiek gaat bij $x = 3$ over van positief naar negatief, dus de grafiek van stijgend naar dalend Dan is daar een maximum.

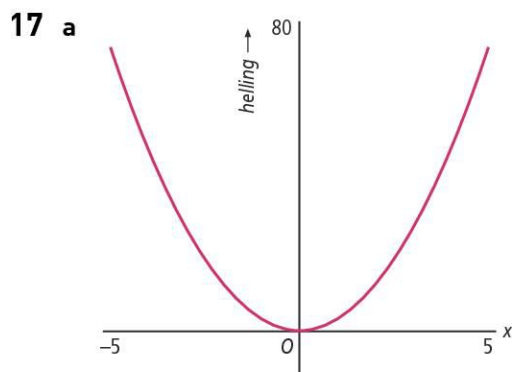
8A De afgeleide

- U2** De hellinggrafiek is een horizontale lijn met vergelijking $y = 3$.
 Dat betekent dat de grafiek in elk punt een helling heeft van 3.
 De grafiek van $f(x) = 3x + b$ voldoet hier aan.
 Omdat gegeven is dat $f(8) = 3$, is $3 = 3 \cdot 8 + b$. Hieruit volgt dat $b = -21$.
 Het functievoorschrift van f is $f(x) = 3x - 21$.

8A.3 De afgeleide functie

- intro**
- Het steentje daalt.
 - Zijn snelheid is na 13 seconden -130 m/s.

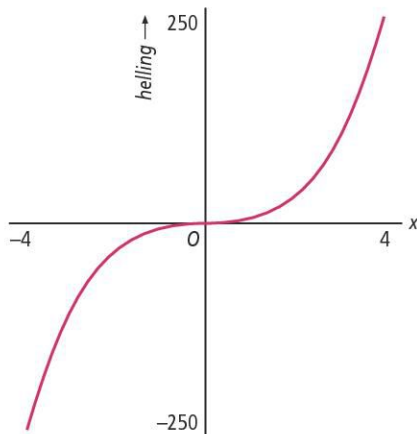
- 14 a** In de kolom met hellingen komt er steeds 2 bij, dus de hellinggrafiek is een rechte lijn.
b bij $x = 5$ is de helling $4 + 2 + 2 + 2 = 10$.
c De formule is van de vorm $y = ax + b$ met richtingscoëfficiënt 2 en startgetal 0, dus de formule is $y = 2x$.
d Oplossen van $2x = 7$ geeft $x = 3\frac{1}{2}$. Invullen in f geeft $f(3\frac{1}{2}) = (3\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$.
 De helling is 7 in het punt $(3\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4})$.
- 15 a** De afgeleide functie is $f'(x) = 2x$, dit geeft $f'(7) = 2 \cdot 7 = 14$.
b $f'(2,9) = 2 \cdot 2,9 = 5,8$
c Dan moet gelden $2x = 9$, dus $x = 4\frac{1}{2}$.
 $f(4\frac{1}{2}) = (4\frac{1}{2})^2 = 20\frac{1}{4}$, dus de helling is 9 in het punt $(4\frac{1}{2}, 20\frac{1}{4})$.
- 16 a** $\frac{dA}{dp} = 2p$, bij $p = -5$ geldt $\frac{dA}{dp} = 2 \cdot -5 = -10$.
b Bij $p = 3,5$ geldt $\frac{dA}{dp} = 2 \cdot 3,5 = 7$.



- b** De hellinggrafiek is een dalparabool.
c a is positief, omdat de grafiek een dalparabool is.
d Over het interval $[2; 2,001]$ is $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} = \frac{8,012... - 8}{0,001} \approx 12$.
 De helling van de grafiek van f in het punt $(2, 8)$ is 12.
 Er geldt $f'(2) = 12$, dit geeft $a \cdot 2^2 = 12$, dus $a = \frac{12}{4} = 3$.

- e Uit de hellinggrafiek volgt dat de helling in het punt $(1, 1)$ gelijk is aan 3.
Met de waarde van a volgt $f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$, dus dit klopt.
- f Er geldt $f'(x) = 75$.
 $3x^2 = 75$
 $x^2 = 25$
 $x = -5$ of $x = 5$
 In de punten $(-5, -125)$ en $(5, 125)$ is de helling 75.

18 a



De hellinggrafiek heeft de vorm van een derdegraadsfunctie, dus

$$f'(x) = a \cdot x^3.$$

Over het interval $[-2,001; -2]$ is

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(-2) - f(-2,001)}{-2 - (-2,001)} = \frac{16 - 16,032 \dots}{0,001} \approx -32.$$

De helling van de grafiek van f in het punt $(-2, 16)$ is -32 .

Er geldt $f'(-2) = -32$, dit geeft $a \cdot (-2)^3 = -32$, dus $a = \frac{-32}{-8} = 4$.

Dan is $f'(x) = 4 \cdot x^3$.

b $g'(x) = 10x^9$

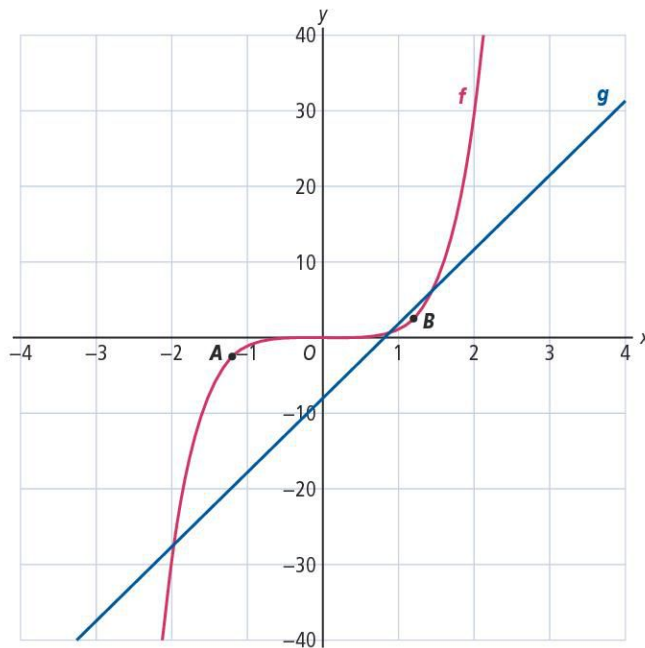
- 19 a De afgeleide functie is $f'(x) = 20x^{19}$.
 $f'(-1) = 20 \cdot (-1)^{19} = -20$, dus de helling in $(1, 1)$ is -20 .
- b De afgeleide functie is $g'(x) = 4x^3$.
 $g'(2) = 4 \cdot 2^3 = 32$ dus de helling in $(2, 16)$ is 32.
- c Er moet gelden $g'(x) = 108$.
 $4x^3 = 108$
 $x^3 = 27$
 $x = 3$, dus in $(3, 81)$ is de helling 108.

- 20 a De richtingscoëfficiënt is 1.
- b $f'(-2) = 1$ en $f'(3) = 1$
- c $f'(x) = 1$
- d $n = 1$, want $f(x) = x = x^1$.
 $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$, dit klopt met opdracht c.

- 21 a De helling is steeds 7.
- b $g'(t) = 7$
- c De grafiek van h is een rechte lijn waarvan de helling steeds 7 is, dus $h'(t) = 7$.
- d De grafiek van $k(x) = 5$ is een horizontale lijn op hoogte 5, waarvan de helling steeds 0 is, dus $k'(x) = 0$.

8A De afgeleide

22 a



- b $g'(x) = 10$ is een constante functie. Omdat de grafiek f puntsymmetrisch is, zijn er twee punten op de grafiek van f waarin de helling gelijk is aan 10. In die punten geldt dus $f'(x) = 10$. Die punten bevinden zich in de buurt van A en B.

c $f'(x) = 5x^4$ en $g'(x) = 10$

$$5x^4 = 10$$

$$x^4 = 2$$

$$x = -\sqrt[4]{2} \text{ of } x = \sqrt[4]{2}$$

$$x \approx -1,19 \text{ of } x \approx 1,19$$

019 a Met de regel als $f(x) = x^n$ dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

b $f(2) = 2^6 = 64$ en $f'(2) = 6 \cdot 2^5 = 6 \cdot 32 = 192$

c Betekenis $f(2) = 64$: Het punt $(2, 64)$ ligt op de grafiek van f .

Betekenis $f'(2) = 192$: In het punt $(2, 64)$ op de grafiek van f is de helling gelijk aan 192.

d $g'(x) = 5x^4$

e $x = -2$

f $g'(-2) = 5 \cdot (-2)^4 = 5 \cdot 16 = 80$

g $5 \cdot x^4 = 20$

$$x^4 = 4$$

$$x = \sqrt[4]{4} \approx 1,41 \text{ of } x = -\sqrt[4]{4} \approx -1,41$$

h $5 \cdot x^4 = 405$

$$x^4 = 81$$

$$x = \sqrt[4]{81} = 3 \text{ of } x = -\sqrt[4]{81} = -3$$

$$g(3) = 3^5 = 243 \text{ en } g(-3) = (-3)^5 = -243$$

De gevraagde punten zijn $(-3, -243)$ en $(3, 243)$.

021 a De helling is 2.

b Omdat de afgeleide functie precies de helling in elk punt beschrijft.

c De helling van de grafiek van h is in elk punt ook gelijk aan 2



e De helling is 0.

f $k'(x) = 0$

U3 $f'(x) = 5x^4$ en $g'(x) = 6x^5$
 $5x^4 = 6x^5$ geeft $x = 0$ en $x = \frac{5}{6}$.
 Dus dat geldt bij $x = \frac{5}{6}$.

U4 $\frac{dy}{dx} = 3x^2$
 $3x^2 \geq 48$
 $x^2 \geq 16$ en dit geldt voor $x \leq -4$ of $x \geq 4$.

8A.4 Regels voor differentiëren

intro Dan is zijn snelheid $120 + 75 = 195$ meter in 60 seconden.
 Dat is gelijk aan 3,25 m/s ofwel 11,7 km/uur.

23 a De helling is 5 keer zo groot.

b De helling van f wordt steeds met 5 vermenigvuldigd om de helling van g te krijgen.

c $g'(x) = 5 \cdot 2x = 10x$

24 a De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f drie omhoog te schuiven.

b

x	$f(x)$	$f'(x)$	$h(x)$	$h'(x)$
-4	16	-8	19	-8
-3	9	-6	12	-6
-2	4	-4	7	-4
-1	1	-2	4	-2
0	0	0	3	0
1	1	2	4	2
2	4	4	7	4
3	9	6	12	6
4	16	8	19	8

8A De afgeleide

- c De hellingen van f en h zijn steeds gelijk.

De grafiek van f is omhoog geschoven en zo ontstaat de grafiek van h . Als de grafiek omhoog geschoven wordt, blijft de helling voor elke waarde van x hetzelfde.

d $h'(x) = f'(x) = 2x$

25 a

X	Y ₁	Y ₂		
-5	-100	64,986		
-4	-48	39,989		
-3	-18	20,992		
-2	-4	7,995		
-1	0	,998		
0	0	,001		
1	2	5,004		
2	12	16,007		
3	36	33,01		
4	80	56,013		
5	150	85,016		
X = -5				

$s'(-2) = 8$ en $s'(1) = 5$

b $f'(x) = 2x$ geeft $f'(-2) = -4$

$g'(x) = 3x^2$ geeft $g'(-2) = 12$.

Er geldt $f'(-2) + g'(-2) = -4 + 12 = 8 = s'(-2)$.

c $f'(1) + g'(1) = 2 + 3 = 5 = s'(1)$.

d $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

e $v(x) = f(x) - g(x)$

Maak een tabel van $v(x)$ en $v'(x)$. Daaruit is af te lezen dat $v'(-2) = -16$ en

$v'(1) = -1$. Nu geldt $f'(-2) - k'(-2) = -4 - 12 = -16 = v'(-2)$.

Ook geldt $f'(1) - k'(1) = 2 - 3 = -1 = v'(1)$.

Dus $v'(x) = f'(x) - g'(x)$.

26 a $f'(x) = 20 \cdot 3x^2 = 60x^2$

e $n'(x) = 0,01 \cdot 25x^{24} - 0 = 0,25x^{24}$

b $F'(t) = 15 \cdot 6t^5 = 90t^5$

f $s'(t) = 0,5 \cdot 7t^6 - 4 \cdot 2t = 3,5t^6 - 8t$

c $A'(p) = 23 \cdot 2p + 0 = 46p$

g $Q'(p) = 0 - 34 = -34$

d $h'(u) = -0,75 + 0 = -0,75$

h $k'(q) = 7 - 0,9 \cdot 3q^2 = 7 - 2,7q^2$

27 a $f'(x) = -6 \cdot 2x + 5 - 0 = -12x + 5$

Dan is $f'(-1) = -12 \cdot -1 + 5 = 17$, dus de helling bij $x = -1$ is 17.

b $g'(x) = -3 \cdot 5x^4 - 8 \cdot 2x = -15x^4 - 16x$

Dan is $g'(-1) = -15 \cdot 1 + 16 = 1$, dus de helling bij $x = -1$ is 1.

c $h(x) = 10x^2 - 28x - 6$

$h'(x) = 10 \cdot 2x - 28 - 0 = 20x - 28$

Dan is $h'(-1) = 20 \cdot -1 - 28 = -48$, dus de helling bij $x = -1$ is -48.

d $k'(x) = 10x + 15x^2 + 2$

Dan is $k'(-1) = 10 \cdot -1 + 15 \cdot (-1)^2 + 2 = -10 + 15 + 2 = 7$, dus de helling bij $x = -1$ is 7.

e $l'(x) = 4x^3 - 2x$

Dan is $l'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot -1 = -4 + 2 = -2$, dus de helling bij $x = -1$ is -2.

f $m'(x) = 10x + 0 = 10x$

Dan is $m'(-1) = 10 \cdot -1 = -10$, dus de helling bij $x = -1$ is -10

28 a $h'(t) = 0 - 4,9 \cdot 2t = -9,8t$

$h'(3) = -9,8 \cdot 3 = -29,4$, dus de zandzak valt op $t = 3$ met een snelheid van 29,4 m/s.

b $h(3) = 200 - 4,9 \cdot 3^2 = 155,9$

Na drie seconden is de zandzak op een hoogte van 155,9 m.

- c Vanaf $t = 3$ verandert de snelheid van de zandzak niet meer, dus elke seconde valt de zandzak hetzelfde aantal meters naar beneden: er sprake van een lineair verband tussen h en t .
- d De startwaarde is 155,9 (zie opdracht b).
De richtingscoëfficiënt is $-29,4$ (zie opdracht a).
Dan is $a = -29,4$ en $b = 155,9$.
- e $h(t) = -29,4t + 155,9$
Op het moment dat de zandzak op de grond komt geldt $h(t) = 0$.
 $-29,4t + 155,9 = 0$
 $29,4t = 155,9$
 $t = \frac{155,9}{29,4} \approx 5,3$
Na het gooien van de zandzak uit de ballon duurt het ongeveer $3 + 5,3 = 8,3$ seconden voor de zandzak op de grond valt.

- 29 De functie f moet na differentiëren $f'(x) = -5 + 6x$ opleveren.
 $f(x) = -5x + 3x^2$ is een mogelijkheid, maar $f(x) = 4 - 5x + 3x^2$ kan bijvoorbeeld ook, of $f(x) = -7 - 5x + 3x^2$.

- 026 a $f'(x) = 4x^3$
b Je moet met 6 vermenigvuldigen.
c $g'(x) = 6 \cdot f'(x) = 6 \cdot 4x^3 = 24x^3$
d $h'(x) = 8$
e $s'(x) = f'(x) + h'(x) = 4x^3 + 8$
f $f'(x) = 14x^6$
g $K'(p) = 9p^2 + 9$
h $t'(a) = -0,5$
i $n'(t) = 6x^{29}$
j $P'(v) = -8v$
k $T'(q) = 10q - 6q^2$

- 027 a $g'(x) = 9x^2 - 2x$
b $g'(2) = 9 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 32$
c De helling van de grafiek van g bij $x = 2$ is 32.

- U5 Zijn tijd was 2 uur en 48 minuten, dat is gelijk aan 2,8 uur.
De gelopen afstand is $s = 2,8^3 - 4,5 \cdot 2,8^2 + 12 \cdot 2,8 = 20,272$ kilometer.

Zijn gemiddelde snelheid is $\frac{20,272}{2,8} = 7,24$ km/uur.

Zijn snelheid op elk moment kun je berekenen met behulp van de afgeleide:

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 9t + 12.$$

De op te lossen ongelijkheid is $3t^2 - 4,5t^2 + 12 < 7,24$.

Met een plot van $y_1 = 3x^2 - 9x + 12$ en $y_2 = 7,24$

met venster $0 \leq x \leq 3$ en $6 \leq y \leq 12$ en optie snijpunten vind je $x \approx 0,69$ en $x \approx 2,31$.

Hij liep ongeveer $(2,31 - 0,69) = 1,62$ uur langzamer dan zijn gemiddelde snelheid. Dat is $60 + 0,62 \times 60 = 97,2$ minuten, dus afgerond 98 minuten.

8A De afgeleide

8A.5 Maxima en minima

intro Die is 0 meter per seconde. De bal staat / hangt stil.

- 30**
- a** De raaklijn loopt dan horizontaal.
 - b** Die is daar gelijk aan 0.
 - c** $f'(x) = 4x^3 - 4x$
 - d** $f'(0) = 4 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 = 0$, klopt
 $f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot -1 = -4 + 4 = 0$, klopt
 $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$, klopt
 - e** In deze punten loopt de raaklijn horizontaal.
 - f** $f'(\frac{1}{2}) = 4 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$
 De helling is negatief, dus de grafiek van f daalt.
 - g** Als $f'(x) < 0$, is de helling negatief, dus de grafiek van f daalt.
- 31**
- a** Bij $x = -1$ en bij $x = 3$ is er een horizontale raaklijn.
 - b** $f'(x) = x^2 - 2x - 3$
 $f'(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$, klopt
 $f'(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$, klopt
 - c** Als $f'(x) < 0$ daalt de grafiek van f . Dat is het geval op het interval $\langle -1, 3 \rangle$.
- 32**
- a** $K'(p) = -3p^2 + 6p$
 - b** $-3p^2 + 6p = 0$
 $-3p(p - 2) = 0$
 $-3p = 0$ of $p - 2 = 0$
 $p = 0$ of $p = 2$
 - c** Invoer: $y_1 = -x^3 + 3x^2 + 7$
 Venster: $-3 \leq x \leq 5$ en $-10 \leq y \leq 25$
-
- Voor $p = 0$ is er sprake van een minimum.
 Voor $p = 2$ is er sprake van een maximum.
- d** Het minimum is $K(0) = 7$ en het maximum is $K(2) = 11$.
- 33**
- a** $L'(m) = -16m + 16$
 $L'(m) = 0$
 $-16m + 16 = 0$
 $-16m = -16$, dus $m = 1$
 De grafiek van L is een bergparabool, dus er is een maximum bij $m = 1$.
 Het maximum van L is $L(1) = 8$.
 - b** $h'(x) = 3x^2 + 8x + 16$
 $h'(x) = 0$
 $3x^2 + 8x + 16 = 0$
 In een plot van $y = 3x^2 + 8x + 16$ zie je dat deze parabool geheel boven de x -as ligt. De vergelijking $3x^2 + 8x + 16 = 0$ heeft dus geen oplossingen.
 De grafiek van h heeft dus geen maxima en minima.

c $T'(q) = -3q^2 + 10q - 3$

$$T'(q) = 0$$

$$-3q^2 + 10q - 3 = 0$$

$$q = \frac{-10 + \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-3)} \text{ of } q = \frac{-10 - \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$q = \frac{1}{3} \text{ of } q = 3$$

In een plot zie je dat er een minimum is bij $q = \frac{1}{3}$ en een maximum bij $q = 3$.

Het minimum van T is $T\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,48$.

Het maximum van T is $T(3) = 9$.

d $w'(r) = 3r^2 - 16r$

$$w'(r) = 0$$

$$3r^2 - 16r = 0$$

$$r(3r - 16) = 0$$

$$r = 0 \text{ of } 3r - 16 = 0$$

$$r = 0 \text{ of } 3r = 16$$

$$r = 0 \text{ of } r = 5\frac{1}{3}$$

In een plot van de grafiek van w zie je dat er een maximum is bij $r = 0$ en een minimum bij $r = 5\frac{1}{3}$.

Het maximum van w is $w(0) = 6$.

Het minimum van w is $w\left(5\frac{1}{3}\right) \approx -69,9$.

34 a Invoer: $y_1 = (x - 6) \times 1,5^x$

Venster: $0 \leq x \leq 8$ en $-20 \leq y \leq 40$

Optie: minimum

Het minimum van H is $H \approx -10,33$.

b $K'(x) = -2x + 104$

$K'(x) = 0$ als $-2x = -104$, dus als $x = 52$. De grafiek van K is een

bergparabool, dus de grafiek van K heeft een maximum voor $x = 52$. Het maximum van K is $K(52) = 2714$.

35 a Bij een productie van zestig sleutelhangers is het verschil tussen TO en TK groter dan bij een productie van 180 sleutelhangers. Hoe groter het verschil tussen TO en TK , hoe groter de winst.

b De winst is het verschil tussen TO en TK , dus de maximale winst is de grootste verticale afstand tussen een punt op grafiek TO en een punt op grafiek TK . Deze afstand lijkt het grootst in het midden, dus daar is de winst maximaal.

c $TO' = 12 - q$

De afgeleide is gelijk aan 0 bij $q = 12$, dus bij 120 sleutelhangers per dag is de opbrengst maximaal.

d $TW = TO - TK$

$$TW = 12q - 0,5q^2 - (0,1q^2 + 10)$$

$$TW = 12q - 0,6q^2 - 10$$

e $TW' = 12 - 1,2q$

De winst is maximaal als geldt $TW' = 0$.

$$12 - 1,2q = 0$$

$$1,2q = 12$$

$q = 10$, dus bij een productie van 100 sleutelhangers is de winst maximaal.

8A De afgeleide

36 a $k = 3$ geeft $TO = -0,01q^3 + 3q^2$.

$$TO' = -0,03q^2 + 6q$$

$$TO' = 0$$

$$-0,03q^2 + 6q = 0$$

$$q(-0,03q + 6) = 0$$

$$q = 0 \text{ of } -0,03q + 6 = 0$$

$$q = 0 \text{ of } -0,03q = -6$$

$$q = 0 \text{ of } q = \frac{-6}{-0,03} = 200$$

In de grafiek van TO zie je dat bij $q = 200$ een maximum is.

De maximale opbrengst is $TO(200) = 40\,000$ euro.

b Als TO maximaal is bij $q = 300$, is $q = 300$ een oplossing van de vergelijking

$$TO' = 0.$$

$$TO' = -0,03q^2 + 2kq$$

$$TO' = 0$$

$$-0,03q^2 + 2kq = 0$$

$$q(-0,03q + 2k) = 0$$

$$q = 0 \text{ of } -0,03q + 2k = 0$$

$$q = 0 \text{ of } -0,03q = -2k$$

$$q = 0 \text{ of } q = \frac{-2k}{-0,03}$$

Er is gegeven dat $q = 300$ een oplossing is, dus er geldt $300 = \frac{-2k}{-0,03}$.

Dit geeft $-2k = -9$, dus $k = 4\frac{1}{2}$.

c $GO = \frac{TO}{q}$

$$GO = \frac{-0,01q^3 + k \cdot q^2}{q}$$

$$GO = -0,01q^2 + k \cdot q$$

d $k = 3$ geeft $GO = -0,01q^2 + 3q$

$$GO' = -0,02q + 3$$

$$GO' = 0$$

$$-0,02q + 3 = 0$$

$$-0,02q = -3, \text{ dus } q = \frac{-3}{-0,02} = 150.$$

De grafiek van GO is een bergparabool, dus er is een maximum bij $q = 150$.

De maximale gemiddelde opbrengst is $GO(150) = 225$ euro.

031 a Dat is het geval bij $x = 1$.

b De helling van een horizontale lijn is gelijk aan 0.

c $f(x) = x^2 - 2x - 3$, dus $f'(x) = 2x - 2$ en $f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$.

d Dat is het geval bij $x < 1$.

e Dat is het geval bij $x < 1$.

033 a $f'(x) = x^2 + 2x - 8$

b $f'(-4) = (-4)^2 + 2 \cdot -4 - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$ en

$$f'(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

c Er is een maximum bij $x = -4$ en een minimum bij $x = 2$.

d $f(-4) = \frac{1}{3} \cdot (-4)^3 + (-4)^2 - 8 \cdot (-4) = \frac{1}{3} \cdot -64 + 16 + 32 = 26\frac{2}{3}$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 - 8 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 8 + 4 - 16 = -9\frac{1}{3}$$

U6 a $f(0) = -2$ en $f(1) = 1$. Dus bij 0 is f negatief en bij 1 is f positief.

Dan moet hij tussen 0 en 1 een keer 0 zijn.

b $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ De afgeleide is voor elke x positief, groter dan 0: Dat komt door de vierde macht en de kwadraat en doordat er nog 1 bij opgeteld wordt. De grafiek van f is dus stijgend en zal na het snijpunt tussen 0 en 1 niet meer terugkeren naar de x -as.

c $g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ geeft $x = -2$ of $x = 2$.

Gevraagd wordt de lijn door de punten $(-2, g(-2))$ en $(2, g(2))$.

$$g(-2) = \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 2 = 4\frac{2}{3} \text{ en } g(2) = \frac{1}{6} \cdot (2)^3 - 2 \cdot (2) + 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Richtingscoëfficiënt van de lijn is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right) - 4\frac{2}{3}}{2 - (-2)} = \frac{-5\frac{1}{3}}{4} = -\frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}x + b \text{ gaat door } \left(2, -\frac{2}{3}\right): -\frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \cdot 2 + b$$

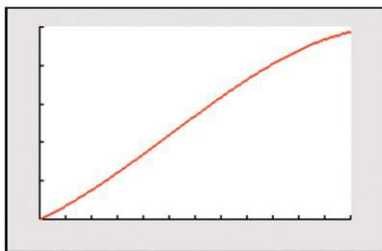
Hieruit volgt dat $b = 2$.

Een vergelijking van de lijn is $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

8A.6 Gemengde opdrachten

37 a Invoer: $y_1 = -0,012x^3 + 0,18x^2 + 1,6x$

Venster: $0 \leq x \leq 12$ en $0 \leq y \leq 25$



Mevrouw Snoek heeft erg gelijkmatig gereden. De eerste helft van de rit heeft ze langzaam versneld. De tweede helft van de rit is ze juist steeds iets langzamer gaan rijden.

b $s' = -0,036t^2 + 0,36t + 1,6$

Invoer: $y_1 = -0,036x^2 + 0,36x + 1,6$

Venster: $0 \leq x \leq 12$ en $0 \leq y \leq 5$

Optie: maximum

Oplossing: $(5; 2,5)$

De oplossing is $t = 5$. Na 5 minuten is de snelheid van mevrouw Snoek maximaal.

c De maximale snelheid is 2,5 km/minuut. Dit is $2,5 \cdot 60 = 150$ km/ uur.

d Meneer Barends heeft constant gereden met een snelheid van 2 km/min. Hij heeft in 12 minuten $2 \cdot 12 = 24$ km afgelegd.

e $s(t) = 2t$

8A De afgeleide

- f De hellinggrafiek van s geeft de snelheid van mevrouw Snoek weer.

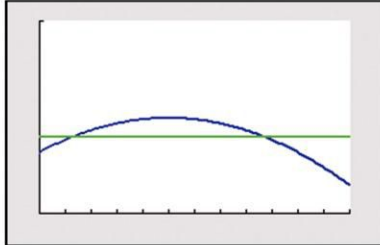
De snelheid van meneer Barends is steeds 2 km/min.

Invoer: $y_1 = -0,036x^2 + 0,36x + 1,6$ en $y_2 = 2$

Venster: $0 \leq x \leq 12$ en $0 \leq y \leq 5$

Optie: snijpunten

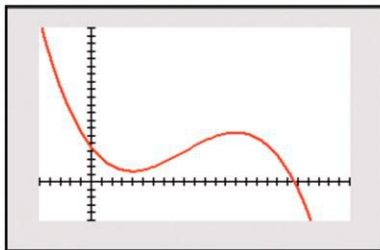
Oplossing: (1,27; 2) en (8,73; 2).



Mevrouw Snoek reed $8,73 - 1,27 \approx 7,5$ minuut harder dan meneer Barends.

- 38 a Invoer: $y_1 = 27x^2 - x^3 - 168x + 450$

Venster: $-5 \leq x \leq 20$ en $-100 \leq y \leq 2500$



b $\frac{dA}{du} = 54u - 3u^2 - 168$

Bij $u = 4$ geldt $\frac{dA}{du} = 54 \cdot 4 - 3 \cdot 4^2 - 168 = 0$.

Er kan dus een minimum zijn bij $u = 4$ (een maximum zou ook tot de mogelijkheden kunnen behoren). In de plot van A zie je dat het een minimum is. Het minimum van A is $A(4) = 146$.

c $\frac{dA}{du} = 0$

$$54u - 3u^2 - 168 = 0$$

$$-3u^2 + 54u - 168 = 0$$

$$u^2 - 18u + 56 = 0$$

$$(u - 4)(u - 14) = 0$$

$$u - 4 = 0 \text{ of } u - 14 = 0$$

$$u = 4 \text{ of } u = 14$$

Het maximum van A is $A(14) = 646$.

- 39 a Op $t = 0$ bevat het zwembad $V = 10 \cdot \left(2 - \frac{1}{60} \cdot 0\right)^2 = 10 \cdot 2^2 = 40 \text{ m}^3$ water.

- b Als het zwembad leeg is geldt $V = 0$.

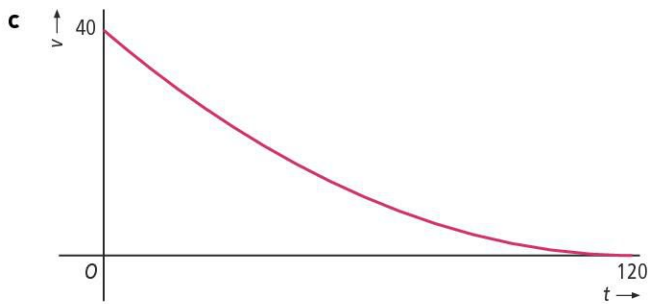
$$10 \cdot \left(2 - \frac{1}{60} t\right)^2 = 0$$

$$\left(2 - \frac{1}{60} t\right)^2 = 0$$

$$2 - \frac{1}{60} t = 0$$

$$-\frac{1}{60} t = -2$$

$$t = \frac{-2}{-\frac{1}{60}} = 120 \text{ minuten}$$



d De hoeveelheid water neemt af, dus de grafiek van V daalt, dus de helling van de grafiek is negatief.

e
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{40}{120} = -\frac{1}{3} \text{ m}^3 \text{ per minuut.}$$

De gemiddelde uitstroomsnelheid is dus $\frac{1}{3} \text{ m}^3$ per minuut.

f In het begin stroomt het zwembad het snelst leeg, want daar daalt de grafiek het sterkst.

g
$$V = 10 \cdot \left(2 - \frac{1}{60}t\right)^2$$

$$V = 10 \cdot \left(2 - \frac{1}{60}t\right)\left(2 - \frac{1}{60}t\right)$$

$$V = 10 \cdot \left(4 - \frac{1}{30}t - \frac{1}{30}t + \frac{1}{3600}t^2\right)$$

$$V = 40 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{360}t^2$$

h Er moet gelden $V' = -\frac{1}{3}$.

$$V' = -\frac{2}{3} + \frac{1}{180}t$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{180}t = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{180}t = \frac{1}{3}$$

$$t = 60 \text{ minuten}$$

Onderzoeksoopdrachten

40 De helling van de getekende lijnen is gelijk aan -4 .

De eerste vraag die je je kunt stellen is: Zijn er punten op de grafiek van f waarin de helling, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan -4 ? Daar kun je achter komen door de vergelijking $f'(x) = -4$ op te lossen.

$$f'(x) = x^2 + 6x + 1. \quad x^2 + 6x + 1 = -4 \text{ geeft } x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Deze vergelijking heeft als oplossingen $x = -5$ en $x = -1$.

$$f(-5) = \frac{1}{3}(-5)^3 + 3(-5)^2 + (-5) - 4 = 24\frac{1}{3}$$

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) - 4 = -2\frac{1}{3}$$

Er zijn dus punten op de grafiek van f waarin de helling, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan -4 , namelijk $(-5, 24\frac{1}{3})$ en

$(-1, -2\frac{1}{3})$. De lijn $y = -4x + c$ die gaat door $(-5, 24\frac{1}{3})$ geeft $24\frac{1}{3} = -4 \cdot -5 + c$

$$\text{dus } c = 4\frac{1}{3}.$$

De lijn $y = -4x + c$ die gaat door $(-1, -2\frac{1}{3})$ geeft $-2\frac{1}{3} = -4 \cdot -1 + c$ dus $c = -6\frac{1}{3}$.

8A De afgeleide

- 41 a** De plaat is weer vierkant als $L(t) = B(t)$.
 Invoer: $y_1 = -0,0135x^2$ en $y_2 = 60 - 0,05x$
 Venster: $-1 \leq x \leq 5$ en $59,5 \leq y \leq 60,5$
 Optie: snijpunten
 De snijpunten zijn $(0, 60)$ en $(3,7; 59,8)$.
 Na 3,7 maanden zijn de lengte en breedte weer gelijk, dus dan is de plaat weer vierkant.
- b** De lengte en breedte krimpen even snel als $L'(t) = B'(t)$.
 $-0,027t = -0,05$
 $t = \frac{-0,05}{-0,027} \approx 1,85$
 Na ongeveer 1,85 maanden krimpen de lengte en breedte met dezelfde snelheid.
- 42 a** De totale opbrengst kun je berekenen als je het aantal klanten weet (q) en de gemiddelde prijs (p) per rit. Dan is $TO = p \cdot q$.
 Vul je $q = 86 - 24 \cdot \frac{p}{t} - 6 \cdot t$ hier in, dan krijg je

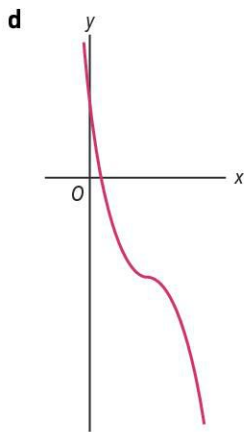
$$TO = p \cdot \left(86 - 24 \cdot \frac{p}{t} - 6 \cdot t \right) = 86p - 24 \cdot \frac{p^2}{t} - 6 \cdot t \cdot p$$
- b** $t = 4$ geeft $TO = 86p - 6p^2 - 24p = -6p^2 + 62p$. De grafiek van TO is een bergparabool en heeft een maximum als $p = 5,16666\dots$
 Dat is dus bij een prijs van € 5,16 (of € 5,17).

Samenvatting

- S1 a** $t = 1$ geeft $h' = 9,8 \cdot 1 = 9,8$ dus de helling is 9,8.
- b** $\frac{dh}{dt} = 9,8 \cdot 2 = 19,6$
- c** $\frac{dh}{dt} = 9,8 \cdot 3 = 29,4$ m/s
- S2 a** Kies het interval $[9, 9,001]$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(-6\sqrt{9,001} + 45,005) - (-6\sqrt{9} + 45)}{9,001 - 9} = \frac{0,0040\dots}{0,001} \approx 4$$
 dus de helling is 4.
- b** Kies het interval $[-2, -1,999]$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{(-3 \cdot 0,5^{-1,999}) - (-3 \cdot 0,5^{-2})}{-2 - -1,999} = \frac{0,0083\dots}{0,001} \approx 8,3$$
 dus de helling is 8,3.
- S3 a** De hellinggrafiek snijdt de x -as in $x = 2$ en $x = 4$.
 Bij deze waarden van x heeft de grafiek van f toppen.
- b** Bij $x = 4$ is er een maximum, De hellinggrafiek gaat daar van positief naar negatief, dus de grafiek van f gaat daar van stijgend naar dalend.
- c** De grafiek van g is overal dalend, behalve in dat ene punt.



- S4** **a** $f'(x) = -80x^4$
b $H'(t) = -8t^3 + 3$
c $W'(q) = -1$

- S5** **a** $f'(x) = 4x + 5$ $f'(3) = 17$ dus de helling is 17.
b $g'(x) = -4x^3 + 8$ $g'(3) = -4 \cdot 27 + 8 = -100$ dus de helling is -100 .
c $h'(x) = 12x$ $h'(3) = 36$ dus de helling is 36.

- S6** **a** $f'(x) = 6x - 6$
 $f'(x) = 0$ geeft $x = 1$
 De grafiek van f is een dalparabool, dus $f(1) = 1$ is een minimum van f .

- b** $P'(x) = 1,5x^2 - 6$

$$P(x) = 0$$

$$x^2 = 6 : 1,5 = 4$$

$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

In een plot zie je dat er een maximum is bij $x = -2$ en een minimum bij $x = 2$.

$P(-2) = 6$ is een maximum van P .

$P(2) = -10$ is een minimum van P .

- c** $H'(x) = x^3 - 6x$

$$H'(x) = 0$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x^2 = 6$$

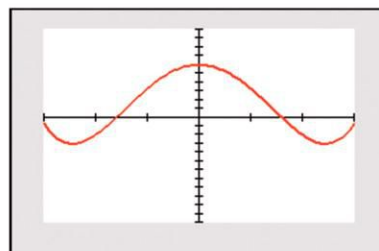
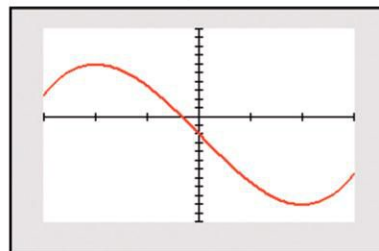
$$x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{6} \text{ of } x = \sqrt{6}$$

In een plot zie je dat er een maximum is bij $x = 0$ en een minima bij $x = -\sqrt{6}$ en $x = \sqrt{6}$.

$H(0) = 6$ is een maximum van H .

$H(-\sqrt{6}) = -3$ is een minimum van H .

$H(\sqrt{6}) = -3$ is een minimum van H .



8A De afgeleide

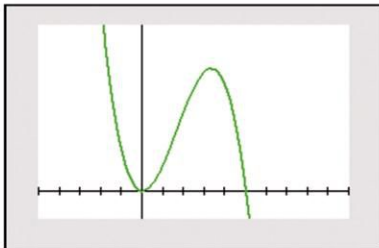
Test jezelf

- T1 a** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2,01) - f(2)}{2,01 - 2} = \frac{3,997495318... - 4}{0,01} \approx -0,2505$
 $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} = \frac{3,99974995... - 4}{0,001} \approx -0,2500$
- b** De helling van de grafiek bij $x = 2$ is $-0,25$.
- c** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(-0,999) - f(-1)}{-0,999 - -1} = \frac{4,0004996... - 4}{0,001} = 0,499625... \approx 0,5$
 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(-1, 4)$ is $0,5$.
- d** $f(7) = 3\sqrt{7+2} - 7 = 2$ en $y = -0,5 \cdot 7 + 5,5 = 2$, dus de grafiek van f en de lijn gaan door het punt $(7, 2)$. Nu weet je dat de lijn de grafiek in dat punt snijdt. Je weet nog niet of de lijn de grafiek daar ook raakt. Daarvoor moeten de hellingen in dat punt gelijk zijn.
 De richtingscoëfficiënt van de lijn is $-0,5$.
 Het differentiequotient in $x = 7$ is
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7,001) - f(7)}{7,001 - 7} \approx \frac{1,9994... - 2}{0,001} \approx -0,50001... \approx -0,5$.
 De helling van f bij $x = 7$ is gelijk aan $-0,5$.
 Dus de lijn $y = -0,5x + 5,5$ raakt de grafiek van f in het punt $(7, 2)$.
- T2 a** $g'(x) = 6x^5$ en $g'(-1) = 6 \cdot (-1)^5 = -6$, dus de helling in $(-1, 1)$ is -6 .
- b** Er moet gelden $g'(x) = 192$.
 $6x^5 = 192$
 $x^5 = 32$
 $x = 2$
 In het punt $(2, 64)$ is de helling gelijk aan 192 .
- c** $h'(x) = 17x^{16}$ en $h'(-1) = 17$, dus de helling in $(-1, -1)$ is 17 .
- d** $h'(x) = m'(x)$
 $17x^{16} = 17$
 $x^{16} = 1$
 $x = 1$ of $x = -1$
 Bij $x = 1$ en $x = -1$ hebben de grafiek van g en h dezelfde helling.
- T3 a** De afmetingen van het bakje zijn 14 bij 9 bij 1 cm.
 De inhoud is $14 \times 9 \times 1 = 126 \text{ cm}^3$.
- b** De afmetingen van het bakje zijn 12 bij 7 bij 2 cm.
 De inhoud is $12 \times 7 \times 2 = 168 \text{ cm}^3$.
- c** De afmetingen van het bakje zijn x bij $16 - 2x$ bij $11 - 2x$ cm.
 De inhoud is $I = x(16 - 2x)(11 - 2x)$.
- d** Bovenstaande formule herleiden als volgt:
 $x(16 - 2x)(11 - 2x) = (16x - 2x^2)(11 - 2x) =$
 $16x \cdot 11 - 16x \cdot 2x - 2x^2 \cdot 11 - 2x^2 \cdot -2x =$
 $176x - 32x^2 - 22x^2 + 4x^3 = 4x^3 - 54x^2 + 176x$
- e** $\frac{dI}{dx} = 12x^2 - 108x + 176$
 Er is een maximum als $12x^2 - 108x + 176 = 0$
 Invoer: $y = 12x^2 - 108x + 176$
 Venster: $0 \leq x \leq 10$ en $-100 \leq y \leq 200$
 De grafiek snijdt de x -as bij $x \approx 2,14$ en $x \approx 6,87$.
 Het maximum is ongeveer bij $x \approx 2,1$.

- f $I(2,1) \approx 4 \cdot (2,1)^3 - 54 \cdot (2,1)^2 + 176 \cdot 2,1 \approx 168,5$
De maximale inhoud van het bakje is ongeveer $168,5 \text{ cm}^3$.

- T4 a** De grafiek van f stijgt voor $2 < x < 4$.
b De hellinggrafiek ligt voor $x > 4$ onder de x -as en daalt zelf.
c De hellinggrafiek ligt voor $x < 2$ onder de x -as en stijgt daar. Dat betekent dat de waarden van de hellingfunctie (de hellingen in punten van de grafiek van f) steeds dichterbij 0 liggen, dus de helling in de punten van de grafiek van f ook: f wordt vlakker en daalt minder snel: afnemend dalend dus.
d De hellinggrafiek heeft daar een snijpunt met de x -as en loopt van boven de x -as naar onder de x -as. f gaat van stijgend naar dalend. Er is dus sprake van een maximum.
e De grafiek van f heeft een minimum bij $x = 2$.
De hellinggrafiek heeft daar een snijpunt met de x -as en loopt van onder de x -as naar boven de x -as en f dus van dalend naar stijgend.
f De hellinggrafiek heeft een maximum bij $x = 3$.
Toenemende stijging gaat daar over in afnemende stijging, dus de grafiek van f heeft daar geen top.

- T5 a** $f'(x) = -12x^3 + 60x^2$
 $-12x^3 + 60x^2 = 0$
 $-12x^2(x - 5) = 0$
 $-12x^2 = 0$ of $x - 5 = 0$
 $x = 0$ of $x = 5$
b De grafiek van f is dalend als de hellinggrafiek van f onder de x -as ligt.
Invoer: $y = -12x^3 + 60x^2$
Venster: $-5 \leq x \leq 10$ en $-5 \leq y \leq 300$



De hellinggrafiek van f ligt onder de x -as voor $x > 5$, dus de grafiek van f is dalend voor $x > 5$.

- c** In een plot van de grafiek van f zie je dat er een maximum is bij $x = 5$.
Het maximum van f is $f(5) = 650$.
d $L'(p) = 6p^2 - 6p - 12$
 $L'(p) = 0$
 $6p^2 - 6p - 12 = 0$
 $p^2 - p - 2 = 0$
 $(p - 2)(p + 1) = 0$
 $p - 2 = 0$ of $p + 1 = 0$
 $p = 2$ of $p = -1$
 In een plot zie je dat er een maximum is bij $p = -1$ en een minimum bij $p = 2$.
 Het maximum van L is $L(-1) = 12$.
 Het minimum van L is $L(2) = -15$.

8A De afgeleide

- T6 a** $p'(x) = -4x^7$
b $d'(p) = 45p^4$
c $h'(t) = -2t + 5$

- T7 a** q is in duizendtallen, dus bij 6000 hamers is $q = 6$.
 $TK(6) = 0,1 \cdot 6^3 - 2 \cdot 6^2 + 15 \cdot 6 = 39,6$, dus de totale kosten zijn 3960 euro.
- b** $\frac{dTK}{dq} = 0,3q^2 - 4q + 15$
- c** Een plot laat zien dat de grafiek van TK' geen snijpunten heeft met de q -as. Dan is TK' voor geen enkele waarde van q gelijk aan 0, dus TK heeft geen maximum of minimum.
 De grafiek van TK' is een dalparabool zonder nulpunten, dus TK' is voor elke waarde van q groter dan 0. Dan is de grafiek van TK overal stijgend.
- d** De opbrengst voor elke waarde van q kun je berekenen met $TO = 17,5q$ in honderden euro's.
 Winst is gelijk aan de opbrengst minus de kosten. Er geldt dus voor de totale winst $TW = 0,1q^3 - 2q^2 + 15q - 17,5q = 0,1q^3 - 2q^2 - 2,5q$.
 $\frac{dTW}{dq} = 0,3q^2 - 4q - 2,5$
 Het oplossen van $0,3q^2 - 4q - 2,5 = 0$ geeft $q \approx -0,598$ en $q \approx 13,931$. Een negatieve waarde van q heeft geen betekenis. In een plot van W zie je dat er sprake is van een maximale waarde bij $q \approx 13,931$. Bij een productieomvang van 13 931 hamers is de winst maximaal.

Extra oefening

- E1 a** Over het interval $[3; 3,001]$ is
 $\frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{h(3,001) - h(3)}{3,001 - 3} = \frac{2,829134... - 2,828427...}{0,001} = 0,707018... \approx 0,7$.
 De helling bij $p = 3$ is 0,7.
- b** De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gelijk aan de helling van de grafiek in punt $(2, 2)$.
 Over $[2; 2,001]$ is $\frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{h(2,001) - h(2)}{2,001 - 2} = \frac{2,000999... - 2...}{0,001} = 0,999999... \approx 1$.
 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is 1.
- c** Over het interval $[100; 100,001]$ is
 $\frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{h(100,001) - h(100)}{100,001 - 100} = \frac{19,899849... - 19,899748...}{0,001} = 0,1005035... \approx 0,1005$.
 De helling bij $p = 100$ is 0,1005, dus de helling is nog niet afgenomen tot onder de 0,1.
- E2 a** Bij $x = 2$ en $x = 6$ heeft de grafiek toppen.
b bij $x = 6$ heeft de functie f een maximum.
c Voor $2 < x < 4$ is de grafiek toenemend stijgend.
d Voor $x < 2$ is de grafiek afnemend dalend.

- E3 a** A $h'(q) = 6q$
 B $S'(t) = -5t^4 + 6t - 8$
 C $K'(p) = -14p$
 D $A'(n) = 1,5n^5$

- b** E $f'(x) = -2x$ $f'(2) = -2 \cdot 2 = -4$ dus de helling is -4 .
 F $g'(x) = 9x^2 + 8$ $g'(2) = 9 \cdot 2^2 + 8 = 44$ dus de helling is 44 .

E4 De opbrengst is maximaal als geldt $TO'(q) = 0$.

$$TO'(q) = -3q^2 + 48q + 51$$

$$-3q^2 + 48q + 51 = 0$$

$$q^2 - 16q - 17 = 0$$

$$(q - 17)(q + 1) = 0$$

$$q - 17 = 0 \text{ of } q + 1 = 0$$

$$q = 17 \text{ of } q = -1$$

$q = -1$ heeft in deze situatie geen betekenis, dus de opbrengst is maximaal bij $q = 17$.

De maximale opbrengst krijgt de fabrikant bij 1700 kg grondstoffen.

- b** $TO(17) = -17^3 + 24 \cdot 17^2 + 51 \cdot 17 = 2890$, dus de maximale opbrengst is € 2.890.000,-.

E5 f hoort bij 2.

g hoort bij 1.

h hoort bij 4.

i hoort bij 3.

E6 a $\frac{dH}{dq} = 13q^{12}$

$$H'(2) = 13 \cdot 2^{12} = 53\,248 \text{ dus de helling is } 53\,248.$$

- b** Invullen van $q = -1$ en $q = 1$ geeft helling 13.

c $\frac{dH}{dq} = 13 \cdot 1,7^{12} \approx 7574$

E7 a $f'(x) = 1$ voor elke x dus voor $x = 1$ is $\frac{dy}{dx} = 1$.

$$g'(x) = 3x^2, \text{ dus voor } x = 1 \text{ is } \frac{dy}{dx} = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

$$h'(x) = -2x, \text{ dus voor } x = 1 \text{ is } \frac{dy}{dx} = -2 \cdot 1 = -2.$$

- b** Er moet gelden $f'(x) = h'(x)$, dus $1 = -2x$. Dan is $x = -\frac{1}{2}$.

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{3}{4}, \text{ dus dat is in het punt } \left(-\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right).$$

- c** Er moet gelden $g'(x) = h'(x)$.

$$3x^2 = -2x$$

$$3x^2 + 2x = 0$$

$$x(3x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ of } 3x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = -\frac{2}{3}$$

E8 a 85 minuten is $\frac{85}{15} = \frac{17}{3}$ kwartier.

In 85 minuten is de afgelegde afstand

$$s\left(\frac{17}{3}\right) = 1,1 \cdot \left(\frac{17}{3}\right)^2 - 0,02 \cdot \left(\frac{17}{3}\right)^4 \approx 14,7 \text{ km}.$$

Herman legt 14,7 km in 85 minuten af.

Dat is $\frac{14,7}{85} \times 60 \approx 10,4$ km/uur.

b $s'(t) = 2,2t - 0,08t^3$

$$s'(3) = 2,2 \cdot 3 - 0,08 \cdot 3^3 = 4,44 \text{ km/kwartier, dus } 4,44 \times 4 = 17,76 \text{ km/uur.}$$

8C Vorm en ruimte

Voorkennis

V1 a

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
10	100
15	<u>225</u> +
<i>diagonaal</i>	325

b $diagonaal = \sqrt{325} \approx 18,0 \text{ cm}$

V2 a

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
$AB = 12$	144
$BC = 9$	<u>81</u> +
$AC = \dots$	225

$AC = \sqrt{225} = 15$

b

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
$DE = 7$	49
$DF = 7$	<u>49</u> +
$EF = \dots$	98

$EF = \sqrt{98} \approx 9,9$

c

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
$PR = 3$	9
$QR = \dots$	<u>160</u> +
$PQ = 13$	169

$RQ = \sqrt{160} \approx 12,6$

V3

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
$AB = 6$	36
$AD = 4$	<u>16</u> +
$BD = \dots$	52

$BD = \sqrt{52} \approx 7,2$

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
$BD = \sqrt{52}$	52
$BC = \dots$	<u>29</u> +
$CD = 9$	81

$BC = \sqrt{29} \approx 5,4$

V4 factor = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

- V5 a** Hoek B in driehoek ABC en hoek D in driehoek ABD zijn beide 90° .
 Hoek A in driehoek ABC en hoek A in driehoek ABD zijn even groot.
 In beide driehoeken geldt dat de som van de driehoek gelijk is aan 180° en dus geldt dat hoek C in driehoek ABC gelijk is aan hoek B in driehoek ABD .

b factor = $\frac{6}{5} = 1,2$

- c** Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek ABD met vergrotingsfactor 1,2.
 De zijden AC en AB zijn overeenkomstige zijden.
 $AC = 1,2 \times AB = 1,2 \times 6 = 7,2$
 $CD = AC - AD = 7,2 - 5 = 2,2$

- V6 a** $\frac{9}{20} = 0,45$ en $\frac{13}{30} \approx 0,43$. Deze factoren zijn niet gelijk, dus de formaten zijn geen vergroting van elkaar.

- b** De oppervlakten zijn respectievelijk $20 \cdot 30 = 600 \text{ cm}^2$ en $9 \cdot 13 = 117 \text{ cm}^2$.

V7 A $oppervlakte = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$

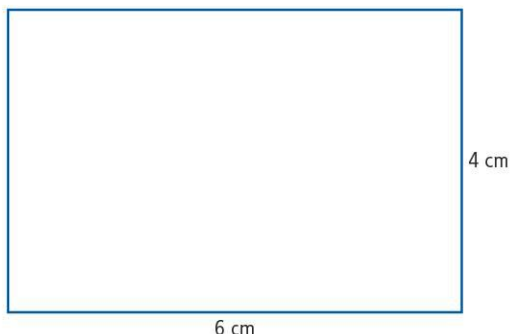
B

zijde	kwadraat
3	9
hoogte	$\frac{91}{100} +$
10	

$$hoogte = \sqrt{91}$$

$$oppervlakte = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{91} \approx 28,6$$

V8 a



b De cirkel heeft een straal gelijk aan 2 cm.

$$oppervlakte = \pi \cdot 2^2 \approx 12,6 \text{ cm}^2$$

c $\frac{12,6}{4 \cdot 6} \cdot 100\% \approx 52,4\%$

De oppervlakte van de rechthoek is voor 52,4% gevuld met de cirkel.

d

zijde	kwadraat
4	16
6	$\frac{36}{52} +$
diagonaal	

$$diagonaal = \sqrt{52}$$

De straal van de cirkel is gelijk aan $\frac{1}{2} \sqrt{52}$.

$$oppervlakte = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{52}\right)^2 \approx 40,8 \text{ cm}^2$$

8C.1 Gelijkvormigheid

intro Op de kaart heeft de route een lengte van ongeveer 6 cm.
18 km komt overeen met 18 000 000 cm. $\frac{18\,000\,000}{6} = 3\,000\,000$.
De schaal is dus ongeveer gelijk aan 1 : 3 000 000.

1 De vergrotingsfactor is gelijk aan 2.
De lengte van de diagonaal is dus $2 \times 26 = 52$ cm.

2

zijde	kwadraat
18	324
24	$\frac{576}{900} +$
diagonaal	

$$diagonaal = \sqrt{900} = 30 \text{ cm}$$

De vergrotingsfactor is $\frac{48}{30} = 1,6$

$1,6 \cdot 18 = 28,8$ cm en $1,6 \cdot 24 = 38,4$ cm,
dus de afmetingen zijn $28,8 \times 38,4$ cm.

8C Vorm en ruimte

- 3 a** De zijde van 54 cm kan zowel de vergroting zijn van de zijde van 10 cm als de zijde van 22,5 cm. Er zijn dus twee lengtes mogelijk.
- b** De ene mogelijkheid is $\frac{54}{10} \cdot 22,5 = 121,5$ cm en de andere is $\frac{54}{22,5} \cdot 10 = 24$ cm.
- 4 a** Hoek S in driehoek ABS en hoek S in driehoek CDS zijn gelijk (overstaande hoeken). Hoek A in driehoek ABS en hoek C in driehoek CDS zijn gelijk (Z-hoeken). Hoek B in driehoek ABS en hoek D in driehoek CDS zijn gelijk (Z-hoeken). Driehoek ABS en driehoek CDS hebben dus drie paren gelijke hoeken en dus zijn ze gelijkvormig.
- b** De vergrotingsfactor is $\frac{2}{5} = 0,4$ (mits je CDS als vergroting van ABS ziet).
- c** $CS = 0,4 \cdot AS = 0,4 \cdot 8 = 3,2$
- 5 a** In beide vierkanten zijn alle hoeken gelijk aan 90° . In beide vierkanten zijn alle vier de zijden even lang. De vergrotingsfactor is daarom voor elke zijde gelijk en dus zijn twee vierkanten altijd gelijkvormig.
- b** Bijvoorbeeld een rechthoek met afmetingen 10 bij 11 cm en een rechthoek met afmetingen 10 bij 2 cm zijn niet gelijkvormig.
- c** Twee cirkels zijn altijd gelijkvormig want de vorm van de cirkel verandert niet als je de straal k keer zo groot maakt.
- 6 a** $3 \cdot 5 = 15$ cm en $3 \cdot 4 = 12$ cm. Dus de afmetingen zijn 15×12 cm.
- b** oppervlakte rechthoek C = $5 \cdot 4 = 20$ cm²
oppervlakte rechthoek D = $15 \cdot 12 = 180$ cm²
De oppervlakte van rechthoek D is dus 9 keer zo groot .
- 7 a** De vergrotingsfactor is $\frac{21}{14} = 1,5$.
- b** De oppervlakte van beeldscherm B is gelijk aan $1,5^2 \cdot 160 = 360$ vierkante inch.
- c** De vergrotingsfactor is $\sqrt{\frac{90}{160}} = 0,75$.
De diagonaal van beeldscherm C is gelijk aan $0,75 \cdot 14 = 10,5$ inch
- 8 a** De oppervlakte van een A4 formaat moet je met 2 vermenigvuldigen om de oppervlakte van een A3 formaat te krijgen.
- b** De vergrotingsfactor is $\sqrt{2} \approx 1,41$.
- c** De breedte is 297 mm en de lengte $\sqrt{2} \cdot 297 \approx 420$ mm.
- d** De lengte is 210 mm en de breedte $\frac{210}{\sqrt{2}} \approx 148$ mm.
- 9 a** $3,2 \cdot 50\,000 = 160\,000$ cm = 1600 m.
Dus de werkelijke afstand is 1600 meter.
- b** 8,7 ha is gelijk aan $8,7 \times 10\,000 = 87\,000$ m² = 870 000 000 cm².
De oppervlakte van dit bos op de kaart is dus gelijk aan $\frac{870\,000\,000}{50\,000^2} = 0,348$ cm².

10 a De diameter van de cd is 16 mm en die van de lp 38 mm.
De vergrotingsfactor is dus gelijk aan $\frac{38}{16} = 2,375$.

b De straal van de lp is $\frac{2,375 \cdot 12}{2} = 14,25$ cm.

De oppervlakte van de lp is dan $\pi \cdot 14,25^2 \approx 638$ cm².

02 a

zijde	kwadraat
15	225
20	<u>400</u> +
diagonaal	625

De lengte van de diagonaal is $\sqrt{625} = 25$ cm.

b De vergrotingsfactor is $\frac{45}{25} = 1,8$.

c $1,8 \cdot 15 = 27$ cm en $1,8 \cdot 20 = 36$ cm.

Dus de afmetingen zijn 27×36 cm.

08 a De oppervlakte van een A4 formaat moet je met 2 vermenigvuldigen om de oppervlakte van een A3 formaat te krijgen.

b Zowel de lengte als de breedte worden k keer zo groot.

De oppervlakte wordt dan $k \cdot k = k^2$ keer zo groot.

c $k = \sqrt{2} \approx 1,41$

d De breedte is 297 mm en de lengte $\sqrt{2} \cdot 297 \approx 420$ mm.

U1 a

zijde	kwadraat
16	256
9	<u>81</u> +
diagonaal	337

De lengte van de diagonaal is $\sqrt{337}$.

De breedte is dus $\frac{37 \cdot 2,54}{\sqrt{337}} \cdot 16 \approx 82$ cm en de lengte $\frac{37 \cdot 2,54}{\sqrt{337}} \cdot 9 \approx 46$ cm.

b De breedte van de foto op het scherm is $\frac{46}{2} \cdot 3 = 69$ cm.

De grijze randen links en rechts zijn dus $\frac{82 - 69}{2} = 6,5$ cm breed.

Samen zijn de randen 13 cm breed.

c Het scherm moet dan ook verhouding 3: 2 hebben. De hoogte moet dus

gelijk zijn aan $\frac{82}{3} \cdot 2 \approx 55$ cm.

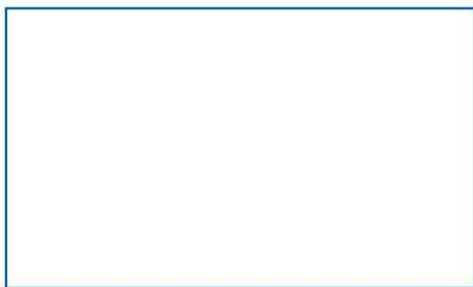
Het scherm moet dan dus $55 - 46 = 9$ cm hoger zijn.

8C.2 De gulden snede

intro Bij benadering is de grootste rechthoek 77×50 mm, de tweede 50×29 mm, de derde 29×18 mm en de kleinste 18×10 mm. De rechthoeken zijn nagenoeg gelijkvormig. Als voorbeeld vergelijken we de grootste met de kleinste rechthoek: $\frac{18}{77} \approx 0,23$ en $\frac{10}{50} = 0,2$.

8C Vorm en ruimte

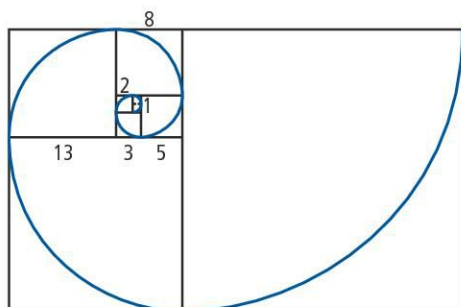
- 11 a Ieder heeft een eigen antwoord bij deze vraag. Hieronder een voorbeeld.



- b De lange zijde is 62 mm en de korte zijde 37 mm
 c *lengte langste zijde : lengte kortste zijde* = 1 : 1,68
 d -
- 12 a *lengte langste zijde : lengte kortste zijde* = 8 : 5
 b $g = \frac{8}{5} = 1,6$
- 13 a $AC = 50$ mm, $BC = 30$ mm en $AB = 80$ mm
 b $\frac{AC}{BC} = \frac{50}{30} \approx 1,67$ en $\frac{AB}{AC} = \frac{80}{50} = 1,6$, dus de verhouding klopt ongeveer.
- 14 a c is gelijk aan $a + b = 1,618 + 1 = 2,618$
 b $\frac{2,618}{1,618} \approx 1,618$ en $\frac{1,618}{1} = 1,618$, deze verhoudingen zijn dus gelijk.
- 15 De kortste zijde van de grote rechthoek is $\varphi \cdot 35 \approx 57$ cm en de lange zijde is $\varphi \cdot 57 \approx 92$ cm

- 16 -

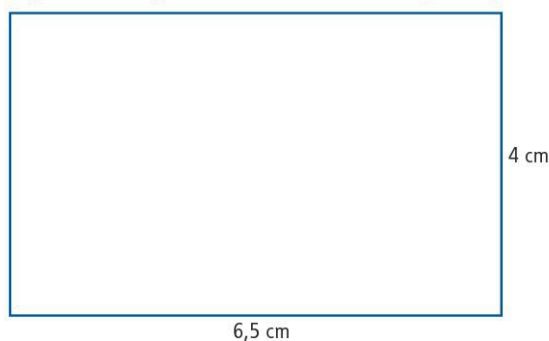
- 17 a b



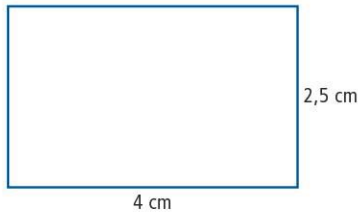
c

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$
1,000	2,000	1,500	1,667	1,600	1,625	1,615	1,619	1,618

- d De uitkomst komt steeds dichterbij de waarde van de gulden snede.
- 18 a Bij kortste zijde 4 cm hoort een langste zijde met lengte $\varphi \cdot 4 \approx 6,5$ cm.



- b Bij langste zijde 4 cm hoort een kortste zijde met lengte $4 : \varphi \approx 2,5$ cm



- c $\frac{\text{lengte grote rechthoek}}{\text{breedte kleine rechthoek}} = \frac{6,5}{2,5} = 2,6$ en $\varphi^2 \approx 2,62$, dus deze verhoudingen zijn ongeveer gelijk.

013 a $\frac{AC}{BC} = \frac{89}{55} \approx 1,618$

b $AB = 89 + 55 = 144$ mm

$\frac{AB}{AC} = \frac{144}{89} \approx 1,618$, dus deze verhouding is $1,618 : 1$.

- c Beide verhoudingen zijn $1,618 : 1$, dus deze zijn gelijk.

- 015 a In een gulden rechthoek geldt de verhouding *korste zijde* : *langste zijde* = $1 : \varphi$, dus de lengte van de langste zijde is $42 \times \varphi \approx 67,956$ cm.

- b De kortste zijde van rechthoek A is $67,956$ cm.

- c De langste zijde van rechthoek A is $67,956 \times \varphi \approx 109,957$ cm.

- U2 a Een verhouding wijzigt niet wanneer je beide getallen met hetzelfde getal vermenigvuldigt. Wanneer je in de verhouding $\varphi : 1$ beide getallen met φ vermenigvuldigt, krijg je $\varphi^2 : \varphi$.

- b Uit $\varphi : 1 = (\varphi + 1) : \varphi$ volgt $\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$. Dit geeft $\varphi^2 = \varphi + 1$.

c $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

$\varphi = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2 \cdot 1}$ of $\varphi = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2 \cdot 1}$

$\varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ of $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- d $\varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ is negatief en dat is niet mogelijk. $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$

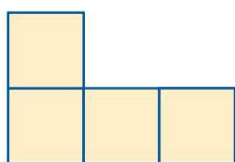
8C.3 Aanzichten

intro Nee, dat weet je nog niet. Je weet bijvoorbeeld niet hoe de onderste buis precies loopt.

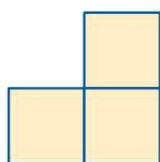
- 19 Bij het nemen van foto A bevindt de fotograaf zich links ten opzichte van de top van de piramide terwijl de fotograaf zich in foto B rechts ten opzichte van de top van de piramide.

8C Vorm en ruimte

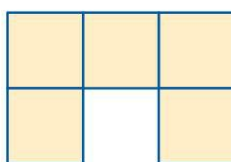
20



vooraanzicht

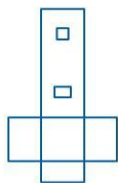


rechter zijaanzicht

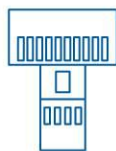


bovenaanzicht

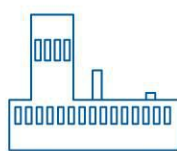
21



bovenaanzicht

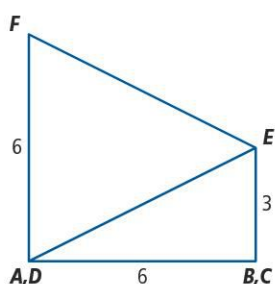


vooraanzicht

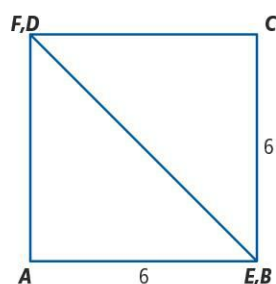


rechter zijaanzicht

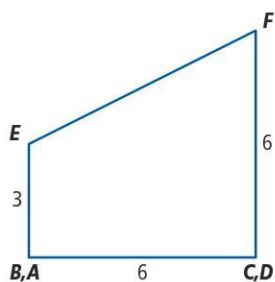
22



vooraanzicht

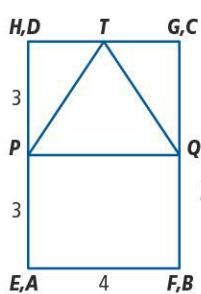


bovenaanzicht

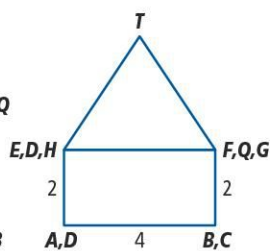


rechter zijaanzicht

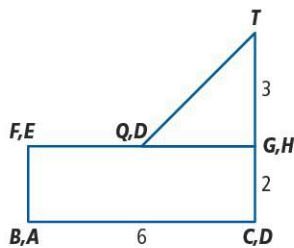
23



bovenaanzicht



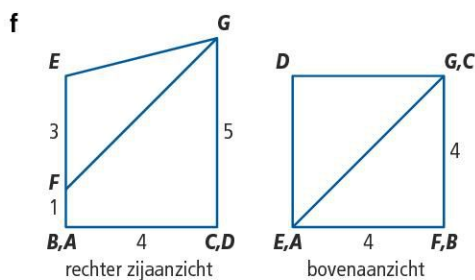
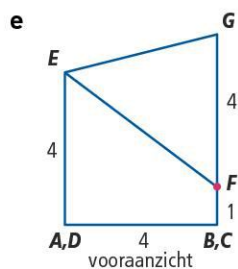
vooraanzicht



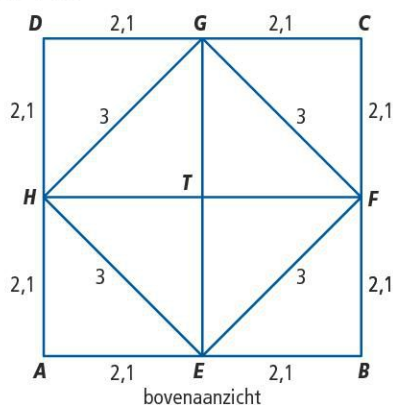
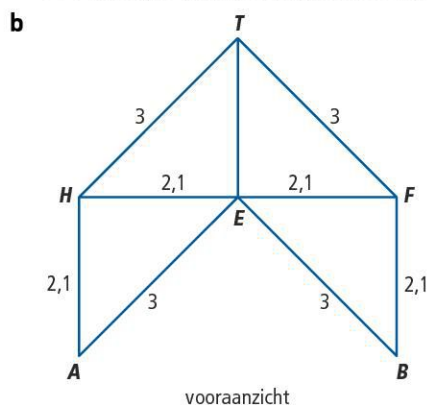
rechter zijaanzicht

- 24**
- | | |
|---------------|---------------|
| 1 hoort bij F | 5 hoort bij E |
| 2 hoort bij G | 6 hoort bij B |
| 3 hoort bij A | 7 hoort bij D |
| 4 hoort bij C | 8 hoort bij H |

- 022**
- a** De ribben AB , CG en CD zie je op ware grootte.
b De hoekpunten B en C vallen ook samen.
c Vanuit de richting van de pijl gekeken, ligt ribbe CG recht achter ribben BF .
 Om die reden vallen die twee ribben samen in het vooraanzicht.
d De ribben AB en CD , AE en DE en FG en CG vallen ook met elkaar samen in het vooraanzicht.



- U3**
- a** De hoogte van punt E berekend worden met de stelling van Pythagoras.
 Noem de hoogte h , dan geldt:
 $h^2 + h^2 = 3^2$
 $h^2 = 4,5$
 $h = \sqrt{4,5} \approx 2,12 \text{ m}$
 De hoogte van het klimtoestel is dus $2 \cdot 2,1 = 4,24 \text{ m}$.

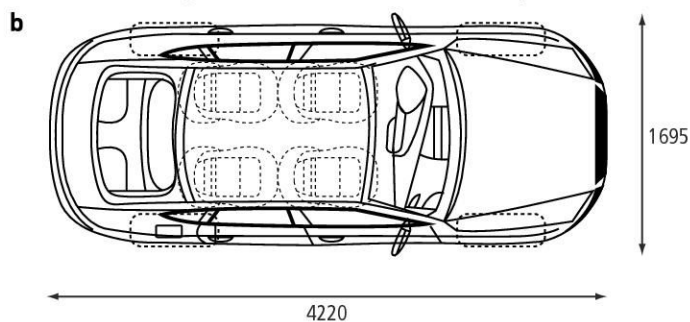


8C Vorm en ruimte

8C.4 Werken met aanzichten

intro Drie mogelijke ruimtefiguren zijn een balk, een cilinder en een kubus.

25 a De afmetingen van het bovenaanzicht zijn 1695×4220 mm.



26 a

1	1	1	1
2	1	2	1
3	1	2	1

bovenaanzicht

b In totaal heb je 17 kubusjes nodig.

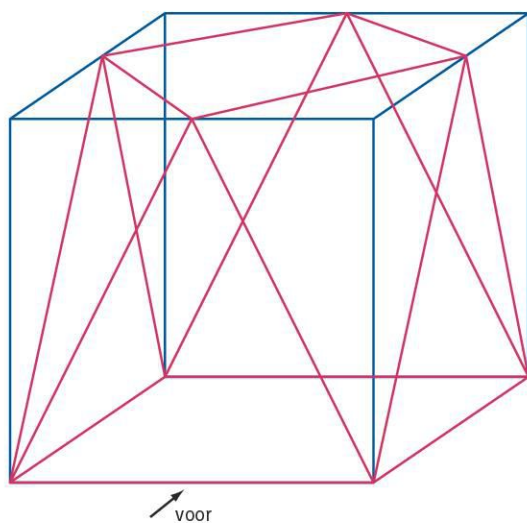
c

1	1	1	1
1	1	2	1
3	1	1	1

bovenaanzicht

In totaal heb je nu 15 kubusjes nodig.

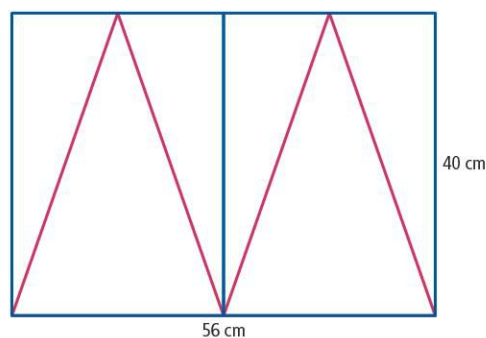
27 a



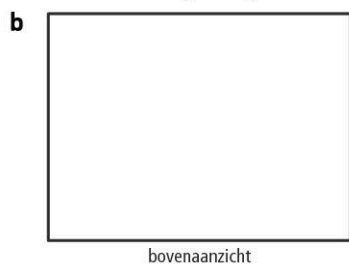
b

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
40	1600
40	<u>1600</u> +
<i>diagonaal</i>	3200

$$\text{diagonaal} = \sqrt{3200} \approx 56 \text{ cm}$$



28 a Dit ruimtelijk object is een stoel of een bank.



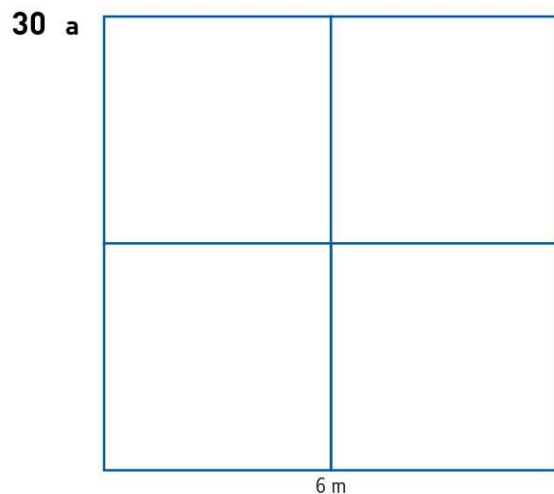
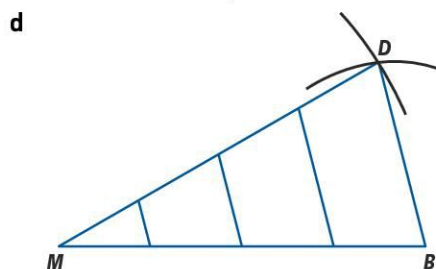
29 a

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
$AM = 0,5$	0,25
BM	<u>3,75</u> +
$AB = 2$	4

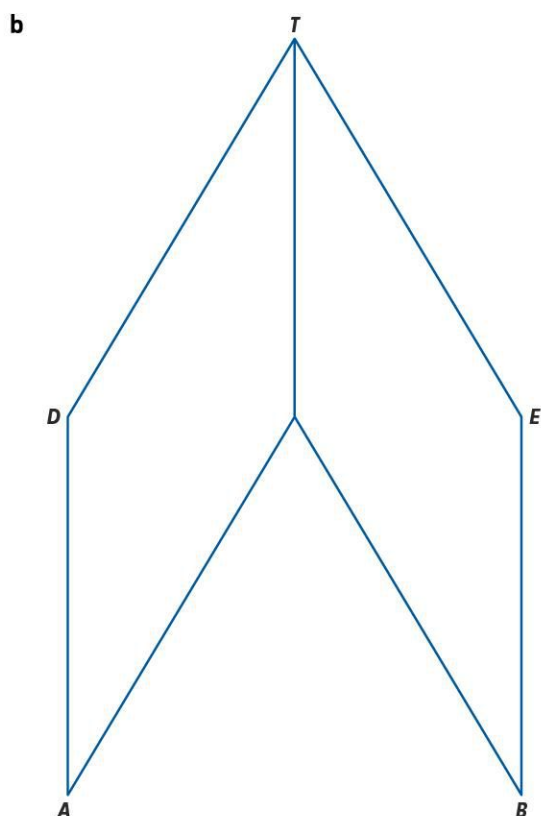
$$BM = \sqrt{3,75} \approx 1,94 \text{ m} = 194 \text{ cm}$$

b De oppervlakte van grensvlak ABC is $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,94 = 0,97 \text{ m}^2$.

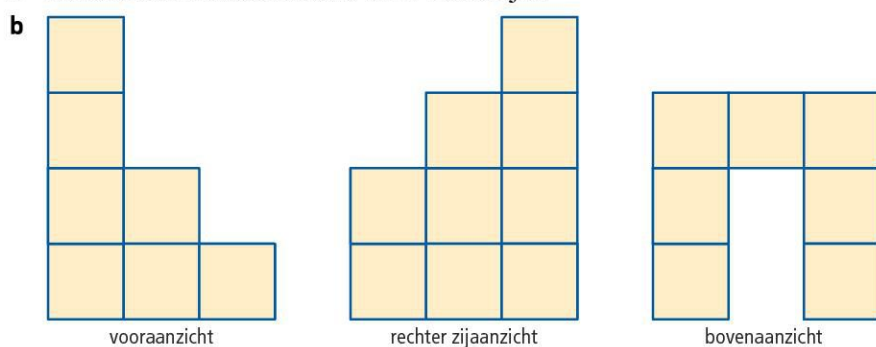
c BM als DM zijn beide hoogtelijnen in even grote gelijkbenige driehoeken, Dus $BM = DM$, de afstand van B tot M is gelijk aan de afstand van D tot M .



8C Vorm en ruimte



026 a Het kubusbouwsel bestaat uit 14 kubusjes.



c Dan verandert alleen het bovenaanzicht.

d Je kunt zeven kubusjes weghalen zonder dat het bovenaanzicht verandert.

e

3	2	1
2	2	1
3	2	1

bovenaanzicht

g

3	1	1
1	2	1
3	1	1

bovenaanzicht

f In totaal heb je 17 kubusjes nodig.

Voor dit bouwsel heb je 14 kubusjes nodig.

U4 A: Het ruimtelijk object kan een cilinder zijn.

B: Het ruimtelijk object ziet er ongeveer uit als een koffiefilter.

8C.5 Symmetrie

intro Linker figuur: hier is sprake van symmetrie, want als je de figuur 180° draait, zie je exact dezelfde figuur.

Rechter figuur: hier is sprake van symmetrie, want als je deze spiegelt over een horizontale lijn door het midden van de figuur, zie je exact dezelfde figuur.

31 Als je een verticale lijn halverwege het gebouw tekent, zie je dat het deel links en het deel rechts van de lijn van het gebouw elkaars spiegelbeeld zijn.

32 a Als je de figuur over 60° draait, zie je weer exact dezelfde figuur.
De figuur is daarom draaisymmetrisch met een draaihoek van 60° .

b De zeshoek is in zes lijnen lijnsymmetrisch.

33 a Een gulden rechthoek, is lijnsymmetrisch, puntsymmetrisch en draaisymmetrisch.

b Een cirkel is lijnsymmetrisch, puntsymmetrisch en draaisymmetrisch.

c Een parallellogram is puntsymmetrisch en draaisymmetrisch.

d Een ruit is lijnsymmetrisch, puntsymmetrisch en draaisymmetrisch.

34 Een regelmatige zeshoek is te verdelen in zes dezelfde driehoeken, zie de figuur. De figuur is draaisymmetrisch in punt P .

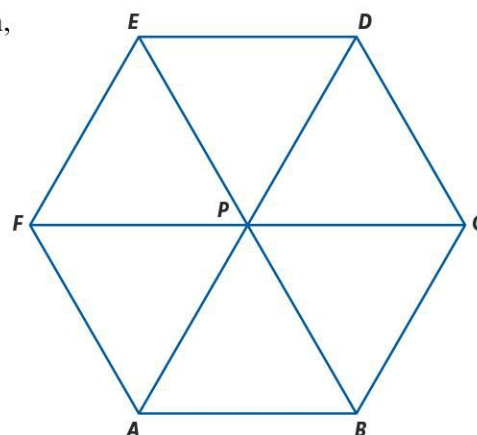
Elke hoek bij P is gelijk aan $360^\circ : 6 = 60^\circ$.

De basishoek van driehoek ABP is dan gelijk aan

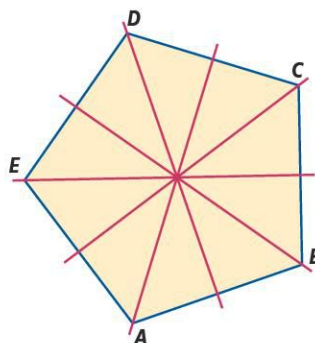
$(180 - 60) : 2 = 60^\circ$.

De hoeken van de regelmatige zeshoek zijn dus allemaal

$2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.



35 a Lijnsymmetrisch en draaisymmetrisch met kleinste draaihoek $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.



b $AD = 4,7$ cm en $AB = 2,9$ cm

c $\frac{AD}{AB} = \frac{4,7}{2,9} \approx 1,621$, de uitkomst ligt in de buurt van de gulden snede.

36 a De achthoek is draaisymmetrisch in punt P . Elke hoek bij P is gelijk aan $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. De achthoek is opgedeeld in acht gelijkbenige driehoeken. De basishoek van één zo'n gelijkbenige driehoek is $(180^\circ - 45^\circ) : 2 = 67,5^\circ$. Een hoek van de achthoek is dus gelijk aan $2 \cdot 67,5^\circ = 135^\circ$.

8C Vorm en ruimte

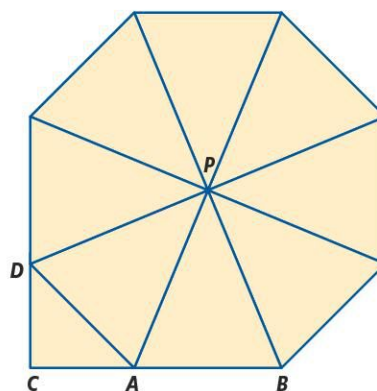
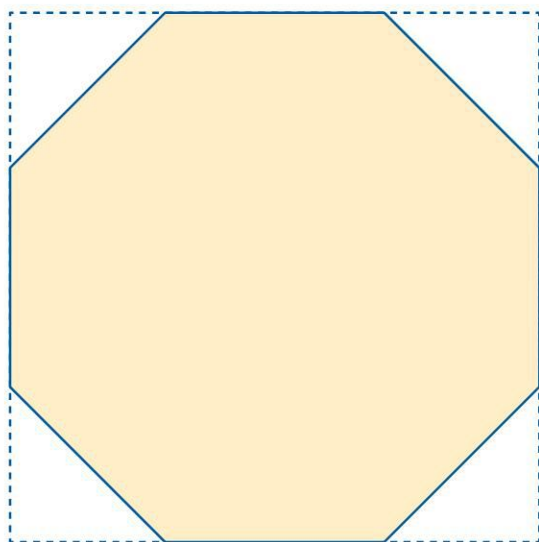
- b** Driehoek ACD is rechthoekig. Stel $AC = CD = x$.

$AC = x$ dan geldt:

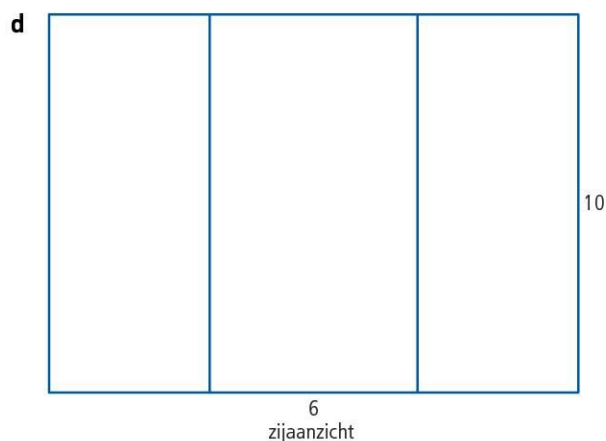
zijde	kwadraat
$AC = x$	x^2
$CD = x$	$x^2 +$
$AD = 6$	36

$$x^2 = 18$$

$$x = \sqrt{18} \approx 4,24 \text{ m}$$



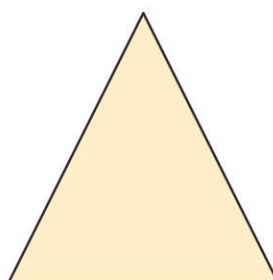
- c** Puntsymmetrie, lijnsymmetrie met acht symmetrieassen en draaisymmetrie met kleinste draaihoek 45° .



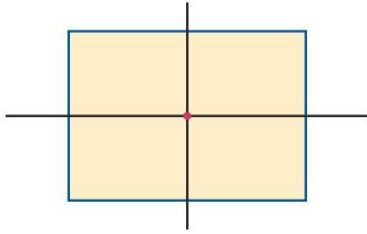
- e** De achthoek past in een vierkant met lengte $4,24 + 6 + 4,24 = 14,48 \text{ m}$.
De oppervlakte is dus gelijk aan $14,48^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,24 \cdot 4,24 \approx 174 \text{ m}^2$.

- 37** Het doosje is puntsymmetrisch, lijnsymmetrisch met vier symmetrieassen en draaisymmetrisch met kleinste draaihoek $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

- 38** Bijvoorbeeld een gelijkzijdige driehoek.



033 a b



Kleinste draaihoek = $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

- c De rechthoek is ook puntsymmetrisch want hij is draaisymmetrisch over 180° .
- d Puntsymmetrisch en draaisymmetrisch met kleinste draaihoek 180° .
- e De vlieger is lijnsymmetrisch in één horizontale lijn.
De ellips is draaisymmetrisch over 180° , dus ook puntsymmetrisch en lijnsymmetrisch in een horizontale en in een verticale lijn door het midden.
- f De ellips is draaisymmetrisch met als kleinste draaihoek 180° , de cirkel daarentegen is draaisymmetrisch over elke mogelijke draaihoek.
Verder heeft de ellips twee symmetrieassen en de cirkel ontelbaar veel.

- U5 a Als je rekening houdt met de kleuren is er sprake van puntsymmetrie en draaisymmetrie. Als je geen rekening houdt met de kleuren is er ook sprake van lijnsymmetrie.
- b De hoeken zijn daar $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

- U6 a Driehoek: $hoek = 180 - \frac{360}{3} = 60^\circ$
Vierhoek: $hoek = 180 - \frac{360}{4} = 90^\circ$
Vijfhoek: $hoek = 180 - \frac{360}{5} = 108^\circ$
De formule klopt voor deze veelhoeken.
- b Een regelmatige n -hoek is te verdelen in n gelijkbenige driehoeken.
De tophoek is gelijk aan $\frac{360}{n}$. Eén basishoek is dan gelijk aan $\left(180 - \frac{360}{n}\right) : 2$.
De hoeken van de n -hoek zijn gelijk aan twee basishoeken, dus $180 - \frac{360}{n}$.

8C.6 Inhoud en schaalvergroting

intro De inhoud moet $\frac{1}{2}$ keer zo groot worden, de afmetingen moeten dan $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,79$ keer zo groot worden.
De straal wordt dus $0,79 \cdot 5 = 4$ cm en de hoogte $0,79 \cdot 15 \approx 12$ cm.

- 39 a $inhoud = 20 \cdot 30 \cdot 40 = 24\,000 \text{ cm}^3$
- b De inhoud van de balk kan je berekenen met oppervlakte $ABFE \times FG$.
De inhoud van het prisma kan je berekenen met oppervlakte $ABP \times PQ$.
De oppervlakte van ABP is de helft van de oppervlakte van $ABFE$ en $FG = PQ$, dus de oppervlakte van het prisma is de helft van de oppervlakte van de balk.
- c $oppervlakte ABP = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 40 = 400 \text{ cm}^2$
- d $400 \cdot 30 = 12\,000$ en dit inderdaad gelijk aan de helft van $24\,000 \text{ cm}^3$.

8C Vorm en ruimte

- 40 a** $inhoud = \pi \cdot 7,5^2 \cdot 30 \approx 5301 \text{ cm}^3$
b $inhoud\ balk = 15 \cdot 15 \cdot 30 = 6750 \text{ cm}^3$
 De inhoud van de balk wordt voor $\frac{5301}{6750} \cdot 100\% \approx 78,5\%$ door de cilinder ingenomen.
c $inhoud\ S.DCGH = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 15 \cdot 30 = 2250 \text{ cm}^3$
d De diameter van het grondvlak is gelijk aan GD .

zijde	kwadraat
$CD = 15$	225
$CG = 15$	<u>225</u> +
DG	450

$$DG = \sqrt{450} \text{ cm}$$

Dus de straal van de cirkel is $\frac{1}{2} \sqrt{450} \text{ cm}$.

$$inhoud\ kegel = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{450}\right)^2 \cdot 30 \approx 3534 \text{ cm}^3$$

- 41 a** $inhoud = 8 \cdot 8 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 \approx 299 \text{ cm}^3$
b $inhoud = 8 \cdot 8 \cdot 8 - \pi \cdot 2^2 \cdot 8 \approx 411 \text{ cm}^3$
c $inhoud = 8 \cdot 8 \cdot 8 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot 2 \approx 501 \text{ cm}^3$
- 42 a** De vergrotingsfactor is 3.
b $inhoud\ klein\ kubusje = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^3$
 $inhoud\ Rubikkubus = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \text{ cm}^3$
c De inhoud van de Rubikkubus is 27 keer zo groot als de inhoud van een klein kubusje.
d De inhoud wordt $3^3 = 27$ keer zo groot.
- 43 a** $inhoud\ vierde\ laag = 4^3 \cdot 3 = 192 \text{ cm}^3$
b $inhoud\ onderste\ laag = 9^3 \cdot 3 - 8^3 \cdot 3 = 651 \text{ cm}^3$

- 44 a** $550 \text{ m}^3 = 550\,000 \text{ dm}^3$
 $550\,000 : 3,52 = 156\,250$
 De inhoud van het huis is 156 250 keer zo groot als de inhoud van de maquette.
b $vergrotingsfactor = \sqrt[3]{156\,250} \approx 54$, dus de schaal is 1 : 54.

- 040 a** $inhoud\ balk = 20 \cdot 20 \cdot 40 = 16\,000 \text{ cm}^3$
 $inhoud\ cilinder = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 \approx 12\,566 \text{ cm}^3$
b De balk wordt voor $\frac{12\,566}{16\,000} \cdot 100\% \approx 78,5\%$ door de cilinder ingenomen.
c $inhoud\ S.ABCD = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 20 \cdot 40 \approx 5\,333 \text{ cm}^3$
d De diameter van het grondvlak is gelijk aan AC .

zijde	kwadraat
$AB = 20$	400
$BC = 20$	<u>400</u> +
AC	800

$$AC = \sqrt{800} \approx 28,3 \text{ cm}$$

Dus de diameter is gelijk aan 28,3 cm.

$$\text{e } inhoud\ kegel = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{800}\right)^2 \cdot 40 \approx 8378 \text{ cm}^3$$

- 043 a** De afmetingen van tweede kegel zijn twee keer zo groot als de afmetingen van de eerste kegel. De vergrotingsfactor is dus gelijk aan 2.
- b** Deze inhoud moet je vermenigvuldigen met $2^3 = 8$.
- c** $\text{inhoud tweede kegel} = 8 \cdot 16 = 128 \text{ cm}^3$
- d** De lagen zijn even hoog, dus de afmetingen van de derde kegel zijn drie keer zo groot als de afmetingen van de eerste kegel.
De vergrotingsfactor is dus gelijk aan 3.
- e** $\text{inhoud derde kegel} = 3^3 \cdot 16 = 432 \text{ cm}^3$
- f** $\text{inhoud vierde kegel} = 4^3 \cdot 16 = 1024 \text{ cm}^3$
- g** $\text{inhoud derde laag} = 432 - 128 = 304 \text{ cm}^3$

- U7 a** $\text{hoogte grootste poppetje} = \sqrt[3]{\frac{117}{55}} \cdot 7 \approx 9 \text{ cm}$
 $\text{hoogte kleinste poppetje} = \sqrt[3]{\frac{20}{55}} \cdot 7 \approx 5 \text{ cm}$
- b** $\text{oppervlakte middelste poppetje} = \left(\sqrt[3]{\frac{55}{20}}\right)^2 \cdot 44 \approx 86 \text{ cm}^2$
 $\text{oppervlakte grootste poppetje} = \left(\sqrt[3]{\frac{117}{20}}\right)^2 \cdot 44 \approx 143 \text{ cm}^2$

8C.7 Gemengde opdrachten

- 45 a** De twaalfhoek is draaisymmetrisch in punt P .
 Hoek P is gelijk aan $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.
 De twaalfhoek is opgedeeld in twaalf gelijkbenige driehoeken.
 De basishoek van één zo'n gelijkbenige driehoek is $(180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$.
 De hoeken van de achthoek zijn gelijk aan $2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$.

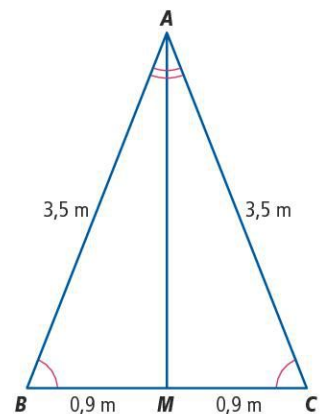
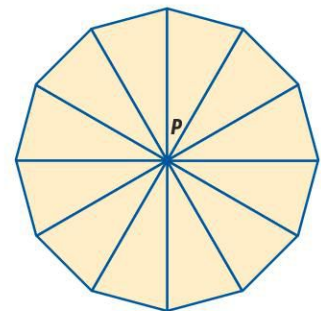
zijde	kwadraat
$BM = 0,9$	0,81
AM	<u>11,44</u> +
$AB = 3,5$	12,25

$$AM = \sqrt{11,44} \approx 3,4 \text{ m}$$

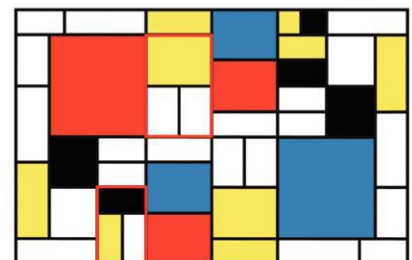
$$\text{oppervlakte 1 driehoek} = \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 3,4 \approx 3,0 \dots \text{ m}^2$$

$$\text{oppervlakte twaalfhoek} = 12 \cdot 3,0 \dots \approx 36,5 \text{ m}^2$$

- c** $\text{inhoud} = 12 \cdot 3,0 \cdot 2,3 \approx 84 \text{ m}^3$

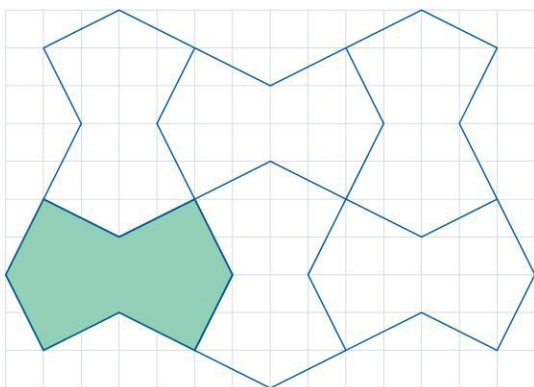


- 46 a** In de figuur zijn twee gulden rechthoeken aangegeven. De bovenste rechthoek heeft een lengte van 135 mm en een breedte van 85 mm.
 De verhouding is gelijk aan $\frac{135}{85} \approx 1,59$, ongeveer de gulden snede.
- b** De lengte is 5,3 cm. $\frac{180}{5,3} \approx 34$, dus de schaal is gelijk aan 1 : 34.



8C Vorm en ruimte

47 a



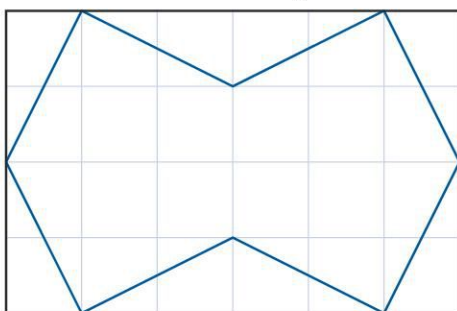
b Puntsymmetrie, lijnsymmetrie met twee symmetrieassen en draaisymmetrie met kleinste draaihoek 180° .

<i>zijde</i>	<i>kwadraat</i>
<i>korte zijde</i> = 1	1
<i>lange zijde</i> = 2	$\frac{4}{+}$
<i>schuine zijde</i>	5

$$\text{schuine zijde} = \sqrt{5} \approx 2,2 \text{ cm} = 22 \text{ mm}$$

Dus de achthoek heeft zijden van 22 mm.

d



$$\text{oppervlakte achthoek} = 4 \cdot 6 - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 16 \text{ cm}^2$$

$$\text{oppervlakte rechthoek} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$$

$$\text{oppervlakte achthoek} : \text{oppervlakte rechthoek} = 16 : 24 = 2 : 3$$

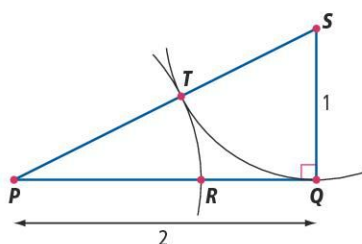
Onderzoekopdrachten

- 48 a Bij de rode rechthoek is de lengte ϕ keer zo groot als de breedte. Als de breedte ϕ keer zo groot wordt terwijl de lengte gelijk blijft, dan zijn de lengte en breedte even groot en dus is het een vierkant.
- b De rode rechthoek is een gulden rechthoek. Bij de rechthoek rechtsonder de rode rechthoek is zowel de lengte als de breedte ϕ keer zo groot geworden, de verhouding tussen de breedte en de lengte is dus nog steeds ϕ . Op die manier zijn alle rechthoeken op de 'diagonaal' gulden rechthoeken.

49 a $PQ = 4,4 \text{ cm}$, dus $PR = \frac{\varphi}{\varphi + 1} \cdot 4,4 \approx 2,7 \text{ cm}$



b c



zijde	kwadraat
$PQ = 2$	4
$QS = 1$	$\frac{1}{5} +$
PS	5

$$PS = \sqrt{5}$$

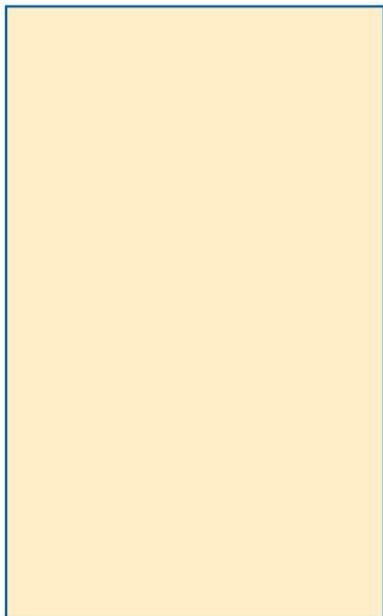
$$ST = 1, \text{ dus } PR = PT = \sqrt{5} - 1$$

e $QR = 2 - (\sqrt{5} - 1)$, dus $\frac{PR}{QR} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2 - (\sqrt{5} - 1)} \approx 1,618$.

Dus punt R verdeelt zijde PQ volgens de gulden snede.

Samenvatting

S1 a De langste zijde is dan gelijk aan $1,618 \cdot 5 \approx 8,1 \text{ cm}$.

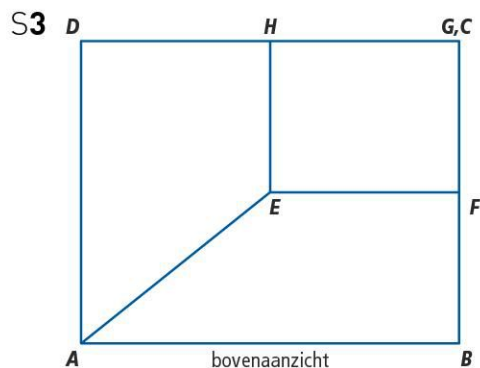


b De kortste zijde is dan gelijk aan $5 : 1,618 \approx 3,1 \text{ cm}$.

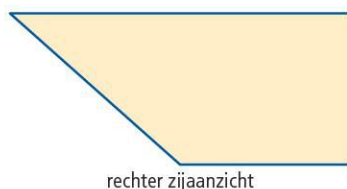


8C Vorm en ruimte

- S2 a De vergrotingsfactor is $\frac{750}{15} = 50$.
 b $oppervlakte = 50^2 \cdot 675 = 1\,687\,500 \text{ cm}^2 = 168,75 \text{ m}^2$
 c $inhoud = 50^3 \cdot 3200 = 400\,000\,000 \text{ cm}^3 = 400 \text{ m}^3$

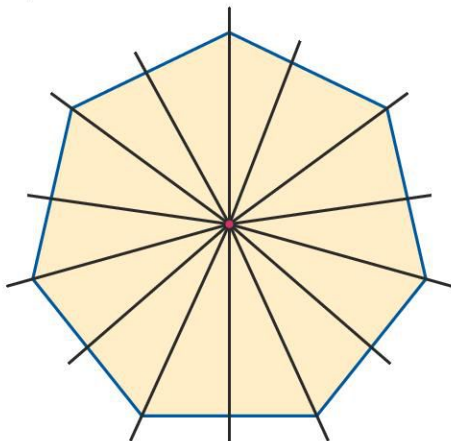


- S4 a Een voorbeeld van een rechter zijaanzicht:



- b Het ruimtelijk object is een piramide met een rechthoekig grondvlak waarbij de top niet midden boven het grondvlak ligt.

- S5 Er is sprake van lijnsymmetrie en draaisymmetrie met kleinste draaihoek $\frac{360^\circ}{7} \approx 51,4^\circ$.

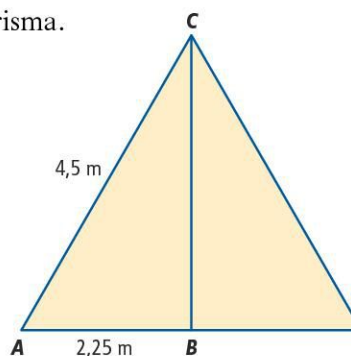


- S6 Eerst bereken je de hoogte van het grondvlak van het prisma.

zijde	kwadraat
$AB = 2,25$	5,0625
BC	$\frac{15,1875}{2} +$
$AC = 4,5$	20,25

$$BC = \sqrt{15,1875} \approx 3,9 \text{ m}$$

$$inhoud = 11 \cdot 4,5 \cdot 2,4 + \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 3,9 \cdot 11 \approx 215 \text{ m}^3$$



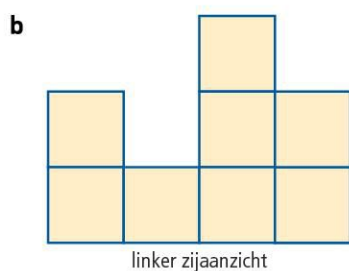
Test jezelf

- T1 a** De vergrotingsfactor is $56 : 70 = 0,8$.
b oppervlakte tegel $B = 0,8^2 \cdot 3150 = 2016 \text{ cm}^2$
c lengte tegel $C = \sqrt{\frac{6174}{3150}} \cdot 70 = 98 \text{ cm}$
d breedte tegel $A = 3150 : 70 = 45 \text{ cm}$
 $70 : 45 \approx 1,556$, dit ligt in de buurt van de gulden snede, dus de tegel heeft ongeveer de vorm van een gulden rechthoek.

T2 a

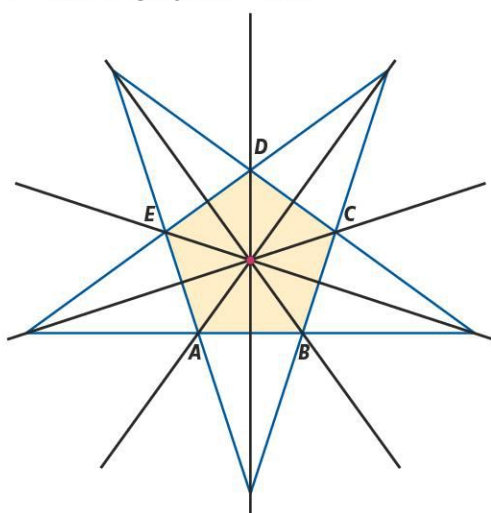
2	1	2
1	1	1
2	1	3
2	1	2

bovenaanzicht



- T3** De vergrotingsfactor is gelijk aan $\frac{12,2}{10} = 1,22$.
 De oppervlakte is dus $1,22^2 = 1,4884$ keer zo groot.
 De oppervlakte is dus 48,84% groter, de bewering klopt dus ongeveer.

- T4 a** De ster is lijnsymmetrisch.



- b** De ster is niet puntsymmetrisch.
c De ster is draaisymmetrisch. De kleine draaihoek is $360 : 5 = 72^\circ$.
d De vijfhoek heeft hoeken van $180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$.
 De basishoeken van de vijf driehoeken zijn dus gelijk aan $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.
 De scherpe hoek is dan gelijk aan $180 - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$.

8C Vorm en ruimte

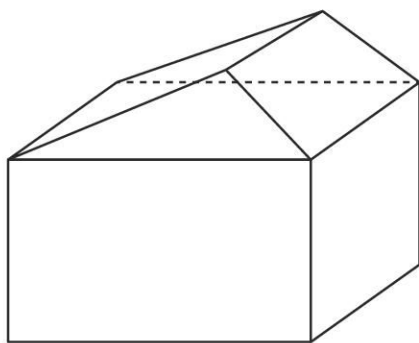
T5 a $AD = \frac{10}{1,618} \approx 6,18 \text{ cm}$

b $AE = 10 - 6,18 = 3,82 \text{ cm}$

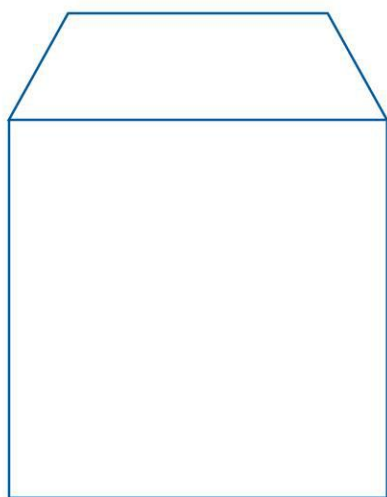
$\frac{AD}{AE} = \frac{6,18}{3,82} \approx 1,618$, dus rechthoek $AEFD$ is ook een gulden rechthoek.

T6 $\text{vergrotingsfactor} = \sqrt[3]{\frac{8000}{32}} \approx 6,3$, dus de schaal is 1 : 6,3

T7 a

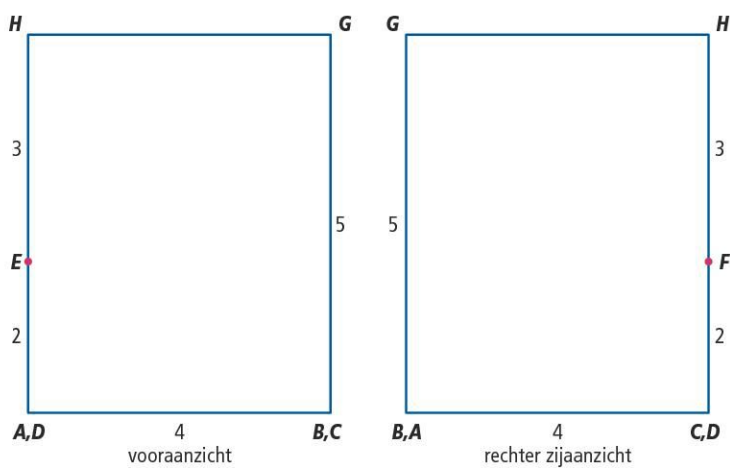


b



rechterzijaanzicht

T8 a



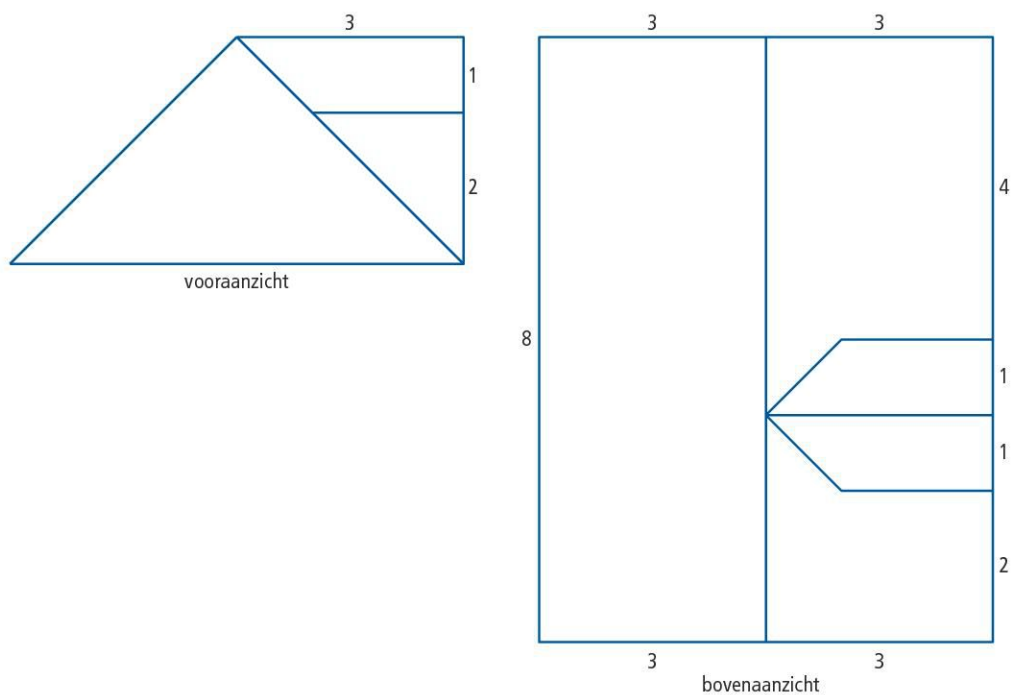
b $\text{inhoud piramide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 8 \text{ cm}^3$

c $\text{inhoud} = 4 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^3$

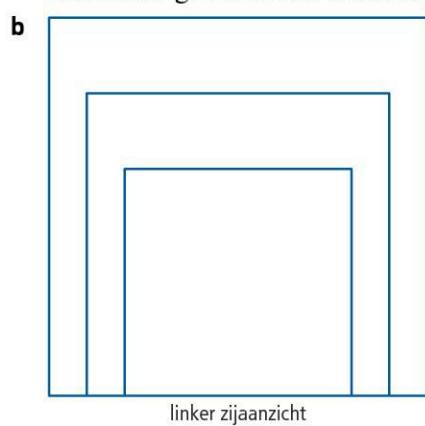
Extra oefening

- E1 **a** $inhoud = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12,4 = 595,2 \text{ cm}^3$
b $hoogte = \frac{2,5}{15} \cdot 12,4 \approx 2,1 \text{ cm}$
c $inhoud = \left(\frac{2,5}{15}\right)^3 \cdot 595,2 \approx 2,8 \text{ cm}^3$
d $oppervlakte = \left(\frac{11,5}{15}\right)^2 \cdot (12 \cdot 12) \approx 84,6 \text{ cm}^2$

E2

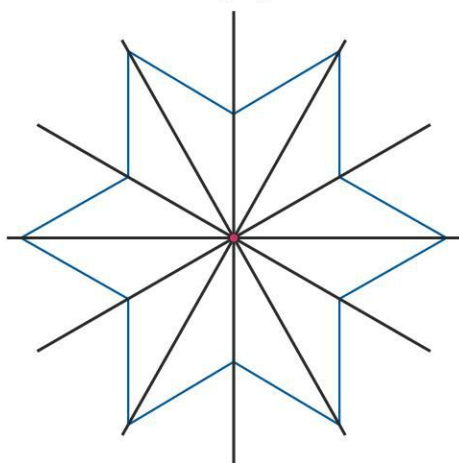


- E3 **a** Het kunstwerk bestaat uit drie kubussen van verschillende groottes die van klein naar groot achter elkaar zijn geplaatst.



8C Vorm en ruimte

- E4** Er is sprake van puntsymmetrie, draaisymmetrie met kleinste draaihoek $360^\circ : 6 = 60^\circ$ en lijnsymmetrie.



- E5** $\text{inhoud } ABG.DCH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \text{ m}^3$
 $\text{inhoud } ADE.BCF = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \text{ m}^3$
 $\text{inhoud } T.ADE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \approx 0,33 \text{ m}^3$
 $\text{inhoud dakkapel} \approx 4 + 2 + 0,33 = 6,33 \text{ m}^3$

- E6 a** $\frac{6,55}{6,55 - 2,5} \approx 1,617$, dus punt P verdeelt de straal van de gulden snede bij benadering door de gulden snede.

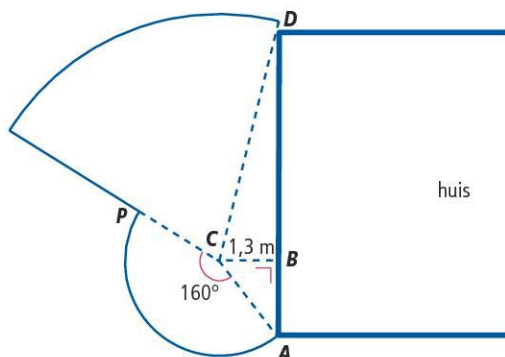
zijde	kwadraat
AB	4,56
$BC = 1,3$	$\frac{1,69}{+}$
$AC = 2,5$	6,25

$$AB = \sqrt{4,56} \approx 2,1 \text{ m}$$

zijde	kwadraat
BD	41,2125
$BC = 1,3$	$\frac{1,69}{+}$
$CD = 6,55$	42,9025

$$BD = \sqrt{41,2125} \approx 6,4 \text{ m}$$

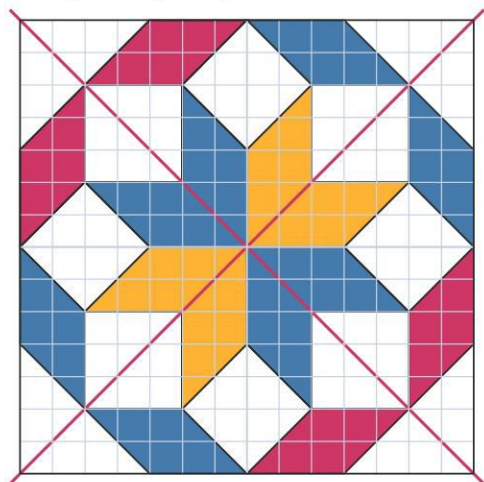
$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} \cdot (2,1 + 6,4) \cdot 1,3 + \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 6,55^2 + \frac{160}{360} \cdot \pi \cdot 2,5^2 \approx 41,2 \text{ m}^2$$



E7 a b

De figuur is lijnsymmetrisch in de diagonalen.

De figuur is puntsymmetrisch.



c De figuur is draaisymmetrisch met kleinste draaihoek 180° .

d $\text{oppervlakte blauw parallelogram} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 6$

$\text{oppervlakte blauw} = 8 \cdot 6 = 48$

$\text{oppervlakte hele figuur} = 14 \cdot 14 = 196$

$\text{percentage blauw} = \frac{48}{196} \cdot 100\% \approx 24,5\%$

9 Formules herleiden

Voorkennis

V1 a $y = 3(x + 2)$

$$y = 3x + 6$$

b $y = 3x(2x - 1)$

$$y = 6x^2 - 3x$$

c $y = -2(x^2 - 3x)$

$$y = -2x^2 + 6x$$

d $y = -2x(12 - 3x^2)$

$$y = -24x + 6x^3$$

V2 a stap 1: $(x + 4)^2$ schrijven als $(x + 4)(x + 4)$

stap 2: haakjes wegwerken

stap 3: herleiden

b A $K = 5n^2 + 2(n^2 - 3)$

$$K = 5n^2 + 2n^2 - 6$$

$$K = 7n^2 - 6$$

B $P = 3q - 2(q - 7)^2$

$$P = 3q - 2(q - 7)(q - 7)$$

$$P = 3q - 2(q^2 - 14q + 49)$$

$$P = 3q - 2q^2 + 28q - 98$$

$$P = -2q^2 + 31q - 98$$

C $a = (b + 3)(b + 7)$

$$a = b^2 + 7b + 3b + 21$$

$$a = b^2 + 10b + 21$$

D $g = h(h + 5) + 3(h^2 - 2)$

$$g = h^2 + 5h + 3h^2 - 6$$

$$g = 4h^2 + 5h - 6$$

V3 a $q = \frac{p}{3} + \frac{5p}{3}$

$$q = \frac{6p}{3}$$

$$q = 2p$$

e $t = \frac{3k}{k^2} \cdot \frac{k}{6k}$

$$t = \frac{3k \cdot k}{k^2 \cdot 6k}$$

$$t = \frac{3k^2}{6k^3}$$

$$t = \frac{1}{2k}$$

b $k = \frac{s}{4} + \frac{3s}{5}$

$$k = \frac{s \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{3s \cdot 4}{5 \cdot 4}$$

$$k = \frac{5s}{20} + \frac{12s}{20}$$

$$k = \frac{17s}{20}$$

c $k = \frac{2}{3} + \frac{5}{2m}$

$$k = \frac{2 \cdot 2m}{3 \cdot 2m} + \frac{5 \cdot 3}{2m \cdot 3}$$

$$k = \frac{4m}{6m} + \frac{15}{6m}$$

$$k = \frac{4m + 15}{6m}$$

d $a = \frac{3}{b} - \frac{5}{2b}$

$$a = \frac{3 \cdot 2}{b \cdot 2} - \frac{5}{2b}$$

$$a = \frac{6}{2b} - \frac{5}{2b}$$

$$a = \frac{1}{2b}$$

f $k = 3 \cdot \frac{2q}{q+1}$

$$k = \frac{3}{1} \cdot \frac{2q}{q+1}$$

$$k = \frac{3 \cdot 2q}{1(q+1)}$$

$$k = \frac{6q}{q+1}$$

g $p = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7g}$

$$p = \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 7g}$$

$$p = \frac{6}{21g}$$

$$p = \frac{2}{7g}$$

h $m = \frac{2}{p-4} \cdot \frac{p}{4}$

$$m = \frac{2 \cdot p}{(p-4) \cdot 4}$$

$$m = \frac{2p}{4p-16}$$

$$m = \frac{p}{2p-8}$$

9 Formules herleiden

V4 a $x^3 \cdot x^{-1} = x^2$

b $(x^5)^{12} = x^{60}$

c $\frac{x^7}{x^3 \cdot x^0} = \frac{x^7}{x^3} = x^4$

d $q^5 \cdot \sqrt{q} = q^5 \cdot q^{\frac{1}{2}} = q^{5\frac{1}{2}}$

e $p \cdot \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt{p} = p \cdot p^{\frac{1}{3}} \cdot p^{\frac{1}{2}} = p^{1\frac{5}{6}}$

f $\frac{s^2}{s\sqrt{s}} = \frac{s^2}{s \cdot s^{\frac{1}{2}}} = \frac{s^2}{s^{1\frac{1}{2}}} = s^{\frac{1}{2}}$

V5 a $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b} = \sqrt{2a \cdot 3b} = \sqrt{6ab}$

b $\frac{\sqrt{6pq}}{\sqrt{3p}} = \sqrt{\frac{6pq}{3p}} = \sqrt{2q}$

c $\sqrt{2g} \cdot \sqrt{3g} \cdot \sqrt{3h} = \sqrt{2g \cdot 3g \cdot 3h} = \sqrt{18g^2h}$

d $\frac{\sqrt{8k}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8k}{2}} = \sqrt{4k}$

V6 a $K = \sqrt{25p}$
 $K = \sqrt{25} \cdot \sqrt{p}$
 $K = 5\sqrt{p}$

b $K = \sqrt{\frac{p}{7}}$
 $K = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{7}}$
 $K = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{p}}{1}$
 $K \approx 0,38 \cdot \sqrt{p}$

c $K = 12,4 \cdot \sqrt{3p}$
 $K = 12,4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{p}$
 $K \approx 21,48 \cdot \sqrt{p}$

d $K = 25 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}p}$
 $K = 25 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{p}$
 $K = 12,5 \cdot \sqrt{p}$

V7 a $K = \frac{12p^3 - 6p^2}{3}$

$$K = \frac{12p^3}{3} - \frac{6p^2}{3}$$

$$K = 4p^3 - 2p^2$$

b $a = \frac{-4b^5 + 3b^2 + b}{b}$

$$a = \frac{-4b^5}{b} + \frac{3b^2}{b} + \frac{b}{b}$$

$$a = -4b^4 + 3b + 1$$

c $Q = \frac{k^3 - 4k + 3}{2k}$

$$Q = \frac{k^3}{2k} - \frac{4k}{2k} + \frac{3}{2k}$$

$$Q = \frac{1}{2}k^2 - 2 + 1\frac{1}{2}k^{-1}$$

d $t = \frac{5x^6 - 8x^3 + 2x^2}{x^2}$

$$t = \frac{5x^6}{x^2} - \frac{8x^3}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2}$$

$$t = 5x^4 - 8x + 2$$

9.1 Lineaire formules

intro Een wandeling van 4 km met een snelheid van a km per uur duurt $\frac{1}{5}a$ uren.

Bij deze tijd moet per 100 meter stijging 20 minuten opgeteld worden.

20 minuten is gelijk aan $\frac{1}{3}$ uur en h is in meters, dus moet h vermenigvuldigd worden met $\frac{1}{3} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$ om te berekenen hoeveel uren erbij opgeteld moeten worden. De wandeling duurt 4 uur, dus moet $\frac{1}{5}a + \frac{1}{300}h$ gelijk zijn aan 4.

- 1 a** stap 1: haakjes weggewerkt
b stap 2: gelijksoortige termen samengenomen
 stap 3: links en rechts $+ 2x$
c $-5x + 30 = 10$
 $-5x = -20$
 $x = 4$
d $2x + 3(4 - x) = 5 - 4\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$
 $2x + 12 - 3x = 5 - 2x + 4$
 $-x + 12 = 9 - 2x$
 $x + 12 = 9$
 $x = -3$
- 2 a** $8x - 4 = 3x + 7$
 $5x - 4 = 7$
 $5x = 11$
 $x = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$
b $9x = 6x - 5(2 - 3x)$
 $9x = 6x - 10 + 15x$
 $9x = 21x - 10$
 $-12x = -10$
 $x = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}$
c $15 - (2x - 6) = 7x + 4$
 $15 - 2x + 6 = 7x + 4$
 $21 - 2x = 7x + 4$
 $21 - 9x = 4$
 $-9x = -17$
 $x = \frac{-17}{-9} = 1\frac{8}{9}$
d $2\frac{3}{7}x + 1 = 2x - 3$
 $17x + 7 = 14x - 21$
 $3x + 7 = -21$
 $3x = -28$
 $x = \frac{-28}{3} = -9\frac{1}{3}$
e $2\frac{1}{2}x + 4 = 2 - \left(\frac{1}{2}x + 7\right)$
 $2\frac{1}{2}x + 4 = 2 - \frac{1}{2}x - 7$
 $2\frac{1}{2}x + 4 = -5 - \frac{1}{2}x$
 $2\frac{1}{2}x + 4 = -5 - \frac{1}{2}x$
 $3x + 4 = -5$
 $3x = -9$
 $x = -3$
f $\frac{1}{3}x = 1\frac{1}{3}(3 - x)$
 $\frac{1}{3}x = 4 - 1\frac{1}{3}x$
 $x = 12 - 4x$
 $5x = 12$
 $x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$
- 3 a** Met de vergelijking $-0,15t + 147 = 0$ kun je berekenen na hoeveel minuten het gewicht op de grond komt.
b $-0,15t + 147 = 0$
 $-0,15t = -147$
 $t = 980$
 Na 980 minuten zal de klok stilstaan.
 980 minuten komt overeen met 16 uur en 20 minuten.
 De klok zal om 1.20 uur stil gaan staan.
c $-0,15t + 147 = 120$
 $-0,15t = -27$
 $t = 180$
 180 minuten is gelijk aan 3 uur, dus bij hoogte 120 cm hoort het tijdstip 12.00 uur.
 $-0,15t + 147 = 33$
 $-0,15t = -114$
 $t = 760$
 760 minuten is gelijk aan 12 uren en 40 minuten, dus bij hoogte 33 cm hoort het tijdstip 21.40 uur.

9 Formules herleiden

- d** Wanneer je in de formule $h = -0,15t + 147$ zowel links als rechts 147 aftrekt, ontstaat de vergelijking $h - 147 = -0,15t$. Deze vergelijking komt overeen met $-0,15t = h - 147$.
- e** $-0,15t = h - 147$
 $t = \frac{1}{-0,15} h - \frac{147}{-0,15}$
 $t = -6\frac{2}{3}h + 980$
- 4 a** stap 1: links en rechts $-5x$
b stap 2: links en rechts $:2$
c $5y - 8 = 7x$
 $5y = 7x + 8$
 $y = 1\frac{2}{5}x + 1\frac{3}{5}$
d $3(2q - p) = 8$
 $6q - 3p = 8$
 $6q = 3p + 8$
 $q = \frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}$
- 5 a** $8p - 4q = 9$
 $-4q = -8p + 9$
 $q = 2p - 2\frac{1}{4}$
b $p + 2q = 0$
 $2q = -p$
 $q = -\frac{1}{2}p$
c $15p = 3q + 27$
 $3q + 27 = 15p$
 $3q = 15p - 27$
 $q = 5p - 9$
d $5q + 3p = 6$
 $5q = -3p + 6$
 $q = -\frac{3}{5}p + 1\frac{1}{5}$
- e** $4q + 16 = 20p$
 $4q = 20p - 16$
 $q = 5p - 4$
f $3(q + 1) = 6p + 5$
 $3q + 3 = 6p + 5$
 $3q = 6p + 2$
 $q = 2p + \frac{2}{3}$
g $2p - \frac{1}{2}q = 1$
 $-\frac{1}{2}q = -2p + 1$
 $q = 4p - 2$
h $2(p + q) = p - q$
 $2p + 2q = p - q$
 $2p + 3q = p$
 $3q = -p$
 $q = -\frac{1}{3}p$
- 6 a** Het vaste bedrag in Groningen is €30,-, dus bij een verbruik van 0 m^3 hoort een bedrag van €30,-. Een m^3 water kost €0,925, met $0,925w$ bereken je dus hoeveel je moet betalen voor de hoeveelheid water die je hebt verbruikt.
b Voor de provincie Drenthe geldt de formule $b = 40 + 0,88w$.
c Met de vergelijking $30 + 0,925w = 40 + 0,88w$ kun je berekenen bij welk waterverbruik het te betalen bedrag in beide provincies even hoog is.
d $30 + 0,925w = 40 + 0,88w$
 $30 + 0,045w = 40$
 $0,045w = 10$
 $w \approx 222,2$
 Bij een verbruik hoger dan $222,2 \text{ m}^3$ water is het te betalen bedrag in Drenthe kleiner dan het te betalen bedrag in Groningen.
- 7 a** Per dag kunnen er maximaal $15 : 0,5 = 30$ stoelen A geproduceerd worden.
b Het produceren van elf stoelen A duurt $11 \times 0,5 = 5,5$ uur en het produceren van zeven stoelen B duurt $7 \times 1,5 = 10,5$ uur. $5,5 + 10,5 = 16$ uur, dus het is niet mogelijk om op één dag elf stoelen A en zeven stoelen B te produceren.

- c** Het produceren van negen stoelen A en vijf stoelen B duurt $9 \times 0,5 + 5 \times 1,5 = 12$ uur. Er is dan nog $15 - 12 = 3$ uur over.
- d** Het produceren van een stoel A duurt 0,5 uur, het produceren van a stoelen A duurt dus $0,5a$. Het produceren van een stoel B duurt 1,5 uur, het produceren van b stoelen B duurt dus $1,5b$.
De machine draait per dag 15 uur en dus is $0,5a + 1,5b = 15$.
- e** $0,5a + 1,5b = 15$
 $0,5a = 15 - 1,5b$
 $a = 30 - 3b$

f

aantal model A	aantal model B
0	10
3	9
6	8
9	7
12	6
15	5
18	4
21	3
24	2
27	1
30	0

02 a stap 1: haakjes weggewerkt

b $7a - 12 = 2a - 2$

c stap 3: links en rechts $- 2a$

d $5a - 12 = -2$

$$5a = 10$$

$$a = 2$$

05 a stap 1: haakjes weggewerkt

stap 2: links en rechts verwisseld

stap 3: links en rechts $- 6$

stap 4: links en rechts $: 2$

b $8q + 6p = 12$

$$8q = -6q + 12$$

$$q = -\frac{3}{4}q + 1\frac{1}{2}$$

c $5p + 15q = 0$

$$15q = -5p$$

$$q = -\frac{1}{3}p$$

d $3p + 5q = 18$

$$5q = -3p + 18$$

$$q = -\frac{3}{5}p + 3\frac{3}{5}$$

e $2p + q = 3p + 2q - 4$

$$2p - q = 3p - 4$$

$$-q = p - 4$$

$$q = -p + 4$$

f $4p - 2q = p + 9$

$$-2q = -3p + 9$$

$$q = 1\frac{1}{2}p - 4\frac{1}{2}$$

g $12p + 12 = 2(q + 7)$

$$12p + 12 = 2q + 14$$

$$2q + 14 = 12p + 12$$

$$2q = 12p - 2$$

$$q = 6p - 1$$

9 Formules herleiden

h $5 - 2(q - 3) = 4p + 8$

$$5 - 2q + 6 = 4p + 8$$

$$11 - 2q = 4p + 8$$

$$-2q = 4p - 3$$

$$q = -2p + 1\frac{1}{2}$$

i $p + 3(p - 2) = 10q + 8$

$$p + 3p - 6 = 10q + 8$$

$$4p - 6 = 10q + 8$$

$$10q + 8 = 4p - 6$$

$$10q = 4p - 14$$

$$q = \frac{2}{5}p - 1\frac{2}{5}$$

U1 Bert en Abel hebben evenveel kWh tijdens daluren afgenomen, maar Bert heeft 10% meer kWh afgenomen tijdens normale uren, hiervoor moet hij €23,46 meer betalen.

€23,46 komt overeen met $\frac{23,46}{0,23} = 102$ kWh, dus Bert heeft 102 kWh meer normale uren gebruikt dan Abel.

Deze 102 kWh komen overeen met 10%, dus Abel heeft

$10 \times 102 = 1020$ kWh aan normale uren gebruikt.

Chris heeft 8% meer van het lage en hoge tarief gebruikt dan Abel en moet €39,58 meer dan Abel betalen.

Abel moest dus $\frac{39,58}{0,08} = €494,75$ aan kWh betalen.

Hiervan was $1020 \times €0,23 = €234,60$ voor normale uren en dus

$€494,75 - €234,60 = €260,15$ aan daluren.

Hij gebruikte dus $\frac{260,15}{0,215} = 1210$ kWh daluren.

Abel heeft dus 1020 kWh normale uren en 1210 kWh daluren verbruikt.

9.2 Gebroken formules

intro Als de oppervlakte van de kavels gehalveerd wordt, dan kun je niet twee keer zoveel kavels maken omdat de 100 m^2 voor groenvoorziening en wegen per woning gelijk blijft.

- 8 a** stap 1: links en rechts $- 65$
 stap 2: links en rechts $\times (B + 5)$
 stap 3: links en rechts $: 10$
 stap 4: links en rechts verwisseld
 stap 5: links en rechts $- 5$

b $65 + \frac{6000}{B + 5} = 80$

$$\frac{6000}{B + 5} = 15$$

$$6000 = 15(B + 5)$$

$$400 = B + 5$$

$$B + 5 = 400$$

$$B = 395$$

GK = 80 bij een productie van 395.

$$65 + \frac{6000}{B + 5} = 70$$

$$\frac{6000}{B + 5} = 5$$

$$6000 = 5(B + 5)$$

$$1200 = B + 5$$

$$B + 5 = 1200$$

$$B = 1195$$

GK = 70 bij een productie van 1195.

$$\text{c } 6000 = (GK - 65)(B + 5)$$

$$B + 5 = \frac{6000}{GK - 65}$$

$$B = \frac{6000}{GK - 65} - 5$$

$$\text{9 a } a = \frac{12}{b}$$

$$12 = a \cdot b$$

$$a \cdot b = 12$$

$$b = \frac{12}{a}$$

$$\text{b } \frac{b-1}{a^2} = 7$$

$$b-1 = 7 \cdot a^2$$

$$b = 7a^2 + 1$$

$$\text{c } 2a = \frac{8}{b+4}$$

$$8 = 2a \cdot (b+4)$$

$$2a \cdot (b+4) = 8$$

$$b+4 = \frac{8}{2a}$$

$$b = \frac{4}{a} - 4$$

$$\text{d } \frac{4}{b} = 6a - 7$$

$$4 = b \cdot (6a - 7)$$

$$b \cdot (6a - 7) = 4$$

$$b = \frac{4}{6a - 7}$$

$$\text{e } \frac{5b^2 - 3b}{b} = a + 3$$

$$\frac{5b^2}{b} - \frac{3b}{b} = a + 3$$

$$5b - 3 = a + 3$$

$$5b = a + 6$$

$$b = \frac{1}{5}a + 1\frac{1}{5}$$

$$\text{f } \frac{7}{b} = \frac{2a+1}{a}$$

$$b \cdot (2a+1) = 7 \cdot a$$

$$b = \frac{7a}{2a+1}$$

$$\text{10 a } A = \frac{3p^2 - p^{1,5} + 8p^{0,6}}{2p}$$

$$A = \frac{3p^2}{2p} - \frac{p^{1,5}}{2p} + \frac{8p^{0,6}}{2p}$$

$$A = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p^{0,5} + 4p^{-0,4}$$

$$\text{b } Q = \frac{p^2 - 2 \cdot \sqrt{p}}{2 \cdot \sqrt{p}} + \frac{1}{2}p \cdot \sqrt{p}$$

$$Q = \frac{p^2}{2p^{0,5}} - \frac{2p^{0,5}}{2p^{0,5}} + \frac{1}{2}p \cdot \sqrt{p}$$

$$Q = \frac{1}{2}p^{1,5} - 1 + \frac{1}{2}p \cdot \sqrt{p}$$

$$Q = \frac{1}{2}p \cdot p^{0,5} - 1 + \frac{1}{2}p \cdot \sqrt{p}$$

$$Q = \frac{1}{2}p \cdot \sqrt{p} - 1 + \frac{1}{2}p \cdot \sqrt{p}$$

$$Q = p \cdot \sqrt{p} - 1$$

$$\text{11 a } GK = \frac{200 \times 200 + 12\,000}{200 + 10} \approx \text{€ } 247,62$$

Het produceren van 200 paren schaatsen kost gemiddeld € 247,62 per paar.

$$GK = \frac{200 \times 400 + 12\,000}{400 + 10} \approx \text{€ } 224,39$$

Het produceren van 400 paren schaatsen kost gemiddeld € 224,39 per paar.

9 Formules herleiden

b $GK = 210$

$$\frac{200q + 12\,000}{q + 10} = 210$$

$$200q + 12\,000 = 210(q + 10)$$

$$200q + 12\,000 = 210q + 2100$$

$$-10q + 12\,000 = 2100$$

$$-10q = -9900$$

$$q = 990$$

Er zijn 990 paren schaatsen geproduceerd.

c Bij 200 paren schaatsen zijn de totale kosten $200 \times € 247,64 = € 49.528,-$.

Bij 400 paren schaatsen zijn de totale kosten $400 \times € 224,39 = € 44.878,-$.

d $TK = GK \cdot q$

$$TK = \frac{200q + 12\,000}{q + 10} \cdot q$$

$$TK = \frac{200q + 12\,000}{q + 10} \cdot \frac{q}{1}$$

$$TK = \frac{(200q + 12\,000) \cdot q}{q + 10}$$

$$TK = \frac{200q^2 + 12\,000q}{q + 10}$$

e $TK = 250\,000$

$$\frac{200q^2 + 12\,000q}{q + 10} = 250\,000$$

Invoer: $y_1 = \frac{200x^2 + 12\,000x}{x + 10}$ en $y_2 = 250\,000$

Venster: $0 \leq x \leq 3000, 0 \leq y \leq 500\,000$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (1200,4; 250 000).

Voor € 250.000,- kun je 1200 paren schaatsen laten produceren.

12 a Bij 2000 m^2 is $q = 2$.

$$P = \frac{0,13 \times 2 + 0,12}{2} = € 0,19$$

De prijs per m^2 is € 0,19, de totale prijs is $2000 \times € 0,19 = € 380,-$.

b Bij 580 m^2 is $q = 0,58$.

$$P = \frac{0,13 \times 0,58 + 0,12}{0,58} = € 0,336\dots$$

De prijs per m^2 is € 0,336..., de totale prijs is $580 \times € 0,336\dots = € 195,40$.

c $P = \frac{0,13V + 0,12}{V}$

$$P = \frac{0,13V}{V} + \frac{0,12}{V}$$

$$P = 0,13 + \frac{0,12}{V}$$

d Als V groter wordt, wordt 0,12 gedeeld door een groter getal. De uitkomst van de breuk wordt dan kleiner en dus wordt P ook kleiner.

$$\begin{aligned}
 \text{e } TK &= P \cdot V \cdot 1000 \\
 TK &= \frac{0,13V + 0,12}{V} \cdot 1000V \\
 TK &= \frac{0,13V + 0,12}{V} \cdot \frac{1000V}{1} \\
 TK &= \frac{(0,13V + 0,12) \cdot 1000V}{V} \\
 TK &= \frac{130V^2 + 120V}{V} = 130V + 120
 \end{aligned}$$

- 09 a stap 1: links en rechts $\times (1 + b)$
 stap 2: links en rechts verwisseld
 stap 3: links en rechts $: (2a + 3)$

$$\begin{aligned}
 \text{b } 1 + b &= \frac{12}{2a + 3} \\
 b &= \frac{12}{2a + 3} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } a &= \frac{b}{5} \\
 b &= a \cdot 5 \\
 b &= 5a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d } \frac{2}{b} &= 3a + 7 \\
 2 &= b \cdot (3a + 7) \\
 b \cdot (3a + 7) &= 2 \\
 b &= \frac{2}{3a + 7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e } 2 + \frac{3}{b} &= 4a - 8 \\
 \frac{3}{b} &= 4a - 10 \\
 3 &= b \cdot (4a - 10) \\
 b \cdot (4a - 10) &= 3 \\
 b &= \frac{3}{4a - 10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f } a - 5 &= \frac{2b - 4}{3} \\
 2b - 4 &= 3 \cdot (a - 5) \\
 2b - 4 &= 3a - 15 \\
 2b &= 3a - 11 \\
 b &= 1\frac{1}{2}a - 5\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g } ab &= 4 \\
 b &= \frac{4}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h } \frac{a}{2b} &= 4 + a \\
 a &= 2b \cdot (4 + a) \\
 2b \cdot (4 + a) &= a \\
 2b &= \frac{a}{4 + a} \\
 b &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4 + a} \\
 b &= \frac{a}{2(4 + a)} \\
 b &= \frac{a}{8 + 2a}
 \end{aligned}$$

- U2 a $b = 120$ en $f = 15$ invullen geeft

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{15} &= \frac{1}{120} + \frac{1}{v} \\
 \frac{1}{v} &= \frac{1}{15} - \frac{1}{120} \\
 \frac{1}{v} &= \frac{8}{120} - \frac{1}{120} = \frac{7}{120} \\
 7v &= 120 \\
 v &\approx 17,1 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Het lampje moet op 17,1 cm afstand van de lens worden gezet.

9 Formules herleiden

$$\begin{aligned} \text{b } \frac{1}{f} &= \frac{1}{50} + \frac{1}{v} \\ \frac{1}{50} + \frac{1}{v} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{v} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{50} \\ \frac{1}{v} &= \frac{50-f}{50f} \\ v \cdot (50-f) &= 50f \\ v &= \frac{50f}{50-f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } \frac{1}{10} &= \frac{1}{b} + \frac{1}{v} \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{v} &= \frac{1}{10} \\ \frac{1}{b} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{v} \\ \frac{1}{b} &= \frac{v-10}{10v} \\ b \cdot (v-10) &= 10v \\ b &= \frac{10v}{v-10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } \text{Uit } 1,5 &= \frac{b}{v} \text{ volgt } b = 1,5v. \\ b = 1,5v \text{ en } f = 10 \text{ invullen geeft:} \\ \frac{1}{10} &= \frac{1}{1,5v} + \frac{1}{v} \\ \frac{1}{10} &= \frac{1}{1,5v} + \frac{1,5}{1,5v} \\ \frac{1}{10} &= \frac{2,5}{1,5v} \\ 1,5v &= 25 \\ v &= 16\frac{2}{3} \text{ cm en } b = 1,5 \times 16\frac{2}{3} = 25 \text{ cm} \end{aligned}$$

9.3 Wortelformules

intro $3,57 \cdot \sqrt{h} = 12,4$

$$\sqrt{h} = \frac{12,4}{3,57}$$

$$h = \left(\frac{12,4}{3,57}\right)^2 \approx 12,1 \text{ m}$$

De ooghoogte van Sil is 12,1 m. Dan is de ooghoogte van Samir

$$3 \times 12,1 = 36,3 \text{ m. Samir kan dan } d = 3,57 \cdot \sqrt{36,3} \approx 21,5 \text{ km ver kijken.}$$

Samir kan dus $\frac{21,5}{12,4} \approx 1,7$ zo ver kijken als Sil.

13 a $h = 0$ invullen

$$R = 3,6 \cdot \sqrt{0 + 0,8} \approx 3,2 \text{ km}$$

Het zendbereik zou 3,2 km zijn als de zender op de grond zou staan.

b $R = 3,6 \cdot \sqrt{12 + 0,8} \approx 12,9 \text{ km}$

De zendmast wordt 15 meter hoog.

$$R = 3,6 \cdot \sqrt{15 + 0,8} \approx 14,3 \text{ km}$$

Het bereik neemt dan met $14,3 - 12,9 = 1,4 \text{ km}$ toe.

c $3,6 \cdot \sqrt{h + 0,8} = 18$

d $\sqrt{h + 0,8} = \frac{18}{3,6} = 5$

e $h + 0,8 = 5^2 = 25$

f De zendmast heeft een hoogte van $h = 25 - 0,8 = 24,2 \text{ m}$.

g $3,6 \cdot \sqrt{h + 0,8} = 36$

$$\sqrt{h + 0,8} = 10$$

$$h + 0,8 = 100$$

$$h = 99,2$$

14 a $\sqrt{2q-5} = 3$

$$2q - 5 = 9$$

$$2q = 14$$

$$q = 7$$

b $\sqrt{2q-5} = 6$

$$2q - 5 = 36$$

$$2q = 41$$

$$q = 20\frac{1}{2}$$

c stap 1: links en rechts gekwadrateerd

stap 2: links en rechts verwisseld

stap 3: links en rechts + 5

d $2q = p^2 + 5$

$$q = \frac{1}{2}p^2 + 2\frac{1}{2}$$

e $q = \frac{1}{2} \times 3^2 + 2\frac{1}{2} = 7$ komt overeen met opdracht a.

$q = \frac{1}{2} \times 6^2 + 2\frac{1}{2} = 20\frac{1}{2}$ komt overeen met opdracht b.

15 a $q = \sqrt{3p+1}$

$$\sqrt{3p+1} = q$$

$$3p + 1 = q^2$$

$$3p = q^2 - 1$$

$$p = \frac{1}{3}q^2 - \frac{1}{3}$$

b $q = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{p+3}$

$$\frac{1}{5} \cdot \sqrt{p+3} = q$$

$$\sqrt{p+3} = 5q$$

$$p + 3 = (5q)^2$$

$$p + 3 = 25q^2$$

$$p = 25q^2 - 3$$

c $q = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2p+5}$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2p+5} = q$$

$$\sqrt{2p+5} = 3q$$

$$2p + 5 = (3q)^2$$

$$2p + 5 = 9q^2$$

$$2p = 9q^2 - 5$$

$$p = 4\frac{1}{2}q^2 - 2\frac{1}{2}$$

d $q = 2 + \sqrt{p-1}$

$$2 + \sqrt{p-1} = q$$

$$\sqrt{p-1} = q - 2$$

$$p - 1 = (q - 2)^2$$

$$p - 1 = q^2 - 4q + 4$$

$$p = q^2 - 4q + 5$$

e $q = \sqrt{2p-6} + 1$

$$\sqrt{2p-6} + 1 = q$$

$$\sqrt{2p-6} = q - 1$$

$$2p - 6 = (q - 1)^2$$

$$2p - 6 = q^2 - 2q + 1$$

$$2p = q^2 - 2q + 7$$

$$p = \frac{1}{2}q^2 - q + 3\frac{1}{2}$$

f $q = 3 \cdot \sqrt{p+2} - 3$

$$3 \cdot \sqrt{p+2} - 3 = q$$

$$3 \cdot \sqrt{p+2} = q + 3$$

$$\sqrt{p+2} = \frac{1}{3}q + 1$$

$$p + 2 = \left(\frac{1}{3}q + 1\right)^2$$

$$p + 2 = \frac{1}{9}q^2 + \frac{2}{3}q + 1$$

$$p = \frac{1}{9}q^2 + \frac{2}{3}q - 1$$

16 a $\sqrt{2p+q} = 3q - 1$

$$2p + q = (3q - 1)^2$$

$$2p + q = 9q^2 - 6q + 1$$

$$2p = 9q^2 - 7q + 1$$

$$p = 4\frac{1}{2}q^2 - 3\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$$

b $q + 2\sqrt{1-p} = 6$

$$2\sqrt{1-p} = 6 - q$$

$$4(1-p) = (6-q)^2$$

$$4 - 4p = 36 - 12q + q^2$$

$$-4p = q^2 - 12q + 32$$

$$p = -\frac{1}{4}q^2 + 3q - 8$$

9 Formules herleiden

17 a $H = \sqrt{0,25 \times 0^2 + 100} = 10$

Op $t = 0$ staat het water 10 cm hoog.

b $\sqrt{0,25t^2 + 100} = 40$

$$0,25t^2 + 100 = 1600$$

$$0,25t^2 = 1500$$

$$t^2 = 6000$$

$$t = \sqrt{6000} \approx 77,5$$

Na 77,5 minuten staat het water 40 cm hoog.

c $H = \sqrt{0,25t^2 + 100}$

$$H = \sqrt{0,25(t^2 + 400)}$$

$$H = \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{t^2 + 400}$$

$$H = 0,5 \cdot \sqrt{t^2 + 400}$$

d $H = \sqrt{0,25t^2 + 100}$

$$\sqrt{0,25t^2 + 100} = H$$

$$0,25t^2 + 100 = H^2$$

$$0,25t^2 = H^2 - 100$$

$$t^2 = 4H^2 - 400$$

$$t = \sqrt{4H^2 - 400}$$

e 1,5 meter is gelijk aan 150 cm.

$$t = \sqrt{4 \cdot 150^2 - 400} \approx 299,3$$

Het duurt ongeveer 299 minuten om het reservoir te vullen.

f $t = \sqrt{4 \cdot 50^2 - 400} \approx 98,0$ minuten

$$t = \sqrt{4 \cdot 60^2 - 400} \approx 118,3$$
 minuten

Het duurt $118,3 - 98,0 \approx 20$ minuten om de waterhoogte te laten stijgen van 50 naar 60 centimeter.

18 a $v = 20 \cdot \sqrt{273 + 16} = 340$

Bij 16°C is de snelheid van het geluid 340 m/s.

b $20 \cdot \sqrt{273 + t} = 335$

$$\sqrt{273 + t} = 16\frac{3}{4}$$

$$273 + t = 280\frac{9}{16}$$

$$t = 7\frac{9}{16} \approx 7,7$$

Bij $7,7^\circ\text{C}$ is de snelheid van het geluid 335 m/s.

c $v = 20 \cdot \sqrt{273 + t}$

$$20 \cdot \sqrt{273 + t} = v$$

$$\sqrt{273 + t} = \frac{1}{20} v$$

$$273 + t = \frac{1}{400} v^2$$

$$t = \frac{1}{400} v^2 - 273$$

d De grafiek gaat door de punten met coördinaten $(-17, 320)$ en $(16, 340)$.

$$a = \frac{340 - 320}{16 - (-17)} \approx 0,6$$

$$v = 0,6 \cdot t + b$$

$(16, 340)$ invullen:

$$0,6 \cdot 16 + b = 340$$

$$9,6 + b = 340$$

$$b = 330,4$$

e $v = 20 \cdot \sqrt{273 + 10} \approx 336,45 \text{ m/s}$
 $v = 0,6 \times 10 + 330,4 = 336,4 \text{ m/s}$
 Het verschil is $336,45 - 336,4 = 0,05 \text{ m/s}$.

015 a stap 1: links en rechts kwadrateren gekwadraterd

stap 2: haakjes weggewerkt

stap 3: links en rechts $+a$

b $b - a = a^2 + 10a + 25$
 $b = a^2 + 11a + 25$

c stap 1: haakjes weggewerkt
 stap 2: links en rechts verwisseld
 stap 3: links en rechts $+a$

d $b = (a + 2)^2$
 $b = a^2 + 4a + 4$

e $a = \sqrt{b + 3}$
 $\sqrt{b + 3} = a$
 $b + 3 = a^2$
 $b = a^2 - 3$

h $a - 5 = \sqrt{4b + 3}$
 $\sqrt{4b + 3} = a - 5$
 $4b + 3 = (a - 5)^2$
 $4b + 3 = a^2 - 10a + 25$
 $4b = a^2 - 10a + 22$
 $b = \frac{1}{4}a^2 - 2\frac{1}{2}a + 5\frac{1}{2}$

f $a = \sqrt{b} - 7$
 $\sqrt{b} - 7 = a$
 $\sqrt{b} = a + 7$
 $b = (a + 7)^2$
 $b = a^2 + 14a + 49$

i $a = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{b + 1}$
 $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{b + 1} = a$
 $\sqrt{b + 1} = 3a$
 $b + 1 = (3a)^2$
 $b + 1 = 9a^2$
 $b = 9a^2 - 1$

g $a = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3b - 1}$
 $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3b - 1} = a$
 $\sqrt{3b - 1} = 4a$
 $3b - 1 = (4a)^2$
 $3b - 1 = 16a^2$
 $3b = 16a^2 + 1$
 $b = 5\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}$

j $\sqrt{2b + 1} = -2a$
 $2b + 1 = (-2a)^2$
 $2b + 1 = 4a^2$
 $2b = 4a^2 - 1$
 $b = 2a^2 - \frac{1}{2}$

U3 $v = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{t}{273}}$
 $v = 331 \cdot \sqrt{\frac{1}{273} (273 + t)}$
 $v = 331 \cdot \sqrt{\frac{1}{273}} \cdot \sqrt{273 + t}$
 $v \approx 20 \cdot \sqrt{273 + t}$

9 Formules herleiden

9.4 Machtsformules

intro Als de oppervlakte twee keer zo groot is, dan is de straal $\sqrt{2}$ keer zo groot.
De inhoud is dan $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \approx 2,8$ keer zo groot.

19 a $L = 11,75 \cdot 4000^{0,2} \approx 62$

De levensverwachting van een olifant van 4000 kg is 62 jaren.

b Neem bijvoorbeeld een gewicht van 80 kg.

$$L = 11,75 \cdot 80^{0,2} \approx 28$$

De levensverwachting van iemand van 80 kg zou 28 jaren zijn, dat is niet realistisch.

c $11,75 \cdot G^{0,2} = 40$

d stap 2: links en rechts : 11,75

stap 3: links en rechts tot de macht $\frac{1}{0,2}$

stap 4: uitgerekend met de rekenmachine

e $11,75 \cdot G^{0,2} = 80$

$$G^{0,2} \approx 6,809$$

$$G \approx 6,809^{\frac{1}{0,2}}$$

$$G \approx 14631$$

Bij een levensverwachting van 80 jaar hoort een gewicht van 14 631 kg.

f $L = 11,75 \cdot G^{0,2}$

$$11,75 \cdot G^{0,2} = L$$

$$G^{0,2} = \frac{1}{11,75} \cdot L$$

$$G = \left(\frac{1}{11,75} \cdot L \right)^{\frac{1}{0,2}}$$

$$G = \left(\frac{1}{11,75} \right)^{\frac{1}{0,2}} \cdot L^{\frac{1}{0,2}}$$

$$G \approx 0,0000045 \cdot L^5$$

g $G = 0,0000045 \cdot 60^5 \approx 3499,2$

Bij een levensverwachting van 60 jaar hoort een gewicht van ongeveer 3500 kg.

20 a $K = 3 \cdot x^{-0,6} \cdot 2 \cdot x^{1,3}$
 $K = 3 \cdot 2 \cdot x^{-0,6} \cdot x^{1,3}$
 $K = 6 \cdot x^{-0,6+1,3}$
 $K = 6x^{0,7}$

d $K = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot 2 \cdot \sqrt{x}$
 $K = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}$
 $K = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$
 $K = x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$

$$K = x^{1\frac{5}{6}}$$

b $K = \frac{1}{4x^3}$
 $K = \frac{1}{4} \cdot x^{-3}$

e $K = \frac{x^3}{2x^{-3}}$
 $K = \frac{1}{2} \cdot x^{3-(-3)}$
 $K = \frac{1}{2} \cdot x^6$

c $K = 8x^{1,2} \cdot 2x^{2,3} \cdot x$
 $K = 8 \cdot 2 \cdot x^{1,2} \cdot x^{2,3} \cdot x$
 $K = 16 \cdot x^{1,2+2,3+1}$
 $K = 16x^{4,5}$

f $K = (2x^2 \cdot \sqrt{x})^3$
 $K = (2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}})^3$
 $K = (2x^{2+\frac{1}{2}})^3$
 $K = (2x^{\frac{5}{2}})^3$
 $K = 2^3 \cdot x^{\frac{5}{2} \times 3}$
 $K = 8x^{\frac{15}{2}}$

21 a $Q = 8p^3$

$$8p^3 = Q$$

$$p^3 = \frac{1}{8} Q$$

$$p = \left(\frac{1}{8} Q\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$p = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot Q^{\frac{1}{3}}$$

$$p \approx 0,5 \cdot Q^{0,33}$$

b $Q = \frac{2,5}{p^2}$

$$p^2 \cdot Q = 2,5$$

$$p^2 = \frac{2,5}{Q}$$

$$p^2 = 2,5 Q^{-1}$$

$$p = (2,5 Q^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$p = 2,5^{\frac{1}{2}} \cdot Q^{-0,5}$$

$$p \approx 1,58 \cdot Q^{-0,5}$$

c $\frac{2p}{Q} = 3p^4$

$$2p = 3p^4 \cdot Q$$

$$\frac{2p}{3p^4} = Q$$

$$\frac{2}{3} p^{-3} = Q$$

$$p^{-3} = 1\frac{1}{2} Q$$

$$p = \left(1\frac{1}{2} Q\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$p = \left(1\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot (Q)^{-\frac{1}{3}}$$

$$p \approx 0,87 \cdot Q^{-0,33}$$

d $Q \cdot p^{-3} = 5 \cdot p^{-2}$

$$Q = \frac{5 \cdot p^{-2}}{p^{-3}}$$

$$Q = 5 \cdot p$$

$$5 \cdot p = Q$$

$$p = \frac{1}{5} \cdot Q$$

$$p = 0,2 \cdot Q$$

e $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{p} = p^2 \cdot Q$

$$\frac{1}{4} \cdot p^{\frac{1}{2}} = p^2 \cdot Q$$

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot p^{\frac{1}{2}}}{p^2} = Q$$

$$\frac{1}{4} \cdot p^{-1\frac{1}{2}} = Q$$

$$p^{-1\frac{1}{2}} = 4Q$$

$$p = (4Q)^{-\frac{1}{1\frac{1}{2}}}$$

$$p = (4)^{-\frac{1}{1\frac{1}{2}}} \cdot (Q)^{-\frac{1}{1\frac{1}{2}}}$$

$$p \approx 0,40 \cdot Q^{-0,67}$$

f $Q = \frac{7p^{-3} \cdot 4p^4}{2p^2}$

$$Q = \frac{28p}{2p^2}$$

$$Q = \frac{14}{p}$$

$$p \cdot Q = 14$$

$$p = \frac{14}{Q}$$

$$p = 14 \cdot Q^{-1}$$

22 a $k \cdot 1^n = 40$

$$k = 40$$

b Bij $A = 2$ hoort $S = 44,9$.

$$40 \cdot 2^n = 44,9$$

Invoer: $y_1 = 40 \cdot 2^x$ en $y_2 = 44,9$

Venster: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 60$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(0,167; 44,9)$.

Dus $n = 0,167$ en $S = 40 \cdot A^{0,167}$.

c $S = 40 \cdot A^{0,167}$

$$40 \cdot A^{0,167} = S$$

$$A^{0,167} = \frac{1}{40} S$$

$$A = \left(\frac{1}{40} S\right)^{\frac{1}{0,167}}$$

$$A = \left(\frac{1}{40}\right)^{\frac{1}{0,167}} \cdot (S)^{\frac{1}{0,167}}$$

$$A \approx 2,55 \times 10^{-10} \cdot S^{5,99}$$

d $S = 40 \cdot (10A)^{0,167}$

$$S = 40 \cdot (10)^{0,167} \cdot A^{0,167}$$

$$S \approx 1,5 \cdot 40 \cdot A^{0,167}$$

In Yellowstone mag je ongeveer 1,5 keer zoveel vogelsoort als in Zion verwachten.

9 Formules herleiden

- 23 a** De grafiek gaat door het punt met coördinaten (1500,100).

$$a \cdot 1500^{-0,159} = 100$$

$$a = \frac{100}{1500^{-0,159}} \approx 320$$

$$320 \cdot c^{-0,159} = 80$$

$$c^{-0,159} = 0,25$$

$$c = 0,25^{\frac{1}{-0,159}} \approx 6117$$

Zodra de CO₂-concentratie boven de 6117 ppm uitkomt, komt de relatieve prestatie onder de 80%.

b $P = \frac{a}{c^{0,159}}$

Als de waarde van c groter wordt, wordt de uitkomst van $c^{0,159}$ ook groter. a wordt dan door een groter getal gedeeld waardoor de uitkomst kleiner wordt. De grafiek is dus dalend.

020 a $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

b $8x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = 8x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = 8x^{2+\frac{1}{4}} = 8x^{\frac{9}{4}}$

c De noemer $(2x^{1,5})^2$ is gelijk aan $2^2 \cdot (x^{1,5})^2$ en dus gelijk aan $4x^3$.

d $A = \frac{8x^{\frac{9}{4}}}{4x^3} = 2x^{\frac{9}{4}-3} = 2x^{-\frac{3}{4}}$

- 021 a** stap 1: links en rechts verwisseld

stap 2: links en rechts : 2

stap 3: links en rechts tot de macht $\frac{1}{2,5}$

b $Q = (0,5 \cdot P)^{\frac{1}{2,5}}$

$$Q = 0,5^{\frac{1}{2,5}} \cdot P^{\frac{1}{2,5}}$$

$$Q \approx 0,76 \cdot P^{0,4}$$

c $P = Q^{\frac{1}{4}}$

$$Q^{\frac{1}{4}} = P$$

$$Q = P^4$$

e $\frac{P}{0,2} = 5Q^{0,4}$

$$P = 0,2 \cdot 5Q^{0,4}$$

$$P = Q^{0,4}$$

$$Q^{0,4} = P$$

$$Q = P^{\frac{1}{0,4}}$$

$$Q = P^{2,5}$$

d $P = 5Q^{-\frac{1}{2}}$

$$5Q^{-\frac{1}{2}} = P$$

$$Q^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{5} \cdot P\right)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot P^{-2}$$

$$Q = 25 \cdot P^{-2}$$

f $3P^{1,5} = P^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot Q^{\frac{3}{5}}$

$$P^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot Q^{\frac{3}{5}} = 3P^{1,5}$$

$$Q^{\frac{3}{5}} = \frac{3 \cdot P^{1,5}}{\frac{3}{5} \cdot P^2}$$

$$Q^{\frac{3}{5}} = 5 \cdot P^{1,5-2}$$

$$Q^{\frac{3}{5}} = 5 \cdot P^{-0,5}$$

$$Q = (5 \cdot P^{-0,5})^{\frac{5}{3}}$$

$$Q = (5)^{\frac{5}{3}} \cdot (P^{-0,5})^{\frac{5}{3}}$$

$$Q \approx 2,73 \cdot P^{-0,31}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g } P &= 0,72 \cdot Q^{-1,4} \\
 0,72 \cdot Q^{-1,4} &= P \\
 Q^{-1,4} &= \frac{1}{0,72} \cdot P \\
 Q &= \left(\frac{1}{0,72} \cdot P\right)^{-\frac{1}{1,4}} \\
 Q &= \left(\frac{1}{0,72}\right)^{-\frac{1}{1,4}} \cdot P^{-\frac{1}{1,4}} \\
 Q &\approx 0,79 \cdot P^{-0,71}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h } P &= \frac{12Q^{1,8} \cdot Q^{-5}}{2Q^{0,8}} \\
 P &= \frac{12Q^{1,8-5}}{2Q^{0,8}} \\
 P &= \frac{12Q^{-3,2}}{2Q^{0,8}} \\
 P &= 6 \cdot Q^{-3,2-0,8} \\
 P &= 6 \cdot Q^{-4} \\
 6 \cdot Q^{-4} &= P \\
 Q^{-4} &= \frac{1}{6} \cdot P \\
 Q &= \left(\frac{1}{6} \cdot P\right)^{-\frac{1}{4}} \\
 Q &= \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot (P)^{-\frac{1}{4}} \\
 Q &\approx 1,57 \cdot P^{-0,25}
 \end{aligned}$$

U4 Uit de formule $I = 0,236 \cdot r^3$ volgt dat de straal $\sqrt[3]{n}$ keer zo groot wordt als de inhoud n keer zo groot wordt. Uit de formule $A = 2,73 \cdot r^2$ volgt dan dat de oppervlakte $(\sqrt[3]{n})^2 = n^{\frac{2}{3}}$ keer zo groot wordt.

9.5 Substituties

intro Fles B heeft dezelfde hoogte als fles A, maar de diameter is de helft van die van fles A. De inhoud van fles B is $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ deel van de inhoud van fles A. Van fles C is zowel de hoogte als de diameter de helft van die van fles A. Dan is de inhoud van fles C $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ deel van de inhoud van fles A. De inhoud van de flessen A, B en C verhouden zich dus als 8 : 2 : 1.

24 a Bij een lengte van 176 cm geldt dat $l = 176$.

$$L = 176 - 152 = 24$$

$$G = 45,4 + 0,89 \cdot 24 \approx 66,8 \text{ kg}$$

Het ideale gewicht voor een vrouw met lengte 176 cm is 66,8 kg.

$$\text{b } G = 45,4 + 0,89l - 135,28$$

$$G = 0,89l - 89,88$$

c Het voordeel is dat je nu met één berekening bij een lengte het ideale gewicht kunt bereken.

$$\text{25 a } y = 3(5x - 6) + 14$$

$$y = 15x - 18 + 14$$

$$y = 15x - 4$$

$$\text{b } y = -5(19x + 18) + 89$$

$$y = -95x - 90 + 89$$

$$y = -95x - 1$$

c Eerst t uitdrukken in x :

$$x + \frac{1}{2}t = 1$$

$$\frac{1}{2}t = 1 - x$$

$$t = 2 - 2x$$

Dan substitueren:

$$y = 8(2 - 2x)^2 + 10$$

$$y = 8(4 - 8x + 4x^2) + 10$$

$$y = 32 - 64x + 32x^2 + 10$$

$$y = 32x^2 - 64x + 42$$

9 Formules herleiden

- d** Eerst t uitdrukken in x :

$$x^2 = t - 4$$

$$t - 4 = x^2$$

$$t = x^2 + 4$$

Dan substitueren:

$$y = 6 - 3(x^2 + 4)$$

$$y = 6 - 3x^2 - 12$$

$$y = -3x^2 - 6$$

26 a $y = 2(2x - 6)^2 + 8(2x - 6)$
 $y = 2(4x^2 - 24x + 36) + 16x - 48$
 $y = 8x^2 - 48x + 72 + 16x - 48$
 $y = 8x^2 - 32x + 24$

b $y = (ax + 1)^2 + 2(ax + 1)$
 $y = a^2x^2 + 2ax + 1 + 2ax + 2$
 $y = a^2x^2 + 4ax + 3$

Hieruit volgt dat $4a = 12$, ofwel $a = 3$.

27 a $K = \frac{12B - 45}{2 \cdot 4 + 12}$

$$K = \frac{12B - 45}{20}$$

$$K = \frac{12B}{20} - \frac{45}{20}$$

$$K = \frac{3}{5}B - 2\frac{1}{4}$$

b $1 = \frac{12B - 45}{2C + 12}$

$$2C + 12 = 12B - 45$$

$$2C = 12B - 57$$

$$C = 6B - 28\frac{1}{2}$$

c $9 = \frac{12B - 45}{2C + 12}$

$$12B - 45 = 9(2C + 12)$$

$$12B - 45 = 18C + 108$$

$$12B = 18C + 153$$

$$B = 1\frac{1}{2}C + 12\frac{3}{4}$$

d $B = \frac{12B - 45}{2C + 12}$

$$B \cdot (2C + 12) = 12B - 45$$

$$2C + 12 = \frac{12B - 45}{B}$$

$$2C = \frac{12B - 45}{B} - 12$$

$$C = \frac{12B - 45}{2B} - 6$$

$$C = \frac{12B}{2B} - \frac{45}{2B} - 6 = 6 - \frac{45}{2B} - 6 = -\frac{45}{2B}$$

- 28 a** Het vat is leeggepompt als $h = 0$.

$$100 - 0,4V = 0$$

$$-0,4V = -100$$

$$V = 250$$

In een vol vat zit 250 liter water.

b $h = 100 - 0,4 \cdot \sqrt{2500t}$

c $100 - 0,4 \cdot \sqrt{2500t} = 40$

$$-0,4 \cdot \sqrt{2500t} = -60$$

$$\sqrt{2500t} = 150$$

$$2500t = 22\,500$$

$$t = 9$$

Na 9 minuten is de hoogte van het water 40 cm.

$$V = \sqrt{2500 \cdot 9} = 150$$

Er is dan 150 liter water weggepompt.

- d** Het vat is leeg als $V = 250$.

$$\sqrt{2500t} = 250$$

$$2500t = 62\,500$$

$$t = 25$$

Het vat is na 25 minuten leeg.

- 29 a** $h = 20$ en $v = 6$ invullen:

$$P = 0,4 \cdot 6^3 \cdot 20^{0,75} \approx 817 \text{ watt}$$

Het vermogen van deze windmolen is 817 watt.

- b** Als de as twee keer zo hoog boven de grond wordt geplaatst, moet h worden vervangen door $2 \cdot h$.

$$P = 0,4 \cdot v^3 \cdot (2 \cdot h)^{0,75}$$

$$P = 0,4 \cdot v^3 \cdot (2)^{0,75} \cdot h^{0,75}$$

$$P \approx 1,682 \cdot 0,4 \cdot v^3 \cdot h^{0,75}$$

Als de as van de windmolen twee keer zo hoog boven de grond wordt geplaatst, neemt het vermogen met 68,2% toe.

- c** $h = 20$ invullen geeft

$$P = 0,4 \cdot v^3 \cdot 20^{0,75}$$

$$P = 0,4 \cdot 20^{0,75} \cdot v^3$$

$$P \approx 3,78 \cdot v^3$$

- d** $P = 5,031 \cdot v^3$

- e** P wordt $1,1^3 = 1,331$ keer zo groot.

Dat is een toename van 33,1%.

- f** v vervangen door $1,5 \cdot v$

$$P = 0,4 \cdot (1,5 \cdot v)^3 \cdot h^{0,75}$$

$$P = 0,4 \cdot 1,5^3 \cdot v^3 \cdot h^{0,75}$$

$$P = 1,5^3 \cdot 0,4 \cdot v^3 \cdot h^{0,75}$$

$$P = 3,375 \cdot 0,4 \cdot v^3 \cdot h^{0,75}$$

Een factor 3,375 komt overeen met 337,5%, dat is een toename van 237,5%.

9 Formules herleiden

- 025 a** Wanneer er geen haakjes gebruikt worden, wordt alleen 2 met -2 vermenigvuldigd.
- b** stap 2: haakjes weggewerkt
- c** $K = -3 + 10w$
- d** Hij heeft de formule $p = 2w - 5$ gesubstitueerd in $K = 3p^2 + p - 5$.
- e** $K = 3(4w^2 - 20w + 25) + 2w - 5 - 5$
 $K = 12w^2 - 60w + 75 + 2w - 10$
 $K = 12w^2 - 58w + 65$
- f** $b = 4(-3p) - 13$
 $b = -12p - 13$
- g** $b = -3(2p - 8)^2 + 9$
 $b = -3(4p^2 - 32p + 64) + 9$
 $b = -12p^2 + 96p - 192 + 9$
 $b = -12p^2 + 96p - 183$
- h** $b = 2 - 5(5p^2 - p)$
 $b = 2 - 25p^2 + 5p$

U5 a $A = 3 \cdot \left(\frac{5}{t}\right)^{0,4}$
 $A = 3 \cdot \frac{5^{0,4}}{t^{0,4}}$
 $A = \frac{3 \cdot 5^{0,4}}{t^{0,4}}$
 $A \cdot t^{0,4} = 3 \cdot 5^{0,4}$
 $t^{0,4} = 3 \cdot 5^{0,4} \cdot A^{-1}$
 $t = (3 \cdot 5^{0,4} \cdot A^{-1})^{\frac{1}{0,4}}$
 $t = (3 \cdot 5^{0,4})^{\frac{1}{0,4}} \cdot (A^{-1})^{\frac{1}{0,4}}$
 $t \approx 77,9 \cdot A^{-2,5}$

- b** Eerst in $3x - 4y = 1$ x uitdrukken y :

$$3x = 4y + 1$$

$$x = 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$$

Nu eerst herschrijven $y = \frac{6}{3x - 6}$

$$\frac{6}{y} = 3x - 6 \text{ geeft } \frac{2}{y} = x - 2$$

en dan $x = 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ substitueren in $\frac{2}{y} = x - 2$:

$$\frac{2}{y} = 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{3} - 2$$

$$\frac{2}{y} = 1\frac{1}{3}y - 1\frac{2}{3}$$

$$y\left(1\frac{1}{3}y - 1\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$1\frac{1}{3}y^2 - 1\frac{2}{3}y = 2$$

$$4y^2 - 5y = 6 \text{ en dus } 4y^2 - 5y - 6 = 0$$

- c** $y = 4 - 2(ax + b) + (ax + b)^2$

$$y = 4 - 2ax - 2b + a^2x^2 + 2abx + b^2$$

$$y = a^2x^2 + (2ab - 2a)x + b^2 - 2b + 4$$

Er moet dus gelden dat $a^2 = 9$, dus $a = 3$ of $a = -3$

$2ab - 2a$ moet gelijk zijn aan 18

$a = 3$ invullen geeft:

$$2 \cdot 3 \cdot b - 2 \cdot 3 = 18$$

$$6b - 6 = 18$$

$$6b = 24 \text{ dus } b = 4$$

$b^2 - 2b + 4$ moet gelijk zijn aan 12 en dit klopt voor $b = 4$.

$a = -3$ invullen geeft:

$$2 \cdot -3 \cdot b - 2 \cdot -3 = 18$$

$$-6b + 6 = 18$$

$$-6b = 12$$

$$b = -2$$

$b^2 - 2b + 4$ moet gelijk zijn aan 12 en dit klopt voor $b = -2$.

Dus $a = 3$ en $b = 4$ of $a = -3$ en $b = -2$.

9.6 Gemengde opdrachten

30 a $Q = -3 - 9\left(\frac{1}{2}p - 1\right)$

$$Q = -3 - 4\frac{1}{2}p + 9$$

$$Q = -4\frac{1}{2}p + 6$$

b $Q = (5 - p)^2 - 3(5 - p)$

$$Q = 25 - 10p + p^2 - 15 + 3p$$

$$Q = p^2 - 7p + 10$$

31 a $2a + 3b = 12$

$$2a = 12 - 3b$$

$$a = 6 - 1\frac{1}{2}b$$

d $b = 3 \cdot a^{\frac{1}{2}}$

$$3 \cdot a^{\frac{1}{2}} = b$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot b$$

$$a = \left(\frac{1}{3} \cdot b\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} \cdot (b)^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$a \approx 0,48 \cdot b^{0,67}$$

b $b = -\frac{1}{2}a - 7$

$$-\frac{1}{2}a - 7 = b$$

$$-\frac{1}{2}a = b + 7$$

$$a = -2b - 14$$

e $b = 2\sqrt{3a + 2} - 10$

$$2\sqrt{3a + 2} - 10 = b$$

$$2\sqrt{3a + 2} = b + 10$$

$$4(3a + 2) = (b + 10)^2$$

$$12a + 8 = b^2 + 20b + 100$$

$$12a = b^2 + 20b + 92$$

$$a = \frac{1}{12}b^2 + 1\frac{2}{3}b + 7\frac{2}{3}$$

f $\frac{12}{a+5} = \frac{5}{b+6}$

$$5(a+5) = 12(b+6)$$

$$5a + 25 = 12b + 72$$

$$5a = 12b + 47$$

$$a = 2\frac{2}{5}b + 9\frac{2}{5}$$

c $8 + \frac{6}{b} = 7a - 6$

$$7a - 6 = 8 + \frac{6}{b}$$

$$7a = 14 + \frac{6}{b}$$

$$a = 2 + \frac{6}{7b}$$

9 Formules herleiden

- 32 a** Sylvia woont $\frac{1}{2} \times 20 = 10$ km van school. Op de heenweg is Sylvia's snelheid $20 + 5 = 25$ km/uur en op de terugweg $20 - 5 = 15$ km/uur.
 De heenweg duurt dan $10 : 25 = 0,4$ uur = 24 minuten.
 De terugweg duurt $10 : 15 = \frac{2}{3}$ uur = 40 minuten.
 Haar totale reistijd die dag is dan $40 + 24 = 64$ minuten.
 Haar totale reistijd is die dag dus 4 minuten langer dan 1 uur.

$$\begin{aligned} \text{b } T &= \frac{10}{20 + w} + \frac{10}{20 - w} \\ T &= \frac{10}{20 + w} \cdot \frac{20 - w}{20 - w} + \frac{10}{20 - w} \cdot \frac{20 + w}{20 + w} \\ T &= \frac{10(20 - w) + 10(20 + w)}{(20 + w)(20 - w)} \\ T &= \frac{200 - 10w + 200 + 10w}{400 - w^2} \\ T &= \frac{400}{400 - w^2} \end{aligned}$$

- c** 1 uur en 20 minuten komt overeen met $1\frac{1}{3}$ uur.

$$\begin{aligned} \frac{400}{400 - w^2} &= 1\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3}(400 - w^2) &= 400 \\ 533\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3}w^2 &= 400 \\ -1\frac{1}{3}w^2 &= -133\frac{1}{3} \\ w^2 &= 100 \\ w &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

- d** Op een dag met wind is w ongelijk aan 0. De noemer van $\frac{400}{400 - w^2}$ is dan dus kleiner dan 400. Wanneer 400 gedeeld wordt door een getal kleiner dan 400, is de uitkomst groter dan 1. De reis duurt dan dus langer dan 1 uur.
 De reistijd zonder wind is precies 1 uur en dus is de totale reistijd op een dag met wind groter dan op een dag zonder wind.

$$\begin{aligned} \text{e } T &= \frac{400}{400 - w^2} \\ T \cdot (400 - w^2) &= 400 \\ 400 - w^2 &= \frac{400}{T} \\ -w^2 &= \frac{400}{T} - 400 \\ w^2 &= 400 - \frac{400}{T} \\ w &= \sqrt{400 - \frac{400}{T}} \\ w &= \sqrt{400 \left(1 - \frac{1}{T}\right)} \\ w &= \sqrt{400} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{T}} \\ w &= 20 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

Onderzoeksoopdrachten

- 33** Bij $L = 30$ hoort $W = 0,12$ en bij $L = 70$ hoort $W = 1,51$.
 Beide punten invullen in de formule geeft:
 $0,12 = a \cdot 30^b$ en $1,51 = a \cdot 70^b$
 Uit $0,12 = a \cdot 30^b$ volgt $a = \frac{0,12}{30^b}$ en uit $1,51 = a \cdot 70^b$ volgt $a = \frac{1,51}{70^b}$.
 Beide formules gelijkstellen geeft:
 $\frac{0,12}{30^b} = \frac{1,51}{70^b}$
 Invoer: $y_1 = \frac{0,12}{30^x}$ en $y_2 = \frac{1,51}{70^x}$
 Venster: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 0,00001$
 Optie: snijpunten
 De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(2,989; 4,618 \times 10^{-6})$.
 Dus $b \approx 2,989$ en $a = \frac{0,12}{30^{2,989}} \approx 4,62 \times 10^{-6}$.
- 34** Voor de zomereik geldt de formule $h = 39,143(1 - 0,9867^t)^{0,96667}$ en voor de Amerikaanse eik de formule $h = 29,026(1 - 0,9790^t)^{0,80820}$.
 Invoer: $y_1 = 39,143(1 - 0,9867^x)^{0,96667}$ en $y_2 = 29,026(1 - 0,9790^x)^{0,80820}$
 Venster: $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 30$
 Optie: snijpunten
 De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(0, 0)$ en $(62,584; 22,633)$.
 Na 62,6 jaren is het volgens de formule voor het eerst het geval dat de zomereik groter is dan de Amerikaanse eik.

Samenvatting

- S1 a** $8k + 5b = -17$
 $8k = -5b - 17$
 $k = -\frac{5}{8}b - 2\frac{1}{8}$
- b** $7b - 2k = 0$
 $-2k = -7b$
 $k = 3\frac{1}{2}b$
- c** $6(k + 1) - 2b = -2(3 - \frac{1}{2}k)$
 $6k + 6 - 2b = -6 + k$
 $5k + 6 - 2b = -6$
 $5k + 6 = 2b - 6$
 $5k = 2b - 12$
 $k = \frac{2}{5}b - 2\frac{2}{5}$
- S2 a** $\frac{3}{q} = \frac{1}{p + 5}$
 $3(p + 5) = q$
 $3p + 15 = q$
 $3p = q - 15$
 $p = \frac{1}{3}q - 5$
- b** $\frac{3}{p} = 2q + 5$
 $3 = p(2q + 5)$
 $p = \frac{3}{2q + 5}$

9 Formules herleiden

$$\text{c } 4q = \frac{p-15}{\frac{1}{2}} + 3q$$

$$q = \frac{p-15}{\frac{1}{2}}$$

$$p-15 = \frac{1}{2}q$$

$$p = \frac{1}{2}q + 15$$

$$\text{S3 a } q = \sqrt{p+1}$$

$$\sqrt{p+1} = q$$

$$p+1 = q^2$$

$$p = q^2 - 1$$

$$\text{b } q = 0,1 \cdot \sqrt{2p+1}$$

$$0,1 \cdot \sqrt{2p+1} = q$$

$$0,01(2p+1) = q^2$$

$$0,02p + 0,01 = q^2$$

$$0,02p = q^2 - 0,01$$

$$p = 50q^2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{c } q = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{p+5} - 2$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{p+5} - 2 = q$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{p+5} = q+2$$

$$\frac{1}{9}(p+5) = (q+2)^2$$

$$p+5 = 9(q+2)^2$$

$$p+5 = 9(q^2 + 4q + 4)$$

$$p+5 = 9q^2 + 36q + 36$$

$$p = 9q^2 + 36q + 31$$

$$\text{d } q+2 = \sqrt{5p-6}$$

$$\sqrt{5p-6} = q+2$$

$$5p-6 = (q+2)^2$$

$$5p-6 = q^2 + 4q + 4$$

$$5p = q^2 + 4q + 10$$

$$p = \frac{1}{5}q^2 + \frac{4}{5}q + 2$$

$$\text{S4 a } 0,5K = 2,5a^5$$

$$2,5a^5 = 0,5K$$

$$a^5 = 0,2K$$

$$a = (0,2K)^{\frac{1}{5}}$$

$$a = (0,2)^{\frac{1}{5}} \cdot K^{\frac{1}{5}}$$

$$a \approx 0,72 \cdot K^{0,2}$$

$$\text{b } 2a \cdot \sqrt{a} = a^3 \cdot \frac{2}{5}K$$

$$2a \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^3 \cdot \frac{2}{5}K$$

$$2a^{1\frac{1}{2}} = a^3 \cdot \frac{2}{5}K$$

$$\frac{2a^{1\frac{1}{2}}}{a^3} = \frac{2}{5} \cdot K$$

$$a^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \cdot K$$

$$a = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1\frac{1}{2}} \cdot (K)^{-1\frac{1}{2}}$$

$$a \approx 2,92 \cdot K^{-0,67}$$

$$\text{S5 a } S = (a+1)^2 - (a+1)$$

$$S = a^2 + 2a + 1 - a - 1$$

$$S = a^2 + a$$

$$\text{b } S = \frac{2(5-2a)}{5-2a-7}$$

$$S = \frac{10-4a}{-2-2a}$$

$$S = \frac{5-2a}{-1-a}$$

$$\text{c } S = \sqrt{1-a^2} + 4$$

$$S = \sqrt{5-a^2}$$

Test jezelf

$$\begin{aligned} \text{T1 a } \frac{4}{2+pq} &= 3 \\ 4 &= 3(2+pq) \\ 4 &= 6+3pq \\ 6+3pq &= 4 \\ 3pq &= -2 \\ p &= -\frac{2}{3q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 4 + \frac{3}{p} &= q + 5 \\ \frac{3}{p} &= q + 1 \\ p(q+1) &= 3 \\ p &= \frac{3}{q+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T2 a } K &= 7a^3 \\ 7a^3 &= K \\ a^3 &= \frac{1}{7} \cdot K \\ a &= \left(\frac{1}{7} \cdot K\right)^{\frac{1}{3}} \\ a &= \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (K)^{\frac{1}{3}} \\ a &\approx 0,52 \cdot K^{0,33} \\ \text{b } \frac{3a}{2K} &= 6K^{6,2} \\ 3a &= 6K^{6,2} \cdot 2K \\ 3a &= 12 \cdot K^{7,2} \\ a &= 4 \cdot K^{7,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T3 a } T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{9,8}} \\ T &= 2\pi \cdot \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{9,8}} \\ T &= 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{9,8}} \cdot \frac{\sqrt{l}}{1} \\ T &\approx 2,01 \cdot \sqrt{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } q + 8 - \frac{1}{p+6} &= 0 \\ q + 8 &= \frac{1}{p+6} \\ (q+8)(p+6) &= 1 \\ p + 6 &= \frac{1}{q+8} \\ p &= \frac{1}{q+8} - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 2(q+1) &= 4p - 5 \\ 2q + 2 &= 4p - 5 \\ 4p - 5 &= 2q + 2 \\ 4p &= 2q + 7 \\ p &= \frac{1}{2}q + 1\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } K &= 3a^{-0,2} \\ 3a^{-0,2} &= K \\ a^{-0,2} &= \frac{1}{3} \cdot K \\ a &= \left(\frac{1}{3} \cdot K\right)^{\frac{1}{-0,2}} \\ a &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{0,2}} \cdot (K)^{-\frac{1}{0,2}} \\ a &= 243 \cdot K^{-5} \\ \text{d } K &= \frac{7\sqrt[3]{a}}{2a} \\ K &= \frac{7 \cdot a^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot a} \\ K &= 3\frac{1}{2} \cdot a^{-\frac{2}{3}} \\ 3\frac{1}{2} \cdot a^{-\frac{2}{3}} &= K \\ a^{-\frac{2}{3}} &= \frac{2}{7} \cdot K \\ a &= \left(\frac{2}{7} \cdot K\right)^{-\frac{3}{2}} \\ a &= \left(\frac{2}{7}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (K)^{-\frac{3}{2}} \\ a &\approx 6,55 \cdot K^{-1,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } T &= 2,01 \cdot \sqrt{l} \\ 2,01 \cdot \sqrt{l} &= T \\ \sqrt{l} &= \frac{1}{2,01} \cdot T \\ \sqrt{l} &\approx 0,50 \cdot T \\ l &\approx (0,50 \cdot T)^2 \\ l &\approx 0,50^2 \cdot T^2 \\ l &\approx 0,25 \cdot T^2 \end{aligned}$$

9 Formules herleiden

- c Als T verdubbelt, wordt het $2T$.

$$l = 0,25 \cdot (2T)^2$$

$$l = 0,25 \cdot 2^2 \cdot T^2$$

$$l = 4 \cdot 0,25 \cdot T^2$$

Om de slinger tijd te verdubbelen, moet je de slinger vier keer zo lang maken.

T4 a $15 - 6,5h = -20$

$$-6,5h = -35$$

$$h \approx 5,4$$

Op 5,4 km hoogte is de temperatuur gelijk aan -20°C .

b $T = 15 - 6,5h$

$$15 - 6,5h = T$$

$$-6,5h = T - 15$$

$$h = \frac{1}{-6,5} \cdot T - \frac{15}{-6,5}$$

$$h = -\frac{2}{13} \cdot T + 2\frac{4}{13}$$

c $F = 1,8(15 - 6,5h) + 32$

$$F = 27 - 11,7h + 32$$

$$F = 59 - 11,7h$$

T5 a Bij $d = 1$ hoort $v = 670$.

$$670 = c \cdot 1^a$$

$$670 = c$$

$$c = 670$$

b Bij $d = 800$ hoort $v = 135$.

$$135 = 670 \cdot 800^a$$

Invoer: $y_1 = 135$ en $y_2 = 670 \times 800^x$

Venster: $-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 200$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(-0,240; 135)$.

Dus $a \approx -0,240$.

c $v = 670 \cdot d^{-0,240}$

d De formule is de herleiden tot $v = \frac{670}{d^{0,240}}$.

Als d toeneemt, neemt de noemer toe waardoor 670 gedeeld wordt door een groter getal. De uitkomst wordt dan kleiner en dus neemt de vruchtbaarheid af als de dichtheid toeneemt.

e $v = 670 \cdot d^{-0,240}$

$$670 \cdot d^{-0,240} = v$$

$$d^{-0,240} = \frac{1}{670} \cdot v$$

$$d = \left(\frac{1}{670} \cdot v\right)^{\frac{1}{-0,240}}$$

$$d = \left(\frac{1}{670}\right)^{-\frac{1}{0,240}} \cdot (v)^{-\frac{1}{0,240}}$$

$$d \approx 5,96 \times 10^{11} \cdot v^{-4,167}$$

f Als v halveert, wordt het $\frac{1}{2}v$.

$$d = 5,96 \times 10^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}v\right)^{-4,167}$$

$$d = 5,96 \times 10^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4,167} \cdot (v)^{-4,167}$$

$$d \approx 18 \cdot 5,96 \times 10^{11} \cdot v^{-4,167}$$

Als v halveert, wordt d ongeveer 18 keer zo groot.

$$\text{T6 a } d = \frac{3263}{14,5} = 225\frac{1}{29}$$

$$N = \frac{0,6 \cdot 225\frac{1}{29}}{0,15 + 0,0027 \cdot 225\frac{1}{29}} \approx 178$$

In 2012 was de opheffingnorm in Rijswijk gelijk aan 178.

- b** Voor de leerlingendichtheid geldt de formule $d = \frac{a}{180}$.

$$N = \frac{0,6 \cdot \frac{a}{180}}{0,15 + 0,0027 \cdot \frac{a}{180}}$$

$$N = \frac{0,6 \cdot \frac{a}{180}}{0,15 + 0,0027 \cdot \frac{a}{180}} \cdot \frac{180}{180}$$

$$N = \frac{0,6 \cdot \frac{a}{180} \cdot 180}{0,15 \cdot 180 + 0,0027 \cdot \frac{a}{180} \cdot 180}$$

$$N = \frac{0,6 \cdot a}{27 + 0,0027 \cdot a}$$

- c** Voor de leerlingendichtheid geldt de formule $d = \frac{a}{P}$.

$$N = \frac{0,6 \cdot \frac{a}{P}}{0,15 + 0,0027 \cdot \frac{a}{P}}$$

$$N = \frac{0,6 \cdot \frac{a}{P}}{0,15 + 0,0027 \cdot \frac{a}{P}} \cdot \frac{P}{P}$$

$$N = \frac{0,6 \cdot \frac{a}{P} \cdot P}{0,15 \cdot P + 0,0027 \cdot \frac{a}{P} \cdot P}$$

$$N = \frac{0,6a}{0,15P + 0,0027a}$$

Extra oefening

E1 a $8k - 3n = 7$

$$-3n = 7 - 8k$$

$$n = -2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}k$$

b $5n + 2k = 0$

$$5n = -2k$$

$$n = -\frac{2}{5}k$$

c $15k = 5n + 50$

$$5n + 50 = 15k$$

$$5n = 15k - 50$$

$$n = 3k - 10$$

d $6k - 6 = 4n + 3$

$$4n + 3 = 6k - 6$$

$$4n = 6k - 9$$

$$n = 1\frac{1}{2}k - 2\frac{1}{4}$$

e $10n - 4k = 6(k + 2)$

$$10n - 4k = 6k + 12$$

$$10n = 10k + 12$$

$$n = k + 1\frac{1}{5}$$

f $5(n + 1) = -11k + 20$

$$5n + 5 = -11k + 20$$

$$5n = -11k + 15$$

$$n = -2\frac{1}{5}k + 3$$

9 Formules herleiden

$$\text{E2 a } q + 2 = \frac{12}{p}$$

$$p \cdot (q + 2) = 12$$

$$p = \frac{12}{q + 2}$$

$$\text{b } \frac{q - 1}{p} = -2$$

$$q - 1 = -2 \cdot p$$

$$-2 \cdot p = q - 1$$

$$p = -\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$$

$$\text{E3 a } q = \sqrt{p + 1}$$

$$\sqrt{p + 1} = q$$

$$p + 1 = q^2$$

$$p = q^2 - 1$$

$$\text{b } q = 0,1\sqrt{2p + 1}$$

$$0,1\sqrt{2p + 1} = q$$

$$0,01(2p + 1) = q^2$$

$$0,02p + 0,01 = q^2$$

$$0,02p = q^2 - 0,01$$

$$p = 50q^2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{E4 a } K = 4p^5$$

$$4p^5 = K$$

$$p^5 = \frac{1}{4} \cdot K$$

$$p = \left(\frac{1}{4} \cdot K\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$p = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot (K)^{\frac{1}{5}}$$

$$p \approx 0,76 \cdot K^{0,2}$$

$$\text{b } K = 0,5p^{-2,5}$$

$$0,5p^{-2,5} = K$$

$$p^{-2,5} = 2 \cdot K$$

$$p = (2 \cdot K)^{-\frac{1}{2,5}}$$

$$p = (2)^{-\frac{1}{2,5}} \cdot (K)^{-\frac{1}{2,5}}$$

$$p \approx 0,76 \cdot K^{-0,4}$$

$$\text{c } \frac{3 + q}{p} = \frac{5}{q}$$

$$5p = q(3 + q)$$

$$5p = 3q + q^2$$

$$p = \frac{3}{5}q + \frac{1}{5}q^2$$

$$\text{c } q = 3 - 0,1\sqrt{p + 5}$$

$$3 - 0,1\sqrt{p + 5} = q$$

$$-0,1\sqrt{p + 5} = q - 3$$

$$0,01(p + 5) = (q - 3)^2$$

$$0,01p + 0,05 = q^2 - 6q + 9$$

$$0,01p = q^2 - 6q + 8,95$$

$$p = 100q^2 - 600q + 895$$

$$\text{d } q + 2 = \sqrt{5p - 6}$$

$$\sqrt{5p - 6} = q + 2$$

$$5p - 6 = (q + 2)^2$$

$$5p - 6 = q^2 + 4q + 4$$

$$5p = q^2 + 4q + 10$$

$$p = \frac{1}{5}q^2 + \frac{4}{5}q + 2$$

$$\text{c } 6p^{0,25} \cdot \sqrt{p} = p^2 \cdot \frac{1}{3} K$$

$$6p^{0,25} \cdot p^{\frac{1}{2}} = p^2 \cdot \frac{1}{3} K$$

$$6p^{0,75} = p^2 \cdot \frac{1}{3} K$$

$$\frac{6p^{0,75}}{p^2} = \frac{1}{3} K$$

$$6p^{-1,25} = \frac{1}{3} K$$

$$p^{-1,25} = \frac{1}{18} K$$

$$p = \left(\frac{1}{18} K\right)^{-\frac{1}{1,25}}$$

$$p = \left(\frac{1}{18}\right)^{-\frac{1}{1,25}} \cdot (K)^{-\frac{1}{1,25}}$$

$$p \approx 10,10 \cdot K^{-0,8}$$

$$\text{d } K = \frac{p^{-0,8} \cdot p^{1,8}}{2p^{0,2}}$$

$$K = \frac{p}{2p^{0,2}}$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot p^{0,8}$$

$$\frac{1}{2} \cdot p^{0,8} = K$$

$$p^{0,8} = 2 \cdot K$$

$$p = (2 \cdot K)^{\frac{1}{0,8}}$$

$$p = (2)^{\frac{1}{0,8}} \cdot (K)^{\frac{1}{0,8}}$$

$$p \approx 2,38 \cdot K^{1,25}$$

E5 a $u = 8 - 9(3p + 1)$

$$u = 8 - 27p - 9$$

$$u = -27p - 1$$

b Eerst in formule B q uitdrukken in p :

$$4p + 2q = 5$$

$$2q = 5 - 4p$$

$$q = 2\frac{1}{2} - 2p$$

Dan substitueren in formule A:

$$u = (2\frac{1}{2} - 2p)^2 + 2(2\frac{1}{2} - 2p)$$

$$u = 6\frac{1}{4} - 10p + 4p^2 + 5 - 4p$$

$$u = 4p^2 - 14p + 11\frac{1}{4}$$

c $u = 3(1 - \sqrt{p}) - (1 - \sqrt{p})^2$

$$u = 3 - 3\sqrt{p} - (1 - 2\sqrt{p} + p)$$

$$u = 3 - 3\sqrt{p} - 1 + 2\sqrt{p} - p$$

$$u = 2 - \sqrt{p} - p$$

E6 a $V = 0,26 \cdot D^2 \cdot h$

$$0,26 \cdot D^2 \cdot h = V$$

$$D^2 = \frac{V}{0,26 \cdot h}$$

$$D = \sqrt{\frac{V}{0,26 \cdot h}}$$

b Als de diameter gehalveerd wordt, wordt D gelijk aan $\frac{1}{2} D$.

$$V = 0,26 \cdot \left(\frac{1}{2} D\right)^2 \cdot h$$

$$V = 0,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot D^2 \cdot h$$

$$V = 0,26 \cdot \frac{1}{4} \cdot D^2 \cdot h$$

Glas A is dus vier keer zo hoog als glas B.

E7 a $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} + 9 \approx 5,0$

De straal van de koppelingsplaat is 5,0 cm.

b $6,23 = \sqrt{\frac{A}{\pi}} + 9$

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} + 9 = 6,23$$

$$\frac{A}{\pi} + 9 = 6,23^2$$

$$\frac{A}{\pi} + 9 = 38,8129$$

$$\frac{A}{\pi} = 29,8129$$

$$A = 29,8129 \cdot \pi$$

$$A \approx 93,7$$

De oppervlakte van de koppelingsplaat is 93,7 cm².

9 Formules herleiden

$$\text{c } r = \sqrt{\frac{A}{\pi} + 9}$$

$$\sqrt{\frac{A}{\pi} + 9} = r$$

$$\frac{A}{\pi} + 9 = r^2$$

$$\frac{A}{\pi} = r^2 - 9$$

$$A = \pi \cdot (r^2 - 9) = \pi r^2 - 9\pi$$

E8 a Voor deze persoon geldt dat $L = 160$ en $H = 1,5$.

$$1,5 = 0,006681 \cdot G^{0,425} \cdot 160^{0,725}$$

$$0,006681 \cdot G^{0,425} \cdot 160^{0,725} = 1,5$$

$$G^{0,425} = \frac{1,5}{0,006681 \cdot 160^{0,725}}$$

$$G = \left(\frac{1,5}{0,006681 \cdot 160^{0,725}} \right)^{\frac{1}{0,425}} \approx 59,2$$

Deze persoon weegt 59,2 kg.

$$\text{b } H = 0,006681 \cdot G^{0,425} \cdot 180^{0,725}$$

$$H = 0,006681 \cdot 180^{0,725} \cdot G^{0,425}$$

$$H \approx 0,29 \cdot G^{0,425}$$

Dus $c \approx 0,29$.

$$\text{c } 0,29 \cdot G^{0,425} = H$$

$$G^{0,425} = \frac{1}{0,29} \cdot H$$

$$G = \left(\frac{1}{0,29} \cdot H \right)^{\frac{1}{0,425}}$$

$$G = \left(\frac{1}{0,29} \right)^{\frac{1}{0,425}} \cdot (H)^{\frac{1}{0,425}}$$

$$G \approx 18,4 \cdot H^{2,35}$$

$$\text{d } 0,006681 \cdot G^{0,425} \cdot 150^{0,725} = 0,006681 \cdot 75^{0,425} \cdot 180^{0,725}$$

$$0,25 \cdot G^{0,425} = 1,81$$

$$G^{0,425} = \frac{1,81}{0,25}$$

$$G = \left(\frac{1,81}{0,25} \right)^{\frac{1}{0,425}} \approx 102,4$$

De man weegt 102,4 kg.

e Als het gewicht 20% afneemt, wordt G gelijk aan $0,8G$.

$$H = 0,006681 \cdot (0,8G)^{0,425} \cdot L^{0,725}$$

$$H = 0,006681 \cdot 0,8^{0,425} \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$$

$$H \approx 0,910 \cdot 0,006681 \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$$

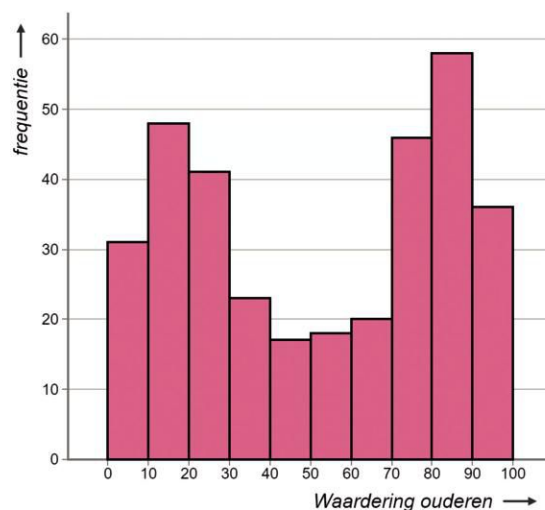
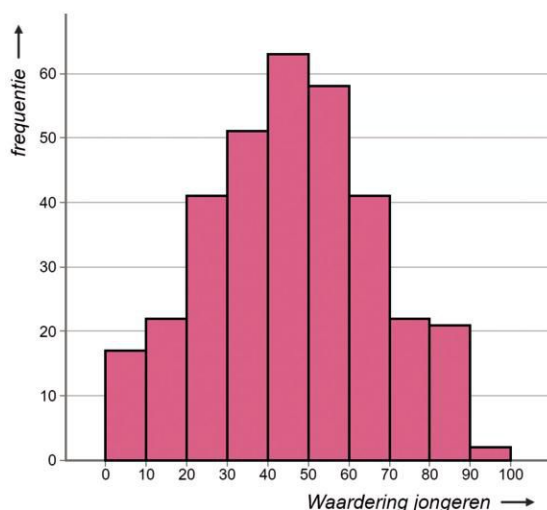
De huidoppervlakte is dan met 9,0% afgenomen.

10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

Voorkennis

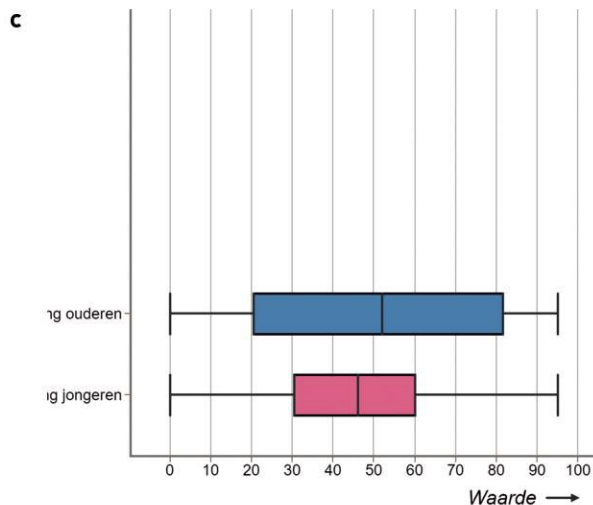
- V1 a** De variabele *dag van de maand* is geen hoeveelheid en dus geen kwantitatieve variabele.
- b** A: Sorteert de variabele *gem.temp* oplopend.
De laagste gemiddelde temperatuur werd op 16 januari gemeten.
- B: Sorteert de variabele *max* oplopend.
de laagste maximale temperatuur werd op 17 en 23 januari gemeten, dus niet op dezelfde dag als de dag waarop het gemiddelde minimaal was.
- C: Maak een nieuwe kolom, $\text{verschil} = \text{max} - \text{min}$.
Sorteer deze kolom aflopend, dit geeft 6 mei met een verschil van 18,50 graden.
- c** Er zijn 365 dagen, dus op 182 dagen moet de temperatuur lager zijn.
Sorteer *gem.temp* oplopend en kijk naar de data bij nr. 183.
11 mei was het 183e bestand met een gemiddelde van 10,2 graden.
- V2** Kwantitatieve variabelen zijn: *gem.temp*, *max*. en *min*.
Kwalitatieve variabelen zijn: *dag van het jaar*, *maand*, *dag van de maand*.
- V3 a** Maak bij de variabele *gem.temp* een tabel met kentallen.
Het gemiddelde van de gemiddelde dagtemperatuur is 9,85 °C.
- b** In de tabel met kentallen zie je dat de mediaan 10,15 °C is.
- c** In de tabel met kentallen zie je dat de modus 10,3 °C is.
- d** Maak een frequentietabel van de variabele *max*. Neem als begin waarde -5 en klassenbreedte 5.
Het aantal dagen met een temperatuur van 20 °C of meer is $55 + 20 + 7 = 82$.
- e** Maak een relatieve frequentietabel van de variabele *max*. Neem als begin waarde -5 en klassenbreedte 5.
In de tabel zie je dat op 1,9% van de dagen de temperatuur 30 °C of hoger was.
- V4 a** In de klasse 50-55 zitten de aantallen: 50, 51, 52, 53, 54 en 55.
- b** De klasse 150-155 is in de intervalnotatie $[149,5; 154,5]$.
- c** De intervalnotatie is $[6, 13]$.
- d** De klassenmiddens zijn 152 cm en 9,5 jaar.

V5 a



10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

- b Bij de jongeren zitten de meeste met een gemiddelde waardering. De ouderen vinden het goed of slecht. Dus bij de ouderen zijn de meningen het meest verdeeld.



Bij de ouderen is de waardering van de middelste 50% veel meer gespreid.

V6 a

Variabele	Waardering jongeren	Waardering ouderen
Aantal waarnemingen	338	338
Gemiddelde	45,50	51,05
Mediaan	46	52
Modus	58	93
Minimum	0	0
Maximum	95	95
Standaardafwijking	20,80	31,64
Eerste kwartiel	30,5	20,5
Derde kwartiel	60	81,5

Bij de jongeren is de kwartielfstand $60 - 30,5 = 29,5$.

Bij de ouderen is de kwartielfstand $81,5 - 20,5 = 61$.

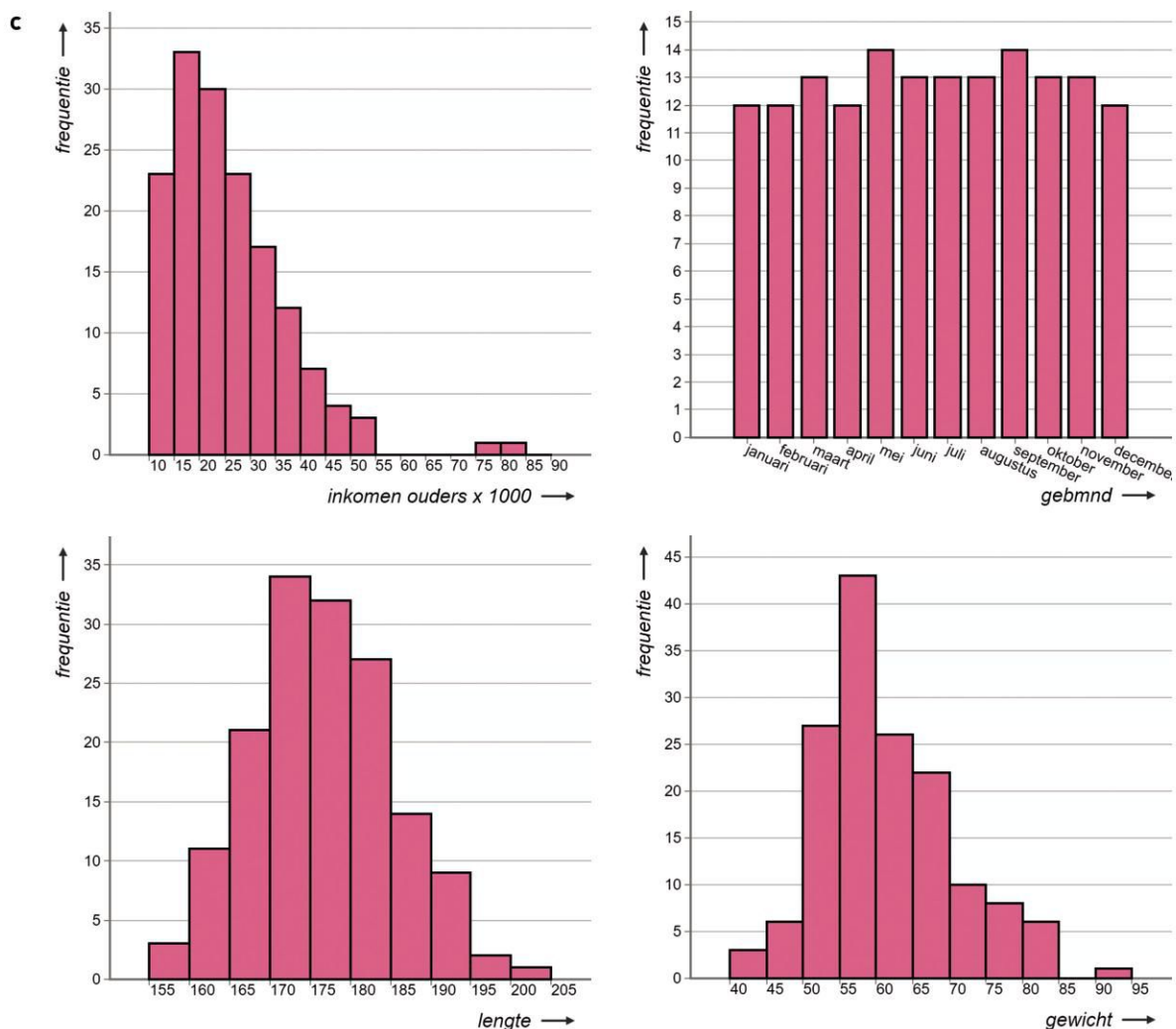
Dus bij de ouderen is deze het grootst.

- b Die is in beide groepen gelijk (95).
- c Bij de ouderen zijn er meer waarderingen die verder van het gemiddelde liggen. Dus daar is de standaardafwijking het grootst.
- d In de tabel met kentallen zie je dat de standaardafwijking van de jongeren 20,8 is.
De standaardafwijking van de ouderen is 31,6.

10.1 Frequentieverdelingen

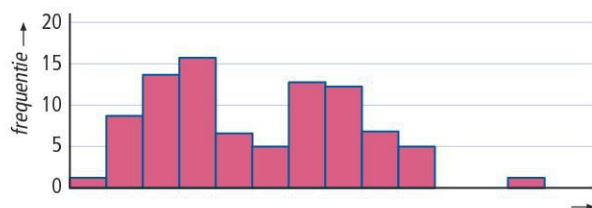
intro Je eigen mening

- 1 a De dataset bevat de variabele *leerlingnr.*, *geslacht*, *leeftijd*, *gebmaand*, *gewicht*, *lengte*, *huiswerk wisgroep*, *profiel*, *vergoeien*, *inkomen ouders*
- b Kwalitatief zijn: *leerlingnr.*, *geslacht*, *gebmaand*, *wisgroep*, *profiel*
Kwantitatief zijn: *leeftijd*, *gewicht*, *lengte*, *huiswerk*, *vergoeien*, *inkomen ouders*



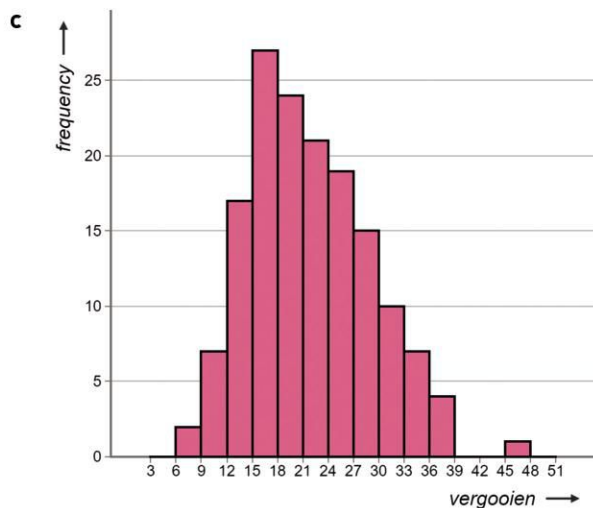
- d** De grafiek bij *geboortemaand* en *lengte*.
e Bij de variabelen *inkomen* en *gewicht*.

- 2 a** Klokvormig en uniform
b Klokvormig en uniform
c Zie tekening.



- 3 a** A: Scheef met staart naar rechts en een uitschieter
 B: Uniform
 C: Klokvorm
 D: Geen herkenbare vorm (klokvorm met uitschieter rechts.)
b De variabele *vergoeien* heeft waarschijnlijk een klokvormige verdeling.

10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)



Is niet echt klokvormig, er is een uitschieter.

- 4 a De fabrikant onderzoekt van 100 accu's de levensduur.
 b Het staafdiagram is tweetoppig met een uitschieter.
 c Staafdiagram B is min of meer klokvormig.
 d Type A
 e Maak een tabel met kentallen en splits op type.
 Spreidingsbreedte van type A is $15 - 8 = 7$ uur.
 De kwartielfstand van type A is $11 - 9 = 2$ uur
 Spreidingsbreedte van type B is $10 - 4 = 6$ uur.
 De kwartielfstand van type B is $8 - 6 = 2$ uur
 f Verwijder de uitschieter van type A uit het databestand.
 Spreidingsbreedte van type A wordt $12 - 8 = 4$ uur.
 De kwartielfstand van type A verandert niet.
- 5 a De verdeling is scheef met een staart naar rechts.
 b De modale klasse is de klasse $[20, 22)$.
 c In een tabel met kentallen zie je dat het gemiddelde €25.250,- en de mediaan is €24.000,-.
 d 257 huishoudens verdienen 25 000 euro of minder. Dit is dus $257 : 421 \times 100\% \approx 61\%$. Dus 39% verdient meer.
 e Er zijn maar een paar hoge inkomens. Deze beïnvloeden het gemiddelde.
 De modus zal zeker niet veranderen. Waarschijnlijk verandert de mediaan niet.
 f De mediaan wordt €23.500,-. Het gemiddelde wordt €24.920,-.
- 6 a Het staafdiagram is scheef naar links.
 b De klasse $[8; 8,5)$ is de modale klasse.
 c Er liggen meer waarnemingen links van de modale klasse.
 d Van de bevolking heeft $1 + 2 + 2 + 3 = 8\%$ minder slaap dan 6 uur.
- 05 a Het staafdiagram is scheef met een staart naar rechts.
 b De modale klasse is de klasse met de hoogste frequentie.
 De klasse $[15, 18)$ is de modale klasse
 c Maak een tabel met kentallen bij de dataset.
 Het gemiddelde is 22,33 meter.
 d Sorteer de leerlingen op de variabele vergooien, aflopend.
 Er zijn 66 leerlingen die verder hebben gegooid dan 22,33 meter.
 $66 : 154 \times 100\% \approx 42,9\%$
 42,9% van de leerlingen hebben verder gegooid dan het gemiddelde.

- U1 a** Een tweetoppige verdeling, de schoenen van de 6-jarigen zijn allemaal kleiner dan die van de 12-jarigen.
- b** Verdeling met een staart naar rechts (veel hoge cijfers, een paar lagere cijfers).
- c** Klokvormige verdeling, de kans op een 7 is het grootst, de kans op 2 en 12 is veel kleiner.

10.2 Continue en discrete variabelen

intro Omdat er maar 15 punten verdeeld kunnen worden, zijn er ook maar 15 verschillende cijfers mogelijk.
In een klas met 20 leerlingen moeten er dus leerlingen zijn met hetzelfde cijfer.

- 7 a** De minimum temperatuur was $14,5^{\circ}\text{C}$ en de maximum temperatuur was 27°C .
- b** Temperatuur loopt geleidelijk op en af.
- c** Er waren minimaal 3 kinderen en maximaal 16 kinderen.
- d** 3, 4, 5, 6, ..., 15, 16.
Alle gehele waarden vanaf 3 tot en met 16.
- 8 a** Discreet, het aantal goede antwoorden is telbaar.
- b** Continue, de broedperiode kan iedere duur aannemen binnen een interval.
- c** Continue, het gewicht kan iedere waarde aannemen binnen een interval.
- d** Continue, de dikke darm kan iedere lengte aannemen binnen een interval.
- e** Discreet, het aantal pitten is telbaar.
- 9 a** Bijvoorbeeld:
Gewicht van je schooltas.
Afstand tussen school en huis.
- b** Bijvoorbeeld:
Aantal leerlingen in de klas.
Aantal boeken in je tas.
- 10 a** Kwantitatief zijn de variabelen: *aantal jaarringen, houtopbrengst, diameter, lengte, aantal vertakkingen*.
- b** Continu zijn: *houtopbrengst, diameter, lengte*.
Discreet zijn: *aantal jaarringen, aantal vertakkingen*.
- 11 a** Het gewicht is continu, het aantal is discreet.
- b** Drie rode staven komen boven het aantal 200. Dus drie planten hadden een opbrengst van meer dan 200 spruitjes.
- c** De blauwe staaf moet naar verhouding langer zijn dan de rode staaf.
Plant 7 heeft dus gemiddeld de zwaarste spruitjes.
- d** Bij plant 8 is de rode staaf naar verhouding het langst. Plant 8 heeft dus gemiddeld de lichtste spruitjes.

aantal	gewicht in kg		
	1 - < 1,5	1,5 - < 2	2 - < 2,5
100-<150	0	1	0
150-<200	3	3	0
200-<250	0	2	1

10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

- f Drie van de tien planten, dus 30% heeft een opbrengst van minimaal 200 spruitjes en meer dan 1,5 kg.

- 12 a Het gewicht van de potloden is continu.
 b Het gemiddelde gewicht is 4,2 gram.
 c De mediaan is 4,2 gram.
 d De verdeling is klokvormig.
 e Frequentie rond 4,2 is veel groter dan de frequentie rond 3,4.

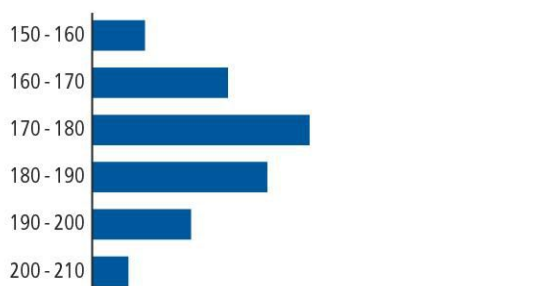
- 08 a 
 b Het aantal ogen is discreet.
 c Alle snelheden tussen 0 en 50 km per uur.

- d 
 e De snelheid is een continue variabele.
 f A: Discreet, het aantal winegums is telbaar.
 B: Continu, de duur van de winterslaap kan alle waarden op een interval aannemen.
 C: Continu, het gewicht kan alle waarden op een interval aannemen.
 D: Discreet, een cijfer voor een toets kan niet alle waarden aannemen.

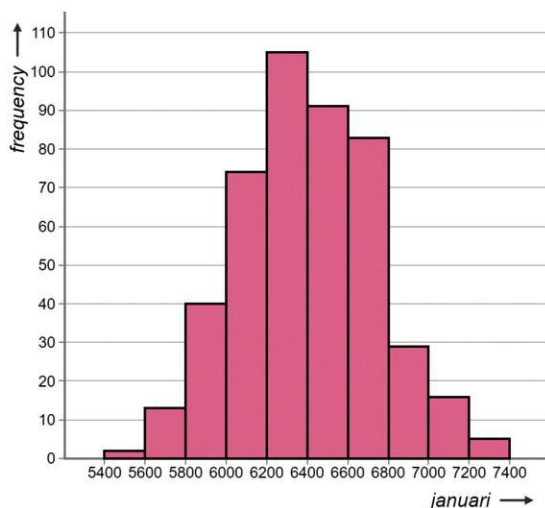
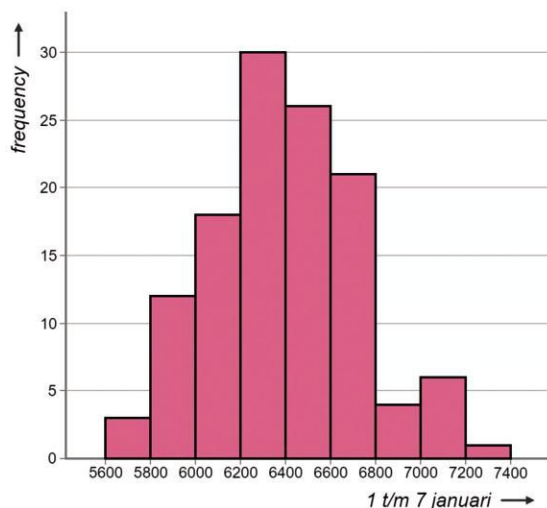
- U2 a De variabele kleur is in dit geval een kenmerk van de knikker.
 b Je kunt hier de kleur opvatten als een hoeveelheid rood, geel en blauw.
 c Als je kleur hier ziet als een mengverhouding van twee kleuren, dan kun je zeggen dat de variabele continu is.

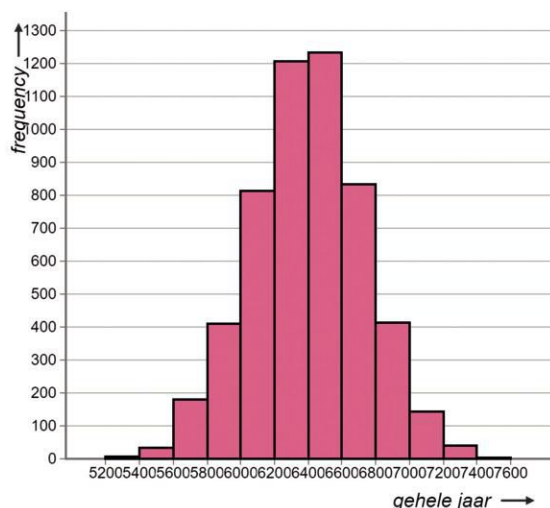
10.3 De normale verdeling

Intro



13 a





- b Die van een heel jaar.
 c Bij data van een week speelt toeval een te grote rol.
 d Het staafdiagram is ongeveer symmetrisch.

14 a Ja, het staafdiagram is ongeveer klokvormig.

b Maak een tabel met de kentallen.

Het gemiddelde is 42,0 cm.

De standaardafwijking is 2,0 cm.

c $\mu - \sigma = 42 - 2 = 40$ cm

$\mu + \sigma = 42 + 2 = 44$ cm

In een frequentie tabel kun je aflezen dat

$(3359 + 3404) : 10000 \times 100\% = 67,63\%$ een
 hoofdomtrek tussen 40 en 44 cm heeft.

d Tussen 38 en 46 cm zit

$(1344 + 6763 + 1428) : 10000 \times 100\% = 95,35\%$.

hoofdomtrek	Frequentie
34 -< 36	20
36 -< 38	190
38 -< 40	1344
40 -< 42	3359
42 -< 44	3404
44 -< 46	1428
46 -< 48	245
48 -< 50	10
Totaal	10000

15 De grafiek is klokvormig.

Maak een tabel met de kentallen.

Het gemiddelde is 60,0 cm en de standaardafwijking is 4,0 cm.

$\mu - \sigma = 60 - 4 = 56$ cm en $\mu + \sigma = 60 + 4 = 64$ cm

In een frequentie tabel kun je aflezen dat

$(3411 + 3421) : 10000 \times 100\% = 68,32\%$ is tussen 56 cm en 64 cm lang.

$\mu - 2\sigma = 60 - 8 = 52$ cm en $\mu + 2\sigma = 60 + 8 = 68$ cm

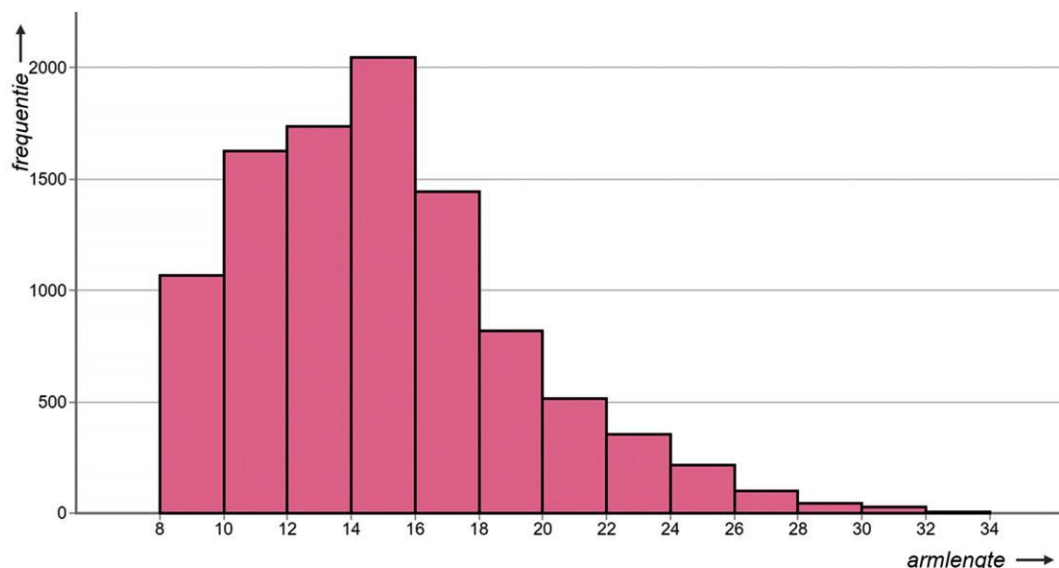
$(1351 + 3411 + 3421 + 1337) : 10000 \times 100\% = 95,2\%$ is tussen 52 cm en
 68 cm lang.

De lengte van de baby's is normaal verdeeld.

lengte	Frequentie
44 -< 48	5
48 -< 52	209
52 -< 56	1351
56 -< 60	3411
60 -< 64	3421
64 -< 68	1337
68 -< 72	254
72 -< 76	12
Totaal	10000

10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

16 a



b Het staafdiagram is niet klokvormig maar heeft een staart naar rechts.

17 a Bij grafiek 5 is het gemiddelde het grootst, de top van deze grafiek ligt het meest rechts.

Bij grafiek 1 is het gemiddelde het kleinst.

b De standaardafwijking bij grafiek 4 is het grootst, deze grafiek is het breedst.

Grafiek 1 heeft de kleinste standaardafwijking.

c Bij benadering:

Grafiek 1: $\mu \approx 32$ en $\sigma \approx 6$

Grafiek 4: $\mu \approx 42$ en $\sigma \approx 20$

Grafiek 2: $\mu \approx 33$ en $\sigma \approx 14$

Grafiek 5: $\mu \approx 68$ en $\sigma \approx 10$

Grafiek 3: $\mu \approx 42$ en $\sigma \approx 8$

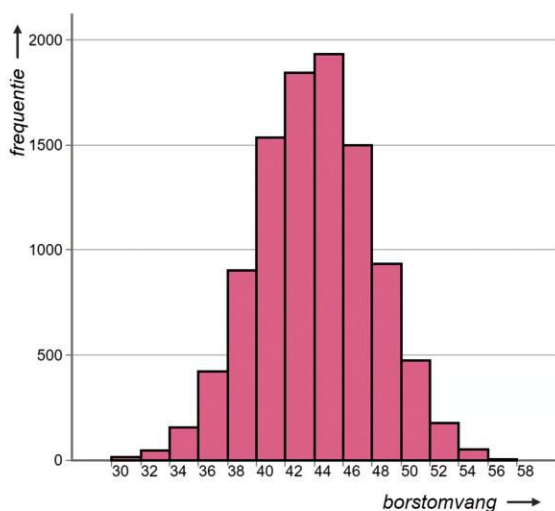
Grafiek 6: $\mu \approx 66$ en $\sigma \approx 16$

18 -

19 a De vorm van de grafiek blijft gelijk, maar schuift naar links.

b De grafiek wordt smaller en hoger, de top blijft boven dezelfde waarde liggen.

015 a



De verdeling is klokvormig.

- b** Maak een tabel met kentallen.

Het gemiddelde is 44, de standaardafwijking is 4.

- c** $\mu - \sigma = 44 - 4 = 40$ en $\mu + \sigma = 44 + 4 = 48$
d Zie tabel.
e $33,8\% + 34,3\% = 68,1\%$ heeft een borstomvang tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$.
f $\mu - 2\sigma = 44 - 8 = 36$ en $\mu + 2\sigma = 44 + 8 = 52$.
 $13,3\% + 33,8\% + 34,3\% + 14,1\% = 95,5\%$ heeft een borstomvang tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.
 Ja de borstomvang is normaal verdeeld. De verdeling voldoet aan de klokvorm en de vuistregels.

borstomvang	Frequentie	Relatief %
28 -< 32	13	0,1
32 -< 36	201	2,0
36 -< 40	1326	13,3
40 -< 44	3382	33,8
44 -< 48	3431	34,3
48 -< 52	1411	14,1
52 -< 56	229	2,3
56 -< 60	7	0,1
Totaal	10000	100

- U3 a** De intervalnotatie $[6,5; 7,5)$ hoort bij het afgerond gewicht van 7 kg.

- b** Maak een tabel met de kentallen.

Het gemiddelde is 8 kg en de standaardafwijking is 1,5 kg.

$\mu - \sigma = 8 - 1,5 = 6,5$ kg en $\mu + \sigma = 8 + 1,5 = 9,5$ kg

In een frequentietabel kun je aflezen dat

$20,0\% + 26,3\% + 21,6\% = 67,9\%$ is tussen 6,5 kg en 9,5 kg.

$\mu - 2\sigma = 8 - 3 = 5$ kg en $\mu + 2\sigma = 8 + 3 = 11$ kg

Bij het afgerond gewicht van 5 kg horen de biggen in het interval $[4,5; 5,5)$ kg.

Bij het afgerond gewicht van 11 kg horen de biggen in het interval $[10,5; 11,5)$ kg.

Van de biggen van 5 en 11 kg heeft ongeveer de helft een gewicht tussen 5 kg en 11 kg.

$0,5 \times 3,7\% + 11,0\% + 67,9\% + 11,8\% + 0,5 \times 3,8\% = 94,5\%$ heeft een gewicht tussen 5 kg en 11 kg.

Het gewicht van de biggen is normaal verdeeld.

gewicht	Frequentie	Relatief %
3	6	0,2
4	33	0,9
5	134	3,7
6	397	11,0
7	726	20,0
8	953	26,3
9	783	21,6
10	426	11,8
11	137	3,8
12	27	0,7
13	3	0,1
Totaal	3625	100

10.4 Werken met de normale verdeling

intro Het gemiddelde is gelijk aan de modus, de modus lees je af onder de top van de grafiek.

Het gemiddelde is 6,5.

Volgens de eerste vuistregel is 16% lager dan $\mu - \sigma$.

De standaardafwijking is dus $6,5 - 5,5 = 1$.

- 20 a** Omdat de lengte normaal verdeeld is.

Het gemiddelde is dus gelijk aan de modus.

- b** $\mu - \sigma = 181 - 8 = 173$ en $\mu + \sigma = 181 + 8 = 189$.

- c** 68% in tweeën verdelen geeft twee keer 34%.

- d** Tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt 95%.

Dus 2,5% is kleiner dan $\mu - 2\sigma = 165$ cm en

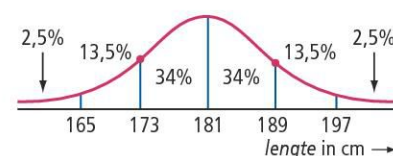
2,5% is langer dan $\mu + 2\sigma = 197$ cm.

$50\% - 34\% - 2,5\% = 13,5\%$ was tussen 165 cm en 173 cm lang.

En 13,5% was tussen 189 cm en 197 cm.

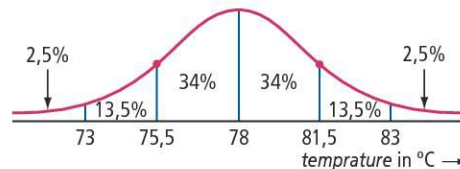
- e** Tussen 173 cm en 197 cm is $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$.

- f** $50\% - 34\% = 16\%$ was langer dan 189 cm.

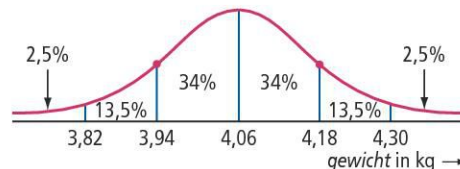


10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

- 21 a** $\mu - \sigma = 78 - 2,5 = 75,5$ en $\mu + \sigma = 78 + 2,5 = 80,5$
 $\mu - 2\sigma = 78 - 5 = 73$ en $\mu + 2\sigma = 78 + 5 = 83$
b Zie figuur, $13,5\% + 2,5\% = 16\%$ is warmer dan $80,5^\circ\text{C}$.
c $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$ heeft de ideale temperatuur.
 $81,5\%$ van 300 is $0,815 \times 300 = 244,5$.
 245 kopjes hebben de ideale temperatuur.

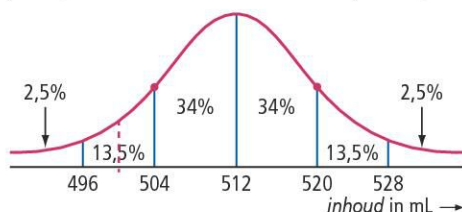


- 22 a** $\mu - \sigma = 4,06 - 0,12 = 3,94$ en $\mu + \sigma = 4,06 + 0,12 = 4,18$
 $\mu - 2\sigma = 4,06 - 0,24 = 3,82$ en $\mu + 2\sigma = 4,06 + 0,24 = 4,30$
b Het percentage pakken tussen 3,94 kg en 4,30 kg is
 $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$.
 Dus $0,815 \times 500 \approx 408$ pakken hebben een gewicht tussen 3,94 kg en 4,30 kg.
c $4,06 + 0,10 = 4,16$.
 Vanwege de symmetrie zal 20% van de pakken minder dan $4,06 - 0,10 = 3,96$ kg wegen.
d 4 kg ligt tussen 3,94 kg en 4,06 kg. In de buurt van 4,06 kg is de frequentie hoger dan bij 3,94 kg.
 Van de 34% tussen 3,94 en 4,06 kg zal minder dan de helft lichter zijn dan 4 kg.
 Ongeveer $2,5\% + 13,5\% + 14\% = 30\%$ zal minder wegen dan 4 kg.



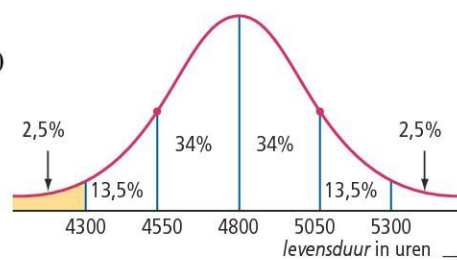
- 23 a** 16% is de linker grens van $\mu - \sigma$.
 $\mu - \sigma = 1400 - 150 = 1250$ uur.
b 2,5% is de linker grens van de tweede vuistregel, ofwel $\mu - 2\sigma$.
 Het gemiddelde is $3200 + 2 \times 75 = 3350$ branduren.
24 a Het gemiddelde is 5 kg. De standaardafwijking is $5 - 4,5 = 0,5$ kg.
b De 2,5% zwaarste baby's zijn zwaarder dan $\mu + 2\sigma$.
 Bart is dus minstens 8,75 kg zwaar.
c De afstand tussen $\mu + 2\sigma$ en $\mu - 2\sigma$ wordt steeds groter.
d Bij toename van de leeftijd wordt het verschil in gewicht tussen baby's van dezelfde leeftijd groter.

- 022 a** $\mu + \sigma = 512 + 8 = 520$ mL en $\mu + 2\sigma = 512 + 16 = 528$ mL.



- b** $34\% + 34\% = 68\%$ heeft een inhoud tussen 504 mL en 520 mL.
 Dit zijn $0,68 \times 1000 = 680$ flesjes.
c De frequentie rond 504 mL is groter dan de frequentie rond 496 mL.
d Ongeveer $2,5\% + 5\% = 7,5\%$ heeft een inhoud van minder dan 500 mL.
e $512 + 7 = 519$.
 Vanwege symmetrie zal dus 20% een inhoud hebben van minder dan $512 - 7 = 505$ mL.

- 023** a $\mu - \sigma = 4800 - 250 = 4550$ en $\mu + \sigma = 4800 + 250 = 5050$
 $\mu - 2\sigma = 4800 - 500 = 4300$ en $\mu + 2\sigma = 4800 + 500 = 5300$
 b Na 4800 is 50% defect.
 c In de grafiek zie je dat dit na 4300 uur is.
 d 2,5% is de linker grens van de tweede vuistregel, ofwel $\mu - 2\sigma$.
 Het gemiddelde is $4000 + 2 \times 175 = 4350$ uur.



- U4** a Bij een normale verdeling is de frequentie rond de mediaan het grootst. Bij deze verdeling is de mediaan gelijk aan 4. Bij deze verdeling is de frequentie tussen 1 en 2 (25%) groter dan de frequentie tussen 3 en 4 (minder dan 25%).
 b Bij een normale verdeling ligt 68% van de waarnemingen rond het gemiddelde. Bij de normale verdeling is de kwartielfstand het verschil tussen de grootste waarneming en kleinste waarneming van de middelste 50%.

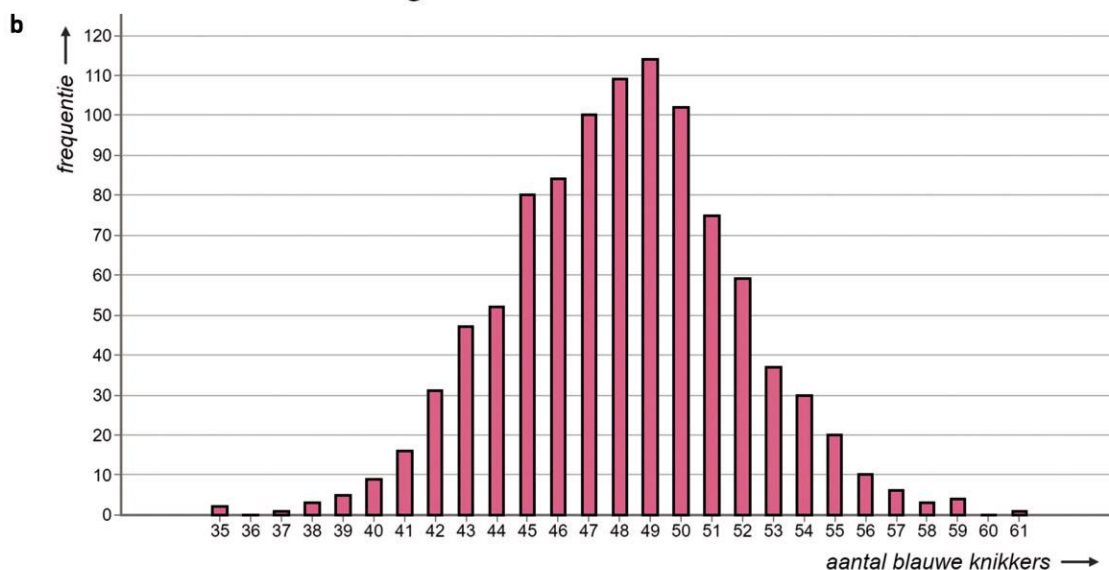
10.5 Steekproeven

intro Je mag dit niet concluderen. Je weet niet welke groep mensen reageert op een dergelijke advertentie.

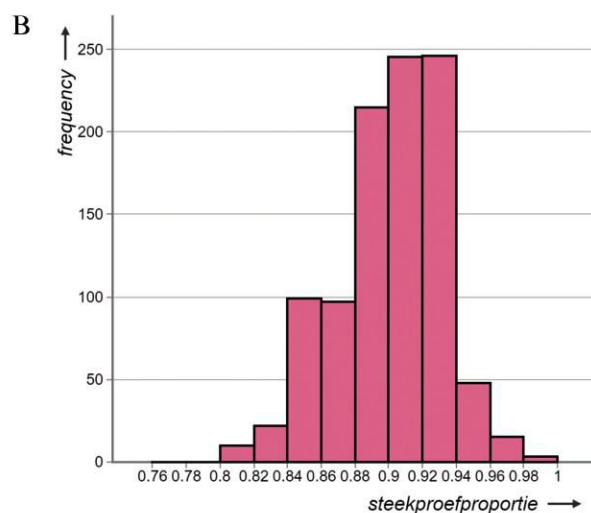
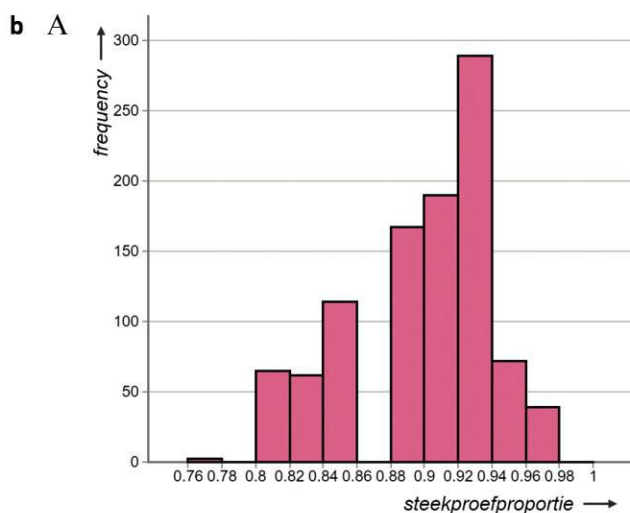
- 25** a Nee, daarvoor is het aantal ondervraagde leerlingen te gering.
 b Dat zou goed kunnen, als het een groepje leerlingen is die verder dan 8 km van school wonen.
 c Ja, theoretisch zou dat kunnen. Maar de kans dat alle 25 ondervraagden meer dan 8 km van school woont is wel klein, uitgaande dat de directie gelijk heeft.
- 26** De leden die niet aanwezig zijn, zijn mogelijk negatiever en niet geïnteresseerd. Daarom is het beter om aanwezige en afwezige leden te nemen voor de steekproef. Het idee van de secretaris daarom, beter.
- 27** a -
 b -
- 28** a De percentages zijn: 4%, 8%, 12%,100%.
 b -
 c Dat zal dan niet voorkomen.

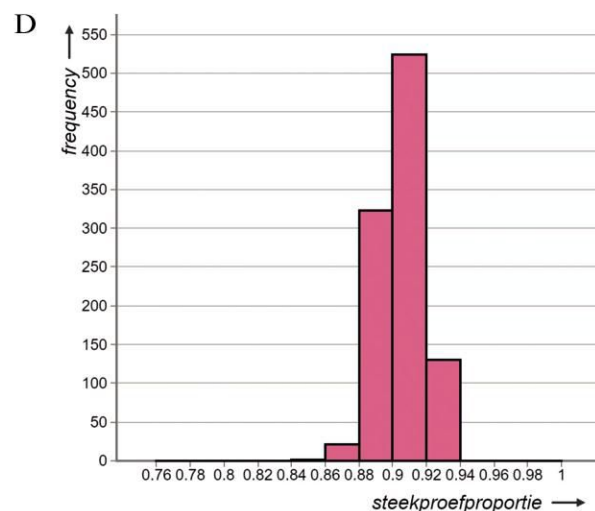
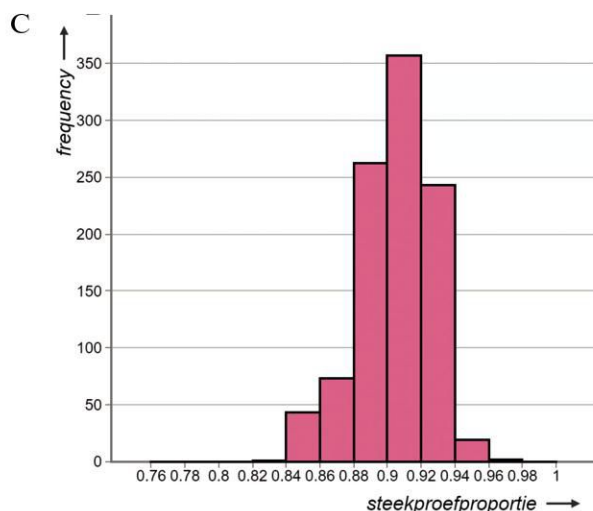
10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

- 29 a** Het percentage blauwe knikkers is $120 : 250 \times 100 = 48\%$.
Sanne zal dus naar verwachting 48 blauwe knikkers trekken.



- c** Het staafdiagram is redelijk klokvormig.
d In een tabel met de kentallen zie je dat het gemiddelde is 48,07 en de standaardafwijking is 3,74.
e $\mu - \sigma = 48,07 - 3,74 = 44,33$ en $\mu + \sigma = 48,07 + 3,74 = 51,81$.
 Sorteert de data oplopend.
 Je ziet dat 166 steekproeven minder dan 44,33 blauwe knikkers hebben en 830 steekproeven minder dan 51,81.
 Tussen $\mu + \sigma$ en $\mu - \sigma$ is $830 - 166 = 664$ steekproeven. Dit is 66,4%.
- 30 a** Steekproefomvang A: Voordeel is weinig werk dus kosten zijn laag Het nadeel is dat toeval hier wel een erg grote rol speelt bij het resultaat.
 Steekproefomvang D: Veel werk dus hoge kosten. Het resultaat is wel veel betrouwbaarder.



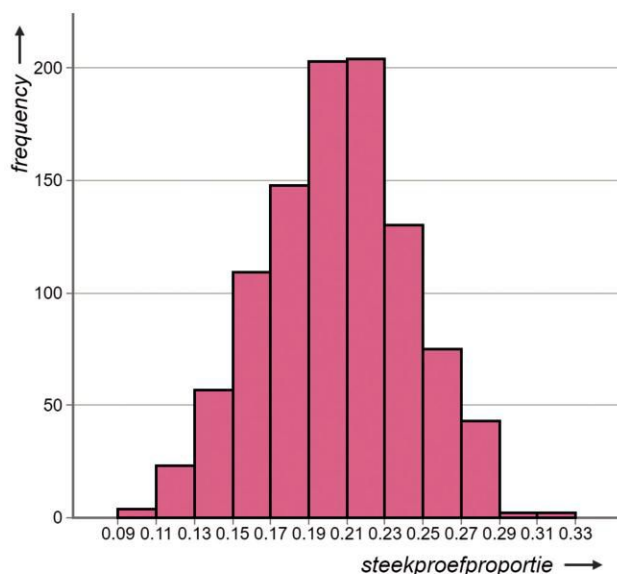


- c** Het staafdiagram wordt steeds smaller.
d De spreidingsbreedte wordt steeds kleiner. Het resultaat is dus betrouwbaarder.

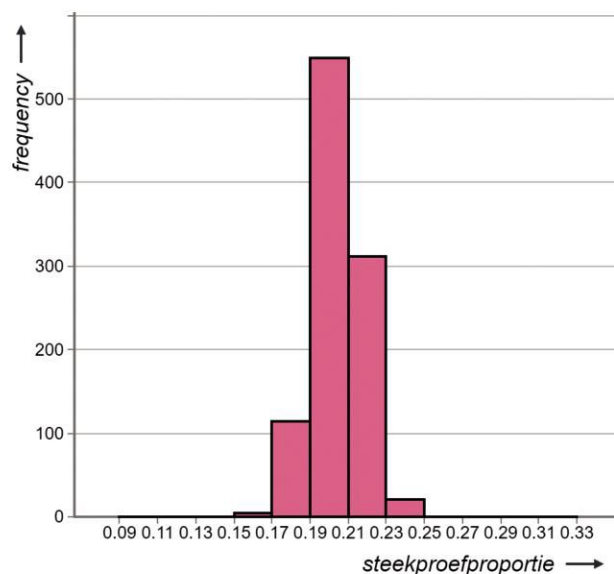
- 31 a** Die dag zijn er $0,81 \times 100 = 81$ blikjes met voldoende frisdrank.
 Er zijn dus 19 blikjes met onvoldoende frisdrank.
b Het gemiddelde is 0,9 en de standaardafwijking is 0,03.
c Het aantal blikjes die bij de middelste 68% horen is $0,68 \times 1095 \approx 745$.
 Er zijn $(1095 - 745) : 2 = 175$ blikjes die minder inhoud hebben en
 175 blikjes die meer inhoud hebben.
 Sorteert de steekproeven oplopend.
 De nummers 176 tot en met 920 zijn de middelste 68%.
 De percentages die daarbij horen zijn 0,87 tot en met 0,93.

- 030 a** $0,8 \times 200 = 160$ treinen rijden op tijd.
b Het gemiddelde is 83%.
c 83% van de treinen de treinen rijdt op tijd.
d 68% van de waarden ligt tussen $83\% - 3\% = 80\%$ en $83\% + 3\% = 86\%$.

- U5 a** Je verwacht 20% blauwe knikkers.
b $n = 100$



$n = 1000$



Het staafdiagram wordt steeds smaller.

10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

c	n	100	200	300	400	500	1000
	$\sigma(n)$	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01

- d Bij afronden op twee decimalen klopt de formule.
 e Hoe groter n is, des te kleiner wordt $\sigma(n)$. De schatting wordt dus nauwkeuriger.

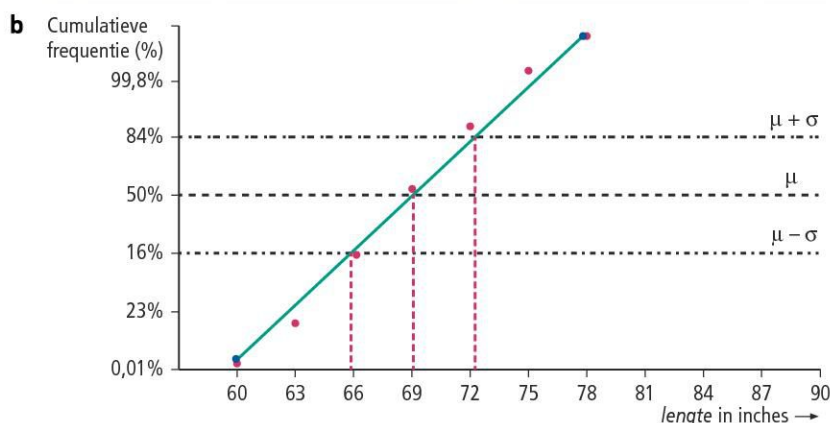
10.6 Gemengde opdrachten

- 32 a** Het is een tweetoppige verdeling.
b De eerste top zijn de leerlingen uit de eerste klas, de tweede top zijn de leerlingen uit de zesde klas.
c De staafdiagrammen zijn min of meer klokvormig.
d Het staafdiagram bij de leerlingen uit de zesde klas is smaller. Dus bij eerste klas is de standaardafwijking het grootst.
e Met een kentallentabel vind je de volgende waarden.
 Klas 1: het gemiddelde is 149,9 cm met een standaardafwijking van 9,9 cm.
 Klas 6: het gemiddelde is 175,2 cm met een standaardafwijking van 5,0 cm.
f $\mu - \sigma = 175,2 - 5 = 170,2$ en $\mu + \sigma = 175,2 + 5 = 180,2$
 Er zijn 226 leerlingen van klas 6 met een lengte kleiner dan 170,2 cm.
 Er zijn 203 leerlingen met een lengte groter dan 180,2 cm.
 $(1341 - 226 - 203) : 1341 \times 100\% \approx 68\%$.
 $\mu - 2\sigma = 175,2 - 10 = 165,2$ en $\mu + 2\sigma = 175,2 + 10 = 185,2$
 Er zijn 41 leerlingen van klas 6 met een lengte kleiner dan 165,2 cm.
 Er zijn 27 leerlingen met een lengte groter dan 185,2 cm.
 $(1341 - 41 - 27) : 1341 \times 100\% \approx 95\%$.
 Volgens de eerste en tweede vuistregel is de lengte normaal verdeeld
- 33 a** In het diagram zie je dat 40% van de meisjes minder dan 8 uur aan het huiswerk besteedt dus 60% besteedt meer dan 8 uur aan het huiswerk.
b 12 uur komt overeen met $\mu + \sigma$.
 $13,5\% + 2,5\% = 16\%$ besteedt meer dan 12 uur aan het huiswerk.
c 16% ligt links van $\mu - \sigma$. De standaardafwijking is dus $7,5 - 5 = 2,5$ uur.
d De klokvorm van de mannen is smaller en ligt links van die van de vrouwen.
 Dus figuur 1 past bij de resultaten van het onderzoek.
- 34 a** -
b In de tweede grafiek zie je bijvoorbeeld dat precies tussen 50% en 97,5% de waarde 84% ligt. Maar 84 ligt niet precies tussen 97,5 en 50 in. In de tweede figuur zijn de middens van lijnstukjes op de verticale as niet de werkelijke middens.
c Het gemiddelde is in beide grafieken 35.
 De standaardafwijking is in $35 - 31 = 4$.
d Beide grafieken behouden hun vorm en schuiven 4 naar rechts.
e De standaardafwijking wordt twee keer zo groot dus het verschil tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ wordt twee keer zo groot.
 De bovenste grafiek wordt in de breedte uitgerekt. De rechte lijn van de onderste grafiek blijft recht maar loopt minder steil.

35 a

lengte mannen in inches	Frequentie
57 -< 60	2
60 -< 63	13
63 -< 66	148
66 -< 69	414
69 -< 72	361
72 -< 75	109
75 -< 78	14
78 -< 81	3
Totaal	1064

lengte mannen in inches	Cumulatief %
< 60	0,2
< 63	1,4
< 66	15,3
< 69	54,2
< 72	88,2
< 75	98,4
< 78	99,7
< 81	100,0
Totaal	100



Het gemiddelde is 69 cm en de standaardafwijking is

$$(72,5 - 65,5) : 2 = 3,5$$

- c** Met kentallen: gemiddelde is 68,7 inches en de standaardafwijking is 2,8 cm.
Het gemiddelde klopt dus goed, de standaardafwijking is iets groter.'

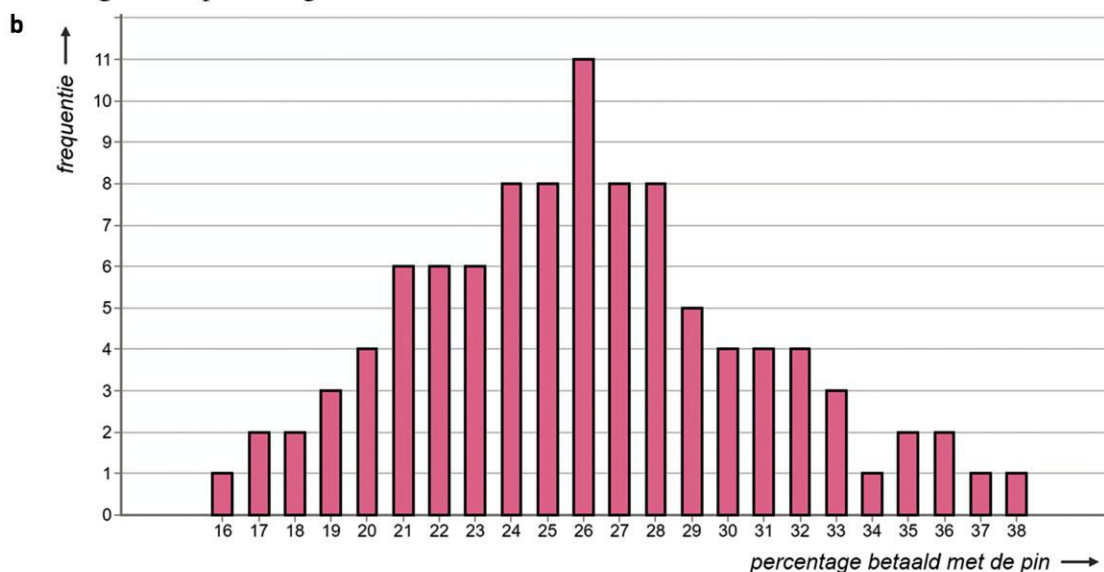
- 36** Bij een gemiddelde lengte van 800 mm is 16% te lang en wordt opmaat gemaakt en 16% is onbruikbaar.
De opbrengst is dus $0,68 \times 1000 \times €3,25 + 0,16 \times 1000 \times €1,75 - 0,16 \times 1000 \times €2,- = €2170,-$
Bij een gemiddelde lengte van 802 mm is 50% te lang en wordt opmaat gemaakt en 2,5% is onbruikbaar.
De opbrengst is dus $0,475 \times 1000 \times €3,25 + 0,50 \times 1000 \times €1,75 - 0,025 \times 1000 \times €2,- = €2368,75$.
De winstverwachting is dus 198,75 groter bij instellen op 802 mm.

Samenvatting

- S1 a** Het staafdiagram is klokvormig.
b Het staafdiagram is scheef naar rechts met uitschieters.
- S2** De variabelen *type* en *kleur* zijn discreet.
De variabelen *leeftijd* en *afstand* zijn continu.
- S3** De standaardafwijking is 3.
95% van de data ligt binnen $\mu - 2\sigma = 12 - 6 = 6$ en $\mu + 2\sigma = 12 + 6 = 18$.
- S4 a** Alleen leerlingen die op de fiets komen worden ondervraagd. Dus niet elke leerling heeft evenveel kans om in de steekproef te komen.
b De steekproefgrootte is 200.

10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

- S5 a** Sorteert de variabele percentage met pin aflopend.
Het grootste percentage is 38.

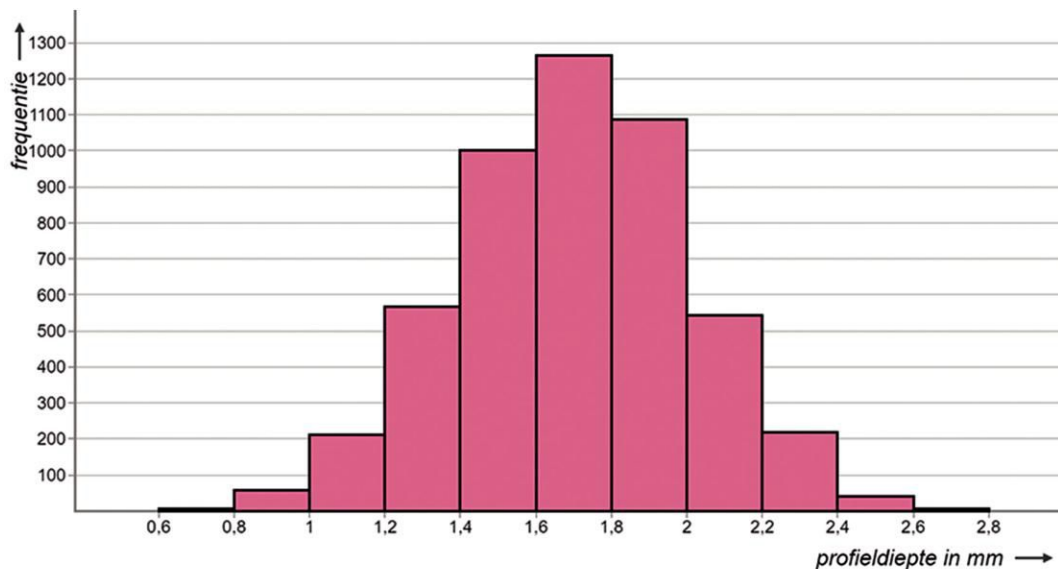


- c** In het staafdiagram kun je aflezen dat het percentage dat met pin betaalt ongeveer 26% is.
- S6 a** Nee, het staafdiagram is niet klokvormig.
b Ook als je splitst op geslacht, zijn de staafdiagrammen niet klokvormig. De prestaties van de jongens zijn dus niet normaal verdeeld.
- S7 a** $\mu - \sigma = 7,19 - 0,34 = 6,85$ en $\mu + 2\sigma = 7,19 + 2 \times 0,34 = 7,87$.
Van de mannelijke klanten geeft dus $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$ tussen € 6,85 en € 7,87 uit.
b 50% geeft meer uit dan € 6,63, dus het gemiddelde is € 6,63.
2,5% geeft meer uit dan $\mu + 2\sigma$.
De standaardafwijking is dus $0,5(7,19 - 6,63) = 0,28$ euro.

Test jezelf

- T1 a** Continu, de tijdsduur kan iedere waarde aannemen binnen een interval.
b Discreet, het aantal vakantiewoningen is telbaar.
c Discreet, het aantal boeken is telbaar.
d Continu, het gemiddelde benzinegebruik kan iedere waarde binnen een interval aannemen.
- T2 a** Zij kunnen 200 willekeurige leerlingen uit het leerlingenbestand ondervragen.
b $0,38 \times 163 = 61,94$
62 leerlingen hebben het huiswerk dagelijks op orde.
c In een frequentie tabel zie je dat bij 21 steekproeven het percentage 38% of hoger was.

T3 a



b Ja, het staafdiagram is klokvormig.

c Maak een tabel met kentallen.

Maak ook een frequentietabel met als eerst klasse $[0,5; 0,8)$

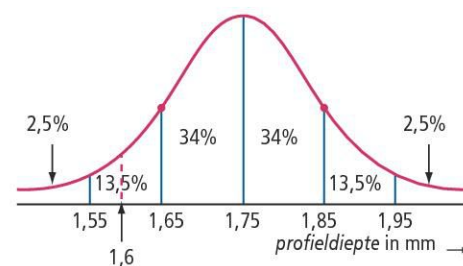
Het gemiddelde is 1,7 en de standaardafwijking is 0,3.

 $\mu - \sigma = 1,7 - 0,3 = 1,4$ en $\mu + \sigma = 1,7 + 0,3 = 2,0$.Tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt $33,5\% + 33,7\% = 67,2\%$ van de data. $\mu - 2\sigma = 1,7 - 0,6 = 1,1$ en $\mu + 2\sigma = 1,7 + 0,6 = 2,3$.Tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt $13,3 + 67,2\% + 14,4\% = 94,9\%$ van de data.

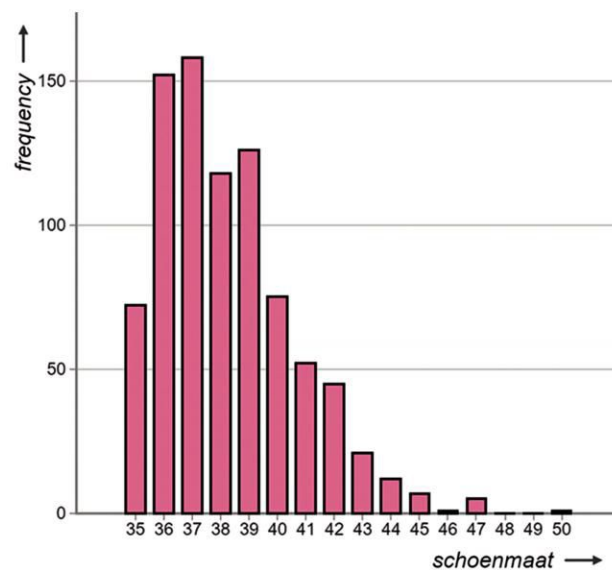
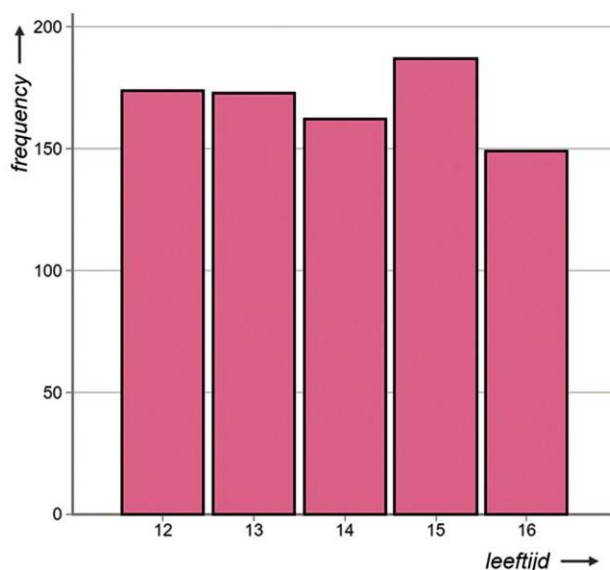
De percentages liggen in de buurt van 68% en 95%, de profieldiepte is dus normaal verdeeld.

d In de schets zie je dat ongeveer $2,5\% + 5,5\% = 8\%$ van de banden wordt afgekeurd.

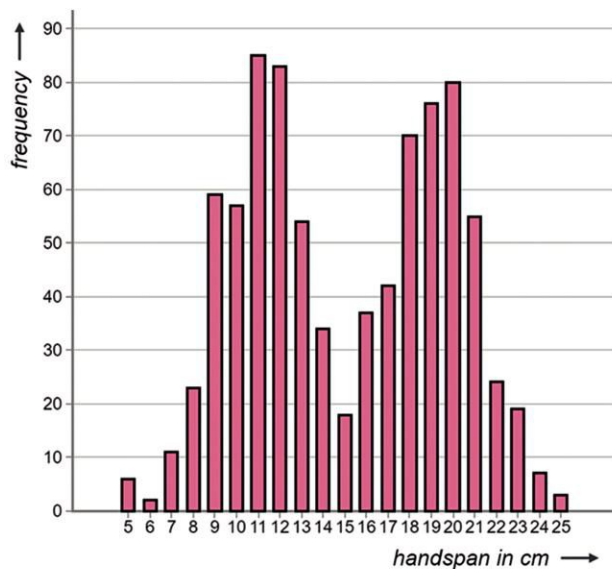
profieldiepte in mm	Frequentie	Relatief %
0.5 -< 0.8	7	0,1
0.8 -< 1.1	116	2,3
1.1 -< 1.4	666	13,3
1.4 -< 1.7	1677	33,5
1.7 -< 2	1687	33,7
2 -< 2.3	720	14,4
2.3 -< 2.6	122	2,4
2.6 -< 2.9	5	0,1
Totaal	5000	100



T4 a



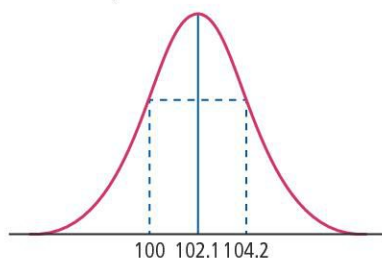
10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)



- b** Leeftijd: uniform
 Schoenmaat: scheef naar rechts met uitschieter
 Handspan: meertoppig

T5 a $9000 \times 2,1 = 18\,900$ meter wordt naar verwachting te veel geproduceerd..

b



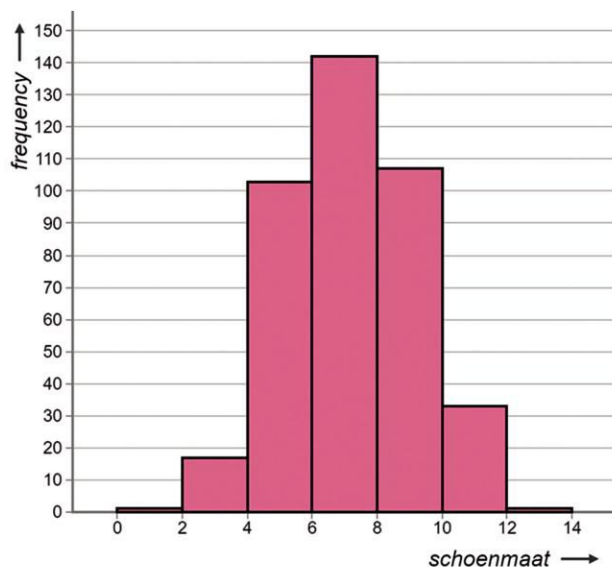
- c** 16% bevat te weinig linnen.
d Dan moet de grafiek nog één keer standaardafwijking naar rechts opschuiven zodat de 100 meter grens bij $\mu - 2\sigma$ ligt.
 De gemiddelde lengte moet dan op 104,2 meter worden afgesteld.

T6 $\mu + \sigma = 43,2 + 6,8 = 50$ km per uur.
 Dus $50\% + 34\% = 84\%$ rijdt minder hardt dan 50km per uur.

- b** $\mu - \sigma = 43,2 - 6,8 = 36,4$ km per uur.
 Bij 84% van de automobilisten kan een snelheid van meer dan 36,4 km per uur worden verwacht. Dit zijn $0,84 \times 1200 = 1008$ automobilisten.
c $\mu + \sigma = 20$
 De gemiddelde snelheid is dus $20 - 2,1 = 17,9$ km per uur.

Extra oefening

E1 a



schoenmaat	Frequency	Relative %
1 -< 2	1	0.2
2 -< 3	1	0.2
3 -< 4	16	4.0
4 -< 5	35	8.7
5 -< 6	68	16.8
6 -< 7	83	20.5
7 -< 8	59	14.6
8 -< 9	68	16.8
9 -< 10	39	9.7
10 -< 11	26	6.4
11 -< 12	7	1.7
12 -< 13	1	0.2
Total	404	100

- b Ja staafdiagram is bij benadering klokvormig.
- c Maak een tabel met kentallen en een frequentietabel.
Het gemiddelde is 6,8 en de standaardafwijking is 1,9.
 $\mu - \sigma = 6,8 - 1,9 = 4,9$ en $\mu + \sigma = 6,8 + 1,9 = 8,7$.
Tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt
 $16,8 + 20,5\% + 14,6\% + 16,8\% = 68,7\%$ van de data.
- d $\mu - 2\sigma = 6,8 - 3,8 = 3$ en $\mu + 2\sigma = 6,8 + 3,8 = 10,6$.
Tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt
 $4,0\% + 8,7\% + 68,7\% + 9,7\% + 6,4\% = 97,5\%$ van de data.
- e De percentages liggen in de buurt van 68% en 95%,
de schoenmaat is dus normaal verdeeld.
- f Het staafdiagram bij de variabele gewicht is scheef met een staart naar rechts.
Het gewicht is dus niet normaal verdeeld.

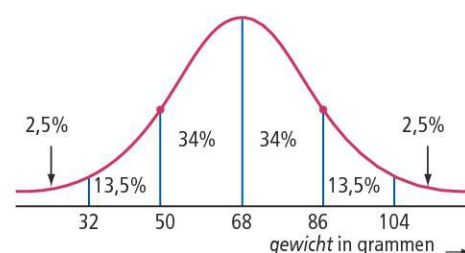
E2 a Ja staafdiagram is bij benadering klokvormig.

- b Maak een tabel met kentallen en een frequentietabel.
Het gemiddelde is 64,9 en de standaardafwijking is 2,0.
 $\mu - \sigma = 64,9 - 2,0 = 62,9$ en $\mu + \sigma = 64,9 + 2,0 = 66,9$.
Tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt $35,1\% + 32,1\% = 67,2\%$ van de data.
 $\mu - 2\sigma = 64,9 - 4,0 = 60,9$ en $\mu + 2\sigma = 64,9 + 4,0 = 68,9$.
Tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt
 $13,9\% + 67,2\% + 15\% = 96,1\%$ van de data.
De percentages liggen in de buurt van 68% en 95%,
de lengte van de buizen is dus normaal verdeeld.

lengte in mm	Relatief %
59 -< 61	2,2
61 -< 63	13,9
63 -< 65	35,1
65 -< 67	32,1
67 -< 69	15,0
69 -< 71	1,7
71 -< 73	0,0
Totaal	100

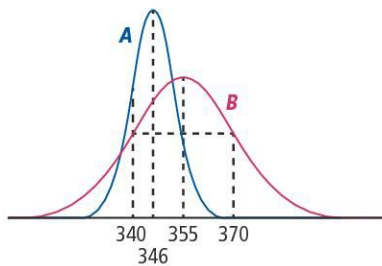
- E3 a puree: $2,5\% + 13,5\% = 16\%$
Nederland: $34\% + 34\% + 13,5\% = 81,5\%$
export: $2,5\%$

- b $\mu - 2\sigma = 86 + 36 = 50$ gram
 $2,5\%$ ligt bij deze kweker links van de 50 gram.
Dus $0,025 \times 4\,200\,000 = 105\,000$ tomaten worden verwerkt tot puree.



10 Verdelingen en steekproeven (met ICT)

E4 a



- b Machine B geeft gemiddeld meer jam dan A, dus machine B.
- c A: $\mu - \sigma = 346 - 6 = 340$ en B: $\mu - \sigma = 355 - 15 = 340$
Bij beide machines is het percentage potten met minder dan 340 gram 16%.
- d Het gemiddelde gewicht is $340 + 2 \times 3,5 = 347$ gram.

E5 a Sorteert de variabele *vo2012* docenten van aflopend
De leeftijd met het grootste aantal docenten is 58 jaar.

b Sorteert de variabele *vo2002* docenten van aflopend
De leeftijd met het grootste aantal docenten is 50 jaar.

c In een lijngrafiek met op de horizontale as de leeftijd en verticaal de frequentie zie je dat er twee toppen zijn. De leeftijd kan dus niet normaal verdeeld zijn..

d In een tabel met kentallen zie je dat het gemiddelde aantal docenten per leeftijd is 1324,2. Er zijn 46 leeftijdsgroepen.
Er zijn dus $46 \times 1324,2 \approx 60\,910$ docenten werkzaam in 2012.
Het aantal docenten van 50 jaar en ouder is opgeteld 24981.
Dat was dus $24\,981 : 60\,910 \times 100\% \approx 41\%$.

E6 a De populatie bestaat uit alle leden van de omroepvereniging.

b De grootte van de steekproef is 1143.

c Je weet niet zeker of juist degenen die niet tevreden waren de enquête niet hebben ingevuld.

d Nee, omdat de steekproef niet representatief is voor alle Nederlanders.

11 Toevalsvariabelen

Voorkennis

- V1 a** $P(\text{remise}) = 1 - P(\text{Victor wint}) - P(\text{Anton wint})$
 $P(\text{remise}) = 1 - 0,14 - 0,18 = 0,68$
- b** $P(\text{Victor wint eerstkomende vier partijen}) = 0,14^4 \approx 0,0004$
- c** De kans dat Anton een partij niet wint is $1 - 0,18 = 0,82$.
 De gevraagde kans is $0,82^5 \approx 0,3707$.
- d** Als beide spelers na drie partijen evenveel punten hebben, dan zijn of alle drie partijen geëindigd in remise of één partij is door Anton gewonnen, één partij door Victor en één is geëindigd in remise.
 $P(\text{beide spelers evenveel punten}) = P(RRR) + P(AVR) + P(ARV) + P(RVA) + P(RAV) + P(VRA) + P(VAR)$
 $P(\text{beide spelers evenveel punten}) = 0,68^3 + 6 \times 0,18 \times 0,14 \times 0,68 \approx 0,4172$
- V2 a** $P(rrrww) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \approx 0,0417$
- b** Er zijn $\binom{5}{3} = 10$ rijtjes met drie rode en twee witte knikkers.
- c** $P(3 \text{ rood en } 2 \text{ wit}) = 10 \times \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \approx 0,4167$
- d** $P(\text{minstens één wit}) = 1 - P(\text{geen wit})$
 $P(\text{minstens één wit}) = 1 - \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \approx 0,9167$
- V3 a**
- | | | | | |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| <i>uitkomst</i> | 2 | 5 | 9 | 14 |
| <i>kans</i> | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
- b** Als je het experiment 1000 keer uitvoert kun je $\frac{1}{8} \times 1000 = 125$ keer de uitslag 14 verwachten.
- c** De verwachtingswaarde van de uitslag is $\frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{4} \times 5 + \frac{1}{4} \times 9 + \frac{1}{8} \times 14 = 6$.
- V4 a**
- | | | | | |
|------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| <i>aantal sleutels</i> | 1 | 2 | 3 | 4 |
| <i>kans</i> | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
- b** $P(\text{meer dan 2 sleutels}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- V5 a** Het gemiddelde cijfer in groep 1 is

$$\frac{11 \times 4 + 23 \times 5 + 67 \times 6 + 56 \times 7 + 21 \times 8 + 7 \times 9}{185} = 6,4.$$
 Het gemiddelde in groep 2 is

$$\frac{2 \times 4 + 17 \times 5 + 58 \times 6 + 92 \times 7 + 13 \times 8 + 3 \times 9}{185} \approx 6,6$$
- b** In groep 1 zijn de cijfers meer verdeeld dan in groep 2. Bij groep 1 is de standaardafwijking dus hoger, de 0,86 hoort bij groep 1.

11.1 Stochasten

- intro** De variabele A kan de waarden 0, 1, 2, 3, 4 en 5 aannemen.
 De variabele L kan alle waarden tussen ongeveer 130 en 220 cm aannemen
 De variabele K kan de waarden rood, groen, blauw, geel, bruin en oranje aannemen.
 De variabele I kan als waarden 0 en alle positieve getallen aannemen.

11 Toevalsvariabelen

1 a $P(R = 1) = 3 \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \approx 0,4895$

uitkomst u	$P(R = u)$
0	0,1958
1	0,4895
2	0,2797
3	0,0350

$$P(R = 0) = \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \approx 0,1958$$

$$P(R = 2) = 3 \times \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} \approx 0,2797$$

$$P(R = 3) = \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \approx 0,0350$$

c $E(R) = 0,1958 \times 0 + 0,4895 \times 1 + 0,2797 \times 2 + 0,0350 \times 3 = 1,1539$

2 $P(X = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = 0,1$

$$P(X = 2) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = 0,3$$

3 a X is een toevalsvariabele omdat de uitkomst afhangt van het toeval.

uitkomst x	100	200	500	1000
$P(X = x)$	$\frac{11}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

c $E(X) = \frac{11}{20} \times 100 + \frac{3}{10} \times 200 + \frac{1}{10} \times 500 + \frac{1}{20} \times 1000 = 215$

4 a De gebeurtenis $V = 0$ houdt in dat er met de twee dobbelstenen twee dezelfde aantallen ogen wordt gegoooid. Er zijn 36 uitkomsten mogelijk waarvan zes twee dezelfde aantallen ogen hebben. De kans is $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

uitkomst v	0	1	2	3	4	5
$P(V = v)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

6	5	4	3	2	1	0
5	4	3	2	1	0	1
4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
V	1	2	3	4	5	6

c $E(V) = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{5}{18} \times 1 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{9} \times 4 + \frac{1}{18} \times 5 = 1\frac{17}{18}$

5 a In totaal zijn er $15 + 4 + 29 + 28 = 76$ leerlingen.

$$P(A) = \frac{15+4}{76} = 0,25$$

b Van de 44 leerlingen die een spijkerbroek dragen, dragen er 15 sportschoenen. De kans op gebeurtenis A onder de voorwaarde dat gebeurtenis B plaatsvindt, is dus $\frac{15}{44}$.

c $\frac{15}{44} \approx 0,3409$. Deze kans is aanzienlijk groter dan de kans op gebeurtenis A zoals bij opdracht a berekend. Ze zal dus de conclusie trekken dat leerlingen in een spijkerbroek eerder voor sportschoenen kiezen.

6 a $P(B = 3) = \frac{3}{8}$

b Er staat ook een $B = 3$ bij $R = 12$, dus de kansen zijn niet gelijk.

c $P(B = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d De kans op $B = 1$ onder voorwaarde dat $R = 11$ is $\frac{1}{8}$.

7

	aas	geen aas	totaal
klaver	1	12	13
geen klaver	3	36	39
totaal	4	48	52

$$P(K) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

De kans op een klaver als je weet dat de kaart een aas is, is gelijk aan $\frac{1}{4}$.

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

De kans op een aas als je weet dat de kaart een klaver is, is ook $\frac{1}{13}$.

De gebeurtenissen K en A zijn onafhankelijk.

8 a $P(D) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

De kans op D als je weet dat het een rode knikker is, is ook $\frac{1}{3}$.

$$P(R) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

De kans op R als je weet dat het een drie is, is ook $\frac{3}{5}$.

De gebeurtenissen R en D zijn onafhankelijk.

b $P(T) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

De kans op T als je weet dat het een rode knikker is, is $\frac{1}{9}$.

De gebeurtenissen R en T zijn niet onafhankelijk en dus afhankelijk.

9 a Bij stochast R zijn de uitkomsten 10 en 20 mogelijk en bij de stochast B zijn de uitkomsten 1 en 2 mogelijk.

- b** Voor alle mogelijke uitkomsten van R en B geldt dat de kans daarop $\frac{1}{2}$ is. Onder voorwaarde van beide uitkomsten van R geldt dat zowel de kans op $B = 1$ als de kans $B = 2$ ook gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Hetzelfde geldt voor beide uitkomsten van R onder voorwaarde van beide uitkomsten van B . R en B zijn dus onafhankelijk.

08 a

	groen	geel	totaal
nummer 1	2	1	3
nummer 2	3	2	5
nummer 3	5	3	8
totaal	10	6	16

- b** Van de 16 knikkers hebben er 8 nummer 2, de kans is dus $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.
- c** 5 groene knikkers hebben het nummer 3.
- d** Van de 10 groene knikkers hebben 5 het nummer 3, de kans is dus $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
- e** De kans op een groene knikker is $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. De kans op een groene knikkers als je weet dat de knikker nummer 3 heeft is ook $\frac{5}{8}$.
De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk omdat de kans op A gelijk is aan de kans op A onder voorwaarde B en omgekeerd.
- f** De kans op een groene knikker is $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.
- g** Van de 3 knikker met nummer 1, zijn er 2 groen. De kans is dus $\frac{2}{3}$.
- h** De kans op B is niet gelijk aan de kans op B onder voorwaarde C . Daarom zijn de gebeurtenissen B en C afhankelijk.
- i** De kans op A is $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. De kans op A onder voorwaarde D is ook $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
De kans op D is $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. De kans op D onder voorwaarde A is ook $\frac{3}{8}$.
De gebeurtenissen A en D zijn dus onafhankelijk.

11 Toevalsvariabelen

- U1 a** De kans op zowel m als k is $\frac{1}{2}$. Bij beide rijen is de kans gelijk aan $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.
- b** Anke denkt dat het onwaarschijnlijk is dat je eerst 10 keer munt en daarna 10 keer kop gooit.
- c** Er zijn 19 overgangen ofwel wisselingen.
De kans op een wisseling is steeds 50% omdat er 50% kans is op een andere uitkomst dan de vorige keer gooien.
- d** In een rij verwacht je $0,5 \times 19 = 9,5$, afgerond 10 wisselingen.
- e** In de rij van Theo zit één wisseling en in de rij van Anke zitten 17 wisselingen. Je kan de rij van Anke geloofwaardiger omdat het aantal wisselingen minder afwijkt van het verwachte aantal wisselingen dan bij Theo.

11.2 Standaardafwijking van een stochast

intro Bij drie dobbelstenen is er meer spreiding, daar is de standaardafwijking groter.

10 a

<i>cijfer</i>	3	4	5	6	7	8	9
<i>frequentie</i>	1	2	1	4	2	0	2

Het gemiddelde cijfer is $\frac{1 \times 3 + 2 \times 4 + \dots + 2 \times 9}{1 + 2 + \dots + 2} = 6$.

- b** Met de rekenmachine vind je dat de standaardafwijking 1,78.
- c** Bij rapport 2 is de spreiding van de cijfers veel kleiner, daarom is de standaardafwijking kleiner geworden.

- 11** Met de rekenmachine vind dat het gemiddelde 100,1 is en de standaardafwijking 0,7.

- 12 a** Van de 200 doosjes bevatten er elf 101 pepermuntjes, de kans op 101 pepermuntjes is dan $\frac{101}{200} = 0,055$.

b

uitkomst u	98	99	100	101	102	103
$P(X = u)$	0,02	0,045	0,825	0,055	0,035	0,02

$E(X) = 0,02 \times 98 + 0,045 \times 99 + \dots + 0,02 \times 103 = 100,1$

- c** $E(X)$ is de verwachtingswaarde en dit is de waarde die je gemiddeld verwacht als je het experiment vaak uitvoert. Deze is dus gelijk aan het gemiddelde.
- d** Met de rekenmachine vind je standaardafwijking 0,7. Dit antwoord is gelijk aan het antwoord bij opdracht 11.

13

uitkomst u	0	1	2	3
$P(K = u)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(K = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(K = 1) = 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(K = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(K = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Met de rekenmachine vind je $E(K) = 1,5$ en $\sigma(K) \approx 0,87$.

14

uitkomst u	1	2	3	4
$P(X = u)$	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{5}{143}$	$\frac{1}{286}$

$$P(X = 1) = \frac{10}{13}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{13} \times \frac{10}{12} = \frac{5}{26}$$

$$P(X = 3) = \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{143}$$

$$P(X = 4) = \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{10}{10} = \frac{1}{286}$$

Met de rekenmachine vind je $E(X) \approx 1,27$ en $\sigma(X) \approx 0,54$.

- 15 a** Stochast B is het bedrag dat je ontvangt.

uitkomst u	0	10	100	200
$P(B = u)$	0,729	0,243	0,027	0,001

$$P(B = 0) = 0,9^3 = 0,729$$

$$P(B = 10) = 3 \times 0,9^2 \times 0,1 = 0,243$$

$$P(B = 100) = 3 \times 0,9 \times 0,1^2 = 0,027$$

$$P(B = 200) = 0,1^3 = 0,001$$

Met de rekenmachine vind je $E(B) = 5,33$.

Naar verwachting zal je per kraslot € 5,33 ontvangen.

- b** Met de rekenmachine vind je $\sigma(B) \approx 17,49$.

De standaardafwijking die hier bij hoort is € 17,49.

16 a

uitkomst u	1	3	6	10	16	24
$P(X = u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine vind je $E(X) = 10$ en $\sigma(X) \approx 7,94$.

- b** De getallen op de tweede tol zijn allemaal 3 hoger dan de overeenkomstige getallen op de eerste tol.
- c** Voor $E(Y)$ verwacht je $10 + 3 = 13$ en voor $\sigma(Y)$ verwacht je 7,94.

uitkomst u	4		7	9	13	19	27
$P(Y = u)$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine vind je inderdaad $E(Y) = 13$ en $\sigma(Y) \approx 7,94$.

- d** De getallen op de derde tol zijn steeds de overeenkomstige getallen op de eerste tol vermenigvuldigd met 2. Voor $E(Z)$ verwacht je $10 \times 2 = 20$ en voor $\sigma(Z)$ verwacht je $7,94 \times 2 = 15,88$.

uitkomst u	2	6	12	20	32	48
$P(Y = u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Met de rekenmachine vind je inderdaad $E(Z) = 20$ en $\sigma(Y) \approx 15,87$. (door tussentijds afronden wijkt de standaardafwijking 0,01 af)

- 013 a** Je kunt bij het trekken van drie knikkers 0, 1, 2 of 3 gele knikkers trekken.

- b** Bij de eerste knikker zijn 2 van de 5 knikkers geel, de kans is op geel is dus $\frac{2}{5}$. Daarna zijn 3 van de 5 knikkers blauw en ten slotte zijn er 2 van de 5 knikkers geel.

- c** Ze kan op 3 manieren twee gele en één blauwe knikker pakken, namelijk de volgordes GGB, GBG en BGG.

- d** Om de kans op twee gele en één blauwe knikker te berekenen, moet de kans op de volgorde GBG vermenigvuldigd worden met het aantal mogelijke volgordes om twee gele en één blauwe knikker te pakken.

11 Toevalsvariabelen

e

<i>uitkomst u</i>	0	1	2	3
$P(G) = u$	0,216	0,432	0,288	0,064

$$P(G = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0,216$$

$$P(G = 1) = 3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0,432$$

$$P(G = 3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0,064$$

- f Met de rekenmachine vind je $E(G) = 1,2$ en $\sigma(G) \approx 0,85$.

U2 a Het bedrag dat betaald moet worden, verdubbelt steeds, maar in totaal is er slechts 12 euro in het spel. En dus kan A niet willekeurig groot worden.

b Een andere mogelijke uitkomst is (K5, M7).

c Als de uitkomst na de eerste worp (K7, M5) was, dan zijn de opties na de tweede worp (K9, M3) en (K5, M7). Als de uitkomst na de eerste worp (K5, M7) was, dan zijn de opties na de tweede worp (K3, M9) en (K7, M5).

d Na de derde worp moet er 4 euro worden betaald.

Van de vier mogelijkheden doe bij opdracht c zijn gegeven, zijn er twee waarbij een speler minder dan 4 euro over heeft. De kans dat diegene verliest is weer $\frac{1}{2}$. De kans dat het spel na de derde ronde is afgelopen, is $\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

e Na één of twee worpen kan het spel nog niet afgelopen zijn.

Dat kan (bijvoorbeeld) vanuit Klaas gezien de volgende situaties opleveren.

WW $6 + 1 + 2 = 9$

WV $6 + 1 - 2 = 5$

VW $6 - 1 + 2 = 7$

VV $6 - 1 - 2 = 3$

Na de derde ronde kunnen de volgende situaties optreden.

WWW $6 + 1 + 2 + 4 = 13$, het spel is afgelopen na ronde 3.

WWV $6 + 1 + 2 - 4 = 5$

WVW $6 + 1 - 2 + 4 = 9$

WVV $6 + 1 - 2 - 4 = 1$

VWW $6 - 1 + 2 + 4 = 11$

VWV $6 - 1 + 2 - 4 = 3$

VVW $6 - 1 - 2 + 4 = 7$

VVV $6 - 1 - 2 - 4 = -1$, het spel is afgelopen.

De kans dat het spel na de derde ronde is afgelopen is $\frac{1}{4}$.

In de blauwe situaties is het spel na ronde vier zeker afgelopen.

Als je 5 of 7 euro hebt, kun je niet meer 8 euro winnen of 8 euro verliezen.

In de overige vier (groene) situaties is het spel een ronde later afgelopen. Er is immers geen 16 euro in het spel. De kansverdeling is

<i>aantal ronden</i>	3	4	5
<i>kans</i>	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Invoer in de rekenmachine geeft $E(A) = 4,25$ en $\sigma \approx 0,83$.

11.3 Normaal verdeelde stochast

intro Grafiek B hoort bij de inkomensverdeling.

De bewering 'er zijn ongeveer evenveel lange als kleine jongens' is waar.

- 17 a** Van de 105 zakjes tussen 250,5 en 251 zijn er ongeveer $\frac{2}{5} \times 105 = 42$ zwaarder dan 250,8 gram.

Naar schatting zijn er $42 + 151 + 178 + 171 + 134 = 676$ zakjes met een gewicht tussen 250,8 en 253 gram.

- b** $\frac{676}{1000} \times 100 = 67,6\%$ van de zakjes heeft een gewicht tussen 250,8 en 253 gram.

- c** $\bar{x} - 2\sigma = 251,9 - 2 \times 1,1 = 249,7$ en $\bar{x} + 2\sigma = 251,9 + 2 \times 1,1 = 254,1$.

Tussen 249,7 en 254,1 gram zitten naar schatting

$$\frac{3}{5} \times 27 + 61 + 105 + 151 + 178 + 171 + 134 + 86 + 45 + \frac{1}{5} \times 19 = 951 \text{ zakjes.}$$

Dat is ongeveer 95%.

- d** De top ligt bij 251,9 gram.

- e** Het is redelijk om ervan uit te gaan dat de gewichten normaal verdeeld zijn omdat het gemiddelde gewicht ook in het midden ligt en de verdeling links en rechts van de top regelmatig afloopt.

- 18 a** Van de 1000 zakjes was het gewicht van ongeveer 638 zakjes tussen $E(X) - \sigma(X)$ en $E(X) + \sigma(X)$. De kans hierop is daarom $\frac{638}{1000} \approx 0,64$.

- b** Bij een stochast is de verwachtingswaarde gelijk aan de gemiddelde waarde die je verwacht als je het experiment vaak uitvoert, oftewel de gemiddelde waarde van de 1000 zakjes. Deze waarde is gelijk aan 251,9.

- c** 253 is gelijk aan $\mu + \sigma$ en bij de normale verdeling zit $13,5\% + 2,5\% = 16\%$ boven $\mu + \sigma$. Dus $P(X > 253) = 0,16$.

- d** Die kans is 0,95, want bij de normale verdeling zit 95% tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.

- 19 a** Er wegen $1 + 7 + 48 = 56$ sinaasappels minder dan 120 gram. De kans hierop is $\frac{56}{250} = 0,224$.

- b** Het staafdiagram is bij benadering klokvormig, daarom is het redelijk om aan te nemen dat X te benaderen is met een normale verdeling.

gewicht in grammen	110	114	118	122	126	130	134
frequentie	1	7	48	95	74	23	2

Met de rekenmachine vind je dat het gemiddelde 123,0 gram en de standaardafwijking 4,0 gram is.

- d** 115 is gelijk aan $E(X) - 2\sigma(X)$, dus de $P(X \leq 115) = 0,025$.

- e** 119 is gelijk aan $E(X) - \sigma(X)$, dus $P(X \geq 119) = 0,84$.

- 20 a** De 2,5% zwaarste potjes wegen minstens

$$E(X) + 2\sigma(X) = 164,4 + 2 \times 5,4 = 175,2 \text{ gram.}$$

- b** 159 is gelijk aan $E(X) - \sigma(X)$ en 169,8 is gelijk aan $E(X) + \sigma(X)$, dus bij 68% van de potjes zit het gewicht tussen 159 en 169,8 gram.

- c** De waarden $161,7 < X < 164,4$ en $159 < X < 161,7$ liggen beide links van $E(X)$, maar $161,7 < X < 164,4$ ligt dichterbij $E(X)$, dus $P(161,7 < X < 164,4)$ is groter aangezien de normale verdeling vanaf $E(X)$ naar links steeds lager komt te liggen.

11 Toevalsvariabelen

- 21 a** Bij een normale verdeling is de mediaan gelijk aan het gemiddelde. Aangezien G normaal verdeeld is, is de verwachtingswaarde gelijk aan de mediaan.
- b** $E(G)$ lees je af bij een relatieve somfrequentie van 50%, dus $E(G) = 104$ gram.
- c** Bij 100 gram lees je af 25%, dus $P(G < 100) = 0,25$.
- d** Volgens de eerste vuistregel is de relatieve somfrequentie bij $E(G) - \sigma(G)$ gelijk aan 16%. Aflezen bij 16% geeft 98 gram, oftewel $E(G) - \sigma(G) = 98$ gram. Hieruit volgt dat $\sigma(G) = 104 - 98 = 6$ gram.
- 22 a** 145,2 is gelijk aan $E(X) - \sigma(X)$, dus $P(X < 145,2) = 0,16$.
- b** 168,6 ligt dicht bij de verwachtingswaarde van Y , dus $P(Y > 168,6)$ is groter.
- c** Voor elke leerling geldt dat de kans dat hij kleiner is dan het gemiddelde van de brugklassers van zijn school gelijk is aan $\frac{1}{2}$. De kans dat alle vier leerlingen kleiner zijn dan het gemiddelde van de brugklassers van hun school is daarom $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625$.
- 020 a** Het gemiddelde is gelijk aan de verwachtingswaarde, dus is $E(X) = 155,2$.
- b** $\sigma(X) = 2,6$ gram
- c** Volgens de eerste vuistregel ligt bij de normale verdeling ongeveer 68% tussen $\mu - \sigma = 152,6$ gram en $\mu + \sigma = 157,8$ gram.
- d** 150 gram is gelijk aan $\mu - 2\sigma$ en bij de normale verdeling ligt 2,5% onder $\mu - 2\sigma$. Dus 2,5% van de zakjes bevat hoogstens 150 gram.
- e** Bij de normale verdeling wegen de 2,5% zwaarste zakken minstens $\mu + 2\sigma = 160,4$ gram.
- f** Bij de normale verdeling wegen de 16% lichtste zakjes hoogstens $\mu - \sigma = 152,6$ gram.
- g** Je zit dat het gebied onder de normaalkromme tussen 155,2 en 156,5 groter is dan het gebied onder de normaalkromme tussen 156,5 en 157,8. En dus is $P(155,2 < X < 156,5)$ groter dan $P(156,5 < X < 157,8)$.
- U3 a** Hij heeft de 95 berekend door het gemiddelde van 60 en 120 te nemen; $\frac{70 + 120}{2} = 95$. Hij heeft de 25 berekend door het verschil van 120 en het gemiddelde te berekenen; $120 - 95 = 25$.
- b** Jordan gebruikt de eerste vuistregel van de normale verdeling die zegt dat 68% tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt, waarbij twee derde ongeveer gelijk is aan 68%. Jordan vergeet echter dat de 70 en 120 niet symmetrisch om het gemiddelde hoeven te liggen, er is namelijk niet gegeven dat dit de middelste twee derde van de kinderen zijn.

11.4 Rekenregels voor stochasten

intro De standaardafwijking van deze dobbelsteen is precies tien keer zo groot als van de gewone dobbelsteen, omdat alle waarden op de dobbelsteen precies tien keer zo groot zijn als overeenkomstige waarde op de gewone dobbelsteen.

- 23** a $E(D) = 1930 + 100 = 2030$ euro
 b $E(D) = E(S) + 100$
 c De decembersalarissen liggen 100 euro hoger dan de normale maandsalarissen, maar de spreiding in salarissen is gelijk gebleven. Daarom geldt dat $\sigma(S) = \sigma(D)$.
 d $E(J) = 1,03 \times E(S)$
 e $\sigma(J)$ is een maat voor de spreiding van de maandsalarissen rond het gemiddelde maandsalaris. Doordat alle salarissen met 3% worden verhoogd, wordt ook de spreiding rond het gemiddelde 3% hoger.

- 24** a $E(X) = E(U - 40) = E(U) - 40 = 85$ en $\sigma(X) = \sigma(U - 40) = \sigma(U) = 35$.
 b $E(Y) = E(0,2 \cdot U) = 0,2 \cdot E(U) = 25$ en $\sigma(Y) = \sigma(0,2 \cdot U) = 0,2 \cdot \sigma(U) = 7$.
 c $E(Z) = E(0,2 \cdot U - 40) = 0,2 \cdot E(U) - 40 = -15$ en
 $\sigma(Y) = \sigma(0,2 \cdot U - 40) = 0,2 \cdot \sigma(U) = 7$.

- 25** a Met de rekenmachine vind je $E(-V) = -2,3$ en $E(V) = 2,3$.
 Dus $E(-V) = -E(V)$.
 b Met de rekenmachine vind je $\sigma(-V) \approx 3,35$ en $\sigma(V) \approx 3,35$.
 Dus $\sigma(-V) = \sigma(V)$.

- 26** a Met de rekenmachine vind je $E(U) = 2,3$ euro en $\sigma(U) \approx 3,16$ euro.
 b De organisator maakt verlies bij uitkeringen van 5 en 10 euro.
 c $E(W) = E(3 - U) = 0,7$ euro en $\sigma(W) = \sigma(3 - U) = \sigma(U) \approx 3,16$ euro.

- 27** a X en Y zijn onafhankelijk, want de uitkomst van toelletje A heeft geen invloed om de uitkomst van toelletje B en omgekeerd.

uitkomst x	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Met de rekenmachine vind je $E(X) = 1,75$ en $\sigma(X) \approx 0,83$.

uitkomst y	1	2	3	4
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Met de rekenmachine vind je $E(Y) = 2,5$ en $\sigma(Y) \approx 1,12$.

c uitkomst s	2	3	4	5	6	7
$P(S = s)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$P(S = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(S = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(S = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(S = 5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(S = 6) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(S = 7) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

- d Met de rekenmachine vind je $E(S) = 4,25$ en $\sigma(S) \approx 1,39$.
 e $E(S) = E(X) + E(Y)$
 f $\sigma(X) + \sigma(Y) = 1,95$, dus $\sigma(S) = \sigma(X) + \sigma(Y)$ geldt niet.
 g $\sigma(X)^2 \approx 0,69$, $\sigma(Y)^2 \approx 1,25$ en $\sigma(S)^2 \approx 1,94$.
 Hieruit volgt dat $\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 = \sigma(S)^2$.

11 Toevalsvariabelen

- 28 a** $\mu = E(U + V) = E(U) + E(V) = 108 + 75 = 183$ en
 $\sigma = \sigma(U + V) = \sqrt{\sigma(U)^2 + \sigma(V)^2} = \sqrt{21^2 + 9^2} \approx 22,85$.
- b** $\mu = E(U - V) = E(U) - E(V) = 108 - 75 = 33$ en
 $\sigma = \sigma(U - V) = \sqrt{\sigma(U)^2 + \sigma(-V)^2} = \sqrt{\sigma(U)^2 + \sigma(V)^2} = \sqrt{21^2 + 9^2} \approx 22,85$.
- c** $\mu = E(U + 2V) = E(U) + 2 \times E(V) = 108 + 2 \times 75 = 258$ en
 $\sigma = \sigma(U + 2V) = \sqrt{\sigma(U)^2 + \sigma(2V)^2} = \sqrt{21^2 + (2 \times 9)^2} \approx 27,66$.
- d** $\mu = E(2U + V + 30) = 2 \times E(U) + E(V) + 30 = 2 \times 108 + 75 + 30 = 321$ en
 $\sigma = \sigma(2U + V + 30) = \sqrt{\sigma(2U)^2 + \sigma(V)^2} = \sqrt{(2 \times 21)^2 + 9^2} \approx 42,95$.

- 29 a** $E(X) = 1,75 + 0,5 = 2,25 \mu\text{g}$
 $\sigma(X) = \sqrt{0,25^2 + 0,15^2} \approx 0,29 \mu\text{g}$
- b** Gasten die twee koppen soepen en vier stukjes stokbrood eten krijgen gemiddeld $2 \times 2,25 = 4,50 \mu\text{g}$ zout binnen.
- c** $E(Y) = 1,75 + 0,5 + 1,3 = 3,55 \mu\text{g}$ en
 $\sigma(Y) = \sqrt{0,25^2 + 0,15^2 + 0,6^2} \approx 0,68 \mu\text{g}$.
 Y zal met 68% kans tussen $3,55 - 0,68 = 2,87 \mu\text{g}$ en $3,55 + 0,68 = 4,23 \mu\text{g}$ liggen.

- 026 a** Met de rekenmachine vind je dat $E(U) = 3,50$ euro en $\sigma(U) \approx 7,40$ euro.
- b** De winst voor de organisator is gelijk aan 3 euro als hij 3 euro minder moet uitkeren dan hij heeft ontvangen. De inleg is 5 euro en $5 - 3 = 2$ euro.
- c** Hij maakt verlies als U groter dan 5 euro is.
- d**
- | | | | | |
|--------------|------|-----|-----|------|
| uitkomst w | 5 | 3 | -15 | -45 |
| $P(W = w)$ | 0,39 | 0,5 | 0,1 | 0,01 |
- e** De winst voor de organisator is de inleg verminderd met het uitgekeerde bedrag, oftewel $W = 5 - U$.
- f** Met de rekenmachine vind je $E(U) = 1,50$ euro.
- g** Aangezien $W = 5 - U$, geldt dat $\sigma(W) = \sigma(5 - U)$.
- h** $\sigma(W) \approx 7,40$ euro

U4 a

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$

$$P(X = 1) = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{216}$$

$$P(X = 4) = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$$

$$P(X = 2) = 1 - \frac{1}{216} - \frac{5}{9} - \frac{5}{18} = \frac{35}{216}$$

Met de rekenmachine vind je $E(X) \approx 3,11$ euro.

b

w	7	4	1	-2
$P(W = w)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$

Met de rekenmachine vind je $E(W) \approx 0,68$ euro en $\sigma(W) \approx 2,01$ euro.

11.5 De $\sqrt{n}$ -wet

intro De kans dat 10 batterijen een levensduur tussen 180 en 220 uur hebben is kleiner dan 0,68.

30 a X_1 en X_2 zijn onafhankelijke variabelen en daarom gelden de formules

$$E(S) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \text{ en}$$

$$\sigma(S) = \sigma(X_1 + X_2) = \sqrt{\sigma(X_1)^2 + \sigma(X_2)^2}.$$

b $T = X_1 + X_2 + X_3 = S + X_3$, want $S = X_1 + X_2$.

c $E(T) = E(S + X_3) = E(S) + E(X_3) = 7 + 3,5 = 10,5$ en

$$\sigma(T) = \sigma(S + X_3) = \sqrt{\sigma(S)^2 + \sigma(X_3)^2} = \sqrt{2,415^2 + 1,708^2} \approx 2,96.$$

31 a $E(S) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_{10}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) = 10 \times 3,5 = 35.$

b $\sigma(S) = \sqrt{\sigma(X_1)^2 + \sigma(X_2)^2 + \dots + \sigma(X_{10})^2} = \sqrt{10 \cdot \sigma(X)^2} =$

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{\sigma(X)^2} = \sqrt{10} \cdot \sigma(X)$$

c $\sigma(S) = \sqrt{10} \times 1,708 \approx 5,40$

d $E(S) = 10 \cdot E(X)$

e $\sigma(S) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X)$

32 a Uit de tabel volgt dat er van de 36 mogelijke uitkomsten 5 zijn waarbij het gemiddelde 4 is, en daarom is $P(\bar{X} = 4) = \frac{5}{36}.$

$\bar{x}$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
kans	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

6	3,5	4	4,5	5	5,5	6
5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
4	2,5	3	3,5	4	4,5	5
3	2	2,5	3	3,5	4	4,5
2	1,5	2	2,5	3	3,5	4
1	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$\bar{X}$	1	2	3	4	5	6

c Met de rekenmachine vind je $E(\bar{X}) = 3,5$ en $\sigma(\bar{X}) \approx 1,21.$

d De verwachtingswaarden zijn even groot.

e $\frac{\sigma(X)}{\sqrt{2}} = \frac{1,708}{\sqrt{2}} \approx 1,21 = \sigma(\bar{X})$

33 a Noem de som van de uitkomsten bij vijf keer draaien S .

$$E(S) = 5 \times 23,75 = 118,75 \text{ en } \sigma(S) = \sqrt{5} \times 32,19 \approx 71,98.$$

b $E(\bar{U}) = 23,75$ en $\sigma(\bar{U}) = \frac{32,19}{\sqrt{5}} \approx 14,40$

34 a $E(T) = 10 \times 250 = 2500$ gram en $\sigma(T) = \sqrt{10} \times 6 \approx 18,97$ gram.

b $E(\bar{X}) = 250$ gram en $\sigma(\bar{X}) = \frac{6}{\sqrt{10}} \approx 1,90$ gram.

35 a 1,90 gram is kleiner dan 6 gram.

b $\sigma(\bar{X})$ wordt berekend door $\sigma(X)$ te delen door $\sqrt{n}$. Aangezien $\sqrt{n}$ groter dan 1 is, is de uitkomst van $\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ altijd kleiner dan $\sigma(X)$.

c Hoe meer pakken je controleert, hoe kleiner het gemiddelde zal afwijken van wat je verwacht. De uitschieters zullen minder effect hebben.

11 Toevalsvariabelen

- 36 a** De 2,5% langst brandende kaarsen branden volgens de tweede vuistregel van de normale verdeling minimaal $\mu + 2\sigma$, oftewel 4 uur en 20 minuten.
- b** De verwachte totale brandduur per doos is $25 \times 4 = 100$ uur en de standaardafwijking van de totale brandduur is $\sqrt{25} \times 10 = 50$ minuten.
- c** De standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per kaars is $\frac{10}{\sqrt{25}} = 2$ minuten.
- d** Dan moet gelden dat $\frac{10}{\sqrt{n}} = 1$.
- $$\sqrt{n} = 10$$
- $$n = 100$$
- De fabrikant moet 100 kaarsen in een doos verpakken zodat de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur gelijk is aan één minuut.

- 37 a** Je verwacht de grootste standaardafwijking bij Jos aangezien de spreiding in uitkomsten bij hem groter zal zijn dan bij Femke.
- b** $E(2X) = 2 \times 2,5 = 5$ en $\sigma(2X) = 2 \times 1,118 = 2,236$.
- c** $E(X_1 + X_2) = 2,5 + 2,5 = 5$ en $\sigma(X_1 + X_2) = \sqrt{2} \times 1,118 \approx 1,58$.

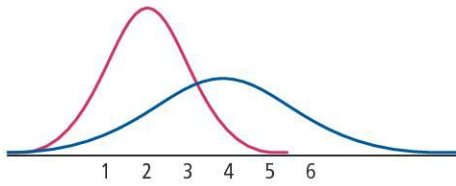
- 033 a** Met de rekenmachine vind je $E(X) = 32,5$ en $\sigma(X) \approx 16,01$.
- b** Je krijgt $S = 150$ als je twee keer 60 en één keer 30 draait en ook als je twee keer 45 draait en één keer 60.
- c** Iedere keer dat de tol gedraaid wordt, is de kansverdeling voor de uitkomst hetzelfde. Daarom hebben X_1 , X_2 en X_3 dezelfde verwachtingswaarde en standaardafwijking.
- d** Je kunt $E(S)$ berekenen met de regel $E(S) = n \cdot E(X)$.
- $$E(S) = 3 \times 32,5 = 97,5$$
- e** Je kunt $\sigma(S)$ berekenen met de regel $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$.
- $$\sigma(S) = \sqrt{3} \times 16,01 \approx 27,73$$
- f** Je kunt $E(\bar{X})$ berekenen met de regel $E(\bar{X}) = E(X)$.
- $$E(\bar{X}) = 32,5$$
- g** Je kunt $\sigma(\bar{X})$ berekenen met de regel $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(S)}{\sqrt{n}}$.
- $$\sigma(\bar{X}) = \frac{16,01}{\sqrt{3}} \approx 9,24$$

- U5 a** Volgens de tweede vuistregel van de normale verdeling bevatten de 2,5% zakken de laagste gewichten maximaal $\mu - 2\sigma = 507 - 2 \times 9,5 = 488$ gram. Het is dus zo dat meer dan 2,5% van de pakken minder dan 500 gram bevat.
- b** Als hoogstens 2,5% van de pakken minder dan 500 gram bevat, dan moet de twee maal de standaardafwijking van het gemiddelde hoogstens 7 gram zijn. Oftewel: $2 \times \sigma(\bar{X}) \leq 7$ met X het gewicht van één pak zilvervliesrijst.
- $$2 \times \frac{9,5}{\sqrt{n}} \leq 7$$
- $$\frac{9,5}{\sqrt{n}} \leq 3,5$$
- $$\sqrt{n} \geq 2\frac{5}{7}$$
- $$n \geq 7\frac{18}{49}$$
- Er moeten dus minimaal 8 zakken per doos verpakt worden.

11.6 Gemengde opdrachten

- 38 a** De standaardafwijking van de tweede kansverdeling is groter, dus de grafiek zal breder zijn en dus ligt de top lager.

b



- 39** Noem het aantal benodigde trekkingen X .

x	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

$$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=3) = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=4) = 3 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=5) = 4 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{2}{5}$$

Met de rekenmachine vind je $E(X) = 4$ en $\sigma(X) = 1$.

- 40 a** De standaardafwijking van de gemiddelde lengte van de draad op de klosjes is $\frac{19}{\sqrt{10}} \approx 6,01$ meter.

- b** Dan moet gelden dat $\frac{19}{\sqrt{n}} < 2$.

$$\sqrt{n} > 9,5$$

$$n > 90\frac{1}{4}$$

Het kleinste aantal klosjes waarbij de standaardafwijking van de gemiddelde lengte kleiner dan 2 meter is, is 91.

- 41 a**
- | | | | |
|----------|---------------|---------------|---------------|
| y | 0 | 18 | 42 |
| $P(Y=y)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

Met de rekenmachine vind je $E(Y) = 15$ en $\sigma(Y) \approx 17,23$.

- b** De verwachte uitbetaling per spel is $16 + 15 = 31$ euro en de

standaardafwijking is $\sqrt{11,3^2 + 17,23^2} \approx 20,60$ euro.

- c** Na 10 keer spelen heeft hij $10 \times 32 = 320$ euro ingezet. Naar verwachting is aan hem $10 \times 31 = 310$ euro uitbetaald. Hij zal naar verwachting nog $400 - 320 + 310 = 390$ euro op zak hebben na die 10 keer spelen.

Onderzoeksopdrachten

- 42** $E(V - W) = 4,4 - 3,6 = 0,8$ en $\sigma(V - W) = \sqrt{0,7^2 + 0,4^2} \approx 0,8$.
 $V - W = 0$ als hij één standaardafwijking onder het gemiddelde ligt.
 Onder $\mu - \sigma$ ligt bij de normale verdeling 16%.
 Bij 16% van de koeien bestaat dus het risico op pensverzekering.

11 Toevalsvariabelen

Samenvatting

S1 $E(U) = -10 \times \frac{1}{6} + -14 \times \frac{1}{2} + 18 \times \frac{1}{3} = -2\frac{2}{3}$

S2

	even	oneven	totaal
een tienvoud	4	0	4
geen tienvoud	16	20	36
totaal	20	20	40

De kans op een even nummer is $P(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

De kans op een even nummer als je weet dat het nummer een tienvoud is, is gelijk aan 1. Deze kansen zijn niet gelijk aan elkaar en daarom zijn de gebeurtenissen A en C afhankelijk.

- S3 a Volgens de tweede vuistregel van de normale verdeling wegen de 2,5% zwaarste zakjes minstens $\mu + 2\sigma = 254 + 2 \times 2 = 258$ gram.
- b 254 is het gemiddelde en daarom is $P(X < 254) = 0,5$.
 $P(X > 254)$ is ook gelijk aan 0,5 en is $P(254 < X < 256)$ kleiner dan 0,5.
 $P(X < 254)$ is dus groter.

S4

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(X = 1) = 5 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

$$P(X = 4) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

$$P(X = 5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Met de rekenmachine vind je $E(X) = 2,5$ en $\sigma(X) \approx 1,12$.

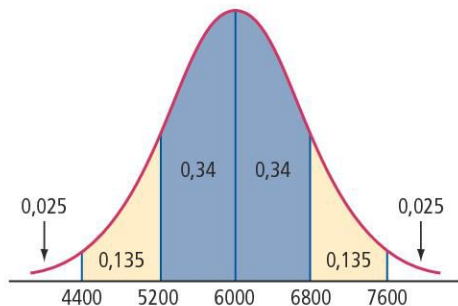
- S5 a $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 15 + 23 = 38$ en $\sigma(X + Y) = \sqrt{4^2 + 7^2} \approx 8,06$.
- b $\sigma(2X) = \sqrt{2} \times \sigma(X) \approx 5,66$ en $\sigma(X + 2) = \sigma(X) = 4$.
- c $E(Z) = E(2X - 3) = 2 \cdot E(X) - 3 = 2 \times 15 - 3 = 27$ en
 $\sigma(Z) = \sigma(2X - 3) = \sigma(2X) \approx 5,66$.

- S6 De verwachtingswaarde van de gemiddelde inhoud van de pakken sinaasappelsap is gelijk aan de verwachtingswaarde van één pak, en dus gelijk aan 1015 mL. De standaardafwijking van de gemiddeld inhoud van de pakken sinaasappelsap is gelijk aan $\frac{9}{\sqrt{10}} \approx 2,85$ mL.

Test jezelf

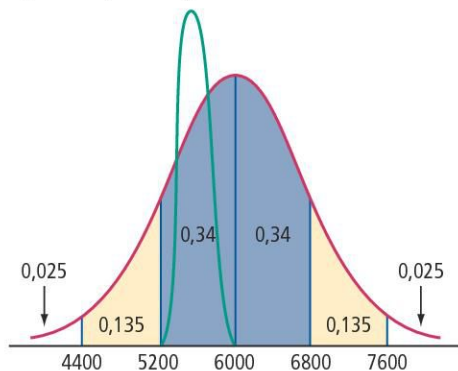
- T1 a** De kioskhouder kan niet aan de vraag voldoen als er meer dan 40 exemplaren gevraagd worden, de kans hierop is $0,15 + 0,09 + 0,03 + 0,01 = 0,28$.
- b** Met de rekenmachine vind je $E(X) = 39,3$ kranten en $\sigma(X) \approx 5,15$ kranten.

T2 a



- b** De kans dat een willekeurige lamp minder dan 5200 uur zal branden is $0,135 + 0,025 = 0,16$.
- c** De kans dat een willekeurige lamp tussen 5200 en 6800 uur zal branden is $0,34 + 0,34 = 0,68$.

d



- e** Bij de spaarlampen van het merk Lumi is de kans het grootst dat je een lamp treft die minder dan 5200 uur mee gaat aangezien het gebied onder de grafiek van de normale verdeling bij dit merk veel groter is.

- T3 a** $\mu = E(4X - 7) = 4 \cdot E(X) - 7 = 4 \times 16 - 7 = 57$ en $\sigma = \sigma(4X - 7) = \sigma(4X) = 4 \cdot \sigma(X) = 4 \times 3 = 12$.
- b** $\mu = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 16 + 19 = 35$ en $\sigma = \sigma(X + Y) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

- T4 a** Het wel of niet voorkomen van de gebeurtenissen R en B hebben geen invloed op elkaar, om die reden zijn R en B onafhankelijk.
- b** De kans op gebeurtenis R is $P(R) = \frac{1}{6}$. De kans op gebeurtenis R als je weet dat de som van de ogen groter dan 9 is, is $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Deze kansen zijn niet gelijk, en dus zijn R en S afhankelijk.

blauwe dobbelsteen	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
	som	1	2	3	4	5	6
rode dobbelsteen							

11 Toevalsvariabelen

- T5 a** De verwachte totale brandduur per doos is $10 \times 2 = 20$ uur en de standaardafwijking hiervan is $\sqrt{10} \times 15 \approx 47,43$ minuten.
- b** De standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per blok voor dozen van 10 stuks is $\frac{15}{\sqrt{10}} \approx 4,74$ minuten.
- c** Als de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur per blok hoogstens 0,05 uur is, dan moet gelden dat $\frac{15}{\sqrt{n}} \leq 3$, want 0,05 uur is gelijk aan 3 minuten. Hieruit volgt:
 $\sqrt{n} \geq 5$
 $n \geq 25$
 Bij 25 of meer blokken per verpakking is de standaardafwijking van de gemiddelde brandduur hoogstens 0,05 uur.

- T6 a** U kan de waarden 1, 2 en 4 aannemen, want de uitbetaling kan 1, 2 of 4 euro zijn.

b

u	1	2	4
$P(U = u)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$U = 1$ als de speler eerst het balletje met nummer 3 pakt en daarna het balletje met nummer 1 of 2 of als Joris eerst het balletje met nummer 2 pakt en daarna het balletje met nummer 1.

$$P(U = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$U = 2$ als de speler eerst het balletje met nummer 2 pakt, daarna het balletje met nummer 3 en als laatste het balletje met nummer 1 of als hij eerst het balletje met nummer 1 pakt, daarna het balletje met nummer 3 en als laatste het balletje met nummer 2.

$$P(U = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(U = 4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

- c** Met de rekenmachine vind je $E(U) \approx € 1,83$ en $\sigma(U) \approx € 1,07$.
- d** Josephine zal naar verwachting $10 \times 1,83 = € 18,30$ uitbetaald krijgen en dus geldt dat $E(W) = 10 \times -2 + 18,30 = -€ 1,70$.
 De standaardafwijking van de som van tien uitbetalingen is $\sqrt{10} \times 1,07 \approx € 3,38$. En dus is $\sigma(W) \approx € 3,38$.

Extra oefening

- E1 a**
- | | | | |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| x | 3 | 4 | 5 |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |
- $$P(X = 3) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$
- $$P(X = 4) = 3 \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$
- $$P(X = 5) = \binom{4}{2} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{2}{5}$$
- b** Met de rekenmachine vind je $E(X) = 4,2$ en $\sigma(X) \approx 0,75$.

- E2 a** $E(3X + 2,2) = 3 \cdot E(X) + 2,2 = 3 \times 14 + 2,2 = 44,2$ en
 $\sigma(3X + 2,2) = \sigma(3X) = 3 \cdot \sigma(X) = 3 \times 2 = 6$.
- b** $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 14 + 19,2 = 33,2$ en
 $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2} = \sqrt{2^2 + 7,1^2} \approx 7,38$.
- E3** $E(T_c) = E\left(\frac{5}{9} \cdot (T_F - 32)\right) = \frac{5}{9} \cdot E(T_F) - \frac{5}{9} \times 32 = \frac{5}{9} \times 84 - 17\frac{7}{9} \approx$
 28,9 graden Celsius en
 $\sigma(T_c) = \sigma\left(\frac{5}{9} \cdot (T_F - 32)\right) = \frac{5}{9} \cdot \sigma(T_F) = \frac{5}{9} \times 9 = 5$ graden Celsius.
- E4 a** De verwachtingswaarde van het totale gewicht van 20 pakken suiker bereken je door het gemiddelde gewicht van één pak suiker met 20 te vermenigvuldigen $E(T) = 20 \times 1000 = 20\,000$ gram.
- b** $\sigma(T) = \sqrt{20} \times 12 \approx 53,67$ gram
- c** $E(G) = 1000$ gram en $\sigma(G) = \frac{12}{\sqrt{20}} \approx 2,68$ gram.
- E5 a** De uitkomst van de eerste worp heeft geen invloed op de uitkomst van de tweede worp en omgekeerd, en dus zijn de gebeurtenissen A en B onafhankelijk.
- b** De kans op gebeurtenis A is $P(A) = \frac{1}{6}$ en de kans op gebeurtenis A als je weet dat beide worpen gelijk zijn is ook $\frac{1}{6}$.
 De kans op gebeurtenis C is $P(C) = \frac{1}{6}$ en de kans op gebeurtenis C als je weet dat de eerste worp een 3 is, is ook $\frac{1}{6}$.
 De gebeurtenissen A en C zijn dus onafhankelijk.
- E6 a** De middelste 68% liggen bij de normale verdeling tussen
 $\mu - \sigma = 307 - 31 = 276$ liter en $\mu + \sigma = 307 + 31 = 338$ liter.
- b** De middelste 68% liggen tussen $\mu - \sigma = 65 - 12 = 53$ liter en
 $\mu + \sigma = 65 + 12 = 77$ liter.
- c** De eigenaar verwacht dat er totaal op een avond $307 + 65 = 372$ liter cola wordt verkocht.
- d** De standaardafwijking van het totaal is $\sqrt{31^2 + 12^2} \approx 33,24$ liter.
 68% van de totale colaconsumptie zal tussen
 $\mu - \sigma = 372 - 33,24 = 338,76$ liter en $\mu + \sigma = 372 + 33,24 = 405,24$ liter liggen.
- E7 a** Van de middelste 68% van de pakjes thee in de doos zit het gewicht tussen
 $\mu - \sigma = 102,2 - 3,2 = 99$ gram en $\mu + \sigma = 102,2 + 3,2 = 105,4$ gram.
- b** De verwachtingswaarde van het totale gewicht aan thee per doos is
 $80 \times 102,2 = 8176$ gram terwijl dit $80 \times 100 = 8000$ gram zou moeten zijn.
 Je verwacht dus $8176 - 8000 = 176$ gram thee teveel per doos.
- E8 a** De verwachtingswaarde van het totale gewicht van een zak met tulpenbollen is $100 \times 10 = 1000$ gram en de standaardafwijking is $\sqrt{100 \times 1,5} = 15$ gram.
- b** De verwachtingswaarde van het totale gewicht van een zak met narcissenbollen is $40 \times 3,5 = 140$ gram en de standaardafwijking is
 $\sqrt{40 \times 0,7} \approx 4,43$ gram.
- c** $E(G) = 4 \times 1000 + 10 \times 140 = 5400$ gram en
 $\sigma(G) = \sqrt{4 \times 15^2 + 10 \times 4,43^2} \approx 33,11$ gram.