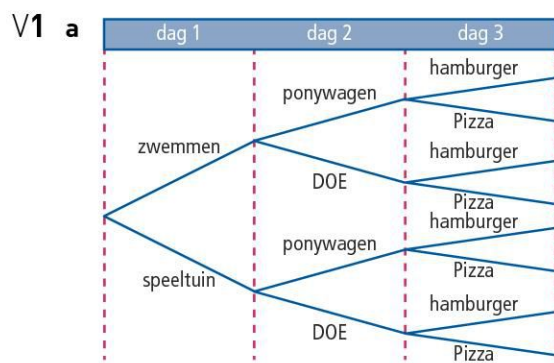


1 Systematisch tellen

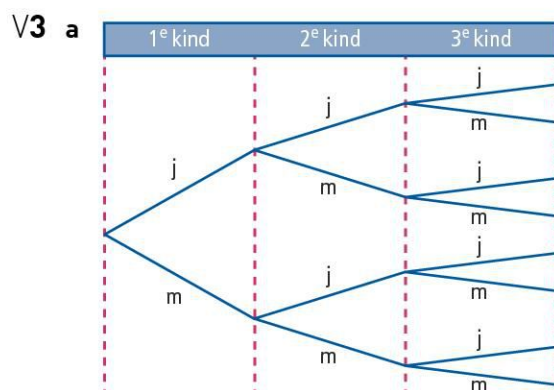
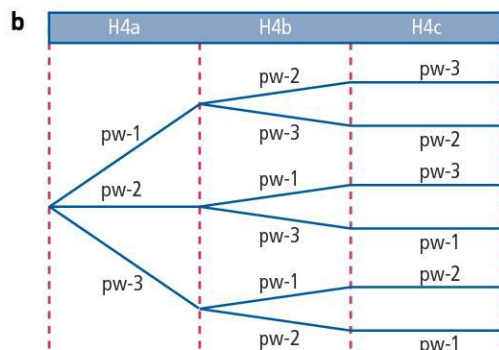
Voorkennis



- b** Het totaal aantal mogelijkheden is gelijk aan het totaal aantal takken dat je telt bij dag 3. Er zijn acht verschillende invullingen voor de drie dagen.

V2 a

V4	V4b	V4c
pw-1	pw-2	pw-3
pw-1	pw-3	pw-2
pw-2	pw-1	pw-3
pw-2	pw-3	pw-1
pw-3	pw-1	pw-2
pw-3	pw-2	pw-1



- b** In het boomdiagram zie je dat er acht verschillende volgorden zijn.
c Er zijn drie volgorden met twee meisjes.

d

<i>aantal meisjes</i>	3	2	1	0
<i>aantal volgorden</i>	1	3	3	1

- V4 a** Na twee sets gewonnen te hebben is Halep winnares. Er hoeft geen derde set meer te worden gespeeld.
- b** Er zijn zes manieren waarop dat kan, want er zijn zes wegen in het boomdiagram mogelijk.
- c** Er zijn drie wedstrijdverlopen waarbij Halep wint.
- d** Dat is van bovenaf gezien de vierde route. (S-H-H).
- e** De andere route met hetzelfde eindresultaat is H-S-H.
- f** Het gaat erom wie van beide heren het eerst drie sets heeft gewonnen. Als je een gewonnen set van de ene speler aangeeft met A en die van de andere speler met B, zijn er de volgende wedstrijdverlopen mogelijk:
- | | | |
|-----------|-----------|--------------------|
| A-A-A | B-B-B | (winnen in 3 sets) |
| A-A-B-A | B-B-A-B | (winnen in 4 sets) |
| A-B-A-A | B-A-B-B | |
| B-A-A-A | A-B-B-B | |
| B-B-A-A-A | A-A-B-B-B | (winnen in 5 sets) |
| B-A-B-A-A | A-B-A-B-B | |
| B-A-A-B-A | A-B-B-A-B | |
| A-B-B-A-A | B-A-A-B-B | |
| A-B-A-B-A | B-A-B-A-B | |
| A-A-B-B-A | B-B-A-A-B | |
- In het totaal zijn er dan $2 + 6 + 12 = 20$ wedstrijdverlopen mogelijk.

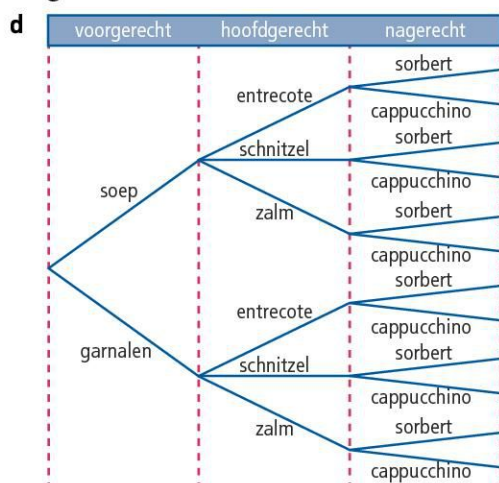
- V5 a** Dat gebeurt bij zes worpen.
- b** Zeven ogen komt zes keer voor, elf ogen komt twee keer voor.
Dus in $6 + 2 = 8$ gevallen is de som van de ogen zeven of elf.
- c** In het schema kun je tellen dat bij 18 worpen de som van de ogen oneven is.
- d**
- | × | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |
- e** In de tabel zie je dat het product van de ogenaantallen in vier gevallen gelijk is aan twaalf.
- f** In de tabel zie je dat een oneven product negen keer voorkomt.

1 Systematisch tellen

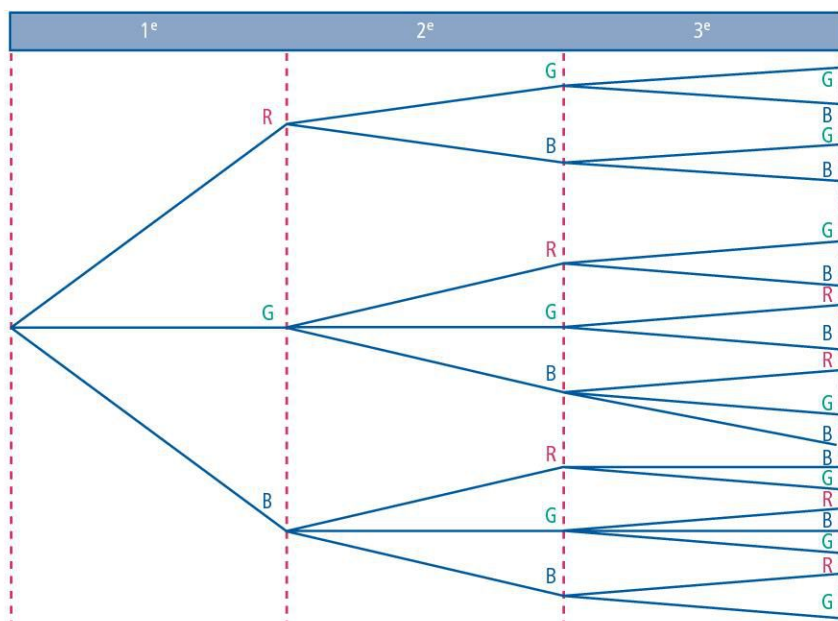
1.1 Mogelijkheden tellen

intro Je begint met een sticker aan de bovenkant te plakken, het maakt niet uit welke je daarvoor kiest. Voor de plaats aan de onderkant heb je keus uit vijf stickers. Er zijn vier stickers over voor de zijkanten. Bij de eerste zijkant maakt het niet uit welke je kiest. Voor het vlakje rechts daarvan heb je keus uit drie en voor het volgende vlakje nog keus uit twee. Het totaal aantal mogelijkheden is dus $5 \times 3 \times 2 = 30$. Het is mogelijk dat de dobbelstenen van alle 29 leerlingen verschillend zijn.

- 1 a De maaltijd bestaat uit drie gangen. Bij elk van de drie gangen is er een keuze.
- b Op de stippen boven de kolommen komen de woorden voorgerecht, hoofdgerecht en nagerecht.
- c Op de stippen bij de getekende takken komen de woorden soep en garnalen.



- e In het boomdiagram zie je dat er 12 verschillende menu's mogelijk zijn.
- 2 a Er zijn $4 \times 3 \times 2 = 24$ verschillende uitvoeringen mogelijk.
- b Er rijden $4 \times 2 \times 2 = 16$ uitvoeringen niet op diesel.
- 3 a In het getekende boomdiagram kan Leo drie keer kiezen uit twee mogelijkheden. Maar Leo heeft twee keuzemomenten, namelijk voor baan 1 en baan 2. Bij die keuzemomenten kan hij kiezen uit drie kleuren.
- b Bij een correct boomdiagram staan de banen 1 en 2 bovenaan in het diagram en kan elk van de banen de kleuren rood, wit en blauw krijgen, dus bij baan 1 komen er drie takken en elk van die takken splitsen in drie takken voor elk van de kleuren voor baan 2. Dat geeft in het totaal negen mogelijkheden.
- 4 Voor de eerste trekking zijn er drie verschillende mogelijkheden. Het aantal mogelijkheden bij de tweede trekking hangt af van wat je de eerste keer hebt getrokken: was dat een rode, dan zijn er twee mogelijkheden voor de tweede trekking, anders drie. Het aantal mogelijkheden voor de derde trekking hangt weer af van wat je in de eerste en tweede trekking hebt getrokken. Het boomdiagram is dus onregelmatig.



Er zijn 19 mogelijkheden.

- 5 a** Het is een regelmatig boomdiagram.
 Bij de kolommen staat ruggedeelte, zitgedeelte, balkjes en kopse kanten.
 De keuzes zijn rood, blauw, zwart en geel, waarbij de keuzemogelijkheid steeds één kleiner wordt.
- b** De Rietveldstoel kan dus op $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ verschillende manieren van kleuren worden voorzien.
- 6** Voor de bovenste baan kan Alexa kiezen uit vier kleuren en voor elke volgende baan uit drie kleuren omdat de kleur van de baan er boven niet gebruikt mag worden.
 Er zijn dus $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$ verschillende vlaggen mogelijk.

- 7 a**
- | | |
|---------|---------|
| RWRWRWW | WRWRWRW |
| RWRWWRW | WRWRWWR |
| RWRWWWR | WRWWRWR |
| RWWRWRW | WWRWRWR |
| RWWRWWR | |
| RWWWRWR | |
- Er zijn 10 verschillende rijtjes mogelijk.

- b** Je kunt het uitschrijven, noem de leerlingen A, B, C, D, E en F:
- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| AB-CD-EF | AC-BD-EF | AD-BC-EF | AE-BC-DF | AF-BC-DE |
| AB-CE-DF | AC-BE-DF | AD-BE-CF | AE-BD-CF | AF-BD-CE |
| AB-CF-ED | AC-BF-DE | AD-BF-CE | AE-BF-CD | AF-BE-CD |

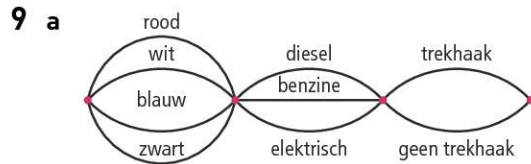
Je kunt het ook beredeneren.

Leerling A kan gecombineerd worden vijf andere leerlingen. Er blijven dan nog vier leerlingen over. Van die vier leerlingen (bijvoorbeeld C, D, E, en F) kan voor de tweede groep leerling C gecombineerd worden met drie andere leerlingen. Dan blijven er automatisch twee over voor de derde groep.

Er zijn dus $5 \times 3 = 15$ verschillende tweetallen mogelijk.

1 Systematisch tellen

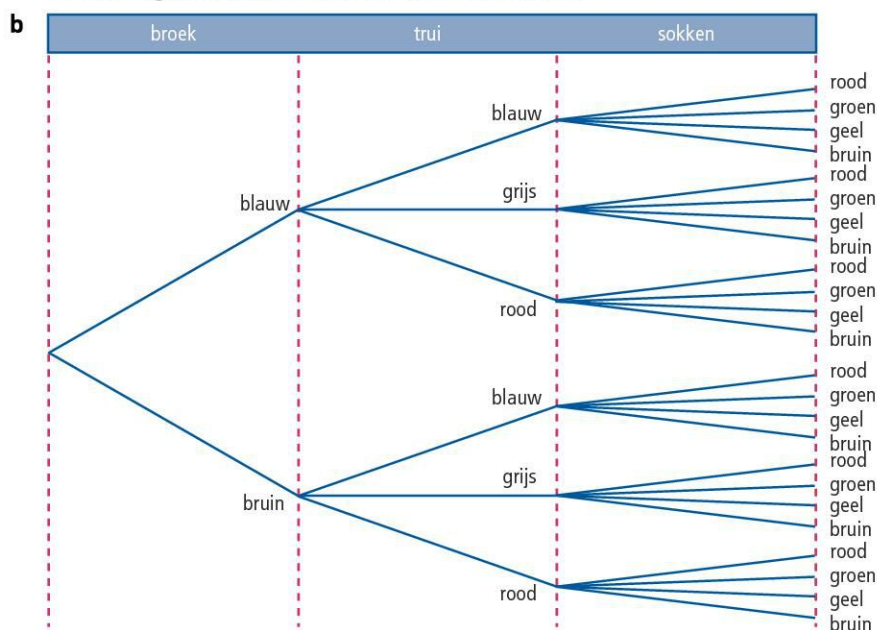
- 8 a** Van A naar B kun je kiezen uit drie wandelpaden. Van B naar C kun je vervolgens kiezen uit 2 wandelpaden. Elke keuze van A naar B kun je combineren met elke keuze van B naar C.
In totaal zijn er $3 \times 2 = 6$ wandelingen mogelijk.
- b** Dan zijn er $3 \times 5 = 15$ wandelingen mogelijk.



In het wegendiagram zie je dat er $4 \times 3 \times 2 = 24$ uitvoeringen mogelijk zijn.
Er rijden $4 \times 2 \times 2 = 16$ uitvoeringen niet op diesel.

- b** Het aantal wegen dat vertrekt uit een punt naar een volgend punt verschilt per keuze. Diesel en benzine hebben twee keuzemogelijkheden (met of zonder trekhaak) en elektrisch nog maar één (zonder trekhaak).
Dan kun je de oplossing niet met een vermenigvuldiging berekenen.

- 02 a** Steven moet drie keer een keuze maken (broek, trui en sokken). Het boomdiagram bestaat dus uit drie kolommen.



- c** Steven kan $2 \times 3 \times 4 = 24$ combinaties maken.
- d** In dat geval wordt het aantal keuzemogelijkheden $2 \times 2 \times 4 = 16$.
- e** Dit moet je tellen in het boomdiagram.
Er zijn 15 mogelijkheden.

- 06 a** Sharon heeft drie kleuren wol. Ze kan dus kiezen uit drie verschillende kleuren.
- b** Bij de tweede strook kan ze kiezen uit twee verschillende kleuren. De kleur die ze als eerste heeft gekozen, mag ze niet weer kiezen..
- c** De keuze voor de derde strook hangt af van de keuze die ze gemaakt heeft voor de tweede strook. Die mag ze niet opnieuw kiezen. Ook hier kan ze dan kiezen uit twee kleuren.
- d** Sharon maakt een sjaal met zes stroken. Ze moet dus zes keer een keuze maken.
In totaal zijn er dan $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$ mogelijkheden voor de sjaal.
- e** Dan zijn er $5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 5120$ mogelijkheden.

- U1 a** Bij de eerste schoen heeft ze keus uit 8, de tweede moet dezelfde kleur zijn, dus kan ze niet kiezen. Bij de derde schoen keus uit 6, bij de vierde geen keus, enz. Het aantal mogelijkheden is dus $8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$.
- b** Op positie 1 staat een linkerschoen, want als er een rechterschoen stond, dan zou de bijbehorende linkerschoen daar rechts van staan.
- c** Voor de schoen op positie 1 zijn er 4 mogelijkheden want het moet een linkerschoen zijn.
- d** De bijbehorende rechterschoen kan op 7 verschillende plaatsen staan.
- e** Voor de tweede linkerschoen heb je keus uit drie verschillende schoenen, deze komt op plaats 2 of 3, afhankelijk waar de rechterschoen van schoen 1 staat. Voor de rechterschoen van de tweede linkerschoen zijn dan nog vijf plaatsen, en zo verder.
- In het totaal kan dat op $4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 = 2520$ manieren.

1.2 Machtsbomen en faculteitsbomen

intro In de formatie zijn zes plaatsen.

Voor plaats A heb je de keus uit 6, voor plaats B keus uit 5, voor plaats C keus uit 4, enz.

Er zijn dus $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ verschillende formaties.

Het lukt dus zeker om elke dag een andere formatie te kiezen.

A	B
C	D
E	F

- 10 a** Bovenaan het boomdiagram staat: eerste worp, tweede worp en derde worp. Je tekent twee takken, die elk nog twee keer splitsen in twee takken. Het boomdiagram is regelmatig.
- b** Er zijn $2 \times 2 \times 2 = 8$ uitslagvolgorden mogelijk.
- c** Er komen twee kolommen bij waar de takken zich in tweeën splitsen. Er zijn dan $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ volgorden mogelijk.
- d** Je krijgt een boomdiagram waar het aantal takken acht keer verdubbelt. Je berekent het aantal mogelijkheden met $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$.
- e** Je zoekt een macht van 2 die groter is dan 1000. Er geldt $2^9 = 512$ en $2^{10} = 1024 > 1000$. Bij 10 of meer keer gooien is het aantal mogelijke volgorden meer dan 1000.
- 11 a** Het boomdiagram krijgt vier kolommen.
- b** Voor de eerste driehoek kan Milo kiezen uit vier kleuren.
- c** Elke driehoek moet een verschillende kleur hebben. Voor de tweede driehoek kan Milo daarom kiezen uit de drie overgebleven kleuren.
- d** De driehoek kan op $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ manieren worden ingekleurd.
- 12 a** Er zijn dan $3^{12} = 531\,441$ mogelijkheden.
- b** Het aantal mogelijke volgorden is $11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 11! = 39\,916\,800$.
- 13** Voor elke broodsoort kan Peter kiezen uit vijf soorten beleg. Het lunchpakket kan dus op $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ manieren worden samengesteld.
- 14** Reynauld kan zijn boterhammen op $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ volgorden opeten.

1 Systematisch tellen

15 a $10! = 3\,628\,800$

$14! = 87\,178\,291\,200$

b $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$

$\frac{11!}{9!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 1}{9 \times 8 \times \dots \times 1} = 11 \times 10 = 110$

$\frac{100!}{97!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times \dots \times 1}{97 \times 96 \times \dots \times 1} = 100 \times 99 \times 98 = 970\,200$

16 a Voor elke worp zijn er zes mogelijkheden, dus in het totaal kan hij $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296$ mogelijke getallen krijgen.

b Jonneke kan de attracties op $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ verschillende volgorden kiezen.

17 a Dat kan op $7! = 5040$ manieren.

b Dat kan op $26^4 = 456\,976$ manieren.

c Er zijn dan $5! = 120$ verschillende woorden mogelijk.

d Dan zijn er $3^{50} \approx 7,18 \times 10^{23}$ manieren van beantwoorden.

013 a Geke kan dan opnieuw kiezen uit de vier mogelijke smaken.

b Het aantal mogelijkheden soep waaruit Geke elke dag kan kiezen, blijft steeds gelijk, namelijk vier keuzes.

c Een schoolweek bestaat uit vijf dagen. Er zijn dus vijf keuzemomenten.

d Het boomdiagram is een regelmatig boomdiagram. Bij elk keuzemoment kan er gekozen worden uit vier mogelijke smaken.

e Er zijn dan $4^5 = 1024$ weekmenu's.

014 a Er zijn acht roeiers. Voor de eerste plaats kun je dan kiezen uit acht mogelijkheden.

b Je kunt een roeier maar één keer kiezen. Voor de tweede plaats kun je dan nog kiezen uit de zeven overgebleven roeiers.

c Bij elk keuzemoment is het aantal mogelijke roeiers eentje minder.

d Er moeten acht roeiers worden verdeeld. Er zijn dan ook acht kolommen in het boomdiagram.

e Er zijn $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40\,320$ mogelijke volgorden.

U2 Eerst bereken je het aantal mogelijke volgorden per huis. Er zijn vier verschillende kleuren lampen dus deze kunnen op $4! = 24$ verschillende manieren in de lantaarns.

In de straat zijn vervolgens 15 verschillende huizen die elk een setje van vier lantaarns ophangen.

Er zijn dan $24^{15} \approx 5,05 \times 10^{20}$ mogelijke volgorden van de lampen.

1.3 Permutaties

intro Elke avond kun je voor de bewoner uit vijf spelers kiezen, vervolgens voor de enquêteur uit vier spelers en voor de pakketbezorger uit drie spelers. Er zijn dus $5 \times 4 \times 3 = 60$ mogelijkheden om de rollen te verdelen. Dat is dus ruim voldoende om een jaar lang elke week een andere rolverdeling te maken.

- 18 a** Het is geen machtsboom omdat je de voorzitter uit dertien mensen kiest, de secretaris vervolgens uit twaalf mensen en de penningmeester uit elf mensen. De keuze wordt dus bij iedere kolom één kleiner.
Het is geen faculteitsboom omdat je maar drie mensen kiest uit dertien, dus je hebt maar drie keuzemomenten.
- b** Er zijn drie kolommen.
- c** Bij de eerste kolom zijn er dertien takken, bij de tweede kolom twaalf takken en bij de derde kolom elf takken.
- d** Er zijn $13 \times 12 \times 11 = 1716$ bestuurssamenstellingen mogelijk.
- 19 a** Het eerste werk kan hij op negen plaatsen ophangen, het tweede werk nog op acht plaatsen en zo verder.
Het totaal aantal manieren is dus gelijk aan $9! = 362\,880$.
- b** Op plek één heeft hij keuze uit negen werken en voor plek twee heeft hij dan nog keuze uit acht werken.
- c** Het totaal aantal mogelijkheden is $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60\,480$.
- 20 a** Het aantal verschillende truien is gelijk aan het aantal permutaties van 5 uit 8. Dus $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.
- b** Het aantal verschillende woorden is gelijk aan het aantal permutaties van 4 uit 26 en is gelijk aan $26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358\,800$.
- c** Het aantal verschillende mogelijkheden is gelijk aan het aantal permutaties van 5 uit 40 en dus gelijk aan $40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 = 78\,960\,960$.
- d** Het aantal verschillende mogelijkheden is gelijk aan het aantal permutaties van 4 uit 24 en dus gelijk aan $24 \times 23 \times 22 \times 21 = 255\,024$.
- 21 a** De driehoekige vlakjes kunnen op $4! = 24$ manieren worden gekleurd met de kleuren rood, geel, blauw en zwart.
- b** Er kunnen acht vlakken worden gekleurd. Het aantal mogelijke manieren om vier vlakjes met vier verschillende kleuren in te vullen is gelijk aan het aantal permutaties van 4 uit 8. Dit is $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.
- 22 a** Het aantal verschillende suikerzakjes is $6! = 720$.
- b** Het aantal is gelijk aan het aantal permutaties van 6 uit 10, dus $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151\,200$.
- c** Voor het woord 'suiker' kun je uit zes plaatsen kiezen.
Voor de andere vijf plaatsen kun je eerst uit negen talen kiezen, vervolgens uit acht en zo verder.
Het aantal verschillende suikerzakjes is dus $6 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 90\,720$.
- 23 a** Het aantal manieren waarop de taken kunnen worden verdeeld, is gelijk aan het aantal permutaties van 3 uit 8, dus $8 \times 7 \times 6 = 336$.
- b** Dat aantal is gelijk aan $8! = 40\,320$.
- c** De meisjes kunnen op $4! = 24$ verschillende manieren in de groene roeiboot gaan zitten en de jongens op 24 verschillende manieren in de rode roeiboot. Dat zijn $24 \times 24 = 576$ verschillende mogelijkheden.
- d** Berber kan uit acht plaatsen kiezen, maar Luuk kan eigenlijk niet kiezen. Hij gaat naast Berber zitten en heeft dus maar één mogelijke zitplaats.
- e** Er zijn nadat Berber en Luuk zijn gaan zitten nog zes zitplaatsen over. Het aantal verschillende mogelijkheden is dus $8 \times 1 \times 6! = 5760$.

1 Systematisch tellen

- 020 a** Voor de eerste film zijn er 18 mogelijkheden, voor de tweede film kunnen de vrienden dan kiezen uit de 17 overgebleven films.
- b** Ze gaan in totaal zeven films kijken, dus je moet zeven getallen met elkaar vermenigvuldigen.
- c** Het aantal mogelijkheden is dan $18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 160\,392\,960$.

- 022 a** Er zijn dan $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ verschillende lijstjes mogelijk.
- b** Het lijstje kan op $14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 = 240\,240$ manieren worden ingevuld.
- c** De naam van meneer Kuipers kan op vijf plaatsen worden ingevuld.
- d** Na het invullen van die naam zijn er nog vier posities vrij.
- e** Dat kan op $13 \times 12 \times 11 \times 10 = 17\,160$ manieren.
- f** Er zijn $5 \times 17\,160 = 85\,800$ lijstjes mogelijk waar de heer Kuipers op voorkomt.

- U3 a** Als je aftelt van 37 tot en met 27 zijn er elf getallen.
De waarde van k is dus gelijk aan 11.
- b** Een permutatie van 12 uit 45 is $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35 \times 34$.
Dit is hetzelfde als $\frac{45 \times 44 \times 43 \times \dots \times 1}{33 \times 32 \times \dots \times 1} = \frac{45!}{33!}$
- c** Dat wordt dan $\frac{55!}{(55-19)!} = \frac{55!}{36!} \approx 3,41 \times 10^{31}$.

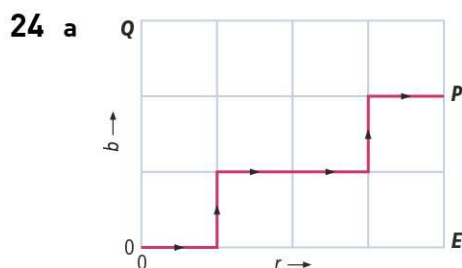
1.4 Routes in een rooster

intro Van 10th Ave naar 12th Ave is twee blokken naar rechts (r) en van 80th street naar 76th street is vier blokken naar boven (b).
Je kunt alle mogelijkheden systematisch uitschrijven.

De mogelijkheden zijn:

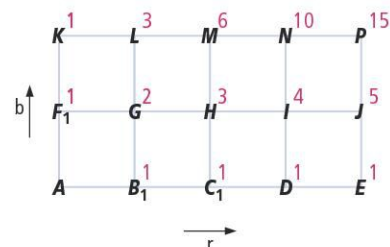
r r b b b b b r r b b b b b r r b b b b b r r b b b b b r r
 r b r b b b b r b r b b b b r b r b b b b r b r
 r b b r b b b r b b r b b b r b b r
 r b b b r b b r b b b r
 r b b b b r

Donald kan op 15 manieren naar zijn doel lopen.



- b** Andere routes zijn bijvoorbeeld: r r b r b r, b b r r r r en r r b b r r.
- c** Je gaat dan drie keer een stap naar boven. Om in P te komen, mag je maar twee keer een stap naar boven.
- d** Om bij Q te komen moet je drie stappen naar boven doen, waardoor je een omweg zou moeten maken om bij P uit te komen.

- 25 a** De punten B en C bereik je door alleen naar rechts te gaan en F door alleen naar boven te gaan. Dat kan maar op één manier.
- b** De punten D , E en K kun je ook maar op één manier bereiken.
- c** Je kunt bij punt G komen via punt B , maar ook via punt F .
- d** Bij punt H kun je dus op $2 + 1 = 3$ manieren komen.
- e** Bij punt L komt het getal 3, want je kunt er op twee manieren komen via punt G en op één manier via punt K .
- f** Bij punt M kun je via punt H en via punt L komen.
Bij punt H kom je op drie manieren en bij punt L kom je op drie manieren
Bij punt M kun je dus op $3 + 3 = 6$ manieren komen.
- g** Zie rooster.
- h** Je kunt op 15 manieren bij punt P komen.



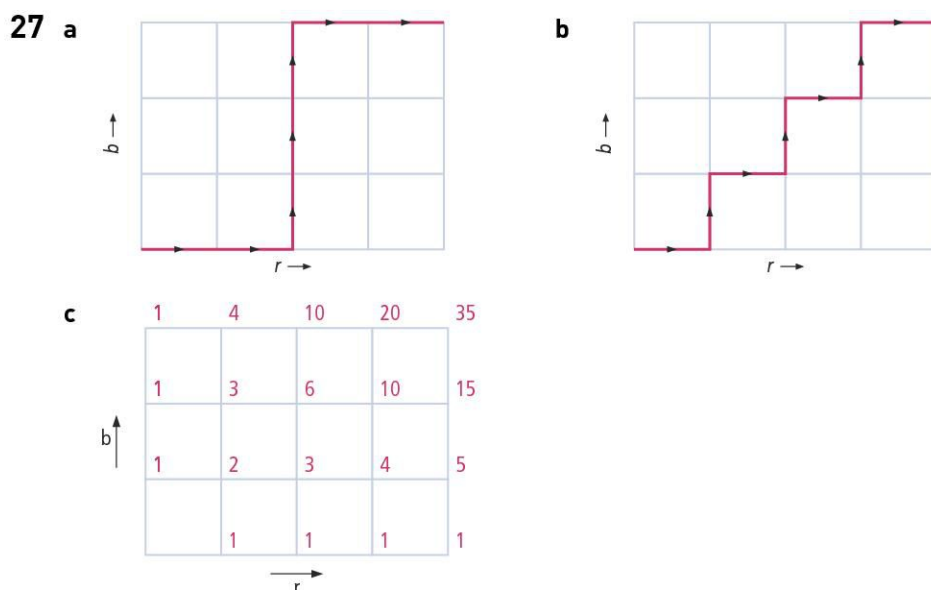
26

1	3	6	10	15	21	28
1	2	3	4	5	6	7
	1	1	1	1	1	1

1	7	28	84
1	6	21	56
1	5	15	35
1	4	10	20
1	3	6	10
1	2	3	4
	1	1	1

1	6	21	56	126
1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
	1	1	1	1

- a** Er zijn 28 mogelijke routes.
- b** Er zijn 84 mogelijke routes.
- c** Er zijn 126 mogelijke routes.



Het aantal scoreverlopen vind je door vier naar rechts en drie naar boven te gaan. Dit aantal is gelijk aan 35.

b

	1	3	6	10	15
1	1	2	3	4	5
2	1	1	1	1	1

Figure 1 shows a 6x6 grid of nodes. The nodes are labeled with numerical values. The values are color-coded: blue for nodes closer to A, red for nodes closer to D, and black for nodes in the middle. The values increase from A towards D.

1	6	21	56	126	252	462	792
1	5	15	35	70	126	210	330
1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

- 029 a** Het aantal routes van punt P naar punt Q is gelijk aan het aantal routes in een rooster van vijf bij twee. Dit aantal is 21.
- b** Het aantal routes van punt Q naar punt R is gelijk aan het aantal routes in een rooster van drie bij twee. Er zijn 10 kortste routes van Q naar R .
- c** Het aantal routes van punt P naar punt R is gelijk aan $21 \times 10 = 210$.

- U4 a** Voor de 3 zijn acht plaatsen beschikbaar. Voor de 4 zijn nog zeven plaatsen over en voor de 7 nog zes plaatsen.
De andere plaatsen zijn automatisch voor de 6-en.
In totaal zijn er dus $8 \times 7 \times 6 = 336$ mogelijkheden.
- b** Voor de 3 zijn acht keuzes, voor de 5 zijn zeven keuzes en voor de 7 zijn zes keuzes.
De overige vijf keuzes zijn voor drie keer een 8 en twee keer een 9.
Het aantal mogelijkheden is gelijk aan het aantal routes in een rooster van drie bij twee, ofwel 10.
Het totaal aantal mogelijkheden is dus $8 \times 7 \times 6 \times 10 = 3360$.

1.5 Combinaties

intro Het verwisselen van bijvoorbeeld de 2 en de 6 betekent dat voor Tom een nieuwe volgorde ontstaat. In het rijtje van Vera verandert niets.
De lijst van Tom zal dus langer worden.
Het aantal manieren van Tom is $7! = 5040$ manieren.
Het aantal manieren bij Vera komt overeen met het aantal routes in een rooster van vier breed en drie hoog en dit is maar 35.
De lijst van Tom is langer.

- 31 a** Een rode bal betekent geselecteerd en een witte bal betekent niet geselecteerd.
- b** Je kiest een drietal uit een zevental. Dit is gelijk aan het aantal routes van O naar $(4, 3)$ en is gelijk aan 35.
- 32 a** Je kiest 14 balletjes uit een totaal van 20. Als je er 14 kiest, kies je er 6 niet. Het aantal mogelijkheden waarop je 14 uit 20 kunt kiezen, moet dus gelijk zijn aan het aantal mogelijkheden waarop je 6 niet kiest uit 20.
- b** $\binom{5}{2} = 10$ en $\binom{15}{6} = 5005$.
- 33 a** Jente kan $\binom{8}{5} = 56$ selecties van vijf kleuren maken.
- b** Martijn kan $\binom{26}{4} = 14\,950$ viertallen maken.
- c** De docent Nederlands kan $\binom{40}{5} = 658\,008$ selecties maken.
- d** Shakira kan $\binom{9}{4} = 126$ selecties maken.

1 Systematisch tellen

- 34 a** Het aantal mogelijke scoreverlopen is gelijk aan $\binom{10}{4} = 210$.
- b** Er zijn dan nog drie punten gescoord door de thuisploeg en twee door de uitploeg, dus het aantal scoreverlopen ná de rust is gelijk aan $\binom{5}{3} = 10$.
- c** Het totaal aantal score verlopen is gelijk aan het aantal scoreverlopen voor de rust keer het aantal scoreverlopen na de rust, dus $210 \times 10 = 2100$.

- 35 a** Het aantal manieren is gelijk aan $\binom{37}{8} = 38\,608\,020$.

- b** Als Mark als eerste een drietal boeken krijgt, is het aantal mogelijkheden gelijk aan $\binom{8}{3} = 56$.

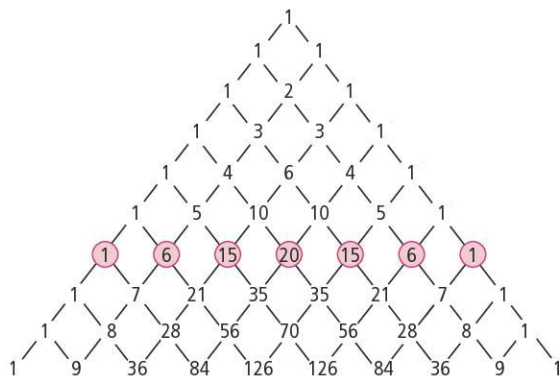
Er zijn dan nog vijf boeken over en uit dat vijftal krijgt Koen drie boeken.

Het aantal mogelijke drietallen boeken voor Koen is gelijk aan $\binom{5}{3} = 10$.

Dus het totaal aantal mogelijkheden is gelijk aan $56 \times 10 = 560$.

- 36 a** Het aantal kortste routes van punt S naar punt T is gelijk aan $15 + 6 = 21$.
- b** $\binom{6}{3}$ komt overeen met zes stappen in het rooster waarvan er drie naar rechts gaan. In figuur A kun je aflezen dat dit gelijk aan 20 is.
- c** Het onderste getal is de som van de twee getallen die er schuin boven staan (verbonden door een streepje).

d



- e** Dat is het vierde én het zesde getal uit rij 8.

- 37 a** Het vierde getal in rij 9 is 84.
- b** Het derde getal op rij 8 is $\binom{8}{2} = 28$.
- c** Het getal $\binom{11}{5}$ staat op de zesde positie in rij elf.

- 033 a** In het eerste voorbeeld zijn de leerlingen A, D, E en I geselecteerd. In het tweede voorbeeld zijn dit de leerlingen B, D, F en J.
- b** Er zijn tien leerlingen. De leerlingen die worden geselecteerd, staan voor de rode ballen. De rest, zes leerlingen, staan dan voor de witte ballen.
- c** Je kunt dan kiezen uit twee alternatieven: wel of niet geselecteerd worden. Er worden vier leerlingen geselecteerd en zes niet. Dus je kunt werken met een rooster van zes breed en vier hoog.
- d** Er zijn tien leerlingen waarvan er vier worden geselecteerd, dit komt over een met $\binom{10}{4} = 210$ of $\binom{10}{6} = 210$.

U5 Voor de drie rode schriften kan hij kiezen uit elf vakken.

Dat kan op $\binom{11}{3} = 165$ manieren.

Voor de vier blauwe schriften kan hij vervolgens kiezen uit acht vakken.

Dat kan op $\binom{8}{4} = 70$ manieren.

Voor de vier groene schriften blijven dan nog vier vakken over.

Hij heeft dus $165 \times 70 = 11\,550$ mogelijkheden om de schriften over de vakken te verdelen.

1.6 Het goede telmodel kiezen

Intro Een geschikt telmodel is een rooster. Je hebt vier verschillende cijfers nodig uit tien. Deze vier cijfers kun je maar op één manier van klein naar groot rangschikken.

Er zijn dus $\binom{10}{4} = 210$ verschillende rijtjes met vier cijfers mogelijk.

38 a Het aantal dagprogramma's is $4 \times 5 \times 3 = 60$.

b Het is een selectie van vijf wandelaars uit tien. De andere vijf komen dan bij de andere gids.

Het aantal manieren waarop dat kan, is gelijk aan $\binom{10}{5} = 252$.

Er zijn dus 252 verschillende verdelingen van de wandelaars over de twee gidsen.

c Dat kan op $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$ manieren.

39 a Het aantal verschillende volgordes is gelijk aan $24! \approx 6,20 \times 10^{23}$.

b Dit is een selectie van 10 uit 24.

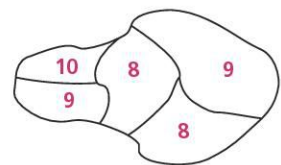
Het aantal mogelijkheden is gelijk aan $\binom{24}{10} = 1\,961\,256$.

c Het aantal rijtjes is gelijk aan

$24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \approx 7,12 \times 10^{12}$.

d In de tekening hiernaast zie je uit hoeveel kleuren Margriet telkens kan kiezen.

Het kan dus op $10 \times 9 \times 8 \times 9 \times 8 = 51\,840$ manieren.



40 In het eerste voorbeeld kan elke keuze aan jongens gecombineerd worden met elke keuze aan meisjes.

In het tweede voorbeeld gaat het om een rijtje met drie witte kralen of een rijtje met twee witte kralen.

1 Systematisch tellen

- 41 a** Als alle jongens een goudkleurig hoedje krijgen, dan zijn er geen goudkleurige hoedjes meer voor de zes meisjes. De zes meisjes krijgen dan een zilverkleurig hoedje. Dit kan dus op 1 manier.
of
Als alle jongens een zilverkleurig hoedje krijgen, dan zijn er nog vier zilverkleurige en vier goudkleurige hoedjes over voor de zes meisjes.
Vier meisjes goud en twee meisjes zilverkleurig kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren.
Drie meisjes goud en drie meisjes zilverkleurig kan op $\binom{6}{3} = 20$ manieren.
Twee meisjes goud en vier meisjes zilverkleurig kan op $\binom{6}{4} = 15$ manieren.
Het kan dus op $1 + 15 + 20 + 15 = 51$ manieren.
- b** Voor het goudkleurige hoedje selecteer je twee jongens uit vier en twee meisjes uit zes. Dit kan op $\binom{4}{2} \times \binom{6}{2} = 90$ manieren.
- 42 a** Op een achterste rij zijn er acht velden. Vijf pionnen kun je dan op $\binom{8}{5} = 56$ verschillende manieren neerzetten. Omdat dit voor beide spelers geldt, is het totaal aantal beginopstellingen gelijk aan $56 \times 56 = 3136$.
- b** Op rij 5 staan dan vijf witte en drie zwarte pionnen of drie witte en vijf zwarte pionnen of vier witte en vier zwarte pionnen.
Het totaal aantal manieren is dus $\binom{8}{5} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = 56 + 56 + 70 = 182$.

- 039 a** Een rooster is geen handig telmodel, omdat je in deze situatie niet steeds kunt kiezen uit twee alternatieven.
- b** Per draai zijn er acht mogelijke cijfers. Kevin draait zes keer. Er zijn dus $8^6 = 262\,144$ mogelijke rijtjes.
- c** Het aantal mogelijkheden wordt na elke keer draaien één kleiner. Een boomdiagram is dus een handig telmodel.
- d** Je kiest steeds uit twee mogelijkheden (0 of 1) en het aantal herhalingen staat vast.
- e** Je kiest dan een tweetal uit een zestal. Dit kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren.
- f** Dit kun je berekenen door systematisch uit te schrijven:
 $0 + 0 + 3 = 3$, dit kan op drie manieren (003, 030, 300).
 $0 + 1 + 2 = 3$, dit kan op zes manieren (012, 021, 102, 120, 201, 210).
 $1 + 1 + 1 = 3$, dit kan op één manier.
 In totaal zijn er dan $3 + 6 + 1 = 10$ manieren.

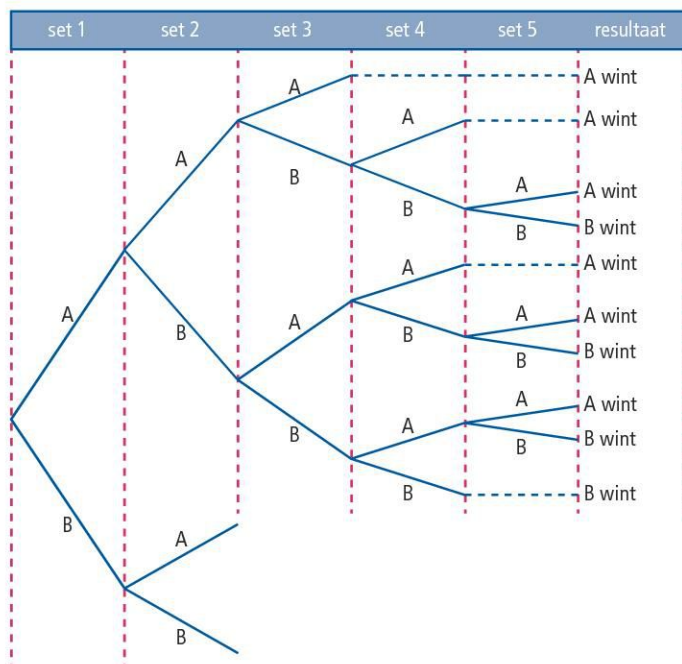
- 041 a** Voor het eerste hoofdstuk heeft de docent acht vragen waarvan hij er vier wil kiezen. Dit kan op $\binom{8}{4} = 70$ manieren.
- b** Voor het tweede hoofdstuk heeft de docent zeven vragen waarvan hij er vier wil kiezen. Dit kan op $\binom{7}{4} = 35$ manieren.
 Voor het derde hoofdstuk heeft de docent tien vragen waarvan hij er vier wil kiezen. Dit kan op $\binom{10}{4} = 210$ manieren.

- c Elke keuze aan vragen uit het eerste hoofdstuk kun je combineren met elke keuze uit de vragen van hoofdstuk 2 en 3.
- d In totaal zijn er dan $70 \times 35 \times 210 = 514\,500$ mogelijke samenstellingen van toetsvragen.

- U6 a** Derk kan elke keer kiezen uit een rood of een blauw bekertje. Elke toren heeft twee kleuren, dus alleen blauwe en alleen rode bekertjes mag niet. Dit kan dus op $2^{12} - 2 = 4096 - 2 = 4094$ manieren.
- b** Hij kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren twee kleuren selecteren.
- Het aantal verschillende torens met twee kleuren is dus $15 \times 4094 = 61\,410$.
- c** Een toren met blauwe, rode en groene bekertjes kan op $3^{12} = 531\,441$ manieren gebouwd worden.
- Daarbij zitten drie torens waarbij maar één kleur is gebruikt en 3×4094 torens waarbij twee kleuren zijn gebruikt.
- Het aantal verschillende torens met de kleuren blauw, rood en groen is dus $531\,441 - 3 - 3 \times 4094 = 519\,156$.
- Je kunt op $\binom{6}{3} = 20$ manieren drie kleuren selecteren uit zes kleuren.
- Het aantal mogelijkheden met drie verschillende kleuren is dus $20 \times 519\,156 = 10\,383\,120$.

1.7 Gemengde opdrachten

- 43 a** Omdat een wedstrijd drie, vier of vijf sets kan duren is het boomdiagram hier een handig telmodel.

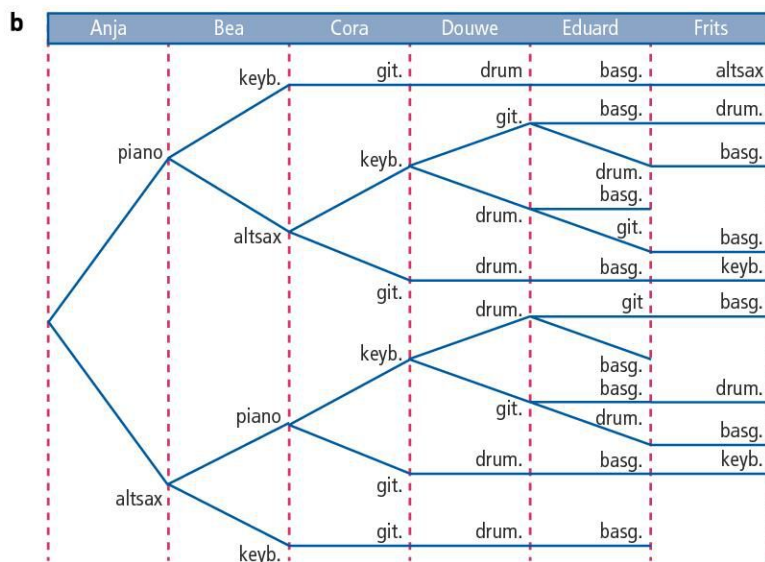


In het boomdiagram zie je dat er 10 volgorden zijn waarbij A de wedstrijd wint. Er zijn dus ook 10 volgorden waarbij B de wedstrijd wint. Er zijn 20 mogelijke set volgorden.

1 Systematisch tellen

- b** Er moeten nog maximaal 5 sets gespeeld worden.
 Hiervan moet ColorAdo er nog twee winnen, waarvan in ieder geval de laatste, beslissende set.
 Voor de sets die overblijven tussen de eerste twee sets en de laatste set (gewonnen door C) geldt:
 Jumpshoot kan 0, 1, 2 of 3 sets winnen.
 Als Jumpshoot 0 sets wint, dan is er 1 mogelijkheid.
 Als Jumpshoot 1 set wint, dan zijn er 2 mogelijkheden (CA of AC).
 Als Jumpshoot 2 sets wint, dan zijn er 3 mogelijkheden (AAC, ACA of CAA).
 Als Jumpshoot 3 sets wint, dan zijn er 4 mogelijkheden (AAAC, AACA of ACAA).
 Totaal zijn er dus $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ mogelijke set volgorden waarbij ColorAdo wint

- 44 a** De muziekinstrumenten kunnen op $6! = 720$ manieren over de mensen verdeeld worden.



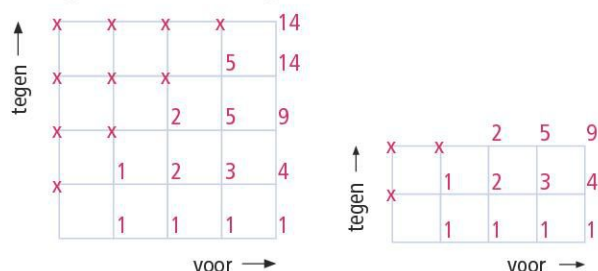
Er zijn in totaal 9 manieren om de instrumenten te verdelen.

- c** Voor de eerste solo is keus uit drie vrouwen, voor de tweede solo is er keus uit drie mannen en voor de derde solo is er keus uit drie vrouwen.
 Er zijn dus $3 \times 3 \times 3 = 27$ mogelijkheden om de solo's te verdelen.
- d** Er zijn $\binom{6}{3} = 20$ mogelijke drietallen voor het interview met radiostation A.
 De overige drie doen het interview met radiostation B. In het totaal zijn er dus 20 manieren waarop dit kan.
- e** De drie vrouwen kunnen naar radiostation A of naar radiostation B.
 Er zijn dus twee manieren waarop de drie vrouwen naar hetzelfde station gaan.
 Er blijven dan $20 - 2 = 18$ verdelingen over waarbij de drie vrouwen niet naar hetzelfde radiostation gaan.

Onderzoekopdrachten

45 Je kunt dit oplossen met een rooster.

Je mag daarbij niet langs de aangekruiste punten want bij die punten heeft de tegenstander meer gescoord en staat dan dus voor.



Voor rust wordt er vier keer voor en vier keer tegen gescoord. Dit is dus een rooster van 4×4 . Na rust wordt er vier keer voor en twee keer tegen gescoord. Dit is een rooster van 4×2 .

Er zijn dus $14 \times 9 = 126$ scoreverlopen mogelijk.

46 a

bedrag in centen	aantal 10 cent	aantal 20 cent	mogelijkheden	totaal
10	1	0	1	1
20	2 0	0 1	1 1	2
30	3 1	0 1	1 $\binom{2}{1} = 2$	3
40	4 2 0	0 1 2	1 $\binom{3}{2} = 3$ 1	5
50	5 3 1	0 1 2	1 $\binom{4}{3} = 4$ $\binom{3}{1} = 3$	8

b 100 cent samenstellen met munten van 10 cent en 20 cent kan als volgt:

$$10 \times 10 + 0 \times 20$$

$$8 \times 10 + 1 \times 20$$

$$6 \times 10 + 2 \times 20$$

$$4 \times 10 + 3 \times 20$$

$$2 \times 10 + 4 \times 20$$

$$0 \times 10 + 5 \times 20$$

Het aantal mogelijkheden waarop dit kan is

$$1 + \binom{9}{8} + \binom{8}{6} + \binom{7}{4} + \binom{6}{2} + 1 = 89$$

1 Systematisch tellen

- c Als er één of twee munten van 50 cent gebruikt mogen worden:

aantal 50 cent	aantal 10 cent	aantal 20 cent	aantal mogelijkheden
2	0	0	1
1	5	0	$\binom{6}{1} = 6$
1	3	1	$\binom{5}{1} \times \binom{4}{3} = 20$
1	1	2	$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$

Er zijn 38 invoervolgorde waarbij de 50 cent munt gebruikt wordt.
Totaal zijn er dus $89 + 38 = 127$ mogelijkheden.

Samenvatting

- S1 a** Het boomdiagram is regelmatig, het aantal takken wordt in de kolommen steeds één kleiner.
Het aantal rijtjes is $12 \times 11 \times 10 = 1320$.
- b** Ook dit is een regelmatig boomdiagram waarbij het aantal takken in de kolom steeds kleiner wordt.
Voor het eerste balletje zijn er twaalf mogelijkheden. Het tweede balletje mag niet hetzelfde nummer hebben, dus zijn er negen mogelijkheden over.
Voor het derde balletjes zijn er nog zes mogelijkheden.
Er zijn $12 \times 9 \times 6 = 648$ mogelijke rijtjes.
- c** De enige mogelijkheid is een 1, een 2 en een 3 trekken. Het aantal rijtjes waarbij je achtereenvolgens een 1, een 2 en een 3 trekt en let op de kleur is een machtsboom. Er zijn $3 \times 3 \times 3 = 27$ mogelijkheden.
De volgorde waarbij je de 1, 2 en de 3 trekt, vind je met een faculteitsboom.
Dit kan op $3 \times 2 \times 1 = 6$ verschillende manieren.
Het totaal aantal rijtjes is dus $6 \times 27 = 162$.
- S2** Daar komt het getal $20 + 15 = 35$ te staan.
- S3 a** Dit is een machtsboom. Er zijn $6^6 = 46\,656$ mogelijke rijtjes.
- b** Er zijn drie oneven getallen (1, 3 en 5).
Dit kan dus op $3^6 = 729$ mogelijkheden.
- c** Dit is een faculteitsboom. Er zijn $6! = 720$ mogelijkheden.
- S4** Dit is een permutatie van drie uit tien.
Er zijn $10 \times 9 \times 8 = 720$ mogelijkheden.
- S5 a** Het is een rooster van 10 breed en 3 hoog.
Er zijn dan $\binom{13}{3} = 286$ mogelijke routes van punt A naar punt B.
- b** Er zijn dan $\binom{9}{4} = 126$ mogelijke routes.
- S6** Jan kan $\binom{14}{3} = 364$ mogelijke drietallen autootjes kiezen.

- S7 a** Iedereen kan kiezen uit 5 snacks. Er zijn 7 personen.
Dus zijn er $5^7 = 78\,125$ mogelijke lijstjes.
- b** Dat kan op $\binom{7}{4} = 35$ manieren.
- c** Dat kan op $7! = 5040$ manieren.

Test jezelf

- T1 a** Er zijn $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ verschillende volgorden.
- b** Nu zijn er $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ verschillende volgorden.
- c** De bovenste baan kan met zes verschillende kleuren gekleurd worden. Elke volgende baan kan met vijf kleuren worden gekleurd.
In totaal kan de vlag op $6 \times 5 \times 5 \times 5 = 750$ verschillende manieren worden gekleurd.
- T2 a** De nummers kunnen in $5! = 120$ volgorden worden afgespeeld.
- b** De twee nummers van Brett Young kunnen als 1e en 2e of als 2e en 3e of als 3e en 4e of als 4e en 5e worden afgespeeld.
Deze nummers kunnen bij elk van deze vier situaties op twee volgorden afgespeeld.
De drie nummers van Willie Nelson kunnen op $3 \times 2 \times 1 = 6$ verschillende manieren worden afgespeeld.
Het totaal aantal volgorden is dus $4 \times 2 \times 6 = 48$.
- c** Dan zijn er $5^7 = 78\,125$ afspeelmogelijkheden.
- T3 a** Het aantal mogelijke volgorden is dan $11! = 39\,916\,800$.
- b** Clara heeft 6 Nederlandse en 5 Engelse boeken. Als ze niet twee Nederlandse boeken achter elkaar wil lezen dan zal ze moeten beginnen met een Nederlands boek en dan verder afwisselen dus: N E N E N E N E N.
Dit kan op $6 \times 5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 86\,400$ manieren.
- c** Clara kiest een viertal boeken uit een totaal van elf.
Dat kan op $\binom{11}{4} = 330$ manieren.
- d** Clara neemt twee van de zes Nederlandse en twee van de vijf Engelse boeken mee. Dat kan op $\binom{6}{2} \times \binom{5}{2} = 15 \times 10 = 150$ manieren.
- T4 a** Het aantal manieren is gelijk aan $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 40\,320$.
- b** Het eerste vierkant kan op $8 \times 7 \times 6 = 336$ manieren gekleurd worden.
Het tweede vierkant kan op $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ manieren gekleurd worden.
Er zijn dus totaal $336 \times 1680 = 564\,480$ manieren.
- c** Het aantal manieren waarop je vier kleuren kunt kiezen is gelijk aan $\binom{8}{4} = 70$.
De drie letters van het vierkant linksboven kunnen op $4 \times 3 \times 2 = 24$ verschillende manieren worden gekleurd.
De letters van het vierkant rechtsonder kunnen op $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ verschillende manieren worden gekleurd. Het totaal aantal mogelijk manieren is dus $70 \times 24 \times 24 = 40\,320$.

1 Systematisch tellen

- d** De letters van het vierkant linksboven kunnen met twee of drie kleuren worden ingekleurd.
Dit kan op $8 \times 7 \times 7 = 392$ manieren.
Het inkleuren van de letters van het vierkant rechtsonder kan met twee, drie of vier kleuren.
- Met vier kleuren kan dit op $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ manieren.
 - Met drie kleuren hebben a en d dezelfde kleur of b en c dezelfde kleur.
a en d dezelfde kleur kan op $8 \times 7 \times 6 \times 1 = 336$ manieren.
b en c dezelfde kleur kan ook op 336 manieren.
 - Met twee kleuren hebben a en d dezelfde kleur en b en c dezelfde kleur.
Dit kan op $8 \times 7 = 56$ manieren.
- De letters van het vierkant rechtsonder zijn dus op
 $1680 + 2 \times 336 + 56 = 2408$ manieren in te kleuren.
Er zijn dus totaal $392 \times 2408 = 943936$ manieren om de letters in te kleuren.

a	b
c	d

- T5** Er gaan tien personen mee en er zijn zes gele en zes oranje zwemvesten.
Je moet nu een aantal situaties onderscheiden.
Zes gele en vier oranje zwemvesten worden gebruikt.
Dit kan op $\binom{10}{6} = 210$ manieren.
Vijf gele en vijf oranje zwemvesten worden gebruikt.
Dit kan op $\binom{10}{5} = 252$ manieren.
Vier gele en zes oranje zwemvesten worden gebruikt.
Dit kan op $\binom{10}{4} = 210$ manieren.
In totaal zijn er dus $210 + 252 + 210 = 672$ mogelijkheden.
- T6 a** Het kiezen van drie van de negen vakjes kan op $\binom{9}{3} = 84$ manieren.
- b** Als het tweede gaatje wordt geponst in een andere rij of kolom dan het eerste gaatje zijn er bij elk eerste gaatje vier mogelijkheden voor het tweede gaatje. Dit geeft $9 \times 4 = 36$ tweetallen gaatjes. Daarbij wordt elke mogelijkheid dubbel meegeteld, want als je bijvoorbeeld eerst een gaatje ponsst in vakje 3 en daarna in vakje 8 heb je dezelfde mogelijkheid dan wanneer je eerst in vakje 8 en daarna in vakje 3 ponsst. Dus zijn er 18 verschillende mogelijkheden.
- c** In elk vakje kun je een gaatje ponsen of niet. Dus voor elk vakje zijn er twee mogelijkheden. Dat geeft in het totaal $2^9 = 512$ mogelijkheden. Hierbij zit ook de mogelijkheid dat er geen gaatje wordt weggeponst.
Het aantal mogelijkheden om 1 tot met 9 gaatjes weg te ponsen is dus $512 - 1 = 511$.
Het is mogelijk dat in elke trein op een verschillende manier gaatjes worden geponst.

Extra oefening

- E1 a** Er zijn zes verschillende dropjes. Er worden ook zes dropjes op een rij gelegd en dat kan dan op $6^6 = 46\,656$ manieren.
- b** Dat kan op $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ manieren.
- E2 a** Joëlle kan dan $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ rijtjes maken.
- b** Voor de eerste knikker is er dan maar één mogelijkheid.
Ze kan $1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ rijtjes maken.
- E3 a** Om van punt A naar punt B te komen tel je in een rooster van 6 breed en 2 hoog.
Je kunt dus op $\binom{8}{6} = 28$ manieren van punt A naar punt B lopen.
Van punt B naar punt C tel je in een rooster van 2 breed en 5 hoog.
Je kunt dus op $\binom{7}{2} = 21$ manieren van punt B naar punt C lopen.
- b** Je kunt op $28 \times 21 = 588$ manieren van punt A naar punt C lopen.
- E4 a** Dat kan op $\binom{24}{3} = 2024$ manieren.
- b** Dat kan op $\binom{24}{5} = 42\,504$ manieren.
- E5 a** Er zijn $\binom{6}{3} = 20$ volgorden.
- b** Er zijn $23 \times 29 \times 28 = 18\,676$ drietallen mogelijk.
- c** De stickers kunnen op verschillende manieren verdeeld worden.
Verdeling 5-0-0 kan op 3 manieren.
Verdeling 4-1-0 kan op 6 manieren.
Verdeling 3-2-0 kan op 6 manieren.
Verdeling 3-1-1 kan op 3 manieren.
Verdeling 2-2-1 kan op 3 manieren.
In totaal zijn er $3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21$ manieren.
- E6 a** Er zijn $4! = 24$ verschillende verdelingen mogelijk.
- b** Voor de voorzittersfunctie zijn er dan 2 mogelijkheden.
Daarna kun je nog uit 3 mensen kiezen.
In totaal geeft dit $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ mogelijkheden.
- c** In totaal zijn er 24 verdelingen mogelijk.
In $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ verdelingen is Willem penningmeester.
In $24 - 6 = 18$ verdelingen is Willem geen penningmeester.
- d** Voor de voorzitter kun je kiezen uit vier personen, voor de vicevoorzitter uit twee, voor de penningmeester uit twee en tot slot is de laatste persoon, de secretaris.
Er zijn dus $4 \times 2 \times 2 \times 1 = 16$ samenstellingen waarbij de voorzitter en vicevoorzitter niet van hetzelfde geslacht zijn.

1 Systematisch tellen

- E7 a** Het aantal verschillende patronen is dan $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$.
- b** Er zijn twaalf vakjes waaruit je er zes kiest om er een gaatje in te ponsen.
Dat kan op $\binom{12}{6} = 924$ verschillende manieren.
- c** Op één rij zijn er vier vakjes. Je kunt daaruit op $\binom{4}{2} = 6$ verschillende manieren twee vakjes kiezen om er een gaatje in te ponsen.
Dat doe je ook bij de andere twee rijen.
Er zijn dus $6 \times 6 \times 6 = 216$ verschillende mogelijkheden.

- E8 a** In totaal zijn er dus $13 + 5 = 18$ passagiers.
Die kunnen als volgt over de twee busjes verdeeld worden.

busje van 8 personen	busje van 12 personen
8	10
7	11
6	12

- b** Van de dertien bewoners selecteer je er vijf en van de vijf begeleiders selecteer je er twee.
Het aantal manieren waarop dit kan, is gelijk aan $\binom{13}{5} \times \binom{5}{2} = 12\,870$.
- c** Er gaan 18 personen mee.
In de kleine bus kunnen acht, zeven of zes personen.
Dit kan op $\binom{18}{8} + \binom{18}{7} + \binom{18}{6} = 94\,146$ manieren.
- E9 a** De negen gasten kunnen op $9! = 362\,880$ manieren aan tafel gaan zitten.
- b** Er zijn dan $11! = 39916\,800$ verschillende mogelijkheden.
- c** De gastheer en zijn vrouw kunnen op zeven verschillende manieren naast elkaar zitten zo dat de gastvrouw links van de gastheer zit.
Er zijn dan nog negen plaatsen te verdelen.
Dat geeft een totaal van $7 \times 9! = 2\,540\,160$ verschillende mogelijkheden.

2 Verbanden

Voorkennis



- V2 a 1 hoort bij B.
2 hoort bij D.
3 hoort bij C.

- b A $[-1, \rightarrow)$ D $[-2, 4)$
B $\langle \leftarrow, -1]$ E $[1, \rightarrow)$
C $\langle 1, \rightarrow)$ F $\langle -2, 4]$

V3 a $k(23) = \sqrt{23} + 2$

$k(23) = 5$

b $k(a) = 3$

$\sqrt{a} + 2 = 3$

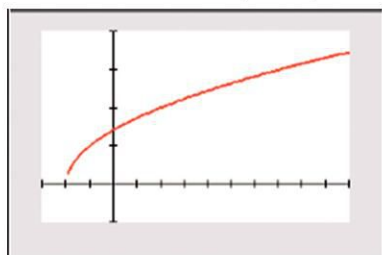
$a + 2 = 9$

$a = 7$

- c Bij de waarden $a < -2$ kun je geen functiewaarden uitrekenen.

d Invoer: $y = \sqrt{x + 2}$

Venster: $-3 \leq x \leq 10, -1 \leq y \leq 4$



e $k(a) \geq 0$

V4 a $f(10) = 10 - 1$

$f(10) = 9$

$g(8) = -8^2 + 1$

$g(8) = -63$

b $f(x) = 44$

$x - 1 = 44$

$x = 45$

$g(x) = -24$

$-x^2 + 1 = -24$

$-x^2 = -25$

$x^2 = 25$

$x = -5$ of $x = 5$

- c Alle punten op de horizontale lijn door $(0, 1)$ hebben als y -coördinaat 1, daarom het functievoorschrift $h(x) = 1$.

d $f(x) = h(x)$ geeft $x = 2$

$f(x) \geq h(x)$ geeft $x \geq 2$, oftewel $[2, \rightarrow)$

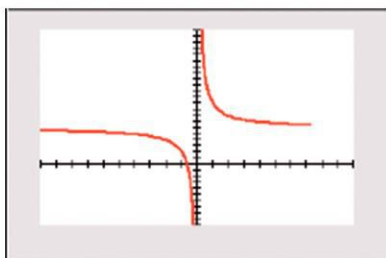
$f(x) = g(x)$ geeft $x = -2$ of $x = 1$

$f(x) < g(x)$ geeft $-2 < x < 1$, oftewel $\langle -2, 1 \rangle$

- V5 a** 1 hoort bij een wortelfunctie.
 2 hoort bij een kwadratische functie.
 3 hoort bij een lineaire functie.
b Grafiek 1 hoort bij D.
c (0, 4)
d Grafiek 2 hoort bij B.

V6 a Invoer: $y = \frac{4}{x} + 6$

Venster: $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 22$



b	x	-10	-5	-1	0	1	5	10
	$h(x)$	5,6	5,2	2	-	10	6,8	6,4

- c** $f(-0,0001) = -39\,994$
 $f(0,0001) = 40\,006$
d In de buurt van $x = 0$ ligt de grafiek dicht bij de y -as.
e Als x steeds verder van 0 wordt gekozen, nadert de grafiek steeds meer de lijn $y = 6$.

2.1 Lineaire verbanden

intro Eén meloen met vijf citroenen kost € 4,35.
 Eén meloen met acht citroenen kost € 6,-.
 Voor drie citroenen extra betaal je € 6,- – € 4,35 = € 1,65 extra.
 Eén citroen kost dus € $1,65 : 3 = € 0,55$.
 Eén meloen kost dan $6 - 8 \times 0,55 = € 1,60$.
 Twee meloenen kosten samen € 3,20, dus heeft Sofie nog € 1,80 over voor het kopen van citroenen.
 $1,80 : 0,55 = 3,2\dots$, dus kan ze maximaal 3 citroenen kopen.

- 1 a** stap 1: haakjes wegwerken
 stap 2: links en rechts $+ 3x$
 stap 3: links en rechts $+ 6$
 stap 4: links en rechts $: 5$
b $2(3 - 3) = 0$ en $-3 \times 3 + 9 = 0$, dus oplossing klopt.

2 Verbanden

2 a $-3x + 8 = 2x - 12$
 $-5x + 8 = -12$
 $-5x = -20$
 $x = 4$

b $8(x - 1) = x + 3(4 - x)$
 $8x - 8 = x + 12 - 3x$
 $8x - 8 = -2x + 12$
 $10x - 8 = 12$
 $10x = 20$
 $x = 2$

c $\frac{1}{2}x - 5 = \frac{2}{3}x + 1$
 $3x - 30 = 4x + 6$
 $-1x - 30 = 6$
 $-x = 36$
 $x = -36$

d $10 - (3 + 4x) = -7x + 1$
 $10 - 3 - 4x = -7x + 1$
 $7 - 4x = -7x + 1$
 $7 + 3x = 1$
 $3x = -6$
 $x = -2$

e $\frac{3}{5}x + 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{10}$
 $6x + 15 = 12x - 3$
 $-6x + 15 = -3$
 $-6x = -18$
 $x = 3$

f $2(\frac{1}{3}x + 5) = \frac{5}{6}x - 4$
 $\frac{2}{3}x + 10 = \frac{5}{6}x - 4$
 $4x + 60 = 5x - 24$
 $-1x + 60 = -24$
 $-x = -84$
 $x = 84$

3 a $6 - \frac{1}{2}x = 2x - 1\frac{1}{2}$
 $12 - x = 4x - 3$
 $12 - 5x = -3$
 $-5x = -15$
 $x = 3$

b De y -coördinaat berekenen door $x = 3$ bijvoorbeeld in de formule voor lijn l in te vullen:
 $y = 6 - \frac{1}{2} \times 3 = 4\frac{1}{2}$
 Dus de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m zijn $(3, 4\frac{1}{2})$.

c $6 - \frac{1}{2}x = 2(x - 7)$
 $6 - \frac{1}{2}x = 2x - 14$
 $12 - x = 4x - 28$
 $12 - 5x = -28$
 $-5x = -40$
 $x = 8$

De y -coördinaat berekenen door $x = 8$ bijvoorbeeld in de formule voor lijn l in te vullen:

$$y = 6 - \frac{1}{2} \times 8 = 2$$

Dus de coördinaten van het snijpunt van l en n zijn $(8, 2)$.

d Lijn n kan herschreven worden als $y = 2x - 14$.
 Het hellingsgetal van lijn l en lijn n zijn beide 2.
 De lijnen m en n hebben geen snijpunt omdat ze evenwijdig zijn.

4 a Bij stap 1 links en rechts $-3x$
 Bij stap 2 links en rechts -2

b $3(2y - x) = 8$
 $6y - 3x = 8$
 $6y = 3x + 8$
 $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 5 \text{ a } 8p - 4q &= 9 \\ -4q &= 9 - 8p \\ q &= -2\frac{1}{4} + 2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 5q - 6 &= -3p \\ 5q &= -3p + 6 \\ q &= -\frac{3}{5}p + 1\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \text{ a } 8p - 4q &= 9 \\ 8p &= 4q + 9 \\ p &= \frac{1}{2}q + 1\frac{1}{8} \end{aligned}$$

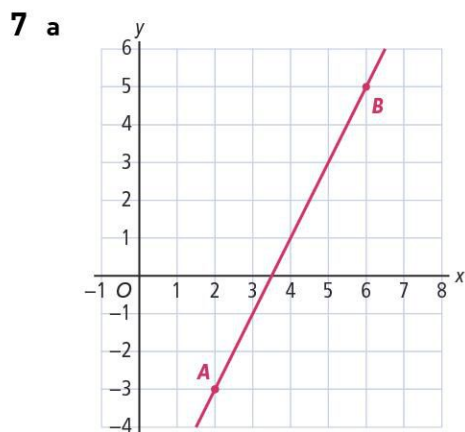
$$\begin{aligned} \text{b } 5q - 6 &= -3p \\ -3p &= 5q - 6 \\ p &= -1\frac{2}{3}q + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 15p &= 3(q + 9) \\ 15p &= 3q + 27 \\ 3q + 27 &= 15p \\ 3q &= 15p - 27 \\ q &= 5p - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 10p - 4q &= 6p + 12 \\ -4q &= -4p + 12 \\ q &= p - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c } 15p &= 3(q + 9) \\ 15p &= 3q + 27 \\ p &= \frac{1}{5}q + 1\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } 10p - 4q &= 6p + 12 \\ 4p - 4q &= 12 \\ 4p &= 4q + 12 \\ p &= q + 3 \end{aligned}$$



$$\text{b } \text{richtingscoëfficiënt} = \frac{8}{4} = 2$$

c De richtingscoëfficiënt is gelijk aan 2, dus als x met één eenheid toeneemt, neemt y met twee eenheden toe. De formule is dus van de vorm $y = 2x + b$ waarbij b het startgetal is.

$$\begin{aligned} \text{d } -3 &= 2 \times 2 + b \\ -3 &= 4 + b \\ b &= -7 \end{aligned}$$

e Een formule van lijn AB is $y = 2x - 7$.

$$8 \quad 4 = \frac{3}{5} \times 3 + b$$

$$4 = 1\frac{4}{5} + b$$

$$b = 2\frac{1}{5}$$

Je vindt met punt B hetzelfde startgetal.

2 Verbanden

9 a $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{7-4}{2-(-4)} = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

De coördinaten van punt A invullen.

$$4 = \frac{1}{2} \times -4 + b$$

$$4 = -2 + b$$

$$b = 6$$

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

b $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{-16-4}{6-(-4)} = -2$

$$y = -2x + b$$

De coördinaten van punt A invullen.

$$4 = -2 \times -4 + b$$

$$4 = 8 + b$$

$$b = -4$$

$$y = -2x - 4$$

c $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{1-4}{8-(-4)} = -\frac{1}{4}$

$$y = -\frac{1}{4}x + b$$

De coördinaten van punt A invullen.

$$4 = -\frac{1}{4} \times -4 + b$$

$$4 = 1 + b$$

$$b = 3$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 3$$

d $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{1-7}{8-2} = -1$

$$y = -x + b$$

De coördinaten van punt B invullen.

$$7 = -2 + b$$

$$b = 9$$

$$y = -x + 9$$

10 $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{149,35 - 140,79}{95 - 87} = 1,07$

$$B = 1,07w + b$$

$$149,35 = 1,07 \times 95 + b$$

$$149,35 = 101,65 + b$$

$$b = 47,7$$

$$B = 1,07w + 47,7$$

05 a stap 1: haakjes wegwerken

stap 2: links en rechts omwisselen

stap 3: links en rechts -6

stap 4: links en rechts $: 2$

b A $4q + 6p = 12$

$$4q = -6p + 12$$

$$q = -1\frac{1}{2}p + 3$$

B $5p - 30q = 20$

$$-30q = -5p + 20$$

$$q = \frac{1}{6}p - \frac{2}{3}$$

C $6p - 2q = 7p + 10$

$$-2q = p + 10$$

$$q = -\frac{1}{2}p - 5$$

D $12p = 2(q + 7)$

$$12p = 2q + 14$$

$$2q + 14 = 12p$$

$$2q = 12p - 14$$

$$q = 6p - 7$$

- c A $4q + 6p = 12$
 $6p = -4q + 12$
 $p = -\frac{2}{3}q + 2$
 B $5p - 30q = 20$
 $5p = 30q + 20$
 $p = 6q + 4$
- C $6p - 2q = 7p + 10$
 $-p = 2q + 10$
 $p = -2q - 10$
 D $12p = 2(q + 7)$
 $12p = 2q + 14$
 $p = \frac{1}{6}q + 1\frac{1}{6}$

- 09 a De eerste coördinaat neemt 6 toe.
 De toename van de tweede coördinaat is -18 .

b $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{-18}{6} = -3$

c $y = -3x + b$
 $6 = -3 \times -4 + b$
 $6 = 12 + b$
 $b = -6$

Een formule voor lijn PQ is $y = -3x - 6$.

- U1 a Een formule voor de lijn AB :

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{-8 - 4}{4 - -2} = -2$$

$$y = -2x + b$$

$$4 = -2 \times -2 + b$$

$$4 = 4 + b$$

$$b = 0$$

$$y = -2x$$

Een formule voor de lijn CD :

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{0 - 4}{3 - -1} = -1$$

$$y = -x + b$$

$$4 = -1 + b$$

$$4 = 1 + b$$

$$b = 3$$

$$y = -x + 3$$

Gelijkstellen geeft:

$$-2x = -x + 3$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

$$y = -2 \times -3 = 6$$

Dus $S(-3, 6)$

- b De lijnen AB en CD hebben geen snijpunt als AB en CD evenwijdig zijn.
 De richtingscoëfficiënt van lijn AB is gelijk aan -2 . De richtingscoëfficiënt van lijn CD moet dus ook gelijk zijn aan -2 .

$$\frac{0 - 4}{d - -1} = -2$$

$$\frac{-4}{d + 1} = -2$$

$$d + 1 = 2$$

$$d = 1$$

De lijnen AB en CD hebben dus geen snijpunt als $d = 1$.

- c De lijn CD heeft als vergelijking $x = -1$ als de punten C en D recht boven elkaar liggen. De x -coördinaten van de punten C en D zijn dan dus gelijk.
 Dit is het geval als $d = -1$.

2 Verbanden

U2 Het taxibedrijf berekent een starttarief en een bedrag per gereden km (de richtingscoëfficiënt).

Noem de afstand in kilometers a en het bedrag in euro's B .

Een formule waarmee je het taxitarief per kilometer kunt berekenen:

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{64,32 - 36,32}{40 - 15} = 1,12$$

$$B = 1,12a + b$$

$$64,32 = 1,12 \times 40 + b$$

$$64,32 = 44,8 + b$$

$$b = 19,52$$

$$B = 1,12a + 19,52$$

Het aantal kilometers bij een prijs van € 125,92 bereken je met:

$$1,12a + 19,52 = 125,92$$

$$1,12a = 106,4$$

$$a = 95$$

De rit van echtpaar Weenink was dus 95 kilometer.

2.2 Recht evenredig en omgekeerd evenredig

intro Bij tabel A is te zien dat je elke vijf minuten een kilometer loopt.

Het aantal kilometers bereken je door het aantal gelopen minuten te delen door 5. In formule is dit: $\text{tijd in minuten} : 5 = \text{afstand in km}$.

Bij tabel B komt de gelopen snelheid in km/uur vermenigvuldigd met het aantal minuten altijd op 60. In formule is dit: $\text{snelheid in km/uur} \times \text{tijd in minuten} = 60$.

11 a $2 \times 5 = 10$, dus in 2 uur loopt hij 10 km.
 $\frac{1}{2} \times 5 = 2\frac{1}{2}$, dus in een $\frac{1}{2}$ uur loopt hij $2\frac{1}{2}$ km.

b	<i>tijd</i> in uren	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3
	<i>afstand</i> in km	2,5	5	7,5	10	15

c Als Boaz een drie keer zo grote afstand loopt, dan doet hij er drie keer zo lang over.

d $\frac{2,5}{\frac{1}{2}} = 5$, $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{7,5}{1\frac{1}{2}} = 5$, $\frac{10}{2} = 5$ en $\frac{15}{3} = 5$.

e Bij gelijke toename van de tijd, is de toename van de afstand ook steeds gelijk. Dus hoort de tabel bij een lineair verband.

f Als de tijd gelijk is aan 0, is de afstand ook gelijk aan 0 en dus gaat de grafiek door de oorsprong.

g $\text{afstand} = 5 \cdot \text{tijd}$

12 a De tabellen A, B en D horen bij een recht evenredig verband.

b

A

x	4	5	6	7	8
y	28	35	42	49	56

B

p	6	8	10	12	50
q	27	36	45	54	225

C

w	1	2	3	5	10
R	9	15	21	33	63

D

t	4	7	10	15	40
h	12	21	30	45	120

- c A recht evenredig verband, dus $y = cx$

$$c = \frac{28}{4} = 7$$

$$y = 7x$$

- B recht evenredig verband, dus $q = cp$

$$c = \frac{27}{6} = 4,5$$

$$q = 4,5p$$

- C lineair verband, dus $R = aW + b$

$$a = \frac{21 - 15}{3 - 2} = 6$$

$$R = 6W + b$$

$$15 = 6 \times 2 + b$$

$$15 = 12 + b$$

$$b = 3$$

$$R = 6W + 3$$

- D recht evenredig verband, dus $h = ct$

$$c = \frac{12}{4} = 3$$

$$h = 3t$$

- 13 Grafiek A gaat niet door de oorsprong en is dus niet recht evenredig

Bij grafiek B is y recht evenredig met x .

$$\text{evenredigheidsconstante} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Dus } y = \frac{2}{3}x$$

Grafiek C is geen rechte lijn dus niet recht evenredig.

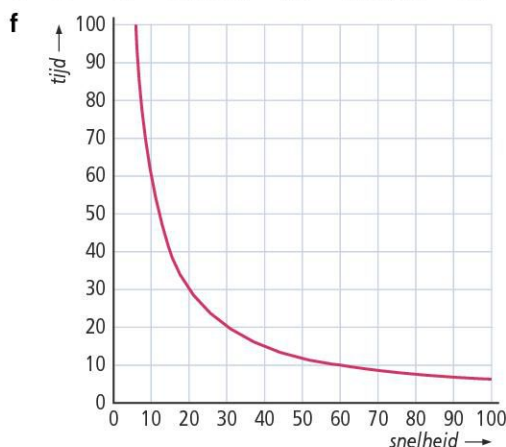
- 14 a $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, dus hij is $\frac{2}{3}$ uur onderweg, dit is hetzelfde als $\frac{2}{3} \times 60 = 40$ minuten.

- b $\frac{40}{4} = 10$, dus zijn vader doet er 10 minuten over.

- c Als de snelheid k keer zo groot wordt, dan wordt de tijd k keer zo klein.

d	snelheid in km per uur	15	30	60	90	100
	tijd in minuten	40	20	10	$6\frac{2}{3}$	6

- e $15 \times 40 = 600$, $30 \times 20 = 600$, $60 \times 10 = 600$, $90 \times 6\frac{2}{3} = 600$ en $100 \times 6 = 600$



2 Verbanden

- 15 a** De tabellen A, B en C horen bij een omgekeerd evenredig verband.

A						C					
X	2	3	4	5	10	p	2	3	5	6	18
Y	15	10	7,5	6	3	q	45	30	18	15	5

B						D					
S	0,8	1,6	4,8	24	96	t	2	3	4	5	8
W	60	30	10	2	0,5	h	7	11	15	19	31

- c A** omgekeerd evenredig verband, dus $y = \frac{c}{x}$
 $c = 2 \times 15 = 30$

$$y = \frac{30}{x} \text{ of } x = \frac{30}{y} \text{ of } y \cdot x = 30$$

- B** omgekeerd evenredig verband, dus $w = \frac{c}{s}$
 $c = 0,8 \times 60 = 48$

$$w = \frac{48}{s} \text{ of } s = \frac{48}{w} \text{ of } w \cdot s = 48$$

- C** omgekeerd evenredig verband, dus $q = \frac{c}{p}$

$$c = 2 \times 45 = 90$$

$$q = \frac{90}{p} \text{ of } p = \frac{90}{q} \text{ of } p \cdot q = 90$$

- D** lineair verband, dus $h = at + b$

$$a = \frac{11 - 7}{3 - 2} = 4$$

$$h = 4t + b$$

$$7 = 4 \times 2 + b$$

$$7 = 8 + b$$

$$b = -1$$

$$h = 4t - 1$$

- 16 a** Er is sprake van een recht evenredig verband, want bij een twee keer zo lange tijd horen twee keer zoveel toeren.

Noem t de tijd in seconden en T het aantal toeren.

$$T = at$$

$$a = \frac{2700}{45} = 60$$

$$T = 60t$$

2 minuten is gelijk aan 120 seconden, dus $T = 60 \times 120 = 7200$.

Dus de centrifuge maakt in 2 minuten 7200 toeren.

- b** Er is sprake van een omgekeerd evenredig verband, want als de lengte twee keer zo groot wordt, moet de breedte twee keer zo klein worden om dezelfde oppervlakte te krijgen.

Noem l de lengte in meter en b de breedte in meter.

$$l \cdot b = c$$

$$c = 750 \times 1600 = 1\,200\,000$$

$$b = \frac{1\,200\,000}{l}$$

$$b = \frac{1\,200\,000}{1500} = 800, \text{ dus het andere stuk land is 800 meter breed.}$$

- c Er is sprake van een lineair verband, want de afname in prijs per jaar is constant.

Noem t de tijd in jaren en W de waarde in euro's. Neem $t = 0$ in 2013.

$$W = at + b$$

$$a = \frac{205\,000 - 223\,000}{2017 - 2013} = -4500$$

$$b = 223\,000$$

$$W = -4500t + 223\,000$$

In 2016 geldt $t = 3$, dus $W = -4500 \times 3 + 223\,000 = 209\,500$.

In 2016 was het huis € 209.500,- waard.

- 17 A omgekeerd evenredig verband

$$q = \frac{7}{p} \text{ of } p = \frac{7}{q}$$

- B recht evenredig verband

$$s = 50t \text{ of } t = \frac{50}{s}$$

- C omgekeerd evenredig verband

$$b = \frac{200}{l} \text{ of } b \cdot l = 200$$

- D recht evenredig verband

$$\frac{y}{x} = 5 \text{ of } x = \frac{y}{5} = \frac{1}{5}y$$

- 012 a Er geldt $\frac{2}{1} = \frac{12}{6} = 2$, $\frac{3}{1} = \frac{18}{6} = 3$ en $\frac{7}{1} = \frac{42}{6} = 7$, dus als x k keer zo groot wordt, dan wordt y ook k keer zo groot.

b $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{12}{2} = 6$, $\frac{18}{3} = 6$ en $\frac{42}{7} = 6$

c

x	1	2	3	7	9
y	6	12	18	42	54

- d In elke kolom kan de waarde van y berekend worden door de waarde van x met 6 te vermenigvuldigen, oftewel $y = 6x$.

- e De tabellen A en B horen bij een recht evenredig verband.

- f A

x	1	3	5	8	9
y	4	12	20	32	36

- B

s	3	4	5	8	9
w	15	20	25	40	45

- C

p	4	6	8	10	12
q	9	16	23	30	37

- D

t	3	4	6	9	10
h	13	17	25	37	41

2 Verbanden

- g** A recht evenredig verband, dus $y = cx$

$$c = \frac{4}{1} = 4$$

$$y = 4x$$

- B** recht evenredig verband, dus $w = cs$

$$c = \frac{15}{3} = 5$$

$$w = 5s$$

- C** recht evenredig verband, dus $q = cp$

$$c = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$q = 4,5p$$

- D** lineair verband, dus $h = at + b$

$$a = \frac{17 - 13}{4 - 3} = 4$$

$$h = 4t + b$$

$$13 = 4 \times 3 + b$$

$$13 = 12 + b$$

$$b = 1$$

$$h = 4t + 1$$

- 015 a** Er geldt $\frac{2}{1} = \frac{42}{21} = 2$, $\frac{3}{1} = \frac{42}{14} = 3$, $\frac{4}{1} = \frac{42}{10,5} = 4$ en $\frac{7}{1} = \frac{42}{6} = 7$. Dus als x k keer zo groot wordt, dan wordt y k keer zo klein.

- b** In elke kolom is de uitkomst van $x \times y$ gelijk aan 42.

- c** In elke kolom kan de waarde van x berekend worden door 42 te delen door de waarde van y . Op dezelfde manier kan in elke kolom de waarde van y berekend worden door 42 te delen door de waarde van x .

- U3 a** Bij de grafiek van f hoort een omgekeerd evenredig verband.

$$y = \frac{c}{x}$$

$$c = 3 \times 3 = 9$$

$$y = \frac{9}{x} \text{ of } x = \frac{9}{y} \text{ of } x \cdot y = 9$$

- b** $y = ax + b$

$$a = \frac{225 - 180}{500 - 400} = 0,45$$

$$y = 0,45x + b$$

$$180 = 0,45 \cdot 400 + b$$

$$180 = 180 + b$$

$$b = 0$$

Dus bij lijn l hoort een recht evenredig verband, namelijk $y = 0,45x$.

- c** $y = ax + b$

$$a = \frac{38 - 30}{300 - 250} = 0,16$$

$$y = 0,16x + b$$

$$30 = 0,16 \times 250 + b$$

$$30 = 40 + b$$

$$b = -10$$

$$y = 0,16x - 10$$

Bij lijn m hoort een lineair verband.

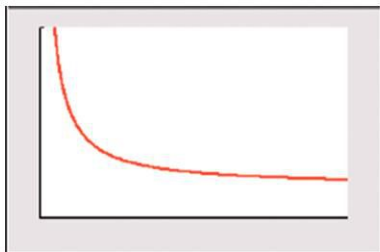
2.3 Grenswaarden

intro Een advies zou kunnen zijn om maandelijks 2000 euro te investeren omdat bij een nog hogere investering de maandelijkse winst relatief gezien nog weinig toeneemt.

- 18 a** $P = 0,17 + \frac{150}{2000} = 0,245$, dus de prijs per m^2 is € 0,245.
De totale kosten zijn dan gelijk aan $2000 \times 0,245 = 490$ euro.

b Invoer: $y = 0,17 + \frac{150}{x}$

Venster: $0 \leq x \leq 4000$, $0 \leq y \leq 1$



De waarden van P worden groot als V bijna gelijk is aan 0.

- c** Als je $V = 0$ invult in de formule, dan zou je delen door 0 wat onmogelijk is.
d Als V steeds groter wordt, wordt grafiek steeds minder steil.

e

V	P
10	15,17
100	1,67
1000	0,32
10000	0,185

Als V blijft toenemen, nadert P de waarde 0,17.

- f** In de praktijk worden de kosten per m^2 nooit lager dan € 0,17.

19 a

x	10	100	1000	10000
y	-3,000	-3,000	-3,000	-3,000

De functie f heeft -3 als grenswaarde.

b

x	10	100	1000	10000
y	0,531	0,273	0,252	0,250

De functie g heeft 0,25 als grenswaarde.

c

x	10	100	1000	10000
y	15,375	6,7652	6,0752	6,0075

De functie h heeft 6 als grenswaarde.

d

x	10	100	1000	10000
y	11,1111	185,1852	1984,1270	19984,0128

De functie i heeft geen grenswaarde.

- 20 a** $T = 20 - 16 \cdot 0,75^0 = 4$, dus de temperatuur van de melk is 4 °C op het moment dat zij uit de koelkast wordt gehaald.

b

t	10	100	1000	10000
T	19,0990	20,0000	20,0000	20,0000

Dus de temperatuur van de melk nadert op den duur de waarde 20 °C.

2 Verbanden

- 21 a** $T = \frac{200 \cdot 0}{0 + 1} + 20 = 20$, dus bij het aanzetten heeft de oven een temperatuur van 20°C .

t	0	1	2	3	4
T	20	120	$153\frac{1}{3}$	170	180

Na 4 minuten is de temperatuur in de oven 180°C .

t	10	100	1000	10 000
T	201,8182	218,0198	219,80002	219,98000

Dus de grenswaarde is 220.

- d** Deze grenswaarde betekent dat de temperatuur in de oven nooit hoger dan 220°C wordt.

- 22 a** 3 uur en 20 minuten is gelijk aan 200 minuten.
 $G = 0,015 + \frac{5}{200} = 0,04$, dus de gemiddelde prijs is € 0,04 per belminuut.

a	10	100	1000	10 000	100 000
G	0,515	0,065	0,02	0,0156	0,01505

Dus de grenswaarde is 0,015.

- c** Deze grenswaarde betekent dat de gemiddelde prijs per belminuut nooit lager dan € 0,015 wordt.
- d** Als a erg groot wordt, nadert de breuk $\frac{5}{a}$ tot de waarde 0. De formule nadert dan tot de waarde 0,015, want $0,015 + 0 = 0,015$.

- 23 a** $N = 60 \cdot (1 - 0,67^0) = 0$, de praktische betekenis is dat op een gebied van 0 km^2 geen diersoorten voorkomen.

a	10	100	1000	10 000
N	59,3082	60,0000	60,0000	60,0000

Dus de grenswaarde is 60.

- c** Als a erg groot wordt, nadert de macht $0,64^a$ tot de waarde 0. De formule nadert dan tot de waarde 60 want $60 \times (1 - 0) = 60$.
- d** Deze grenswaarde betekent dat het aantal diersoorten per km^2 nooit hoger dan 60 is.

- 019 a** De functiewaarden naderen tot 2.

- b** De grenswaarde is dus 2.

x	10	100	1000	10 000
y	4,0001	4,0000	4,0000	4,0000

De functiewaarden naderen tot 4, dus de grenswaarde is 4.

x	10	100	1000	10 000
y	-72,9231	-1,1813	3,4982	3,9500

De functie h heeft 4 als grenswaarde.

x	10	100	1000	10 000
y	75,25	319,1596	3018,1097	30 018,0110

De functie i heeft geen grenswaarde.

x	10	100	1000	10 000
y	-0,9961	-1,0000	-1,0000	-1,0000

De functie j heeft -1 als grenswaarde.

g

x	10	100	1000	10 000
y	0,4167	0,0400	0,0040	0,0004

De functie k heeft 0 als grenswaarde.

U4 a

t	10	100	1000	10 000
N	137,6990	260,0000	260,0000	260,0000

De bank zal op den duur 260 000 rekeningen hebben.

- b** Als de waarde van t erg groot wordt, nadert $(0,73)^t$ tot de waarde 0.
 $62 \cdot (0,73)^t$ nadert dan ook tot de waarde 0 en $3 + 62 \cdot (0,73)^t$ nadert tot de waarde 3. Dus nadert de formule tot de waarde 260, want $\frac{780}{3} = 260$.
 Dat komt overeen met 260 000 rekeningen.

- U5 a** De grenswaarde is 12, dus $a = 12$.

$$f(x) = 12 + \frac{b}{x}$$

$$4 = 12 + \frac{b}{6}$$

$$-8 = \frac{b}{6}$$

$$b = -8 \times 6 = -48$$

- b** De grenswaarde is 8, dus $a = 8$.

$$h(x) = 8 + b \cdot 0,25^x$$

$$9 = 8 + b \cdot 0,25^2$$

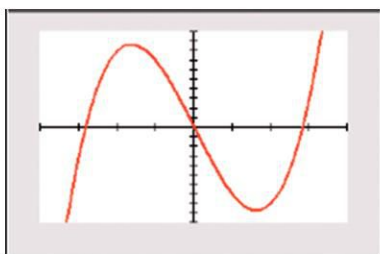
$$1 = b \cdot 0,0625$$

$$b = 16$$

2.4 Toppen en snijpunten

- intro** **A** In dit punt zijn de opbrengst en de kosten gelijk, dus de winst is gelijk aan 0 euro.
B In dit punt is de winst gelijk aan 0 euro.
C In dit punt is de winst maximaal.

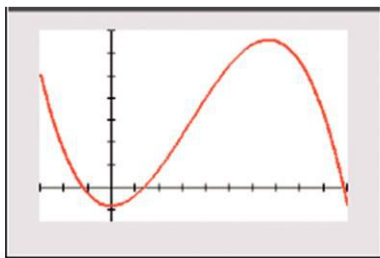
- 24 a** Invoer: $y = x^3 - 8x$
 Venster: $-4 \leq x \leq 4$, $-10 \leq y \leq 10$



- b** De grafiek heeft drie snijpunten met de x -as.
c Optie: nulpunten
 De oplossingen van de vergelijking $x^3 - 8x = 0$ zijn
 $x \approx -2,83$, $x = 0$ en $x \approx 2,83$.
d Opties: minimum, maximum
 De coördinaten van de toppen van de grafiek van f zijn $(-1,63; 8,71)$ en $(1,63; -8,71)$.

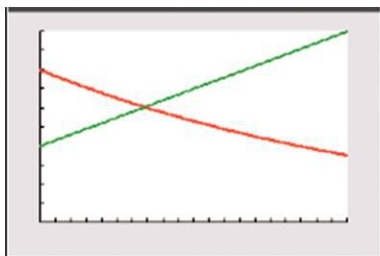
2 Verbanden

- 25 a** Invoer: $y = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 8$
 Venster: $-3 \leq x \leq 10, -15 \leq y \leq 70$

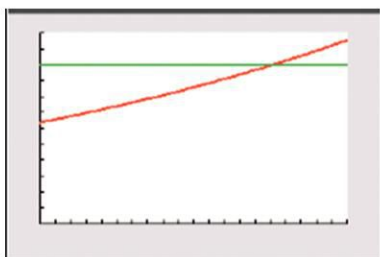


- b** Optie: nulpunten
 De nulpunten van K zijn $x \approx -1,20$, $x \approx 1,36$ en $x \approx 9,83$.
- c** Opties: minimum, maximum
 De coördinaten van de toppen van de grafiek van K zijn $(0, -8)$ en $(6,67; 66,07)$.
- d** Het minimum van K is -8 en het maximum is $66,07$.

- 26 a** Invoer: $y_1 = 80 \cdot 0,96^x$ en $y_2 = 40 + 3x$
 Venster: $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 100$

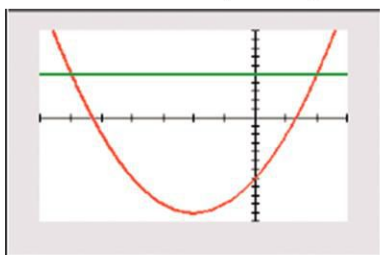


- Optie: snijpunten
 De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(6,84; 60,51)$.
- b** De oplossing van deze vergelijking is de x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f en g .
- c** De oplossing van de vergelijking $80 \cdot 0,96^x = 40 + 3x$ is $x \approx 6,84$.
- 27 a** Bij 2022 hoort $t = 5$.
 $W = 64 \cdot 1,03^5 \approx 74,19$, dus de waarde van het aandeel in 2022 is € 74,19.
- b** Invoer: $y_1 = 64 \cdot 1,03^x$ en $y_2 = 100$
 Venster: $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 120$



- c** Optie: snijpunten
 De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(15,10; 100)$.
- d** In de loop van het jaar 2032 heeft het aandeel een waarde van 100 euro.

- 28 a** Invoer: $y_1 = x^2 + 4x - 7$ en $y_2 = 5$
 Venster: $-7 \leq x \leq 3$, $-12 \leq y \leq 10$

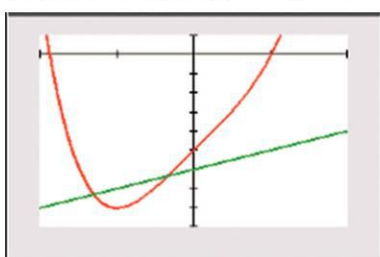


Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-6, 5)$ en $(2, 5)$.

De oplossingen van de vergelijking zijn $x = -6$ en $x = 2$.

- b** Invoer: $y_1 = x^4 + 4x - 5$ en $y_2 = x - 6$
 Venster: $-2 \leq x \leq 2$, $-9 \leq y \leq 1$

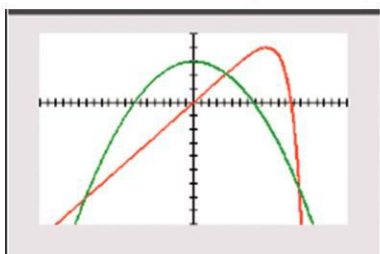


Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-1, -7)$ en $(-0.34, -6.37)$.

De oplossingen van de vergelijking zijn $x \approx -1.31$ en $x \approx -0.34$.

- c** Invoer: $y_1 = 500x - 2^x$ en $y_2 = 3000 - 50x^2$
 Venster: $-20 \leq x \leq 20$, $-9000 \leq y \leq 5000$

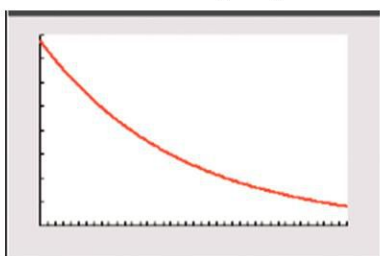


Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-14.22, -7109.77)$, $(4.24, 2101.11)$ en $(13.69, -6370.76)$.

De oplossingen van de vergelijking zijn $x \approx -14.22$, $x \approx 4.24$ en $x \approx 13.69$.

- 29 a** Invoer: $y = 776 \cdot 0.946^x$
 Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 800$

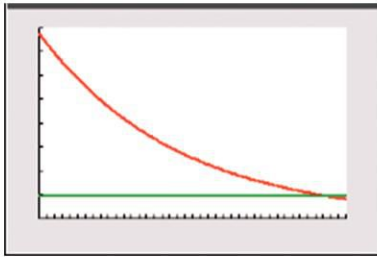


2 Verbanden

- b** $\frac{1}{8}$ deel van 776 is gelijk aan 97.

Invoer: $y_1 = 776 \cdot 0,946^x$ en $y_2 = 97$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 800$



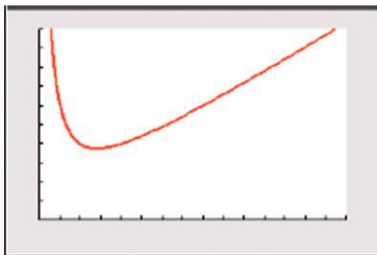
Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (37,46; 97).

De polder kan dus weer veilig worden gebruikt in het jaar 2038.

- 30 a** $b = 8 : 4 = 2$ meter. De omtrek is dan $4 + 2 + 4 + 2 = 12$ meter.
- b** De lengte vermenigvuldigd met de breedte geeft de oppervlakte die gelijk is aan 8 m^2 . De breedte is dus gelijk aan 8 gedeeld door de lengte.
- c** De omtrek O is gelijk aan $2b + 2l$. Wanneer je b vervangt door $\frac{8}{l}$ wordt dit
- $$O = 2l + 2 \cdot \frac{8}{l} = 2l + \frac{16}{l}.$$
- d** Invoer: $y = 2x + \frac{16}{x}$

Venster: $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 30$



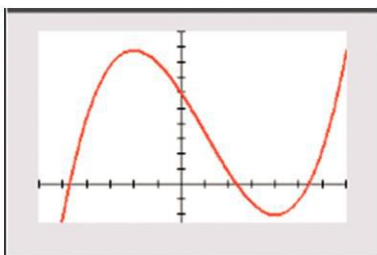
Optie: minimum

De coördinaten van de top van de grafiek zijn (2,83; 11,31).

De omtrek is minimaal als de lengte gelijk is aan 2,83 meter.

De breedte is dan gelijk aan $b = \frac{8}{2,83} \approx 2,83$ meter.

- 024 a** Dit is geen goede plot omdat de toppen van de grafiek niet in beeld zijn.
- b** $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 60 = 60$, dus de grafiek van f snijdt de y -as in het punt (0, 60).
- c** Invoer: $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 60$
- Venster: $-6 \leq x \leq 7$, $-25 \leq y \leq 100$



- d** Optie: nulpunten

De coördinaten van het linker snijpunt van de grafiek van f met de x -as zijn (-4,74; 0).

e Optie: nulpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as zijn $(-4,74; 0)$, $(2,35; 0)$ en $(5,39; 0)$.

Dus de nulpunten van f zijn $x \approx -4,74$, $x \approx 2,35$ en $x \approx 5,39$.

f Optie: maximum

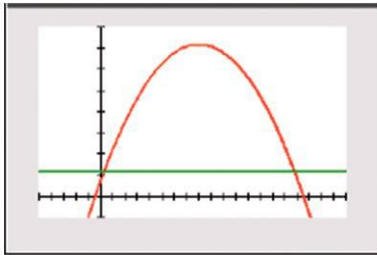
De coördinaten van de linker top van de grafiek f zijn $(-2,88)$.

g Optie: minimum

De coördinaten van de rechter top van de grafiek van f zijn $(4, -20)$.

h Het minimum van f is -20 en het maximum van f is 88 .

- 028 a Invoer: $y_1 = -x^2 + 16x + 8$ en $y_2 = 12$
Venster: $-5 \leq x \leq 20$, $-10 \leq y \leq 80$

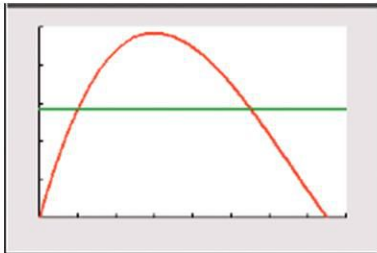


b Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(0,25; 12)$ en $(15,75; 12)$.

c De oplossingen van de vergelijking zijn $x = 0,25$ en $x = 15,75$.

- U6 a $I = h(240 - 2h)(150 - 2h)$
 $I = h(36\,000 - 480h - 300h + 4h^2)$
 $I = h(36\,000 - 780h + 4h^2)$
 $I = 4h^3 - 780h^2 + 36\,000h$
- b 286 liter is gelijk aan $286\,000 \text{ cm}^3$.
 $4h^3 - 780h^2 + 36\,000h = 286\,000$



Invoer: $y_1 = 4x^3 - 780x^2 + 36\,000x$ en $y_2 = 286\,000$

Venster: $0 \leq x \leq 80$, $0 \leq y \leq 500\,000$

Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(10, 286\,000)$ en $(55, 286\,000)$.

Bij een inhoud van 286 liter is de hoogte van de bak 10 cm of 55 cm.

c Optie: maximum

De coördinaten van de top van de grafiek zijn $(30, 486\,000)$.

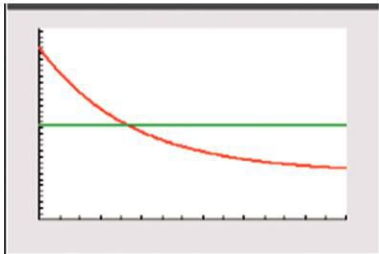
De bak heeft een maximale inhoud bij een hoogte van 30 cm, een lengte van $240 - 2 \times 30 = 180$ cm en een breedte van $150 - 2 \times 30 = 90$ cm.

2 Verbanden

2.5 Ongelijkheden

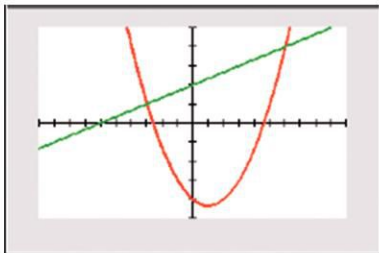
intro Je kunt zien bij welke aantallen verkochte hamburgers Jim winst maakt door te kijken waar de grafiek voor de totale opbrengsten boven de grafiek voor de totale kosten ligt. Waar de grafiek voor de totale kosten boven ligt, maakt Jim verlies.

- 31 a** Invoer: $y_1 = 25 + 65 \cdot 0,8^x$ en $y_2 = 50$
Venster: $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 100$



- b** De grafiek is dalend.
c Optie: snijpunten
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (4,28; 50).
Dus de temperatuur van de thee is na 4,3 minuten lager dan 50 °C.

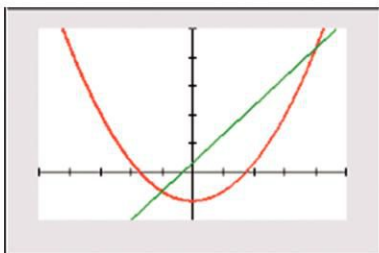
- 32 a** Invoer: $y_1 = x^2 - 2x - 12$ en $y_2 = x + 6$
Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-15 \leq y \leq 15$



- b** Optie: snijpunten
De coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g zijn $(-3, 3)$ en $(6, 12)$.
c $x^2 - 2x - 12 < x + 6$ geeft $-3 < x < 6$, oftewel $\langle -3, 6 \rangle$.
d $x^2 - 2x - 12 \geq x + 6$ geeft $x \leq -3$ of $x \geq 6$, oftewel $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ of $[6, \rightarrow)$.

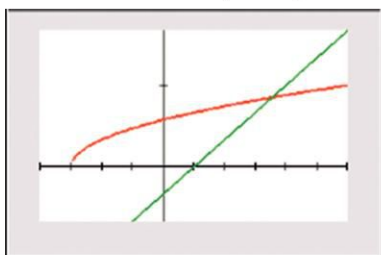
- 33 a** Omdat $f(x)$ niet bestaat voor $x = -1$.
b $\sqrt{x}$ bestaat alleen voor $x \geq 0$, dus de oplossing van de ongelijkheid $\sqrt{x} < 12 - \frac{1}{2}x$ is $[0, 16)$.

- 34 a** Invoer: $y_1 = x^2 - 3$ en $y_2 = 3x + 1$
Venster: $-15 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 15$



Optie: snijpunten
De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-1, -2)$ en $(4, 13)$.
De oplossing van de ongelijkheid $x^2 - 3 \leq 3x + 1$ is $[-1, 4]$.

- b** Invoer: $y_1 = \sqrt{x+3}$ en $y_2 = x-1$
 Venster: $-4 \leq x \leq 6$, $-2 \leq y \leq 5$

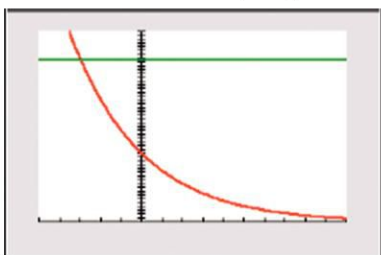


Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (3, 2).

De oplossing van de ongelijkheid $\sqrt{x+3} > x-1$ is $[-3; 3,56)$.

- c** Invoer: $y_1 = 54 \cdot 0,75^x$ en $y_2 = 128$
 Venster: $-5 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 150$

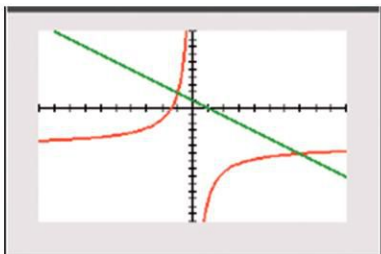


Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (-3, 128).

De oplossing van de ongelijkheid $54 \cdot 0,75^x \geq 128$ is $\langle \leftarrow, -3 \rangle$.

- d** Invoer: $y_1 = \frac{-5x-7}{x}$ en $y_2 = 1-x$
 Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-15 \leq y \leq 10$



Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn (-1, 2) en (7, -6).

De oplossing van de ongelijkheid $\frac{-5x-7}{x} > 1-x$ is $\langle -1, 0 \rangle$ of $\langle 7, \rightarrow \rangle$.

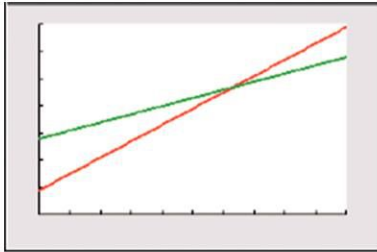
2 Verbanden

- 35 a** Het verband tussen p en I is lineair, want de kosten per pagina zijn steeds gelijk. Het startgetal is 90, want dat zijn de aanschafkosten van de printer. De richtingscoëfficiënt is gelijk aan 0,06, want dat zijn de printkosten in euro's per pagina.

b $L = 280 + 0,03p$

c Invoer: $y_1 = 90 + 0,06x$ en $y_2 = 280 + 0,03x$

Venster: $0 \leq x \leq 10000$, $0 \leq y \leq 700$



Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (6333,3; 470).

De laserprinter is goedkoper vanaf 6334 geprinte pagina's.

- 36 a** $TO = 9,95q$

b Invoer: $y_1 = 8000 + 3\sqrt{x}$ en $y_2 = 9,95x$

Venster: $0 \leq x \leq 1000$, $0 \leq y \leq 12000$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (812,61; 8085,52).

Dus $TO > TK$ geeft $q \geq 813$.

- c** Vanaf 813 verkochte dvd's maakt de rockband winst.

- 37 a** $N = 1500 - 850 \cdot 0,89^0 = 650$, dus op $t = 0$ zijn er 650 vliegjes.

b Invoer: $y_1 = 1500 - 850 \cdot 0,89^x$ en $y_2 = 1000$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 1600$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (4,55; 1000).

Dus na 5 dagen zijn er meer dan 1000 vliegjes in de ruimte.

c Invoer: $y_1 = 1500 - 850 \cdot 0,89^x$ en $y_2 = 1300$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 1600$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (12,42; 1300).

Invoer: $y_1 = 1500 - 850 \cdot 0,89^x$ en $y_2 = 1400$

Venster: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 1600$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (18,36; 1000).

$18,36 - 12,42 = 5,94$, dus in 6 dagen neemt het aantal vliegjes toe van 1300 naar 1400.

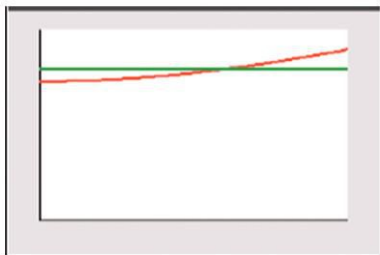
- d** Op den duur zijn er 1500 vliegjes.

- 38 a** In de rood gemarkeerde driehoek zijn de lengten van de rechthoekszijden 4 cm en d cm. Volgens de stelling van Pythagoras is de lengte van de schuine zijde dan gelijk aan $\sqrt{d^2 + 16}$. In totaal zijn er 10 van zulke schuine delen en is er één horizontaal deel van 4 cm. Dit geeft $l = 4 + 10\sqrt{d^2 + 16}$.

- b** Als er 42 cm extra nodig is, dan is er voor l nog $90 - 42 = 48$ cm over.

Invoer: $y_1 = 4 + 10\sqrt{x^2 + 16}$ en $y_2 = 48$

Venster: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 60$

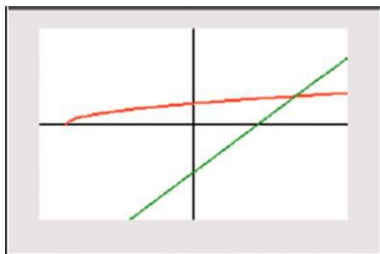


Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (1,83; 48).

d is dus maximaal 1,83, dit is het geval bij de schoenmaten 38 tot en met 41.

- 034 a** Invoer: $y_1 = \sqrt{x + 5}$ en $y_2 = 2x - 5$
 Venster: $-6 \leq x \leq 6$, $-10 \leq y \leq 10$



Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (4, 3).

- b** $f(x)$ heeft geen uitkomst voor $x < -5$.
c De grafiek van f ligt boven de grafiek van g voor $-5 \leq x < 4$.
d De oplossing van de ongelijkheid $\sqrt{x + 5} > 2x - 5$ is $[-5, 4)$.

U7 a $v = \frac{100 \cdot 0,01 \cdot \sqrt{3 + 3 \times 1,5}}{1,5} \approx 18,3$, dus een muurtje van 1,5 m hoog en

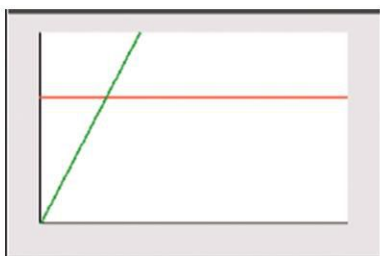
10 cm dik wordt omgeblazen vanaf een windsnelheid 18,3 m/s.

- b** 120 km per uur is gelijk aan $33\frac{1}{3}$ m/s.

$$33\frac{1}{3} = \frac{100 \times d \times \sqrt{3 + 3 \times 1,90}}{1,90}$$

Invoer: $y_1 = 33\frac{1}{3}$ en $y_2 = \frac{100 \times x \times \sqrt{3 + 3 \times 1,90}}{1,90}$

Venster: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 50$



Optie: snijpunten

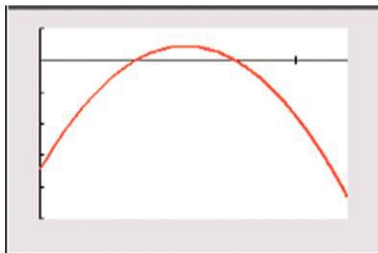
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (0,215; 33,333).

De muur was ten minste 21,5 cm dik.

2 Verbanden

2.6 Gemengde opdrachten

- 39 a** $TO = 5,10s$
- b** De grafiek van TK gaat niet door de oorsprong en dus is TK niet recht evenredig. De formule van TO is wel recht evenredig.
- c** $TO > TK$
 $5,10s > 6000 + 2,7s$
 $2,4s > 6000$
 $s > 2500$
 Dus bij meer dan 2500 paren pantoffels is de totale opbrengst groter dan de totale kosten.
- d** De totale opbrengst is gelijk aan het aantal verkochte paren pantoffels vermenigvuldigd met de prijs per paar pantoffel.
 $TO = p \cdot (10400 - 1200p)$
 $TO = 10400p - 1200p^2$
- e** De totale winst is gelijk aan de totale opbrengst min de totale kosten.
 $TW = TO - TK$
 $TW = 10400p - 1200p^2 - (6000 + 2,7s)$
 $TW = 10400p - 1200p^2 - (6000 + 2,7(10400 - 1200p))$
 $TW = 10400p - 1200p^2 - (6000 + 28080 - 3240p)$
 $TW = 10400p - 1200p^2 - 6000 - 28080 + 3240p$
 $TW = -34080 + 13640p - 1200p^2$
- f** Invoer: $y_1 = -34080 + 16640x - 1200x^2$
 Venster: $0 \leq x \leq 12, -50000 \leq y \leq 10000$



Optie: maximum

De coördinaten van de top van de grafiek zijn (5,68; 4680,33).

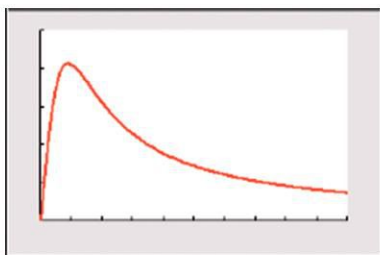
De totale winst is maximaal bij een prijs van € 5,68.

De maximale winst is € 4.680,33.

- 40 a** Formule B beschrijft een recht evenredig verband.
- b** Formule D beschrijft een omgekeerd evenredig verband.
- c**
- | | | | | |
|-----|------|--------|--------|--------|
| x | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
| y | 8,75 | 8,0612 | 8,0060 | 8,0006 |
- Formule A heeft dus een grenswaarde, deze is gelijk aan 8.
- d** $4x - 6y = 8$
 $-6y = -4x + 8$
 $y = \frac{2}{3}x - 1\frac{1}{3}$
- e** Invoer: $y_1 = \frac{12}{x}$ en $y_2 = 3x$
 Venster: $-10 \leq x \leq 10, -15 \leq y \leq 15$
 Optie: snijpunten
 De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-2, -6)$ en $(2, 6)$.
 De oplossing van $\frac{12}{x} > x$ is $\langle \leftarrow, -2 \rangle$ of $\langle 0, 2 \rangle$.

41 a Invoer: $y_1 = \frac{75x}{x^2 + 82}$

Venster: $0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 5$



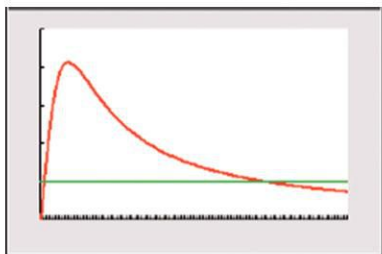
Optie: maximum

De coördinaten van de top van de grafiek zijn (9,06; 4,14).

Dus de maximale concentratie is 4,1 mg per liter.

b Invoer: $y_1 = \frac{75x}{x^2 + 82}$ en $y_2 = 1$

Venster: $0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 5$



Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn (1,11; 1) en (73,89; 1).

Na 74 dagen is het gevaar voor de volksgezondheid geweken.

Onderzoeksopdrachten

42 Invoer: $y_1 = \sqrt{x^2 + 1}$ en $y_2 = \sqrt{(4-x)^2 + 4}$

Venster: $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5$

Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (2,375; 2,577).

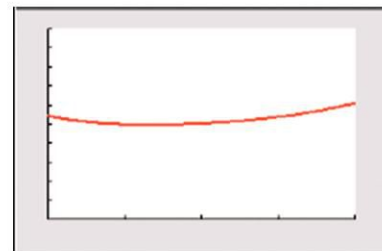
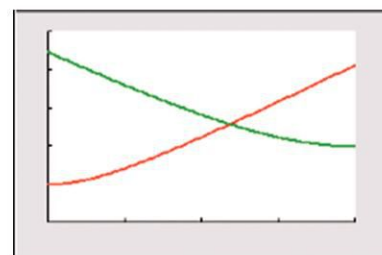
Invoer: $y_1 = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(4-x)^2 + 4}$

Venster: $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 10$

Optie: minimum

De coördinaten van de top van de grafiek zijn (1,333; 5).

De x-coördinaat van het snijpunt en de x-coördinaat van de top komen niet overeen, dus deze persoon heeft geen gelijk.



2 Verbanden

43

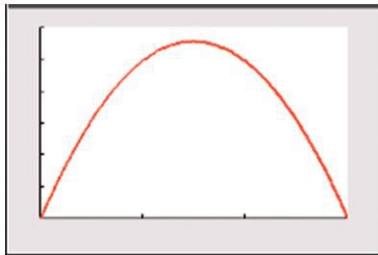
t	10	100	1000	10 000
A	12,0857	11,0000	11,0000	11,0000

Het aantal klachten wordt niet lager dan 11, dus de doelstelling wordt niet gehaald.

- 44** De breedte van de middelste strook is gelijk aan $60 - 2h$. Dan geldt dat de inhoud I gelijk is aan $I = 124h(60 - 2h)$.

Invoer: $y_1 = 124x(60 - 2x)$

Venster: $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 60\,000$



Optie: maximum

De coördinaten van de top van de grafiek zijn (15, 55800).

De goot bevat dus zoveel mogelijk water bij $h = 15$ cm.

Er gaat maximaal 55 800 liter water in de goot.

Samenvatting

- S1 a** Er is sprake van een recht evenredig verband, want een k keer zo zware biefstuk is k keer zo duur.
- b** Er is sprake van een omgekeerd evenredig verband, want als de lengte k keer zo groot wordt, dan wordt de breedte k keer zo klein.

S2 a $3q - 9p = 6 - 12q$

$$15q - 9p = 6$$

$$15q = 9p + 6$$

$$q = \frac{3}{5}p + \frac{2}{5}$$

b $4p + 8 = -(2q - 6)$

$$-(2q - 6) = 4p + 8$$

$$-2q + 6 = 4p + 8$$

$$-2q = 4p + 2$$

$$q = -2p - 1$$

S3 a $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{28 - 7}{5 - -2} = 3$

$$y = 3x + b$$

De coördinaten van het punt $(-2, 7)$ invullen.

$$7 = 3 \times -2 + b$$

$$7 = -6 + b$$

$$b = 13$$

$$y = 3x + 13$$

b $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{-14 - 2}{5 - -3} = -2$

$$y = -2x + b$$

De coördinaten van het punt $(-3, 2)$ invullen.

$$2 = -2 \times -3 + b$$

$$2 = 6 + b$$

$$b = -4$$

$$y = -2x - 4$$

S4 a Tabel B hoort bij een recht evenredig verband.

Tabel A hoort bij een omgekeerd evenredig verband.

b $\text{evenredigheidsconstante} = \frac{9}{2} = 4,5$

c

A	x	2	3	4	5	6
	y	7,5	5	3,75	3	2,5

B	p	2	3	5	6	7
	q	9	13,5	22,5	27	31,5

d A Omgekeerd evenredig verband, dus $y = \frac{c}{x}$
 $c = 2 \times 7,5 = 15$

$$y = \frac{15}{x} \text{ of } x = \frac{15}{y} \text{ of } y \cdot x = 15$$

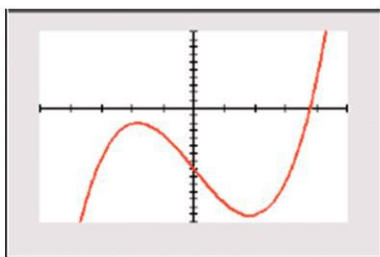
B Recht evenredig verband, dus een formule is $q = 4,5p$.

S5

x	10	100	1000	10 000
y	6,625	5,1327	5,0130	5,0013

De functie heeft een grenswaarde 5.

S6 a Invoer: $y_1 = \frac{1}{2}x^3 - 5x - 8$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-15 \leq y \leq 10$



Optie: nulpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafiek van h met de x -as zijn $(3,77; 0)$.

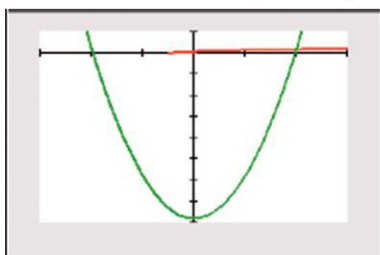
Het nulpunt van h is 3,77.

b Optie: minimum, maximum

De coördinaten van de toppen van de grafiek van h zijn $(-1,83; -1,01)$ en $(1,83; -14,09)$.

2 Verbanden

- S7 a** Invoer: $y_1 = 2\sqrt{x+5}$ en $y_2 = x^2 - 390$
 Venster: $-30 \leq x \leq 30$, $-400 \leq y \leq 50$

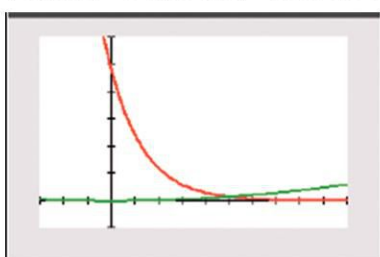


Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (20, 10).

De oplossing van $2\sqrt{x+5} = x^2 - 390$ is $x = 20$.

- b** Invoer: $y_1 = 2400 \cdot 0,5^x$ en $y_2 = 3x^2$
 Venster: $-3 \leq x \leq 10$, $-500 \leq y \leq 3000$

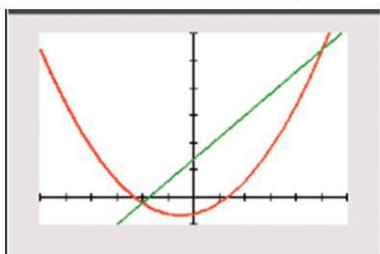


Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (5, 75).

De oplossing van $2400 \cdot 0,5^a = 3a^2$ is $a = 5$.

- S8 a** Invoer: $y_1 = x^2 + x - 3$ en $y_2 = 4x + 7$
 Venster: $-6 \leq x \leq 6$, $-5 \leq y \leq 30$

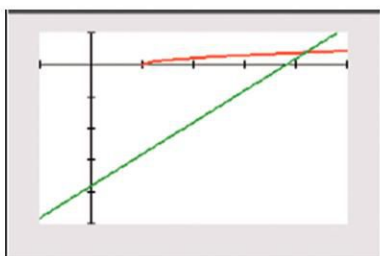


Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn (-2, -1) en (5, 27).

De oplossing van $x^2 + x - 3 \leq 4x + 7$ is $[-2, 5]$.

- b** Invoer: $y_1 = \sqrt{x-5}$ en $y_2 = 2x - 38$
 Venster: $-5 \leq x \leq 25$, $-50 \leq y \leq 10$



Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (21, 4).

De grafiek van $y = \sqrt{x-5}$ bestaat alleen voor $x \geq 5$.

De oplossing van $\sqrt{x-5} > 2x - 38$ is $[5, 21)$.

Test jezelf

T1 a Het gaat hier om een lineair verband.

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{24,43 - 8,23}{12 - 3} = 1,8$$

$$k = 1,8a + b$$

De coördinaten van het punt (3; 8,23) invullen.

$$8,23 = 1,8 \times 3 + b$$

$$8,23 = 5,4 + b$$

$$b = 2,83$$

$$k = 1,8a + 2,83$$

b $1,8a + 2,83 = 19,39$

$$1,8a = 16,56$$

$$a = 9,2$$

Je hebt dus 9,2 kilometer gereden als de meter € 19,39 aangeeft.

c $k = 1,8a + 2,83$

$$1,8a + 2,83 = k$$

$$1,8a = k - 2,83$$

$$a \approx 0,56k - 1,57$$

Met de formule kan je het aantal gereden kilometers berekenen als je de kosten weet.

T2 a $-\frac{1}{2}x + 7 = -x + 9$

$$-x + 14 = -2x + 18$$

$$x + 14 = +18$$

$$x = 4$$

b $-(x + 6) + 2x = -3 - 8x$

$$-x - 6 + 2x = -3 - 8x$$

$$x - 6 = -3 - 8x$$

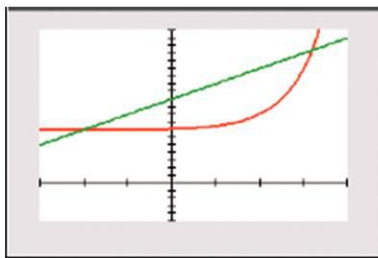
$$9x - 6 = -3$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

c Invoer: $y_1 = 0,125 \cdot 4^x + 7$ en $y_2 = 2x + 11$

Venster: $-3 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 20$



Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-2,00; 7,01)$ en $(3,19; 17,38)$.

De oplossing is $w \approx -2,00$ of $w \approx 7,01$.

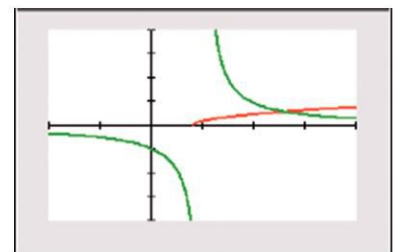
d Invoer: $y_1 = \sqrt{x-4}$ en $y_2 = \frac{24}{x-5}$

Venster: $-10 \leq x \leq 20$, $-20 \leq y \leq 20$

Optie: snijpunten

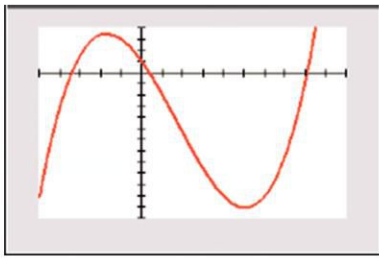
De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(13; 3)$.

De oplossing is $p = 13$.



2 Verbanden

- T3 a** Invoer: $y_1 = x^3 - 5x^2 - 26x + 10$
 Venster: $-5 \leq x \leq 10$, $-130 \leq y \leq 40$



Optie: nulpunten

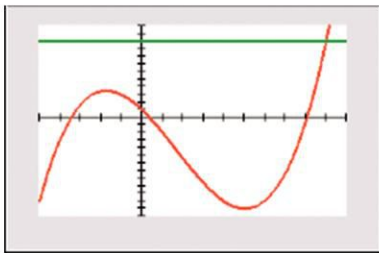
De coördinaten van het linker snijpunt van de grafiek van f met de x -as zijn $(-3,43; 0)$.

- b** Optie: minimum, maximum

De coördinaten van de top van de grafiek van f die bij een minimum hoort zijn $(5,05; -120,02)$.

De coördinaten van de top van de grafiek van f die bij een maximum hoort zijn $(-1,72; 34,84)$.

- c** Invoer: $y_1 = x^3 - 5x^2 - 26x + 10$ en $y_2 = 100$
 Venster: $-5 \leq x \leq 10$, $-130 \leq y \leq 120$



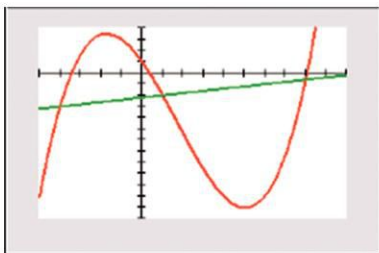
Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(9, 100)$.

De oplossing van vergelijking A is $x = 9$.

Invoer: $y_1 = x^3 - 5x^2 - 26x + 10$ en $y_2 = 2x - 22$

Venster: $-5 \leq x \leq 10$, $-130 \leq y \leq 40$



Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-4, -30)$, $(1, -20)$ en $(8, -6)$.

De oplossing van vergelijking B is $x = -4$, $x = 1$ of $x = 8$.

T4 a $\frac{18}{3} = 6$, dus $b = 12 \times 6 = 72$

b

p	3	18	20
q	12	72	80

c $q = 4p$ en $\frac{q}{p} = 4$

d $b = 12 : 6 = 2$

p	3		18	20
q	12		2	1,8

$q = \frac{36}{p}$ en $p \cdot q = 36$

e richtingscoëfficiënt $= \frac{17 - 12}{18 - 3} = \frac{1}{3}$

$q = \frac{1}{3}p + b$

De coördinaten van het punt (3, 12) invullen.

$12 = \frac{1}{3} \cdot 3 + b$

$12 = 1 + b$

$b = 11$

$q = \frac{1}{3}p + 11$

p	3	18	20
q	12	17	$17\frac{2}{3}$

T5 a $V = 385 - 281 \cdot 0,87^0 = 104$

Men heeft 104 vissen uitgezet.

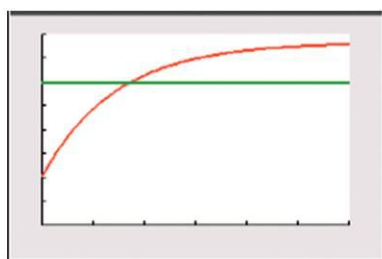
b Eind 2019: $V = 385 - 281 \cdot 0,87^3 \approx 200$

Eind 2020: $V = 385 - 281 \cdot 0,87^4 \approx 224$

Dus het aantal vissen neemt in 2020 met $224 - 200 = 24$ toe.

c Invoer: $y_1 = 385 - 281 \cdot 0,87^x$ en $y_2 = 300$

Venster: $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 400$



Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (8,59; 300).

In de loop van het jaar 2025 zijn er voor het eerst meer dan 300 vissen.

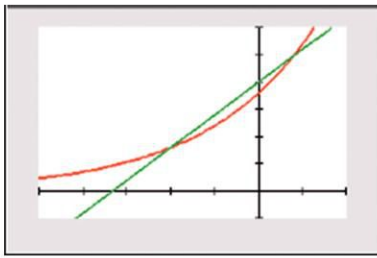
d

t	10	100	1000	10 000
V	315,1930	384,9997	385,0000	385,0000

Op den duur zullen er 385 vissen zijn.

2 Verbanden

- T6 a** Invoer: $y_1 = 18 \cdot 1,5^x$ en $y_2 = 20 + 6x$
 Venster: $-5 \leq x \leq 2$, $-5 \leq y \leq 30$



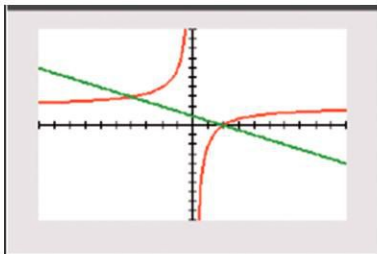
Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-2, 8)$ en $(0, 78; 24,66)$.

De oplossing van $18 \cdot 1,5^x > 20 + 6x$ is $\langle \leftarrow, -2 \rangle$ of $\langle 0,78; \rightarrow \rangle$.

- b** Invoer: $y_1 = \frac{2x-4}{x}$ en $y_2 = -\frac{1}{2}x + 1$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$



Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-4, 3)$ en $(2, 0)$.

$\frac{2x-4}{x} \leq -\frac{1}{2}x + 1$ geeft $\langle \leftarrow, -4 \rangle$ of $\langle 0, 2 \rangle$.

- T7 a** Invoer: $y_1 = \frac{4x^2 - 8x + 2}{\frac{1}{2}x^2 + 2}$

Venster: $-5 \leq x \leq 8$, $-5 \leq y \leq 12$

Optie: nulpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $(0,29; 0)$ en $(1,71; 0)$.

De nulpunten zijn $x = 0,29$ en $x = 1,71$.

- b** Optie: maximum en minimum

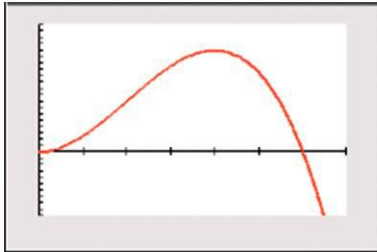
Er is een top $(-4,41; 9,82)$.

Er is een bodem $(0,91; -0,82)$.

- c** $f(10) \approx 6,192$, $f(100) \approx 7,837$, $f(1000) \approx 7,984$, $f(10\,000) \approx 7,998$

De grenswaarde is 8.

- T8 a** $TO = 6q$
b $TW = TO - TK$
 $TW = 6q - (0,5q^3 - 3q^2 + 6q)$
 $TW = 6q - 0,5q^3 + 3q^2 - 6q$
 $TW = -0,5q^3 + 3q^2$
c Invoer: $y_1 = -0,5x^3 + 3x^2$
 Venster: $0 \leq x \leq 7, -10 \leq y \leq 20$



Optie: nulpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de x -as zijn $(0, 0)$ en $(6, 0)$.

Het bedrijf maakt dus winst wanneer het minder dan 6000 kilogram bestrijdingsmiddel produceert.

- d** Optie: maximum
 De coördinaten van de top van de grafiek zijn $(4, 16)$.
 De winst is maximaal bij een productie van 4000 kilogram bestrijdingsmiddel. Het bedrijf maakt dan € 16.000,- winst.

Extra oefening

- E1 a** **A** $6w - 7a = 42$
 $6w = 7a + 42$
 $w = 1\frac{1}{6}a + 7$
B $6a = 3(w + 12)$
 $3(w + 12) = 6a$
 $3w + 36 = 6a$
 $3w = 6a - 36$
 $w = 2a - 12$
b **A** $6w - 7a = 42$
 $-7a = -6w + 42$
 $a = \frac{6}{7}w - 6$
B $6a = 3(w + 12)$
 $6a = 3w + 36$
 $a = \frac{1}{2}w + 6$
C $\frac{1}{2}w - 2a = 5$
 $\frac{1}{2}w = 2a + 5$
 $w = 4a + 10$
D $4a - w = 7(w + 4)$
 $4a - w = 7w + 28$
 $-8w = -4a + 28$
 $w = \frac{1}{2}a + 3\frac{1}{2}$
C $\frac{1}{2}w - 2a = 5$
 $-2a = -\frac{1}{2}w + 5$
 $a = \frac{1}{4}w - 2\frac{1}{2}$
D $4a - w = 7(w + 4)$
 $4a - w = 7w + 28$
 $4a = 8w + 28$
 $a = 2w + 7$

2 Verbanden

E2 a $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{-5 - 7}{1 - -2} = -4$

$$y = -4x + b$$

De coördinaten van het punt $A(-2, 7)$ invullen.

$$7 = -4 \cdot -2 + b$$

$$7 = 8 + b$$

$$b = -1$$

$$y = -4x - 1$$

b $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{-2 - 5}{4 - -3} = -1$

$$y = -x + b$$

De coördinaten van het punt $C(-3, 5)$ invullen.

$$5 = 3 + b$$

$$b = 2$$

$$y = -x + 2$$

E3 a Tabel A hoort bij een recht evenredig verband en tabel B hoort bij een omgekeerd evenredig verband.

A						B					
a	20	24	30	36	40	t	4	5	8	12	50
w	6	7,2	9	10,8	12	h	1,5	1,2	0,75	0,5	0,12

c Een recht evenredig verband, dus $w = c \cdot a$

$$c = \frac{6}{20} = 0,3$$

$$w = 0,3a, \text{ of } \frac{w}{a} = 0,3$$

d Een omgekeerd evenredig verband, dus $w = \frac{c}{a}$

$$c = 4 \cdot 1,5 = 6$$

$$h = \frac{6}{t}, \text{ of } h \cdot t = 6 \text{ of } t = \frac{6}{h}$$

E4 a

x	10	100	1000	10 000
y	294,6932	346,4336	350,0000	350,0000

De functie f heeft een grenswaarde gelijk aan 350.

b

x	10	100	1000	10 000
y	12,1837	146,6919	1496,6318	14996,6257

De functie g heeft geen grenswaarde.

c

x	10	100	1000	10 000
y	24,5185	8,4155	6,2491	6,0250

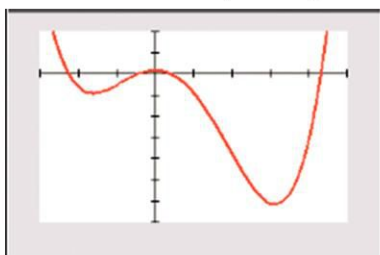
De functie h heeft een grenswaarde gelijk aan 6.

d

x	10	100	1000	10 000
y	0,2062	0,2006	0,2001	0,2000

De functie i heeft een grenswaarde gelijk aan 0,2.

- E5 a** Invoer: $y_1 = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 5x^2 + 1$
 Venster: $-3 \leq x \leq 5$, $-35 \leq y \leq 10$



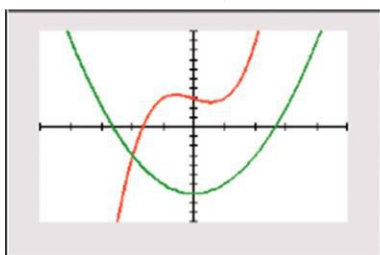
Optie: nulpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de horizontale as zijn $(-2,26; 0)$, $(-0,48; 0)$, $(0,43; 0)$ en $(4,30; 0)$.

- b** Optie: minimum, maximum

De coördinaten van de toppen van de grafiek die bij minima horen zijn $(-1,61; -4,43)$ en $(3,11; -30,67)$. De coördinaten van de top van de grafiek die bij een maximum hoort zijn $(0, 1)$.

- E6 a** Invoer: $y_1 = x^3 - x + 3$ en $y_2 = x^2 - 7$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-10 \leq y \leq 10$

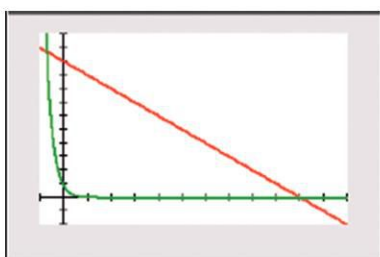


Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(-2, -3)$.

De oplossing is $x = -2$.

- b** Invoer: $y_1 = 50 - x$ en $y_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 Venster: $-5 \leq x \leq 60$, $-10 \leq y \leq 60$



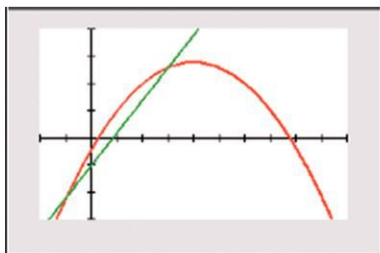
Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-3,75; 53,75)$ en $(50,00; 0,00)$.

De oplossing is $x \approx -3,75$ of $x \approx 50,00$.

2 Verbanden

- E7 a** Invoer: $y_1 = -x^2 + 8x - 2$ en $y_2 = 6x - 5$
 Venster: $-2 \leq x \leq 10$, $-15 \leq y \leq 20$

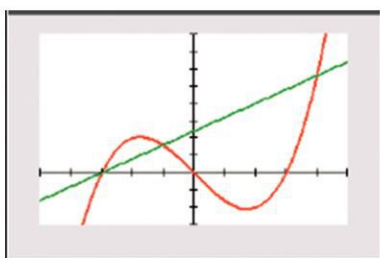


Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-1, -11)$ en $(3, 13)$.

De oplossing van de ongelijkheid $-x^2 + 8x - 2 \geq 6x - 5$ is $[-1, 3]$.

- b** Invoer: $y_1 = x^3 - 9x$ en $y_2 = 4x + 12$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-15 \leq y \leq 40$

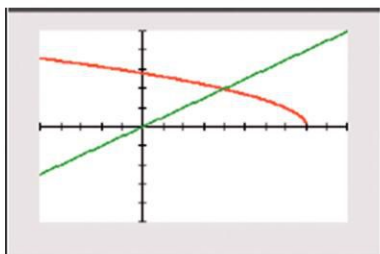


Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(-3, 0)$, $(-1, 8)$ en $(4, 28)$.

De oplossing van de ongelijkheid $x^3 - 9x > 4x + 12$ is $\langle -3, -1 \rangle$ of $\langle 4, \rightarrow \rangle$.

- c** Invoer: $y_1 = \sqrt{8-x}$ en $y_2 = \frac{1}{2}x$
 Venster: $-5 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 5$

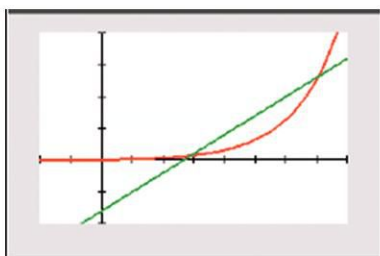


Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn $(4, 2)$.

De oplossing van de ongelijkheid $\sqrt{8-x} \geq \frac{1}{2}x$ is $\langle \leftarrow, 4 \rangle$.

- d** Invoer: $y_1 = 0,1 \times 2^x$ en $y_2 = 3x - 8$
 Venster: $-2 \leq x \leq 8$, $-10 \leq y \leq 20$



Optie: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(2, 0,92)$ en

$(7,03; 13,10)$.

De oplossing van de ongelijkheid $0,1 \cdot 2^x < 3x - 8$ is $\langle 2,92; 7,03 \rangle$.

E8 a $GTK = 10 + \frac{600}{1000} = 10,6$

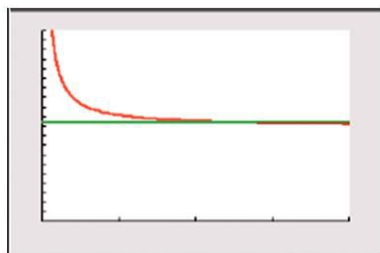
Dus de kosten per voetbal zijn € 10,60 als het bedrijf op een dag 1000 voetballen produceert.

De totale kosten zijn dan gelijk aan $1000 \times 10,6 = € 10.600,-$.

- b** Als a groter wordt, worden de gemiddelde kosten per voetbal lager omdat 600 door een steeds groter getal gedeeld wordt.

c Invoer: $y_1 = 10 + \frac{600}{x}$ en $y_2 = 10,5$

Venster: $0 \leq x \leq 2000$, $0 \leq y \leq 20$



Optie: snijpunten

De coördinaten van het snijpunt van de grafieken zijn (1200; 10,5).

Dus vanaf 1201 geproduceerde voetballen zijn de productiekosten per voetbal minder dan € 10,50.

- E9 a** Er is sprake van een lineair verband met $b = 0$.

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{2400 - 0}{17 - 13} = 600$$

$$V = 600t$$

b $600t = 10000$

$$t = 16\frac{2}{3}$$

Het reservoir zal vol zijn om 5.40 uur.

c $600t + 800 = 10000$

$$600t = 9200$$

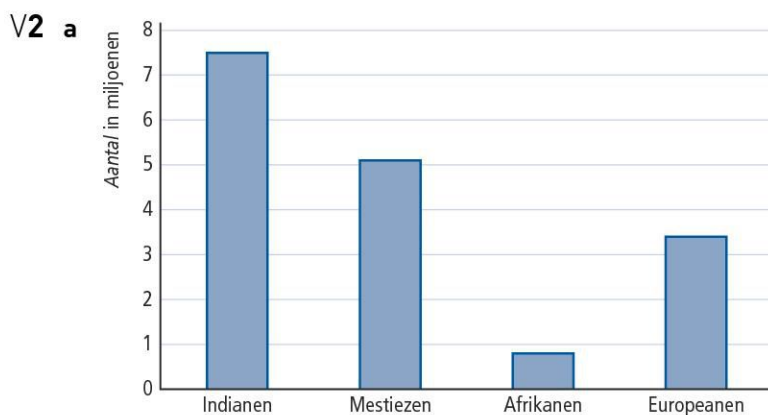
$$t = 15\frac{1}{3}$$

Het reservoir zal nu om 4.20 uur vol zijn.

3 Statistiek

Voorkennis

- V1 a** 78 van de 1370 leerlingen gaan lopend naar school.
Dat is $(78 : 1370) \times 100\% \approx 5,7\%$.
- b** Het derde kwartiel is 30 minuten.
Dit betekent dat voor 75% van de patiënten de wachttijd korter is dan 30 minuten (of voor 25% is het langer dan 30 minuten).
- c** In voorbeeld 3 is er geen verloop in de tijd. Het aantal vakantiegangers is per land weergegeven en daartussen is geen lijndiagram te tekenen.
- d** In het lijndiagram kun je aflezen dat 5% van de beroepsbevolking op 1 januari 2012 werkloos is.
5% van 10,8 miljoen is $0,05 \times 10,8 \text{ miljoen} = 0,54 \text{ miljoen}$.
Er waren dus 540 000 werklozen.



- b** De totale bevolking in Latijns-Amerika was
 $7,6 + 5,1 + 0,8 + 3,4 = 16,9 \text{ miljoen}$.
 $3,4 : 16,9 \times 100\% \approx 20,1\%$
In 1880 bestond de bevolking voor ongeveer 20% uit Europeanen.

- V3 a** Het totaal aantal cijfers is $6 + 39 + 34 + 20 + 14 + 4 = 117$.
$$\frac{6 \times 4 + 39 \times 5 + 34 \times 6 + 20 \times 7 + 14 \times 8 + 4 \times 9}{117} = \frac{711}{117} \approx 6,1$$

Het gemiddelde eindcijfer is dus ongeveer 6,1.
- b** $((6 + 39) : 117) \times 100\% = \frac{45}{117} \times 100\% \approx 38,5\%$
Van de leerlingen heeft ongeveer 38,5% een onvoldoende.

- V4 a** De frequenties zijn absoluut.
- b** De modus is het cijfer dat het meeste voorkomt. De modus is dus 5.
- c** Er zijn 117 cijfers. Het 59e cijfer is de mediaan.
 $6 + 39 = 45$ (minder dan de helft) en $6 + 39 + 34 = 79$ (meer dan de helft)
De mediaan zit in de groep met cijfer 6.
De mediaan is dus 6.

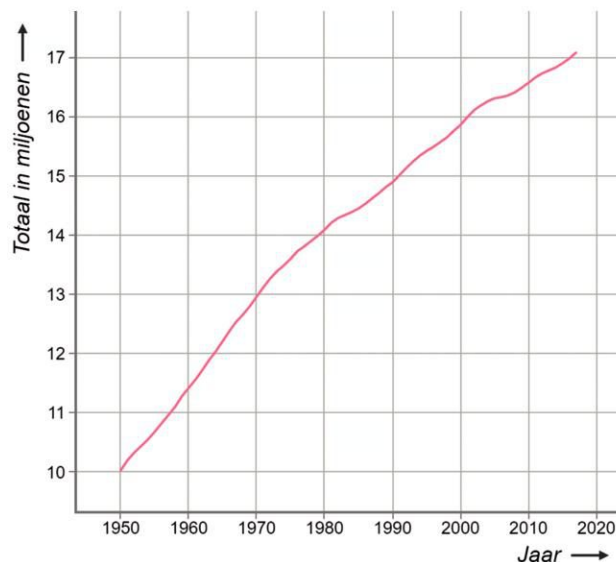
3 Statistiek

3.1 Wat is statistiek?

intro De maker heeft willen laten zien dat er een stijging is van de gemiddelde wintertemperatuur.

Nee, want je ziet dat de gemiddelde wintertemperatuur per jaar erg kan verschillen.

1 a



b Ga bijvoorbeeld uit van de gegevens uit de jaren 2001 en 2016.

Tussen 2001 en 2016 was de toename ongeveer 1 miljoen.

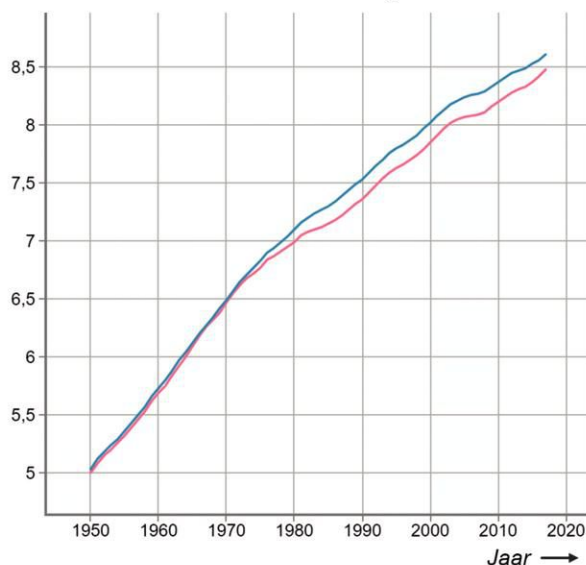
Dus per jaar is de toename ongeveer $1 \text{ miljoen} : 15 = 0,0666\dots$ miljoen.

In negen jaar is dit dus $9 \times 0,0666\dots$ miljoen = 0,6 miljoen.

In 2016 waren er 16,9 miljoen inwoners.

In 2025 zullen er met deze uitgangspunten ongeveer $16,9 + 0,6 = 7,5$ miljoen inwoners zijn.

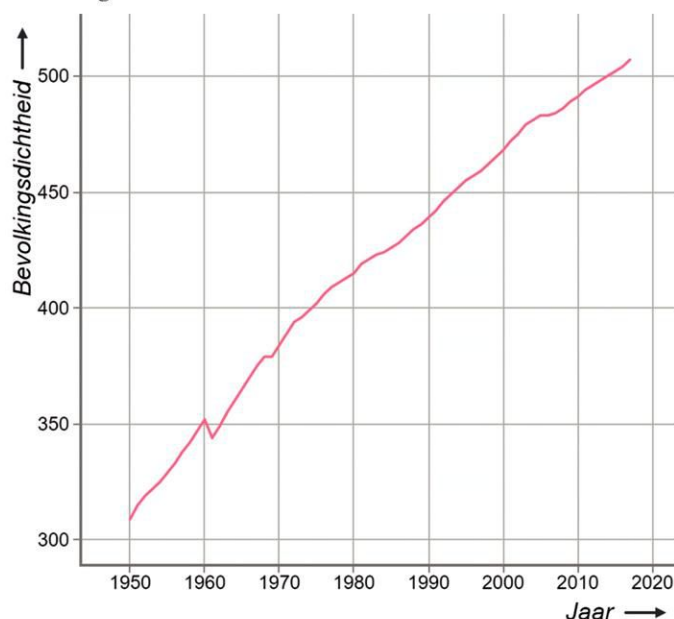
c Maak een lijndiagram met op de horizontale as *jaar* en op de verticale as *het aantal mannen en vrouwen in miljoenen*.



In de grafiek zie je dat, behalve rond 1971, de grafiek van de vrouwen (blauw) boven die van de mannen (rood) ligt.

In alle jaren, met uitzondering van 1971, waren er meer vrouwen dan mannen.

- d** Maak een lijndiagram met op de horizontale as *jaar* en op de verticale as *bevolkingsdichtheid*.



De grafiek van de totale bevolking stijgt overal. In 1960 daalt de bevolkingsdichtheid.

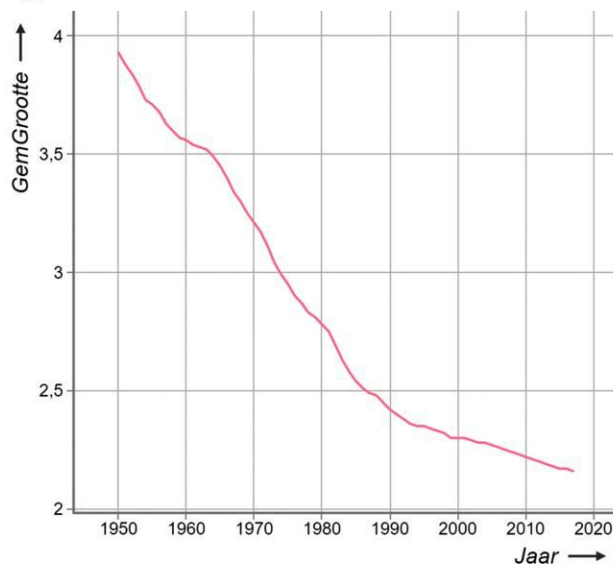
Dit komt omdat in 1960 door de inpoldering van Flevoland de oppervlakte van Nederland toeneemt.

Hierdoor neemt het gemiddeld aantal mensen per km^2 af.

- 2 a** De leerlingen hebben de volgende sporten gedaan:
sprint, verspringen en vergooien.
- b** De leerlingen zijn 11 en 12 jaar oud. Dus het zijn leerlingen van een basisschool.
- c** De beste prestatie bij de sprint was 8,0 seconden. Deze prestatie werd door een jongen geleverd.
- 3 a** De populatie in dit onderzoek zijn de inwoners van de gemeente.
- b** Mogelijke vragen zijn:
Huizen op sportterrein?
Zo nee, welk terrein dan wel?
Hoeveel mag dit meer kosten?
- c** Leeftijd
Woningzoekend
Gebruiker van sportterrein
Geslacht
Inkomsten
- d** Een uitspraak zou kunnen zijn:
Woningzoekenden zijn voor het bouwen van huizen op het sportterrein.
70% van de inwoners onder de 30 jaar is tegen het bouwen van woningen op het sportterrein.
- 4 a** De statistische variabelen zijn: *jaar*, *geslacht*, *gemiddelde leeftijd*, *grootte huishoudens*, *gemiddelde grootte huishoudens*, *bevolkingsdichtheid*.
- b** Maak een lijndiagram met op de horizontale as *jaar* en op de verticale as *gemiddelde grootte*.

3 Statistiek

De gemiddelde grootte van de huishoudens is tussen 1950 en 2016 steeds afgenomen.



A: Ja.

De totale bevolking neemt toe, het aantal personen per huishouden neemt af. Dus het aantal huishoudens is sterker gestegen.

B: Ja.

Het aantal personen per huishouden neemt met ongeveer 0,01 per jaar af. Over 13 jaar zal dit dus ongeveer met 0,13 zijn afgenomen.

De verwachting is dus dat dit in 2030 onder de 2,1 gedaald zal zijn.

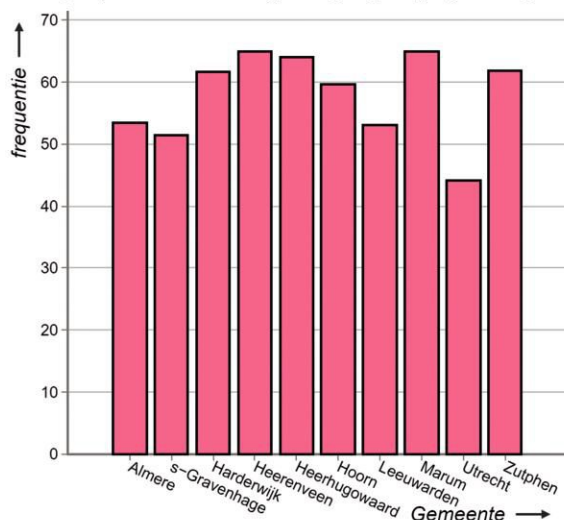
C: Nee.

Deze uitspraak kun je niet doen. De gemiddelde leeftijd is gestegen maar over de verdeling van het aantal mensen per leeftijdsgroep geeft deze dataset geen gegevens.

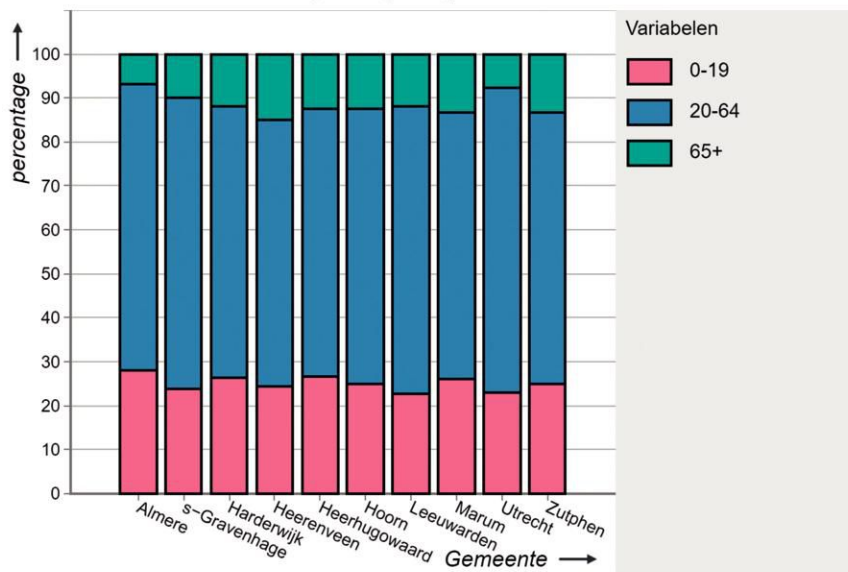
- 5 a** 104 200 inwoners 20 - 64 jaar van de 150 000 betekent dus
 $150\,000 - 104\,200 = 45\,800$ inwoners van 0 - 19 jaar of 65+.
 Er zijn 1042 honderdtallen 20 - 64-jarigen.

Per 100-tal 20 - 64 jarigen zijn er dus $\frac{45800}{1042} \approx 44$ inwoners van 0 - 19 jaar of 65+.

- b** Maak een nieuwe variabele met de formule
demografische druk = $([0-19] + [65-])/([20-64]/100)$.



- c De hoogte van de rode staaf (van de 20-64 jarigen) van Leeuwarden is kleiner dan die van Utrecht, terwijl de hoogte van de groene en de blauwe staaf bij Leeuwarden hoger zijn.
- d Maak een staafdiagram bij $[0-19]$, $[20-64]$ en $[65+]$. Kies voor relatief staafdiagram, gestapeld.



- 6 A, B en E. Om deze uitspraken te kunnen doen moet er statistisch onderzoek gedaan zijn.
De uitspraken C en D horen bij een 'incident'.
- 03 a De populatie is hier 'de leden van de vereniging'.
b De variabele *geslacht*.
c Bijvoorbeeld: In welke provincie woont u? De variabele is hier *provincie*.
Of: Welke vier cijfers heeft uw postcode? De variabele is hier *postcode*.
d De variabele zijn: *opleiding*, *leeftijd*.
e Bijvoorbeeld: 60% van de leden jonger dan 40 jaar wil geen nieuwe schaapskudde.
f Bijvoorbeeld: 80% van de vrouwen uit stedelijke gebieden vindt dat de weidevogels beter beschermd moeten worden.

- U1 Alleen gezinnen met op straat spelende kinderen hebben kans om in de steekproef te vallen. Daardoor komen heel veel gezinnen niet in aanmerking om aan het onderzoek mee te doen.
Voor een goede steekproef moet ieder gezin een even grote kans hebben om in de steekproef te vallen.

3.2 Data weergeven

intro De meeste problemen zijn te verwachten in Europa, want daar zijn naar verhouding weinig kinderen en dus veel ouderen.

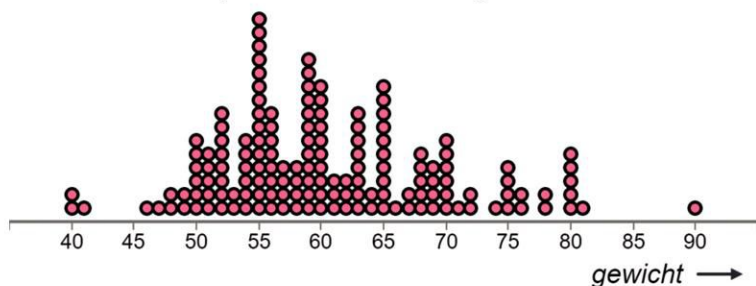
- 7 a *Geslacht, geboortjaar, geboortemaand, gewicht, lengte, cijfer gemiddelde, huiswerk, wiskundegroep, profiel, plezier (in school).*

3 Statistiek

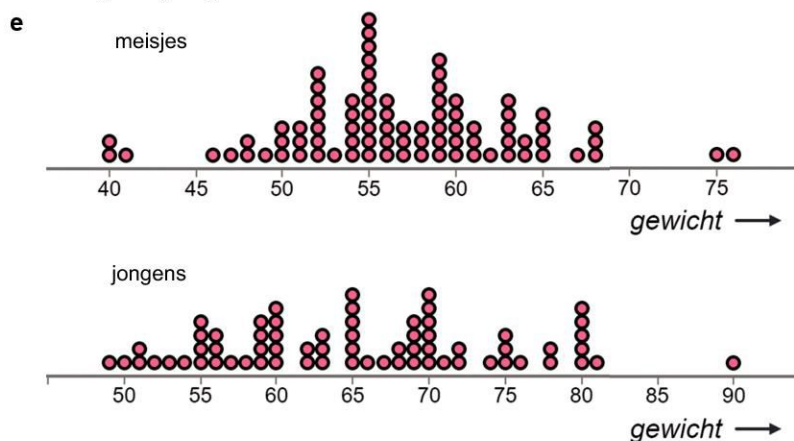
b Er zijn in totaal 154 leerlingen.

Daarvan hebben 11 leerlingen een lengte van 170 cm (11 bolletjes).

c Kies voor een dotplot met de variabele *gewicht*.



d Sorteert de leerlingen op gewicht. Je ziet dat de leerling met het gewicht van 71 kg een jongen is.

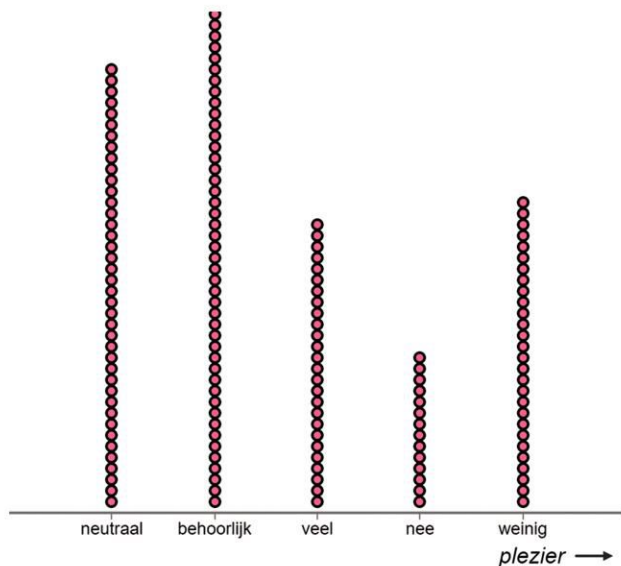


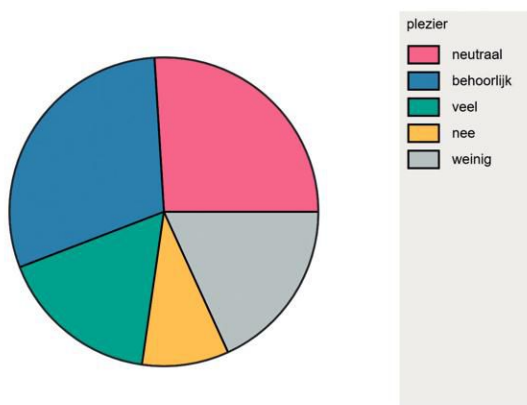
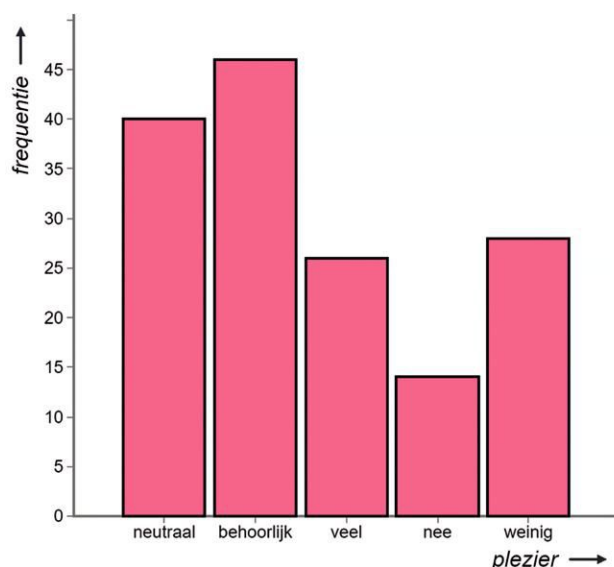
f Maak een tabel met de kentallen.

De mediaan van de variabele gewicht is bij de jongens 65 kg.

De mediaan van de variabele gewicht is bij de meisjes 56 kg.

8 a





- b** De afzonderlijke stippen van de dot plot kun je niet tellen.
Het staafdiagram en het cirkeldiagram geven een goed beeld van de aantallen en de verdeling bij plezier.
- c** Maak een frequentietabel bij de variabele *plezier*.
Behoorlijk komt het meest voor, dus dat is de modus.
- d** Splits de variabele *plezier* op *wiskundegroep* en kies voor relatief.
In de frequentietabel zie je dat het percentage leerlingen met veel plezier bij wiskunde A ongeveer 21% is en bij wiskunde B is dit ongeveer 15%.
Bij wiskunde A is dit percentage dus hoger.

	wiskundegroep			
	B		A	
plezier	Frequentie	Relatief %	Frequentie	Relatief %
neutraal	31	27,9	9	20,9
behoorlijk	35	31,5	11	25,6
veel	17	15,3	9	20,9
nee	9	8,1	5	11,6
weinig	19	17,1	9	20,9
Totaal	111	100	43	100

3 Statistiek

9 a

profiel	Frequentie
NG	60
NT	41
EM	42
CM	11
Totaal	154

b Het profiel NG is het meest gekozen.

c Splits de variabele *profiel* op *geslacht*.

	geslacht			
	m		v	
profiel	Frequentie	Relatief %	Frequentie	Relatief %
NG	17	24,6	43	50,6
NT	35	50,7	6	7,1
EM	15	21,7	27	31,8
CM	2	2,9	9	10,6
Totaal	69	100	85	100

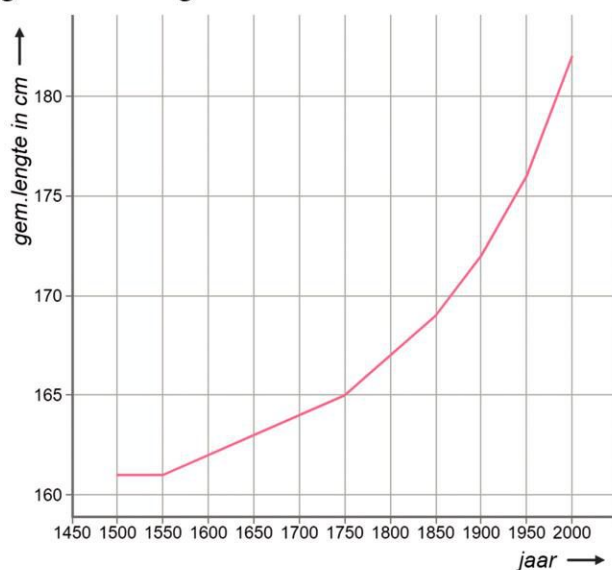
Bij jongens is het profiel NT het meest gekozen, bij meisjes NG.

d In de tabel zie je dat ongeveer 22% van de jongens voor het profiel EM koos.

10 a De staven worden allemaal ongeveer even hoog.

b Omdat je een verband tussen de gemiddelde lengte en de tijd wilt weergeven.
De verandering van de gemiddelde lengte zal geleidelijk gaan.

Door de verticale as niet bij 0 te laten beginnen is de toename van de gemiddelde lengte te zien.



c Tussen 1950 en 2000 loopt de grafiek het steilst, daar neemt de gemiddelde lengte het snelste toe.

d In de grafiek kun je aflezen dat de gemiddelde lengte in 1970 ongeveer 178 cm was.

- 11 a** De statistische variabelen zijn:
provincie, *leeftijd* en *waardering*.
- b** In een frequentietabel bij de variabele *provincie* zie je dat de meeste deelnemers komen uit Overijssel komen.
- c** In een relatieve frequentie tabel bij de variabele *provincie* zie je dat ongeveer 10% van de deelnemers uit Gelderland komt.
- d** In een tabel met kentallen bij de variabele *leeftijd* zie je dat de mediaan 19 jaar is.
- e** In een tabel met de variabele *waardering*, gesplitst op de variabele *provincie* zie je dat niet bij iedere provincie de waardering 7 het meest voorkomt.

provincie	waardering					Totaal
	5	6	7	8	9	
Limburg	0	2	5	2	0	9
Overijssel	2	10	7	13	2	34
Drenthe	1	3	2	2	0	8
Utrecht	0	3	6	5	0	14
Gelderland	1	2	8	6	1	18
Zuid-Holland	3	8	10	8	0	29
Groningen	0	0	2	1	0	3
Friesland	2	3	4	0	0	9
Zeeland	0	3	2	2	0	7
Noord-Holland	3	3	5	4	0	15
Noord-Brabant	0	1	3	5	1	10
Flevoland	5	8	6	3	0	22
Totaal	17	46	60	51	4	178

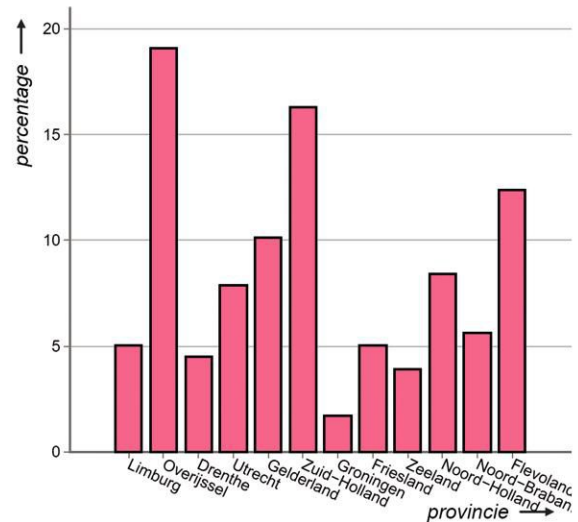
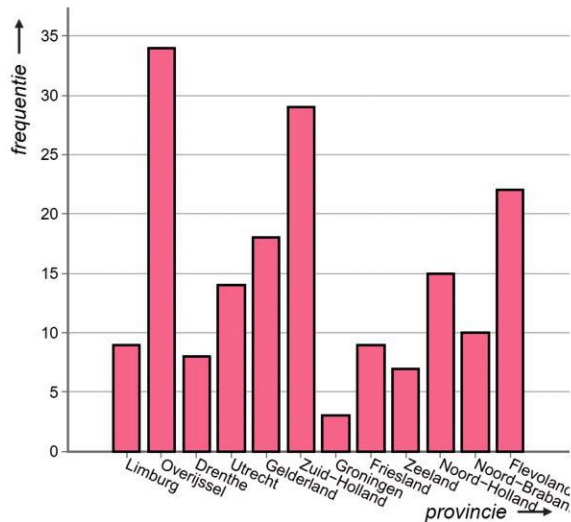
provincie	Frequentie	Relatief %
Limburg	9	5,1
Overijssel	34	19,1
Drenthe	8	4,5
Utrecht	14	7,9
Gelderland	18	10,1
Zuid-Holland	29	16,3
Groningen	3	1,7
Friesland	9	5,1
Zeeland	7	3,9
Noord-Holland	15	8,4
Noord-Brabant	10	5,6
Flevoland	22	12,4
Totaal	178	100

- 12 a** Bij de verticale as 'Geboorte en sterfte' staat, per 1000 inwoners.
- b** In de grafiek kun je aflezen dat er normaal in die periode ongeveer 13 mensen per 1000 mensen stierven.
In 1918 zijn er ongeveer 17 van de 1000 mensen gestorven.
Je kunt er dus vanuit gaan dat er 4 mensen per 1000 mensen zijn gestorven aan de Spaanse griep. Dat komt neer op $4 \times 6625,300 \approx 26\,500$ mensen.
- c** Er werden in 1918 ongeveer $25 \times 6625,3 = 165\,630$ kinderen geboren.
Ongeveer 11 per 100 levend geboren zijn gestorven.
Dit zijn $11 \times 1656,3 \approx 18\,220$ baby's, die de leeftijd van 1 jaar niet bereikten.

3 Statistiek

011 a De variabelen zijn: *provincie*, *leeftijd* en *waardering*.

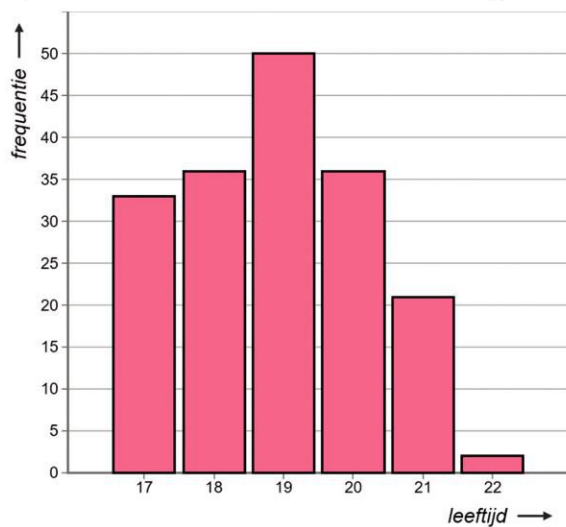
b



De meeste deelnemers komen uit Overijssel.

c 5,1% van de deelnemers komt uit Limburg.

d



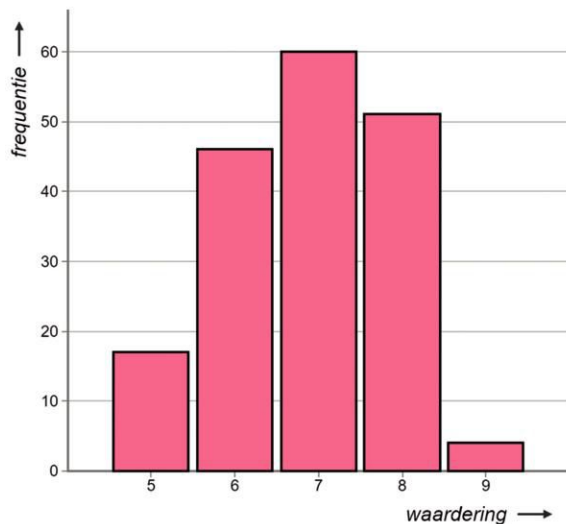
e Met relatieve frequenties kun je zoeken bij 50% en hoef je niet te tellen.

f In de frequentietabel zie je dat 18 jaar of jonger $18,5 + 20,2 = 38,6\%$ is.

19 jaar of jonger is $38,8 + 28,1 = 66,9\%$.

De mediaan is dus 19 jaar.

g



De waardering 7 komt het meest voor, dus de modus is 7.

- h Maak een tabel met kentallen bij de variabele *waardering* en splits op leeftijd.
De modus van de 18-jarigen is 6 en de modus van de 19-jarigen is 8. De modus is dus niet bij alle leeftijdsgroepen een 7.
- i In de tabel, gesplitst op de variabele *provincie*, zie je dat niet voor elke provincie de modus gelijk is aan 7. Dit geldt niet voor Drenthe, Flevoland, Noord-Brabant, Overijssel en Zeeland.

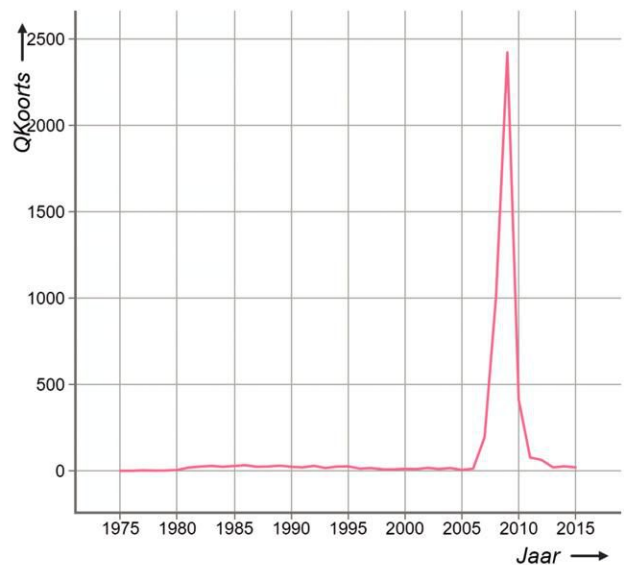
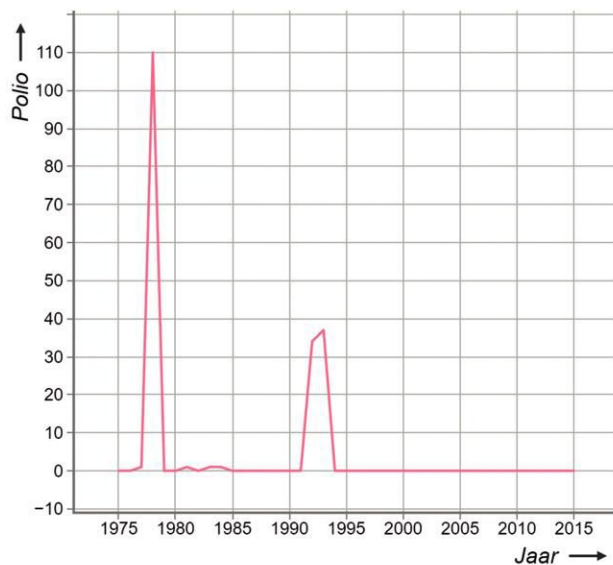
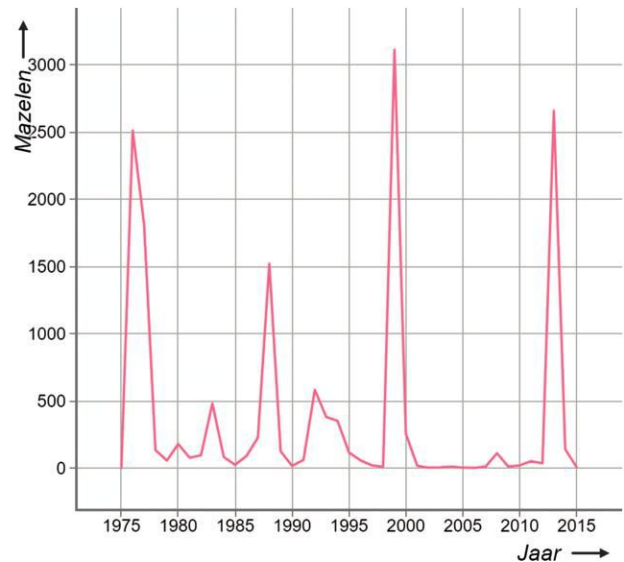
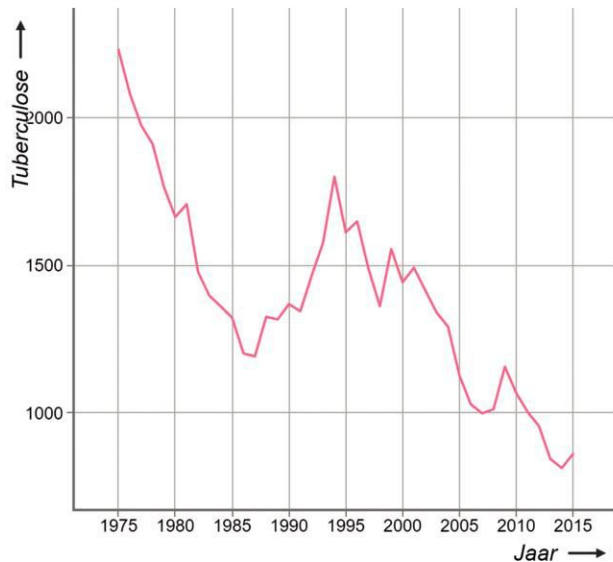
U2 Het is niet mogelijk om een lijndiagram te maken met de vier infectieziekten in één figuur. Mazelen en tuberculose hebben een veel grotere frequentie dan polio.

Tuberculose heeft geen pieken en deze ziekte komt altijd voor, er is wel een afname van het aantal gevallen

Mazelen heeft af en toe een piek.

Polio heeft twee pieken en komt na 1994 niet meer voor.

Q-koorts komt in de hele periode weinig voor. Alleen na 2006 is er een uitbraak geweest.

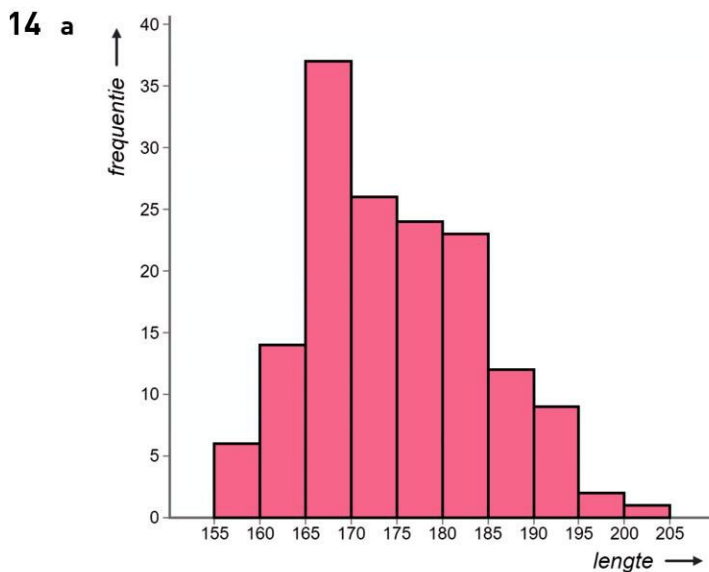


3 Statistiek

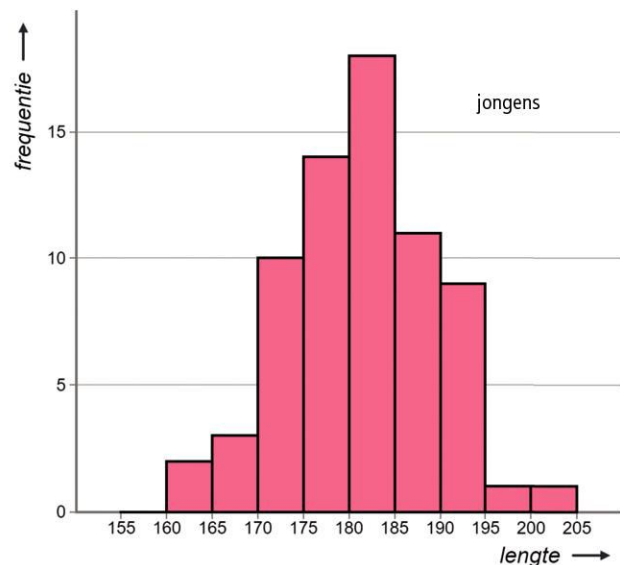
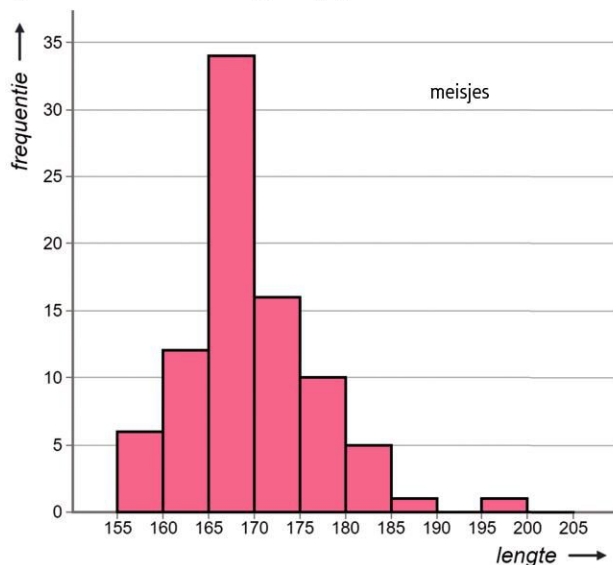
3.3 Klassenindeling

intro Om het best een overzicht te krijgen, kun je een klassenindeling maken.

- 13 a** Op hele centimeters afgerond is 179,8 cm gelijk aan 180 cm en komt dus in de klasse 180-184.
- b** Een lengte van 164,4 cm wordt afgerond naar 164 cm en valt dus in de klasse 160-164.
- c** De linker grens van 175-179 is 174,5 cm. De rechtergrens is 179,4 cm.
- d** De klasse 155-159 gaat vanaf 154,5 cm tot 159,5 cm. De breedte van deze klasse is dus 5 cm.
- e** Dit is het gemiddelde van 154,5 cm en 159,5 cm en dit is 157 cm.



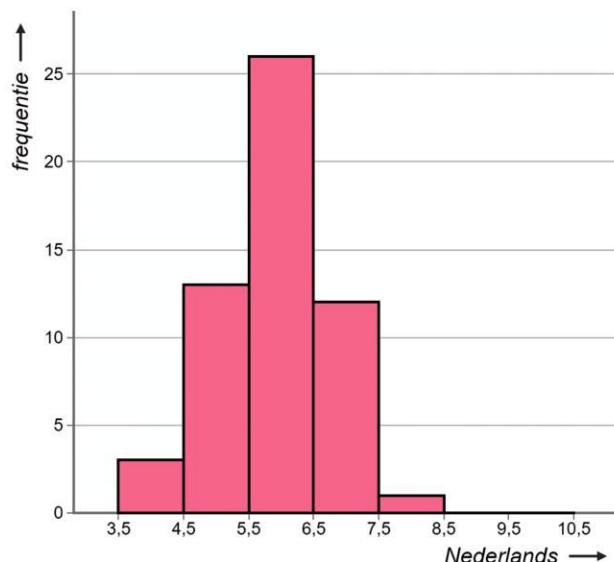
- b** De figuur van opdracht a geeft een betere verdeling weer.
- c** Splits de variabele *lengte* op *geslacht*.



- d** -
- e** Bij een klassenbreedte van 5 cm krijg je een goed beeld.

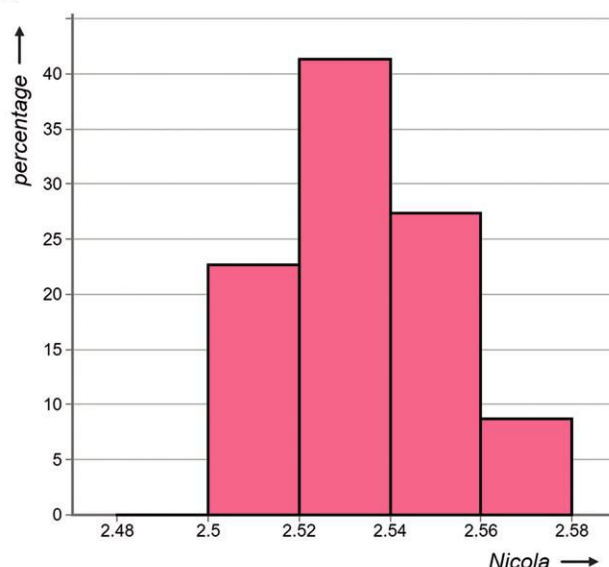
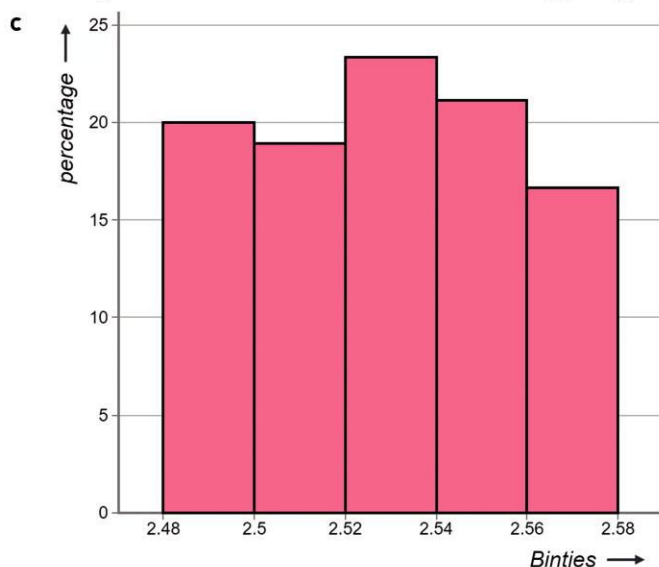
- 15 a** 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76.
b $[69,5; 76,5)$.
c Het klassenmidden van de klasse 70 - 76 is 73 kg.
 De klassenbreedte is $76,5 - 69,5 = 7$ kg.
d Iemand is 76 tot de dag van zijn 77e verjaardag. In dit geval is de rechter klassengrens dus 77. De klassegrenzen zijn 70 en 77.
 Het midden daarvan is 73,5. De klassenbreedte is $77 - 70 = 7$.

- 16 a** Kies beginwaarde 3,5 en klassenbreedte 1.



- b** In het staafdiagram zie je dat er 12 leerlingen zijn met een cijfer afgerond 7.
c De mediaan ligt in de klasse $[5,5; 6,5)$.
d De modale klasse is de klasse $[5,5; 6,5)$.

- 17 a** De klassenbreedte is 0,02 kg.
 De klassenmiddens zijn: 2,49; 2,51; 2,53; 2,55 en 2,57 kg.
b Er zijn veel meer zakken met Nicola aardappels gewogen.



- d** De gewichten van de zakken Bintjes zijn gelijk verdeeld over de verschillende klassen.
 De gewichten van de zakken Nicola aardappels hebben een piek bij de klasse $[2,52; 2,54)$.

3 Statistiek

- 18 a** De indruk wordt gewerkt dat er heel veel junioren zijn vergeleken met de rest. Dat komt omdat er bij de junioren een klassenbreedte van 12 jaar wordt gebruikt, maar bij de andere klassen een klassenbreedte van 4 jaar.
- b** Dan moet je een klassenindeling maken met gelijke klassenbreedte.

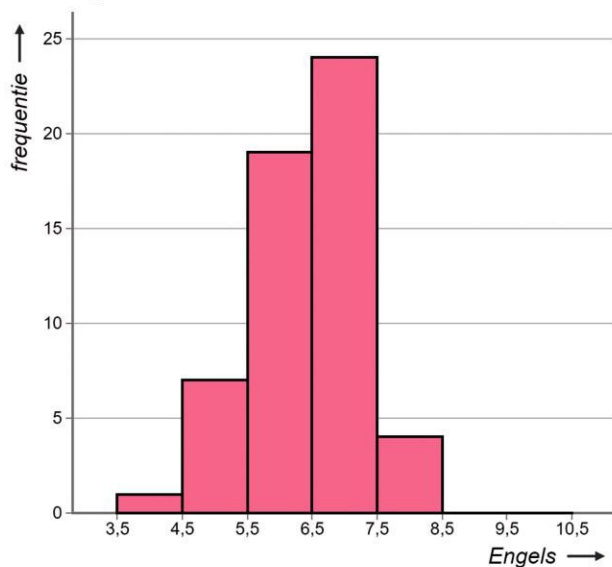
- 19 a** De klassenbreedte is 0,05 kg.
De klassenmiddens zijn: 2,425; 2,475; 2,525; 2,575; 2,625 kg.

b

$$\frac{4 \times 2,425 + 7 \times 2,475 + 8 \times 2,525 + 6 \times 2,575 + 5 \times 2,625}{30} \approx 2,527 \text{ kg.}$$

- c** Binnen elke klasse moeten de waarnemingen gelijkmatig verdeeld zijn, en wel zodanig dat het gemiddelde van alle waarnemingen in een klasse ook (ongeveer) gelijk is aan het klassenmidden.

- 016 a** De cijfers in de klasse $[6,5; 7,5\rangle$ geven afgerond een 7.
- b** Het laagste cijfer is 4,1.
- c** De linker klassengrens is 3,5.
- d** Kies beginwaarde 3,5 en klassenbreedte 1.



- e** Er zijn 24 leerlingen met afgerond een 7.
- f** Totaal zijn er 55 waarnemingen. De mediaan is dus de 28e waarneming.
 $1 + 6 + 20 = 27$. $1 + 6 + 20 + 24 = 51$.
 De mediaan ligt dus in de klasse $[6,5; 7,5\rangle$
- g** De modale klasse is de klasse met de grootste frequentie en is dus $[6,5; 7,5\rangle$.

- U3** De klassenindeling is:
 $[10, 13\rangle$; $[13, 16\rangle$; $[16, 19\rangle$; $[19, 21\rangle$; $[21, 24\rangle$; $[24, 27\rangle$; $[27, 30\rangle$
 met modale klasse $[16, 19\rangle$.

of

De klassenindeling is :

$[10, 14\rangle$; $[14, 18\rangle$; $[18, 22\rangle$; $[22, 26\rangle$; $[26, 30\rangle$ met modale klasse $[22, 26\rangle$.

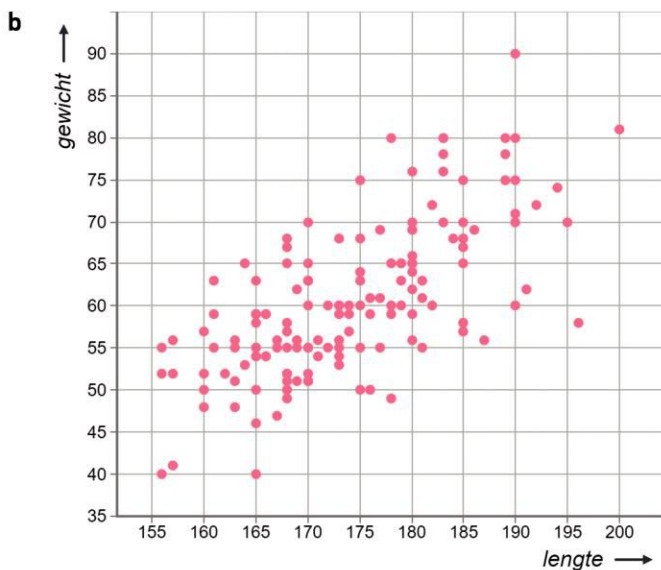
19 moet het meest voorkomen

Dus bijvoorbeeld : 10, 13, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 19, 19, 19, 19, 19, 22, 22, 22, 22, 25, 25, 25, 27, 30.

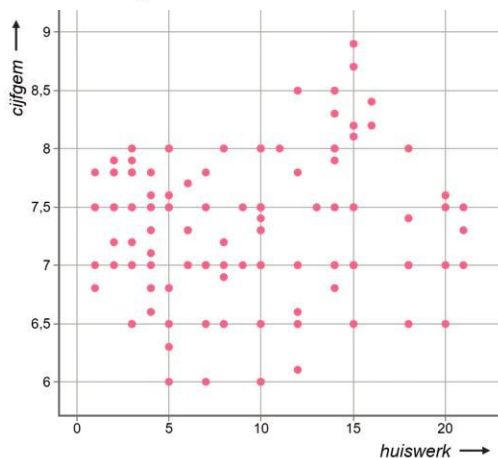
3.4 Statistische verbanden

intro Gasverbruik gaat omhoog als de gemiddelde jaartemperatuur daalt. Dat is ook wat je verwacht, want bij koud weer gebruikt de verwarming meer gas.

- 20**
- a De variabele *geslacht* neemt de waarden *m* of *v* aan.
 - b De variabele *plezier* heeft de waarden behoorlijk, nee, neutraal, veel en weinig.
 - c Bij de variabelen *gewicht*, *lengte*, *cijfer gemiddelde*, en *huiswerk* is het zinvol om het gemiddelde te berekenen.
- 21**
- a De variabelen *gewicht*, *lengte*, *cijfer gemiddelde*, en *huiswerk* zijn kwantitatief.



- c Dit is leerling 54.
- d Deze leerling heeft een lengte van 200 cm en gewicht van 81 kg.
- e De punten liggen rond een stijgende lijn. Hoe langer de leerling, hoe hoger het gewicht.
- f Maak een puntenwolk met op de horizontale as *huiswerk* en op de verticale as *gemiddelde resultaat*.



Hier lijkt geen duidelijk verband te zijn.

3 Statistiek

- 22 a** De variabelen *geslacht* en *gekozen profiel* zijn kwalitatief.
- b** Er zijn twee geslachten en vier profielen. Er zijn dus acht verschillende combinaties van geslacht en profiel mogelijk. Het wordt een grafiek met acht punten.
- c** Leerlingen van hetzelfde geslacht en met hetzelfde profiel vallen samen op één punt. Je kunt dus niet zien welke combinatie van variabelen meer of minder voorkomt.

- 23 a** Maak een kruistabel met in de rij de variabele *geslacht* en in de kolom de variabele *wisgroep*. Kies voor absolute waarden.

geslacht	wisgroep		Totaal
	A	B	
m	13	56	69
v	30	55	85
Totaal	43	111	154

- b** Kies voor relatieve waarden in de rij op 100%.

geslacht	wisgroep		Totaal
	A	B	
m	18,8%	81,2%	100%
v	35,3%	64,7%	100%
Totaal	27,9%	72,1%	100%

18,8% van de jongens koos voor wiskunde A.

- c** 35,3% van de meisjes koos voor wiskunde A.
- d** De meisjes kozen naar verhouding vaker voor wiskunde A.
- e** Kies voor de kolom op 100%.

geslacht	wisgroep		Totaal
	A	B	
m	30,2%	50,5%	44,8%
v	69,8%	49,5%	55,2%
Totaal	100%	100%	100%

Van de leerlingen met wiskunde A is 30,2% een jongen.

- 24 a** De variabele *profiel* is kwalitatief. De variabelen *Engels CE* en *Engels Eind* zijn kwantitatief.
- b** Er zijn te veel verschillende waarden bij de variabele *Engels CE*.
- c** Bij de variabele *Engels Eind* zijn er zes verschillende waarden. Dus krijg je een tabel waar iets uit af te lezen is.

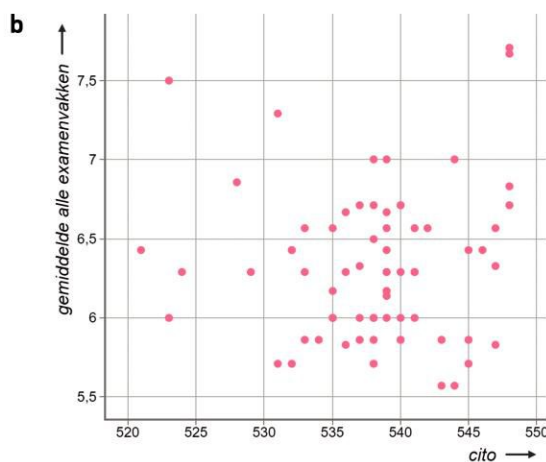
d

profiel	Engels Eind					Totaal
	4	5	6	7	8	
EM	2	7	9	11	0	29
NG	4	7	6	5	1	23
CM	0	0	3	2	4	9
NT	0	3	3	5	1	12
Totaal	6	17	21	23	6	73

$(4 + 7) : (6 + 17) \times 100\% \approx 48\%$ van de leerlingen met een onvoldoende op Engels volgt het profiel NG.

- e** $(4 + 7) : 23 \times 100\% \approx 48\%$ van de leerlingen met profiel NG heeft een onvoldoende op Engels.

- 25 a** Het zijn kwantitatieve variabelen. Een puntenwolk geeft de meeste informatie.



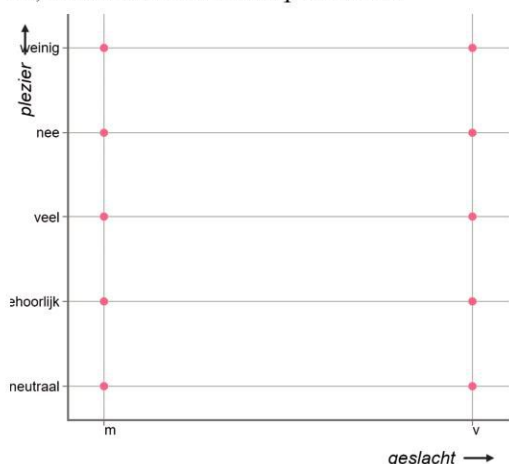
Nee, er lijkt geen verband te zijn tussen de cito-score en het gemiddelde eindexamencijfers.

c

cito	resultaat		Totaal
	geslaagd	afgewezen	
520 -< 525	100,0%	0,0%	100%
525 -< 530	100,0%	0,0%	100%
530 -< 535	77,8%	22,2%	100%
535 -< 540	93,5%	6,5%	100%
540 -< 545	87,5%	12,5%	100%
545 -< 550	90,9%	9,1%	100%
Totaal	90,4%	9,6%	100%

Ook hier lijkt geen verband tussen te bestaan.

- 022 a** De variabelen *geslacht* en *plezier* zijn kwalitatief.
- b** Op de horizontale as komen twee waarden (m en v).
- c** Op de verticale as komen vijf waarden (nee, weinig, neutraal, behoorlijk en veel).
- d** Er komen maximaal $2 \times 5 = 10$ punten in de puntenwolk.
- e** Ja, komt overeen met opdracht d.



- f** De waarnemingen vallen samen. Er valt dus niets te zeggen over hoe vaak de verschillende combinaties tussen de kwalitatieve variabelen voorkomen.

3 Statistiek

- 024 a** Van de jeugd heeft $\frac{5}{8} \times 100\% = 62,5\%$ gekozen voor kruisboogschieten.
 Van de volwassenen is dat $\frac{15}{26} \times 100\% \approx 57,7\%$.
- b** Bij de jeugd is het percentage iets groter. Op grond van de kleine aantallen kun je daar geen conclusie uit trekken.
- c** Van de handboogschutters hoort $\frac{3}{14} \times 100\% \approx 21,4\%$ tot de jeugd.
 Van de kruisboogschutters hoort $\frac{5}{20} \times 100\% = 25\%$ tot de jeugd.
- d** De instructeur van de kruisboogschutters heeft naar verhouding de meeste jeugd.

U4

klasse	overleefd		Totaal
	ja	nee	
1 -< 2	203	122	325
2 -< 3	118	167	285
3 -< 4	178	528	706
Totaal	499	817	1316

geslacht	overleefd		Totaal
	ja	nee	
m	20,1%	79,9%	100%
v	72,5%	27,5%	100%
Totaal	37,9%	62,1%	100%

leeftijd	overleefd		Totaal
	ja	nee	
v	36,6%	63,4%	100%
k	52,3%	47,7%	100%
Totaal	37,9%	62,1%	100%

Kinderen lijken een iets grotere overlevingskans gehad te hebben.

Ook heeft de klasse invloed gehad op de overlevingskans. Passagiers van de 1e klasse hadden een ruim twee keer zo grote kans als de passagiers van de 3e klasse.

Het grootste verschil zie je bij de variabele geslacht. Vrouwen hadden meer dan 72% kans om te overleven, mannen slechts 20% kans. Vrouwen hadden dus meer dan drie keer zo grote kans om te overleven.

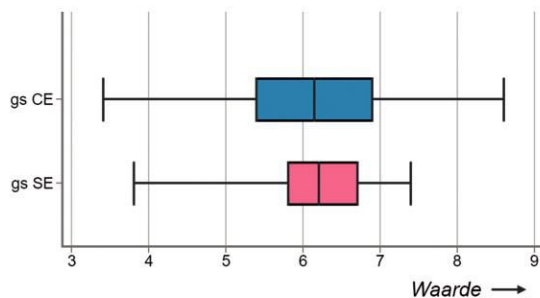
3.5 Spreidingsmaten

intro Blauw heeft de grootste kans op een lange levensduur. Dit zou een argument kunnen zijn om voor blauw te kiezen.
 Als je voor rood kiest, is de kans op een heel korte levensduur kleiner. Dit zou een argument zijn om voor rood te kiezen.

26 Als je naar de staafdiagrammen kijkt, hebben erg veel leerlingen voor Nederlands gescoord tussen de 5,5 en 7,5. Slechts een paar leerlingen hebben lager of hoger gescoord. Bij Engels zijn de resultaten meer verspreid.

- 27 a** Met een tabel met kentallen kun je dit verschil berekenen.
In de tabel zie je dat bij de cijfers Nederlands SE 4,8 het laagst behaalde en 7,9 het hoogst behaalde cijfer is. Het verschil is 3,1 punt.
Bij de cijfers Engels SE zie je dat 3,5 het laagst behaalde en 9,1 het hoogst behaalde cijfer is. Het verschil is 5,6 punt.
- b** Er zijn 193 leerlingen. 25% daarvan is 48,25. Sorteert de Nederlands SE cijfers en bekijk de 48 laatste waarnemingen. $193 - 48 = 145$.
Het 146e is het eerste waarnemingsgetal. Dat hoort bij de 25% hoogste cijfers.
Dit is leerling 101 met het cijfer 6,9.
- c** Dit is het 48e waarnemingsgetal (leerling 80) met het cijfer 6,1.
- d** Het verschil is $6,9 - 6,1 = 0,8$ punt.
- e** Sorteert de Engels SE cijfers.
Het 48e waarnemingsgetal is leerling 95 met het cijfer 5,8.
het 146e waarnemingsgetal is leerling 186 met het cijfer 7,3.
7,3 is het laagste cijfer bij de 25% beste leerlingen Engels.
5,8 is het hoogste cijfer bij de 25% slechtste leerlingen Engels.
Het verschil is 1,5 punt.

28 a



- b** De mediaan is ongeveer gelijk.
- c** Bij het CE is de spreidingsbreedte en de kwartielafstand groter dan bij het SE
- d** Lees in een tabel met de kentallen het minimum, maximum, eerste kwartiel en derde kwartiel af.
- | | spreidingsbreedte | kwartielafstand |
|----|-------------------|---------------------|
| CM | $7,9 - 3,4 = 4,5$ | $6,7 - 5,4 = 1,3$ |
| EM | $8,5 - 4 = 4,5$ | $7,0 - 5,35 = 1,65$ |
| NG | $7,9 - 6,6 = 1,3$ | - |
| NT | $8,6 - 8,6 = 0$ | - |
- e** Bij EM is de spreiding het grootst.

- 29 a** Maak een tabel met kentallen en splits naar vak.
De spreidingsbreedte bij Wiskunde is het grootst, namelijk $8,5 - 3,7 = 4,8$.
- b** Nederlands heeft de kleinste spreidingsbreedte, namelijk $7,6 - 4,1 = 3,5$.
- c** De kwartielafstand is bij Wiskunde het grootst, namelijk $7 - 5,45 = 1,55$.
- d** De kwartielafstand van Engels is het kleinst, namelijk $6,95 - 5,8 = 1,15$.

- 30 a** De cijfers liggen symmetrisch rondom de 7.
of
A: $(5 + 5,4 + \dots + \dots + 8,6 + 9) : 11 = 7$
B: $(5 + 5,2 + \dots + \dots + 8,8 + 9) : 11 = 7$
- b** Bij leerling B lijkt de spreiding het grootst, bij deze leerling liggen minder cijfers in de buurt van de 7.
- c** Voor beide leerlingen geldt: $9 - 5 = 4$.

3 Statistiek

- d Voor beide leerlingen is de kwartielafstand $8,4 - 5,6 = 2,8$.
- e Het gemiddelde is $(4,00 + 3,24 + 1,96 + \dots + \dots + 4,00) : 11 = 18,08 : 11$
 $\sqrt{(18,08 : 11)} \approx 1,28$
- f Je berekent het verschil t.o.v. het gemiddelde.
- g $((-2,00)^2 + (-1,8)^2 + (-1,6)^2 + \dots + \dots + \dots) : 11 = 21,68 : 11$
 $\sqrt{(21,68 : 11)} \approx 1,40$.
- h Bij leerling B, dit komt overeen met antwoord op opdracht b.

- 31 a In een tabel met de kentallen zie je de standaardafwijking.

Variabele	Nederlands	Engels	Wiskunde
Aantal waarnemingen	55	55	55
Gemiddelde	5,86	6,39	6,22
Mediaan	5,9	6,45	6,2
Modus	5,9	6,4	5,8
Minimum	4,1	4,1	3,7
Maximum	7,6	8,2	8,5
Standaardafwijking	0,83	0,89	1,08
Eerste kwartiel	5,15	5,8	5,45
Derde kwartiel	6,4	6,95	7

Wiskunde heeft de grootste standaardafwijking, zie tabel.

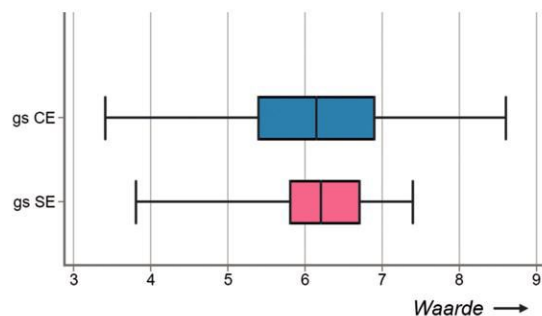
- b Nederlands heeft de kleinste standaardafwijking.
- c De standaardafwijking en de spreidingsbreedte zijn in dit geval beide goede maten voor de spreiding.

- 32 a In een tabel met de kentallen zie je de gevraagde standaardafwijkingen.

σ	SE	CE
Nederlands	0,604	0,812
Engels	1,075	1,262

- b Het schoolexamen is een gemiddelde van meerdere cijfers, daardoor zijn er minder uitschieters.
- c $\sigma(SE) = 0,643$ en $\sigma(CE) = 1,066$
 Hier doet zich hetzelfde voor.

028 a



- b De mediaan is ongeveer gelijk.
- c Bij het CE is de spreidingsbreedte en de kwartielafstand groter dan bij het SE.
- d Lees in een tabel met de kentallen het minimum en het maximum af.
 Het laagste cijfer is een 3,4, het hoogste cijfer is een 8,6.
- e De spreidingsbreedte is $8,6 - 3,4 = 5,2$

f Zie tabel bij opdracht d.

Het eerste kwartiel is 5,35 en het derde kwartiel is 6,9.

g De kwartielfafstand is $6,9 - 5,35 = 1,55$.

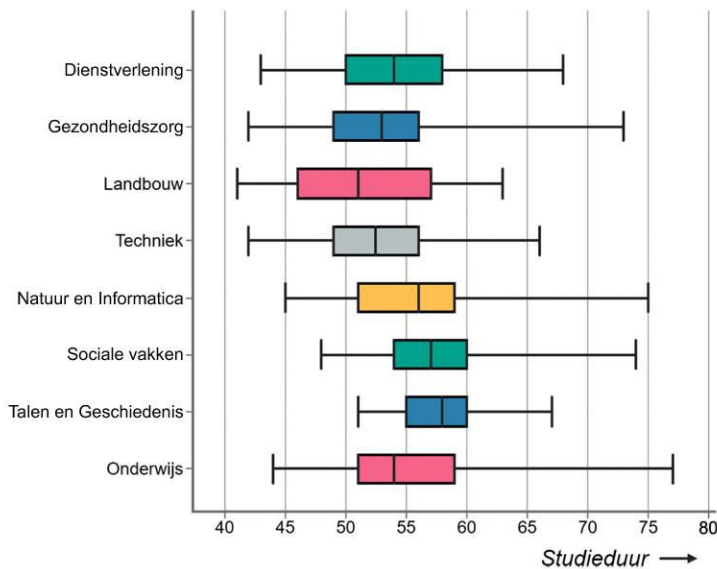
h Maak een tabel met kentallen.

	spreidingsbreedte	kwartielfafstand
CM	$7,9 - 3,4 = 4,5$	$6,7 - 5,4 = 1,3$
EM	$8,5 - 4 = 4,5$	$7,0 - 5,35 = 1,65$
NG	$7,9 - 6,6 = 1,3$	-
NT	$8,6 - 8,6 = 0$	-

i Er is maar één leerling in het profiel NT met geschiedenis.

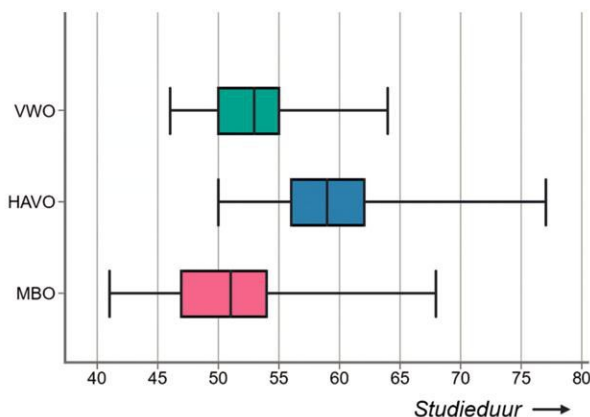
j Bij EM is de spreiding het grootst.

U5 Maak een boxplot bij de variabele studieduur en splits op studierichting. Je ziet dat de spreiding bij Talen en Geschiedenis het kleinst is. Bij Onderwijs het grootst. De mediaan bij Landbouw is het kleinst.



Maak een boxplot bij de variabele *studieduur* en splits op *vooropleiding*.

Je ziet dat de spreiding bij vwo het kleinst is. Bij mbo en havo is de spreiding ongeveer even groot. De mediaan is bij de havo veel groter dan bij het mbo.

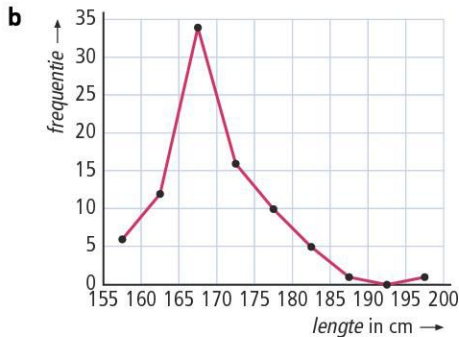


3 Statistiek

3.6 Cumulatieve frequenties

intro Groep B heeft het tentamen beter gemaakt. 80% van groep B heeft 52 punten of minder gescoord. 80% van groep A heeft 45 punten of minder gescoord.

33 a Het klassenmidden van de klasse $[155, 160)$ is 157,5 cm.



c $6 + 12 + 34 = 52$, dus 52 meisjes zijn kleiner dan 170 cm.

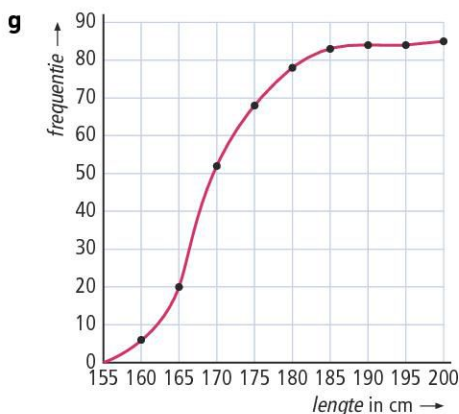
d $52 + 16 = 68$

Dus 68 meisjes zijn kleiner dan 175 cm.

e Er zijn 18 meisjes kleiner dan 165 cm.

f

length	<160	<165	<170	<175	<180	<185	<190	<195	<200
frequency	6	18	52	68	78	83	84	84	85



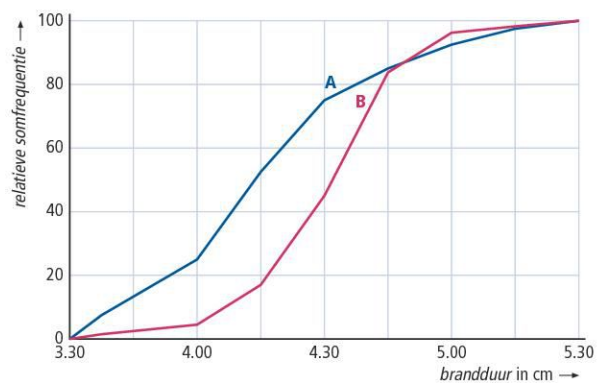
34 a Van merk B zijn er 70 getest en van merk A 40.

Van merk B zijn er dus veel meer getest.

b Je leest in een cumulatieve frequentiepolygoon steeds af hoeveel procent een kortere brandduur heeft.

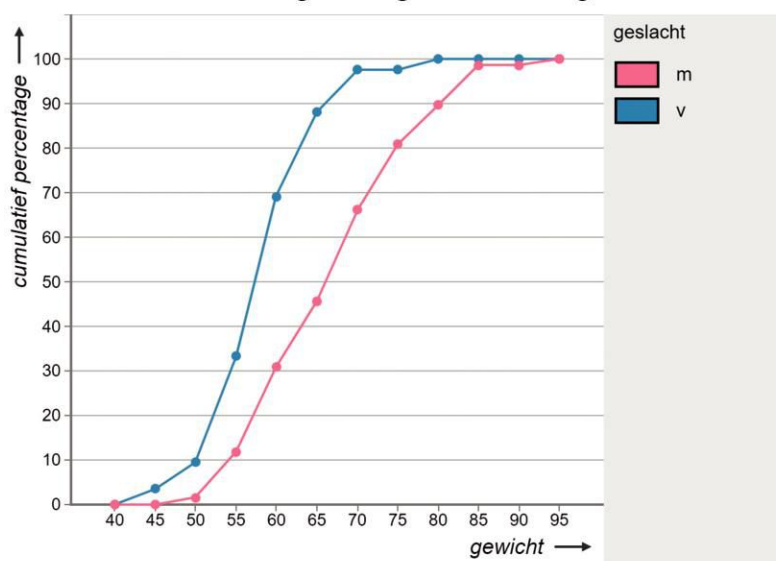
c

brandduur in uren	rel. somfreq.A in %	re. somfreq.B in %
< 3.45	7,5	1,4
< 4.00	25	4,3
< 4.15	52,5	17,1
< 4.30	75	44,3
< 4.45	85	84,3
< 5.00	92,5	95,7
< 5.15	97,5	98,6
< 5.30	100	100



d Spreidingsbreedte is gelijk.
De mediaan van merk B is groter.

35 a Neem klassenbreedte 5 kg met beginwaarde 40 kg.



b Bij 25% lees je bij de jongens 57 af.

Dat betekent dat 25% van de jongens lichter zijn dan 57 kg.

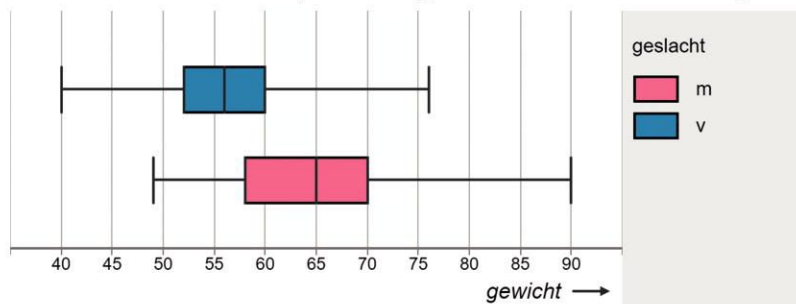
Bij 25% lees je bij de meisjes 52 af.

Dat betekent dat 25% van de meisjes lichter zijn dan 52 kg.

c De mediaan van de jongens is 66 kg, het derde kwartiel is 73 kg.

De mediaan van de meisjes is 57 kg, het derde kwartiel is 61 kg.

d



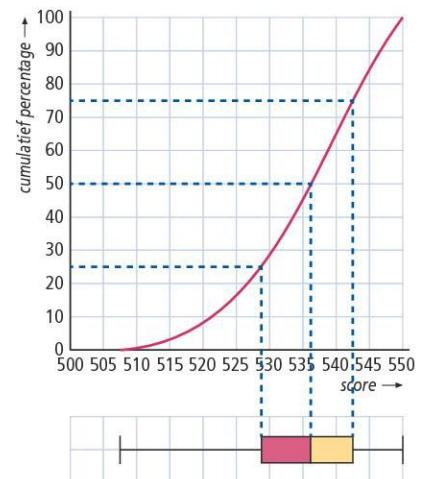
Jongens: 1e kwartiel is 58 kg, mediaan is 66 kg, 3e kwartiel is 71 kg.

Meisjes: 1e kwartiel is 52 kg, mediaan is 57 kg, 3e kwartiel is 61 kg.

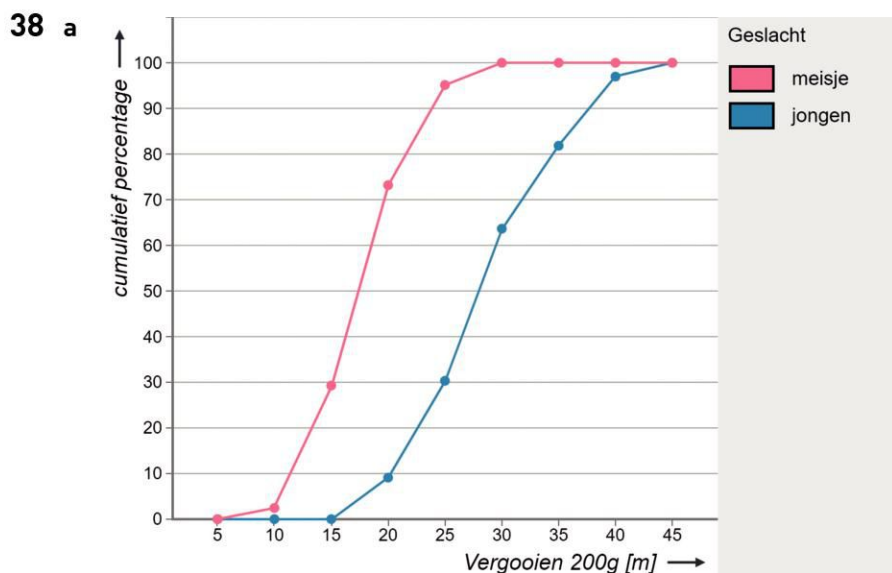
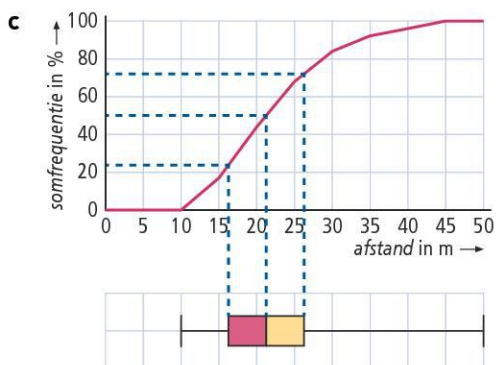
e Komt niet helemaal overeen maar de somfrequentie grafiek is gemaakt met klassen, de boxplot met de oorspronkelijke data.

3 Statistiek

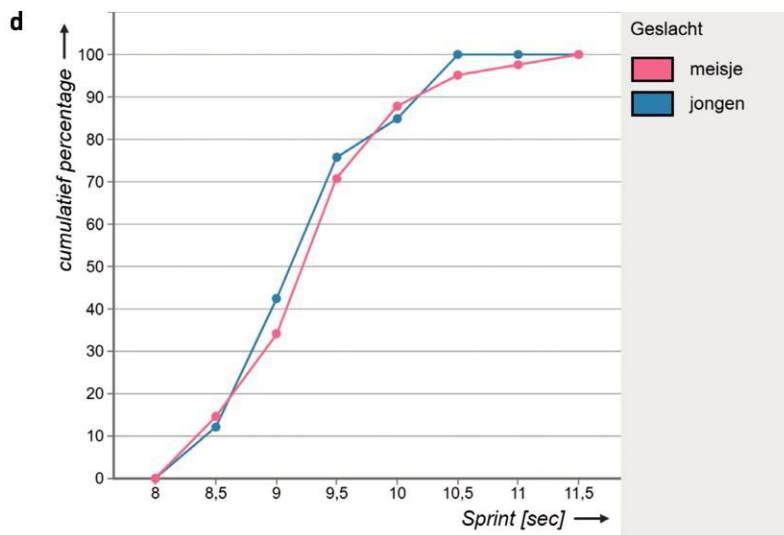
- 36 a** Uit het polygoon lees je af dat ongeveer 86% een score had (gelijk of) lager dan 545.
- b** 520: 7%
540: 66%
 $66 - 7 = 59\%$ had een score tussen 520 en 540.
Dat waren dus $0,59 \times 147\,099 \approx 86\,800$ leerlingen.
- c** Die ligt bij 50%.
- Kijken in de grafiek geeft een mediaan van 536.
- d** Kijk bij 25%. Het antwoord is 529.
- e** Kijk bij 75%. Het antwoord is 542.
- f** Zie onder de grafiek hiernaast.



- 37 a** De grafiek bestaat uit lijnstukjes.
- b** De klasse met de meeste waarnemingen hoort bij het steilste lijnstukje.
Dat is dus de klasse 15 – 20.



- b** Grafiek van de jongens ligt rechts van die van de meisjes.
- c** Volgens de somfrequentie polygoon is de maximale worp van de meisjes 30 meter.
Ongeveer 64% van de jongens gooide minder ver dan 30 meter.
Dus 36% gooide verder.

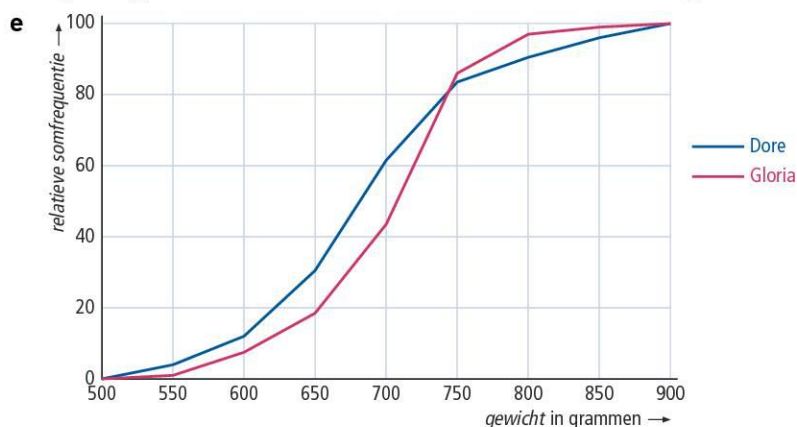


- e** Grafieken verschillen weinig, er zijn twee snijpunten. Op die punten verschillen de resultaten helemaal niet.

034 a

gewicht in grammen	Doré	cum. Doré	cum Doré in %	Gloria	cum. Gloria	cum Gloria in %
[500, 550>	3	3	4,1	1	1	1,1
[550, 600>	6	9	12,3	5	6	6,5
[600, 650>	14	23	31,5	11	17	18,5
[650, 700>	22	45	61,6	23	40	43,5
[700, 750>	16	61	83,6	39	79	85,9
[750, 800>	5	66	90,4	10	89	96,7
[800, 850>	4	70	95,9	2	91	98,9
[850, 900>	3	73	100,0	1	92	100,0

- b** Het totale aantal planten per ras is niet gelijk.
c Zie a
d De percentages in de tabel geven aan hoeveel procent van de planten een opbrengst hebben die minder is dan de rechter klassengrens.



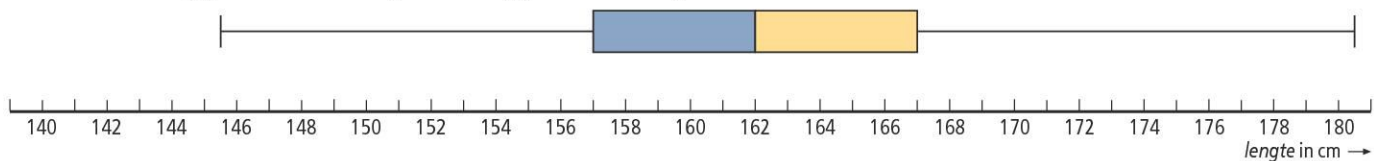
- f** De mediaan van Doré is 680, Van Gloria is de mediaan 715.
 Van Gloria is de mediaan het grootst.
g Van Doré is de kwartielafstand ongeveer $730 - 630 = 100$.
 Van Gloria is de kwartielafstand ongeveer $745 - 670 = 75$.
 Van Doré is de kwartielafstand duidelijk groter.

U6 Er liggen veel waarnemingen rechts van de mediaan, het gemiddelde is dus groter dan de mediaan.

3 Statistiek

3.7 Gemengde opdrachten

- 39 a** Van de meisjes is 69% kleiner dan 165,5 cm.
b De punten zijn uitgezet boven de rechter klassengrenzen. De indeling is dus $[140,5; 145,5)$; $[145,5; 150,5)$; $[150,5; 155,5)$, ..., $[170,5; 175,5)$ en $[175,5; 180,5)$.
c $19\% - 5\% = 14\%$, dus $0,14 \times 400 = 56$ meisjes waren langer dan 150,5 cm, maar kleiner dan 155,5 cm.
d $100\% - 87\% = 13\%$, dus $0,13 \times 400 = 52$ meisjes waren langer dan 170,5 cm.
e Tussen 160,5 en 165,5 cm is de grafiek het steilst, dus $[160,5; 165,5)$ is de modale klasse.
f Lees de mediaan af bij 50%. De mediaan is 162 cm.
 Lees $Q_1 = 157$ cm af bij 25% en $Q_3 = 167$ cm bij 75%.

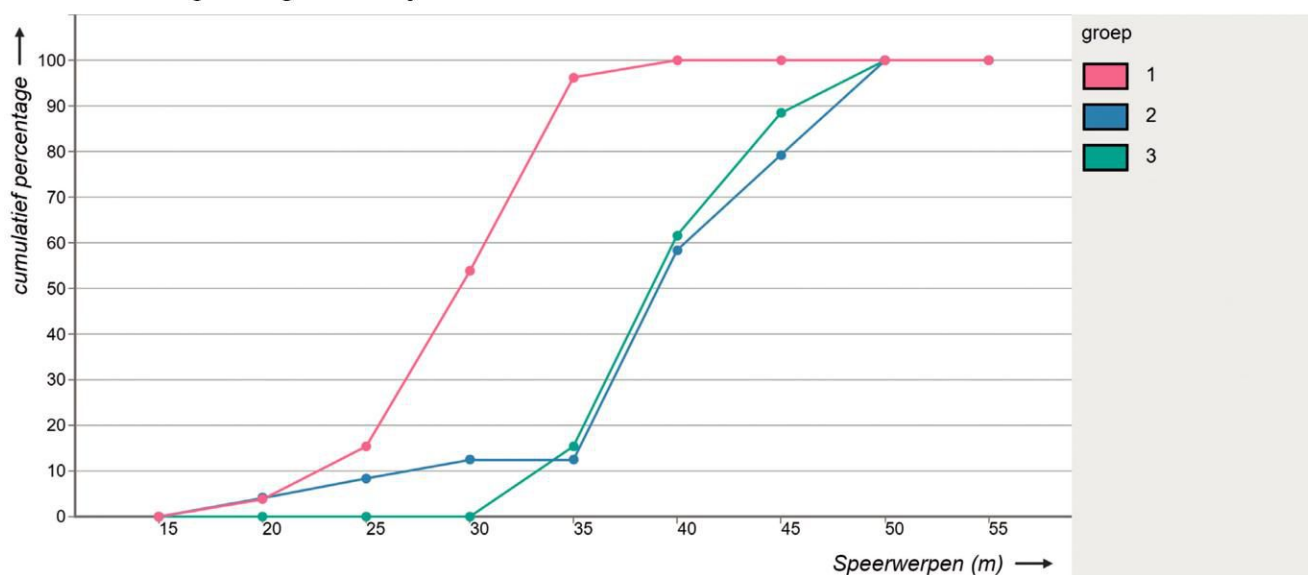


- 40 a** Maak een tabel met kentallen en splits op groep.
 Met modus en gemiddelde kun je zien dat groep 1 het slechtst presteerde.
b De groep is te groot om een uitschieter van invloed te laten zijn.
 Het gemiddelde is nu 393,3 bij 26 deelnemers in groep 1.
 Totaal is dat 10.225,8 seconden. Trek je de uitschieter er vanaf en deel je door 25, dan krijg je een gemiddelde van 387,4 seconden.

Variabele	groep		
	1	2	3
Speerwerpen (m)			
Aantal waarnemingen	26	24	26
Gemiddelde	28,33	38,40	38,62
Mediaan	28,25	39	37,75
Modus	25	-	40
Minimum	19,5	16	32,5
Maximum	35	48	47
Standaardafwijking	4,16	7,42	3,81
Eerste kwartiel	25	36	35,75
Derde kwartiel	31,75	42,5	40,75

- d** Groep 2 en groep 3 hebben ongeveer gelijk gepresteerd.
 Groep 1 heeft het minst gepresteerd.
e Met de spreidingsbreedte en de standaarddeviatie is wel te zien hoe de prestaties van de groepen 2 en 3 verschilden.
 Het minimum van groep 2 is erg laag. Dan moet de rest van de groep beter presteren om hetzelfde gemiddelde te behalen.

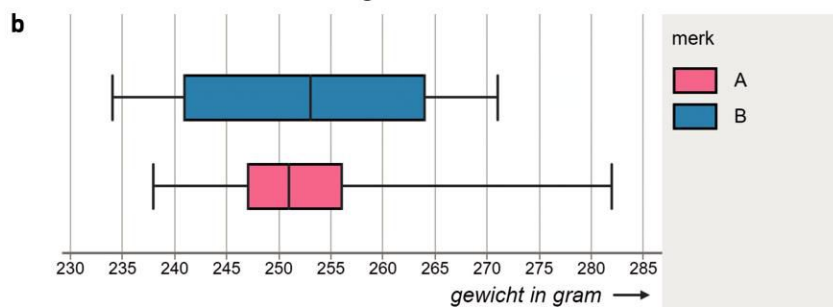
f Met een somfrequentie grafiek zie je het verschil in resultaten.



41 a Met behulp van de kentallen kun je de spreidingsbreedte en de standaarddeviatie bepalen:

Merk A: spreidingsbreedte = $282 - 238 = 44$ gram en standaarddeviatie is 7,86 gram.

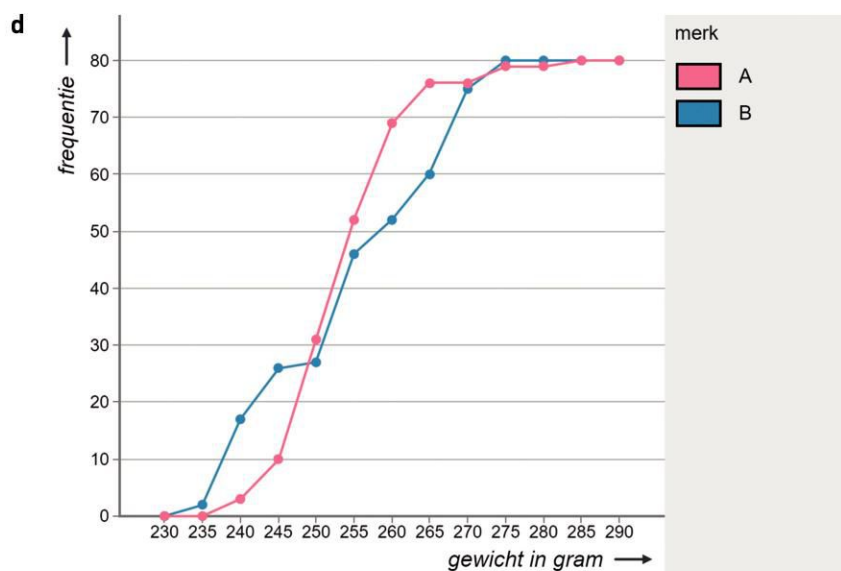
Merk B: spreidingsbreedte = $271 - 234 = 37$ gram en standaarddeviatie is 11,84 gram.



c De spreidingsbreedte geeft alleen aan hoe lang de boxplot is. Deze verschilt niet zo veel.

De standaardafwijking en de interkwartielafstand verschillen wel.

3 Statistiek



- e Je ziet dat de grafiek van merk A rond de mediaan veel steiler loopt. Dus bij merk A hebben veel pakken een gewicht rond de mediaan. Hierdoor is de spreiding kleiner.

Onderzoekopdrachten

- 42 Het totaal aantal uren zonneshij in deze maand was:
 $1 + 4 + 1 + 2 + 4 + 5 + 0,5 + 0,5 + 5 + 6,5 + 2 + 2 + 4 + 0,5 + 7 + 3 + 3 + 5 + 4 = 60$
 De langst mogelijke duur van de zonneshij per dag is de lengte van de blauwe staaf.

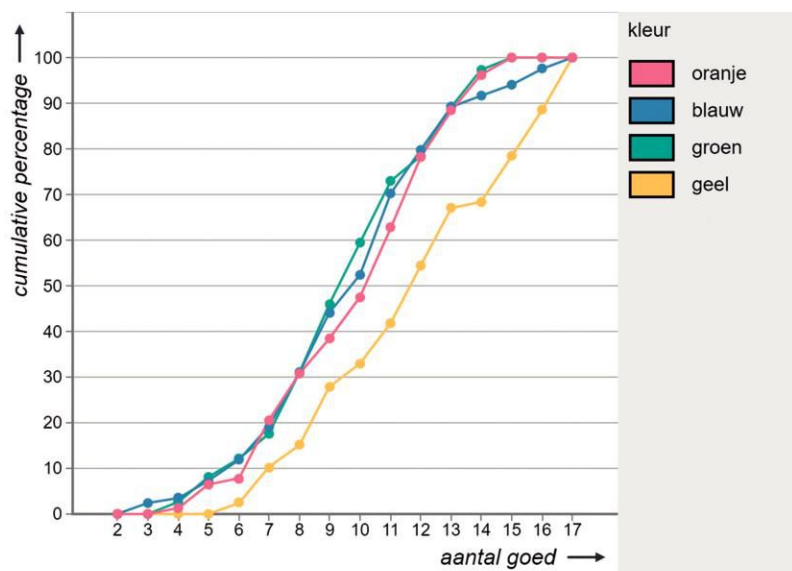
Over november 2012 is die gemiddeld iets minder dan 9 uur, want er zijn iets meer staven onder de 9 uur dan erboven. Schat het gemiddelde bijvoorbeeld op 8,8 uur. In totaal zijn er dan $30 \times 8,8 = 264$ uren zonneshij mogelijk.

Normaal is 63 uur. Dat is $\frac{63}{264} \times 100\% \approx 24\%$. Dus dat klopt.

Er zijn 60 uren zonneshij gemeten en dat is $\frac{60}{264} \times 100\% = 22,7\%$.
 De 22% klopt. Het aantal is af te leiden uit de figuur.

43

Variabele	kleur			
	groen	oranje	blauw	geel
Aantal waarnemingen	74	78	84	79
Gemiddelde	8,85	9,22	9,06	11,13
Mediaan	9	10	9	11
Modus	8	-	10	-
Minimum	3	3	2	5
Maximum	14	14	16	16
Standaardafwijking	2,74	2,74	3,07	3,28
Eerste kwartiel	7	7	7	8
Derde kwartiel	11	11	11	14



In de tabel zie je dat het gemiddelde en de mediaan bij de gele blaadjes het hoogst is.

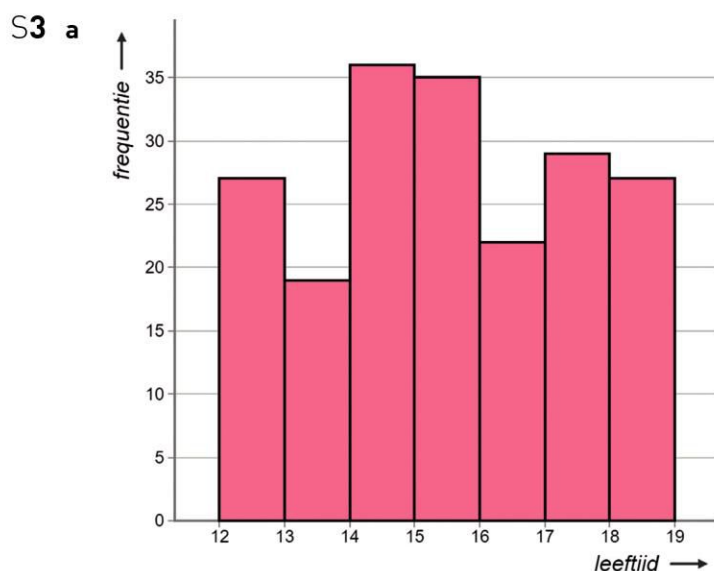
In de grafiek zie je dat de leerlingen met de gele blaadjes het beter hebben gedaan dan de anderen.

Het vermoeden van de onderzoeker lijkt te kloppen.

Samenvatting

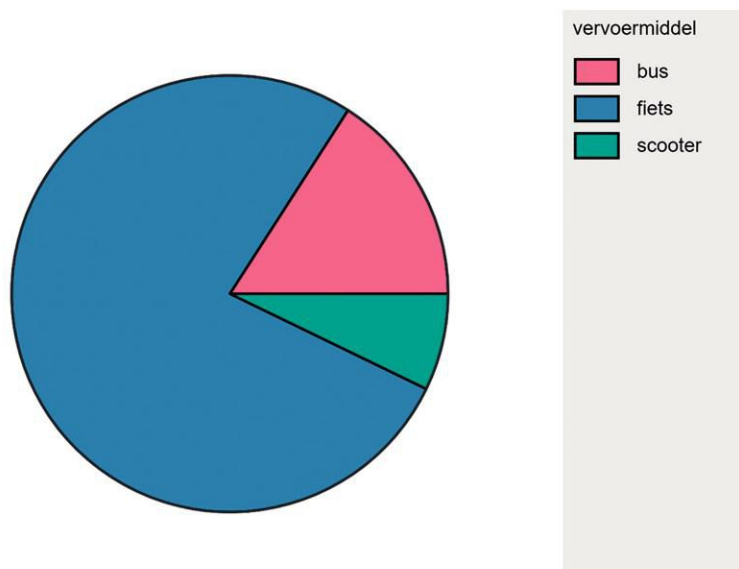
- S1 a** Jongeren tussen 12 en 18 jaar.
b De variabelen zijn *leeftijd*, *vervoermiddel*, *reisafstand*, *reistijd*, *sport* en *sporttijd*.
c Andere zinvolle variabelen zouden kunnen zijn *soort vakantie*, *vrijtijdsbesteding* en *conditie*.
d Bijvoorbeeld:
 Jongeren die de fiets gebruiken, hebben een betere conditie.
 Jongeren die verder dan 15 km van school wonen, gaan vaker met de bus naar school.

- S2** *Leeftijd*, *reistijd*, *reisafstand* en *sporttijd* zijn kwantitatief.
Vervoermiddel en *sport* zijn kwalitatief.

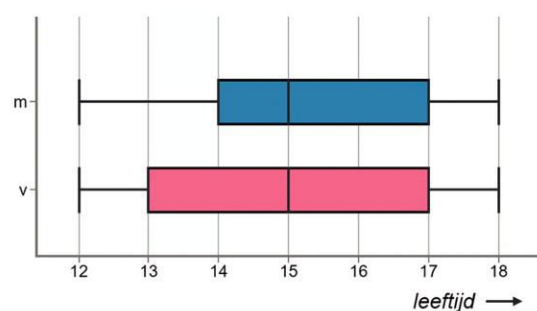


3 Statistiek

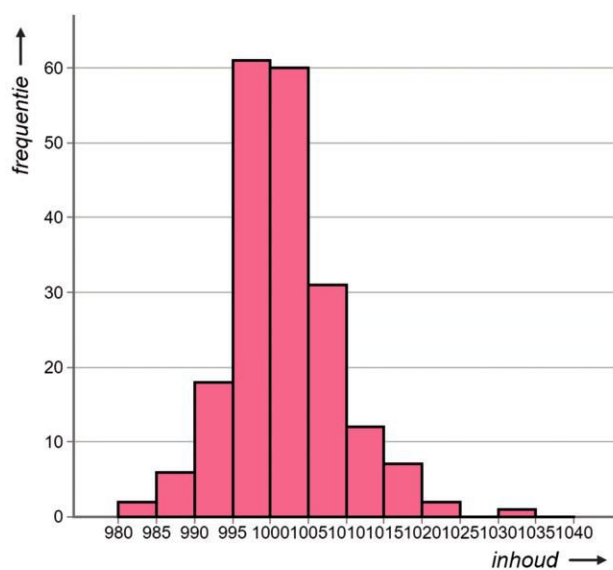
b



c



S4 a



Gekozen is voor een klassenbreedte van 5 mL.

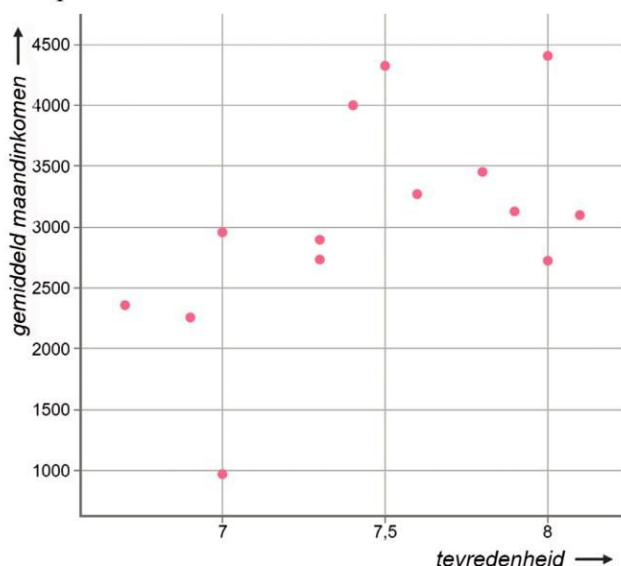
b Het klassenmidden is bij deze indeling 982,5 mL.

S5

profiel	bus
CM	$4 : 16 \times 100\% = 25\%$
EM	$10 : 49 \times 100\% = 20,4\%$
NG	$11 : \times 100\% = 18,0\%$
NT	$7 : 37 \times 100\% = 18,9\%$

In het profiel CM komen naar verhouding de meeste leerlingen met de bus.

- S6** Het zijn kwantitatieve variabelen, je kunt het verband dus onderzoeken met een puntenwolk.



Het lijkt erop dat bij een hoger gemiddeld maandinkomen de tevredenheid groter is. Het verband is niet erg groot.

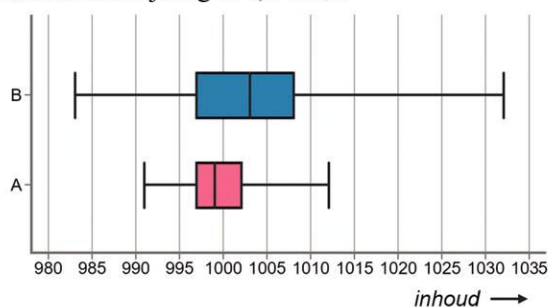
- S7 a** Maak een tabel met de kentallen.

De spreidingsbreedte is $1032 - 983 = 49$ mL

De kwartielfstand is $1005 - 997 = 8,0$ mL.

De standaardafwijking is 7,04 mL.

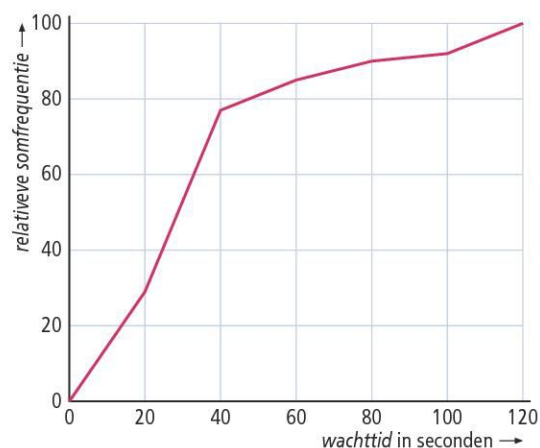
b



- c** Bij Machine A is de spreidingsbreedte en de kwartielfstand veel kleiner. De mediaan is bij machine B groter. Bij machine B is het percentage pakken met een inhoud van minder dan 1000 mL veel kleiner.

S8

wachttijd in seconden	somfrequentie in procenten
< 20	29
< 40	77
< 60	85
< 80	90
< 100	92
< 120	100

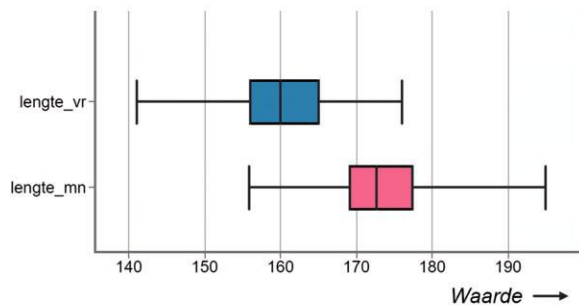


3 Statistiek

Test jezelf

- T1 a** De populatie is mannen en vrouwen die met elkaar getrouwd zijn.
b De variabelen zijn *leeftijd nu* (zowel man als vrouw), *leeftijd bij trouwen*, *lengte man*, *lengte vrouw*, *verschil in lengte van man en vrouw*,
c Alle variabelen zijn kwantitatief.
d De variabele neemt de waarden vanaf 16 tot en met 52 jaar aan.
e De klasse $[22, 25)$ is de modale klasse.
f Maak kolom verschil in leeftijd (leeftijd man min leeftijd vrouw) en sorteer deze. Je telt 32 negatieve waarden. Dus in 32 gevallen is de man jonger dan de vrouw.

T2 a



In de boxplot zie je dat de Q_1 van de mannen rechts van de Q_3 van de vrouwen ligt. De bewering klopt dus.

- b** Maak een tabel met de kentallen.

Variabele	lengte_mn	lengte_vr	Verschil_lengte_man_en_lengte_vrouw
Aantal waarnemingen	199	199	199
Gemiddelde	173,25	160,19	13,05
Mediaan	172,7	160	13,15
Modus	172,5	159	12,5
Minimum	155,9	141	-9,6
Maximum	194,9	176	30,3
Standaardafwijking	6,88	6,24	7,41
Eerste kwartiel	169,1	156	8,2
Derde kwartiel	177,4	165	17,9

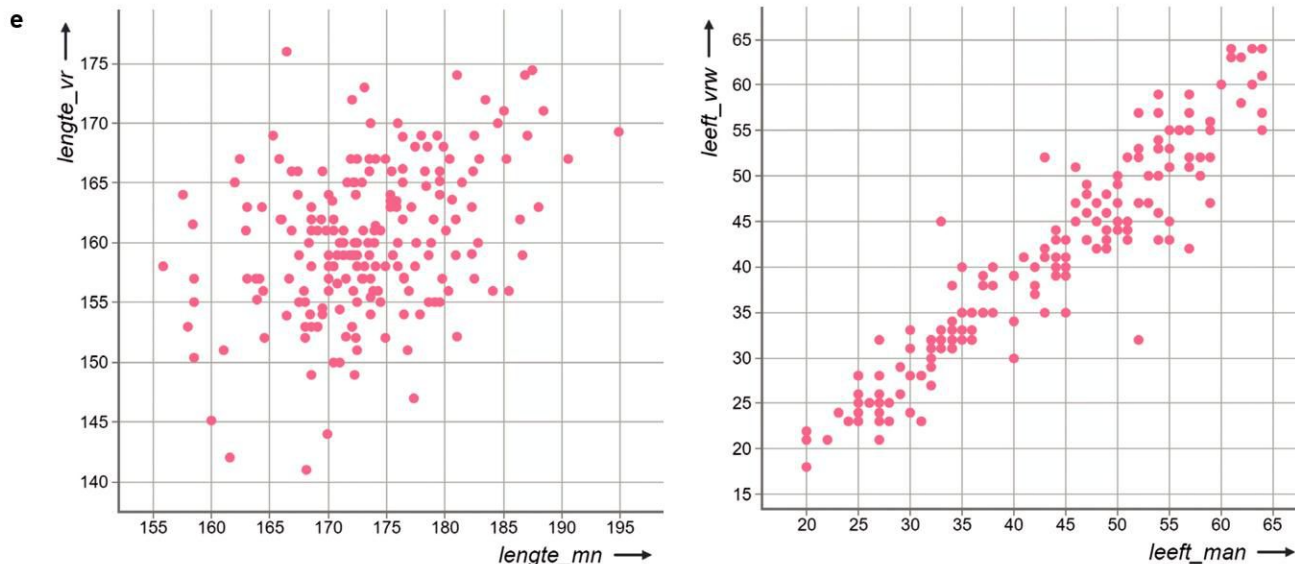
De spreidingsbreedte bij de mannen is $(194,9 - 155,9 = 39 \text{ cm})$ groter dan die bij de vrouwen $(176 - 141 = 35 \text{ cm})$.

De kwartiel afstand bij de vrouwen $(165 - 156 = 9 \text{ cm})$ is groter dan die van de mannen $(177,4 - 169,1 = 8,3 \text{ cm})$

De standaardafwijking bij de mannen (6,9 cm) is groter dan die van de vrouwen (6,2 cm).

Dus niet in alle gevallen wordt hetzelfde geslacht aangewezen met de grootste spreidingsmaat.

- c De gemiddelde lengte van de man is 173,2 cm
De gemiddelde lengte van de vrouw is 160,2 cm.
Het verschil van de gemiddelde lengten komt op 13,0 cm.
- d In beide gevallen bereken je het gemiddelde door de som van de lengte van de mannen min de som van de lengte van de vrouwen te delen door het totaal aantal echtparen.



In de rechter grafiek liggen de punten dicht bij de lijn. Hier is het verband dus sterker.

Het verband tussen leeftijd man en vrouw is sterker dan het verband tussen de lengten.

T3 a De variabele *leeftijd* heeft maar drie waarden (11, 12 en 13).

b

Verspringen [cm]	Leeftijd			Totaal
	11 -< 12	12 -< 13	13 -< 14	
150 -< 200	1	0	0	1
200 -< 250	5	1	0	6
250 -< 300	12	6	0	18
300 -< 350	21	19	0	40
350 -< 400	5	3	1	9
Totaal	44	29	1	74

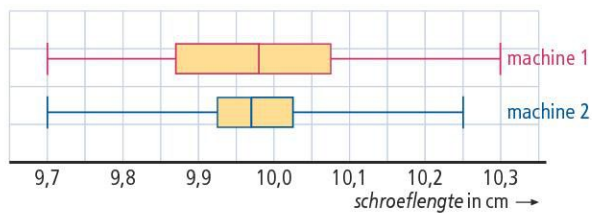
$$19 : 29 \times 100\% = 65,5\%$$

c $19 : 40 \times 100\% = 47,5\%$

3 Statistiek

T4 a Lees het minimum, maximum, Q_1 , Q_3 en de mediaan af uit de grafiek.

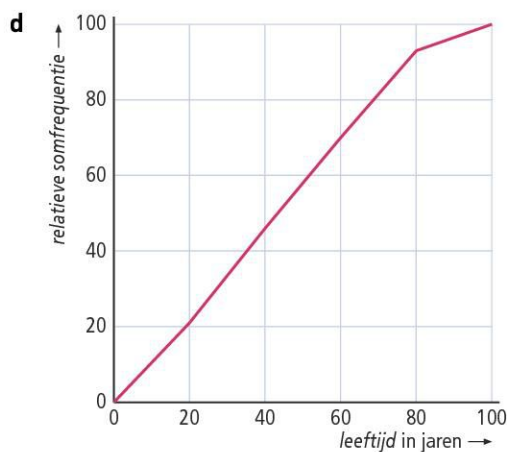
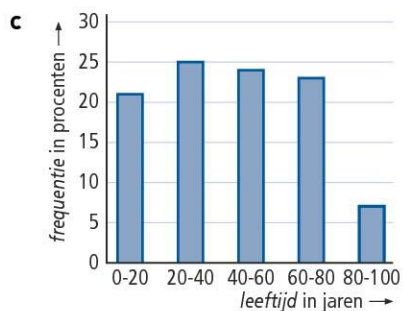
	minimum	Q_1	mediaan	Q_3	maximum
machine 1	9,7	9,87	9,98	10,07	10,3
machine 2	9,7	9,93	9,87	10,02	10,25



- b** De grafiek van machine 2 loopt steiler rondom de mediaan. De spreiding bij machine 2 is dus kleiner.
- c** Machine 1: Uit de grafiek lees je af dat ongeveer 30% korter is dan 9,9 cm en 20% langer dan 10,1cm;
Machine 2: Ongeveer 11% is korter dan 9,9 cm en 10% langer dan 10,1 cm.
Machine 2 is beter afgesteld. Hier wordt maar 21 procent afgekeurd.

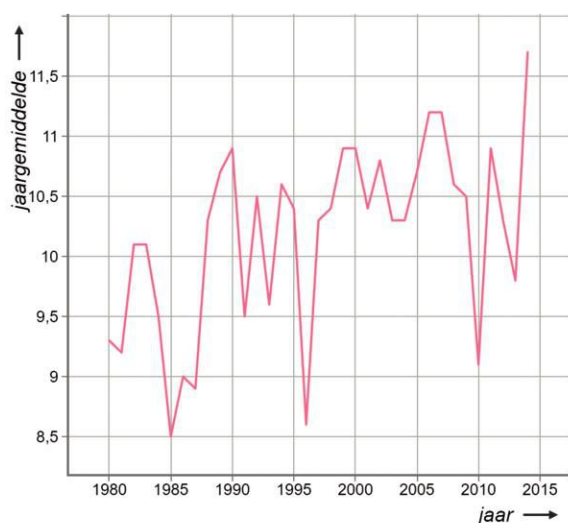
T5 a De modale klasse is de klasse 20 – 40.

- b** De mediaan ligt in de klasse 40 – 60. (Hierin valt als je de percentages gaat optellen, de 50%)

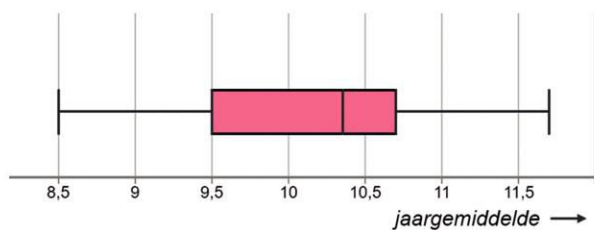


Extra oefening

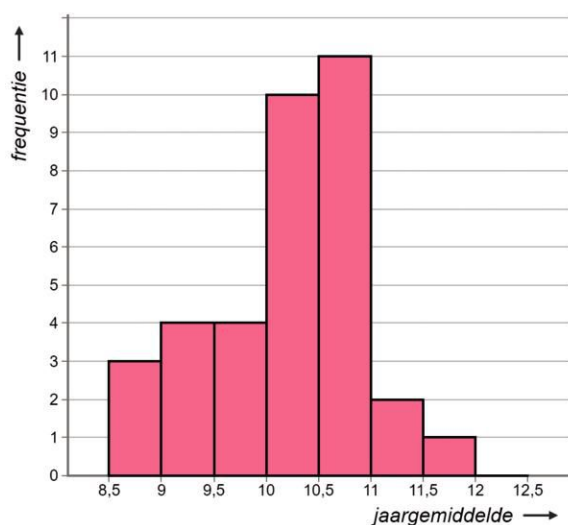
E1 a



b



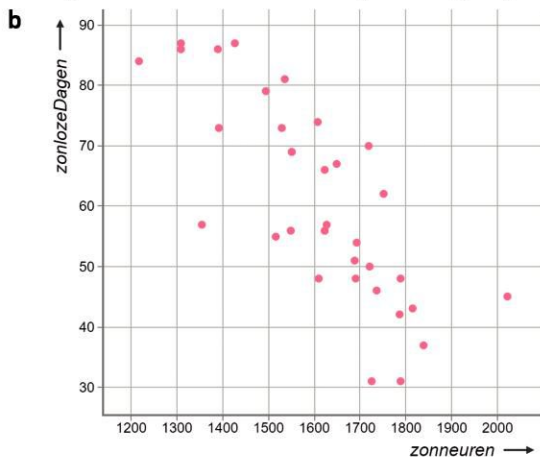
E2 a



- b Bij een klassenbreedte van bijvoorbeeld 5 graden krijg je een goed beeld.
 c Er zijn maar 14 verschillende waarden zijn voor deze variabele. Dat is erg weinig om een indeling in klassen te maken.
 d Sorteert de variabele *tropischeDagen* oplopend.
 Het komt maar in vijf jaren voor dat er geen tropische dagen waren..

3 Statistiek

E3 a Bij veel uren zon verwacht je weinig dagen zonder zon.



c Ja, er is een verband. De punten liggen langs een dalende lijn. Hoe meer uren zon, hoe minder het aantal dagen is zonder zon.

E4 Met hulpmiddelen is de kans op slagen $27 : (27 + 357) \times 100\% = 7\%$.
Met begeleiding is de kans op slagen $12 : (12 + 129) \times 100\% = 8,5\%$.
Het lijkt erop dat begeleiding iets beter werkt.

E5 Maak een tabel met de kentallen
De spreidingsbreedte is $11,7 - 8,5 = 3,2$.
De kwartielfstand is $10,7 - 9,6 = 1,1$.
De standaardafwijking is $0,77$.

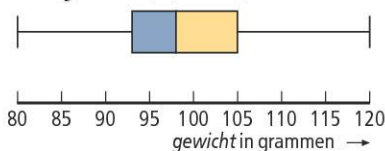
E6 a De waarnemingen zijn uitgezet tegen relatieve frequentie.
Ze tellen op tot 100%.

b De klassen zijn 4 gram breed met als eerste klasse $[80,84)$ en als laatste klasse $[116,120)$.

c De modale klasse is waar de grafiek het steilst loopt. Daar zitten de meeste waarden.
Dat is de klasse $[96,100)$.

d De mediaan lees je af bij 50%, namelijk de middelste waarde.
Dat is bij ongeveer 98,5 gram.

e Uit de grafiek lees je af dat het minimum = 80, de $Q_1 = 93$ (bij 25%), de $Q_3 = 105$ (bij 75%) en het maximum is 120.



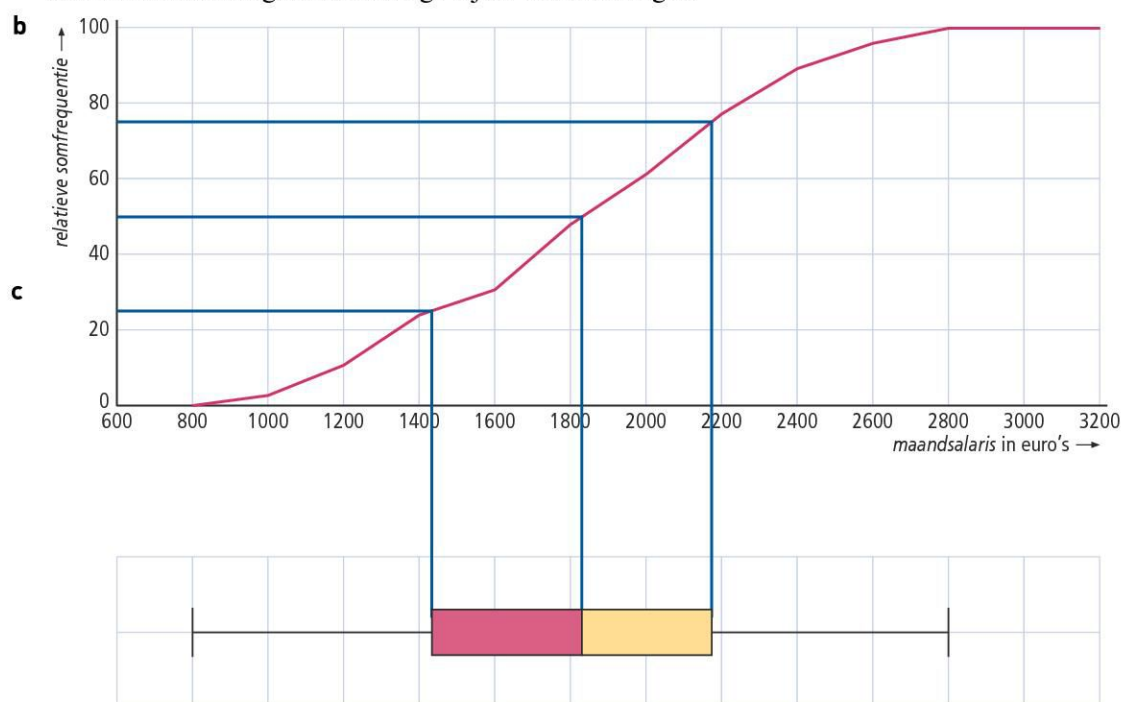
f Spreidingsbreedte is $120 - 80 = 40$.
De kwartielfstand is $Q_3 - Q_1 = 105 - 93 = 12$.

E7 a Er wonen $6 + 10 + 7 + 3 + 2 + 1 + 1 = 30$ gezinnen in de straat.

b Het totaal aantal kinderen is
 $6 \times 0 + 10 \times 1 + 7 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 5 + 6 = 52$
Het gemiddelde is dus $52 : 30 \approx 1,73$ kinderen per gezin.

c $1,73 \times 890 \approx 1542,67$
Er wonen dus ongeveer 1540 kinderen in het dorp.

- E8 a** Er is een groot aantal vrouwen die tussen de 800 en 1600 verdient (23 vrouwen). Daarentegen zijn er maar 5 mannen met een inkomen binnen deze klassen. Het gemiddelde ligt bij de vrouwen lager.



- d** Uit de boxplots kun je aflezen dat van de vrouwen meer dan 25% meer dan € 2100,- verdient. Van de mannen is dit 50%. Dus relatief gezien klopt deze uitspraak niet.
Er werken meer vrouwen dan mannen in het bedrijf. Dus absoluut gezien klopt deze uitspraak ook niet.

4 Machtsfuncties

Voorkennis

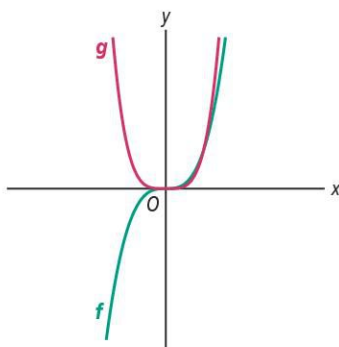
- V1 a $2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$
 b $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$, dus
 $a^4 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$
 c x^6 , want $x^3 \cdot x^6 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^9$
 d $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, dus $(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12}$
 e $(x^2)^5 = x^{10}$
 f $(2x^3)^4 = 2 \cdot x^3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot 2 \cdot x^3 = 2^4 \cdot (x^3)^4 = 16x^{12}$
 g $(3x^4)^2 = 3 \cdot x^4 \cdot 3 \cdot x^4 = 3^2 \cdot (x^4)^2 = 9x^8$

- V2 a $K = 5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
 b $b = (7^4)^2 = 7^{4 \cdot 2} = 7^8$
 c $N = 3^4 \cdot 3^2 \cdot (3^3)^5 = 3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{3 \cdot 5} = 3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{15} = 3^{21}$
 d $P = (q^2)^5 \cdot q^2 = q^{2 \cdot 5} \cdot q^2 = q^{10} \cdot q^2 = q^{12}$
 e $r = a \cdot (a^2)^4 = a \cdot a^{2 \cdot 4} = a \cdot a^8 = a^9$
 f $h = q^3 \cdot q^2 \cdot q \cdot q^2 = q^8$

- V3 a $f(x) = (3x^3)^4 = 3^4 \cdot (x^3)^4 = 81 \cdot x^{3 \cdot 4} = 81x^{12}$
 b $m(u) = \left(\frac{6}{2u^2}\right)^3 = \frac{6^3}{(2u^2)^3} = \frac{216}{2^3 \cdot (u^2)^3} = \frac{216}{8 \cdot u^{2 \cdot 3}} = \frac{27}{u^6}$
 c $h(a) = (4a^4)^4 \cdot 2a^3 = 4^4 \cdot (a^4)^4 \cdot 2a^3 = 4^4 \cdot a^{16} \cdot 2a^3 = 512 \cdot a^{16} \cdot a^3 = 512a^{19}$
 d $i(t) = \frac{9t^2 \cdot t^3}{(3t^2)^2 \cdot t} = \frac{9 \cdot t^2 \cdot t^3}{3^2 \cdot (t^2)^2 \cdot t} = \frac{9 \cdot t^2 \cdot t^3}{9 \cdot t^{2 \cdot 2} \cdot t} = \frac{9 \cdot t^2 \cdot t^3}{9 \cdot t^4 \cdot t} = \frac{9t^5}{9t^5} = 1$

- V4 a $f(x) = x^2(x^5 - 2x^2)$
 $f(x) = x^7 - 2x^4$
 b $g(p) = (p^2)^5 - 3 \cdot p^7 \cdot p^3$
 $g(p) = p^{10} - 3p^{10}$
 $g(p) = -2p^{10}$
 c $A(k) = k^2 \cdot k + 5k^3$
 $A(k) = k^3 + 5k^3$
 $A(k) = 6k^3$
 d $R(t) = t^3(t + t^2) + 3t^4$
 $R(t) = t^4 + t^5 + 3t^4$
 $R(t) = t^5 + 4t^4$
 e $P(n) = n(n^2 + 3n) - n^2(3n - 8)$
 $P(n) = n^3 + 3n^2 - 3n^3 + 8n^2$
 $P(n) = -2n^3 + 11n^2$
 f $g(x) = 5x(x - 3) + (x - 5)^2$
 $g(x) = 5x^2 - 15x + x^2 - 10x + 25$
 $g(x) = 6x^2 - 25x + 25$

- V5 a Invoer: $y_1 = x^3$ en $y_2 = x^4$
 Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$



- b De vergelijking $x^4 = 81$ heeft twee oplossingen, want de grafiek van g is symmetrisch in de y -as en komt dus twee keer op hoogte 81.
 c $x^3 = 125$ $x^4 = 81$
 $x = \sqrt[3]{125} = 5$ $x = \sqrt[4]{81} = 3$ of $x = -\sqrt[4]{81} = -3$

V6 a $x^2 = 10$

De exponent 2 is even. Er zijn twee oplossingen.

$$x = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ of } x = -\sqrt{10} \approx -3,16$$

b $x^3 = 64$

De exponent 3 is oneven. Er is één oplossing.

$$x = \sqrt[3]{64} = 4$$

c $3t^4 = 48$

$$t^4 = 16$$

De exponent 4 is even. Er zijn twee oplossingen.

$$t = \sqrt[4]{16} = 2 \text{ of } t = -\sqrt[4]{16} = -2$$

d $3q^6 + 1 = 1$

$$3q^6 = 0$$

$$q^6 = 0$$

De exponent 6 is even. Er is één oplossing.

$$q = \sqrt[6]{0} = 0$$

e $3d^5 = -15$

$$d^5 = -5$$

De exponent 5 is oneven. Er is één oplossing.

$$d = \sqrt[5]{-5} \approx -1,38$$

f $7 - \frac{1}{2}k^4 = 4$

$$\frac{1}{2}k^4 = 3$$

$$k^4 = 6$$

De exponent 4 is even. Er zijn twee oplossingen.

$$k = \sqrt[4]{6} \approx 1,57 \text{ of } k = -\sqrt[4]{6} \approx -1,57$$

V7 a De figuur bestaat uit acht kubussen.

De inhoud van één kubus is $5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ cm}^3$.

De inhoud van de figuur is $8 \times 125 = 1000 \text{ cm}^3$.

b De juiste formule is $I = 8r^3$, want de figuur bestaat uit acht kubussen met elk een inhoud van $r \cdot r \cdot r = r^3$.

c $10000 = 8r^3$

$$r^3 = 1250$$

$$r = \sqrt[3]{1250} \approx 10,77 \text{ cm}$$

V8 Bij stap 1 heeft hij aan beide kanten van het gelijkteken $-12x$ gedaan.

Bij stap 2 heeft hij aan beide kanten van het gelijkteken alle termen gedeeld door 4.

V9 a $p = 6q - 18$

$$6q - 18 = p$$

$$6q = p + 18$$

$$q = \frac{1}{6}p + 3$$

b $2 + 12p = 2q$

$$2q = 12p + 2$$

$$q = 6p + 1$$

c $-2p - 4q = 100$

$$-4q = 2p + 100$$

$$q = -\frac{1}{2}p - 25$$

d $21 - 3q + 2p = 0$

$$-3q = -2p - 21$$

$$q = \frac{2}{3}p + 7$$

4 Machtsfuncties

4.1 Negatieve exponenten

intro Op 4 juni is er 40 gram, op 3 juni was er de helft, dus 20 gram, op 2 juni daar de helft van, dus 10 gram en op 1 juni was er dus 5 gram.
of

Op 4 juni was er 40 gram, elke dag ervoor is er de helft. Drie dagen voor 4 juni was er $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ deel van 40 gram en dat is 5 gram.

- 1 a** $\frac{1}{7} = 0,142\ 857\dots$ en $7^{-1} = 0,142\ 857\dots$
b Naar aanleiding van de antwoorden van opdracht a kun je vermoeden dat $\frac{1}{7}$ gelijk is aan 7^{-1} .
c $\frac{1}{3^2} = 0,111\ 111\dots$ en $3^{-2} = 0,111\ 111\dots$
d Op basis van de antwoorden van opdracht c kun je vermoeden dat $\frac{1}{3^2}$ gelijk is aan 3^{-2} .

- 2 a** Bij de getallen in de bovenste rij wordt de macht steeds één minder.
De getallen in de onderste rij van de tabel worden steeds door 7 gedeeld.

7^3	7^2	7^1	7^0	7^{-1}	7^{-2}	7^{-3}	7^{-4}
343	49	7	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{343}$	$\frac{1}{2401}$

- c** $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ en dat klopt met de tabel.
 $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$ en dat klopt met de tabel.
d Volgens de tabel geldt $7^0 = 1$.
3 a $\frac{1}{7^4} \cdot 7^{-2} = \frac{1}{7^4} \cdot \frac{1}{7^2} = \frac{1}{7^4 \cdot 7^2} = \frac{1}{7^6} = 7^{-6}$ en $\frac{1}{7^4} \cdot 7^{-2} = 7^{-4} \cdot 7^{-2} = 7^{-6}$
b In opdracht a heb je de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ aangetoond, ook voor negatieve machten.
c $(7^3)^{-2} = \frac{1}{(7^3)^2} = \frac{1}{7^3 \cdot 7^3} = \frac{1}{7^6} = 7^{-6}$
d In opdracht c heb je de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ aangetoond, ook voor negatieve machten.

4 a $t^{-3} = \frac{1}{t^3}$

d $2k^{-8} = \frac{2}{k^8}$

b $a^2 \cdot a^{-6} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

e $7q^4 \cdot 3q^2 \cdot q^{-6} = 21q^0 = 21 \cdot 1 = 21$

c $\frac{5p \cdot p^0}{(p^2)^3} = \frac{5p \cdot 1}{p^6} = \frac{5}{p^5}$

f $\frac{8x^4}{2x \cdot x^3} = \frac{8x^4}{2x^4} = 4x^0 = 4 \cdot 1 = 4$

5 a $\frac{5}{x^8} = 5 \cdot \frac{1}{x^8} = 5 \cdot x^{-8} = 5x^{-8}$

$\frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot x^{-2} = \frac{1}{4}x^{-2}$

b A $\frac{3}{p^3} = 3 \cdot \frac{1}{p^3} = 3p^{-3}$

C $\frac{x^3}{6x^4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{6}x^{-1}$

B $\frac{2}{9a^8} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{a^8} = \frac{2}{9}a^{-8}$

D $\frac{3u}{2u^5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{u}{u^5} = \frac{3}{2}u^{-4} = \frac{1}{2}u^{-4}$

- 6 a** Als je de rekenregel $\frac{1}{g^n} = g^{-n}$ toepast op de breuk $\frac{7}{a^{-3}}$ krijg je

$$\frac{7}{a^{-3}} = 7 \cdot \frac{1}{a^{-3}} = 7 \cdot a^{-(-3)}.$$

- b** Bert vermenigvuldigt eerst de teller en de noemer van de breuk met a^3 .
Daardoor wordt de noemer van de breuk a^0 ofwel 1.

c A $\frac{8}{a^{-9}} = 8 \cdot \frac{1}{a^{-9}} = 8 \cdot a^{-(-9)} = 8a^9$ of

$$\frac{8}{a^{-9}} = \frac{8 \cdot a^9}{a^{-9} \cdot a^9} = \frac{8 \cdot a^9}{a^0} = \frac{8 \cdot a^9}{1} = 8a^9$$

B $\frac{-12}{d^{-7}} = -12 \cdot \frac{1}{d^{-7}} = -12 \cdot d^{-(-7)} = -12d^7$ of

$$\frac{-12}{d^{-7}} = \frac{-12 \cdot d^7}{d^{-7} \cdot d^7} = \frac{-12 \cdot d^7}{d^0} = \frac{-12 \cdot d^7}{1} = -12d^7$$

C $\frac{4}{2x^{-3}} = \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{x^{-3}} = 2 \cdot x^{-(-3)} = 2x^3$ of

$$\frac{4}{2x^{-3}} = \frac{4 \cdot x^3}{2 \cdot x^{-3} \cdot x^3} = \frac{4 \cdot x^3}{2 \cdot x^0} = \frac{4 \cdot x^3}{2 \cdot 1} = 2x^3$$

D $\frac{5}{7x^{-2}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{x^{-2}} = \frac{5}{7} \cdot x^{-(-2)} = \frac{5}{7}x^2$ of

$$\frac{5}{7x^{-2}} = \frac{5 \cdot x^2}{7 \cdot x^{-2} \cdot x^2} = \frac{5 \cdot x^2}{7 \cdot x^0} = \frac{5 \cdot x^2}{7 \cdot 1} = \frac{5}{7}x^2$$

E $\frac{18p^3}{24p^{-2}} = \frac{18}{24} \cdot \frac{p^3}{p^{-2}} = \frac{3}{4} \cdot p^{3-(-2)} = \frac{3}{4}p^5$ of

$$\frac{18p^3}{24p^{-2}} = \frac{18 \cdot p^3 \cdot p^2}{24 \cdot p^{-2} \cdot p^2} = \frac{18 \cdot p^5}{24 \cdot p^0} = \frac{18 \cdot p^5}{24 \cdot 1} = \frac{3}{4}p^5$$

F $\frac{4x^5 \cdot x^{-3}}{10x^{-7}} = \frac{4x^2}{10x^{-7}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{x^2}{x^{-7}} = \frac{2}{5} \cdot x^{2-(-7)} = \frac{2}{5}x^9$ of

$$\frac{4x^5 \cdot x^{-3}}{10x^{-7}} = \frac{4x^2}{10x^{-7}} = \frac{4x^2 \cdot x^7}{10x^{-7} \cdot x^7} = \frac{4 \cdot x^9}{10 \cdot x^0} = \frac{4 \cdot x^9}{10 \cdot 1} = \frac{2}{5}x^9$$

7 a $\frac{6x^2}{8x^9} = \frac{6}{8} \cdot \frac{x^2}{x^9} = \frac{3}{4} \cdot x^{-7}$

b $\frac{1}{(x^2)^3} = \frac{1}{x^6} = 1 \cdot x^{-6}$

c $\frac{x^0}{x^7} = \frac{1}{x^7} = 1 \cdot x^{-7}$

d $\frac{18x^4}{3x^2 \cdot 2x^2} = \frac{18x^4}{6x^4} = \frac{18}{6} \cdot \frac{x^4}{x^4} = 3 \cdot x^0$

e $\frac{6x}{3x^9} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x}{x^9} = 2 \cdot x^{-8}$

f $\frac{6x^2 \cdot (x^3)^2}{3x} = \frac{6x^2 \cdot x^6}{3x} = \frac{6x^8}{3x} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x^8}{x} = 2 \cdot x^7$

8 a $(2d)^{-4} = \frac{1}{(2d)^4} = \frac{1}{2^4 \cdot d^4} = \frac{1}{16d^4}$.

b $W = \left(\frac{2}{p^{-2}}\right)^3 = \left(2 \cdot \frac{1}{p^{-2}}\right)^3 = (2 \cdot p^{-(-2)})^3 = 2^3 \cdot (p^2)^3 = 8p^6$

4 Machtsfuncties

- 9 a $(3x^{-2})^5 = 3^5 \cdot (x^{-2})^5 = 243 \cdot x^{-10}$
 b $\left(\frac{2}{x}\right)^4 = \left(2 \cdot \frac{1}{x}\right)^4 = (2 \cdot x^{-1})^4 = 2^4 \cdot (x^{-1})^4 = 16 \cdot x^{-4}$
 c $\left(\frac{-3}{x^2}\right)^5 = \left(-3 \cdot \frac{1}{x^2}\right)^5 = (-3 \cdot x^{-2})^5 = (-3)^5 \cdot (x^{-2})^5 = -243 \cdot x^{-10}$
 d $(-4x)^6 = (-4)^6 \cdot x^6 = 4096 \cdot x^6$
 e $\left(\frac{-5}{4x^3}\right)^3 = \left(\frac{-5}{4} \cdot \frac{1}{x^3}\right)^3 = \left(\frac{-5}{4} \cdot x^{-3}\right)^3 = \left(\frac{-5}{4}\right)^3 \cdot (x^{-3})^3 = -\frac{125}{64} \cdot x^{-9} = -1\frac{61}{64} \cdot x^{-9}$
 f $\frac{(-2x)^5}{-4x^2} = \frac{(-2)^5 \cdot x^5}{-4 \cdot x^2} = \frac{-32 \cdot x^5}{-4 \cdot x^2} = 8 \cdot x^3$

- 04 a Volgens de rekenregel $g^n = \frac{1}{g^{-n}}$ geldt dat $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$, dus A hoort bij 5.
 Volgens de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ geldt dat $a^3 \cdot a^4 = a^7$, dus B hoort bij 2.
 Volgens de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ geldt dat $(a^2)^3 = a^6$, dus C hoort bij 4.
 Volgens de rekenregel $g^0 = 1$ geldt dat $a^0 = 1$, dus D hoort bij 3.

Volgens de rekenregels $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$, $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ en $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ geldt dat
 $\frac{(a^4)^2}{a \cdot a^5} = \frac{a^8}{a^6} = a^2$, dus E hoort bij 1.

b $t^{-3} \cdot t^{-5} = \frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{t^5} = \frac{1}{t^8}$

c $5(a^{-8})^2 = 5 \cdot a^{-16} = 5 \cdot \frac{1}{a^{16}} = \frac{5}{a^{16}}$

- 07 a Bij stap 1 zijn de rekenregels $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ en $g^0 = 1$ gebruikt, namelijk

$$\frac{16x^2 \cdot x^3}{8 \cdot (x^4)^2 \cdot x^0} = \frac{16x^{2+3}}{8 \cdot (x^4)^2 \cdot 1} = \frac{16x^5}{8 \cdot (x^4)^2}$$

- b Bij stap 2 is de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ gebruikt, namelijk

$$\frac{16x^5}{8 \cdot (x^4)^2} = \frac{16x^5}{8 \cdot x^{4 \cdot 2}} = \frac{16x^5}{8 \cdot x^8} = \frac{2x^5}{x^8}$$

- c Bij stap 3 is de rekenregel $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ gebruikt, namelijk $\frac{2x^5}{x^8} = 2x^{5-8} = 2x^{-3}$

d $\frac{24x \cdot x^2}{6x^9} = \frac{24x^3}{6x^9} = \frac{24}{6} \cdot \frac{x^3}{x^9} = 4 \cdot x^{-6}$

e $\frac{5x^6}{(x^3)^3} = \frac{5x^6}{x^9} = \frac{5}{1} \cdot \frac{x^6}{x^9} = 5 \cdot x^{-3}$

f $\frac{x^3 \cdot x^0}{x^4} = \frac{x^3 \cdot 1}{x^4} = 1 \cdot x^{-1}$

g $\frac{32(x^4)^2}{8x^2 \cdot 2x^4} = \frac{32x^8}{16x^6} = \frac{32}{16} \cdot \frac{x^8}{x^6} = 2x^2$

h $\frac{15x^5}{3x^2} = \frac{15}{3} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 5 \cdot x^3$

i $\frac{18(x^2)^3}{(3x)^2} = \frac{18x^6}{(3)^2 \cdot (x)^2} = \frac{18x^6}{9x^2} = \frac{18}{9} \cdot \frac{x^6}{x^2} = 2 \cdot x^4$

- U1 a $x^{a+b} = x^a \cdot x^b = p \cdot q = pq$

b $x^{3b} = (x^b)^3 = q^3$

c $(x^5)^a = x^{5a} = (x^a)^5 = p^5$

d $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b} = \frac{p}{q}$

e $x^{2a+b} = x^{2a} \cdot x^b = (x^a)^2 \cdot x^b = p^2 \cdot q = p^2q$

f $(x^3)^{-2a+5b} = x^{-6a+15b} = x^{-6a} \cdot x^{15b} = (x^a)^{-6} \cdot (x^b)^{15} = p^{-6} \cdot q^{15} = \frac{q^{15}}{p^6}$

U2

$$\frac{(x^q)^2 \cdot px^{15} \cdot x^{-2}}{4 \cdot (x^{-3})^q \cdot x \cdot 3x^2} = \frac{x^{2q} \cdot px^{15} \cdot x^{-2}}{12x^{-3q} \cdot x \cdot x^2} = \frac{px^{2q+13}}{12x^{-3q+3}} = \frac{p}{12} \cdot \frac{x^{2q+13}}{x^{-3q+3}} =$$

$$\frac{p}{12} \cdot x^{2q+13-(-3q+3)} = \frac{p}{12} \cdot x^{2q+13+3q-3} = \frac{p}{12} \cdot x^{5q+10}$$

Deze breuk is voor alle waarden van x gelijk aan 1 als geldt $5q + 10 = 0$ en

als $\frac{p}{12} = 1$.

Hieruit volgt dat $5q + 10 = 0$, $5q = -10$, $q = -2$ en $\frac{p}{12} = 1$, dus $p = 12$.

4.2 Gebroken exponenten

intro Stel de groeifactor per dag gelijk aan g , dan geldt $g^4 = 2$.

$$g = \sqrt[4]{2} \approx 1,18...$$

Het aantal sprinkhanen na één dag is $2000 \times 1,18... \approx 2378$.

- 10 a** $\sqrt[3]{3} = 1,732\ 050...$ en $3^{\frac{1}{3}} = 1,732\ 050...$
b $\sqrt[3]{7} \approx 1,91$ en $7^{\frac{1}{3}} \approx 1,91$
 $\sqrt[5]{14} \approx 1,70$ en $14^{0,2} \approx 1,70$
c Als zowel $\sqrt[3]{3}$ als $3^{\frac{1}{3}}$ in het kwadraat gelijk is aan 3, dan moet wel gelden $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$.
d Zowel $\sqrt[3]{7}$ als $7^{\frac{1}{3}}$ tot de macht 3 gelijk is aan 7, dan geldt $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$.
Zowel $\sqrt[5]{14}$ als $14^{\frac{1}{5}}$ tot de macht 5 gelijk is aan 14, dan geldt $\sqrt[5]{14} = 14^{\frac{1}{5}}$.
- 11 a** $\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$ **d** $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$
b $\sqrt[10]{11} = 11^{\frac{1}{10}}$ **e** $\sqrt[4]{12} = 12^{\frac{1}{4}}$
c $\sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}}$ **f** $\sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}}$
- 12 a** $5\sqrt[4]{25} = 5 \cdot \sqrt[4]{5^2} = 5^1 \cdot 5^{\frac{2}{4}} = 5^{1\frac{2}{4}} = 5^{1\frac{1}{2}}$
b $\sqrt{k} \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}} \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot k^{\frac{1}{2}} = (k^{\frac{1}{2}})^3 = k^{\frac{3}{2}} = k^{1\frac{1}{2}}$
c $s^2\sqrt[5]{s} = s^2 \cdot s^{\frac{1}{5}} = s^{2\frac{1}{5}}$
d $\sqrt[4]{p} \cdot \sqrt{p} = p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{3}{4}}$
- 13 a** $4^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{4}$ **d** $(6^2)^{\frac{1}{8}} = 6^{\frac{2}{8}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$
b $7^{\frac{1}{5}} = 7^1 \cdot 7^{\frac{1}{5}} = 7\sqrt[5]{7}$ **e** $3^{\frac{1}{8}} \cdot 3 = 3 \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3\sqrt[8]{3}$
c $a^{2\frac{1}{7}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{7}} = a^2 \cdot \sqrt[7]{a}$ **f** $5 \cdot (5^3)^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt[2]{5^3}$
- 14 a** $k^2 \cdot k^{-\frac{1}{2}} = k^{1\frac{1}{2}} = k^1 \cdot k^{\frac{1}{2}} = k\sqrt{k}$
b $(v^2)^5 = v^{\frac{5}{2}} = v^{2\frac{1}{2}} = v^2 \cdot v^{\frac{1}{2}} = v^2\sqrt{v}$
c $(p^{-3})^{\frac{1}{2}} = p^{-\frac{3}{2}} = p^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{p^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p^1 \cdot p^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p\sqrt{p}}$
d $(2a)^2 \cdot \sqrt{a^{-2}} = 2^2 \cdot a^2 \cdot a^{-\frac{2}{2}} = 4 \cdot a^2 \cdot a^{-1} = 4a$
e $q^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{q^3} = q^{\frac{3}{4}} \cdot q^{\frac{3}{4}} = q^{1\frac{3}{4}} \cdot q^{\frac{1}{4}} = q^{1\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = q^{2} = q^2 \cdot q^0 = q^2 \cdot \sqrt[4]{q^0}$
f $x^{-1\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{x} = x^{-1\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{-1\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$

4 Machtsfuncties

$$\begin{array}{ll}
 \text{15 a } a^2 \cdot a^{-3} = a^{-1} & \text{d } (a^{\frac{3}{5}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{10}} \\
 \text{b } \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{1\frac{1}{2}} & \text{e } \frac{a^{0,3} \cdot a^{0,5}}{a^3} = \frac{a^{0,8}}{a^3} = a^{-2,2} \\
 \text{c } a^{0,4} \cdot a^{1,2} = a^{1,6} & \text{f } (a^{-3})^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{2}} = a^{-1\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$\text{16 a } H = \frac{241}{4000^{0,25}} = 30,30\dots, \text{ dus ongeveer 30 slagen per minuut.}$$

$$\text{b } H_{\text{haas}} = \frac{241}{5^{0,25}} = 161,16\dots, \text{ dus ongeveer 161 slagen per minuut.}$$

$$H_{\text{vos}} = \frac{241}{10^{0,25}} = 135,52\dots, \text{ dus ongeveer 136 slagen per minuut.}$$

De hartslag van de vos is wel lager, maar niet de helft van die van de haas.

$$\text{c } y_1 = 241 : x^{0,25} \text{ en } y_2 = 50$$

Venster: $0 \leq x \leq 1000$ en $0 \leq y \leq 100$

Optie: snijpunt geeft $x = 539,7\dots$

Bij een gewicht van ongeveer 540 kilogram geldt een hartslag van 50 slagen per minuut.

$$\text{17 a } P_{\text{theoretisch}} = \frac{150}{12 \cdot \sqrt[3]{70^2}} \approx 0,74$$

$$\text{b } \frac{T}{12 \cdot \sqrt[3]{100^2}} = \frac{150}{12 \cdot \sqrt[3]{70^2}}$$

$$T = \frac{150}{12 \cdot \sqrt[3]{70^2}} \cdot 12 \cdot \sqrt[3]{100^2} = 190,2\dots, \text{ ongeveer 190 kilogram}$$

$$\text{c } P_{\text{theoretisch}} = \frac{T}{12 \cdot \sqrt[3]{L^2}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{T}{\sqrt[3]{L^2}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{T}{L^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{12} \cdot T \cdot L^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{d } P_{\text{theoretisch,na}} = \frac{1}{12} \cdot (1,2 \cdot T) \cdot (1,1 \cdot L)^{-\frac{2}{3}}$$

$$P_{\text{theoretisch,na}} = \frac{1}{12} \cdot 1,2 \cdot T \cdot 1,1^{-\frac{2}{3}} \cdot L^{-\frac{2}{3}}$$

$$P_{\text{theoretisch,na}} = 1,2 \cdot 1,1^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot T \cdot L^{-\frac{2}{3}} \right)$$

$$P_{\text{theoretisch,na}} = 1,2 \cdot 1,1^{-\frac{2}{3}} \cdot P_{\text{theoretisch,voor}}$$

$$P_{\text{theoretisch,na}} = 1,126\dots \cdot P_{\text{theoretisch,voor}}$$

Zijn prestaties zijn dit jaar dus (ongeveer 1,126 keer) beter dan vorig jaar.

$$\text{e } \frac{T_{\text{Bert}}}{12 \cdot \sqrt[3]{150^2}} = \frac{T_{\text{Anton}}}{12 \cdot \sqrt[3]{50^2}}$$

$$T_{\text{Bert}} = \frac{T_{\text{Anton}}}{12 \cdot \sqrt[3]{50^2}} \cdot 12 \cdot \sqrt[3]{150^2}$$

$$T_{\text{Bert}} = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{150^2}}{12 \cdot \sqrt[3]{50^2}} \cdot T_{\text{Anton}}$$

$$T_{\text{Bert}} = 2,08\dots \cdot T_{\text{Anton}}$$

2,08 is groter dan 2, dus Bert moet een ruim twee keer zo groot gewicht tillen.

$$\text{012 a } \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{b } x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$$

$$\text{c } \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{k} = k^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{5}{6}}$$

014 a $p^{\frac{3}{2}} = (p^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p^3}$
 b $q^{3\frac{1}{5}} = q^3 \cdot q^{\frac{1}{5}} = q^3 \sqrt[5]{q}$
 c $a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$
 d $d^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{d}$
 e $p^{\frac{1}{4}} = p^1 \cdot p^{\frac{1}{4}} = p \sqrt[4]{p}$
 f $(a^{\frac{1}{6}})^2 = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$
 g $t^{-3} \cdot t^{\frac{1}{2}} = t^{-2\frac{1}{2}} = t^{-2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{t^2 \sqrt{t}}$
 h $q^{2\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{1}{3}} = q^{2\frac{1}{6}} = q^2 \cdot q^{\frac{1}{6}} = q^2 \cdot \sqrt[6]{q}$
 i $k^{-3\frac{1}{5}} = \frac{1}{k^{3\frac{1}{5}}} = \frac{1}{k^3 \cdot k^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{k^3 \sqrt[5]{k}}$

U3 a $x^{\frac{1}{2}a} = (x^a)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p}$
 b $\sqrt[3]{x^{2a}} = x^{\frac{2a}{3}} = x^{\frac{2}{3}a} = (x^a)^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^2}$
 c $x^{\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b} = x^{\frac{1}{3}a} \cdot x^{\frac{1}{4}b} = (x^a)^{\frac{1}{3}} \cdot (x^b)^{\frac{1}{4}} = p^{\frac{1}{3}} \cdot q^{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[4]{q}$
 d $(\sqrt[4]{x})^{a-2b} = (x^{\frac{1}{4}})^{a-2b} = x^{\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b} = \frac{x^{\frac{1}{4}a}}{x^{\frac{1}{2}b}} = \frac{(x^a)^{\frac{1}{4}}}{(x^b)^{\frac{1}{2}}} = \frac{p^{\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[4]{p}}{\sqrt{q}}$

U4 a De grafiek gaat door het punt (4, 130) en dus geldt $a \cdot 4^g = 130$.

Hieruit volgt dat $a = \frac{130}{4^g}$

b De grafiek gaat ook door het punt (8, 200) en dus geldt ook $a \cdot 8^g = 200$.

Hieruit volgt dat $a = \frac{130}{4^g}$ en $a = \frac{200}{8^g}$

$\frac{130}{4^g} = \frac{200}{8^g}$

Invoer: $y_1 = 130 : 4^x$ en $y_2 = 200 : 8^x$

Venster: $-1 \leq x \leq 2$, $-10 \leq y \leq 100$

Opties: snijpunten

De oplossing is $x = 0,6214\dots$ en $y = 54,925\dots$

Dus $a \approx 54,925$ en $g \approx 0,621$.

4.3 Machtsfuncties

intro c is bij een natte weg groter dan bij een droge weg. Hoe groter c , hoe groter het getal is waarmee de uitkomst van V^2 mee wordt vermenigvuldigd en dus hoe groter bij dezelfde snelheid de remweg wordt.

4 Machtsfuncties

18 a $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^{-2} \cdot x^4 = x^2$

b $k(x) = f(x) + g(x) = x^{-2} + x^4$.

Het functievoorschrift is niet verder te vereenvoudigen tot de vorm x^a .

c $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{-2}}{x^4} = x^{-6}$

19 a $g(x) = (f(x))^2 = (x^{0,21})^2 = x^{2 \times 0,21} = x^{0,42}$

b $h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^{0,21}} = x^{-0,21}$

20 a $f(x) = x^4 \cdot x \cdot x^3 = x^8$

b $H(t) = t^{3,5} \cdot t^{2,1} \cdot \frac{1}{t^{1,7}} = t^{3,5} \cdot t^{2,1} \cdot t^{-1,7} = t^{3,9}$

c $W(q) = \frac{q^3 \cdot q^4}{q^2} = \frac{q^7}{q^2} = q^5$

d $g(p) = (p^{2,1})^3 \cdot p^{0,7} = p^{6,3} \cdot p^{0,7} = p^7$

e $A(t) = t^3 \cdot \sqrt{t} \cdot t = t^3 \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot t = t^{4\frac{1}{2}}$

f $N(a) = \frac{a^{-0,2} \cdot a^{4,5}}{(a^{-0,7})^2} = \frac{a^{4,3}}{a^{-1,4}} = a^{5,7}$

21 a Bij diameter en hoogte zijn alleen positieve waarden zinvol.

b $h = 44 \cdot 0,36^{0,65} = 22,64\dots$

De hoogte van deze grove den is ongeveer 22,6 meter.

c $15 = 44 \cdot d^{0,65}$

Invoer: $y_1 = 44 \cdot x^{0,65}$ en $y_2 = 15$

Venster: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 50$

Opties: snijpunten

De oplossing is $x = 0,190\dots$

De diameter van deze boom is 19 cm.

d $18 = c \cdot 0,2^{0,65}$

$$c = \frac{18}{0,2^{0,65}} \approx 51$$

22 a $f(x) = x \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^2)^3 - \frac{x^2 \cdot x^3}{x} = x^6 + x^6 - \frac{x^5}{x} = 2x^6 - x^4$

b $h(x) = x^2 \cdot x^3 + x^2 \cdot x^5 + x \cdot x^4 = x^5 + x^7 + x^5 = x^7 + 2x^5$

$$W(p) = \frac{p^2 \cdot p^{0,5}}{p^3} - (p^{0,5})^2 \cdot p + p^{-2} \cdot p^{1,5} = \frac{p^{2,5}}{p^3} - p \cdot p + p^{-2} \cdot p^{1,5} = p^{-0,5} - p^2 + p^{-0,5} = -p^2 + 2p^{-0,5}$$

23 a $W(p) = \frac{8p^4 + 5p^2 + p + 1}{p}$

$$W(p) = \frac{8p^4}{p} + \frac{5p^2}{p} + \frac{p}{p} + \frac{1}{p}$$

$$W(p) = 8p^3 + 5p + 1 + p^{-1}$$

b $N(t) = \frac{-2t^{3,5} + 4t^{2,1} - 2t^{0,3} + 6}{2t}$

$$N(t) = \frac{-2t^{3,5}}{2t} + \frac{4t^{2,1}}{2t} + \frac{-2t^{0,3}}{2t} + \frac{6}{2t}$$

$$N(t) = -t^{2,5} + 2t^{1,1} - t^{-0,7} + 3t^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{c } P(q) &= \frac{6q^5 + 10q^{3,8} - 2}{5q^2} \\ P(q) &= \frac{6q^5}{5q^2} + \frac{10q^{3,8}}{5q^2} + \frac{-2}{5q^2} \\ P(q) &= 1\frac{1}{5}q^3 + 2q^{1,8} - \frac{2}{5}q^{-2} \end{aligned}$$

$$24 \text{ a } TK = 520 + 15 \cdot 250^{0,65} = 1062,940\dots$$

De TK bij 250 toetsenborden is ongeveer 1062,94 euro.

$$\text{b } TK = 520 + 15 \cdot 100^{0,65} = 819,289\dots$$

Een toetsenbord kost dan gemiddeld $819,229 : 100 \approx 8,19$ euro.

$$\text{c } GK = \frac{TK}{q} = \frac{520 + 15 \cdot q^{0,65}}{q} = \frac{520}{q} + \frac{15 \cdot q^{0,65}}{q} = 520 \cdot q^{-1} + 15 \cdot q^{-0,35}$$

$$25 \text{ a } Z = 0,4 \cdot 2400^{-\frac{1}{3}} = 0,0298\dots \text{ liter per kilogram. De totale hoeveelheid zuurstof voor 5 kilometer is } 0,0298\dots \cdot 2400 \cdot 5 \approx 359 \text{ liter.}$$

$$\text{b } Z = 0,4 \cdot 20^{-\frac{1}{3}} = 0,147\dots \text{ liter per kilogram. De totale hoeveelheid zuurstof voor 5 kilometer is } 0,1474 \cdot 20 \cdot 5 \approx 15 \text{ liter.}$$

$$\text{c } 0,08 = 0,4 \cdot L^{-\frac{1}{3}}$$

Invoer: $y_1 = 0,4x^{-\frac{1}{3}}$ en $y_2 = 0,08$
 Venster: $0 \leq x \leq 300, 0 \leq y \leq 0,2$

Opties: snijpunten

De oplossing is $x = 125$.

$$L = 125 \text{ kg}$$

$$\text{d } Z_{\text{geit}} = 0,4 \cdot L_{\text{geit}}^{-\frac{1}{3}}$$

De geit weegt 8 keer zoveel als de haas, dus

$$Z_{\text{geit}} = 0,4 \cdot (8 \cdot L_{\text{haas}})^{-\frac{1}{3}}$$

$$Z_{\text{geit}} = 0,4 \cdot (8)^{-\frac{1}{3}} \cdot L_{\text{haas}}^{-\frac{1}{3}}$$

$$Z_{\text{geit}} = 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,4 \cdot L_{\text{haas}}^{-\frac{1}{3}}$$

$$Z_{\text{geit}} = 8^{-\frac{1}{3}} \cdot Z_{\text{haas}}$$

$$Z_{\text{geit}} = \frac{1}{2} \cdot Z_{\text{haas}}$$

De haas verbruikt om 1 kilometer af te leggen $Z_{\text{haas}} \cdot L_{\text{haas}}$ liter zuurstof.

De geit verbruikt om 1 kilometer af te leggen

$$Z_{\text{geit}} \cdot L_{\text{geit}} = Z_{\text{geit}} \cdot (8 \cdot L_{\text{haas}}) = \frac{1}{2} \cdot Z_{\text{haas}} \cdot (8 \cdot L_{\text{haas}}) = 4 \cdot Z_{\text{haas}} \cdot L_{\text{haas}} \text{ liter zuurstof.}$$

De geit gebruikt 4 keer zoveel zuurstof als de haas.

$$\text{e } TZ = Z \cdot L = 0,4 \cdot L^{-\frac{1}{3}} \cdot L = 0,4 \cdot L^{-\frac{1}{3}} \cdot L^1 = 0,4 \cdot L^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{f } TZ = 0,4 \cdot 0,032^{\frac{2}{3}} \approx 0,04 \text{ liter}$$

Voor 100 meter heeft de hazelmuis $0,04 : 10 = 0,004$ liter zuurstof nodig.

$$022 \text{ a } \text{De rekenregel } \sqrt{g} = g^{0,5} \text{ is gebruikt, want voor } \sqrt{p} \text{ is in de noemer van de breuk } p^{0,5} \text{ geschreven.}$$

$$\text{b } \text{In stap 2 is de rekenregel } g^a \cdot g^b = g^{a+b} \text{ gebruikt, want voor } p^4 \cdot p^{1,5} \text{ is in de teller van de breuk } p^{5,5} \text{ geschreven.}$$

$$\text{In stap 3 is de rekenregel } \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b} \text{ gebruikt, want de breuk } \frac{p^{5,5}}{p^{0,5}} \text{ is vervangen voor } p^5.$$

$$\text{c } \text{In stap 4 heeft ze twee termen samengenomen, namelijk } p^5 + p^5 = 2p^5.$$

4 Machtsfuncties

$$\begin{aligned} \text{d } K(q) &= \frac{q^2 \cdot q^{0,5}}{q} - (q^{1,5})^2 \cdot q - q^{-2} \cdot q^{3,5} \\ K(q) &= \frac{q^{2,5}}{q} - q^3 \cdot q - q^{-2} \cdot q^{3,5} \\ K(q) &= q^{1,5} - q^4 - q^{1,5} \\ K(q) &= -q^4 \end{aligned}$$

U5 a Voor egels geldt $c = 7,5$ en wordt de formule $H = 7,5 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.

Er geldt $G_{\text{volwassen}} = 3 \cdot G_{\text{egel zes weken oud}}$

$$H_{\text{volwassen}} = 7,5 \cdot (3 \cdot G_{\text{egel zes weken oud}})^{\frac{2}{3}}$$

$$H_{\text{volwassen}} = 7,5 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot G_{\text{egel zes weken oud}}^{\frac{2}{3}}$$

$$H_{\text{volwassen}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 7,5 \cdot G_{\text{egel zes weken oud}}^{\frac{2}{3}}$$

$$H_{\text{volwassen}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot H_{\text{egel zes weken oud}}$$

$$3^{\frac{2}{3}} = 2,08\dots$$

De huidoppervlakte van een volwassen egel is ruim 2 keer zo groot.

b Voor de mens geldt $c = 11,2$ en wordt de formule $H = 11,2 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.

$$H = (11,2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (G^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$H = (11,2^3 \cdot G^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$H = \sqrt[3]{11,2^3 \cdot G^2}$$

$$a = 11,2^3 \approx 1405, \quad b = 2 \text{ en } p = 3$$

4.4 Machtsformules herleiden

intro $H = 0,0463 \cdot 190^{0,725} = 2,078\dots$

$$190 = 69,3636 \cdot H^{1,379}$$

$$H^{1,379} = \frac{190}{69,3636}$$

$$H = \sqrt[1,379]{\frac{190}{69,3636}} = 2,076\dots$$

De formules geven voor een man van 1,90 meter vrijwel dezelfde huidoppervlakte.

26 a $2a^6 = -9$

$$a^6 = -4\frac{1}{2}$$

Deze vergelijking heeft geen oplossingen omdat de uitkomst van een macht met een even exponent altijd groter of gelijk aan nul is.

b c

A $x^5 = 32$

5 is een oneven getal, dus er is één oplossing.

$x = 32^{\frac{1}{5}} = 2$

B $q^4 + 17 = 18$

$q^4 = 1$

4 is een even getal, dus er zijn twee oplossingen.

$q = 1^{\frac{1}{4}} = 1$ of $q = -1$

C $p^2 = 20$

2 is een even getal, dus er zijn twee oplossingen.

$p = \sqrt{20} \approx 4,47$ of $p \approx -4,47$

D $y^3 = -12$

3 is een oneven getal, dus er is één oplossing.

$y = (-12)^{\frac{1}{3}} \approx -2,29$

27 a Aan de linkerkant van het gelijkteken houd je na machtsverheffen en vereenvoudigen $(x^{-5})^{-\frac{1}{5}} = x^{-5 \cdot -\frac{1}{5}} = x^1 = x$ over.

b $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 7^{\frac{3}{2}}$ dus is $x = 7^{\frac{3}{2}} \approx 18,52$.

28 a Vanwege de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$ krijgt ze dan links van het gelijkteken

$(x^{1,7})^{\frac{1}{1,7}} = x^{1,7 \cdot \frac{1}{1,7}} = x^1 = x$

b $x = 10^{\frac{1}{1,7}} \approx 3,87$

29 a $w^{0,42} = 6$

$w = 6^{\frac{1}{0,42}} \approx 71,24$

b $p^{-4,1} = 0,2$

$p = 0,2^{-\frac{1}{4,1}} \approx 1,48$

c $x^{1,25} = 0,3$

$x = 0,3^{\frac{1}{1,25}} \approx 0,38$

d $-3 \cdot t^{-0,13} = 2,15$

$t^{-0,13} = -0,7166\dots$

geen oplossingen

e $7 \cdot q^{2,357} = 5$

$q^{2,357} = \frac{5}{7}$

$q = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{2,357}} \approx 0,87$

f $2 + x^{4,1} = 7,3$

$x^{4,1} = 5,3$

$x = 5,3^{\frac{1}{4,1}} \approx 1,50$

30 a $P = 2 \cdot 10^{0,2} \approx 3,17$

b $18 = 2 \cdot a^{0,2}$

$2 \cdot a^{0,2} = 18$ linker- en rechterkant verwisseld

$a^{0,2} = 9$ links en rechts gedeeld door 2

$a = 9^{\frac{1}{0,2}} = 59049$ links en rechts tot de macht $\frac{1}{0,2}$ verheven

c In stap 2 wordt links en rechts gedeeld door 2.**d** In stap 4 is de rekenregel $(p \cdot q)^c = p^c \cdot q^c$ toegepast.**31 a** In stap 1 zijn de linker- en rechterkant verwisseld.

In stap 2 is links en rechts gedeeld door 10.

b In stap 3 is de regel 'uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$ ' toegepast.

c $q = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{1,25}} \cdot p^{\frac{1}{1,25}} \approx 0,16 \cdot p^{0,8}$

4 Machtsfuncties

32 a $P = Q^{\frac{1}{4}}$

$$Q^{\frac{1}{4}} = P$$

$$Q = (1 \cdot P)^4 = 1^4 \cdot P^4 = 1 \cdot P^4$$

b $P = 25 \cdot Q^{3,5}$

$$25 \cdot Q^{3,5} = P$$

$$Q^{3,5} = \frac{1}{25} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{25} \cdot P\right)^{\frac{1}{3,5}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3,5}} \cdot P^{\frac{1}{3,5}} \approx 0,40 \cdot P^{0,29}$$

c $P = \frac{12}{Q\sqrt{Q}} = \frac{12}{Q^1 \cdot Q^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{Q^{\frac{3}{2}}} = 12 \cdot Q^{-1\frac{1}{2}} = 12 \cdot Q^{-\frac{3}{2}}$

$$12 \cdot Q^{-\frac{3}{2}} = P$$

$$Q^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{12} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{12} \cdot P\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{12}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot P^{-\frac{2}{3}} \approx 5,24 \cdot P^{-0,67}$$

d $P = 5 \cdot Q\sqrt[3]{Q} = 5 \cdot Q^1 \cdot Q^{\frac{1}{3}} = 5 \cdot Q^{\frac{4}{3}} = 5 \cdot Q^{\frac{4}{3}}$

$$5 \cdot Q^{\frac{4}{3}} = P$$

$$Q^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{5} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{5} \cdot P\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot P^{\frac{3}{4}} \approx 0,30 \cdot P^{0,75}$$

e $P = 1,46 \cdot Q^{-0,8}$

$$1,46 \cdot Q^{-0,8} = P$$

$$Q^{-0,8} = \frac{1}{1,46} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{1,46} \cdot P\right)^{-\frac{1}{0,8}} = \left(\frac{1}{1,46}\right)^{-\frac{1}{0,8}} \cdot P^{-\frac{1}{0,8}} \approx 1,60 \cdot P^{-1,25}$$

f $P = \frac{4}{Q\sqrt[5]{Q}} = \frac{4}{Q^1 \cdot Q^{\frac{1}{5}}} = \frac{4}{Q^{\frac{6}{5}}} = 4 \cdot Q^{-1\frac{1}{5}} = 4 \cdot Q^{-\frac{6}{5}}$

$$4 \cdot Q^{-\frac{6}{5}} = P$$

$$Q^{-\frac{6}{5}} = \frac{1}{4} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{4} \cdot P\right)^{-\frac{5}{6}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{6}} \cdot P^{-\frac{5}{6}} \approx 3,17 \cdot P^{-0,83}$$

33 a 750 gram = 0,75 kg

$$0,75 = 0,012 \cdot L^{0,67}$$

$$L^{0,67} = \frac{0,75}{0,012}$$

$$L = \left(\frac{0,75}{0,012}\right)^{\frac{1}{0,67}} = 479,09\dots$$

Het gemiddelde lichaamsgewicht van een giraffe is ongeveer 479 kg.

b $H = 0,012 \cdot L^{0,67}$

$$0,012 \cdot L^{0,67} = H$$

$$L^{0,67} = \frac{1}{0,012} \cdot H$$

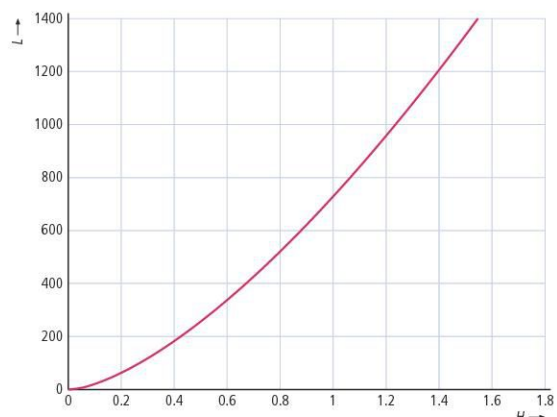
$$L = \left(\frac{1}{0,012} \cdot H\right)^{\frac{1}{0,67}} = \left(\frac{1}{0,012}\right)^{\frac{1}{0,67}} \cdot H^{\frac{1}{0,67}} = 736,026\dots \cdot H^{1,492}$$

$p \approx 736,03$ en $q \approx 1,49$

c Invoer: $y_1 = 736,03 \cdot x^{1,49}$

Venster: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1500$

In de grafiek zie je dat het hersengewicht van een bruine beer bij een toename van 10 kg minder toeneemt dan het hersengewicht van een vos bij een toename van 10 kg. Het verschil is dus het grootst bij de ree en de vos.



029 a In stap 1 is er aan beide kanten van het gelijkteken 10 afgetrokken.

b In stap 2 is er aan beide kanten van het gelijkteken gedeeld door 3.

c $x = 4^{\frac{1}{12}} \approx 3,17$

d $k^{0,35} = 3$
 $k = 3^{\frac{1}{0,35}} \approx 23,08$

f $-2 \cdot q^{-4,13} = 19$

$q^{-4,13} = -9,5$

geen oplossingen

e $p^{2,25} = 4,8$

$p = 4,8^{\frac{1}{2,25}} \approx 2,01$

g $7 + t^{3,9} = 18,7$

$t^{3,9} = 11,7$

$t = 11,7^{\frac{1}{3,9}} \approx 1,88$

032 a In stap 2 is aan beide kanten van het gelijkteken vermenigvuldigd met 2 of gedeeld door een 0,5.

b $Q = (2 \cdot P)^{\frac{1}{0,4}} = (2 \cdot P)^{2,5}$

c $Q = 2^{2,5} \cdot P^{2,5}$

$Q = 5,656... \cdot P^{2,5}$

$a \approx 5,66$ en $b = 2,5$

d $P = Q^{\frac{1}{5}}$
 $Q^{\frac{1}{5}} = P$

$Q = (1 \cdot P)^5 = 1^5 \cdot P^5 = 1 \cdot P^5$

e $P = 20 \cdot Q^{2,5}$

$20 \cdot Q^{2,5} = P$

$Q^{2,5} = \frac{1}{20} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{20} \cdot P\right)^{\frac{1}{2,5}} = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{2,5}} \cdot P^{\frac{1}{2,5}} \approx 0,30 \cdot P^{0,4}$

f $P = \frac{2}{Q^{0,4}}$

$Q^{0,4} \cdot P = 2$

$Q^{0,4} = 2 \cdot P^{-1}$

$Q = (2 \cdot P^{-1})^{\frac{1}{0,4}} = (2)^{\frac{1}{0,4}} \cdot P^{-1 \cdot \frac{1}{0,4}} \approx 5,66 \cdot P^{-2,5}$

g $P = 0,5 \cdot Q^{\frac{1}{3}} = 0,5 \cdot Q^{\frac{5}{3}}$

$0,5 \cdot Q^{\frac{5}{3}} = P$

$Q^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{0,5} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{0,5} \cdot P\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{0,5}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot P^{\frac{3}{5}} \approx 1,52 \cdot P^{0,6}$

h $P = 1,4 \cdot Q^{-0,6}$

$1,4 \cdot Q^{-0,6} = P$

$Q^{-0,6} = \frac{1}{1,4} \cdot P$

$Q = \left(\frac{1}{1,4} \cdot P\right)^{-\frac{1}{0,6}} = \left(\frac{1}{1,4}\right)^{-\frac{1}{0,6}} \cdot P^{-\frac{1}{0,6}} \approx 1,75 \cdot P^{-1,67}$

i $P = \frac{100}{Q^{\frac{1}{3}}} = \frac{100}{Q \cdot Q^{\frac{1}{3}}} = \frac{100}{Q^{\frac{4}{3}}} = 100 \cdot Q^{-\frac{1}{3}}$

$100 \cdot Q^{-\frac{1}{3}} = P$

$Q^{-\frac{1}{3}} = 0,01 \cdot P$

$Q = (0,01 \cdot P)^{-\frac{3}{1}} = (0,01)^{-\frac{3}{1}} \cdot P^{-\frac{3}{1}} \approx 31,62 \cdot P^{-0,75}$

4 Machtsfuncties

- U6 a** $Q_{\text{nieuw}} = 30 \cdot (2 \cdot K_{\text{oud}})^{0,7} \cdot A^{0,5}$
 $Q_{\text{nieuw}} = 30 \cdot 2^{0,7} \cdot K_{\text{oud}}^{0,7} \cdot A^{0,5}$
 $Q_{\text{nieuw}} = 2^{0,7} \cdot 30 \cdot K_{\text{oud}}^{0,7} \cdot A^{0,5}$
 $Q_{\text{nieuw}} = 2^{0,7} \cdot Q_{\text{oud}}$
 $2^{0,7} \approx 1,62$, de jaarproductie neemt dan met ongeveer 62% toe.
- b** $30\,000 = 30 \cdot K^{0,7} \cdot A^{0,5}$
 $1000 = K^{0,7} \cdot A^{0,5}$
 $K^{0,7} \cdot A^{0,5} = 1000$
 $A^{0,5} = \frac{1000}{K^{0,7}}$
 $A = \left(\frac{1000}{K^{0,7}}\right)^{\frac{1}{0,5}} = \left(\frac{1000}{K^{0,7}}\right)^2 = \left(\frac{10^3}{K^{0,7}}\right)^2 = \frac{(10^3)^2}{(K^{0,7})^2} = \frac{10^6}{K^{1,4}}$
- c** De jaarproductie blijft gelijk, dus geldt
 $30 \cdot K_{\text{nieuw}}^{0,7} \cdot A_{\text{nieuw}}^{0,5} = 30 \cdot K_{\text{oud}}^{0,7} \cdot A_{\text{oud}}^{0,5}$
 $K_{\text{nieuw}}^{0,7} \cdot A_{\text{nieuw}}^{0,5} = K_{\text{oud}}^{0,7} \cdot A_{\text{oud}}^{0,5}$
 Er geldt $K_{\text{nieuw}} = 5 \cdot K_{\text{oud}}$.
 $(5 \cdot K_{\text{oud}})^{0,7} \cdot A_{\text{nieuw}}^{0,5} = K_{\text{oud}}^{0,7} \cdot A_{\text{oud}}^{0,5}$
 $5^{0,7} \cdot K_{\text{oud}}^{0,7} \cdot A_{\text{nieuw}}^{0,5} = K_{\text{oud}}^{0,7} \cdot A_{\text{oud}}^{0,5}$
 $5^{0,7} \cdot A_{\text{nieuw}}^{0,5} = A_{\text{oud}}^{0,5}$
 $A_{\text{nieuw}}^{0,5} = \frac{1}{5^{0,7}} \cdot A_{\text{oud}}^{0,5}$
 $A_{\text{nieuw}} = \left(\frac{1}{5^{0,7}}\right)^2 \cdot (A_{\text{oud}}^{0,5})^2 = 0,1050... \cdot A_{\text{oud}}$
 Er is nog maar ongeveer 10,5% van het oude aantal werknemers nodig.

4.5 Gemengde opdrachten

- 34 a** $A(t) = \frac{2t^3}{3t} + t^{-5} \cdot t^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3}{t} + t^{-5} \cdot t^3 = \frac{2}{3} \cdot t^2 + t^{-2} = \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{t^2}$
- b** $Q(d) = 2d^{-3} \cdot 5d^4 \cdot (2d^{-2})^5 = 2d^{-3} \cdot 5d^4 \cdot (2)^5 \cdot (d^{-2})^5 = 2d^{-3} \cdot 5d^4 \cdot 32 \cdot d^{-10} =$
 $320d^{-9} = 320 \cdot \frac{1}{d^9} = \frac{320}{d^9}$
- c** $P(a) = \sqrt[5]{a^2} \cdot a \sqrt[3]{a^7} + a^3 + \frac{2a^5}{a^2} = a^{\frac{2}{5}} \cdot a \cdot a^{\frac{7}{3}} + a^3 + 2a^3 = a^{3\frac{11}{15}} + 3a^3$
- d** $K(p) = \frac{p^3 \cdot p \sqrt{p}}{p^2} + (3p^3)^2 = \frac{p^3 \cdot p \cdot p^{0,5}}{p^2} + (3)^2(p^3)^2 =$
 $\frac{p^{4,5}}{p^2} + 9p^6 = p^{2,5} + 9p^6$
- 35 a** $Q = 0,1 \cdot G^{0,67} = 0,1 \cdot 360\,000^{0,67} = 528,1...$
 Het vleugeloppervlak van een Boeing 747 is ongeveer 528 m².
- b** $Q = 0,1 \cdot G^{0,67}$
 $0,1 \cdot G^{0,67} = Q$
 $G^{0,67} = 10 \cdot Q$
 $G = (10 \cdot Q)^{\frac{1}{0,67}} = (10)^{\frac{1}{0,67}} \cdot Q^{\frac{1}{0,67}} = 31,084... \cdot Q^{1,492...}$
 $a \approx 31,08$ en $b \approx 1,49$
- c** $350 = 0,1 \cdot G^{0,67}$
 $0,1 \cdot G^{0,67} = 350$
 $G^{0,67} = 3500$
 $G = 3500^{\frac{1}{0,67}} \approx 194\,829$
 Het draagvermogen van dit vliegtuig is 194 829 kg.
 Er mag maximaal $194\,829 - 150\,000 = 44\,829$ kg vracht mee.

36 a $4329 = c \cdot 778^{1,5}$

$$c = \frac{4329}{778^{1,5}} \approx 0,2$$

b $88 = 0,2 \cdot A^{1,5}$

$$0,2 \cdot A^{1,5} = 88$$

$$A^{1,5} = \frac{88}{0,2}$$

$$A = \left(\frac{88}{0,2}\right)^{\frac{1}{1,5}} = 57,8 \dots$$

De afstand van Mercurius tot de zon is ongeveer 57,8 miljoen km.

c $365 = 0,2 \cdot A^{1,5}$

$$0,2 \cdot A^{1,5} = 365$$

$$A^{1,5} = \frac{365}{0,2}$$

$$A = \left(\frac{365}{0,2}\right)^{\frac{1}{1,5}} = 149,3 \dots$$

De afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 149,3 miljoen km.

d $T = 0,2 \cdot A^{1,5}$

$$0,2 \cdot A^{1,5} = T$$

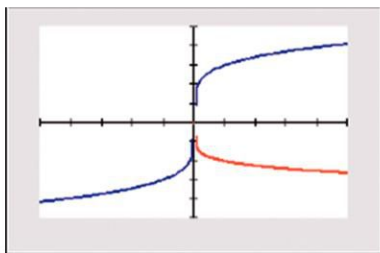
$$A^{1,5} = \frac{1}{0,2} \cdot T$$

$$A = \left(\frac{1}{0,2} \cdot T\right)^{\frac{1}{1,5}} = \left(\frac{1}{0,2}\right)^{\frac{1}{1,5}} \cdot T^{\frac{1}{1,5}} = 2,924 \dots \cdot T^{0,666 \dots}$$

$$p \approx 2,92 \text{ en } q \approx 0,67$$

37 a Invoer: $y_1 = 3x^{1/5}$ en $y_2 = -2\sqrt[6]{x}$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$



b Beide grafieken hebben één snijpunt met de lijn $y = -50$.

c $p(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{5}} \cdot -2 \cdot \sqrt[6]{x} = 3 \cdot -2 \cdot x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = -6x^{\frac{11}{30}}$

Onderzoeksoopdrachten

38 $50 = 40 \cdot A^{\frac{1}{6}}$

$$A^{\frac{1}{6}} = \frac{50}{40} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$A = 1,25^6 = 3,81 \dots$$

De oppervlakte van een gebied met 50 vogelsoorten is ongeveer 3,8 vierkante mijl.

$$100 = 40 \cdot A^{\frac{1}{6}}$$

$$A^{\frac{1}{6}} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$A = 2,5^6 = 244,14 \dots$$

De oppervlakte van een gebied met 100 vogelsoorten is ongeveer 244,1 vierkante mijl.

Het gebied moet $244,14 \dots : 3,81 \dots = 64$ keer zo groot worden.

4 Machtsfuncties

39 Er geldt $R_{\text{nieuw}} = 1,2 \cdot R_{\text{oud}}$
 $V_{\text{nieuw}} = p \cdot R_{\text{nieuw}}^4$
 $V_{\text{nieuw}} = p \cdot (1,2 \cdot R_{\text{oud}})^4$
 $V_{\text{nieuw}} = p \cdot (1,2)^4 \cdot R_{\text{oud}}^4$
 $V_{\text{nieuw}} = (1,2)^4 \cdot p \cdot R_{\text{oud}}^4$
 $V_{\text{nieuw}} = (1,2)^4 \cdot V_{\text{oud}}$

Onafhankelijk van p wordt de hoeveelheid vloeistof $1,2^4 = 2,0736$ keer zo groot. Dat is een toename van $207,36 - 100 = 107,36$ procent.

40 Er geldt $h_{\text{vader}} = 2 \cdot h_{\text{dochter}}$ en $v_{\text{vader}} = v_{\text{dochter}}$
 $0,78 \cdot 0,85^{1,67} \cdot h_{\text{vader}}^{-1,16} = 0,78 \cdot s_{\text{dochter}}^{1,67} \cdot h_{\text{dochter}}^{-1,16}$
 $0,78 \cdot 0,85^{1,67} \cdot (2 \cdot h_{\text{dochter}})^{-1,16} = 0,78 \cdot s_{\text{dochter}}^{1,67} \cdot h_{\text{dochter}}^{-1,16}$
 $0,78 \cdot 0,85^{1,67} \cdot 2^{-1,16} \cdot h_{\text{dochter}}^{-1,16} = 0,78 \cdot s_{\text{dochter}}^{1,67} \cdot h_{\text{dochter}}^{-1,16}$
 $0,85^{1,67} \cdot 2^{-1,16} \cdot 0,78 \cdot h_{\text{dochter}}^{-1,16} = s_{\text{dochter}}^{1,67} \cdot 0,78 \cdot h_{\text{dochter}}^{-1,16}$
 $0,85^{1,67} \cdot 2^{-1,16} = s_{\text{dochter}}^{1,67}$ (links en rechts gedeeld door $0,78 \cdot h_{\text{dochter}}^{-1,16}$)
 $s_{\text{dochter}}^{1,67} = 0,85^{1,67} \cdot 2^{-1,16}$
 $s_{\text{dochter}} = (0,85^{1,67} \cdot 2^{-1,16})^{\frac{1}{1,67}} = 0,5251 \dots$

De dochter moet passen van ongeveer 53 cm maken om haar vader bij te houden.

Samenvatting

S1 a $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ d $3x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$
b $p^{-2} \cdot p^5 \cdot p^{-8} = p^{-5} = \frac{1}{p^5}$ e $4x^{\frac{4}{5}} = 4\sqrt[5]{x^4}$
c $7x^{-3} = 7 \cdot x^{-3} = 7 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{7}{x^3}$ f $4a^{-\frac{2}{3}} = 4 \cdot \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}}$

S2 a $f(t) = t^4 \cdot t = t^5$
b $A(p) = p^{1,5} \cdot \frac{1}{p^{5,2}} = p^{1,5} \cdot p^{-5,2} = p^{-3,7}$
c $K(q) = (q^{2,1})^4 \cdot q^{1,7} \cdot (q^3)^{0,2} = q^{8,4} \cdot q^{1,7} \cdot q^{0,6} = q^{10,7}$
d $W(a) = \frac{a^3 \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a^3 \cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{2\frac{3}{4}}$

S3 a $\frac{18x^3}{9x^5} = \frac{18}{9} \cdot \frac{x^3}{x^5} = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$
b $6 \cdot x^{-3} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 6x^{-3\frac{1}{2}} = \frac{6}{x^{3\frac{1}{2}}}$ ofwel $\frac{6}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$
c $\frac{24x^{4,3}}{9x \cdot 4x^{-7,6}} = \frac{24x^{4,3}}{36x^{-6,6}} = \frac{2}{3} \cdot x^{4,3 - -6,6} = \frac{2}{3} \cdot x^{10,9}$
d $\frac{13}{x^{-9}} = 13 \cdot \frac{1}{x^{-9}} = 13x^9$

S4 a $3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{81}$

b $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$

c $5^{1\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{2\frac{1}{6}} = 5^2 \cdot \sqrt[6]{5} = 25 \cdot \sqrt[6]{5}$

d $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{2\frac{1}{6}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^2 \cdot \sqrt{a}$

S5 a $3x^4 + 1 = 19$

$$3x^4 = 18$$

$$x^4 = 6$$

$$x = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6} \approx 1,57 \text{ of } x = -\sqrt[4]{6} \approx -1,57$$

b $2x^{-3} = \frac{1}{32}$

$$x^{-3} = \frac{1}{64}$$

$$x = \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} = 4$$

c $x^{\frac{2}{5}} = 3$

$$x^2 = 3^5 = 243$$

$$x = 243^{\frac{1}{2}} = \sqrt{243} \approx 15,59 \text{ of}$$

$$x = -\sqrt{243} \approx -15,59$$

d $18 + 5x^{1,37} = 63$

$$5x^{1,37} = 45$$

$$x^{1,37} = 9$$

$$x = 9^{\frac{1}{1,37}} \approx 4,97$$

e $8x^3 - 1 = 0$

$$8x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

f $4x\sqrt{x} = 11$

$$4x \cdot x^{0,5} = 11$$

$$x^{1,5} = 2,75$$

$$x = 2,75^{\frac{1}{1,5}} \approx 1,96$$

S6 a $P = 0,25 \cdot q^3$

$$0,25 \cdot q^3 = P$$

$$q^3 = \frac{1}{0,25} \cdot P = 4 \cdot P$$

$$q = (4 \cdot P)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot P^{\frac{1}{3}} \approx 1,59 \cdot P^{0,33}$$

b $P = 0,02 \cdot q^{3,6}$

$$0,02 \cdot q^{3,6} = P$$

$$q^{3,6} = \frac{1}{0,02} \cdot P = 50 \cdot P$$

$$q = (50 \cdot P)^{\frac{1}{3,6}} = 50^{\frac{1}{3,6}} \cdot P^{\frac{1}{3,6}} \approx 2,96 \cdot P^{0,28}$$

c $P = 25 \cdot q^{-0,8}$

$$25 \cdot q^{-0,8} = P$$

$$q^{-0,8} = \frac{1}{25} \cdot P$$

$$q = \left(\frac{1}{25} \cdot P\right)^{-\frac{1}{0,8}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{0,8}} \cdot P^{-\frac{1}{0,8}} \approx 55,90 \cdot P^{-1,25}$$

d $P = 7,8 \cdot q^{-0,35}$

$$7,8 \cdot q^{-0,35} = P$$

$$q^{-0,35} = \frac{1}{7,8} \cdot P$$

$$q = \left(\frac{1}{7,8} \cdot P\right)^{-\frac{1}{0,35}} = \left(\frac{1}{7,8}\right)^{-\frac{1}{0,35}} \cdot P^{-\frac{1}{0,35}} \approx 353,87 \cdot P^{-2,86}$$

4 Machtsfuncties

Test jezelf

$$\text{T1 a } K(x) = \frac{x^5 \cdot x^2}{x^4}$$

$$K(x) = \frac{x^7}{x^4}$$

$$K(x) = x^3$$

$$\text{b } F(p) = \frac{4p^5}{2p^4 \cdot p}$$

$$F(p) = \frac{4}{2} \cdot \frac{p^5}{p^5}$$

$$F(p) = 2$$

$$\text{c } Q(t) = 3t^3 \cdot 2t^{-4} \cdot (5t^4)^2$$

$$Q(t) = 3t^3 \cdot 2t^{-4} \cdot 5^2 \cdot (t^4)^2$$

$$Q(t) = 3t^3 \cdot 2t^{-4} \cdot 25 \cdot t^8$$

$$Q(t) = 3 \cdot 2 \cdot 25 \cdot t^3 \cdot t^{-4} \cdot t^8$$

$$Q(t) = 150t^7$$

$$\text{T2 a } 2x^2 \cdot 7x^{-4} = 14 \cdot x^{-2} = \frac{14}{x^2}$$

$$\text{b } x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$$

$$\text{c } 3x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\text{T3 a } x^5 = 8$$

$$x = 8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8} \approx 1,52$$

$$\text{b } 4 + y^{0,2} = 6$$

$$y^{0,2} = 2$$

$$y = 2^{\frac{1}{0,2}} = 2^5 = 32$$

$$\text{c } p^{\frac{1}{4}} = 10$$

$$p = 10^4 = 10000$$

$$\text{d } B(x) = \frac{5x^9}{x^7} + x^3 \cdot x^{-2}$$

$$B(x) = 5x^2 + x$$

$$\text{e } W(a) = \sqrt[3]{a^5} \cdot a^3 \cdot \sqrt{a} + \frac{a^5}{4\sqrt{a}}$$

$$W(a) = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} + \frac{a^5}{4 \cdot a^{\frac{1}{2}}}$$

$$W(a) = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} a^{4\frac{1}{2}}$$

$$W(a) = a^{5\frac{1}{6}} + \frac{1}{4} a^{4\frac{1}{2}}$$

$$\text{f } Z(t) = \frac{(2 \cdot t^2 \cdot \sqrt[5]{t})^3}{t^4} + 5(3t^2)^3$$

$$Z(t) = \frac{(2 \cdot t^{2\frac{1}{5}})^3}{t^4} + 5 \cdot 3^3 \cdot (t^2)^3$$

$$Z(t) = \frac{2^3 \cdot (t^{2\frac{1}{5}})^3}{t^4} + 5 \cdot 27 \cdot t^6$$

$$Z(t) = \frac{8 \cdot t^{6\frac{3}{5}}}{t^4} + 135t^6$$

$$Z(t) = 8t^{2\frac{3}{5}} + 135t^6$$

$$\text{d } x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$$

$$\text{e } 2x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-1} = 2 \cdot x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$\text{f } 6x^3 \cdot x^{-1\frac{1}{2}} = 6 \cdot x^{1\frac{1}{2}} = 6x \cdot \sqrt{x}$$

$$\text{d } 3z^{\frac{2}{3}} = 12$$

$$z^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$z = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$\text{e } 5a^{2,67} = 17$$

$$a^{2,67} = \frac{17}{5}$$

$$a = \left(\frac{17}{5}\right)^{\frac{1}{2,67}} \approx 1,58$$

$$\text{f } 13 - 6 \cdot p^{1,25} = 1$$

$$6p^{1,25} = 12$$

$$p^{1,25} = 2$$

$$p = 2^{\frac{1}{1,25}} \approx 1,74$$

T4 a Over 5 km doet de vis $\frac{5}{2} = 2,5$ uur.

$$E = 0,15 \cdot 2^3 \cdot 2,5 = 3$$

Een vis verbruikt dan 3 joules.

b 30 minuten is $\frac{1}{2}$ uur.

$$2 = 0,15 \cdot v^3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$0,15 \cdot v^3 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$v^3 = \frac{2}{0,15 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$v = \left(\frac{2}{0,15 \cdot \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = 2,987 \dots$$

De vis zwemt ongeveer 3 km per uur.

c $E = 0,15 \cdot v^3 \cdot 1$

$$0,15 \cdot v^3 = E$$

$$v^3 = \frac{1}{0,15} \cdot E$$

$$v = \left(\frac{1}{0,15} \cdot E \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{0,15} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot E^{\frac{1}{3}} \approx 1,88 \cdot \sqrt[3]{E}$$

T5 a $A = B^6$

$$B^6 = A$$

$$B = (1 \cdot A)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} \cdot A^{\frac{1}{6}} \approx 1 \cdot A^{0,17}$$

b $A = 4 \cdot B^{-\frac{3}{5}}$

$$4 \cdot B^{-\frac{3}{5}} = A$$

$$B^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{4} \cdot A$$

$$B = \left(\frac{1}{4} \cdot A \right)^{-\frac{5}{3}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{-\frac{5}{3}} \cdot A^{-\frac{5}{3}} \approx 10,08 \cdot A^{-1,67}$$

c $A = 5 \cdot B^{0,81}$

$$5 \cdot B^{0,81} = A$$

$$B^{0,81} = \frac{1}{5} \cdot A$$

$$B = \left(\frac{1}{5} \cdot A \right)^{\frac{1}{0,81}} = \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{0,81}} \cdot A^{\frac{1}{0,81}} \approx 0,14 \cdot A^{1,23}$$

d $A = 8 \sqrt[7]{B^5} = 8 \cdot B^{\frac{5}{7}}$

$$8 \cdot B^{\frac{5}{7}} = A$$

$$B^{\frac{5}{7}} = \frac{1}{8} \cdot A$$

$$B = \left(\frac{1}{8} \cdot A \right)^{\frac{7}{5}} = \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{7}{5}} \cdot A^{\frac{7}{5}} \approx 0,05 \cdot A^{1,4}$$

T6 a $V_{1900} = 0,00154 \cdot 5,1^{4,3} \approx 1,70$

$$V_{1940} = 0,00154 \cdot 8,8^{4,3} \approx 17,73$$

$$V_{1980} = 0,00154 \cdot 14,1^{4,3} \approx 134,63$$

De formule geeft weinig afwijking van de waarden in de tabel.

b $V = 0,00154 \cdot 15,6^{4,3} = 207,948 \dots$

Het personenvervoer in het jaar 2000 bedroeg ongeveer 208 miljard reizigerskilometers.

4 Machtsfuncties

$$\begin{aligned}
 c \quad B_{\text{nieuw}} &= 2 \cdot B_{\text{oud}} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 0,00154 \cdot B_{\text{nieuw}}^{4,3} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 0,00154 \cdot (2 \cdot B_{\text{oud}})^{4,3} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 0,00154 \cdot 2^{4,3} \cdot B_{\text{oud}}^{4,3} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 2^{4,3} \cdot 0,00154 \cdot B_{\text{oud}}^{4,3} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 2^{4,3} \cdot V_{\text{oud}} \\
 V_{\text{nieuw}} &= 19,698... \cdot V_{\text{oud}}
 \end{aligned}$$

Het personenvervoer wordt dus ongeveer 19,7 keer zo groot.

- T7 a** Noem x de verhouding tussen twee opeenvolgende tonen.
 In de tabel kun je zien dat er 12 opeenvolgende tonen in een octaaf zitten.
 Bij een octaaf verdubbelt de frequentie, dus moet gelden $x^{12} = 2$.
 De verhouding x is dus $x = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$.
- b** Links van de toon a wordt de frequentie steeds gedeeld door $\sqrt[12]{2}$, en rechts van de toon a steeds vermenigvuldigd met $\sqrt[12]{2}$.

toon	c	des	d	es	e	f	fis
frequentie	261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370,0
toon	g	as	a	bes	b	c	
frequentie	392,0	415,3	440	466,2	493,9	523,3	

Extra oefening

$$E1 \quad a \quad 4 \cdot (2q)^{-3} = 4 \cdot (2)^{-3} \cdot q^{-3} = 4 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{1}{2q^3}$$

$$b \quad p^7 \cdot (p^{-2})^5 = p^7 \cdot p^{-10} = p^{-3} = \frac{1}{p^3}$$

$$c \quad \frac{k^2}{k^3 \cdot k^4} = \frac{k^2}{k^7} = k^{-5} = \frac{1}{k^5}$$

$$d \quad \frac{15m^4 \cdot m}{(3m)^2} = \frac{15 \cdot m^4 \cdot m^1}{3^2 \cdot m^2} = \frac{15m^5}{9m^2} = \frac{5}{3}m^3$$

$$e \quad (5a^{-3})^2 = 5^2 \cdot (a^{-3})^2 = 25 \cdot a^{-6} = 25 \cdot \frac{1}{a^6} = \frac{25}{a^6}$$

$$f \quad 7x^3 \cdot 2x^{-8} = 14x^{-5} = 14 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{14}{x^5}$$

$$g \quad \frac{w^4 \cdot w^5}{(w^4)^5} = \frac{w^9}{w^{20}} = w^{-11} = \frac{1}{w^{11}}$$

$$h \quad \frac{12b^3 \cdot b^5}{(2b^2)^3} = \frac{12 \cdot b^8}{2^3 \cdot (b^2)^3} = \frac{12 \cdot b^8}{2^3 \cdot b^6} = \frac{12}{8}b^2 = \frac{3}{2}b^2$$

$$E2 \quad a \quad x^{\frac{4}{11}} = \sqrt[11]{x^4}$$

$$b \quad 4x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}} = 4x^{-1\frac{1}{3}} = 4 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{x^{\frac{4}{3}}}$$

$$c \quad 7x^{\frac{2}{5}} = 7\sqrt[5]{x^2}$$

$$d \quad x^{-6\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{6\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^6 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^6 \sqrt{x}}$$

E3 a $2p^3 = 11$
 $p^3 = \frac{11}{2} = 5,5$
 $p = 5,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,77$

b $3t^{-2} + 4 = 9$
 $3t^{-2} = 5$
 $t^{-2} = \frac{5}{3}$
 $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 0,77$

c $25r^{0,2} = 50$
 $r^{0,2} = 2$
 $r = 2^{\frac{1}{0,2}} = 2^5 = 32$

d $x^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$
 $x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0,20$

e $7q^{0,4} = 4$
 $q^{0,4} = \frac{4}{7}$
 $q = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{0,4}} \approx 0,25$

f $x^{-0,2} = \frac{1}{5}$
 $x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{0,2}} = 3125$

g $x^{\frac{1}{3}} = -7$
 $x^{\frac{5}{3}} = -7$
 $x = (-7)^{\frac{3}{5}} \approx -3,21$

h $3x^{\frac{2}{7}} = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$
 $x^{\frac{2}{7}} = \frac{3}{2} = 1,5$
 $x = 1,5^{\frac{7}{2}} \approx 4,13$

E4 a $N = 0,25 \cdot K^5$
 $0,25 \cdot K^5 = N$
 $K^5 = \frac{1}{0,25} \cdot N$
 $K = \left(\frac{1}{0,25} \cdot N\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{0,25}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot N^{\frac{1}{5}} \approx 1,32 \cdot N^{0,2}$

b $N = \frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}}$
 $\frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}} = N$
 $K^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot N$
 $K = (2 \cdot N)^3 = 2^3 \cdot N^3 = 8 \cdot N^3$

c $N = 8 \cdot K^{2,5}$
 $8 \cdot K^{2,5} = N$
 $K^{2,5} = \frac{1}{8} \cdot N$
 $K = \left(\frac{1}{8} \cdot N\right)^{\frac{1}{2,5}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2,5}} \cdot N^{\frac{1}{2,5}} \approx 0,44 \cdot N^{0,4}$

d $N = 0,25 \cdot K^{\sqrt[5]{K}} = 0,25 \cdot K^1 \cdot K^{\frac{1}{5}} = 0,25 \cdot K^{1\frac{1}{5}} = 0,25 \cdot K^{\frac{6}{5}}$
 $0,25 \cdot K^{\frac{6}{5}} = N$
 $K^{\frac{6}{5}} = 4 \cdot N$
 $K = (4 \cdot N)^{\frac{5}{6}} = 4^{\frac{5}{6}} \cdot N^{\frac{5}{6}} \approx 3,17 \cdot N^{0,83}$

e $N = 1,2 \cdot K^{-0,3}$
 $1,2 \cdot K^{-0,3} = N$
 $K^{-0,3} = \frac{1}{1,2} \cdot N$
 $K = \left(\frac{1}{1,2} \cdot N\right)^{-\frac{1}{0,3}} = \left(\frac{1}{1,2}\right)^{-\frac{1}{0,3}} \cdot N^{-\frac{1}{0,3}} \approx 1,84 \cdot N^{-3,33}$

f $N = 2,8 \cdot K^{1,67}$
 $2,8 \cdot K^{1,67} = N$
 $K^{1,67} = \frac{1}{2,8} \cdot N$
 $K = \left(\frac{1}{2,8} \cdot N\right)^{\frac{1}{1,67}} = \left(\frac{1}{2,8}\right)^{\frac{1}{1,67}} \cdot N^{\frac{1}{1,67}} \approx 0,54 \cdot N^{0,60}$

g $N = 0,01 \cdot K^{-1\frac{1}{2}} = 0,01 \cdot K^{-\frac{3}{2}}$
 $0,01 \cdot K^{-\frac{3}{2}} = N$
 $K^{-\frac{3}{2}} = 100 \cdot N$
 $K = (100 \cdot N)^{-\frac{2}{3}} = 100^{-\frac{2}{3}} \cdot N^{-\frac{2}{3}} \approx 0,05 \cdot N^{-0,67}$

4 Machtsfuncties

$$\begin{aligned} \text{h} \quad N &= 1,2 \cdot \sqrt{K^{0,35}} = 1,2 \cdot (K^{0,35})^{0,5} = 1,2 \cdot K^{0,175} \\ 1,2 \cdot K^{0,175} &= N \\ K^{0,175} &= \frac{1}{1,2} \cdot N \\ K &= \left(\frac{1}{1,2} \cdot N\right)^{\frac{1}{0,175}} = \left(\frac{1}{1,2}\right)^{\frac{1}{0,175}} \cdot N^{\frac{1}{0,175}} \approx 0,35 \cdot N^{5,71} \end{aligned}$$

$$\text{E5 a} \quad R(t) = \frac{3t^4 + 2t - 14}{2t^2} = \frac{3t^4}{2t^2} + \frac{2t}{2t^2} - \frac{14}{2t^2} = 1,5 \cdot t^2 + 1 \cdot t^{-1} - 7 \cdot t^{-2}$$

$$\text{b} \quad N(t) = \frac{t^{-3} + 3t^3 + t^{-4} \cdot t}{t^{-1}} = \frac{t^{-3} + 3t^3 + t^{-3}}{t^{-1}} = \frac{2t^{-3} + 3t^3}{t^{-1}} = \frac{2t^{-3}}{t^{-1}} + \frac{3t^3}{t^{-1}} = 2t^{-2} + 3t^4$$

$$\text{E6 a} \quad f(x) = \frac{x^8}{x^{-2}} = x^8 \cdot \frac{1}{x^{-2}} = x^8 \cdot x^2 = x^{10}$$

$$\text{b} \quad g(x) = \frac{x\sqrt{x} \cdot x^{-2}}{x^4} = \frac{x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2}}{x^4} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^4} = x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-4} = x^{-4\frac{1}{2}}$$

$$\text{c} \quad h(x) = \frac{x^{-3} \cdot (x^5)^2}{\sqrt[4]{x^2}} = \frac{x^{-3} \cdot x^{10}}{x^{\frac{2}{4}}} = \frac{x^7}{x^{\frac{1}{2}}} = x^7 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{6\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{d} \quad j(x) &= 4x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{3x^4}{\sqrt[3]{x}} = 4x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}} - \frac{3x^4}{x^{\frac{1}{3}}} \\ j(x) &= 4x^{3\frac{2}{3}} - 3 \cdot x^4 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 4x^{3\frac{2}{3}} - 3x^{3\frac{2}{3}} = x^{3\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

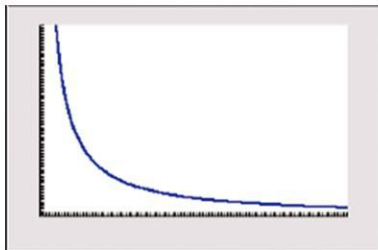
$$\text{E7 a} \quad \frac{500}{8} = 62,5, \text{ zijn gemiddelde snelheid is } 62,5 \text{ km per uur.}$$

b Je berekent de gemiddelde snelheid door de afstand van 500 km te delen door de tijd in uren.

$$\text{Je krijgt dan de formule } v = \frac{500}{t} = 500 \cdot \frac{1}{t} = 500 \cdot t^{-1}.$$

c Invoer: $y_1 = 500x^{-1}$

Venster: $0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 100$



Voor kleine waarden van t liggen de punten op de grafiek bij een hoge waarde van v en voor grote waarden van t bij een kleine waarde van v .

d Zijn gemiddelde snelheid was bijna 0 km per uur. Voor hele grote waarden van t liggen de punten op de grafiek bijna op de horizontale as ofwel is v bijna 0 km per uur.

$$\text{E8 a} \quad V = 1000 \text{ en } r = 9 : 2 = 4,5.$$

$$1000 = \pi \cdot 4,5^2 \cdot h$$

$$h = \frac{1000}{20,25\pi} = 15,71\dots$$

De hoogte van dit blik is ongeveer 15,7 cm.

$$\text{b} \quad 1000 = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$$

$$h = \frac{1000}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$h = 318,3 \cdot r^{-2}$$

5 Exponentiële functies

Voorkennis

- V1** a 60% van € 80,- = $0,6 \times € 80,- = € 48,-$
 b 51% van € 98,- = $0,51 \times € 98,- = € 49,98$
 c $2,5\%$ van € 950,- = $0,025 \times € 950,- = € 23,75$
- V2** a Je moet met $1 - 0,25 = 0,75$ vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te vinden.
 b De nieuwe prijs is $0,75 \times € 89,- = € 66,75$.
 c De prijs inclusief BTW is $1,21 \times € 39,87 = € 48,24$.
- V3** a De factor is $1 + 0,03 = 1,03$.
 b De factor is $1 + 0,007 = 1,007$.
 c De factor is $1 - 0,30 = 0,70$.
 d De factor is $1 + 2,00 = 3$.
- V4** Stel de stofzuiger kost n euro zonder korting en zonder btw.
 Methode verkoper: Prijs wordt: $n \times 0,75 \times 1,21 = 0,9075n$
 Methode Paul: $n \times 1,21 \times 0,75 = 0,9075n$
 Beide methoden leveren hetzelfde bedrag op.
- V5** a Na twee jaar is het saldo $5000 \times 1,046 \times 1,046 = € 5.470,58$.
 Na vijf jaar is het saldo $5000 \times 1,046^5 = € 6.260,78$.
 b De beginhoeveelheid is € 5.000,- en de groeifactor per jaar is $1 + 0,046 = 1,046$, dus $S = 5000 \cdot 1,046^t$.
- V6** a Het aantal neemt per uur met $100,78 - 100 = 0,78\%$ toe.
 b De groeifactor per twee uur is $1,0078^2 \approx 1,016$.
 Het aantal neemt per twee uur met $101,6 - 100 = 1,6\%$ toe.
 c De groeifactor per etmaal is $1,0078^{24} \approx 1,205$ en het groeipercentage is $120,5 - 100 = 20,5\%$.
 d De groeifactor per week is $(1,0078^{24})^7 \approx 3,689$ en groeipercentage $368,9 - 100 = 268,9\%$
- V7** a De beginhoeveelheid is 216 miljoen. De groeifactor per jaar is $1 + 0,132 = 1,132$.
 Dus is $N = 216 \cdot 1,132^t$ met t in dagen en N in miljoenen.
 b De beginhoeveelheid is 5000 ton.
 De groeifactor per jaar is $1 - 0,14 = 0,86$.
 Dus is $N = 5000 \cdot 0,86^t$ met t per jaar en N in tonnen.
 c De beginhoeveelheid is 0,87. De groeifactor per jaar is $1 - 0,0015 = 0,9985$.
 Dus is $N = 0,87 \cdot 0,9985^t$ met t in jaren en N in euro's.

5.1 Verschillende soorten groei

intro Maak maar eens tabellen van hoeveel je krijgt n maanden na de zakgeldverhoging:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
+ 3%	15	15,45	15,91	16,39	16,88	17,39	17,91	18,45	19,00	19,57
+ € 0,50	15	15,50	16	16,50	17	17,50	18	18,50	19	19,50

Het lijkt niet veel uit te maken, maar op den duur gaat de procentuele prijsverhoging toch winnen. In de tabel lees je af dat je na 8 maanden bij beide methodes 19 euro krijgt, maar de volgende maand bij de 3% verhoging € 19,57, dat is 7 cent meer dan bij de andere methode. En bijvoorbeeld na drie jaar (36 maanden) krijg je bij de eerste methode € 43,47 en bij de tweede methode € 33,-

- 1 a Omdat het steeds even hard regende vanaf 8.00 uur, komt er per tijdseenheid steeds dezelfde hoeveelheid water in de cilinder bij.
- b Van 8.10 tot 8.30 komt er in 20 minuten 9 mm bij.
Dat is dus $9 : 20 = 0,45$ mm per minuut.
- c Om 8.00 uur was de waterhoogte $11,5 - 10 \times 0,45 = 7$ mm.
- d $h = 7 + 0,45t$ met $t = 0$ is 8.00 uur.

- 2 a De groeifactor per 30,2 jaar is 0,5.
- b De groeifactor per jaar is $0,5^{\frac{1}{30,2}} \approx 0,97731$.
- c Als je begint met 100% dan is de formule waarmee je de stralingsintensiteit I kunt meten $I = 100 \cdot 0,97731^t$ met t de tijd in jaren. Je wilt weten wanneer $I = 75$. Met de rekenmachine:
Invoer: $y_1 = 100 \cdot 0,97731^x$ en $y_2 = 75$
Venster: $0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq 100$
Optie: snijpunten
Oplossing: $x \approx 12,53$. Dus na ruim 12,5 jaar is 25% verdwenen.
- d Invoer: $y_1 = 100 \cdot 0,97731^x$ en $y_2 = 0,1$
Venster: $0 \leq x \leq 500, 0 \leq y \leq 0,5$
Optie: snijpunten
Oplossing: snijpunt bij ongeveer 300,97 jaar. Dus na 301 jaar is de stralingswaarde voor het eerst onder de 0,1% van de beginwaarde.

- 3 A: lineair: $f(x) = 7 + 2x$ C: lineair: $R(t) = 4 + 1,5t$
B: exponentieel: $B(w) = 5 \cdot 0,8^w$ D: exponentieel: $A(d) = 10 \cdot 1,2^d$

- 4 a $0,7 \times 1,4^5 \approx 3,8$, dus klopt.
- b De beginhoogte is $0,7 : 1,4 = 0,5$.
- c Het functievoorschrift voor de hoogte is dan $h(t) = 0,5 \cdot 1,4^t$.
- d In 5 dagen neemt de hoogte toe met $3,8 - 0,7 = 3,1$ cm.
Dat is per dag een toename van $\frac{3,1}{5} = 0,62$ cm.
Op dag 0 was de hoogte $0,7 - 0,62 = 0,08$ cm.
Dus is de lineaire formule $h(t) = 0,08 + 0,62t$.
- e $h(8)_{\text{exp}} = 0,5 \cdot 1,4^8 \approx 7,379$ cm.
 $h(8)_{\text{lin}} = 0,08 + 0,62 \cdot 8 = 5,04$ cm.
De exponentiële formule geeft de groei het best weer.

5 Exponentiële functies

5 a

t in minuten	T in $^{\circ}\text{C}$	verschil met omgeving
0	80	60
5	52	32
10	37	17
15	29	9
20	25	5

Per 5 minuten is steeds de groeifactor:

$$\frac{32}{60} \approx 0,5333 \quad \frac{17}{32} \approx 0,5313 \quad \frac{9}{17} \approx 0,5294 \quad \frac{5}{9} \approx 0,5556$$

Er is sprake van een vrijwel gelijke groeifactor per 5 minuten waarmee het temperatuurverschil afneemt.

Er is aan de afkoelingswet voldaan.

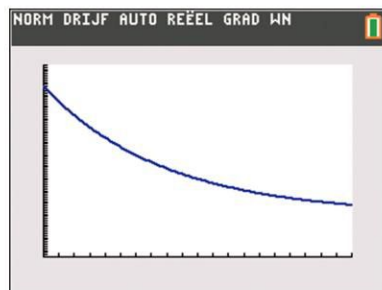
b $T(5) = 20 + 60 \times 0,881^5 \approx 52^{\circ}\text{C}$

$$T(10) = 20 + 60 \times 0,881^{10} \approx 37^{\circ}\text{C}$$

$$T(15) = 20 + 60 \times 0,881^{15} \approx 29^{\circ}\text{C}$$

c Voer in $y_1 = 20 + 60 \cdot 0,881^x$ met $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 90$

Tabel met start = 0 en stapgrootte 10



NORM DRIJF AUTO REËL GRAD WN				
DRUK OP + VOOR ΔTb1				
X	Y1			
0	80			
10	36.901			
20	24.761			
30	21.341			
40	20.378			
50	20.106			
60	20.03			
70	20.008			
80	20.002			
90	20.001			
100	20			
X=0				

In de tabel zie je dat de temperatuur T ($Y1$) naar 20°C nadert.

De horizontale lijn is $y = 20$.

d De formule heeft als grenswaarde 20.

De praktische betekenis hiervan is dat de koffie op den duur de temperatuur van de omgeving (20°C) zal aannemen.

6 a $C(0) = 500 + 22\,000 \cdot 0,8^0 = 22\,500$ en $X(0) = 24\,000 - 1650 \cdot 0 = 24\,000$.

De Cactus kost 22 500 euro en de Xantippe 24 000 euro.

b De groeifactor 0,8 ligt tussen 0 en 1. Dat wil zeggen dat het tweede deel van deel van de formule voor een grotere waarde van t steeds kleiner wordt.

De bedragen die bij 500 worden opgeteld, worden steeds kleiner, dus C neemt af in de tijd.

c De inruilwaarde nadert op den duur naar 500 euro.

d Invoer: $y_1 = 500 + 22000 \cdot 0,8^x$ en $y_2 = 24000 - 1650x$

Venster: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 25\,000$

Opties: snijpunten

Oplossing: $x \approx 13,6$.

Dus na 13,6 jaar is de inruilwaarde gelijk.

03 a Bij gelijke toename van x zie je een gelijke afname van y .

b Als x met 1 toeneemt dan neemt y met 2 af, dus de richtingscoëfficiënt is gelijk aan -2 .

Het startgetal (de beginhoeveelheid bij $x = 0$) is gelijk aan $10 + 2 = 12$.

c $y = 12 - 2x$

d Als x met 1 toeneemt, wordt de waarde van y twee keer zo groot.

e Bij $x = 0$ hoort $y = 10 : 2 = 5$.

f $y = 5 \cdot 2^x$

- g** In de tabel bij C is sprake van een constante toename. De groei is lineair.
 Als x met 2 toeneemt, neemt y met 6 toe. Als x met 1 toeneemt, zal y met 3 toenemen: de richtingscoëfficiënt is gelijk aan 3.
 Het startgetal bij $x = 0$ is $20 - 3 = 17$.
 Formule: $y = 17 + 3x$.
 In de tabel bij D is sprake van exponentiële groei. Groeifactoren zijn:
 $\frac{26,4}{20,3} \approx 1,300$ $\frac{34,3}{26,4} \approx 1,299$ $\frac{44,6}{34,3} \approx 1,300$
 De groeifactor is dus ongeveer 1,3.
 Bij $x = 1$ geldt $y = \frac{20,3}{1,3} \approx 15,6$, dus bij $x = 0$ is $y = \frac{15,6}{1,3} \approx 12,0$
 Formule: $y = 12,0 \cdot 1,3^x$

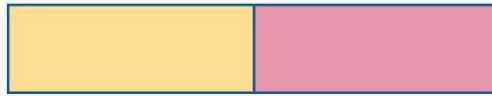
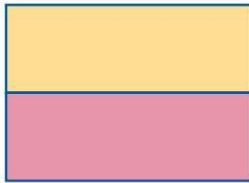
- 04 a** In vier dagen is de hoogte toegenomen met $6,2 - 3,0 = 3,2$ cm, dat is dus $\frac{3,2}{4} = 0,8$ cm per dag. De richtingscoëfficiënt is 0,8.
b $h = 0,8t + 3,0$ met de hoogte in cm en de tijd in dagen.
c d
 $3,6 : 3 = 1,2$, $4,3 : 3,6 = 1,194\dots$, $5,2 : 4,3 = 1,209\dots$ en $6,2 : 5,3 = 1,192\dots$
 De factor per dag is vrijwel constant, namelijk ongeveer 1,2.
 Daarbij hoort een exponentieel proces met groeifactor 1,2.
e Op $t = 0$ is de hoogte 3,0, dus $b = 3,0$ en de groeifactor is 1,2.
 Bij het exponentiële verband hoort de formule $h = 3,0 \cdot 1,2^t$.
f Lineair: $h(10) = 0,8 \cdot 10 + 3,0 = 11$.
 Exponentieel: $h(10) = 3,0 \cdot 1,2^{10} \approx 18,6$.
 De lineaire formule geeft de beste voorspelling.

- U1 a** Groei stad A: $N = 800\,000 \cdot 1,03^t$ met N het aantal inwoners en t de tijd in jaren na 2013.
 Groei stad B: $N = 550\,000 \cdot 1,037^t$ met N het aantal inwoners en t de tijd in jaren na 2013.
 Met de rekenmachine:
 Invoer: $y_1 = 800\,000 \cdot 1,03^x$ en $y_2 = 550\,000 \cdot 1,037^x$
 Venster: $0 \leq x \leq 125$ en $0 \leq y \leq 6\,000\,000$
 Optie: snijpunt geeft $x \approx 55,32$.
 Dus na ongeveer 55 jaar.
b In 2018 heeft stad B (en dus ook stad C)
 $550\,000 \cdot 1,037^5 = 659\,563$ inwoners.
 Formule inwonersgroei stad C vanaf 2018: $N = 659\,563 \cdot 1,04^t$
 Dus formule inwonersgroei stad C vanaf 2013: $N = 659\,563 \cdot 1,04^{t-5}$.
 Met de rekenmachine:
 Invoer: $y_1 = 800\,000 \cdot 1,03^x$ en $y_2 = 659\,563 \cdot 1,04^{x-5}$
 Venster: $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 6\,000\,000$
 Optie: snijpunt geeft $x \approx 40,3$.
 Dus in de loop van het jaar $2013 + 40 = 2053$ heeft stad C meer inwoners dan stad A.

5 Exponentiële functies

5.2 Grafieken van exponentiële formules

intro Elke keer in de lengte doorknippen geeft een nieuwe rechthoek met een dubbele lengte:



Dus de lengte van een A4-tje van 29,7 cm wordt elke keer verdubbeld.

De lengte L van de rechthoek na n keer knippen kun je berekenen met de formule $L = 29,7 \cdot 2^n$

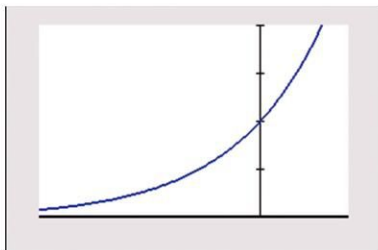
Het aantal keer knippen bereken je dan door de vergelijking

$29,7 \cdot 2^n = 4 \cdot 10^9$ op te lossen. De rekenmachine geeft als antwoord 27,004.....

Dus na 28 keer knippen kun je de evenaar omspannen.

- 7**
- a De grafiek van de functie h is dalend. De functie heeft een groeifactor kleiner dan 1.
 - b De groeifactoren van de functies f en g zijn groter dan 1.
 - c De grafiek van de functie g gaat door $(0, 3)$: 3 is het startgetal.
 - d Rood hoort bij f , groen bij g en blauw bij h .
 - e De asymptoot is de x -as, oftewel de lijn met vergelijking $y = 0$.

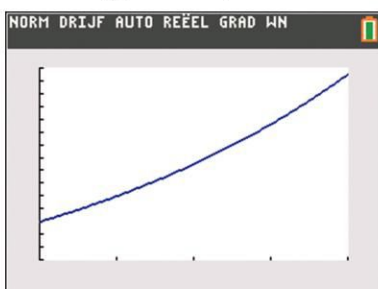
- 8**
- a De grafiek van de functies f en k zijn stijgend.
 - b $g(0) = 1$ dus de grafiek van functie g gaat door punt $(0, 1)$.
 - c Voer in: $y_1 = 2 \cdot 1,01^x$.
- Venster bijvoorbeeld $-250 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 4$.



De grafiek van de functie k heeft de x -as als horizontale asymptoot.

De vergelijking hiervan is $y = 0$.

- 9**
- a $\frac{100}{80} = \frac{125}{100} \approx \frac{156}{125} \approx \frac{195}{156} \approx 1,25$, dus de factor per week is 1,25.
 - b $G(t) = 80 \cdot 1,25^t$ met t in weken en G in grammen.
 - c Voer in: $y_1 = 80 \cdot 1,25^x$ met venster $0 \leq x \leq 4$ en $50 \leq y \leq 200$.



- d Na zes weken is het gewicht $G(6) = 80 \cdot 1,25^6 \approx 305$ gram.

- e Tien dagen is $\frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$ weken. Dus $t = 1\frac{3}{7}$.
- f Na tien dagen is het gewicht $G\left(1\frac{3}{7}\right) = 80 \cdot 1,25^{1\frac{3}{7}} \approx 110$ gram.
- 10** a Er blijft jaarlijks een vast percentage over, namelijk 88,6%. De hoeveelheid kun je dus berekenen door te vermenigvuldigen met de groeifactor 0,886.
- b $N = 12 \cdot 0,886^t$
- c $t = -1$ hoort bij één jaar voor 1 juli 2020, dus 1 juli 2019.
- d $t = -2$
- e $N(-1) = 12 \times 0,886^{-1} = 13,54\dots$
Op 1 juli 2019 was de hoeveelheid Radium-228 ongeveer 13,5 gram.
- f 1 oktober 2020 is 3 maanden na 1 juli 2020. Dat is 0,25 jaar, dus $t = 0,25$.
- g $t = 0,25$ invullen in de formule geeft $N = 12 \times 0,886^{0,25} = 11,64\dots$
Er is dan een hoeveelheid van ongeveer 11,6 gram.
- h Invoer: $y_1 = 12 \cdot 0,886^x$ en $y_2 = 0,1$.
Venster: $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 1$.
Optie: snijpunt geeft $x \approx 39,55$.
Dat is iets meer dan 39,5 jaar na 1 juli 2020, dus in 2060.
- 11** a $\frac{1,7}{1,4} \approx \frac{2,0}{1,7} \approx \frac{2,4}{2,0} \approx \frac{2,9}{2,4} \approx 1,2$, dus de groeifactor per dag is 1,2.
- b $L(t) = 1,4 \cdot 1,2^t$ met t in dagen, L in cm en $t = 0$ is 15 april.
- c Op 20 april was de lengte $L(5) = 1,4 \times 1,2^5 \approx 3,5$ cm.
- d Invoer: $y_1 = 1,4 \cdot 1,2^x$ en $y_2 = 0,4$
Venster: standaard
Optie: snijpunt geeft $x \approx -6,87$.
Dus 7 dagen voor 15 april is de lengte ongeveer 0,4 cm. Dit is op 8 april.
- 12** a Er zit 2 gram lucht in de band als deze net is opgepompt.
- b Aflezen uit de grafiek laat zien dat er na tien dagen nog ongeveer 1,25 gram lucht aanwezig is. Er is een verlies van 0,75 gram.
Dat is $\frac{0,75}{2} \times 100\% = 37,5\%$.
- c Na 25 dagen bevat de band nog $2 \times 0,958^{25} \approx 0,68$ gram lucht.
- d De groeifactor 0,958 is kleiner dan 1, de grafiek is dus dalend: er is steeds minder lucht in de band.
- e Invoer: $y_1 = 2 \cdot 0,958^x$ en $y_2 = 0,1$
Venster: $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 2$
Opties: snijpunten
Oplossing: $x \approx 69,8$
Na 70 dagen zit er minder dan 0,1 gram lucht in de band.
- 13** a $C = 15 \cdot 1,1^t$
- b $C = 15 \cdot (1,1^{\frac{1}{7}})^t \approx 15 \cdot 1,014^t$
- c $1,1^t = 2$ geeft $t = 7,2725\dots$ weken, dat is $7,2725\dots \times 7 \approx 50,9$.
Dus na 51 dagen.
 $1,014^t = 2$ geeft $t = 49,9$. Dus na ongeveer 50 dagen.
Het verschil komt omdat 1,014 het afgeronde antwoord is van $1,1^{\frac{1}{7}}$.
- 08** a De groeifactor 0,8 is kleiner dan 1.
- b $f(0) = 7 \times 0,8^0 = 7$. De grafiek gaat door (0, 7). Het begingetal is 7.
- c De grafiek van g is stijgend.

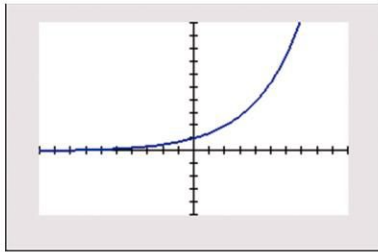
5 Exponentiële functies

d $g(x) = 1,4^x = 1 \cdot 1,4^x$.

$g(0) = 1 \times 1,4^0 = 1$

Dan ligt $(0, 1)$ op de grafiek van g en is dat het snijpunt met de y -as.

e $y = 1,4x$ met venster $-10 \leq x \leq 10$ en $-5 \leq y \leq 10$.



De horizontale asymptoot is de x -as ofwel $y = 0$.

f De grafiek van l is stijgend want de groeifactor is groter dan 1.

De grafieken van h en k zijn dalend: hun groeifactoren zijn kleiner dan 1.

g De grafieken van h en l : bij beide functies is de beginwaarde 1.

010 a $\frac{111}{84} \approx 1,32$

b $\frac{146}{111} \approx \frac{193}{146} \approx \frac{255}{193} \approx 1,32$

c Omdat er sprake is van een groeifactor van ongeveer 1,32 per zeven dagen, ofwel een vaste toename van 32% per zeven dagen.

d 1,32

e $G = 84 \cdot 1,32^t$ met G het gewicht in gram en t de tijd in weken.

f 20 mei is 4 dagen na 16 mei en is dus $\frac{4}{7}$ deel van een week en 16 mei is twee weken na 2 mei, dus $t = 2\frac{4}{7}$.

g $G = 84 \times 1,32^{2\frac{4}{7}} \approx 171,5$ gram

h 12 mei is drie dagen na $t = 1$, dus $t = 1\frac{3}{7}$. Je kunt ook zeggen: 12 mei is 10 dagen na 2 mei dus $t = \frac{10}{7}$.

i $G = 84 \times 1,32^{\frac{10}{7}} \approx 124,9$ gram

j Invoer: $y_1 = 84 \cdot 1,32^x$ en $y_2 = 100$

Venster: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 150$

Optie: snijpunten

Oplossing: $x = 0,628$

$0,628$ week is $0,628 \times 7 = 4,396$ dagen.

In de loop van dag vier wordt het gewicht 100 gram. Dat is op 6 mei.

U2 De rode grafiek hoort bij f en de groene bij g . Als het snijpunt inderdaad bij 1,24 ligt en dat lijkt wel te kloppen in de tekening, dan klopt het wat er staat: als $x > 1,24$ dan $f(x) > g(x)$.

Maar dit klopt niet als je het scherm aanpast.

Neem maar eens de vensterinstelling $-3 \leq x \leq 5$ en $-1 \leq y \leq 10$.

Dan zie je dat er een tweede snijpunt is (bij $x = -0,86$).

Er is zelfs een derde snijpunt ($x = 16$) te vinden bij de vensterinstelling

$0 \leq x \leq 30$ en $0 \leq y \leq 100\,000$.

De bewering klopt dus niet.

5.3 Andere tijdseenheden

intro Elke 7,5 jaar is er van de straling nog maar de helft over. De formule $S = 100 \cdot 0,5^t$ met S de hoeveelheid straling en t de tijd in perioden van 7,5 jaren en een beginhoeveelheid van 100 stralingseenheden, geeft dan de sterkte van de straling weer.

Na 10 jaar zijn er $S = 100 \times 0,5^{(10/7,5)} \approx 40$ eenheden straling over.

Er zijn dan 60 eenheden vervallen.

Na 20 jaar zijn er $S = 100 \times 0,5^{(20/7,5)} \approx 16$ eenheden straling over.

Dan zijn 84 stralingseenheden vervallen.

Conclusie: Het verval in 10 jaar is niet de helft van het verval in 20 jaar.

14 a De groeifactor per uur is 3.

t	0	0,5	1	1,5
N	1500	2598	4500	7794

c De groeifactor per half uur is $\frac{2598}{1500} \approx \frac{4500}{2598} \approx \frac{7794}{4500} \approx 1,73$.

d Omdat je de hoeveelheid na een half uur kunt berekenen met $1500 \times 3^{\frac{1}{2}}$.
Je moet dus de beginhoeveelheid met $3^{\frac{1}{2}}$ vermenigvuldigen om de hoeveelheid na een half uur te krijgen.

t	0	0,25	0,50	0,75	1
N	1500	1974	2598	3419	4500

f Met de formule: $3^{0,25} \approx 1,32$

Uit de tabel: $\frac{1974}{1500} \approx \frac{2598}{1974} \approx \frac{3419}{2598} \approx \frac{4500}{3419} \approx 1,32 \approx 3^{0,25}$

15 a De groeifactor per week is 2.

b Na drie weken bereken je de hoeveelheid algen met $N = 500 \cdot 2^3 = 500 \cdot 8$.
Je vermenigvuldigt de beginhoeveelheid 500 dus met 8, dus de groeifactor per drie weken is 8.

c Eén dag is $\frac{1}{7}$ deel van één week.

d De groeifactor per dag is $2^{\frac{1}{7}} \approx 1,104$.

e $N(60) = 500 \times 1,104^{60} \approx 189\,300$ algen per cm^3

16 a De groeifactor per week is $1,5^7 \approx 17,09$.

b De groeifactor per halve dag is $1,5^{\frac{1}{2}} \approx 1,22$.

c Acht uur is $\frac{1}{3}$ dag, dus de groeifactor per acht uur is $1,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,14$.

d De groeifactor per uur is $1,5^{\frac{1}{24}} \approx 1,017$.

17 a De groeifactor per halve dag is 1,15.

b De groeifactor per uur is $1,15^{\frac{1}{12}} \approx 1,012$.

c $1,0117 = 1 + 0,0117$ en $0,0117 \times 100 = 1,17$.

Afgerond op één decimaal is de toename 1,2% per uur.

18 a De groeifactor is 1,6 per 24 uur.

De groeifactor per uur is $1,6^{\frac{1}{24}} = 1,0197... \approx 1,02$.

Het groeipercentage hierbij is ongeveer 2%.

5 Exponentiële functies

- b** De groeifactor is 0,96 per vijf jaar. In 15 jaar zitten drie perioden van 5 jaar.
De groeifactor per 15 jaar is $0,96^3 \approx 0,885$.
Er is na 15 jaar nog ongeveer 88,5% over, dus de procentuele afname per 15 jaar is ongeveer 11,5%.
- c** De groeifactor is 1,0115 per maand.
De groeifactor per jaar is $1,0115^{12} \approx 1,147$.
De rente per jaar is 14,7%.
- d** De groeifactor is 1,70 per 20 jaar. De groeifactor per jaar is $1,70^{\frac{1}{20}} \approx 1,027$.
De groei is 2,7% per jaar.
- 19 a** De groeifactor per zes maanden is 1,6, dus per maand $1,6^{\frac{1}{6}} \approx 1,081$.
 $N(t) = 1000 \cdot 1,081^t$
- b** 1,6 was de groeifactor per half jaar. Een half jaar bestaat uit 26 weken.
 $1,6^{\frac{1}{26}}$ is dan de groeifactor met eenheid week.
- c** Invoer: $y_1 = 1000 \times 1,081^x$ en $y_2 = 10\,000$
Venster: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 15\,000$
Opties: snijpunten
Na ongeveer 30 maanden zijn er meer dan 10 000 vissen in het meer.
- 20 a** De groeifactor per vier jaar is $2916 : 36 = 81$.
De groeifactor per jaar is $81^{\frac{1}{4}} = 3$.
De beginhoeveelheid is $36 \times 3^{-2} = 4$, dus $f(t) = 4 \cdot 3^t$ met t in jaren.
- b** De groeifactor per maand is $3^{\frac{1}{12}} \approx 1,096$, dus $g(t) \approx 4 \cdot 1,096^t$ met t in maanden.
- 21 a** De groeifactor per dag is afgerond op één decimaal $6^{\frac{1}{2}} \approx 2,4$.
 $2,4^2 = 5,76$ en dat wijkt nogal af van de 6, dus onnauwkeurig.
- b** $2,45^2 = 6,0025$
- c** $1,08^{24} \approx 6,34$, dat wijkt (te) veel af.
- d** $1,078^{24} \approx 6,065$, dus de afwijking is $\frac{0,065}{6} \cdot 100\% \approx 1,1\%$.
- 016 a** De hoeveelheid is één dag later $50 \times 1,25 = 62,5$.
- b** Na twee dagen heb je $50 \times 1,25 \times 1,25 = 50 \times 1,25^2$.
De hoeveelheid na twee dagen krijg je door de beginhoeveelheid te vermenigvuldigen met $1,25^2$, dus de groeifactor per twee dagen is $1,25^2$.
- c** De groeifactor per vier dagen is $1,25^4 \approx 2,44$.
- d** De groeifactor per halve dag is $1,25^{\frac{1}{2}}$.
De hoeveelheid na een halve dag is $50 \times 1,25^{\frac{1}{2}} \approx 55,9$.
- e** De groeifactor per dag is 1,25. De groeifactor per halve dag is dan $1,25^{\frac{1}{2}} \approx 1,12$.
- f** De groeifactor per zes uur is $1,25^{\frac{1}{4}} \approx 1,057$.
- g** De groeifactor per uur is $50 \times 1,25^{\frac{1}{24}} \approx 52,9$
- h** De groeifactor per uur is $1,25^{\frac{1}{24}} \approx 1,0093$.
- 018 a** Bij dit proces hoort groeifactor 1,5.
- b** Een halve dag is de helft van een hele dag, dus de groeifactor per halve dag is $1,5^{\frac{1}{2}} \approx 1,22$.
- c** Bij een groeifactor 1,22 hoort een groeipercentage van 22%.
- d** De groeifactor per uur is $1,5^{\frac{1}{24}} \approx 1,017$.
- e** Hierbij hoort een groeipercentage van 1,7%.
- f** De groeifactor per uur is 1,05. De groeifactor per vijf uur is dan $1,05^5 \approx 1,276$. Het groeipercentage per vijf uur is dan 27,6%.

g De groeifactor per uur is 1,05. De groeifactor per tien uur is dan $1,05^{10} \approx 1,629$. Het groeipcentage per tien uur is 62,9%.

h De groeifactor per minuut is $1,05^{\frac{1}{60}} \approx 1,0008$.
 $(1,0008 - 1) \times 100\% = 0,08\%$
 Het groeipcentage per minuut is 0,08%.

U3 De groeifactor per 17 dagen $\frac{7180}{2360} \approx 3,04$. Dat is per dag $3,04^{\frac{1}{17}} \approx 1,068$.

De groeifactor per 29 dagen $\frac{15\,740}{2360} \approx 6,67$. Dat is per dag $36,67^{\frac{1}{29}} \approx 1,068$.

Er kan dus sprake zijn van exponentiële groei.

U4 Als een hoeveelheid met $a\%$ toeneemt, dan is de nieuwe hoeveelheid $100 + a\%$. De groeifactor is dan $\frac{100 + a}{100} = 1 + 0,01a$.

Neem bijvoorbeeld een percentage van 23%, dan is de groeifactor $1 + 0,01 \times 23 = 1,23$.

Stel de beginhoeveelheid is 100.

Dan heb je na 20 weken een hoeveelheid van $100 \cdot (1 + 0,01a)^{20}$.

Als die hoeveelheid vervolgens weer afneemt met $a\%$ per week dan heb je na 10 weken een hoeveelheid van $100 \cdot (1 + 0,01a)^{20} \cdot (1 - 0,01a)^{10}$.

Deze hoeveelheid moet gelijk moet aan 100, dus moet gelden $(1 + 0,01a)^{20} \cdot (1 - 0,01a)^{10} = 1$

Invoer: $y_1 = (1 + 0,01x)^{20} \cdot (1 - 0,01x)^{10}$ en $y_2 = 1$

Venster: $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 6$

Optie: snijpunten

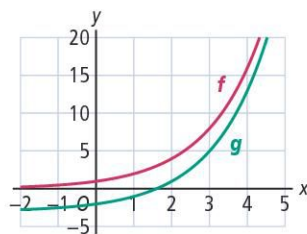
Oplossing: $a = 61,8\%$

5.4 Transformaties

intro A hoort bij Steven, want bij elk tijdstip is de grafiek A twee keer zo hoog als de grafiek B, dus B hoort bij Bram.

C hoort bij Robert, die heeft bij de start enkele seconden vertraging.

22 a



b De grafiek van functie f heeft $y = 0$ als horizontale asymptoot en de grafiek van g heeft $y = -3$ als horizontale asymptoot.

c De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f drie omlaag te verschuiven.

23 a $f(0) = 1$ en $f(3) = 8$ dus respectievelijk voor $x = 0$ en $x = 3$.

b $h(4) = 2^{4-4} = 1$ en $h(7) = 2^{7-4} = 8$ dus respectievelijk voor $x = 4$ en $x = 7$.

c De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f vier naar rechts te verschuiven.

d Van beide grafieken is $y = 0$ de horizontale asymptoot.

5 Exponentiële functies

- 24 a** De verschuiving is 2 naar rechts, dus moet je x vervangen door $x - 2$.
Je krijgt $g(x) = 1,5^{x-2}$ en $y = 0$ is de horizontale asymptoot.
- b** De verschuiving is 1 naar links, dus moet je x vervangen door $x + 1$.
Je krijgt $g(x) = 1,5^{x+1}$ en $y = 0$ is de horizontale asymptoot.
- c** De verschuiving is 5 omlaag en dat geeft $h(x) = 1,5^x - 5$.
 $y = -5$ wordt de horizontale asymptoot.
- d** De verschuiving is 4 omhoog en dat geeft $g(x) = 1,5^x + 4$.
De grafiek van g wordt 2 naar links verschoven, dus moet je x vervangen door $x + 2$, dit geeft $h(x) = 1,5^{x+2} + 4$.
 $y = 4$ wordt de horizontale asymptoot.
- e** 3 naar rechts verschuiven, dus moet je x vervangen door $x - 3$. Je krijgt dan $g(x) = 1,5^{x-3}$. Vervolgens 8 omlaag verschuiven geeft $h(x) = 1,5^{x-3} - 8$.
 $y = -8$ wordt de horizontale asymptoot.

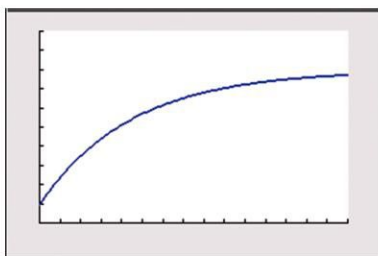
- 25** Door de grafiek van f eerst 4 naar links te verschuiven en vervolgens 3 omlaag te verschuiven ontstaat de grafiek van g .

- 26 a** $H = 100 \cdot 1,03^{t-2}$ want $t = 2$ geeft $H = 100$ op 1 juli 2008.
- b** Voor t groter of gelijk aan 2 heeft de formule voor het saldo van Harry betekenis.

- 27 a** $g(x) = 5 \cdot 1,2^x$
- b** $g(x) = 2 \cdot 1,2^{x-3}$
- c** $g(x) = -1,2^{x+2}$

- 28 a** Vermenigvuldigen met factor 4 ten opzichte van de x -as en vervolgens 3 omhoog verschuiven.
- b** 3 naar rechts verschuiven en vervolgens 2 omhoog verschuiven.
- c** Vermenigvuldigen met factor 3 ten opzichte van de x -as en vervolgens 1 naar links verschuiven.
- d** Vermenigvuldigen met factor -3 ten opzichte van de x -as en vervolgens 1 omhoog verschuiven.

- 29 a** Invoer: $y_1 = 8 - 7 \cdot 0,8^x$
Venster: $0 \leq x \leq 15$ en $0 \leq y \leq 10$



- b** $H(0) = 8 - 7 \cdot 0,8^0 = 1$, dus bij het planten was de boom 1 meter hoog.
- c** Voor grote waarden van t nadert H naar 8, dus op den duur zal de boom ongeveer 8 meter hoog worden.
- c** Je kunt $H = 8 - 7 \cdot 0,8^t$ ook schrijven als $H = -7 \cdot 0,8^t + 8$. Dan zie je dat je de grafiek van $y = 0,8^t$ moet vermenigvuldigen met factor -7 ten opzichte van de x -as en vervolgens 8 naar boven verschuiven.

- 024 a** Bij een verschuiving van 4 naar links moet je in het functievoorschrift x vervangen door $x + 4$, dus bij de groene grafiek hoort het functievoorschrift $g(x) = 3^{x+4}$.
- b** Bij een verschuiving van 2 omhoog tel je bij het functievoorschrift 2 op, dus bij de blauwe grafiek hoort het functievoorschrift $h(x) = 3^{x+4} + 2$.

- 027 a** $g(x) = 4 \cdot 3^x$
- b** Je vermenigvuldigt dan met factor -1 .
- c** $h(x) = -1 \cdot g(x) = -1 \cdot 3^x$
- d** Bij een verschuiving van 2 naar links vervang je x door $x + 2$.
- e** $k(x) = -1 \cdot 3^{x+2}$ of $k(x) = -3^{x+2}$
- f** $m(x) = 3 \cdot 2 \cdot 3^{x-2}$

- U5** De grafiek van f eerst a eenheden naar links verschuiven geeft de grafiek van $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$. Daarna vermenigvuldigen t.o.v. de x -as met factor 16 geeft $h(x) = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$. Als h gelijk is aan f , dan geldt voor elke x : $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Hier staat dus eigenlijk $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. En dit is voor elke x het geval als $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a = 1$. Anders geschreven:

$$2^4 \cdot (2^{-1})^a = 1$$

$$2^4 \cdot 2^{-a} = 1 = 2^0$$

$$2^{4-a} = 2^0$$

$$4 - a = 0, \text{ dus } a = 4$$

5.5 Functievoorschriften herleiden

intro De grafieken vallen samen. De functievoorschriften moeten dus gelijk zijn. Je kan de formule van g herleiden tot die van f via de rekenregels:

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{x+2} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^x \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^x \cdot 4 = 2^x$$

- 30 a** De beginhoeveelheid is $f(0) = 5 \times 10^2 = 5 \times 100 = 500$.
 $f(1) = 5 \times 10^{-1+2} = 5 \times 10^1 = 50$ dus de groeifactor is $50 : 500 = 0,1$.
- b**
- | | | | | | |
|--------|-----|----|---|-----|------|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(t)$ | 500 | 50 | 5 | 0,5 | 0,05 |
- c** 500 is het begingetal, want dat staat onder 0 en de groeifactor is 0,1.
- d** $f(x) = 500 \cdot 0,1^x$

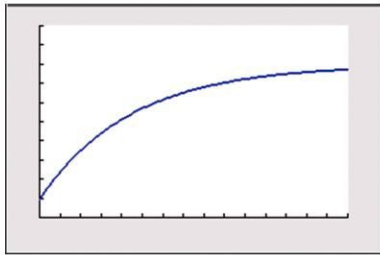
- 31 a** $2^{1-3x} = 2^1 \cdot 2^{-3x} = 2 \cdot (2^{-3})^x$
- b** $b = 2$ en $g = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$
- c d**
 De grafiek van f is dalend, want de groeifactor is kleiner dan 1.

5 Exponentiële functies

- 32 a** Invoer: $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = 2^{-x}$

Venster $-3 \leq x \leq 3$ en $0 \leq y \leq 10$

Te zien is dat eerst de grafiek van y_1 verschijnt, daarna de grafiek van y_2 die precies samenvalt met de grafiek van y_1 .



- b** De grafieken vallen samen dus zal $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ gelijk moeten zijn aan 2^{-x} voor elke x . En dat klopt, want het wordt duidelijk met deze tussenstap:

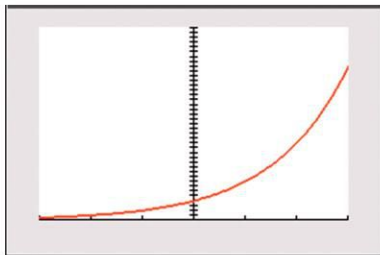
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$$

- c** $h(x) = 3^{-x} = (3^{-1})^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $h(x) = 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$.

- 33 a** Invoer: $y_1 = 2^{2+x}$ en $y_2 = 4 \cdot 2^x$

Venster: $-3 \leq x \leq 3$ en $0 \leq y \leq 40$

Te zien is dat eerst de grafiek van y_1 verschijnt, daarna de grafiek van y_2 die precies samenvalt met de grafiek van y_1 .



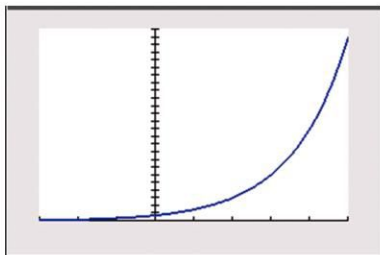
- b** $f(x) = 2^{2+x} = 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x = g(x)$

- c** $h(x) = 3^{3+2x} = 3^3 \cdot 3^{2x} = 27 \cdot (3^2)^x = 27 \cdot 9^x$

- d** $k(x) = 5^{3-2x} = 5^3 \cdot 5^{-2x} = 125 \cdot (5^{-2})^x = 125 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$

- 34 a** Invoer: $y_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$

Venster: $-3 \leq x \leq 5$ en $0 \leq y \leq 25$



- b** De beginhoeveelheid is $f(0) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} = 0,75$.

- c** $f(t) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-t} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-t} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot (2^{-1})^{-t} = 0,75 \cdot 2^t$

De groeifactor 2 is groter dan 1, dus de grafiek is stijgend.

- 35 a** $f(x) = 14 \cdot 3^{4x+2} = 14 \cdot 3^{4x} \cdot 3^2 = 14 \cdot 3^2 \cdot (3^4)^x = 126 \cdot 81^x$

De beginhoeveelheid is 126 en de groeifactor is 81.

- b** $h(t) = 2,5 \cdot 3,6^{-2t+7} = 2,5 \cdot 3,6^{-2t} \cdot 3,6^7 = 2,5 \cdot 3,6^7 \cdot (3,6^{-2})^t \approx 19\,591,04 \cdot 0,077^t$

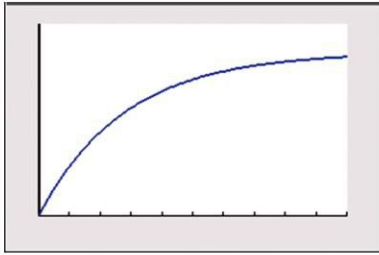
De beginhoeveelheid is ongeveer 19 591 en de groeifactor is ongeveer 0,077.

- c** $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 2^2 \cdot (2^{-1})^{2x} = 2^2 \cdot 2^{-2x} = 2^{2-2x} = g(x)$

- d** $h(x) = 6 \cdot 2^{-x-3} = 6 \cdot 2^{-x} \cdot 2^{-3} = 6 \cdot 2^{-3} \cdot (2^{-1})^x = 0,75 \cdot 0,5^x = k(x)$

- 36 a** $f(x) = 3^{4x} = (3^4)^x = 81^x$
b $f(x) = 2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
c $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3x} = (5^{-1})^{-3x} = 5^{3x} = (5^3)^x = 125^x$
d $f(x) = (2^{2x})^3 = 2^{6x} = (2^6)^x = 64^x$
e $f(x) = 2^x \cdot (3^x)^{-3} = 2^x \cdot 3^{-3x} = (2 \cdot 3^{-3})^x = \left(\frac{2}{27}\right)^x$
f $f(x) = (4^6)^{-\frac{1}{3}x} = 4^{-2x} = (4^{-2})^x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$

- 37 a** Invoer: $y_1 = 150 - 149 \times 0.7^x$
 Venster: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 175$



- b** Voor grote waarden van t nadert $0,7^t$ naar 0, dus nadert C naar 150 cm^3 .
c Het grondtal moet kleiner worden want bijvoorbeeld $0,5^t$ nadert sneller naar 0 dan $0,7^t$.

- 38 a** Dan is $s = 10$ en is $B = 16,527 \times 1,092^{10} \approx 39,85$.
 Het afgeronde boetebedrag is 40 euro.
b Als $v > 80$ is, is $s = v - 80$. Dit laatste invullen in de formule voor B geeft
 $B = 16,527 \cdot 1,092^{v-80} = 16,527 \cdot 1,092^{-80} \cdot 1,092^v \approx 0,0145 \cdot 1,092^v$.

- 034 a** $f(0) = 2 \times 3^2 = 18$ en 18 is niet gelijk aan 2.
b De gebruikte rekenregel is $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ en dan van rechts naar links gelezen.
c $2 \cdot 3^{2-x} =$
 $2 \cdot 3^2 \cdot 3^{-x} =$
 $2 \cdot 3^2 \cdot (3^{-1})^x =$
 $2 \cdot 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$
d De groeifactor $\frac{1}{3}$ is kleiner dan 1, dus is de grafiek van f dalend.

- 036 a** $\frac{1}{3} = 3^{-1}$
 De gebruikte rekenregel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ van rechts naar links gelezen. En je moet bedenken dat $3 = 3^1$.
b $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x} = (3^{-1})^{-3x} = 3^{3x} = (3^3)^x = 27^x$
c $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x} = 5 \cdot 27^x$
d $g(0) = 4^0 \times 8^0 = 1$
 $g(1) = 4^1 \times 8^1 = 4 \times 64 = 256$
 De groeifactor g is $256 : 1 = 256$.
e $8^{2x} = (2^3)^{2x} = 2^{6x}$
f $g(x) = 4^x \cdot 8^{2x} = 2^{2x} \cdot 2^{6x} = 2^{2x+6x} = 2^{8x} = 1 \cdot (2^8)^x = 1 \cdot 256^x$

- U6** $h(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{1-x} \cdot 6 \cdot 2^{2x+1} =$
 $\frac{1}{2} \cdot 3^1 \cdot 3^{-x} \cdot 6 \cdot 2^{2x} \cdot 2^1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot (3^{-1})^x \cdot (2^2)^x =$
 $18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 4^x = 18 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4\right)^x = 18 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x$
 De functie h is exponentieel met beginhoeveelheid 18 en groeifactor $\frac{4}{3}$.

5 Exponentiële functies

U7 a Zie grafiek.

b $12 - 3^{\frac{1}{2}x+1} = 9$

$$-3^{\frac{1}{2}x+1} = -3$$

$$3^{\frac{1}{2}x+1} = 3^1$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 1$$

$$x = 0$$

$$12 - 3^{\frac{1}{2}x+1} = 3$$

$$-3^{\frac{1}{2}x+1} = -9$$

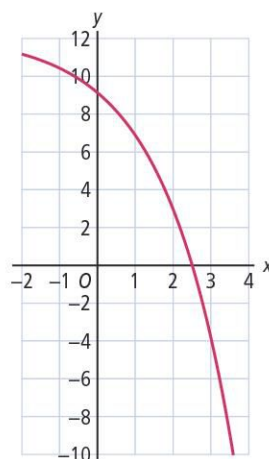
$$3^{\frac{1}{2}x+1} = 3^2$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 2$$

$$x = 2$$

c Oplossing van opdracht b combineren met aflezen uit de grafiek geeft

$$0 \leq x \leq 2.$$



5.6 Gemengde opdrachten

39 a Bij Hendrik is sprake van lineaire groei en bij Sophie is sprake van exponentiële groei.

b In 2019 verdiende Hendrik $1600 - 40 = 1560,00$ euro en in 2021 is dat $1600 + 40 = 1640,00$ euro.

In 2019 verdiende Sophie $1400 : 1,045 \approx 1339,71$ euro en in 2021 is dat $1400 \times 1,045 = 1463,00$ euro.

c $1,045^5 \approx 1,246$ dus het salaris van Sophie stijgt met 24,6% per 5 jaar.

d Invoer: $y_1 = 1600 + 40x$ en $y_2 = 1400 \times 1,045^x$

Tabel met startpunt 0 en stapgrootte 1

Bij $x = 7$ is het bedrag van Sophie voor het eerst hoger.

In 2027 wordt het salaris van Sophie hoger dan het salaris van Hendrik.

e Invoer: $y_1 = 2 \times (1600 + 40x)$ en $y_2 = 1400 \times 1,045^x$

Tabel met startpunt 0 en stapgrootte 1

Bij $x = 33$ is y_2 voor het eerst groter dan y_1 .

In 2053 verdient Sophie (meer dan) het dubbele van Hendrik.

40 a Punt (0, 1) gaat over in punt (0, 8), dus er is 7 naar boven verschoven.

b Bij de horizontale verschuiving blijft de y -waarde gelijk aan 4.

$f(x) = 4$ als $x = -2$. Punt (-2, 4) gaat over in punt (6, 4), dus er is 8 naar rechts verschoven.

c Punt (-3, 8) gaat over in punt (-3, 12), dus er is met factor 1,5 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.

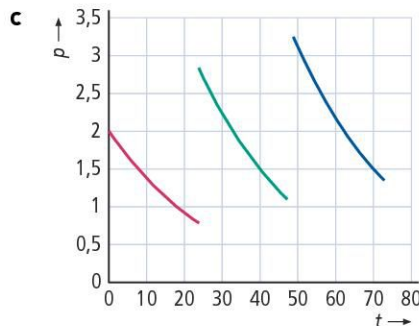
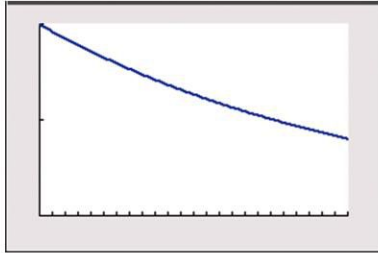
41 a $f(x) = 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} =$
 $12 - 4 \cdot (2^{-1})^x \cdot (2^{-1})^{-3} =$
 $12 - 4 \cdot 2^3 \cdot 2^{-x} =$
 $12 - 4 \cdot 8 \cdot 2^{-x} =$
 $12 - 32 \cdot 2^{-x}$

b $f(0) = 12 - 32 \cdot 2^0 = 12 - 32 = -20$, dus (0, -20)

- c Invoer: $y_1 = 12 - 32 \cdot 2^{-x}$ en $y_2 = 0$
 Venster: $-10 \leq x \leq 40$ en $-60 \leq y \leq 20$
 Opties: snijpunten
 Oplossing: $x \approx 1,42$
 De coördinaten van het snijpunt met de x -as zijn $(1,42; 0)$.

42 a De groeifactor per uur is $0,4^{\frac{1}{24}}$, dus $P(t) = 2 \cdot 0,4^{\frac{1}{24}t} \approx 2 \cdot 0,963^t$, met t in uren.

- b Invoer: $y_1 = 2 \cdot 0,963^x$
 Venster: $0 \leq x \leq 24$ en $0 \leq y \leq 2$



- d Na 24 uur is er nog $2 \times 0,4 = 0,8$ mL in het bloed aanwezig en wordt weer 2 mL toegediend
 Na de toediening is er 2,8 mL in het bloed aanwezig.
 $P(t) = 2,8 \cdot 0,4^{\frac{1}{24}(t-24)}$ met t van 24 tot 48 uur.

43 a Volgens de figuur hoort bij een hoogte van $h = 0$ km een druk van $p = 1000$ mbar en bij $h = 60$ km een druk van $p = 0,1$ mbar.
 De beginwaarde is dus 1000, dat klopt met de formule.

De groeifactor per 60 km is dan $\frac{0,1}{1000} = 0,0001$.

Per km is dan de groeifactor: $0,0001^{\frac{1}{60}} \approx 0,86$. Dat klopt dus ook met de formule.

- b De hoogte is bij het begin 2000 m. De wandelaar gaat omhoog. Volgens de formule hoort bij een grotere hoogte een lagere druk. De hoogtemeter geeft echter dezelfde hoogte aan en meet dezelfde druk. Kennelijk is de luchtdruk tijdens het omhoog lopen gestegen. Volgens de tekst hoort bij een hogere luchtdruk mooier weer. Het weer is verbeterd.

44 Vanaf 2018 zijn er schijven van 12 Terabyte te koop.
 2018 is 33,5 jaar na 1985, dat zijn $33,5 : 2 = 16,75$ periodes van twee jaar.
 Dat betekent dat volgens de tekst de gemiddelde grootte van de harde schijf in 2018 ongeveer $2 \times 10^{16,75} \approx 1,1 \times 10^{17}$ zou moeten zijn.
 12 Tb is $12 \times 10^{12} \approx 1,2 \times 10^{13}$.
 De toename is dus niet in ditzelfde tempo doorgegaan, maar langzamer.

5 Exponentiële functies

Samenvatting

- S1 a** $f(0) = 5$, het snijpunt met de verticale as is $(0, 5)$.
 $g(0) = 0,3$, het snijpunt met de verticale as is $(0; 0,3)$.
b Van de functie f stijgt de grafiek, want de groeifactor 1,7 is groter dan 1.
- S2** Tabel A hoort bij exponentiële groei.
 De groeifactor is 0,5 en de beginhoeveelheid is 12.
 Een functievoorschrift is $f(x) = 12 \cdot 0,5^x$.
 Tabel B hoort bij lineaire groei. Als t met 1 stap toeneemt, neemt R met 2 toe.
 De richtingscoëfficiënt is 2. Het startgetal is $15 - 4 \times 2 = 7$.
 Een functievoorschrift is $R(t) = 2t + 7$.
- S3 a** 1 juli 2019 is anderhalf jaar na 1 januari 2018.
 Invullen van $t = 1,5$ geeft $A \approx 148\,400$ inwoners.
b 1 september 2020 is 2 jaar en 8 maanden na 1 januari 2012.
 Invullen van $t = 2\frac{8}{12} = 2\frac{2}{3}$ geeft $A \approx 153\,600$ inwoners.
c 1 april 2017 was 9 maanden voor 1 januari 2018.
 Invullen van $t = -\frac{9}{12}$ geeft $A \approx 138\,900$ inwoners.
- S4 a** De groeifactor per etmaal is $1,6^{24} \approx 79\,228$.
b De groeifactor per half uur is $1,6^{\frac{1}{2}} \approx 1,265$.
c De groeifactor per minuut is $1,6^{\frac{1}{60}} \approx 1,0079$.
- S5 a** De groeifactor is 1,125 per uur.
 De groeifactor per 2 uur is $1,125^2 \approx 1,2656$.
 Het aantal bacteriën neemt per twee uur met ongeveer 26,6% toe.
b De groeifactor is 0,97 per uur.
 De groeifactor per 20 minuten, dat is $\frac{1}{3}$ uur, is $0,97^{\frac{1}{3}} \approx 0,9899$.
 Het aantal bacteriën neemt per 20 minuten met ongeveer $100 - 98,99 = 1,01\%$ af.
- S6 a** Verschuiving van 2 naar links: vervang x door $x + 2$.
 Verschuiving van 3 omlaag: vervang $f(x)$ door $f(x) - 3$.
 $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x+2} - 3$
b - eerst 2 naar rechts verschuiven
 - vervolgens de grafiek ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen met 2
 - ten slotte 3 omhoog verschuiven.
- S7 a** $f(x) = 2 \cdot 3^{x+2} = 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 = 18 \cdot 3^x$
 De groeifactor is 3.
b $g(x) = -3 \cdot 0,9^{1-x} = -3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{1-x} = -3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{-x} = -\frac{27}{10} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^x$
 De groeifactor is $\frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

S8 a $f(t) = 81 \cdot 3^{2t-3}$
 $f(t) = 81 \cdot 3^{2t} \cdot 3^{-3}$
 $f(t) = 81 \cdot \frac{1}{27} \cdot (3^2)^t$
 $f(t) = 3 \cdot 9^t$

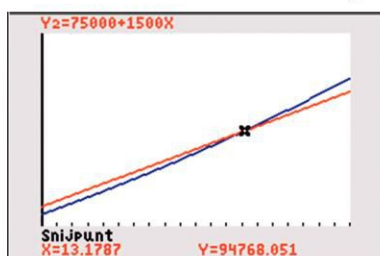
c $f(t) = \frac{1}{9} \cdot 3^{4+2t}$
 $f(t) = \frac{1}{9} \cdot 3^4 \cdot 3^{2t}$
 $f(t) = 9 \cdot (3^2)^t$
 $f(t) = 9 \cdot 9^t$

b $f(t) = 0,25^{t-3}$
 $f(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^t$
 $f(t) = 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^t$ of $f(t) = 64 \cdot 0,25^t$

d $f(t) = 2^t \cdot 3^{2t+1}$
 $f(t) = 2^t \cdot 3^{2t} \cdot 3^1$
 $f(t) = 3 \cdot 2^t \cdot (3^2)^t$
 $f(t) = 3 \cdot (2 \cdot 3^2)^t$
 $f(t) = 3 \cdot 18^t$

Test jezelf

- T1 a** $A = 73\,000 \cdot 1,02^t$ met t in jaren en $t = 0$ is 2019.
- b** In 2019 zijn er 25 000 woningen en dat aantal neemt lineair toe met 500 per jaar. Het aantal woningen is dan te beschrijven met de formule $W = 25\,000 + 500t$.
 In elke woning wonen gemiddeld ongeveer drie mensen, dus het aantal inwoners is maximaal $M = 3W = 3(25\,000 + 500t) = 75\,000 + 1500t$.
- c** In 2019 geldt $t = 0$, dus zijn er 73 000 inwoners terwijl er 75 000 beschikbare woonplekken zijn. Er is dus voldoende woonruimte.
- d** Invoer: $y_1 = 73\,000 \cdot 1,02^x$ en $y_2 = 75\,000 + 1500x$
 Venster: $0 \leq x \leq 50$ en $70\,000 \leq y \leq 120\,000$



Optie: snijpunten

Oplossing: $x \approx 13,2$

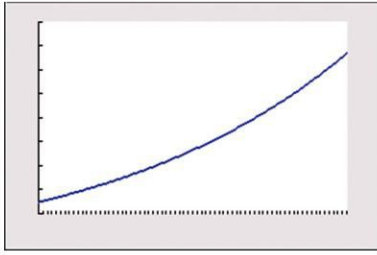
In de loop van 2032 is er dus te weinig woonruimte.

- T2 a** Ja, er is sprake van exponentiële groei, want
 $\frac{3,02}{2,52} \approx \frac{3,70}{3,02} \approx \frac{4,45}{3,70} \approx \frac{5,30}{4,45} \approx \frac{6,12}{5,30} \approx 1,2$.
- b** De groeifactor per 10 jaar is dus ongeveer 1,2.
- c** De groeifactor per jaar is $1,2^{0,1} \approx 1,018$.
 $omvang = 2,52 \cdot 1,018^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 1950.

5 Exponentiële functies

d Invoer: $y_1 = 2,5 \cdot 1,018^x$

Venster: $0 \leq x \leq 20$ en $2 \leq y \leq 10$



- e** In 1945 was de *omvang* $= 2,52 \times 1,2^{-0,5} \approx 2,3$ miljard.
In 1965 was de *omvang* $= 2,52 \cdot 1,2^{1,5} \approx 3,3$ miljard.

T3 a Om 10.30 uur werd $32 \times 2^{\frac{1}{12}} \approx 33,9$ milligram gemeten.

b De groeifactor per kwartier is $(2^{\frac{1}{12}})^{\frac{1}{4}} \approx 1,0145$.

c $B(t) = 32 \cdot 2^{\frac{1}{12}t} \approx 32 \cdot 1,0595^t$ met t in uren

d Om 10.00 uur was de hoeveelheid bacteriën $B = 32 \cdot 2^{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}} \approx 32,9$ milligram
en om 8.00 uur $B = 32 \times 2^{\frac{1}{12} \times -1\frac{1}{2}} \approx 29,3$ milligram.

T4 a 1 naar links verschuiven en 2 omhoog verschuiven.

b 1 naar rechts verschuiven en vermenigvuldigen met factor 3 ten opzichte van de x -as.

c 4 naar links verschuiven en vermenigvuldigen met factor 5 ten opzichte van de x -as.

d Vermenigvuldigen met factor -6 ten opzichte van de x -as en dan 4 naar links en 15 omhoog verschuiven.

T5 a $f(t) = (2 \cdot 6^{1-x})^3 = 2^3 \cdot 6^{3-3x} =$
 $8 \cdot 6^3 \cdot 6^{-3x} = 8 \cdot 216 \cdot \left(\frac{1}{216}\right)^x = 1728 \cdot \left(\frac{1}{216}\right)^x$

b $N(t) = 4,32 \cdot 1,44^{0,5t-1} = 4,32 \cdot 1,44^{0,5t} \cdot 1,44^{-1} =$
 $4,32 \cdot 1,44^{-1} \cdot (1,44^{0,5})^t = 3 \cdot 1,2^t$

T6 a $f(0) = 4 + 0,3^{1-0} = 4,3$

Dus $(0; 4,3)$ is het snijpunt met de verticale as.

b $g(0) = 3(2 + 3^0) = 3(2 + 1) = 9$

Dus $(0, 9)$ is het snijpunt met de verticale as.

c $h(0) = (5 - 2^0)^2 = (5 - 1)^2 = 16$

Dus $(0, 16)$ is het snijpunt met de verticale as.

T7 a $S = 2,2 \cdot 0,97^m$ met m in maanden.

b $2,2 \cdot 0,97^m = 1,8$

Invoer: $y_1 = 2,2 \cdot 0,97^x$ en $y_2 = 1,8$

Venster: $0 \leq x \leq 15$ en $0 \leq y \leq 2,5$

Opties: snijpunten

Oplossing: $x \approx 6,6$

Met $6,6 \times 30 = 198$ volgt dat uiterlijk om de 198 dagen de band moet worden opgepompt.

- T8 a** Na 5730 jaar bevat deze boom $0,5 \times 1000 \times 0,000001 = 0,0005$ mg C14.
Na 11460 jaar bevat deze boom $0,5 \times 0,0005 = 0,00025$ mg C14.
- b** Na $3 \times 5730 = 17\,190$ jaar is er nog $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ deel C14 over.
- c** Na $5 \times 5730 = 28\,650$ is er nog $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ deel over dus $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$ deel verdwenen.
- d** Invoer: $y_1 = 0,5^x$ en $y_2 = 0,04$
Venster: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 0,1$
Opties: snijpunten
Oplossing: $x \approx 4,644$
De vondst is ongeveer $4,644 \times 5730 \approx 26\,600$ jaar oud.
- e** Invoer: $y_1 = 0,5^x$ en $y_2 = 0,8619$
Venster: $0 \leq x \leq 5$ en $0 \leq y \leq 1$
Opties: snijpunten
Het snijpunt is bij $x \approx 0,214$.
De lijkwade is dan ongeveer $0,214 \times 5730 \approx 1\,230$ jaar oud en kan dus niet van Aegidius geweest zijn.

Extra oefening

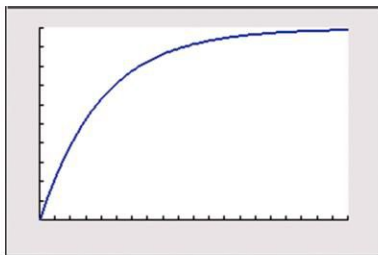
- E1** Tabel A:
Als x met 1 toeneemt, neemt y met 3 toe. Lineaire groei dus: $y = 3x + 3$.
Tabel B:
Als t met 2 toeneemt neemt R met een factor 4 toe. Als t met 1 toeneemt, moet R dus met $4^{\frac{1}{2}} = 2$ toenemen. De beginhoeveelheid bij $t = 0$ is $6 : 2 = 3$.
De formule hierbij is $R = 3 \cdot 2^t$
- E2 a** 17.30 uur is 3,5 uur na 14.00 uur. $P = 14,8 \times 0,972^{3,5} \approx 13,4$ volt.
b 21.15 uur is 7,25 uur na 14.00 uur. $P = 14,8 \times 0,972^{7,25} \approx 12,0$ volt.
c 20.05 uur is $6\frac{5}{60}$ uur na 14.00 uur. $P = 14,8 \times 0,972^{6\frac{5}{60}} \approx 12,5$ volt.
- E3 a** De groeifactor per 6 uur is $2,1^6 \approx 85,77$.
b De groeifactor per dag is $2,1^{24} \approx 54\,108\,198$.
c De groeifactor per half uur is $2,1^{1,5} \approx 1,45$.
d De groeifactor per minuut is $2,1^{\frac{1}{60}} \approx 1,012$.
e De groeifactor per 2,5 minuut is $2,1^{\frac{2,5}{60}} \approx 1,031$.
- E4 a** De groeifactor per dag is 2,25.
De groeifactor per week is $2,25^7 \approx 291,93$.
b De groeifactor per halve dag is $2,25^{0,5} = 1,5$, dus het groeipercentage per halve dag is 50%.
c De groeifactor per uur is $2,25^{\frac{1}{24}} \approx 1,034$, dus het groeipercentage per uur is afgerond 3%.
d De groeifactor per vier dagen is $1000 : 250 = 4$.
De groeifactor per dag is $4^{0,25} \approx 1,414$.

5 Exponentiële functies

- E5 a** $g(x) = 1,5^{x+3}$
b $g(x) = 1,5^x + 2$
c $g(x) = 4 \cdot 1,5^x$
d $g(x) = -1,5^x - 3$

- E6 a** $f(x) = 81 \cdot 3^{2x-3} = 3^4 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-3} = 3^1 \cdot (3^2)^x = 3 \cdot 9^x$
b $f(x) = 0,25^{x-3} = 0,25^x \cdot 0,25^{-3} = 64 \cdot 0,25^x$
c $f(x) = 8 \cdot 2^{-2-x} = 2^3 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-x} = 2^1 \cdot (2^{-1})^x = 2 \cdot 0,5^x$
d $f(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^{4+2x} = 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot (3^2)^x = 9 \cdot 9^x$
e $f(x) = 2^x \cdot 3^{2x+1} = 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 3 = 3 \cdot (2 \cdot 3^2)^x = 3 \cdot 18^x$
f $f(x) = (2 \cdot 3^x)^3 = 2^3 \cdot (3^3)^x = 8 \cdot 27^x$

- E7 a** Invoer: $y_1 = 100(1 - 0,779^x)$
 Venster: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 100$



- b** Invoer: $y_1 = 100(1 - 0,779^x)$ en $y_2 = 90$
 Venster: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 100$
 Optie: snijpunten
 De oplossing is $t \approx 9,2$ uur.
 Het duurt ruim 9 uur voordat 90% van het vuil is weggespoeld.

- E8** De x is vervangen door $x + 3$, dus een verschuiving van 3 naar links.
 De -1 is een verschuiving van 1 omlaag.

- E9 a** Het startgetal is 98,7.
 De richtingscoëfficiënt is $\frac{103,7 - 98,7}{2 - 0} = \frac{5}{2} = 2,5$.
 De formule is $S = 2,5t + 98,7$.
b $300 = 2,5t + 98,7$
 $201,3 = 2,5t$
 $t = \frac{201,3}{2,5} = 80,52$
 Volgens het lineaire model wordt de straling na 80,5 jaar schadelijk.
c De groeifactoren zijn $\frac{101,5}{98,7} \approx 1,02837$ en $\frac{103,7}{101,5} \approx 1,02167$.
 Gemiddeld is dit ongeveer 1,025.
 De beginhoeveelheid is 98,7. De formule is $S = 98,7 \cdot 1,025^t$.
d Invoer: $y_1 = 98,7 \cdot 1,025^x$ en $y_2 = 300$
 Venster: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 400$
 Optie: snijpunten
 Volgens het exponentiële model wordt de straling na 45 jaar schadelijk.

6 Veranderingen

Voorkennis

V1 a De formule $h = 22 - 1,4t$ hoort bij de dunne kaars, want de hoogte neemt daarbij sneller af.

b De hoogte van de dunne kaars neemt met 1,4 cm per uur af.

$$22 - 1,4t = 0$$

$$15 - 0,3t = 0$$

$$1,4t = 22$$

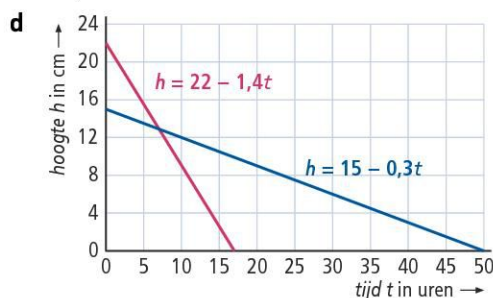
$$0,3t = 15$$

$$t \approx 15,7$$

$$t = 50$$

De dunne kaars kan ongeveer 15,7 uur branden.

De dikke kaars kan 50 uur branden.



V2 a Het startgetal is 25 en dat zijn de vaste kosten in euro's.

De richtingscoëfficiënt is 45 en dat is het uurtarief in euro's.

$$25 + 45t = 182,50$$

$$45t = 157,50$$

$$t = 3,5$$

De monteur is 3,5 uur bezig geweest.

c Beide bedrijven rekenen hetzelfde uurtarief, dus de grafieken lopen evenwijdig. De vaste kosten zijn bij Solution € 5,- hoger dan bij Techno, dus de grafiek van Solution ligt 5 hoger dan de grafiek van Techno.

V3 a

x	0	1	4	8	10
y	6	6,75	9	12	13,5

b De tabel hoort bij een lineair verband, dus de formule is van de vorm

$y = ax + b$. Het startgetal is 6 en de richtingscoëfficiënt is 0,75.

Een formule bij de tabel is $y = 0,75x + 6$.

V4 Het startgetal van lijn k is 8 en de richtingscoëfficiënt is -1 .

Een formule bij lijn k is $y = -x + 8$.

Het startgetal van lijn l is -4 en de richtingscoëfficiënt is 4.

Een formule bij lijn l is $y = 4x - 4$.

Het startgetal van lijn m is 0 en de richtingscoëfficiënt is $2\frac{1}{2}$.

Een formule bij lijn m is $y = 2\frac{1}{2}x$.

Het startgetal van lijn n is -5 en de richtingscoëfficiënt is -5 .

Een formule bij lijn n is $y = -5x - 5$.

V5 a Een formule bij lijn l is van de vorm $y = -0,4x + b$.

Invullen van $x = 22$ en $y = 14$ geeft $14 = -0,4 \times 22 + b$, oftewel $14 = -8,8 + b$, dus $b = 22,8$.

Een formule bij lijn l is $y = -0,4x + 22,8$.

6 Veranderingen

- b** De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{-4-2}{6-2} = \frac{-6}{4} = -1\frac{1}{2}$.

Een formule bij lijn m is van de vorm $y = -1\frac{1}{2}x + b$.

Invullen van $x = 2$ en $y = 2$ geeft $2 = -1\frac{1}{2} \times 2 + b$, oftewel $2 = -3 + b$, dus $b = 5$.

Een formule bij lijn m is $y = -1\frac{1}{2}x + 5$.

- c** De richtingscoëfficiënt van de grafiek bij $y = 2(0,6x - 3)$, oftewel $y = 1,2x - 6$ is 1,2, dus de richtingscoëfficiënt van lijn n is ook 1,2.

Een formule bij lijn n is van de vorm $y = 1,2x + b$.

Invullen van $x = 8$ en $y = 11$ geeft $11 = 1,2 \times 8 + b$, oftewel $11 = 9,6 + b$, dus $b = 1,4$.

Een formule bij lijn n is $y = 1,2x + 1,4$.

- V6 a** Beiden hebben 45 km in 2,5 uur gefietst.

<i>afgelegde afstand</i> in km	45	18
<i>tijd</i> in uren	2,5	1

De gemiddelde snelheid was voor beiden 18 km per uur.

- b** De grafiek van Marja is een rechte lijn met startgetal 0 en richtingscoëfficiënt 18. Een formule voor de grafiek van Marja is $a = 18t$.
- c** Marja fietste met een constante snelheid.
- d** Marja fietste 2 uur na het begin van de tocht sneller. Je kunt dat aan de grafieken zien, omdat op dat tijdstip de grafiek van Marja steiler loopt dan de grafiek van Jasper.
- e** Na ongeveer 1,25 uur fietsten Marja en Jasper even snel, want op dat tijdstip lopen de grafieken even steil.

- V7 a** $f(1) = 15 \times 1 + 10 = 25$ en $g(1) = 20 \times 1,25^1 = 25$, dus de grafieken snijden elkaar in het punt met de coördinaten (1, 25).

- b** De grafiek van f stijgt links van het snijpunt sneller.
- c** De grafiek van g stijgt steeds sneller, terwijl de grafiek van f constant stijgt. Er moet daarom een tweede snijpunt zijn, rechts van het eerste snijpunt.

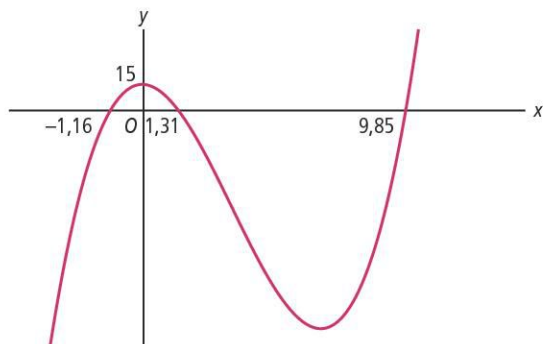
6.1 Stijgen en dalen

intro Na ongeveer 35 seconden versnelde Dylan het meest, want daar loopt de grafiek het steilst.

- 1 a** De minimumtemperatuur is ongeveer $-6,5^\circ\text{C}$ en de maximumtemperatuur is 2°C .
- b** Het verschil tussen de minimum en de maximumtemperatuur is ongeveer $2^\circ\text{C} - (-6,5^\circ\text{C}) = 8,5^\circ\text{C}$.
- c** Tussen 10.00 uur en 13.00 uur steeg de temperatuur van -6°C naar 0°C . In deze periode steeg de temperatuur $6^\circ\text{C} : 3 = 2^\circ\text{C}$ per uur.
- d** In de periode van 4.00 uur tot 9.00 uur en in de periode van 16.00 uur tot 24.00 uur daalde de temperatuur.

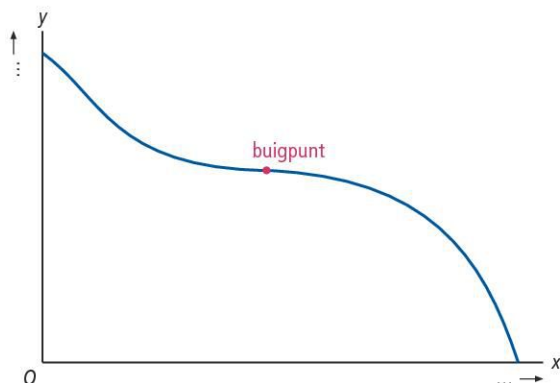
- 2 a** De grafiek is stijgend in de perioden van 6 uur tot 8 uur, van 10 uur tot 12 uur en van 14 uur tot 16 uur.
- b** De grafiek is dalend in de perioden van 4 uur tot 6 uur, van 8 uur tot 10 uur en van 16 uur tot 24 uur.
- c** De temperatuur is constant van 12 uur tot 14 uur en dat is 2 uur lang.
- d** De maximale waarden zijn 20°C en 21°C .
- e** De temperatuur heeft om 6 uur en om 10 uur een minimum.

3 a



- b** Invoer: $y_1 = x^3 - 10x^2 + 15$
 Venster: $-5 \leq x \leq 15$ en $-150 \leq y \leq 50$
 Opties: minimum en maximum
 De coördinaten van de toppen zijn $(0, 15)$ en $(6,67; -133,15)$.
- c** Bij de top $(6,67; -133,15)$ is er sprake van een minimum.
 En bij de top $(0, 15)$ is er sprake van een maximum.
- 4 a** De minimale waterhoogte is ongeveer 1,6 meter en de maximale waterhoogte is ongeveer 6,5 meter.
- b** In de periode van ongeveer 6.00 uur tot 7.00 uur steeg het water het snelst.
- c** In de periode van 12.00 uur tot 15.00 uur daalde het water van ongeveer 5,5 meter of 550 cm naar ongeveer 2 meter ofwel 200 cm.
 In die periode daalde het water $(550 - 200) : 3 \approx 117$ cm per uur.
- d** Deze steeds snellere stijging stopt ongeveer om 21.00 uur.
- 5 a** Op het stuk van de grafiek dat tussen punt A en punt B ligt, is sprake van afnemende stijging.
- b** Tussen de punten B en C is sprake van toenemende daling.
- c** Tussen de punten C en D is sprake van afnemende daling.
- d** Bij punt C gaat de grafiek van toenemende daling over in afnemende daling.
 Bij punt E gaat de grafiek van toenemende stijging over in afnemende stijging.

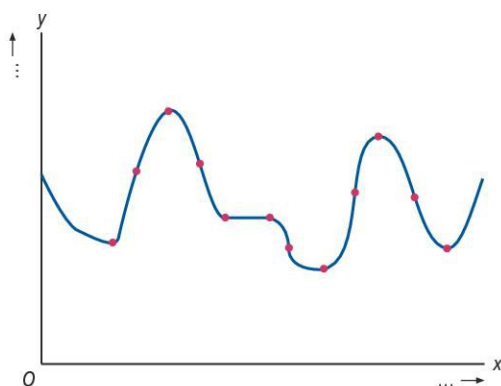
6 Bijvoorbeeld



6 Veranderingen

- 7 a** De punten B en D zijn de toppen van de grafiek. Bij punt B is er sprake van een maximum en bij punt D is er sprake van een minimum.
- b** De punten C en E zijn buigpunten van de grafiek.
- 8 a** De groeifactor per maand is $1,45^{\frac{1}{12}} = 1,0314 \dots \approx 1,03$.
- b** Er is sprake van toenemende stijging van het aantal gebruikers, want bij exponentiële groei met een groeifactor groter dan 1 is er altijd sprake van toenemende stijging.
- c** In het jaar 2013 is er sprake van een constante stijging, want bij lineaire stijging is er altijd sprake van een constante stijging.
- 05 a** Tussen punt B en punt D stijgt de grafiek. Tussen punt A en punt B en tussen punt D en punt F daalt de grafiek.
- b** Het deel van de grafiek tussen punt B en punt C is toenemend stijgend.
- c** Tussen punt C en punt D stijgt de grafiek steeds minder, dus is de grafiek daar afnemend stijgend.
- d** Tussen punt D en punt E is er sprake van toenemende daling.
- e** Bij punt C gaat de grafiek van toenemende stijging over in afnemende stijging.
Bij punt E gaat de grafiek van toenemende daling over in afnemende daling.
- 07 a** De punten Q en S zijn de toppen van de grafiek. Bij punt Q is er sprake van een maximum en bij punt S is er sprake van een minimum.
- b** Punt T is een buigpunt, want de grafiek gaat daar over van toenemend stijgend in afnemend stijgend.
- c** Punt R is ook een buigpunt, want de grafiek gaat daar over van toenemend dalend in afnemend dalend.
- U1 a** Bij punt D is er sprake van een minimum en bij punt F is er sprake van een maximum.
- b** De punten C en E zijn buigpunten van de grafiek.

U2 Bijvoorbeeld



6.2 Toenamediagrammen

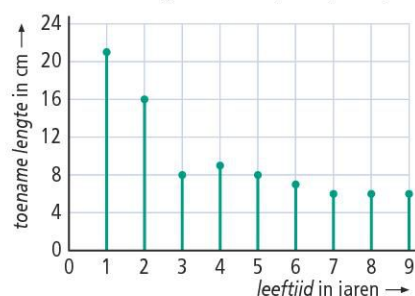
intro De hoogste AEX-index werd op 5 december bereikt, want elke dag tot 5 december eindigde de AEX-index hoger dan de dag ervoor.
Op handelsdag 8 december (na het weekend), eindigde de AEX-index 1 punt lager dan op 5 december.

- 9 a** Tussen $t = 6$ en $t = 7$ is de temperatuur met 2 graden gestegen.
In de rechter grafiek zie je dat terug aan het staafje met een lengte 2 bij $t = 7$.
- b** Het staafje met lengte 2,5 bij $t = 6$ betekent dat de temperatuur tussen $t = 5$ en $t = 6$ met 2,5 graden is toegenomen.
- c** Als een staafje naar beneden is getekend, betekent het dat de temperatuur is afgenomen.
- d** Dit betekent dat de temperatuur tussen $t = 3$ en $t = 4$ het meest is afgenomen.
- e** Op $t = 7$ is de temperatuur 2°C . In de rechter grafiek is af te lezen dat de temperatuur tussen $t = 7$ en $t = 8$ met 2°C is toegenomen.
Op het tijdstip $t = 8$ is de temperatuur $2^\circ\text{C} + 2^\circ\text{C} = 4^\circ\text{C}$.
In de rechter grafiek is af te lezen dat de temperatuur tussen $t = 8$ en $t = 9$ met 1°C is toegenomen.
Op het tijdstip $t = 9$ is de temperatuur $4^\circ\text{C} + 1^\circ\text{C} = 5^\circ\text{C}$.

10 a b

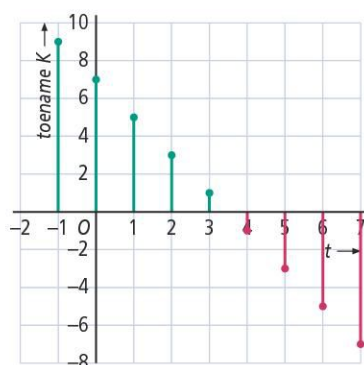
Breid de tabel uit met een rij met toenamen.

leeftijd in jaren	0	1	2	3	4	5	6
lengte in cm	57	78	94	102	111	119	126
toename lengte in cm	-	21	16	8	9	8	7

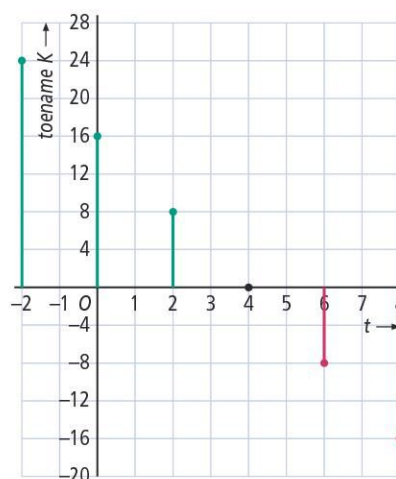


- c** Op z'n negende verjaardag was Phil $126 + 6 + 6 + 6 = 144$ cm lang.

11 a



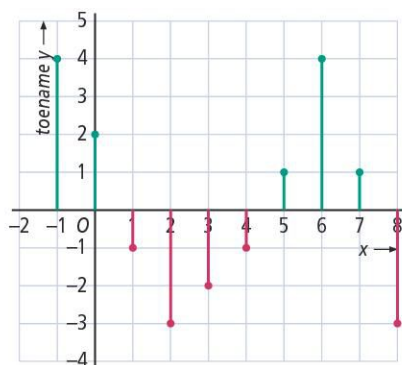
b



- c** Bij het toenamediagram van opdracht b ben je de informatie over de tussenliggende waarden van t kwijtgeraakt.

6 Veranderingen

12 a



- b Aan het toenamediaagram kun je zien dat de grafiek drie toppen heeft, omdat er twee keer een overgang van toename naar afname is en daarbij hoort een maximum en één keer een overgang van afname naar toename is en daarbij hoort een minimum.
- c Bij $t = 2$ is de afname maximaal. Tot $t = 2$ neemt de afname toe, maar daarna neemt de afname af. Er is dus sprake van een buigpunt in de buurt van $t = 2$.
- Bij $t = 6$ is de toename maximaal. Tot $t = 6$ neemt de toename toe, maar daarna neemt de toename af. Er is dus sprake van een buigpunt in de buurt van $t = 6$.

13

Toenamediaagram A hoort bij formule III, want de formule is lineair met richtingscoëfficiënt $-2,5$ en de bijbehorende grafiek is constant dalend.

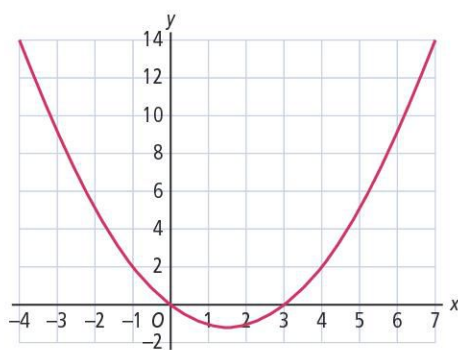
Toenamediaagram B hoort bij formule II, want de formule is een wortelformule en de bijbehorende grafiek is afnemend stijgend.

Toenamediaagram C hoort bij formule I, want de formule is exponentieel met groeifactor 2 en de bijbehorende grafiek is toenemend stijgend.

Toenamediaagram D hoort bij formule IV, want de formule is kwadratisch en de bijbehorende grafiek is een dalparabool en die is eerst afnemend dalend en daarna toenemend stijgend.

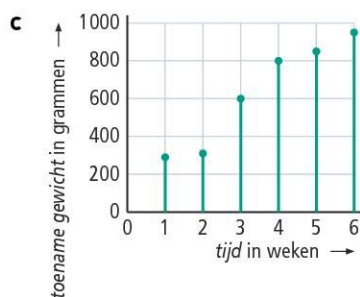
14

Bijvoorbeeld, uitgaande van $y = 0$ bij $x = 0$.

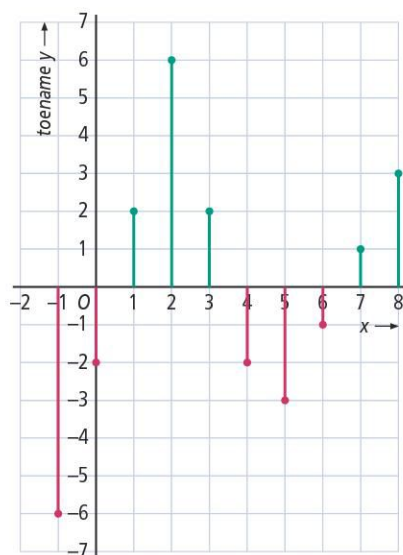


010 a De gewichtstoename in de eerste week is $3585 - 3295 = 290$ gram.

b leeftijd in weken	0	1	2	3	4	5	6
gewicht in grammen	3295	3585	3895	4495	5295	6145	7095
toename gewicht	-	290	310	600	800	850	950

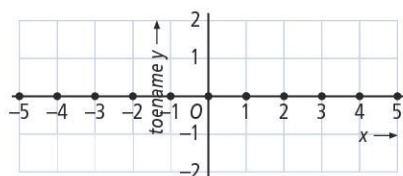


012 a

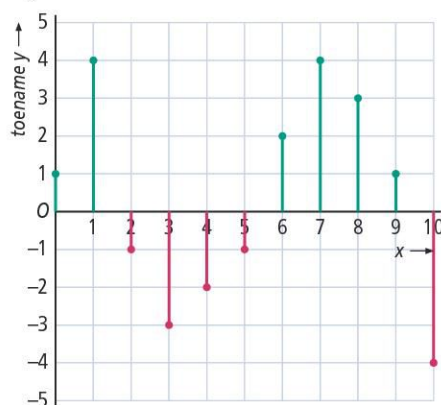


- b** Deze verandering zie je in het toenamediagram, omdat er een overgang van afname naar toename is en daarbij hoort een minimum.
- c** Aan het toenamediagram kun je zien dat de grafiek nog twee andere toppen heeft, omdat er één keer een overgang van toename naar afname is en daarbij hoort een maximum en één keer een overgang van afname naar toename is en daarbij hoort een minimum.
- d** Dat zie je in het toenamediagram, omdat bij $x = 2$ de toename maximaal is. Tot $x = 2$ neemt de toename toe, maar daarna neemt de toename af. Er is dus sprake van een buigpunt in de buurt van $x = 2$.
- e** Bij $x = 5$ is de afname maximaal. Tot $x = 5$ neemt de afname toe, maar daarna neemt de afname af. Er is dus sprake van een buigpunt in de buurt van $x = 5$.

U3 a Bijvoorbeeld

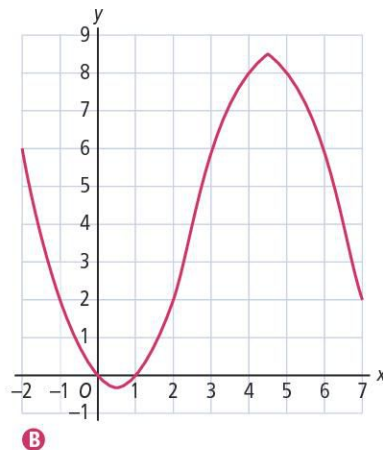
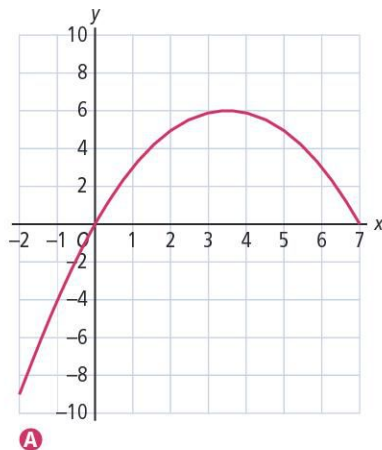


b Bijvoorbeeld



6 Veranderingen

U4 Bijvoorbeeld, uitgaande van $y = 0$ bij $x = 0$.



6.3 Gemiddelde verandering

intro De eerste 10 minuten bleef haar gemiddelde snelheid redelijk constant. Daarna gaat ze langzamer lopen, maar nog wel met een constante snelheid.

- 15 a** $s(15) = 0,018 \times 15^2 - 0,000002 \times 15^4 = 3,94875$
Dit betekent dat de wielrenner na 15 minuten ongeveer 3,95 kilometer afgelegd had.
- b** Als de wielrenner met een constante snelheid had gereden, dan had de grafiek er als een stijgende rechte lijn eruit gezien.
- c** Tussen de 30^e en de 40^e minuut loopt de grafiek steiler dan tussen de 10^e en de 20^e minuut.
- d** De betekenis van $s(30) - s(15)$ is de afgelegde afstand tussen de 15e en de 30e minuut.
- e** $s(30) = 0,018 \times 30^2 - 0,000002 \times 30^4 = 14,58$
 $s(30) - s(15) = 14,58 - 3,94875 = 10,63125$
De gemiddelde snelheid van de wielrenner tussen $t = 15$ en $t = 30$ was $10,63125 : 15 = 0,70875 \approx 0,71$ km per minuut.
- f** Dat is $0,70875 \times 60 = 42,525$ km per uur.
- g** $s(40) - s(35) = 23,68 - 19,04875 = 4,63125$
De gemiddelde snelheid van de wielrenner tussen $t = 35$ en $t = 40$ was $(4,63125 : 5) \times 60 = 0,92625 \times 60 = 55,575$ km per uur.
- 16 a** De toename over het interval $[1, 4]$ is $f(4) - f(1) = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 4 - 2 = 2$.
- b** Over het interval $[1, 4]$ neemt x met $4 - 1 = 3$ toe.
De gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$ is $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}$.
- c** De gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[1, 9]$ is $\frac{f(9) - f(1)}{9 - 1} = \frac{6 - 2}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$.
- d** De lijn heeft hetzelfde beginpunt en eindpunt, dus de stijging is hetzelfde, dus ook de gemiddelde stijging over het interval $[1, 9]$.

17 a $f(1) = -1^2 - 2 \times 1 + 7 = 4$ en $f(5) = -5^2 - 2 \times 5 + 7 = -28$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-28 - 4}{4} = \frac{-32}{4} = -8$$

$$g(1) = \frac{1}{2} \times 1^3 + 2 \times 1^2 - 6 = -3\frac{1}{2} \text{ en } g(5) = \frac{1}{2} \times 5^3 + 2 \times 5^2 - 6 = 106\frac{1}{2}$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(5) - g(1)}{5 - 1} = \frac{106\frac{1}{2} - -3\frac{1}{2}}{4} = \frac{110}{4} = 27\frac{1}{2}$$

b $f(-2) = -(-2)^2 - 2 \times -2 + 7 = 7$ en $f(3) = -3^2 - 2 \times 3 + 7 = -8$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{-8 - 7}{3 + 2} = \frac{-15}{5} = -3$$

$$g(-2) = \frac{1}{2} \times (-2)^3 + 2 \times (-2)^2 - 6 = -2 \text{ en } g(3) = \frac{1}{2} \times 3^3 + 2 \times 3^2 - 6 = 25,5$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(3) - g(-2)}{3 - (-2)} = \frac{25,5 - -2}{3 + 2} = \frac{27,5}{5} = 5,5$$

18 a $s(30) = 0,018 \times 30^2 - 0,000002 \times 30^4 = 14,58$ en

$$s(45) = 0,018 \times 45^2 - 0,000002 \times 45^4 = 28,24875$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(45) - s(30)}{45 - 30} = \frac{28,24875 - 14,58}{15} = \frac{13,66875}{15} = 0,91125$$

- b** Het differentiequotient over het interval $[30, 45]$ is gelijk aan de gemiddelde verandering van $s(t)$ in km/min. Dit is de gemiddelde snelheid op dat interval in km/min. Het interval $[30, 45]$ is het derde kwartier.

19 a $A = 5,12 \cdot 1,02^{19} = 7,4588 \dots$

In 2019 waren er in Nederland 7 459 000 personenauto's.

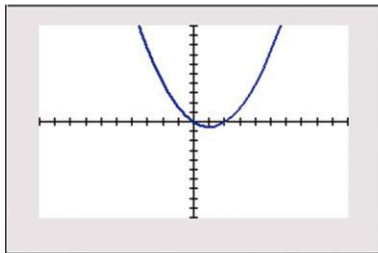
b $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{7,4588 \dots - 5,12}{19 - 0} = \frac{2,3388 \dots}{19} \approx 0,123$

De gemiddelde toename per jaar was ongeveer 123 000 personenauto's.

20 a $f(0) = 0,5 \times 0^2 - 0 = 0$ en $f(2) = 0,5 \times 2^2 - 2 = 0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

b



Het differentiequotient over het interval $[0, 2]$ is gelijk aan 0, omdat de punten bij $x = 0$ en bij $x = 2$ even hoog liggen.

- c** Het differentiequotient van $f(x)$ is ook gelijk aan 0 over alle intervallen die symmetrisch zijn ten opzichte van 1, bijvoorbeeld $[-1, 3]$ en $[-2, 4]$.

017 a $f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 8 = 5$ en $f(7) = 7^2 - 4 \times 7 + 8 = 29$

- b** Het differentiequotient van $f(x)$ over het interval $[3, 7]$ is

$$\frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{29 - 5}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

c $f(-2) = (-2)^2 - 4 \times -2 + 8 = 20$ en $f(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 8 = 8$

Het differentiequotient van $f(x)$ over het interval $[-2, 4]$ is

$$\frac{f(4) - f(-2)}{4 - -2} = \frac{8 - 20}{4 + 2} = \frac{-12}{6} = -2.$$

6 Veranderingen

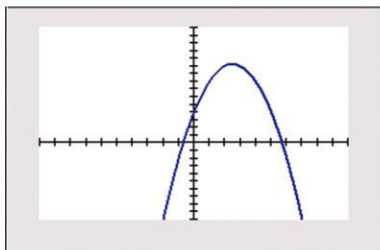
$$d \quad g(3) = \frac{1}{2} \times 3^3 - 4 \times 3^2 - 3 = -25\frac{1}{2} \text{ en } g(7) = \frac{1}{2} \times 7^3 - 4 \times 7^2 - 3 = -27\frac{1}{2}$$

$$\frac{g(7) - g(3)}{7 - 3} = \frac{-27\frac{1}{2} - (-25\frac{1}{2})}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$g(-2) = \frac{1}{2} \times (-2)^3 - 4 \times (-2)^2 - 3 = -23 \text{ en } g(4) = \frac{1}{2} \times 4^3 - 4 \times 4^2 - 3 = -35$$

$$\frac{g(4) - g(-2)}{4 - (-2)} = \frac{-35 - (-23)}{4 + 2} = \frac{-12}{6} = -2$$

U5 a



b $f(1) = -2$, dus moet ook $f(b) = -2$ zijn.

$$-x^2 + 5x + 4 = -2$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x + 1)(x - 6) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ of } x - 6 = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 6$$

Het differentiequotiënt van $f(x)$ is gelijk aan 0 als $b = 6$.

c Het differentiequotiënt van $f(x)$ is negatief als $b > 6$.

$$d \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(-1)}{b - (-1)} = \frac{-b^2 + 5b + 4 - (-2)}{b + 1} = \frac{-b^2 + 5b + 6}{b + 1} = 2$$

$$-b^2 + 5b + 6 = 2(b + 1)$$

$$-b^2 + 5b + 6 = 2b + 2$$

$$b^2 - 3b - 4 = 0$$

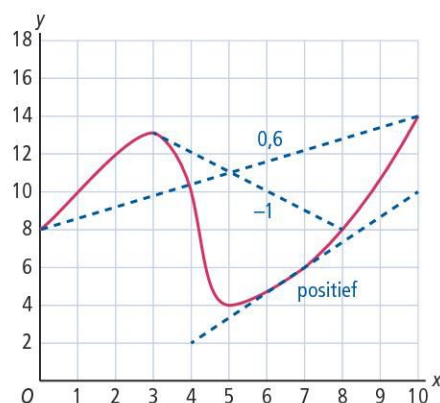
$$(b + 1)(b - 4) = 0$$

$$b + 1 = 0 \text{ of } b - 4 = 0$$

$$b = -1 \text{ of } b = 4$$

Het differentiequotiënt van $f(x)$ is gelijk aan 2 als $b = 4$.

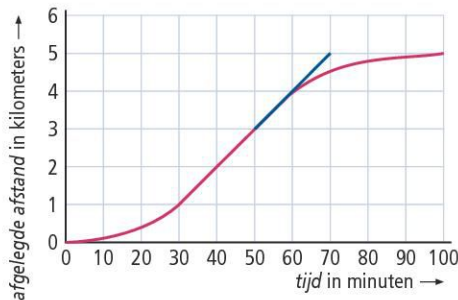
U6 Bijvoorbeeld



6.4 Hellingen benaderen

intro Een snelheid van 80 kilometer per uur is 40 kilometer per half uur.
De foto kan gemaakt zijn op het deel van de rit tussen $t = 1$ en $t = 1,5$.

- 21 a** De snelheid na 50 minuten is gelijk aan de gemiddelde snelheid tussen 40 en 60 minuten, omdat de helling na 50 minuten even groot is als de gemiddelde helling tussen 40 en 60 minuten.
- b** In $60 - 40 = 20$ minuten wandelt Frits $4 - 2 = 2$ km.
Dat is met een snelheid van 2 km per 20 minuten, oftewel 6 km per uur.
- c** Hij doet dan 70 minuten over de wandeling.



- 22 a** Bij $t = 0$ is $a = 1,25 \times 0^2 = 0$ en bij $t = 4$ is $a = 1,25 \times 4^2 = 20$.

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{4 - 0} = \frac{20}{4} = 5$$
 De gemiddelde snelheid tussen $t = 0$ en $t = 4$ is 5 meter per seconde.
- b** Deze gemiddelde snelheid is lager dan de snelheid van de auto op $t = 4$, omdat de auto vanuit stilstand vertrok.
- c** Bij $t = 6$ is $a = 1,25 \times 6^2 = 45$.

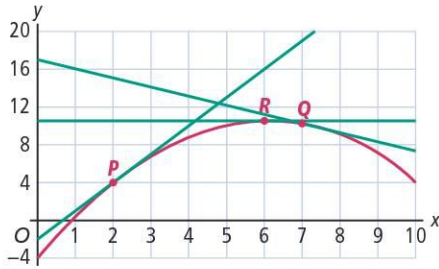
$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{45 - 20}{6 - 4} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$$
 De gemiddelde snelheid tussen $t = 4$ en $t = 6$ is $12\frac{1}{2}$ meter per seconde.
- d** Deze gemiddelde snelheid is hoger dan de snelheid van de auto op $t = 4$.
Op $t = 0$ stond de wagen nog stil, daarna wordt de snelheid steeds groter.
- e** Deze lijn gaat door de punten (4, 20) en bijvoorbeeld (8, 60).
De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{60 - 20}{8 - 4} = \frac{40}{4} = 10$.
- f** De snelheid van de auto op $t = 4$ is 10 meter per seconde.



- b** De raaklijn gaat door de punten (4, 2) en bijvoorbeeld (10, 8).
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is ongeveer $\frac{8 - 2}{10 - 4} = \frac{6}{6} = 1$.
- c** De helling van de grafiek in punt P is ongeveer 1.

6 Veranderingen

24 a



De raaklijn in punt P gaat door de punten $(2, 4)$ en bijvoorbeeld $(6, 16)$.

De helling van de grafiek in punt P is ongeveer $\frac{16 - 4}{6 - 2} = \frac{12}{4} = 3$.

b Zie de tekening bij opdracht 24a.

De raaklijn in punt Q gaat door de punten $(7, 10)$ en bijvoorbeeld $(0, 17)$.

De helling van de grafiek in punt Q is ongeveer $\frac{10 - 17}{7 - 0} = \frac{-7}{7} = -1$.

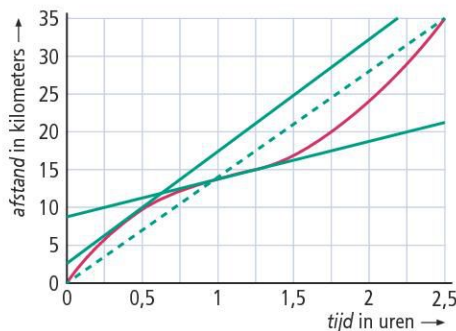
De raaklijn in punt R gaat door de punten $(6, 11)$ en bijvoorbeeld $(0, 11)$.

De helling van de grafiek in punt R is ongeveer $\frac{11 - 11}{6 - 0} = \frac{0}{6} = 0$.

25 a De gemiddelde snelheid van haar fietstocht is

$$\frac{35 - 0}{2,5 - 0} = \frac{35}{2,5} = 14 \text{ km per uur.}$$

b



De raaklijn gaat door de punten $(0,5; 10)$ en bijvoorbeeld $(1,5; 25)$.

De snelheid van Floor na een half uur is ongeveer

$$\frac{25 - 10}{1,5 - 0,5} = \frac{15}{1} = 15 \text{ km per uur.}$$

c Na ongeveer 1,25 uur fietste ze het langzaamst.

d Zie de tekening bij opdracht 25b.

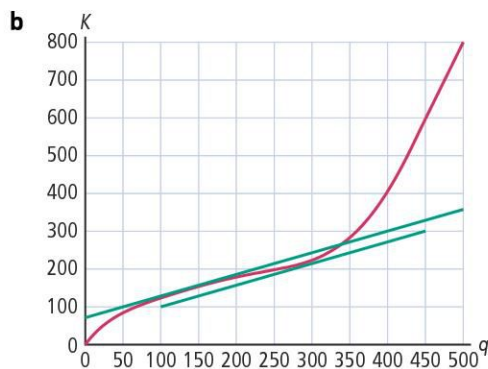
De raaklijn gaat door de punten $(1,25; 14)$ en bijvoorbeeld $(2, 19)$.

De langzaamste snelheid is ongeveer $\frac{19 - 14}{2 - 1,25} = \frac{5}{1,75} = 2,9 \text{ km per uur.}$

e Zie de tekening bij opdracht 25b.

De gestippelde lijn geeft het gemiddelde aan. Floor fietste sneller op de momenten dat de helling van de grafiek groter was dan het gemiddelde. Tussen 0 uur en 0,5 uur en tussen 1,75 uur en 2,5 uur fietste Floor sneller dan het gemiddelde.

26 a De marginale kosten zijn in deze situatie positief, omdat de helling van de grafiek overal groter dan 0 is.



De raaklijn gaat bijvoorbeeld door de punten (50, 100) en (400, 300).

De marginale kosten bij $q = 100$ zijn ongeveer $\frac{300 - 100}{400 - 50} = \frac{200}{350} \approx 0,57$ euro.

c Zie de tekening bij opdracht 26b.

Bij ongeveer 275 geproduceerde verfkwasten zijn de marginale kosten even groot als bij $q = 100$, want daar is de helling van de grafiek even groot.

d Bij ongeveer 200 geproduceerde verfkwasten zijn de marginale kosten op zijn kleinst, want daar is de helling van de grafiek het kleinst.

024 a De raaklijn in punt P gaat bijvoorbeeld door de punten (0, 2) en (4, 8).

b De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{8 - 2}{4 - 0} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

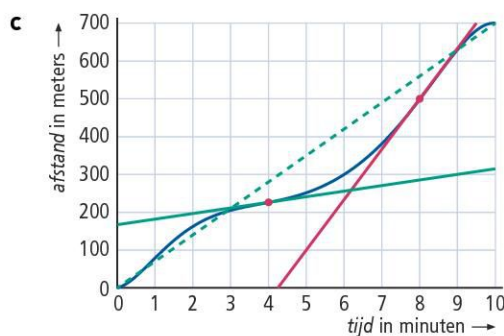
c De helling van de grafiek in punt P is ongeveer $1\frac{1}{2}$.

025 a De gemiddelde snelheid van zijn tocht naar school was

$$\frac{700 - 0}{10 - 0} = \frac{700}{10} = 70 \text{ meter per minuut.}$$

b De raaklijn gaat door de punten (8, 500) en bijvoorbeeld (5, 100).

Zijn snelheid op dat moment was $\frac{500 - 100}{8 - 5} = \frac{400}{3} \approx 133$ meter per minuut.



De raaklijn gaat bijvoorbeeld door de punten (2, 200) en (9, 300).

Deze snelheid was $\frac{300 - 200}{9 - 2} = \frac{100}{7} \approx 14$ meter per minuut.

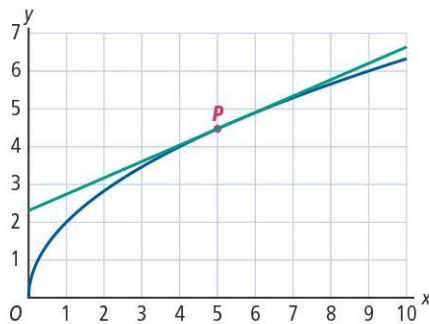
d Zie de tekening bij opdracht 025c.

De gestippelde lijn geeft het gemiddelde aan. Martin liep sneller op de momenten dat de helling van de grafiek groter was dan het gemiddelde.

Tussen ongeveer 0 minuten en 2 minuten en tussen 6 minuten en 9 minuten liep Martin sneller dan het gemiddelde.

6 Veranderingen

U7 a



De raaklijn gaat bijvoorbeeld door de punten $(0; 2,3)$ en $(10; 6,8)$. De helling

van de gegeven grafiek in punt P is ongeveer $\frac{6,8 - 2,3}{10 - 0} = \frac{4,5}{10} = 0,45$.

b Bij $x = 5$ is $y = 2\sqrt{5}$. De coördinaten van punt P zijn $(5, 2\sqrt{5})$.

Bij $x = 5,1$ is $y = 2\sqrt{5,1}$.

De coördinaten van een punt dicht bij punt P zijn $(5,1; 2\sqrt{5,1})$.

c De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{2\sqrt{5,1} - 2\sqrt{5}}{5,1 - 5} \approx 0,44$.

d Ja, de antwoorden van de opdrachten a en c komen redelijk overeen.

e De methode met de berekening geeft de grootste nauwkeurigheid, zeker als je een punt neemt dat nog dicht bij punt P ligt, omdat aflezen altijd minder nauwkeurig is dan (exact) berekenen.

6.5 Gemengde opdrachten

27 a Bij $t = 0$ is $h = -5 \times 0^2 + 20 \times 0 + 105 = 105$.

De bal wordt op een hoogte van 105 meter losgelaten.

b Bij $t = 2$ is $h = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 + 105 = 125$.

Bij $t = 7$ is $h = -5 \times 7^2 + 20 \times 7 + 105 = 0$.

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{0 - 125}{7 - 2} = \frac{-125}{5} = -25$$

De gemiddelde snelheid van de bal is 25 meter per seconde.

c Na twee seconden bereikt de bal de grootste hoogte, dus op $t = 2$ is de snelheid van de bal 0 meter per seconde en de helling van de grafiek op $t = 2$ is 0.

d Bij $t = 4$ is $h = -5 \times 4^2 + 20 \times 4 + 105 = 105$.

Bij $t = 4,1$ is $h = -5 \times 4,1^2 + 20 \times 4,1 + 105 = 102,95$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is ongeveer

$$\frac{102,95 - 105}{4,1 - 4} = \frac{-2,05}{0,1} = -20,5.$$

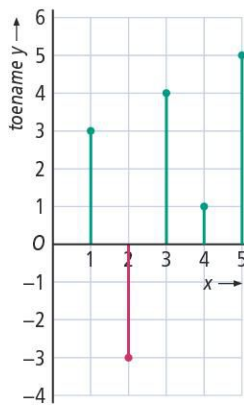
De snelheid van de bal op tijdstip $t = 4$ is ongeveer 20,5 meter per seconde.

e Bij $t = 6,9$ is $h = -5 \times 6,9^2 + 20 \times 6,9 + 105 = 4,95$.

Bij $t = 7$ is $h = -5 \times 7^2 + 20 \times 7 + 105 = 0$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is ongeveer $\frac{4,95 - 0}{6,95 - 7} = \frac{4,95}{-0,1} = -49,5$.

De bal valt met ongeveer 49,5 m/s op de grond.

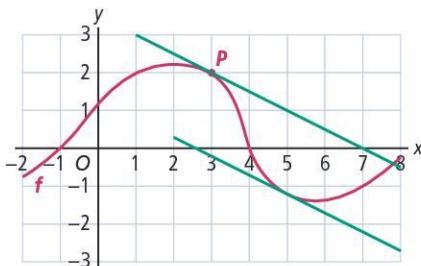
28 Bijvoorbeeld

29 a Het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[0, 3]$ is $\frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$.

b Je moet een interval $[a, b]$ kiezen waarvoor geldt dat $f(a) = f(b)$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ is bijvoorbeeld over het interval $[1, 3]$ of het interval $[-1, 4]$ gelijk aan 0.

c



De raaklijn gaat door de punten $(3, 2)$ en bijvoorbeeld $(7, 0)$.

De helling van de grafiek in het punt P is ongeveer $\frac{0-2}{7-3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

d Zie de tekening bij opdracht 29c. Ongeveer in het punt $(5; -1,2)$ is de helling even groot als in het punt $(1, 2)$, want de raaklijnen in deze twee punten lopen evenwijdig.

30 a Bij een productie van 20 horloges is $TO = 160$ euro en $TK = 90$ euro, dus de winst is $160 - 90 = 70$ euro.

b Als de productie vanaf $q = 0$ toeneemt, dan stijgen de totale kosten TK steeds sneller. De totale opbrengst TO stijgt eerst nog sneller dan TK en dus zal de winst afnemend stijgen. Dit verschil in stijging wordt steeds kleiner tot de winst bij ongeveer $q = 15$ maximaal is. Daarna is de winst afnemend dalend tot bij ongeveer $q = 29$ waar TO en TK gelijk zijn en de winst 0 is. Voor $q > 29$ is er sprake van verlies en dan is de winst toenemend dalend.

c Voor $q = 15$ stijgen de totale kosten en de totale opbrengst even snel, want dan zijn de hellingen van de grafieken van TK en TO (ongeveer) gelijk.

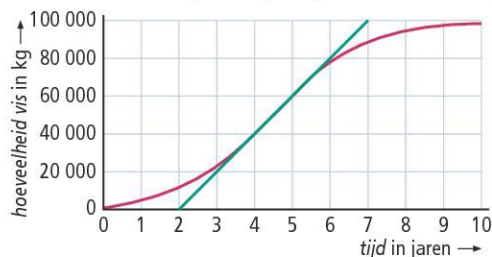
d Voor $q < 15$ is de grafiek van TO steiler dan de grafiek van TK en neemt de totale opbrengst dus sneller toe dan de totale kosten.
Voor $q > 15$ is de grafiek van TK steiler dan de grafiek van TO en nemen de totale kosten dus sneller toe dan de totale opbrengst.

De winst is dus maximaal bij de productie van 15 horloges.

6 Veranderingen

Onderzoeksoopdrachten

- 31** De maximale opbrengst ligt rond het buigpunt $(4\frac{1}{2}, 50\,000)$ van de grafiek.

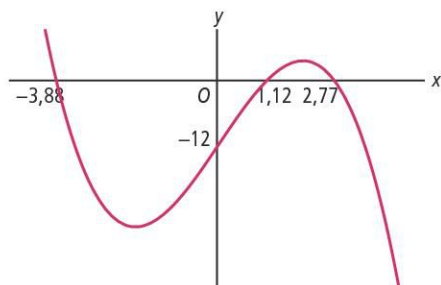


De raaklijn in het buigpunt gaat ongeveer door de punten $(7, 100\,000)$ en $(2, 0)$. De helling van de raaklijn is $20\,000$ kg vis per jaar. Het advies is te wachten tot het eind van het 5e jaar en dan jaarlijks $20\,000$ kg vis te vangen.

- 32** De grafiek is eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend. Dus zijn de toenames eerst klein en worden ze steeds groter tot er een maximale toename is bereikt. Daarna worden de toenames weer steeds kleiner. Hieraan voldoet alleen toenamediaagram A.

Samenvatting

S1 a



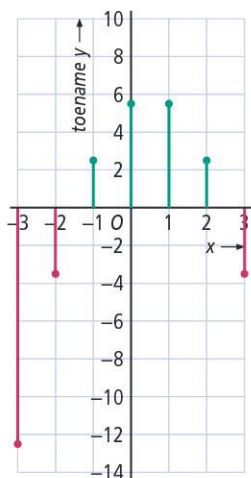
- b** Invoer: $y_1 = -x^3 + 12x - 12$
 Venster: $-5 \leq x \leq 5$ en $-40 \leq y \leq 10$
 Opties: minimum en maximum
 De coördinaten van de toppen zijn $(-2, -28)$ en $(2, 4)$.
- c** Bij de top $(-2, -28)$ is er sprake van een minimum.
 En bij de top $(2, 4)$ is er sprake van een maximum.
- d** De grafiek stijgt op het interval $(-2, 2)$.
- S2** $f(-1) = (-1)^2 - 3 \times -1 - 1 = 3$ en $f(7) = 7^2 - 3 \times 7 - 1 = 27$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(-1)}{7 - (-1)} = \frac{27 - 3}{7 + 1} = \frac{24}{8} = 3$$
- S3 a** De raaklijn gaat door de punten $(4, 0)$ en bijvoorbeeld $(5, 2)$.
 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt P is

$$\frac{2 - 0}{5 - 4} = \frac{2}{1} = 2.$$
- b** De helling van de grafiek in het punt met $x = 4$ is 2 .

- S4 a** Op het stuk van de grafiek dat tussen punt A en punt B ligt, is sprake van afnemende daling.
- b** Tussen de punten B en C is sprake van toenemende stijging.
- c** Het punt C is een buigpunt.

S5



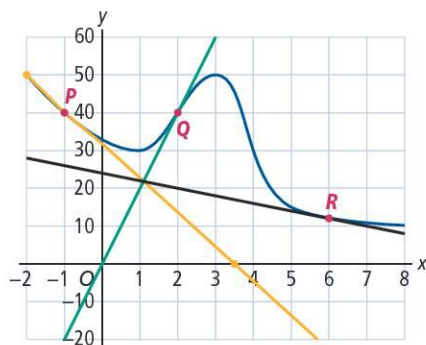
- S6 a** $s(15) = -2 \times 15^2 + 180 \times 15 = 2250$ en $s(20) = -2 \times 20^2 + 180 \times 20 = 2800$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(20) - s(15)}{20 - 15} = \frac{2800 - 2250}{5} = \frac{550}{5} = 110$$

De gemiddelde verandering van de functie over het interval $[15, 20]$ is 110 meter per minuut.

- b** Tussen $t = 15$ en $t = 20$ heeft Bo gemiddeld met een snelheid van $110 \times 60 : 1000 = 6,6$ kilometer per uur gelopen.

S7 a



De raaklijn gaat door de punten $(2, 40)$ en ongeveer $(-1, -20)$.

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{40 - (-20)}{2 - (-1)} = \frac{60}{3} = 20$.

De helling van de grafiek in punt Q is ongeveer 20.

- b** Zie de tekening bij opdracht S7a.

De raaklijn gaat ongeveer door de punten $(2, 20)$ en $(7, 10)$.

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{10 - 20}{7 - 2} = \frac{-10}{5} = -2$.

De helling van de grafiek in punt R is ongeveer -2 .

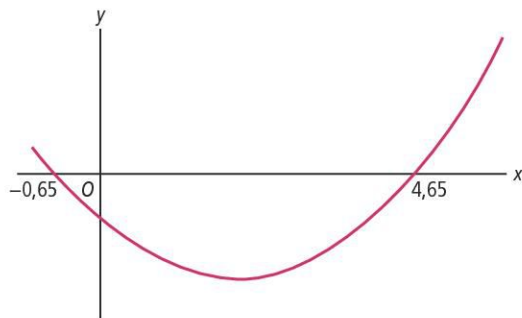
- c** De helling van de grafiek in het punt $(3, 50)$ is 0, want daar loopt de raaklijn aan de grafiek horizontaal.

6 Veranderingen

Test jezelf

- T1 a** In de perioden begin februari-half maart en begin juli-half augustus was er sprake van een toenemende stijging.
- b** De maximale waterhoogte was eind april-begin maart ongeveer 3,9 meter en half september ongeveer 2,3 meter.
- c** In de maanden januari en juni was er sprake van een afnemende daling.
- d** In de maand mei daalde de waterhoogte het snelst. De waterhoogte daalde toen met ongeveer $3,9 - 2 = 1,9$ meter.
- e** Deze grafiek heeft drie buigpunten.

T2 a

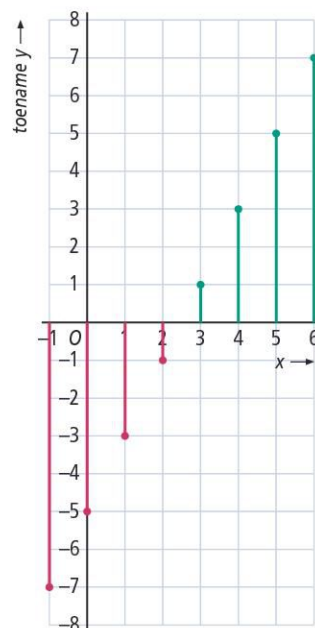


b $f(-1) = (-1)^2 - 4 \times -1 - 3 = 2$ en $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 - 3 = -7$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-7 - 2}{2 + 1} = \frac{-9}{3} = -3$$

- c** Het differentiequotient van $f(x)$ over het interval $[0, 4]$ is gelijk aan 0, omdat $f(0) = 0^2 - 4 \times 0 - 3 = -3$ en $f(4) = 4^2 - 4 \times 4 - 3 = -3$.
- d** De coördinaten van het punt waarin de helling van de grafiek gelijk aan 0 is, zijn $(2, -7)$, het maximum van de grafiek.
- e** De grafiek is symmetrisch ten opzichte van de lijn $x = -2$, dus de coördinaten van het punt waar de helling van de grafiek gelijk aan 2 is, zijn $(3, -6)$.

f



T3 a Bij deze grafiek hoort een afnemende daling.

b $f(1) = 4$ en $f(6) = -1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{-1 - 4}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

c



De raaklijn gaat door de punten (1, 4) en ongeveer (2, -1).

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{-1 - 4}{2 - 1} = \frac{-5}{1} = -5$.

De helling van de grafiek in het punt met $x = 1$ is ongeveer -5.

d Zie de tekening bij opdracht T3c.

De raaklijn gaat door de punten (6, -1) en ongeveer (0, 0).

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{-1 - 0}{6 - 0} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$.

De helling van de grafiek in het punt (6, -1) is ongeveer $-\frac{1}{6}$.

e Zie de tekening bij opdracht T3a.

De helling van de grafiek is in het punt (2, 1) gelijk aan $-1\frac{1}{2}$.

T4 a Van $Q = 21$ naar $Q = 22$ is de toename van R nog positief, maar van $Q = 22$ naar $Q = 23$ is de toename van R negatief.

Het advies aan de fabrikant is om nog 7 machines extra aan te schaffen.

Q	15	16	17	18	19	20	21	22
winst in duizenden euro's	115	117	122	129	137	144	149	151

De maximale winst die de fabrikant kan maken na het aanschaffen van de extra machines is € 151.000,-.

T5 a In een plot zie je dat de grafiek van f bij $x = 2$ niet bestaat, maar verder overal toenemend stijgend is, dus geen buigpunten heeft.

b $f(-2) = 10$ en $f(0) = 19$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{19 - 10}{2} = 4\frac{1}{2}$$

6 Veranderingen

c $f(3) = -35$ en $f(a) = \frac{-36}{a-2} + 1$

$$\frac{f(a) - f(3)}{a - 3} = 2$$

$$f(a) - (-35) = 2(a - 3)$$

$$\frac{-36}{a-2} + 1 + 35 = 2(a - 3)$$

$$\frac{-36}{a-2} + 36 = 2a - 6$$

Invoer: $y_1 = -36 : (x - 2) + 36$ en $y_2 = 2x - 6$

Venster: $-50 \leq x \leq 50$ en $-50 \leq y \leq 50$

Optie: snijpunten

Oplossing $x = 3$ of $x = 20$

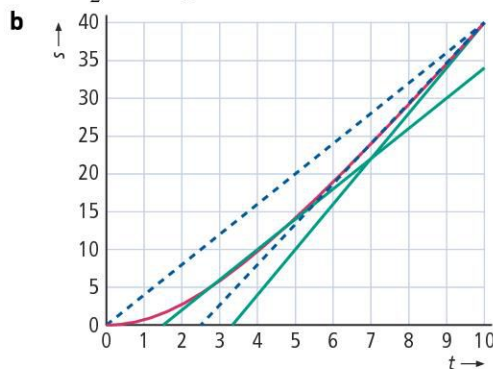
$x = 3$ voldoet niet.

De oplossing is $a = 20$.

T6 a Bij $t = 0$ is $s = \frac{20 \times 0^2}{3 \times 0 + 20} = 0$ en bij $t = 4$ is $s = \frac{20 \times 4^2}{3 \times 4 + 20} = 10$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$$

De gemiddelde snelheid van Jur gedurende de eerste 4 seconden van zijn rit is $2\frac{1}{2}$ meter per seconde.



De raaklijn gaat door de punten (4, 10) en ongeveer (9, 30).

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{30 - 10}{9 - 4} = \frac{20}{5} = 4$.

Zijn snelheid na precies 4 seconden is ongeveer 4 meter per seconde.

c Na 10 seconden heeft hij $\frac{20 \times 10^2}{3 \times 10 + 20} = 40$ meter afgelegd.

d Zie de tekening bij opdracht T6b.

De raaklijn gaat door de punten (10, 40) en ongeveer (5, 10).

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{40 - 10}{10 - 5} = \frac{30}{5} = 6$.

Zijn snelheid na 10 seconden is ongeveer 6 meter per seconde.

Na 60 seconden heeft hij ongeveer $40 + 50 \times 6 = 340$ meter afgelegd.

e Zie de tekening bij opdracht T6b.

Aan de gestippelde lijnen kun je zien dat de snelheid van Jur na 8 seconden hoger is dan de gemiddelde snelheid over het interval $[0, 10]$.

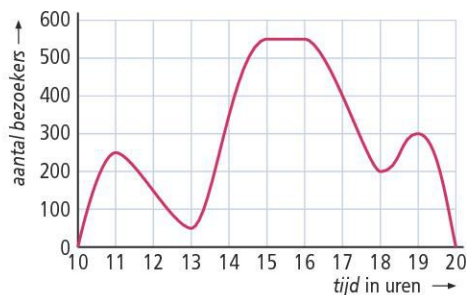
Extra oefening

- E1 a** Tussen punt A en punt B is sprake van afnemend stijgend, tussen punt B en punt C is sprake van toenemend dalend, tussen punt C en punt D is sprake van afnemend dalend, tussen punt D en punt E is sprake van toenemend stijgend, tussen punt E en punt F is sprake van afnemend stijgend en tussen punt F en punt G is sprake van toenemend dalend.
- b** In de punten B en F is er sprake van een maximum.
- c** De punten C en E zijn buigpunten van de grafiek.

- E2 a** Tussen 13.00 uur en 14.00 uur nam het aantal bezoekers met 300 toe.
- b** Tot ongeveer 16 uur nam het aantal bezoekers voor het laatst toe, dus ongeveer om 16.00 uur was het aantal bezoekers in het museum maximaal. Tussen 18.00 uur en 19.00 uur nam het aantal bezoekers ook nog toe, maar dat waren niet genoeg bezoekers om de afnamen tussen 16.00 uur en 18.00 uur te compenseren.

c

<i>tijd</i>	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<i>aantal</i>	0	250	150	50	350	550	550	400	200	300	0



- E3** Bij $t = 0$ is $h = 45 \times 0 - 5 \times 0^2 = 0$ en bij $t = 2$ is $h = 45 \times 2 - 5 \times 2^2 = 70$.
Over het interval $[0; 2]$ is de gemiddelde snelheid van de steen

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{70 - 0}{2 - 0} = \frac{70}{2} = 35 \text{ meter per seconde.}$$

Bij $t = 3$ is $h = 45 \times 3 - 5 \times 3^2 = 90$ en

bij $t = 4$ is $h = 45 \times 4 - 5 \times 4^2 = 100$.

Over het interval $[3; 4]$ is de gemiddelde snelheid van de steen

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{100 - 90}{4 - 3} = \frac{10}{1} = 10 \text{ meter per seconde.}$$

Bij $t = 4,5$ is $h = 45 \times 4,5 - 5 \times 4,5^2 = 101,25$ en bij $t = 9$ is

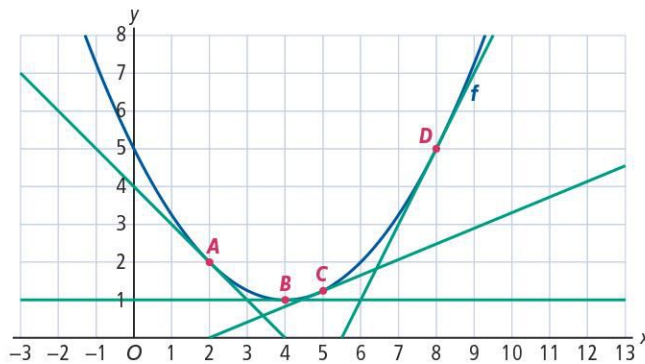
$h = 45 \times 9 - 5 \times 9^2 = 0$.

Over het interval $[4,5; 9]$ is de gemiddelde snelheid van de steen

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{0 - 101,25}{9 - 4,5} = \frac{-101,25}{4,5} = -22,5 \text{ meter per seconde.}$$

6 Veranderingen

E4 a



De raaklijn in punt A gaat door de punten (2, 2) en ongeveer (−3, 7).

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{2-7}{2-(-3)} = \frac{-5}{5} = -1$.

De helling van de grafiek in punt A is ongeveer −1.

b Zie de tekening bij opdracht E4a.

De helling van de grafiek in punt B is 0.

De raaklijn in punt C gaat ongeveer door de punten (2, 0) en (12, 4).

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{4-0}{12-2} = \frac{4}{10} = 0,4$.

De helling van de grafiek in punt C is ongeveer 0,4.

De raaklijn in punt D gaat door de punten (8, 5) en ongeveer (6, 1).

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{5-1}{8-6} = \frac{4}{2} = 2$.

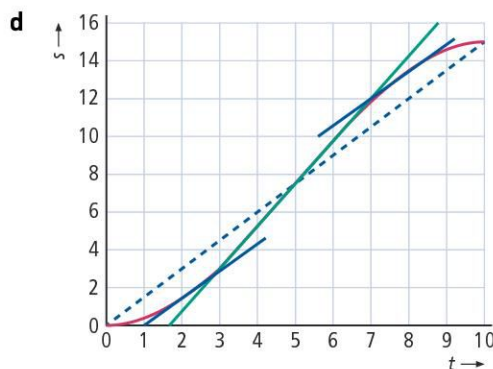
De helling van de grafiek in punt D is ongeveer 2.

E5 a Na 10 minuten heeft mevrouw Achterberg

$-0,03 \times 10^3 + 0,45 \times 10^2 = 15$ kilometer afgelegd.

b Haar gemiddelde snelheid tijdens de rit is $6 \times 15 = 90$ kilometer per uur.

c In de eerste 4 minuten ging haar snelheid steeds omhoog, daarna reed ze ongeveer 2 minuten met een constante snelheid en de laatste 4 minuten nam haar snelheid steeds verder af.



Ongeveer tussen $t = 4$ en $t = 6$ was haar snelheid het grootst.

De raaklijn gaat ongeveer door de punten (3, 3) en (7, 12).

De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{12-3}{7-3} = \frac{9}{4} = 2,25$.

Haar grootste snelheid was ongeveer 2,25 kilometer per minuut en dat is ongeveer $2,25 \times 60 = 135$ kilometer per uur.

- e Zie de tekening bij opdracht E5d.

De gestippelde lijn geeft de gemiddelde snelheid van de gehele rit weer.

In de punten van de grafiek waar de helling van de raaklijn evenwijdig loopt aan de gestippelde lijn reed ze met dezelfde snelheid.

Na ongeveer 2 minuten en na ongeveer 8 minuten reed ze met een snelheid die gelijk is aan de gemiddelde snelheid van de gehele rit.

- f De gestippelde lijn geeft de grafiek van de snelheid van meneer Bouma weer.

De richtingscoëfficiënt van de gestippelde lijn is $15 : 10 = 1,5$.

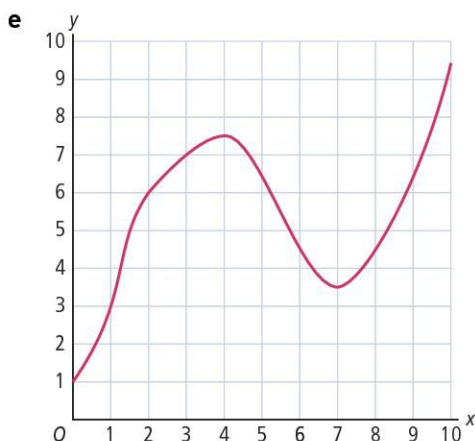
Een formule voor de afstand die meneer Bouma heeft afgelegd is $s = 1,5t$.

E6 a $f(3) = f(2) + 1 = 6 + 1 = 7$, $f(4) = f(3) + \frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ en
 $f(5) = f(4) - 1 = 7\frac{1}{2} - 1 = 6\frac{1}{2}$.
 $f(1) = f(2) - 3 = 6 - 3 = 3$ en $f(0) = f(1) - 2 = 3 - 2 = 1$.

- b Tussen $x = 6$ en $x = 7$ is er sprake van een afnemende daling.

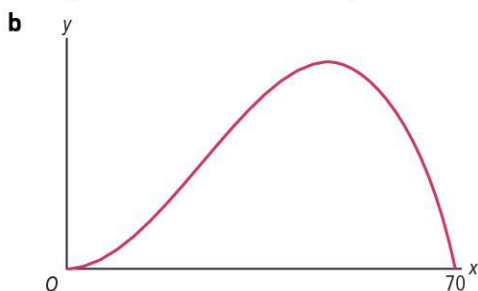
- c De grafiek van f heeft twee toppen, want van $x = 4$ naar $x = 5$ gaat de grafiek over van stijgend in dalend, dus is er een maximum. Van $x = 7$ naar $x = 8$ gaat de grafiek over van dalend in stijgend, dus is er een minimum.

- d De grafiek van f heeft twee buigpunten, want bij $x = 2$ gaat de grafiek over van een toenemende stijging in een afnemende stijging en bij $x = 6$ gaat de grafiek over van een toenemende daling in een afnemende daling.



E7 a Bij $u = 35$ is $W = -0,1 \times 35^3 + 7 \times 35^2 = 4287,5$.

Bij een uurtarief van € 35,- is de maandwinst € 4.287,50.



c Invoer: $y_1 = -0,1x^3 + 7x^2$

Venster: $0 \leq x \leq 70$ en $0 \leq y \leq 6000$

Optie: maximum

Bij een uurtarief van € 46,67 is de winst maximaal.

- d Tussen $u = 0$ en $u \approx 23$ is de grafiek toenemend stijgend, tussen $u \approx 23$ en $u \approx 47$ is de grafiek afnemend stijgend en tussen $u \approx 47$ en $u = 70$ is de grafiek toenemend dalend.

6 Veranderingen

- e De grafiek heeft een buigpunt, omdat de grafiek bij $u \approx 23$ overgaat van toenemend stijgend in afnemend stijgend.
- f De betekenis van dit buigpunt voor het bedrijf is dat de maandwinst dan het sterkst stijgt bij een (kleine) verhoging van het uurtarief.