

MODERNE WISKUNDE A/C



Noordhoff Uitgevers

$$h = 4,9 t^2$$

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo AC deel 1

Serieoverzicht Tweede Fase

	havo		vwo		
klas 4	A 1	B 1	AC 1		B 1
	A 2	B 2	AC 2		B 2
klas 5	A 3	B 3			
			A 3	C 3	B 3
klas 6			A 4	C 4	B 4

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.



0 / 20

© 2020 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-89215-9

© Noordhoff Uitgevers bv

12e editie

Moderne Wiskunde

vwo AC deel 1

Harm Bakker
Bert Boon
Dick Bos
Wim Doekes
Boris Nolte
Gerard van Proosdij
Rindert Reijenga
Geertrui Schaberg
Ron Sinkeldam
Carolijn Tacken

Noordhoff Uitgevers

1 Systematisch tellen 10

- Voorkennis 12
- 1.1 Mogelijkheden tellen 14
- 1.2 Machtsbomen en faculteitsbomen 18
- 1.3 Permutaties 22
- 1.4 Routes in een rooster 26
- 1.5 Combinaties 30
- 1.6 Het goede telmodel kiezen 34
- 1.7 Gemengde opdrachten 38
 - Onderzoeksopdrachten 39
 - Samenvatting 40
 - Test jezelf 44
 - Extra oefening 46

De grafische rekenmachine 48**2 Verbanden 54**

- Voorkennis 56
- 2.1 Lineaire verbanden 58
- 2.2 Recht evenredig en omgekeerd evenredig 62
- 2.3 Grenswaarden 66
- 2.4 Toppen en snijpunten 70
- 2.5 Ongelijkheden 74
- 2.6 Gemengde opdrachten 78
 - Onderzoeksopdrachten 79
 - Samenvatting 80
 - Test jezelf 84
 - Extra oefening 86

Vaardigheden 1 88

- Verhoudingen en procenten 90
- Metten 91
- Rekenen met breuken 92
- Haakjes wegwerken 93
- Rekenen met wortels 93

3 Statistiek 94

- Voorkennis 96
- 3.1 Wat is statistiek? 98
- 3.2 Data weergeven 102
- 3.3 Klassenindeling 106
- 3.4 Statistische verbanden 110
- 3.5 Spreidingsmaten 114
- 3.6 Cumulatieve frequenties 118
- 3.7 Gemengde opdrachten 122
 - Onderzoeksopdrachten 123
 - Samenvatting 124
 - Test jezelf 128
 - Extra oefening 130

4 Machtsfuncties 132

- Voorkennis 134
- 4.1 Negatieve exponenten 136
- 4.2 Gebroken exponenten 140
- 4.3 Machtsfuncties 144
- 4.4 Machtsformules herleiden 148
- 4.5 Gemengde opdrachten 152
 - Onderzoeksopdrachten 153
 - Samenvatting 154
 - Test jezelf 158
 - Extra oefening 160

Vaardigheden 2 162

- Metten 164
- Lineaire vergelijkingen 164
- Telproblemen 165
- Rekenen met breuken 166
- Vergelijkingen oplossen 167

5 Exponentiële functies 168

- Voorkennis 170
- 5.1 Verschillende soorten groei 172
- 5.2 Grafieken van exponentiële functies 176
- 5.3 Andere tijdseenheden 180
- 5.4 Transformaties 184
- 5.5 Functievoorschriften herleiden 188
- 5.6 Gemengde opdrachten 192
 - Onderzoeksopdrachten 193
 - Samenvatting 194
 - Test jezelf 198
 - Extra oefening 200

6 Veranderingen 202

- Voorkennis 204
- 6.1 Stijgen en dalen 206
- 6.2 Toenamediagrammen 210
- 6.3 Gemiddelde verandering 214
- 6.4 Hellingen benaderen 218
- 6.5 Gemengde opdrachten 222
 - Onderzoeksopdrachten 223
 - Samenvatting 224
 - Test jezelf 228
 - Extra oefening 230

Vaardigheden 3 232

- Meten 234
- Rekenen met breuken 234
- Haakjes wegwerken 235
- Rekenen met wortels en machten 235
- Exponentieel verband 236

Keuzeonderwerpen 238

Data bewerken en presenteren in Excel 240

Praktische opdracht – Statistisch onderzoek 246

Trefwoorden 250

Moderne Wiskunde

vwo AC deel 1

Aan het begin van de paragraaf staan de **Leerdoelen**. Deze geven richting aan je werk. In de **Samenvatting** komen de leerdoelen weer terug.

Er zijn drie **leerroutes**. Voel je je niet zo vertrouwd met het onderwerp van de paragraaf kies je de **Ondersteunende route**. Voor wat extra moeilijke opgaven kies je de **Uitdagende route**.

Een **W** verwijst naar de werkbladen in het **Hulpboek**.

1.4 Routes in een rooster

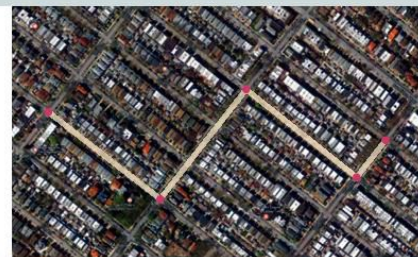
Je leert • hoe je een rooster kunt gebruiken om telproblemen op te lossen

Leerroutes • ondersteunend: 23—24—025—26—27—28—029—30
• doorlopend: 23—24—25—26—27—28—29—30
• uitdagend: 23—24—25—26—27—29—30—U6

Hiernaast zie je een stukje van de plattegrond van New York.

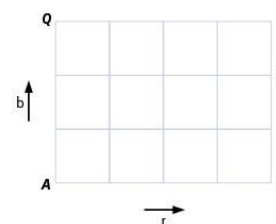
Donald staat op de kruising van 10th Ave en 80th Street (links). Hij moet naar de kruising van 12th Ave en 76th Street (rechts). Met de lijn is een mogelijke route weergegeven.

• Op hoeveel manieren kan Donald zonder omweg naar de kruising van de 10th Ave en 76th Street lopen?



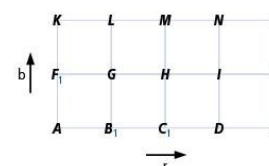
23 In de tekening hiernaast ga je het aantal mogelijke kortste routes tellen van het punt A naar het punt P via de roosterlijnen. Op ieder kruispunt van roosterlijnen heb je de keus uit rechtsaf (r) of naar boven (b). De route die via punt E loopt kun je beschrijven met $rrbb$.

- Neem de tekening over en teken daarin de route $rbrrbr$.
- Schrijf nog enkele routes van punt A naar punt P op.
- Hoe kun je zonder te tekenen zien dat de route $rrbrbr$ niet uitkomt in punt P ?
- Leg uit waarom geen van de gevraagde routes via punt Q gaat.



24 Het aantal kortste routes van A naar P kun je berekenen door bij elk kruispunt het aantal kortste routes van A naar dat kruispunt te noteren.

- Leg uit dat je de punten B , C en F maar op één manier kunt bereiken.
- Welke andere punten kun je maar op één manier bereiken? Noteer bij al deze punten het getal 1.
- Leg uit dat je het punt G op twee manieren kunt bereiken en noteer het getal 2 bij het punt G .
- Het punt H kun je bereiken via punt C (op één manier) of via punt G (op twee manieren). Op hoeveel manieren kun je dus in punt H komen? Noteer dit aantal bij punt H .
- Welk getal noteer je bij punt L ?
- M bereik je vanuit H of L . Hoe bereken je uit de getallen bij H en L het aantal mogelijke kortste routes naar M ?
- Noteer bij alle punten het aantal kortste routes vanuit A .
- Hoeveel kortste routes zijn er van A naar P ?



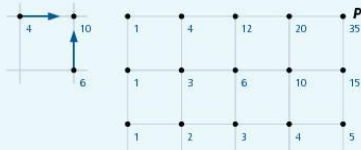
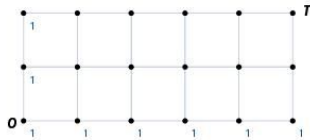
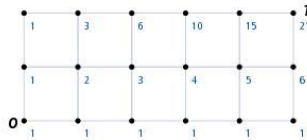
Voor havo 4 en 5 zijn er **3 delen** met in totaal **14 hoofdstukken**. Na twee hoofdstukken volgt een blok met **Vaardigheden**. In deel 3 staat ook de **Examenvoorbereiding**.

Elk hoofdstuk begint met een paragraaf **Voorkennis**. Met deze paragraaf haal je de benodigde voorkennis op.

Aanpak

Hoe bereken je het aantal kortste routes in een rooster?

- 1 Noteer bij elk punt dat maar op één manier is te bereiken het getal 1.
- 2 Stel voor elk ander punt vast wat de voorgaande punten zijn en tel de bijbehorende aantallen bij elkaar op.

**Voorbeeld**Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $T(5, 2)$.**Oplossing**Het aantal kortste routes van O naar T is 21

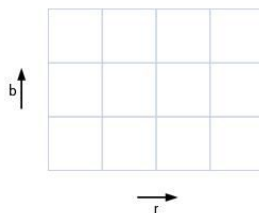
In een Paragraaf staan **theorie-** en **aanpakvlak-**ken met uitgewerkte voorbeelden.

Ondersteunende route → maak opdracht O25

- 25
- a Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $P(5, 3)$.
 - b Bereken het aantal kortste routes van $O(0, 0)$ naar $Q(2, 4)$.
 - c Om het aantal kortste routes te berekenen van $R(3, 1)$ naar $S(6, 6)$, begint je rooster met getallen in punt R . Bereken het aantal kortste routes van $R(3, 1)$ naar $S(6, 6)$.
 - d Bereken het aantal kortste routes van $U(1, 4)$ naar $V(7, 0)$.

- 26
- H** De voetbalwedstrijd tussen de amateurclubs Rapido en Broekster Boys eindigde in 4 – 3 voor Rapido. In deze opdracht bereken je met een rooster het aantal mogelijke scoreverlopen die tot deze eindstand leiden.

- a Het scoreverloop waarbij Rapido eerst twee keer scoort, daarna Broekster Boys drie keer en Rapido tot slot twee keer, geef je aan met rrbbr.
- Teken een rooster met daarin dit scoreverloop.
- b Geef in het rooster de route aan die overeenkomt met het scoreverloop waarbij de clubs om en om een doelpunt scoren.
- c Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen die leiden tot de eindstand 4 – 3.



Een **H** bij een opdracht geeft aan dat er bij die opdracht meer oefenstof is voor als je extra wilt oefenen. Die opdrachten staan in het **Hulpboek**.

Met de **Samenvatting** kun je de onderwerpen van het hoofdstuk nog eens goed doornemen en kijken of je de leerdoelen hebt gehaald.

De **Test jezelf** is een soort oefenproefwerk. Met deze opdrachten test je je kennis en je vaardigheden met betrekking tot de onderwerpen in dit hoofdstuk.

Moderne Wiskunde online bevat alle opdrachten en aanvullende opdrachten. De verwijzing naar **Ondersteunende** en **Uitdagende opdrachten** gaat automatisch. Bij de **theorie** is vaak een video of animatie.

Wiskundige Denk Activiteiten

Wat zijn Wiskundige Denk Activiteiten?

Bij het vak Wiskunde leer je veel verschillende methoden om een opdracht aan te pakken. Na de noodzakelijke oefening wordt elke methode een routine, je weet precies welke stappen je moet zetten. Er zijn echter ook veel situaties waarbij het helemaal niet meteen duidelijk is, welke aanpak je moet gebruiken. Daarvoor is de naam Wiskundige Denk Activiteiten bedacht, verder afgekort als WDA. Je kunt niet spreken van één soort WDA, er wordt een onderscheid gemaakt tussen een aantal verschillende aspecten.

– *Probleem oplossen en analytisch denken*

Hiermee wordt bedoeld dat je gaat uitzoeken hoe een probleem in elkaar zit en welke stappen er nodig zijn om het probleem op te lossen. In de boeken vind je dit onder andere terug in de onderzoeksopdrachten.

Voorbeeld

Een cilindervormig literblik heeft een inhoud van 1L of 1000 cm^3 . Bij welke keuze van de straal en de hoogte is er het minste materiaal nodig om het blik te maken?

– *Modelleren en algebraïseren*

Soms wordt een probleem in woorden omschreven. Door te modelleren en algebraïseren ga je het probleem in wiskunde vertalen. Daarbij moet je geschikte variabelen kiezen en verbanden tussen die variabelen in de vorm van vergelijkingen kunnen opstellen. Ook dit aspect speelt met name een rol in de onderzoeksopdrachten.

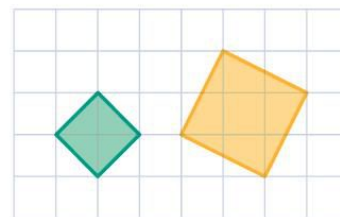
Voorbeeld

Eric en Mariëlle zijn de ouders van Kevin en Pascal. Eric is twee jaar ouder dan Mariëlle en Kevin is twee jaar ouder dan Pascal. Kevin is geboren toen Mariëlle 28 jaar oud was. Het totaal van hun leeftijden is precies 100 jaar. Hoe oud zijn Eric, Mariëlle, Kevin en Pascal?

– *Ordenen en structureren*

Hiermee wordt bedoeld dat je inzicht krijg in overeenkomsten tussen figuren, verschillende soorten vergelijkingen en dergelijke. In de boeken vind je dit aspect terug in veel intro-opdrachten.

Voorbeeld



De hoekpunten van deze vierkantjes zijn roosterpunten en de oppervlakten zijn 2 en 5.

Ga van alle getallen 1 tot en met 50 na of je vierkanten kunt tekenen met die oppervlakte en roosterpunten als hoekpunten.

Zijn er ook getallen waarbij het op meer dan één manier mogelijk is?

– *Formules manipuleren*

Met het herschrijven van formules, het uitdrukken van een variabele in andere variabelen of het invullen van een formule in een andere formule heb je al vaker ervaring opgedaan. Belangrijk is daarbij, dat je begrijpt hoe een formule is opgebouwd.

Aan dit aspect wordt aandacht besteed in tal van opdrachten.

– *Abstraheren*

Iets abstract maken is een belangrijk onderdeel van de wiskunde, maar lastig te omschrijven. Je abstraheert zodra je een praktisch probleem vertaalt in wiskundige formules of vergelijkingen. Dit aspect vind je vooral terug in praktische toepassingen. Ook bij het aanleren van nieuwe wiskundige begrippen speelt dit een rol.

– *Logisch redeneren en bewijzen*

Dit aspect komt naar voren bij vragen naar een verklaring of bewijs. Je leert bij veel onderdelen van de wiskunde iets aan te tonen met behulp van een redenering met logische stappen. Je vindt dit in de boeken terug bij allerlei vragen met de formulering ‘leg uit’, ‘toon aan’ of ‘bewijs dat’.

Voorbeeld

Laat zien dat je het functievoorschrift $f(x) = x(x-1)(x+2) - x^3 + 1$ kunt herleiden tot $f(x) = (x-1)^2$.

Voorbeeld

Bij veel bijeenkomsten begroeten alle aanwezigen elkaar met een handdruk. Bij twee aanwezigen is er één handdruk, bij drie aanwezigen drie en bij vier aanwezigen zes. Kun je dit lijstje uitbreiden en vervolgens een formule opstellen voor het aantal handdrukken h als er n aanwezigen zijn?

Voorbeeld

Een getal is deelbaar door 9, als de som van de cijfers van dat getal deelbaar is door 9. Bewijs deze regel.

Systematisch tellen

1

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In klas 3 heb je geleerd hoe je bij bepaalde telproblemen boomdiagrammen kunt gebruiken om systematisch het aantal mogelijkheden te tellen.

In dit hoofdstuk leer je eerst een aantal bijzondere vormen van boomdiagrammen kennen. Daarna leer je andere methoden om een bepaald soort telproblemen systematisch op te lossen. Aan het eind van het hoofdstuk ga je al deze methoden combineren om complexere telproblemen aan te pakken.

De kennis van telmethoden heb je nodig als je in hoofdstuk 7 gaat rekenen met kansen. Dit onderwerp komt ook in vwo 5 en vwo 6 weer aan de orde.

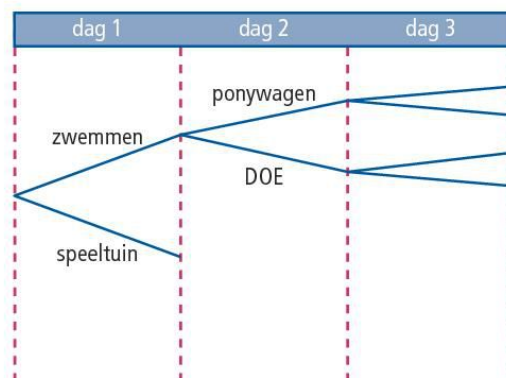
Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 46
- *Ordenen en structureren* opdracht 22
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 31



- V1** Klaas gaat drie dagen logeren bij tante Alie. Zij heeft voor elke dag activiteiten uitgezocht waaruit Klaas mag kiezen. De eerste dag mag hij kiezen uit zwemmen of naar de speeltuin; de tweede dag uit rijden met een ponywagen of naar het DOE-museum. De derde dag gaan ze uit eten. Klaas mag kiezen uit het hamburgerrestaurant of de pizzeria.

- Maak het boomdiagram af.
- Hoeveel verschillende invullingen zijn er voor de drie dagen?

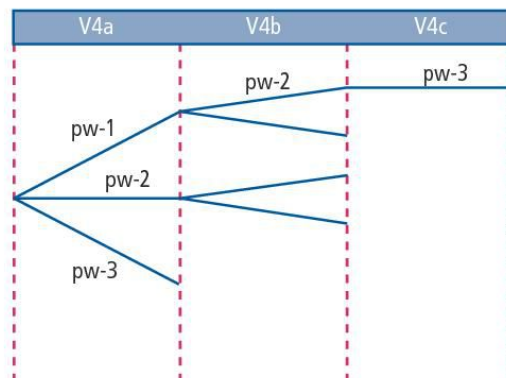


- V2** Een lerares geeft les aan drie klassen V4a, V4b en V4c. Van elk proefwerk maakt ze drie versies: pw-1, pw-2 en pw-3.

- Noteer in de tabel systematisch alle mogelijkheden waarop de lerares de drie proefwerken over de klassen kan verdelen.

V4a	V4b	V4c
pw-1	pw-2	pw-3
pw-1	pw-3	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

- Je kunt het probleem van opdracht a ook aanpakken met een boomdiagram. Maak het boomdiagram verder af.



Theorie

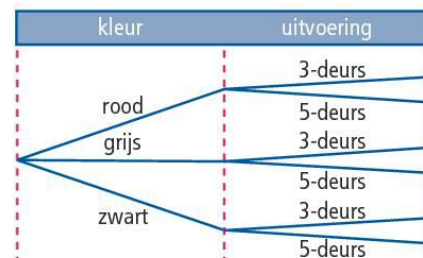
Om alle mogelijkheden bij een probleem te kunnen tellen, maak je vaak gebruik van een **boomdiagram**. Boven het boomdiagram komt te staan wat er te kiezen valt. Bij de **takken** komt te staan waaruit je daarbij kunt kiezen.

Voorbeeld

Een auto wordt geleverd in de kleuren rood, grijs en zwart. Daarnaast kun je kiezen uit een uitvoering met drie of met vijf deuren. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?

Oplossing

Het boomdiagram laat zien dat er bij de kleur drie keuzes zijn en bij de uitvoering twee. In totaal zijn er zes verschillende mogelijkheden.



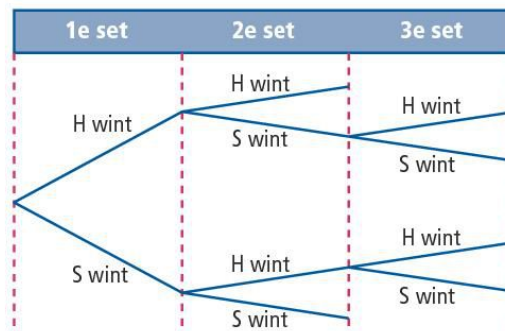
V3 Bij gezinnen met drie kinderen kunnen verschillende geboortevolgorden voorkomen, bijvoorbeeld eerst een meisje, dan een jongen en dan weer een meisje.

- Teken een boomdiagram met alle mogelijke geboortevolgorden bij drie kinderen.
- Hoeveel verschillende volgorden staan in het boomdiagram?
- Hoeveel volgorden zijn er met twee meisjes?
- Vul de tabel verder in.

<i>aantal meisjes</i>	3	2	1	0
<i>aantal volgorden</i>	1	...	...	...

V4 Een damesfinale tennis wordt gespeeld om 'the best of three sets'. Dat wil zeggen dat degene die het eerst twee sets heeft gewonnen de kampioen is. Tijdens de kampioenschappen van Roland Garros in 2018 stonden Simone Halep en Sloane Stephens in de finale. De mogelijkheden voor het wedstrijdverloop staan in het boomdiagram, waarbij alleen wordt gelet op het winnen van de sets.

- Waarom bestaat het bovenste wedstrijdverloop uit maar twee sets?
- Hoeveel verschillende manieren zijn er waarop een wedstrijd kan verlopen?
- In hoeveel daarvan wint Halep?
- De wedstrijd verliep als volgt: Stephens won de eerste set, Halep de tweede set en de derde set. Beschrijf die route in het boomdiagram.
- Schrijf op welk ander wedstrijdverloop ook had kunnen leiden tot een 2-1 overwinning voor Halep.
- Bij de mannenfinale wordt gespeeld om 'the best of five sets'. Bereken het aantal mogelijke wedstrijdverlopen bij de mannen, waarbij je alleen weer let op het winnen van sets.



V5 Stan gooit met twee dobbelstenen. In het schema is de som van het aantal ogen systematisch weergegeven.

- In hoeveel gevallen is de som van het aantal ogen gelijk aan zeven?
- In hoeveel gevallen is de som van het aantal ogen zeven of elf?
- Hoe vaak is de som van het aantal ogen een oneven getal?
- Maak een soortgelijk schema voor het product van de twee aantallen ogen.
- In hoeveel gevallen is het product van de aantallen ogen twaalf?
- In hoeveel gevallen is het product van de aantallen ogen oneven?

		dobbelsteen 1					
		1	2	3	4	5	6
dobbelsteen 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

1.1 Mogelijkheden tellen

Je leert

- wat regelmatige en onregelmatige boomdiagrammen zijn
- wat een wegendiagram is

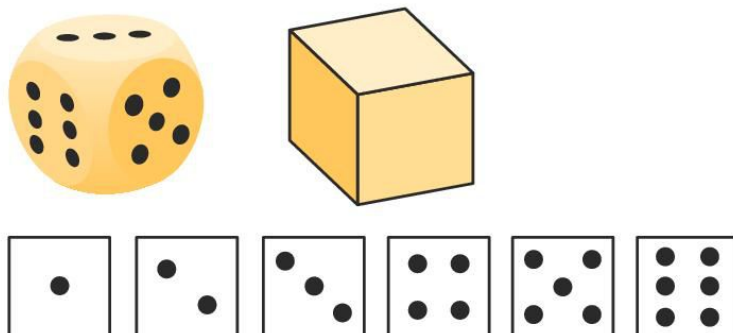
Leerroutes

- ondersteunend: 1—02—3—4—5—06—7—8—9
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—2—3—4—5—7—8—9—U1

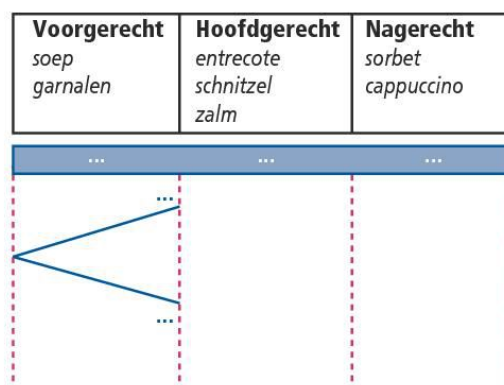
Het is gebruikelijk dat op een dobbelsteen de 1 tegenover de 6 staat, de 2 tegenover de 5 en de 3 tegenover de 4. Maar dat hoeft natuurlijk niet.

In een klas met 29 leerlingen krijgt iedereen een kubusje en zes stickers met één tot en met zes ogen om deze op de vlakken te plakken.

- Is het mogelijk dat alle dobbelstenen van de 29 leerlingen verschillend zijn?

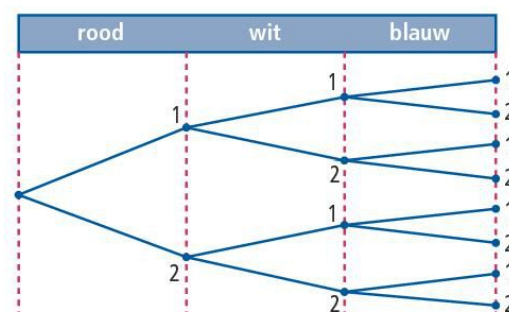


- Je ziet de menukaart van bistro 'De Holterberg'. Een klant vraagt zich af op hoeveel verschillende manieren hij een maaltijd van drie gangen kan samenstellen. Je ziet het begin van een boomdiagram.
 - Waarom heeft het boomdiagram drie kolommen?
 - Wat moet er op de stippen boven de kolommen staan?
 - Wat moet er op de andere stippen staan?
 - Maak het boomdiagram verder af.
 - Hoeveel verschillende driegangen menu's kun je in deze bistro samenstellen?



Ondersteunende route → maak opdracht 02

- Een auto wordt geleverd in de kleuren rood, wit, blauw en zwart. Daarnaast kun je kiezen uit diesel, benzine of elektrisch en wel of geen trekhaak.
 - Hoeveel verschillende uitvoeringen zijn er mogelijk?
 - Hoeveel uitvoeringen rijden niet op diesel?
- Leo gaat verschillende vlaggen maken die uit twee horizontale banen bestaan. Hij heeft de keuze uit drie kleuren: rood, wit en blauw. De twee banen mogen dezelfde kleur hebben.
 - Om het aantal mogelijkheden te tellen, maakt Leo het boomdiagram dat hiernaast is getekend. Welke vergissing heeft Leo gemaakt?
 - Beschrijf hoe een correct boomdiagram eruitziet en bereken het aantal mogelijke vlaggen.



Theorie

Bij het oplossen van een telprobleem is een boomdiagram vaak een handig hulpmiddel. In een boomdiagram geef je overzichtelijk weer welke mogelijkheden er zijn.

Als het aantal vertakkingen op elk punt in een kolom gelijk is, dan is het een **regelmatic boomdiagram**. Je kunt dan het aantal mogelijkheden uitrekenen zonder het hele boomdiagram te tekenen.

Als het aantal vertakkingen niet in elk punt in een kolom gelijk is, dan is het een **onregelmatic boomdiagram**. Je moet dan het hele boomdiagram tekenen of de mogelijkheden systematisch opschrijven.

Voorbeeld

In een vaas zitten één rode, twee groene en drie blauwe ballen.

Je trekt één voor één twee ballen uit de vaas en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar.

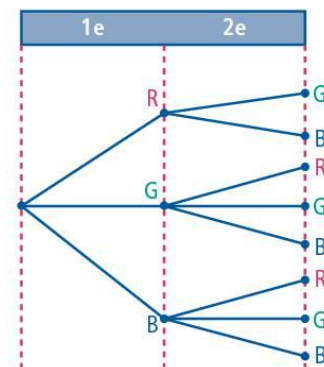
Bereken het aantal mogelijke volgorden.

Oplossing

Voor de eerste trekking zijn er drie verschillende mogelijkheden.

Het aantal mogelijkheden bij de tweede trekking hangt af van wat je de eerste keer hebt getrokken: was dat een rode, dan zijn er twee mogelijkheden voor de tweede trekking, anders drie.

Het boomdiagram is dus onregelmatic. Er zijn acht mogelijke volgorden.



- 4 Je trekt uit de vaas van het voorbeeld één voor één drie ballen uit de vaas.
Bereken het aantal mogelijke volgorden.

- 5 De stoel is een beroemd geworden ontwerp van de Nederlander Gerrit Rietveld (1888 - 1964). Hij gebruikte de vier kleuren rood, blauw, zwart en geel. Eén kleur wordt gebruikt voor het rug gedeelte, één voor het zitgedeelte, één voor de overige balkjes en plankjes en eentje voor de zogeheten kopse uiteinden.

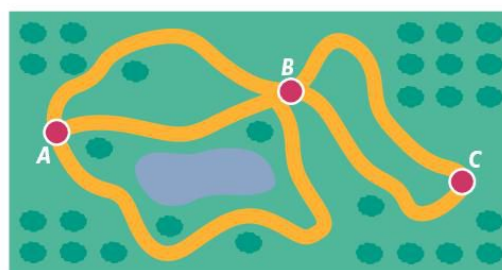
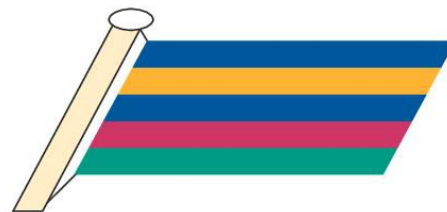
- a Beschrijf een bijbehorend boomdiagram.
b Op hoeveel verschillende manieren kan de Rietveldstoel op de manier zoals hierboven aangegeven, van kleur worden voorzien?



1.1 Mogelijkheden tellen

Ondersteunende route → maak opdracht O6

- 6 Alexa maakt een vlag die bestaat uit vijf horizontale banen. Voor elke baan heeft ze de keus uit de kleuren rood, geel, blauw en groen, maar twee opeenvolgende banen moeten een verschillende kleur hebben. Bereken het aantal verschillende mogelijkheden.
- 7 a Sem maakt een rijtje van drie rode en vier witte ballen. Schrijf systematisch alle mogelijke rijtjes op waarbij er geen twee rode ballen direct naast elkaar liggen.
b Zes leerlingen moeten in tweetallen dezelfde scheikunde-proef uitvoeren. Bereken het aantal manieren waarop ze in drie tweetallen kunnen worden verdeeld.
- 8 In een natuurgebied zijn wandeltochten uitgezet. In de figuur zie je dat tussen de rustpunten *A* en *B* drie verschillende paden lopen en tussen de rustpunten *B* en *C* twee.
- a Leg uit dat er $3 \times 2 = 6$ verschillende wandelingen van *A* naar *C* mogelijk zijn.
b Er worden tussen de rustpunten *B* en *C* drie extra paden aangelegd. Hoeveel verschillende wandelingen zijn er nu van *A* naar *C*?



Theorie

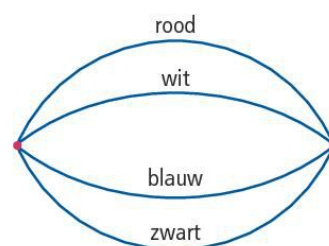
Telproblemen vereisen een systematische aanpak, soms met behulp van een redenering of door de mogelijkheden op een overzichtelijke manier weer te geven. Boomdiagrammen en tabellen zijn daarbij goede hulpmiddelen. Bij een regelmatig boomdiagram kun je het aantal mogelijkheden ook weergeven met een **wegendiagram**.

Voorbeeld



In het wegendiagram zie je dat er $4 \times 2 \times 3 = 24$ verschillende wegen zijn van *D* naar *G*.

- 9 Het telprobleem van opdracht 2 is ook op te lossen met een wegendiagram waarmee hiernaast een begin is gemaakt.
- a Maak het wegendiagram af en beantwoord hiermee de vragen van opdracht 2.
b Het blijkt dat elektrisch aangedreven auto's niet worden geleverd met een trekhaak. Leg uit waarom een wegendiagram nu niet zo'n handig hulpmiddel is om het aantal mogelijkheden te berekenen.



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

- 02** Steven heeft twee broeken in de kleuren blauw en bruin, drie truien in de kleuren blauw, grijs en rood en vier paar sokken in de kleuren rood, groen, geel en bruin. Hij doet een broek, een trui en een paar sokken aan.
- Hoe vaak moet hij een keuze maken? Hoeveel kolommen heeft dus het boomdiagram?
 - Teken het boomdiagram.
 - Hoeveel mogelijke combinaties van een broek, een trui en een paar sokken kan Steven maken?
 - Hoeveel combinaties zijn er mogelijk zonder de grijze trui?
 - Bij hoeveel van de combinaties zijn de broek, de trui en het paar sokken allemaal verschillend van kleur?



- 06** Sharon gaat een sjaal breien. De sjaal bestaat uit zes stroken. De breedte van de eerste strook is 10 cm, de tweede 15 cm, de derde 20 cm enzovoort. Ze heeft drie kleuren wol: rood, geel en blauw. Twee opeenvolgende stroken krijgen een verschillende kleur.

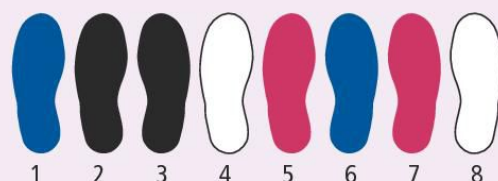


- Uit hoeveel kleuren kan ze kiezen voor de eerste strook?
- Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de tweede strook?
- Leg uit dat ze voor de derde strook kan kiezen uit twee kleuren.
- Bereken het aantal verschillende mogelijkheden waarop ze de kleuren voor de sjaal kan kiezen.
- Hoeveel mogelijkheden heeft Sharon als ze vijf kleuren wol heeft?

Uitdagende opdrachten

- U1** Cécile heeft vier paar schoenen: rood, wit, blauw en zwart.

- Bereken het aantal mogelijke volgorden waarop de schoenen neergezet kunnen worden, waarbij schoenen van dezelfde kleur naast elkaar staan.
- Cécile wil dat van ieder paar de linker schoen meer naar links staat dan de rechter. Leg uit dat op positie 1 een linkerschoen moet staan.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de schoen op positie 1?
- Hoeveel mogelijke posities zijn er voor de rechter schoen die hoort bij de linker schoen op positie 1?
- Bereken het aantal mogelijke volgorden waarop Cécile haar schoenen zo neer kan zetten.



1.2 Machtsbomen en faculteitsbomen

Je leert

- hoe je met een machtsboom of een faculteitsboom het aantal mogelijkheden berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 10—11—12—013—014—14—15—17
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—11—12—13—14—15—17—U2

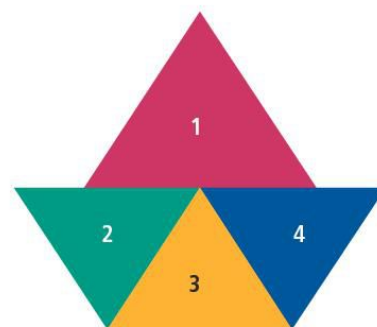
Zes vrienden fietsen altijd samen naar school, steeds twee aan twee naast elkaar.

- Lukt het de vrienden om elke dag in het schooljaar in een andere formatie te fietsen?



- 10** Bij een gokspelletje wordt een aantal keer een geldstuk opgegooid. Na elke worp wordt de uitslag, kop of munt, opgeschreven.
- Beschrijf het boomdiagram dat hoort bij drie keer gooien.
 - Hoeveel verschillende uitslagvolgorden zijn er mogelijk?
 - Leg uit hoe het boomdiagram er uit komt te zien als er vijf keer wordt gegooid. Hoeveel volgorden zijn er dan mogelijk?
 - Leg uit dat bij acht keer gooien, 2^8 mogelijke volgorden zijn.
 - Bereken bij hoeveel keer gooien het aantal mogelijke volgorden meer dan 1000 is.

- 11** Het logo van een kinderopvang bestaat uit vier verschillend gekleurde driehoeken. Voor de kleuren kun je kiezen uit rood, geel, groen en blauw. Milo vraagt zich af op hoeveel manieren de vier kleuren over de driehoeken verdeeld kunnen worden. Hij maakt een boomdiagram.
- Hoeveel kolommen krijgt het boomdiagram?
 - Hoeveel keuzemogelijkheden zijn er voor driehoek 1?
 - Hoeveel mogelijkheden zijn er daarna voor driehoek 2?
 - Bereken het aantal manieren waarop het logo ingekleurd kan worden.



Theorie

Een boomdiagram waarin bij elk keuzemoment het aantal takken gelijk is, noem je een **machtsboom**. Het totaal aantal volgorden is een macht.

Bij drie keuzemomenten met steeds vijf mogelijkheden is het aantal mogelijke volgorden $5 \times 5 \times 5 = 5^3$.

Een boomdiagram waarin bij elk keuzemoment het aantal takken één minder wordt, en eindigt met één tak, noem je een **faculteitsboom**.

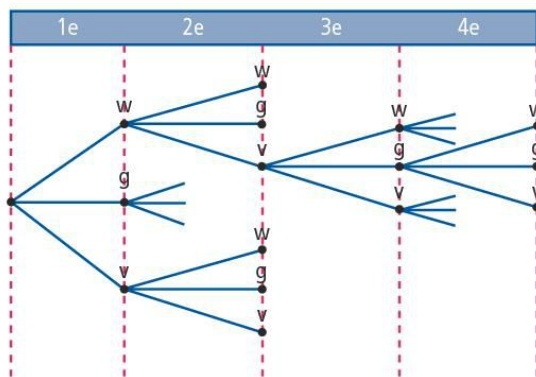
Als je eerst drie keuzemogelijkheden hebt, daarna twee en tenslotte één, dan is het aantal mogelijke volgorden $3 \times 2 \times 1$. Een product van de vorm $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ heet n **faculteit**. Je noteert dit als $n!$.

Voorbeeld 1

Een wedstrijd kan eindigen in winst, verlies of gelijkspel. Een team speelt vier wedstrijden. Bereken het aantal mogelijke volgorden van uitslagen.

Oplossing

Bij elke wedstrijd zijn er steeds drie keuzemogelijkheden.



Het aantal mogelijke volgorden is

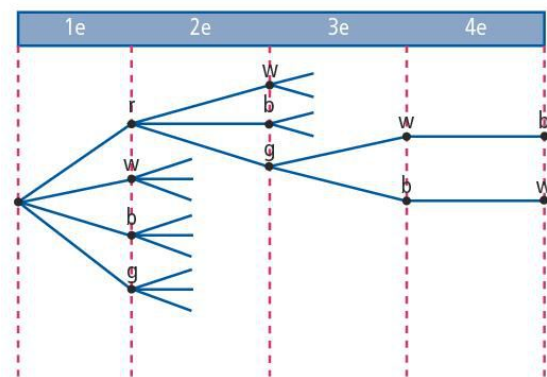
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81.$$

Voorbeeld 2

Je legt vier knikkers, een rode, een witte, een blauwe en een groene op een rijtje. Bereken het aantal mogelijke volgorden.

Oplossing

Voor elke volgende knikker heb je een keuzemogelijkheid minder.



Het aantal mogelijke volgorden is

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24.$$

- 12**
- Bereken het aantal mogelijke volgorden als het team in voorbeeld 1 twaalf wedstrijden speelt.
 - Bereken het aantal mogelijke volgorden als in voorbeeld 2 elf verschillende knikkers op een rij worden gelegd.

1.2 Machtsbomen en faculteitsbomen

Ondersteunende route → maak opdracht 013

- 13** **H** Peter gaat een lunchpakket maken met drie boterhammen, een witte, een bruine en een volkoren. Voor elke boterham kan hij als beleg kiezen uit stroop, hagelslag, jam, kaas en pindakaas.
Bereken het aantal manieren waarop hij zijn lunchpakket kan samenstellen.

Ondersteunende route → maak opdracht 014

- 14** **H** Reynauld heeft vijf bruine boterhammen mee naar school, één met appelstroop, één met jam, één met hagelslag, één met kaas en één met pindakaas.
Bereken het aantal mogelijke volgorden waarin hij deze vijf boterhammen op kan eten.

- 15** **a** Gebruik je rekenmachine om $10!$ en $14!$ te berekenen.

b Bereken zonder je rekenmachine $\frac{5!}{4!}$, $\frac{11!}{9!}$, $\frac{100!}{97!}$

→ Instructie rekenmachine | Faculteit

- 16** **a** Bert gooit vier keer met een dobbelsteen. Na elke worp noteert hij het aantal geworpen ogen. Zo krijgt hij een getal van vier cijfers.
Bereken het aantal mogelijke getallen dat hij kan krijgen.
- b** Jonneke gaat naar de kermis. Ze heeft toegangskaartjes voor zes attracties: de draaimolen, de botsauto's, de rupsbaan, de calypso, de booster en het reuzenrad.
Bereken het aantal mogelijke volgorden waarop ze de attracties kan kiezen.

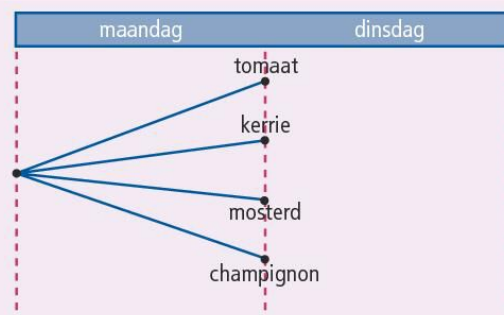


- 17** **a** Hoeveel verschillende volgorden zijn er om zeven kinderen op een rij te zetten?
- b** Hoeveel verschillende codes kun je maken met vier hoofdletters uit het alfabet? Je mag daarbij letters meer dan één keer gebruiken.
- c** Op hoeveel manieren kun je een 'woord' van vijf letters maken waarbij de letters A, B, C, D en E elk precies één keer gebruikt worden?
- d** Hoeveel manieren zijn er om een toets met 50 meerkeuzevragen te beantwoorden, waarbij je steeds uit drie mogelijke antwoorden moet kiezen?

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

- 013** Geke gaat vijf dagen per week naar school. Elke dag koopt ze een bekertje soep uit de soepautomaat. Elke dag kiest ze opnieuw tussen de vier smaken: tomaat, kerrie, mosterd en champignon.
- Stel dat Geke op een maandag voor kerrie kiest. Uit hoeveel smaken kan ze op dinsdag kiezen?
 - Leg uit waarom je het aantal mogelijke weekmenu's kunt berekenen met een machtsboom.
 - Hoeveel keuzemomenten heeft Geke per week?
 - Beschrijf de vorm van het boomdiagram.
 - Bereken het aantal mogelijke weekmenu's.



- 014** Acht leden van een roeivereniging, Bob, Cor, Han, Ide, Jan, Leo, Pim en Rik, gaan met een boot het water op. De instructeur neemt de plaats in van de stuurman; de leden nemen achter elkaar plaats in de boot. Je gaat berekenen hoeveel mogelijke volgorden er zijn waarop de acht roeiers in de boot plaats kunnen nemen.
- Uit hoeveel roeiers kun je kiezen voor de eerste plaats?
 - Uit hoeveel roeiers kun je kiezen voor de tweede plaats?
 - Leg uit waarom je het aantal mogelijkheden kunt berekenen met een faculteitsboom.
 - Hoeveel kolommen heeft het boomdiagram?
 - Bereken het aantal mogelijke volgorden.



Uitdagende opdrachten



- U2** Ter gelegenheid van het dorpsfeest hebben bewoners van 15 huizen in een straat gezamenlijk feestverlichting gehuurd. Ieder huis krijgt een kabel met daaraan vier lantaarns om tussen twee palen die voor het huis zijn geplaatst te spannen. De vier lampen in de kleuren blauw, rood, groen en geel worden er los bijgeleverd. Iedereen mag zelf bepalen in welke volgorde ze de lampen in de lantaarns draaien. Bereken het aantal mogelijke volgorden van de kleuren van de gezamenlijke feestverlichting.

1.3 Permutaties

Je leert

- hoe je het aantal permutaties berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 18—19—020—20—022—23
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 18—20—21—22—23—U3

Een toneelopleiding voor scholieren begint elke cursusavond met een improvisatie-oefening. Bij elke improvisatie-oefening zijn drie vaste personages: een bewoner, een enquêteur en een pakketbezorger.

- Lukt het om met vijf spelers een jaar lang elke week een andere rolverdeling te maken?



- 18** In een vereniging met dertien leden moet een nieuw bestuur worden gekozen. Eerst wordt een voorzitter gekozen, daarna een secretaris en tot slot een penningmeester. Voor elke functie wordt een ander lid gekozen.

Je kunt het aantal mogelijke samenstellingen van zo'n bestuur berekenen met een boomdiagram.

- Waarom is dit geen machtsboom en geen faculteitsboom?
- Hoeveel kolommen heeft het boomdiagram?
- Bereken voor elke kolom het aantal vertakkingen.
- Hoeveel mogelijke bestuurssamenstellingen zijn er?



- 19** Een kunstschilder mag in een galerie een aantal werken ten toon stellen. In zijn atelier heeft hij negen werken staan die geschikt zijn om te exposeren.

- Bereken het aantal manieren waarop de schilder de expositie kan inrichten als er precies negen plekken voor hem zijn gereserveerd.
- Er zijn maar zes plekken beschikbaar. Hoeveel keuzes zijn er voor het schilderij op de eerste plek? En op de tweede plek?
- Bereken het aantal manieren waarop de schilder de expositie van zes schilderijen kan inrichten.

Theorie

Een ander woord voor volgorde of rangschikking is **permutatie**. Een permutatie van 3 uit 10 is een rangschikking van een rijtje van drie dat je kiest uit tien verschillende dingen: een eerste, een tweede en een derde.

Een boomdiagram is een geschikt telmodel voor het aantal permutaties.

Het aantal permutaties van 3 uit 10 is $10 \times 9 \times 8 = 720$.

Voorbeeld

In een bak liggen 20 balletjes, genummerd 1 tot en met 20. Je trekt zes keer een balletje uit de bak en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar. Hoeveel mogelijke volgordes zijn er?

Oplossing

Bij de eerste trekking is er keuze uit 20 balletjes; bij de tweede trekking uit 19 balletjes enzovoort. Het aantal mogelijke volgordes is het aantal permutaties van 6 uit 20:

$$20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 = 27\,907\,200$$

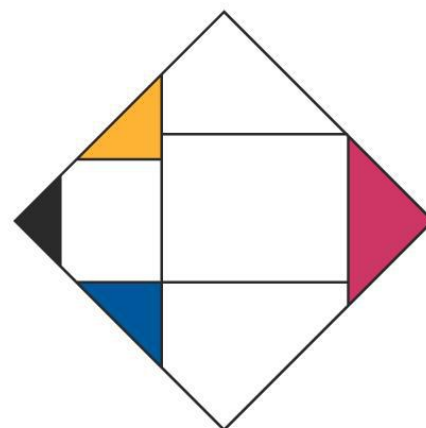
Ondersteunende route → maak opdracht 020**20****H**

- a** Jente breit een trui met vijf horizontale stroken. Elke strook krijgt een andere kleur. Ze heeft acht kleuren wol. Hoeveel verschillende truien zijn mogelijk?
- b** Martijn kiest achtereenvolgens vier keer een letter uit het alfabet en schrijft ze achter elkaar. Een gekozen letter kiest hij niet opnieuw. Hoeveel 'woorden' zijn er mogelijk?
- c** Op hoeveel manieren kan een docent Nederlands uit een lijst van 40 boektitels een top-5 samenstellen?
- d** Een docent Engels gaat mondelinge toetsen afnemen in een klas met 24 leerlingen. Voor de maandagmiddag wil hij vier leerlingen achter elkaar inroosteren. Bereken het aantal mogelijke roosters voor de maandagmiddag.

→ Instructie rekenmachine | Permutatie**21**

De Nederlandse schilder Piet Mondriaan (1874 - 1944) was één van de eerste kunstenaars die abstracte werken maakte. Je ziet een tegel in de stijl van Mondriaan: horizontale en verticale zwarte lijnen die de tegel in een aantal vlakjes verdelen. Een aantal van deze vlakjes wordt ingekleurd; de anderen blijven wit. Alleen de kleuren rood, geel, blauw en zwart worden gebruikt.

- a** Bereken het aantal mogelijke manieren waarop de vier driehoekige vlakjes met verschillende kleuren ingekleurd kunnen worden.
- b** Bereken het aantal mogelijke manieren waarop vier van de acht vlakjes met verschillende kleuren ingekleurd kunnen worden.



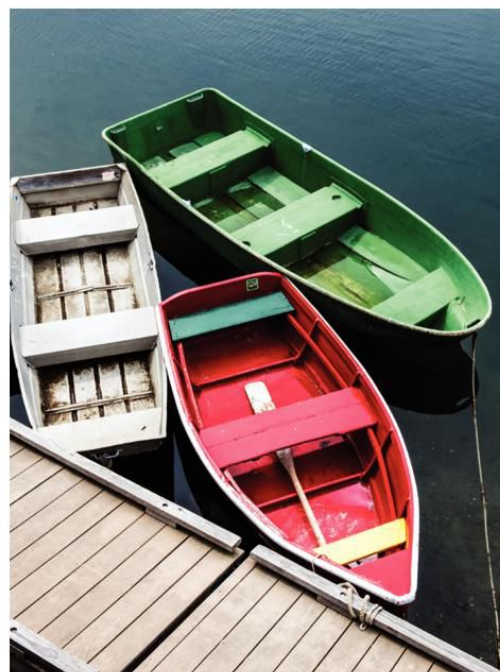
1.3 Permutaties

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22** Er zijn suikerzakjes met op zes verschillende plaatsen in zes verschillende talen het woord suiker.
- Op het suikerzakje van de foto staat suiker in het Duits, Frans, Italiaans, Engels, Reto-Romaans en Spaans. Hoeveel verschillende suikerzakjes zijn er mogelijk met deze zes talen?
 - Hoeveel suikerzakjes zijn er mogelijk als er voor de zes talen wordt gekozen uit tien beschikbare talen?
 - Er wordt gekozen uit tien talen waaronder Nederlands. Hoeveel verschillende suikerzakjes zijn mogelijk waarop je het woord 'suiker' aantreft?



- 23** Arianne, Berber, Christel, Dorien, Karel, Luuk, Menno en Nico gaan samen een dagje uit. Iemand moet zorgen voor een picknickmand met eten, een ander voor een koelbox met drinken en een derde voor een tas met sportattributen. Ze loten wie waar voor moet zorgen.
- Bereken het aantal manieren waarop de drie taken kunnen worden verdeeld.
 - Ze huren twee roeiboten, een rode en een groene. Elke boot heeft twee bankjes waarop twee personen naast elkaar kunnen zitten. Bereken het aantal manieren waarop de acht personen zich over de acht zitplaatsen kunnen verdelen.
 - Bereken het aantal manieren waarbij de vier meisjes in de groene boot zitten en de vier jongens in de rode.
 - Berber en Luuk willen naast elkaar zitten. Berber kiest als eerste een zitplaats. Uit hoeveel plaatsen kan Berber kiezen? En Luuk?
 - Bereken het aantal manieren waarop de acht personen zich over de acht zitplaatsen kunnen verdelen, waarbij Berber en Luuk naast elkaar zitten.



Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

020 Een groep vrienden gaat een hele nacht lang griezelfilms kijken. Ze hebben een stapel van 18 dvd's. Ze besluiten dat ze er zeven gaan kijken. Je gaat berekenen hoeveel mogelijke kijk-volgorden er zijn.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de eerste film? En voor de tweede?
- Hoeveel getallen moet je met elkaar vermenigvuldigen om het aantal kijkvolgorden te berekenen?
- Bereken het aantal mogelijke kijkvolgorden.



022 De schoolclub organiseert de verkiezing van de populairste leraar van de school. Iedere leerling mag een lijstje met zijn/haar persoonlijke top-5 inleveren van leraren waar ze dit jaar les van hebben. Je ziet het lijstje van Sarina.

- Hoeveel verschillende lijstjes zijn er mogelijk met precies dezelfde leraren als op het lijstje van Sarina?
- De klas van Sarina heeft les van 14 verschillende leraren.
Bereken op hoeveel mogelijke manieren een leerling uit de klas van Sarina het lijstje in kan vullen.
- Sarina vraagt zich af hoeveel verschillende lijstjes er voor leerlingen uit haar klas mogelijk zijn waarop de naam van meneer Kuipers voorkomt.
Hoeveel mogelijke posities zijn er om de naam van meneer Kuipers in te vullen?
- Hoeveel posities zijn er dan nog vrij?
- Op hoeveel manieren kunnen de vrije posities worden gevuld met namen van de overige 13 leraren?
- Bereken het aantal mogelijke lijstjes waar de naam van meneer Kuipers op voorkomt.

- | | |
|---|-----------------|
| 1 | dhr. Kuipers |
| 2 | mw. De Waard |
| 3 | mw. Visser |
| 4 | dhr. Boogaart |
| 5 | dhr. Schoemaker |

Uitdagende opdrachten

- U3**
- Hannah moet het aantal permutaties van k uit 37 uitrekenen. Je ziet haar invoer van de rekenmachine vlak voor ze de berekening laat uitvoeren.
Wat is de waarde van k ?
 - Leg uit dat je het aantal permutaties van 12 uit 45 ook uit kunt rekenen door $45!$ te delen door $33!$.
 - Bereken op deze manier het aantal permutaties van 19 uit 55.

4*35*34*33*32*31*29*28*27

1.4 Routes in een rooster

Je leert

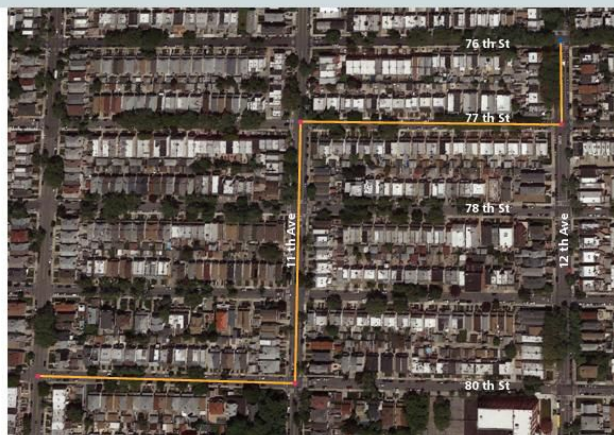
- hoe je het aantal kortste routes in een rooster berekent

Leerroutes

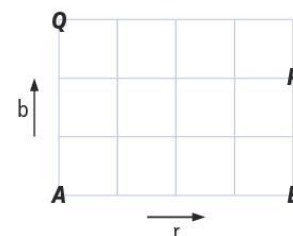
- ondersteunend: 24—25—026—26—28—029—30
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 24—25—27—28—29—30—U3

Je ziet een stukje van de plattegrond van New York. Donald staat op de hoek van 10th Ave en 80th Street (linksonder). Hij moet naar de hoek van 12th Ave en 76th Street (rechtsboven). Met de gele lijn is een mogelijke route aangegeven.

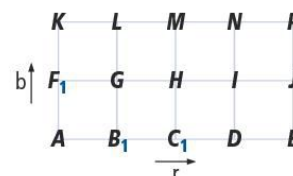
- Uit hoeveel routes kan Donald kiezen als hij zonder omweg naar zijn doel wil lopen?



- 24** Je gaat het aantal kortste routes tellen van het punt A naar het punt P via de roosterlijnen. Op ieder kruispunt van roosterlijnen heb je de keuze uit rechtsaf (r) of naar boven (b). De route die via punt E loopt, kun je beschrijven met r-r-r-r-b-b.
- Teken in het rooster de route r-b-r-r-b-r.
 - Schrijf nog enkele routes van punt A naar punt P op.
 - Hoe kun je zonder te tekenen zien dat de route b-r-r-b-r-b niet uitkomt in punt P ?
 - Leg uit waarom geen van de gevraagde routes via punt Q gaat.



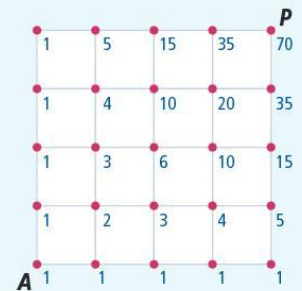
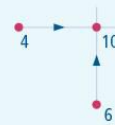
- 25** Het aantal kortste routes van punt A naar punt P kun je berekenen door bij elk kruispunt het aantal kortste routes van punt A naar dat kruispunt te noteren.
- Leg uit dat je de punten B , C en F maar op één manier kunt bereiken.
 - Welke andere punten kun je maar op één manier bereiken? Noteer bij al deze punten het getal 1.
 - Leg uit dat je punt G op twee manieren kunt bereiken en noteer het getal 2 bij punt G .
 - Punt H kun je bereiken via punt C (op één manier) of via punt G (op twee manieren). Op hoeveel manieren kun je dus in punt H komen? Noteer dit aantal bij punt H .



- Welk getal noteer je bij punt L ?
- De punten H en L zijn de voorgangers van punt M . Hoe bereken je met de getallen bij de punten H en L het aantal mogelijke kortste routes naar punt M ?
- Noteer bij alle punten het aantal kortste routes vanuit punt A .
- Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt P ?

Aanpak**Hoe bereken je het aantal kortste routes in een rooster?**

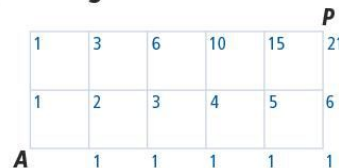
- 1 Noteer bij elk punt dat maar op één manier is te bereiken het getal 1.
- 2 Stel voor elk ander punt vast wat de voorgangers zijn en tel de bijbehorende aantallen bij elkaar op.

**Voorbeeld**

Bereken het aantal kortste routes van linksonder naar rechtsboven in een rooster van vijf breed en twee hoog.

Oplossing

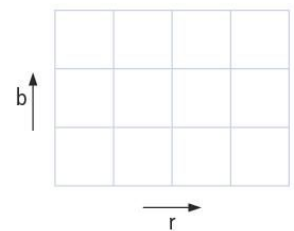
1



- 2 Er zijn 21 kortste routes.

Ondersteunende route → maak opdracht 026

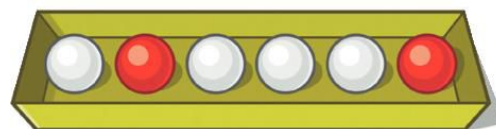
- 26** Bereken het aantal kortste routes van het punt linksonder naar het punt rechtsboven in een rooster van
- a zes breed en twee hoog.
 - b drie breed en zes hoog.
 - c vier breed en vijf hoog.
- 27** De voetbalwedstrijd tussen de amateurclubs Rapido en Broekster Boys eindigde in 4 - 3 voor Rapido. Je gaat met een rooster het aantal mogelijke scoreverlopen berekenen die tot deze eindstand leiden.
- W**
- a Het scoreverloop waarbij Rapido eerst twee keer scoort, daarna Broekster Boys drie keer en Rapido tot slot twee keer, geef je aan met r-r-b-b-b-r-r. Teken in het rooster het scoreverloop r-r-b-b-b-r-r.
 - b Geef in het rooster de route aan die overeenkomt met het scoreverloop waarbij de clubs om en om een doelpunt scoren.
 - c Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen die leiden tot de eindstand 4 - 3.



1.4 Routes in een rooster

Bij telproblemen waarbij steeds gekozen moet worden uit twee mogelijkheden is een rooster een handig telmodel.

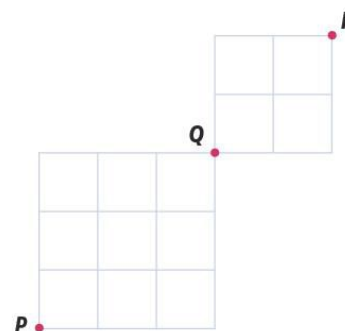
- 28** Je hebt twee rode en vier witte ballen. Je legt die ballen van links naar rechts in een doos zodat een kleurpatroon ontstaat. Het kleurpatroon in het plaatje kun je aangeven met w-r-w-w-w-r. De vraag is hoe groot het aantal verschillende kleurpatronen met rood en wit is. Omdat elk kleurpatroon bestaat uit vaste aantallen van twee kleuren, kun je hier een rooster gebruiken. Bij een witte bal doe je een stap naar rechts en bij een rode een stap omhoog.



- Teken in het rooster de route die hoort bij de getekende doos met ballen.
- Hoeveel verschillende kleurpatronen zijn er mogelijk?
- Hoeveel verschillende kleurpatronen zijn er mogelijk met drie rode en vijf witte ballen?

Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29**
- Bereken het aantal kortste routes van P naar Q .
 - Bereken het aantal kortste routes van Q naar R .
 - Ab denkt dat het aantal routes van P naar R 26 is. Bert denkt dat dit aantal 120 is. Wie van de twee heeft gelijk? Leg je antwoord uit.



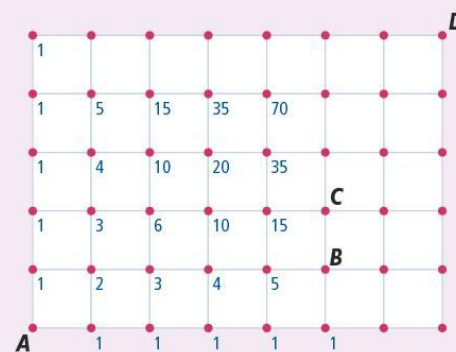
Als je het aantal kortste routes van punt A naar punt B en van punt B naar punt C weet, dan vind je het aantal routes van punt A via punt B naar punt C door die aantallen routes te vermenigvuldigen. Immers elke route van punt A naar punt B kun je combineren met elke route van punt B naar punt C .

- 30** Lucia maakt twee testen met ja-nee vragen. De eerste test bestaat uit acht vragen en de tweede test uit zes vragen. Omdat ze de stof niet goed heeft geleerd, gaat ze de antwoorden gokken. Ze besluit om bij elke test de helft van de vragen met ja te beantwoorden en de andere helft met nee. Bereken het aantal mogelijkheden waarop haar lijst met antwoorden er uit kan zien.

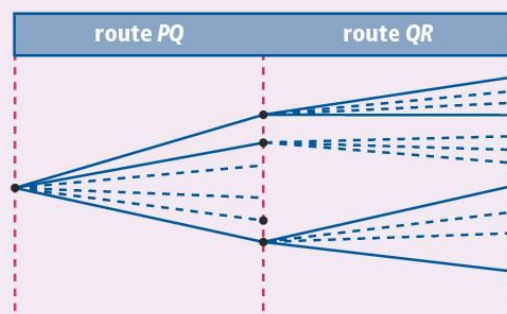
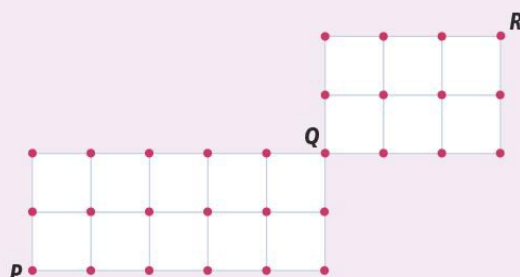
Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

- 026**
- Leg uit dat er 6 kortste routes zijn van punt A naar punt B .
 - Leg uit waarom het aantal routes van punt A naar punt C gelijk is aan $15 + 6$.
 - Noteer bij alle punten van het rooster het aantal kortste routes vanuit punt A .
 - Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt D ?
 - Lees uit je tekening af hoeveel kortste routes er zijn in een rooster van vier breed en vijf hoog van linksonder naar rechtsboven.



- 029** In deze opdracht ga je het aantal kortste routes van P naar R berekenen.



- Bereken het aantal kortste routes van P naar Q .
- Bereken het aantal kortste routes van Q naar R .
- Een route van P naar R krijg je door eerst een route van P naar Q te kiezen en daarna een route van Q naar R . Het aantal routes van P naar R kun je berekenen met een boomdiagram.
Bereken het aantal routes van P naar R .

Uitdagende opdrachten

- U4**
- De code van mevrouw Veenstra voor het kopieerapparaat bestaat uit één keer een 3, één keer een 4 en één keer een 7 en vijf keer een 6. Een mogelijke code is dus 36676646. Hoeveel codes zijn er mogelijk met deze cijfercombinaties?
 - Hoeveel codes zijn er mogelijk met één keer een 3, één keer een 5, één keer een 7, drie keer een 8 en twee keer een 9?



1.5 Combinaties

Je leert

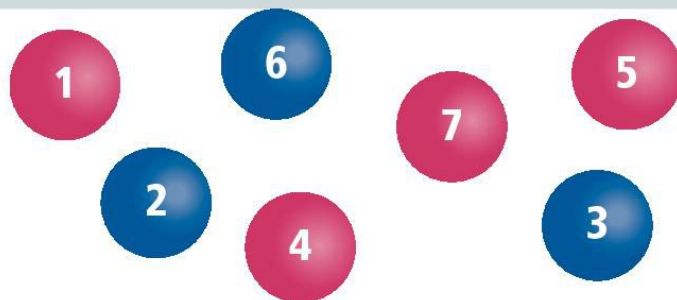
- hoe je het aantal combinaties berekent
- wat de driehoek van Pascal is

Leerroutes

- ondersteunend: 31—32—033—33—34—36—37
- doorlopend: 31—32—33—34—35—36—37
- uitdagend: 31—32—33—35—36—37—U4

Tom en Vera hebben zeven genummerde ballen. Vier daarvan zijn rood, de andere drie blauw. Ze vragen zich af op hoeveel manieren deze ballen op een rij gelegd kunnen worden. Ze maken elk een lijst met alle mogelijkheden. Tom let alleen op de nummers. Vera let alleen op de kleur.

- Wie van de twee heeft de langste lijst?



- 31** Vanuit een bestuur van zeven personen moeten drie personen worden geselecteerd als afvaardiging naar het jubileumfeest van de plaatselijke fanfare.

- Leg uit dat een selectie van drie personen overeenkomt met een rijtje van drie rode en vier witte ballen.
- Bereken het aantal mogelijke selecties.

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---



Theorie

Een ander woord voor een selectie is **combinatie**.
 Een combinatie van 3 uit 10 is een selectie van drie dingen uit tien verschillende dingen: drie wel en zeven niet.
 Een rooster is een geschikt telmodel om het aantal mogelijke combinaties te berekenen want drie kiezen uit tien komt overeen met: op hoeveel manieren kun je in een rooster drie stappen naar rechts en zeven omhoog doen.

Het aantal combinaties van 3 uit 10 noteer je als $\binom{10}{3}$; dit spreek je uit als '10 boven 3'.
 Je kunt dit ook met je rekenmachine uitrekenen.

Voorbeeld

In een bak liggen 20 balletjes, genummerd van 1 tot en met 20. Je pakt in één keer zes balletjes uit de bak. Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er?

Oplossing

Je pakt 6 balletjes wel en 14 niet. Het aantal combinaties van 6 uit 20 is het aantal kortste routes in een rooster van 6 breed en 14 hoog. Dit is gelijk aan $\binom{20}{6}$.
 De rekenmachine geeft 38 760.

- 32** **a** Leg met behulp van het voorbeeld uit dat $\binom{20}{14}$ gelijk is aan $\binom{20}{6}$.
- b** Bereken $\binom{5}{2}$ en $\binom{15}{6}$.

→ Instructie rekenmachine | Combinatie

Ondersteunende route → maak opdracht 033

33**H**

- a Jente gaat vijf mutsen breien, elke muts krijgt een andere kleur. Ze heeft acht kleuren wol.
Hoeveel selecties van vijf kleuren zijn er mogelijk?
- b Martijn kiest vier verschillende letters uit het alfabet.
Hoeveel mogelijke viertallen zijn er?
- c Uit een lijst met 40 boektitels selecteert een docent Nederlands er vijf waarvan klassensets worden aangeschaft.
Hoeveel mogelijke selecties zijn er?
- d De supermarkt heeft haar assortiment uitgebreid met negen nieuwe maaltijdsalades. Shakira wil vier verschillende uitproberen.
Bereken uit hoeveel verschillende combinaties ze kan kiezen.

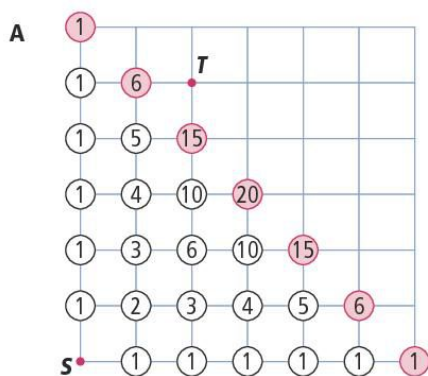
**34**

- Twee teams spelen een zaalkorfbalwedstrijd. Bij rust is de tussenstand van 4 – 6.
- a Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen die deze tussenstand opleveren.
- b Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen tijdens de tweede helft die leidt tot de eindstand 7 – 8.
- c Bereken het totaal aantal mogelijke scoreverlopen.

**35**

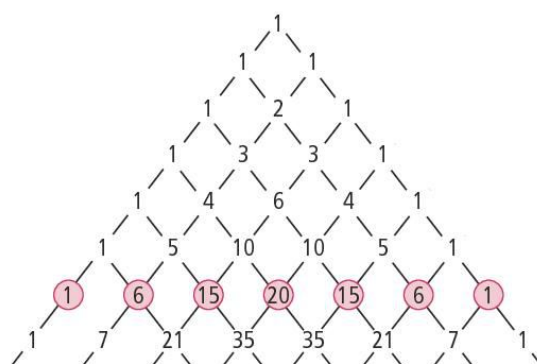
- Sven is een groot liefhebber van de serie boeken over inspecteur Zomerman. Hij heeft alle 37 delen op de plank staan. Sven wil zijn twee vrienden Mark en Koen ook kennis laten maken met deze speurder. Daarom neemt hij acht boeken mee naar school om aan zijn vrienden uit te lenen.
- a Bereken op hoeveel manieren hij acht boeken uit de serie kan selecteren.
- b Mark en Koen krijgen elk drie boeken mee naar huis.
Bereken op hoeveel manieren Sven uit de acht meegenomen boeken deze twee drietallen aan zijn twee vrienden kan meegeven.

1.5 Combinaties



B

rij 0
rij 1
rij 2
rij 3
rij 4
rij 5
rij 6
rij 7



- 36** In figuur A staat bij een aantal roosterpunten het getal dat aangeeft hoeveel kortste routes er zijn vanuit het punt S naar dat punt.
- Bereken met de figuur het aantal kortste routes van punt S naar punt T .
 - Bereken met behulp van deze figuur $\binom{6}{3}$.
 - In figuur B zijn de getallen uit het rooster anders opgeschreven.
Leg uit hoe de getallen op de onderste rij zijn ontstaan uit de getallen in de rij daarboven.
 - Neem de figuur over en vul hem aan met rij 8 en rij 9.
 - Het aantal combinaties van 3 uit 8 is 56.
Op welke posities in rij 8 staat dit getal?

Theorie

De driehoek van getallen in opdracht 36 heet de **Driehoek van Pascal**.

De bovenste rij met alleen het getal 1 is rij nul. Rij 1 bestaat uit de getallen 1 en 1. Elke rij begint en eindigt met het getal 1. Elk ander getal in de rij is de som van de twee getallen die er vlak boven staan.

Als je bedenkt hoe de driehoek is ontstaan uit de getallen in het rooster, dan zie je dat het derde getal op rij 7 gelijk is

aan $\binom{7}{2}$.

Voorbeeld

Het derde getal op rij 6 van de driehoek van Pascal is het aantal combinaties van 2 uit 6. Het volgende getal op die rij is het aantal combinaties van 3 uit 6.

Het getal $\binom{7}{3}$ staat op de vierde positie in rij 7.

- 37**
- Welk getal staat in de driehoek van Pascal op de vierde positie van rij 9?
 - Vul in: het derde getal op rij 8 is $\binom{8}{\dots} = \dots$
 - Het getal $\binom{11}{5}$ staat op de ... positie in rij

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

- 033** Op een spelletjesavond van een brugklas zijn er tien leerlingen die graag Catan willen spelen. Met de aanwezige editie kunnen slechts vier spelers meedoen. Er zullen dus vier van de tien leerlingen moeten worden geselecteerd. In de figuur zijn twee voorbeelden van zo'n selectie weergegeven.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

X	-	-	X	X	-	-	-	X	-
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

-	X	-	X	-	X	-	-	-	X
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- Uit welke leerlingen bestaat selectie in het eerste voorbeeld? En uit welke leerlingen in het tweede voorbeeld?
- Leg uit dat het aantal mogelijke selecties overeenkomt met het aantal manieren waarop je vier rode en zes witte ballen op een rij kunt leggen.
- Je kunt het aantal mogelijke selecties berekenen met een rooster.
Leg uit dat een rooster van zes breed en vier hoog een geschikt telmodel is.
- Je kunt het aantal mogelijke selecties uitrekenen met de rekenmachine.
Bereken het aantal mogelijke selecties van vier uit tien.

**Uitdagende opdrachten**

- U5** Habib zit in de derde klas. Op zijn rooster staan elf vakken. Aan het begin van het schooljaar heeft hij elf schriften gekocht, drie rood, vier blauw en vier groen. Bereken het aantal mogelijke manieren waarop hij de schriften over de vakken kan verdelen.



1.6 Het goede telmodel kiezen

Je leert

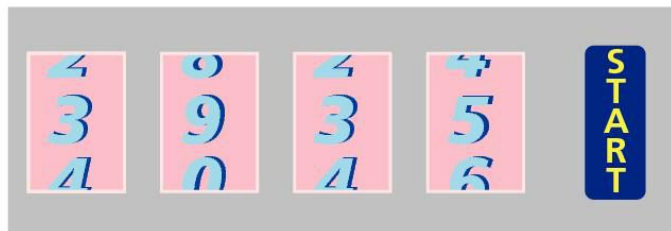
- hoe je bij een telprobleem een goed telmodel kiest

Leerroutes

- ondersteunend: 38—039—39—40—041
- doorlopend: 38—39—40—41—42
- uitdagend: 38—39—41—42—U6

In een gokkast zitten vier rollen die elk willekeurig één van de cijfers 0, 1, 2,..., 9 laten zien. Zo ontstaat een rijtje van vier cijfers. Romy krijgt de opdracht om te bepalen hoeveel van die rijtjes er zijn waarbij elk cijfer groter is dan zijn linker buur.

- Met welk telmodel kun je het aantal rijtjes berekenen?



- 38** De personeelsvereniging organiseert een dag met een ochtend- een middag- en een avondprogramma. Iedereen moet voor elk dagdeel een activiteit kiezen. In de uitnodiging zie je welke activiteiten worden aangeboden.

- Bereken het aantal mogelijke dagprogramma's.
- Er zijn tien deelnemers die voor wandelen kiezen. De gidsen Douwe en Martin nemen elk vijf wandelaars mee. Bereken het aantal manieren waarop de tien wandelaars over de twee gidsen verdeeld kunnen worden.
- Bij klootschieten werpen de leden van een team in een vaste volgorde een met lood verzwaarde bal. Bereken het aantal mogelijke volgorden bij een team van zeven leden.

Ochtend

wandelen, fietsen, zwemmen, roeien

Middag

boogschieten, midgetgolf,
klootschieten, biljarten, tafeltennis

Avond

film, disco, volksdansen

Theorie

Bij het oplossen van een telprobleem kies je een goed telmodel. Ga na of je gebruik kunt maken van een boomdiagram, een rooster of een schema:

- als je te maken hebt met de keus uit twee mogelijkheden met vaste aantallen per mogelijkheid, dan is een rooster een handig telmodel;
- heeft een boomdiagram een regelmatige structuur, dan kun je het aantal mogelijkheden berekenen door de aantallen vertakkingen per kolom met elkaar te vermenigvuldigen;
- heeft het boomdiagram geen regelmatige structuur, dan moet je het boomdiagram tekenen of alle mogelijkheden systematisch opschrijven;
- bestaat je keuzeproces uit twee stappen, dan kun je alle mogelijkheden weergeven in een schema.

Voorbeeld 1

Voor een groep van acht personen zijn er vijf gele en drie rode T-shirts beschikbaar. Bereken het aantal manieren waarop de T-shirts over de personen kunnen worden verdeeld.

Oplossing

Er zijn steeds twee mogelijkheden (geel of rood) met vaste aantallen per mogelijkheid (vijf en drie). Een rooster is een goed telmodel.

Het aantal mogelijkheden is

$$\binom{8}{5} = 56.$$

Voorbeeld 2

Uit een vaas met tien balletjes genummerd 0 tot en met 9, trek je vijf keer een balletje. Bij elke trekking noteer je het getrokken nummer en doe je het balletje terug in de vaas.

Bereken het aantal mogelijke uitkomsten.

Oplossing

Bij elke trekking is het aantal mogelijkheden één kleiner. Een boomdiagram is een goed telmodel.

Het aantal mogelijk uitkomsten is $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$.

Voorbeeld 3

Uit een vaas met tien balletjes, genummerd 0 tot en met 9, trek je vijf keer een balletje. Bij elke trekking noteer je het getrokken nummer en doe je het balletje terug in de vaas.

Bereken het aantal mogelijke uitkomsten waaring elk volgend getal minstens twee groter is dan zijn voorganger.

Oplossing

Systematisch uitschrijven van alle mogelijkheden geeft:

02468, 02469, 02479, 02579, 03579, 13579.

Er zijn zes mogelijkheden.

Ondersteunende route → maak opdracht 039**39****H**

Margriet heeft een doos met 24 verschillende kleurpotloden.

a Ze heeft ze allemaal uit de doos gehaald.

Uit hoeveel verschillende volgordes kan Margriet kiezen om ze weer in de doos doen?

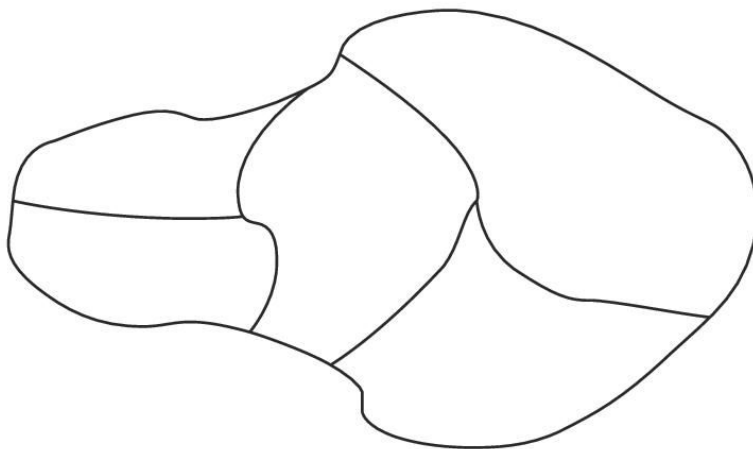
b Voor de tekenles moeten er tien potloden mee naar school.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om tien kleurpotloden te kiezen?

c Margriet kiest tien keer een kleurpotlood en legt ze in volgorde van kiezen voor zich op tafel.

Hoeveel verschillende rijtjes kleurpotloden zijn mogelijk?

d Bij de les aardrijkskunde moet Margriet met haar tien kleurpotloden vijf gebieden op een kaart kleuren. Aan elkaar grenzende gebieden krijgen een verschillende kleur. Bereken het aantal mogelijke manieren waarop de gebieden gekleurd kunnen worden.



1.6 Het goede telmodel kiezen

Theorie

Er zijn telproblemen waarbij je het aantal mogelijkheden vindt door resultaten van deelproblemen te combineren.

Voorbeeld 1

In een klas met zeven jongens en zeven meisjes worden vijf leerlingen aangewezen om corvee te doen.

Bereken het aantal mogelijke vijftallen met drie jongens en twee meisjes.

Oplossing

Er zijn $\binom{7}{3} = 35$ mogelijke keuzes voor de drie jongens.

Er zijn $\binom{7}{2} = 21$ mogelijke keuzes voor de twee meisjes.

In totaal zijn er $35 \times 21 = 735$ mogelijke vijftallen.

Voorbeeld 2

Karin heeft een vaas met drie witte en vijf blauwe kralen. Ze neemt achter elkaar zeven keer een kraal uit de vaas en legt ze naast elkaar op tafel.

Hoeveel mogelijke rijtjes zijn er?

Oplossing

Er zijn twee soorten rijtjes:

- drie witte en vier blauwe kralen. Dat levert

$$\binom{7}{3} = 35 \text{ mogelijkheden.}$$

- twee witte en vijf blauwe kralen. Dat levert

$$\binom{7}{2} = 21 \text{ mogelijkheden.}$$

In totaal zijn er $35 + 21 = 56$ mogelijke rijtjes.

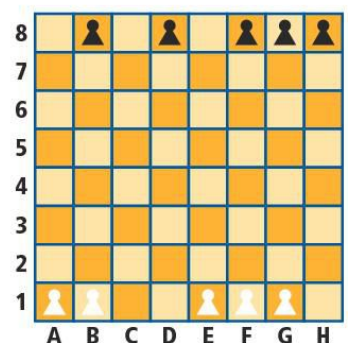
- 40** Leg uit waarom in voorbeeld 1 de getallen met elkaar worden vermenigvuldigd en in voorbeeld 2 bij elkaar worden opgeteld.

Ondersteunende route → maak opdracht 041

- 41** Op een kinderpartijtje zijn tien kinderen: vier jongetjes en zes meisjes. Er zijn twaalf feesthoedjes: vier goudkleurig en acht zilverkleurig. Elk kind krijgt bij binnenkomst een hoedje op.
- Bereken het aantal manieren waarop de hoedjes zo over de kinderen kunnen worden verdeeld dat alle jongetjes eenzelfde kleur hoedje krijgen.
 - Bereken het aantal manieren waarbij twee jongetjes en twee meisjes een goudkleurig hoedje krijgen.

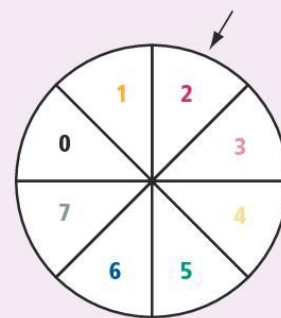
- 42** Met een schaakbord en schaakstukken kun je veel meer spelletjes spelen dan alleen maar schaken. Bij het spel Kurken zet elke speler aan het begin vijf van zijn eigen pionnen op zijn achterste rij.
- Bereken hoeveel mogelijke beginopstellingen er zijn.
 - Michel en Ronald spelen dit spel. Op een gegeven moment zijn alle vakjes op rij 5 bezet door een pion. Bereken het aantal mogelijke manieren waarop dit kan.

Uitdagende route → maak opdracht U6

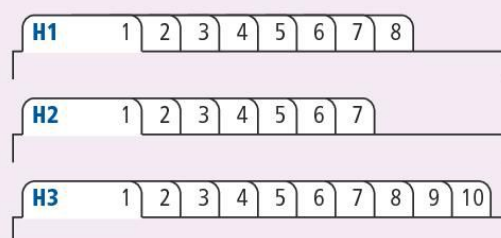


Ondersteunende opdrachten

- 039** Kevin draait zes keer met de tol. Elke keer noteert hij het aangewezen cijfer. Zo ontstaat een rijtje van zes cijfers.
- Waarom is een rooster geen handig telmodel om het aantal mogelijke rijtjes te berekenen?
 - Bereken het aantal mogelijke rijtjes.
 - Met welk telmodel bereken je het aantal mogelijke rijtjes die bestaan uit allemaal verschillende cijfers?
 - Waarom is een rooster handig om het aantal rijtjes te tellen met twee keer een 0 en vier keer een 1?
 - Bereken het aantal rijtjes met twee keer een 0 en vier keer een 1.
 - Victor draait drie keer met de schijf en schrijft de cijfers achter elkaar.
Bereken het aantal mogelijke rijtjes waarvan de som van de cijfers 3 is.



- 041** Een docent geschiedenis wil een toets maken met vier vragen over elk van de eerste drie hoofdstukken uit het boek. Hij heeft een bestand met bij hoofdstuk 1 acht toetsvragen, bij hoofdstuk 2 zeven toetsvragen en bij hoofdstuk 3 tien toetsvragen.
- Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn om vier toetsvragen bij hoofdstuk 1 te selecteren.
 - Bereken ook bij hoofdstuk 2 en bij hoofdstuk 3 het aantal mogelijke selecties van vier toetsvragen.
 - Waarom moet je de antwoorden van opdracht a en opdracht b vermenigvuldigen?
 - Bereken het aantal mogelijke toetsen dat de docent kan maken, waarbij de volgorde van de vragen niet van belang is.

**Uitdagende opdrachten**

- U6** Op de foto zie je speelgoed voor kleine kinderen. Je kunt twaalf bekertjes met een verschillende diameter stapelen tot een toren. In de fabriek worden de bekertjes geproduceerd in zes verschillende kleuren. Derk heeft van elke kleur twaalf bekertjes met een verschillende diameter.
- Derk bouwt torens waarbij hij twee kleuren gebruikt. Bereken het aantal mogelijke torens met rode en blauwe bekertjes.
 - Bereken het aantal mogelijke torens die Derk kan bouwen met twee kleuren.
 - Hoeveel mogelijke torens zijn er met drie verschillende kleuren?



1.7 Gemengde opdrachten

- 43** In de eerste ronde van een volleybaltoernooi spelen de deelnemende teams volgens het systeem 'best of five'. Dat betekent dat het team dat als eerste drie sets heeft gewonnen de wedstrijd wint. Een mogelijke setvolgorde waarbij A wint van B is bijvoorbeeld ABAA.

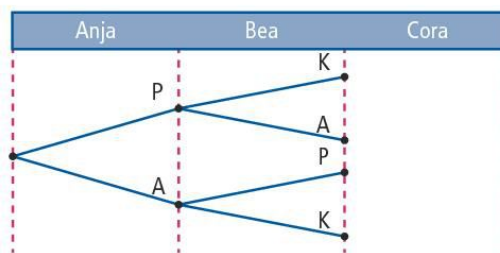
- Bereken het totaal aantal mogelijke setvolgorden.
- In de tweede ronde wordt gespeeld volgens 'best of seven'. ColorAdo heeft in de wedstrijd tegen Jumpshoot de eerste twee sets gewonnen.
Bereken het aantal mogelijke setvolgorden waarbij ColorAdo de wedstrijd wint.

- 44** Anja, Bea, Cora, Douwe, Eduard en Frits vormen een muzikale vriendengroep. Ze spelen allemaal één of meer instrumenten en zingen ook allemaal heel behoorlijk. De groep beschikt over de volgende instrumenten: Piano, Keyboard, Drumstel, Basgitaar, Gitaar, Altsaxofoon. Voor een festival besluit de groep een nieuw nummer te schrijven, waarbij iedereen één van de beschikbare instrumenten bespeelt.

- Ga er van uit dat iedereen elk instrument kan bespelen. Op hoeveel manieren kunnen de instrumenten over de groepsleden worden verdeeld?
- Niet alle leden kunnen elk instrument bespelen. In het schema staat aangegeven wie welk instrument beheerst. Zo zie je dat Cora zowel keyboard als gitaar speelt en dat de basgitaar door Eduard en Frits bespeeld kan worden. Bereken met behulp van een boomdiagram het aantal manieren waarop de instrumenten over de groepsleden kunnen worden verdeeld, waarbij iedereen een instrument krijgt dat hij of zij beheerst.
- In het nummer dat de groep schrijft, zitten ook drie zangsolo's, de eerste voor een vrouw, de tweede voor een man en de derde voor een vrouw. Bereken het aantal manieren waarop deze solo's aan verschillende groepsleden kunnen worden toegedeeld.
- Het optreden op het festival wordt een groot succes. Na afloop zijn er twee radiostations die op hetzelfde moment een interview willen houden met leden van de groep. Bereken het aantal mogelijke manieren waarop de leden zich in twee drietallen over de twee stations kunnen verdelen.
- Bij hoeveel van deze verdelingen gaan de drie vrouwen niet samen naar één station?



	A	B	C	D	E	F
piano	X	X				
keyboard		X	X			X
drumstel				X	X	X
basgitaar					X	X
gitaar			X	X	X	
altsax	X	X				X



Onderzoeksoopdrachten

- 45** Dieuwke stuurt na afloop van haar handbalwedstrijd een berichtje aan haar moeder: *We hebben gewonnen met 8 – 6! Het was wel spannend, want in de rust stond het 4 – 4. Gelukkig hebben we nooit achter gestaan.* Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen die in overeenstemming zijn met dit bericht.



- 46** Een parkeerautomaat accepteert naast allerlei soorten betaalkaarten ook muntgeld. Je beschikt over een ruime hoeveelheid munten van 10, 20 en 50 cent. Je gaat voor een aantal gevallen onderzoeken hoeveel mogelijke volgorden er zijn waarop je de munten in de automaat kunt werpen.



- a** Neem eerst aan dat je geen munten van 50 cent gaat gebruiken.
Bereken voor de bedragen 10, 20, 30, 40 en 50 cent hoeveel mogelijke invoervolgorden er zijn.
- b** Bereken het aantal mogelijke invoervolgorden om een bedrag van € 1,- te betalen, waarbij je geen munten van 50 cent gebruikt.
- c** Bereken het aantal mogelijke invoervolgorden om een bedrag van € 1,- te betalen als je munten van 10, 20 en 50 cent kunt gebruiken.

Samenvatting

Theorie

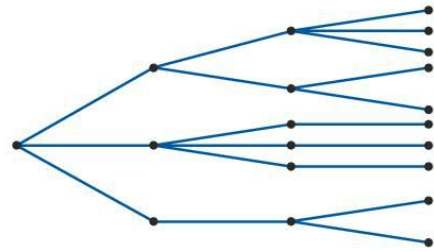
Regelmatig boomdiagram, onregelmatig boomdiagram en wegendiagram

Als het aantal vertakkingen op elk punt in een kolom gelijk is, dan is de structuur van het boomdiagram regelmatig.

Je kunt het aantal mogelijkheden uitrekenen zonder het hele boomdiagram te tekenen. Je kunt dan ook een wegendiagram gebruiken.

Als de structuur van een boomdiagram niet regelmatig is, dan moet je de hele boomdiagram tekenen of de mogelijkheden systematisch opschrijven.

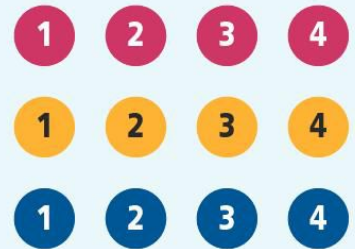
Voorbeeld



Dit is een onregelmatig boomdiagram met 10 mogelijke volgorden.

- S1** Harry heeft twaalf gekleurde genummerde balletjes. Hij neemt drie keer een balletje en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar op tafel. Geef bij de volgende opdrachten aan of het bijbehorende boomdiagram regelmatig of onregelmatig is.

- Bereken het aantal mogelijke rijtjes.
- Bereken het aantal mogelijke rijtjes met balletjes met een verschillend nummer.
- Bereken het aantal rijtjes waarbij het product van de getallen zes is.



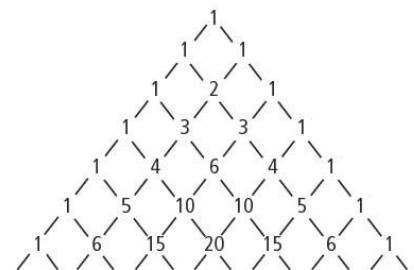
Theorie

Driehoek van Pascal

In de driehoek van Pascal begint en eindigt elke rij met 1. Elk ander getal in een rij is de som van de twee getallen die er vlak boven staan.

Op de derde positie in rij 6 staat het getal $\binom{6}{2}$

rij 0
rij 1
rij 2
rij 3
rij 4
rij 5
rij 6



- S2** Bereken het getal dat in de driehoek van Pascal op de vijfde positie van rij 7 komt te staan.

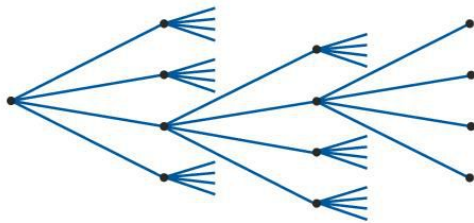
Vaardigheid

Je kunt met een machtsboom of een faculteitsboom het aantal mogelijkheden berekenen.

Een boomdiagram waarin bij elk keuzemoment het aantal takken gelijk is, noem je een machtsboom. Het totaal aantal volgorden is een macht.

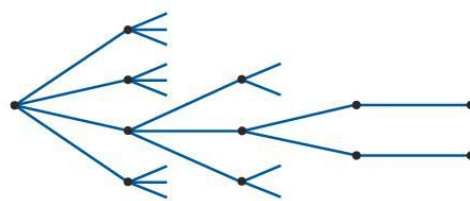
Een boomdiagram waarin bij elk keuzemoment het aantal takken één minder wordt, noem je een faculteitsboom. Het totaal aantal volgorden is een faculteit.

Een product van de vorm $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ heet n faculteit. Je noteert dit als $n!$.

Voorbeeld 1

Een machtsboom met drie keuzemomenten, waarbij er steeds vier keuzemogelijkheden zijn.

Het aantal volgorden is $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

Voorbeeld 2

Een faculteitsboom dat begint met vier keuzemogelijkheden, waarbij het aantal keuzemogelijkheden steeds één kleiner wordt.

Het aantal volgorden is $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$.

- S3** Je gooit zes keer met een dobbelsteen en noteert steeds het aantal geworpen ogen.
- Bereken het aantal mogelijke rijtjes.
 - Bereken het aantal mogelijke rijtjes waarin alleen oneven getallen voorkomen.
 - Bereken het aantal mogelijke rijtjes waarin alle getallen verschillend zijn.

Vaardigheid

Je kunt het aantal permutaties berekenen.

Een ander woord voor volgorde of rangschikking is permutatie.

Een permutatie van 6 uit 15 is een rangschikking van een rijtje van zes dat je kiest uit vijftien verschillende dingen: een eerste, een tweede tot en met een zesde.

Voorbeeld

Een docent biologie heeft een klas met 24 leerlingen vijf vragen laten beantwoorden. Hij kiest bij elke vraag een andere leerling om het antwoord voor te lezen. Bereken op hoeveel manieren hij de vijf leerlingen kan aanwijzen.

Oplossing

Voor de eerste vraag heeft hij de keus uit 24 leerlingen. Voor de tweede vraag kan hij kiezen uit 23 leerlingen, enzovoort. In totaal zijn er $24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 = 5\,100\,480$ mogelijkheden.

- S4** Donya heeft tien blokjes met verschillende letters. Ze neemt er drie die ze naast elkaar op tafel legt. Bereken het aantal mogelijke 'woorden' die ze zo kan maken.



Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt het aantal kortste routes in een rooster berekenen.

- 1 Noteer bij elk punt dat maar op één manier is te bereiken het getal 1.
- 2 Stel voor elk ander punt vast wat de voorgangers zijn en tel de bijbehorende aantallen bij elkaar op.

Voorbeeld

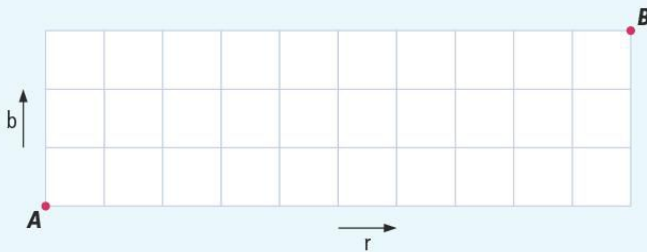
Bereken het aantal kortste routes van linksonder naar rechtsboven in een rooster van vier breed en drie hoog.

Oplossing

1

1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
	1	1	1	1

- 2 Het aantal kortste routes in een rooster van vier bij drie is 35.



- S5
- a Bereken het aantal kortste routes van A naar B.
 - b Bereken het aantal kortste routes van linksonder naar rechtsboven in een rooster van vijf breed en vier hoog.

Vaardigheid

Je kunt het aantal combinaties berekenen.

Een ander woord voor een selectie is combinatie.

Een combinatie van 5 uit 12 is een selectie van vijf dingen uit twaalf verschillende dingen: vijf wel en zeven niet.

Het aantal combinaties van 5 uit 12 noteer je als $\binom{12}{5}$.

Dit spreek je uit als '12 boven 5'.

Voorbeeld

Uit een klas met 24 leerlingen worden elke week vijf leerlingen aangewezen om na de laatste les op vrijdag het lokaal aan te vegen.

Bereken het aantal mogelijke vijftallen.

Oplossing

Het aantal mogelijke vijftallen is het aantal combinaties van 5 uit 24: van de 24 leerlingen moeten er 5 wel en 19 niet vegen.

Het aantal combinaties is $\binom{24}{5} = 42\,504$.

- S6** Jan is jarig en hij mag van opa en oma drie autootjes uitzoeken. De winkel heeft 14 verschillende modellen in voorraad. Bereken het aantal mogelijke drietallen dat Jan kan kiezen.



Vaardigheid

Je kunt bij een telprobleem een goed telmodel kiezen.

Bij het oplossen van een telprobleem moet je een goed telmodel kiezen. Ga na of je gebruik kunt maken van een boomdiagram, een rooster of een schema:

- als je te maken hebt met de keus uit twee mogelijkheden met vaste aantallen per mogelijkheid, dan is een rooster een handig telmodel;
- heeft een boomdiagram een regelmatige structuur, dan kun je het aantal mogelijkheden berekenen door de aantallen vertakkingen per kolom met elkaar te vermenigvuldigen;
- heeft het boomdiagram geen regelmatige structuur, dan moet je het boomdiagram tekenen of alle mogelijkheden systematisch opschrijven;
- bestaat je keuzeproces uit twee stappen, dan kun je alle mogelijkheden weergeven in een schema.

Voorbeeld

Bij een roei-estafette moeten vier van de tien roeiers uit een team het eerste traject roeien.

Uit hoeveel viertallen kan de coach kiezen?

Oplossing

Er zijn twee alternatieven (wel of niet beginnen) met vaste aantallen: vier wel en zes niet. Hierbij past als telmodel een rooster van vier bij zes.

Het aantal mogelijke viertallen is

$$\binom{10}{4} = 210.$$

- S7** Alfred gaat voor hemzelf en zijn zes vrienden wat te eten halen in de snackbar. Hij noteert op een lijstje de namen in alfabetische volgorde en noteert achter elke naam wat voor snack deze persoon wil. Iedereen mag uit vijf mogelijke snacks er één kiezen.
- a** Hoeveel verschillende lijstjes zijn er mogelijk?
 - b** Onderweg is Alfred het lijstje kwijt geraakt. Hij heeft daarom vier kroketten en drie gehaktballen meegenomen. Bereken het aantal manieren waarop ze deze snacks onder elkaar kunnen verdelen.
 - c** Alfred heeft zeven verschillende blikjes drinken gekocht, voor ieder één. Bereken het aantal manieren waarop de blikjes verdeeld kunnen worden.

- T1** Een vlag wordt samengesteld uit vier horizontale banen. Er mag gekozen worden uit rood, wit, blauw en groen.
- Bereken het aantal mogelijke volgorden als elke kleur maar één keer mag voorkomen.
 - Het aantal kleuren wordt uitgebreid tot zes. Ook oranje en geel kunnen gekozen worden. Bereken het aantal mogelijke volgorden als elke kleur maar één keer mag voorkomen.
 - Hoeveel verschillende volgorden zijn er met de zes kleuren als de kleuren vaker voor mogen komen, maar aangrenzende banen niet dezelfde kleur mogen hebben?



- T2** Hanneke heeft vijf muzieknnummers op haar telefoon staan. Van Willie Nelson de nummers 'So much to do', 'Always on my mind' en 'On the road again' en van Brett Young de nummers 'In case you didn't know' en 'Mercy'. Ze gebruikt de shuffle-optie om de nummers af te spelen. Dit betekent dat de vijf nummers in een volstrekt willekeurige volgorde elk éénmaal worden afgespeeld.
- In hoeveel volgorden kunnen de nummers worden afgespeeld?
 - Bij hoeveel van die volgorden worden de nummers van Brett Young achter elkaar afgespeeld?
 - De shuffle-optie werkt niet goed meer. Er wordt wel steeds een willekeurig nummer gekozen, maar er wordt niet meer onthouden welke nummers geweest zijn. Bereken het aantal mogelijke volgordes voor de eerste zeven nummers die worden afgespeeld.
- T3** Clara moet voor haar verplichte boekenlijsten nog zes Nederlandse boeken en vijf Engelse boeken lezen.
- Bereken het aantal mogelijke volgorden waarin ze deze boeken kan lezen.
 - Bereken het aantal mogelijke volgorden als ze niet twee Nederlandse boeken achter elkaar wil lezen.
 - In de vakantie gaat Clara twee weken met haar ouders naar Frankrijk. Ze neemt vier boeken voor haar lijst mee. Bereken uit hoeveel viertallen ze kan kiezen.
 - Bereken het aantal mogelijke viertallen als ze twee Nederlandse en twee Engelse boeken mee neemt.

T4 In de vierkanten linksboven en rechtsonder van het logo van de Art Club van een Amerikaans college staat de naam van de club in gestileerde letters. Op elke poster van de Art Club komen deze twee vierkanten voor, maar wel steeds met andere kleuren. De beschikbare kleuren zijn rood, oranje, geel, groen, blauw, roze, paars en cyaan.

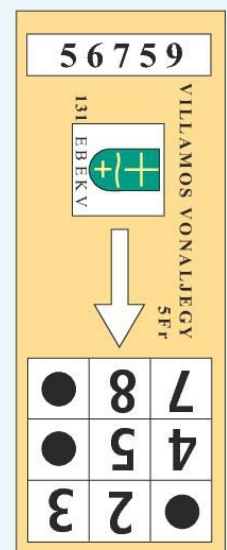
- Op hoeveel manieren zijn de letters te kleuren als elke letter een andere kleur krijgt?
- Bereken het aantal manieren waarbij binnen elk vierkant de letters verschillend gekleurd zijn.
- Bereken het aantal manieren waarbij binnen elk vierkant de letters verschillend gekleurd zijn en waarbij er precies vier kleuren worden gebruikt.
- Bereken het aantal manieren waarop de letters zo gekleurd kunnen worden, dat letters die tegen elkaar aan staan verschillend gekleurd zijn.



T5 Een groep van tien personen gaat een zeiltocht maken. Iedereen moet tijdens de tocht een zwemvest dragen. Er zijn zes gele en zes oranje zwemvesten beschikbaar. Bereken het aantal manieren waarop de zwemvesten uitgedeeld kunnen worden, waarbij je let op welke kleur zwemvest iemand krijgt.

T6 Wie in Budapest met de metro reisde, kocht een kaartje dat voorzien was van negen vakjes met daarin de cijfers 1 tot en met 9. Zodra je was ingestapt, moest je je kaartje in een ponsapparaat steken, volgens de pijlrichting en met de bedrukte zijde boven. Een of meer (maximaal 9) cijfers werden dan in één keer weggeponst. Daarmee was aan het kaartje te zien in welke trein je reis was begonnen. Je ziet een kaartje waarbij de vakjes 1, 6 en 9 zijn weggeponst.

- Bereken op hoeveel verschillende manieren er in een kaartje drie gaatjes weggeponst kunnen worden.
- Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er waarbij er twee gaatjes worden weggeponst die niet in dezelfde rij en niet in dezelfde kolom zitten?
- Het aantal cijfers dat wordt weggeponst, mag variëren van 1 tot en met 9.
Op een dag rijden op het metronet 400 treinen.
Is het mogelijk dat in elke trein op een verschillende wijze gaatjes worden geponst?
(Ontleend aan *CE havo wiskunde A 1992 2e tijdvak*)



Je kunt met een machtsboom of een faculteitsboom het aantal mogelijkheden berekenen.

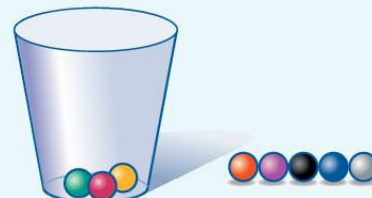
- E1** In een grote zak boerderijdrop zitten koeien, paarden, varkens, kippen, hooibergen en tractors. Zes kinderen kiezen één voor één een dropje en leggen dat voor zich op tafel.

- Bereken het aantal mogelijke rijtjes van zes dropjes.
- Bereken het aantal mogelijke rijtjes van zes verschillende dropjes.

Je kunt het aantal permutaties berekenen.

- E2** Joëlle heeft een vaas met acht verschillend gekleurde knikkers. Zij trekt aselekt vijf keer een knikker uit de vaas en legt ze in volgorde van trekking naast elkaar neer.

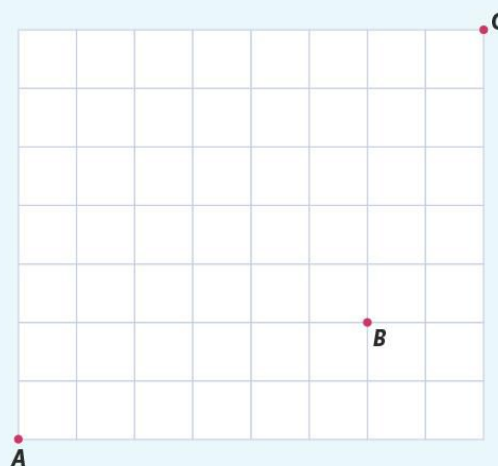
- Hoeveel verschillende rijtjes kan ze maken?
- En hoeveel verschillende rijtjes kan ze maken die beginnen met de rode knikker?



Je kunt het aantal kortste routes in een rooster berekenen.

- E3** Het rooster is een vereenvoudigde plattegrond van een gedeelte van een stad. De straten vormen een patroon van vierkanten.

- Langs hoeveel verschillende kortste routes kun je van punt A naar punt B rijden? En van punt B naar punt C?
- Hoeveel kortste routes zijn er van punt A via punt B naar punt C?



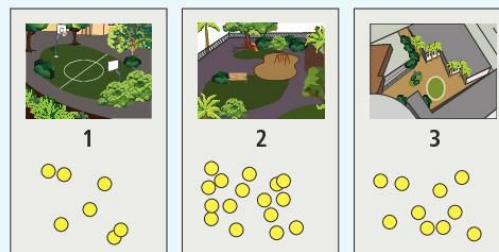
Je kunt het aantal combinaties berekenen.

- E4** Uit een klas met 24 leerlingen worden er drie geselecteerd om de klas te vertegenwoordigen in het leerlingenparlement.

- Bereken het aantal mogelijke selecties.
- Bereken ook het aantal mogelijke selecties als niet drie maar vijf leerlingen worden aangewezen.

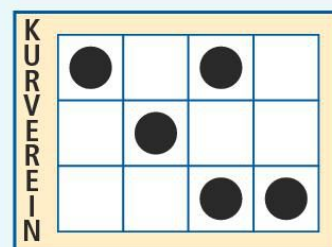
Je kunt bij een telprobleem een goed telmodel kiezen.

- E5**
- Je werpt zes keer met een euro.
Hoeveel volgorden zijn er met drie keer kop en drie keer munt?
 - Er zijn drie vierde klassen met respectievelijk 23, 29 en 28 leerlingen. Uit elk van die klassen moet één leerling worden aangewezen voor de culturele commissie.
Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?
 - Na de presentatie van drie plannen voor de herinrichting van het schoolterrein mag iedereen zijn voorkeur aangeven door vijf gele stickertjes te verdelen over drie posters.
Bereken het aantal manieren waarop iemand zijn vijf stickertjes kan verdelen.



- E6** Annabel, Boukje, Sjors en Willem moeten de bestuursfuncties van voorzitter, vicevoorzitter, penningmeester en secretaris onderling verdelen.
- Hoeveel verschillende verdelingen zijn er mogelijk?
 - Bereken het aantal samenstellingen waarbij één van de dames voorzitter is.
 - Hoeveel samenstellingen zijn er waarbij Willem geen penningmeester is?
 - Bereken het aantal samenstellingen waarbij de voorzitter en de vicevoorzitter niet van hetzelfde geslacht zijn.

- E7** Op de top van een berg vind je vaak een zogenaamd Gipfelbuch om je naam in te schrijven. Daarnaast hangt vaak een soort priktang. Met die tang maak je in een kaart een gaatjespatroon dat een code is voor de top van de berg.
- Bereken het aantal patronen met in elke kolom één gaatje.
 - Hoeveel patronen met zes gaatjes zijn er mogelijk?
 - Bereken het aantal patronen met in elke rij twee gaatjes.



- E8** Een verzorgingshuis organiseert een dagje uit voor een aantal bewoners. Er gaan 13 bewoners mee en 5 begeleiders. Er komt een bus voor 8 en een bus voor 12 passagiers.
- Laat zien dat er drie manieren zijn om de bussen te vullen als je alleen let op de aantallen personen in de bussen.
 - Op hoeveel manieren kunnen de personen over de bussen worden verdeeld als vijf bewoners en twee begeleiders in de kleine bus gaan en de anderen in de grote bus?
 - Op hoeveel manieren kunnen alle personen over de bussen worden verdeeld?

- E9** Een gezelschap van elf personen gaat aan een rechthoekige tafel zitten om te dineren. De gastheer en de gastvrouw zitten elk aan een van de uiteinden van de tafel.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de gasten om aan tafel te gaan zitten?
 - Na een onderbreking van het diner kan elk van de elf personen gaan zitten op de plaats die hij of zij wil. Op hoeveel manieren kan het gezelschap op de stoelen plaatsnemen?
 - Na een tweede onderbreking is iedereen opnieuw vrij een plaats te kiezen. De gastheer wil samen met zijn vrouw aan een van de lange zijden plaats nemen, waarbij zijn vrouw links naast hem komt te zitten. Op hoeveel manieren kunnen de leden van het gezelschap nu om de tafel zitten?



SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je de coördinaten van snijpunten van grafieken berekend. Daarvoor moest je een vergelijking oplossen. Ook heb je ongelijkheden opgelost.

In dit hoofdstuk leer je hoe je vergelijkingen en ongelijkheden met de grafische rekenmachine kunt oplossen. Dankzij de grafische rekenmachine kun je ook moeilijkere vergelijkingen en ongelijkheden oplossen. Ook leer je hoe je met de grafische rekenmachine de coördinaten van toppen van een grafiek kunt berekenen en hoe je kunt onderzoeken of een grafiek van een functie tot een bepaalde waarde nadert.

Deze kennis heb je nodig in alle hoofdstukken waarin functies of vergelijkingen voorkomen.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- | | |
|---|-------------|
| - <i>Probleem oplossen en analytisch denken</i> | opdracht 16 |
| - <i>Ordenen en structureren</i> | opdracht 30 |
| - <i>Abstraheren</i> | opdracht 10 |
| - <i>Logisch redeneren en bewijzen</i> | opdracht 38 |

Voorkennis

- V1 a Geef op een getallenlijn de getallen aan waarvoor geldt $-2 < x \leq 4$.
- b Geef ook op een getallenlijn de getallen aan waarvoor geldt $x < 1$.

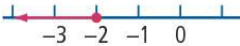
Theorie

Op de bovenste getallenlijn zijn de getallen vanaf 2 tot 4 aangegeven. Zo'n stuk van de getallenlijn heet een **interval**. Het getal 2 hoort er wel bij (dicht rondje), het getal 4 niet (open rondje). Dit noteer je kortweg als $[2, 4)$.

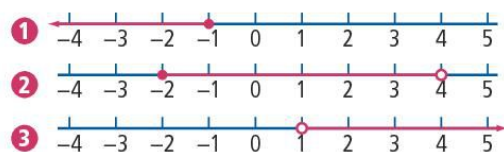
De notatie $[2, 4)$ heet de **intervalnotatie**.

De *rechte* haak betekent dat de grenswaarde meedoet, een *puntige* haak wil zeggen dat de grenswaarde niet meedoet. Als er aan één zijde geen grens is, geef je dit aan met een pijl en een puntige haak.

ongelijkheid	$2 \leq x < 4$
getallenlijn	
interval	$[2, 4)$

ongelijkheid	$x \leq -2$
getallenlijn	
interval	$\langle \leftarrow, -2]$

- V2 a Op de getallenlijnen zijn drie intervallen aangegeven. Bij welke van onderstaande ongelijkheden horen ze?
- A $x \geq -1$ C $x > 1$ E $x \geq 1$
- B $x \leq -1$ D $-2 \leq x < 4$ F $-2 < x \leq 4$
- b Noteer de ongelijkheden van opdracht a in de intervalnotatie.



Theorie

Bij de formule $y = 2x - 3$ kun je y berekenen als je x weet. Je zegt dan dat y een **functie** is van x . Je noteert dat als $f(x) = 2x - 3$. Dit heet het **functievoorschrift**. Bij $x = 10$ hoort de **functiewaarde** 17. Je noteert dit als $f(10) = 17$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - 3$. Bereken $f(4)$ en los de vergelijking $f(x) = 4$ op.

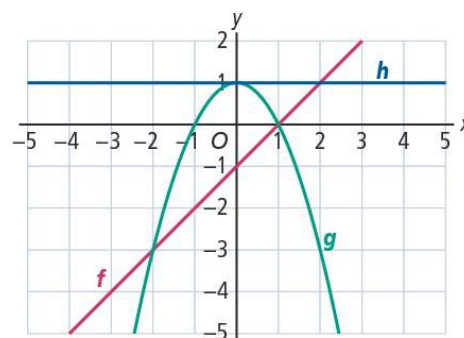
Oplossing

$$\begin{array}{ll} f(4) = 2 \times 4 - 3 & f(x) = 4 \\ f(4) = 5 & 4 = 2x - 3 \\ & 2x = 7 \\ & x = 3\frac{1}{2} \end{array}$$

- V3 Gegeven is de functie $k(a) = \sqrt{a + 2}$.
- a Bereken $k(23)$.
- b Los $k(a) = 3$ op.
- c Bij welke waarden van a kun je geen functiewaarden uitrekenen?
- d Plot de grafiek van k .
- e Geef met een ongelijkheid aan welke functiewaarden bij deze functie mogelijk zijn.

- V4** In het assenstelsel zijn de grafieken bij de functies $f(x) = x - 1$, $g(x) = -x^2 + 1$ en de horizontale lijn h door het punt $(0, 1)$ getekend.

- Bereken de functiewaarden $f(10)$ en $g(8)$.
- Los de vergelijkingen $f(x) = 44$ en $g(x) = -24$ op.
- Leg uit dat de horizontale lijn door het punt $(0, 1)$ het functievoorschrift $h(x) = 1$ hoort.
- Los de ongelijkheden $f(x) \geq h(x)$ en $f(x) < g(x)$ op. Schrijf de oplossingen in zowel de intervalnotatie als in de ongelijkheidsnotatie.



Theorie

Verschillende soorten functies kun je herkennen aan de grafiek of aan het functievoorschrift.

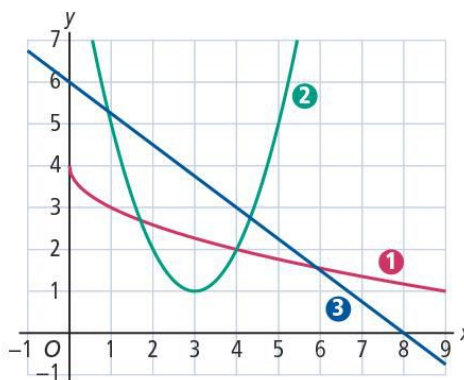
- De grafiek bij een **lineaire functie** is een rechte lijn.
- De grafiek van een **kwadratische functie** is een **parabool**.
- De grafiek bij de **wortelfunctie** $f(x) = \sqrt{x}$ begint in het randpunt $(0, 0)$.

- V5** Je ziet de grafieken van een lineaire functie, een kwadratische functie en een wortelfunctie.

- Geef bij elke grafiek aan met welke van de genoemde functies je te maken hebt.
- Welke van de volgende functies hoort bij grafiek 1?

A $f(x) = 4 + \sqrt{x}$ C $h(x) = -x^2 + 6x - 10$

B $g(x) = x^2 - 6x + 10$ D $i(x) = 4 - \sqrt{x}$
- Schrijf de coördinaten van het randpunt van grafiek 1 op.
- Welke van de functies hoort bij grafiek 2?



- V6** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4}{x} + 6$.

- Plot en schets de grafiek van h voor $-10 \leq x \leq 10$.
- Vul de tabel in.
- Bereken $f(-0,0001)$ en $f(0,0001)$.
- Hoe ziet de grafiek er uit in de buurt van $x = 0$?
- En hoe ziet de grafiek eruit als x steeds verder van 0 wordt gekozen?

x	-10	-5	-1	0	1	5	10
$h(x)$							

2.1 Lineaire verbanden

Je leert

- hoe je vergelijkingen herleidt
- hoe je een formule bij een lijn door twee gegeven punten opstelt

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—4—05—7—8—09—9—10
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9—10
- uitdagend: 1—2—3—4—5—7—9—10—U1—U2

In de supermarkt kosten vijf citroenen en één meloen € 4,35. Bij dezelfde supermarkt kosten acht citroenen en één meloen € 6,-. Sofie wil twee meloenen en zo veel mogelijk citroenen kopen, maar ze heeft slechts € 5,- bij zich.

- Hoeveel citroenen kan ze maximaal kopen?



- 1 Op het blaadje zie je hoe de lineaire vergelijking $2(x - 3) = -3x + 9$ is opgelost.
- Noteer bij elke stap welke bewerkingen zijn gedaan.
 - Controleer de oplossing door die links en rechts van het gelijkteken in de vergelijking: $2(x - 3) = -3x + 9$ in te vullen.

•	$2(x - 3) = -3x + 9$		
•	$2x - 6 = -3x + 9$		1
•	$5x - 6 = 9$		2
•	$5x = 15$		3
•	$x = 3$		4

Theorie

Een **eerstegraads vergelijking** of **lineaire vergelijking** kun je oplossen met de **balansmethode**: links en rechts van het gelijkteken voer je dezelfde bewerking uit. Daarmee vereenvoudig je de vergelijking zo ver dat de onbekende nog maar aan één kant van het gelijkteken staat. Soms moet je eerst breuken of haakjes wegwerken.

Voorbeeld 1

Los op $3(x + 2) = -4x - 9$.

Oplossing

$$3(x + 2) = -4x - 9$$

$$3x + 6 = -4x - 9$$

haakjes wegwerken

$$7x + 6 = -9$$

links en rechts + 4x

$$7x = -15$$

links en rechts - 6

$$x = \frac{-15}{7} = -2\frac{1}{7}$$

links en rechts : 7

De oplossing is $x = -2\frac{1}{7}$

Voorbeeld 2

Los op $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{6}x - 3$.

Oplossing

$$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{6}x - 3$$

$$3x + 6 = x - 18$$

links en rechts $\times 6$

$$2x + 6 = -18$$

links en rechts - x

$$2x = -24$$

links en rechts - 6

$$x = -12$$

links en rechts : 2

De oplossing is $x = -12$

2 Los de vergelijkingen op.

- H** a $-3x + 8 = 2x - 12$ d $10 - (3 + 4x) = -7x + 1$
 b $8(x - 1) = x + 3(4 - x)$ e $\frac{3}{5}x + 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{5}x - \frac{3}{10}$
 c $\frac{1}{2}x - 5 = \frac{2}{3}x + 1$ f $2\left(\frac{1}{3}x + 5\right) = \frac{5}{6}x - 4$

3 Gegeven zijn de lijnen $l: y = 6 - \frac{1}{2}x$, $m: y = 2x - 1\frac{1}{2}$ en $n: y = 2(x - 7)$.

- a Bereken de x -coördinaat van het snijpunt van de lijnen l en m door de vergelijking $6 - \frac{1}{2}x = 2x - 1\frac{1}{2}$ op te lossen.
 b Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m .
 c Bereken ook de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en n .
 d Waarom hebben de lijnen m en n geen snijpunt?

4 Bij lijn l hoort de formule $3x - 2y = 4$. Op het blaadje zie je hoe deze formule herleidt is tot de vorm $y = ax + b$.

- a Welke bewerking is bij stap 1 gedaan? En welke bij stap 2?
 b Herleid de formule $3(2y - x) = 8$ tot de vorm $y = ax + b$.

☐	$3x - 2y = 4$				
☐	$-2y = -3x + 4$			1	
☐	$y = 1\frac{1}{2}x - 2$			2	
☐					

Theorie

De formule $5w + 3v = 45$ wordt ook wel eens een vergelijking van een lijn genoemd. De vergelijking is te herleiden tot de formule $w = -\frac{3}{5}v + 9$. In de formule $w = -\frac{3}{5}v + 9$ is w **uitgedrukt in** v .

Bij het herleiden gebruik je, net als bij het oplossen van vergelijkingen, de balansmethode.

Voorbeeld

Herleid de vergelijking $3p + 2q = 10$ zodat q wordt uitgedrukt in p .

Oplossing

$$3p + 2q = 10$$

$$2q = -3p + 10 \quad \text{links en rechts } -3p$$

$$q = -1\frac{1}{2}p + 5 \quad \text{links en rechts : 2}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 05

5 Herleid de vergelijkingen zodat q wordt uitgedrukt in p .

- H** a $8p - 4q = 9$ c $15p = 3(q + 9)$
 b $5q - 6 = -3p$ d $10p - 4q = 6p + 12$

6 Herleid de vergelijkingen van opdracht 5 maar, druk p nu uit in q .

2.1 Lineaire verbanden

- 7
- Maak een schets van een assenstelsel met een lijn door de punten $A(2, -3)$ en $B(6, 5)$.
 - Laat zien dat de richtingscoëfficiënt van lijn AB gelijk is aan 2.
 - Leg uit dat bij lijn AB een formule van de vorm $y = 2x + b$ hoort.
 - Bereken het startgetal door de coördinaten van punt A in $y = 2x + b$ in te vullen.
 - Stel een formule van lijn AB op.

Aanpak

Hoe stel je een formule op bij de lijn door twee gegeven punten?

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt.

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{\text{toename tweede coördinaat}}{\text{toename eerste coördinaat}}$$

- 2 Vul in de algemene formule de richtingscoëfficiënt in.
 3 Vul in die formule de coördinaten van één van de gegeven punten in en bereken het startgetal.
 4 Schrijf de formule van de lijn op.

Voorbeeld

Stel een formule op voor de lijn door de punten $A(-2, 1)$ en $B(3, 4)$.

Oplossing

- 1 $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{4-1}{3-(-2)} = \frac{3}{5}$
 2 $y = \frac{3}{5}x + b$
 3 De coördinaten van punt A invullen.
 $1 = \frac{3}{5} \times -2 + b$
 $1 = -1\frac{1}{5} + b$
 $b = 2\frac{1}{5}$
 4 $y = \frac{3}{5}x + 2\frac{1}{5}$

- 8 In stap 3 in het voorbeeld is het startgetal berekend door de coördinaten van het punt A in te vullen. Ga na dat je hetzelfde startgetal vindt als je de coördinaten van punt B invult.

Ondersteunende route → maak opdracht 09

- 9 In een assenstelsel zijn door de punten $A(-4, 4)$, $B(2, 7)$, $C(6, -16)$ en $D(8, 1)$ lijnen getekend.

Stel een formule op die hoort bij de lijn door:

- a A en B c A en D
 b A en C d B en D

- 10 Voor het verbruik van water betaal je een vast bedrag per jaar en een bedrag voor elke verbruikte kubieke meter. In 2017 heeft de familie Jansen 87 m^3 water verbruikt en moet 140,79 euro betalen. De burens verbruikten dat jaar 95 m^3 en moeten 149,35 euro betalen. Stel een formule op voor het bedrag B in euro's dat je in 2017 moest betalen bij een verbruik van $w \text{ m}^3$ water.

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

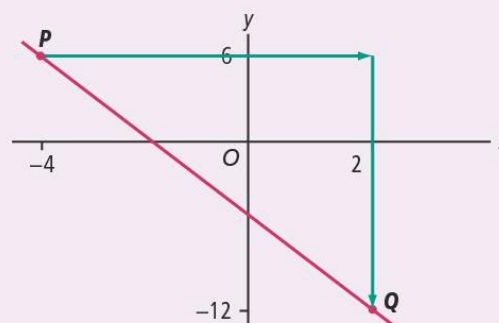


Ondersteunende opdrachten

- 05** a Op het blaadje zie je hoe de vergelijking $4(p - 3) = 6 + 2q$ is herleid zodat q uitgedrukt wordt in p .
Noteer bij elke stap welke bewerkingen zijn gedaan.
- b Herleid de volgende vergelijkingen zodat q uitgedrukt wordt in p .
- A $4q + 6p = 12$ C $6p - 2q = 7p + 10$
B $5p - 30q = 20$ D $12p = 2(q + 7)$
- c Herleid de vergelijkingen van opdracht b maar, druk p nu uit in q .

●	$4(p - 3) = 6 + 2q$	
●	$4p - 12 = 6 + 2q$	1
●	$6 + 2q = 4p - 12$	2
●	$2q = 4p - 18$	3
●	$q = 2p - 9$	4

- 09** Je ziet een lijn door de punten $P(-4, 6)$ en $Q(2, -12)$.
- a Hoeveel neemt de eerste coördinaat toe?
En hoeveel is de toename van de tweede coördinaat?
- b Bereken de richtingscoëfficiënt van lijn PQ .
- c Stel een formule voor lijn PQ op.



Uitdagende opdrachten

- U1** Gegeven zijn de punten $A(-2, 4)$, $B(4, -8)$, $C(-1, 4)$ en $D(d, 0)$.
- a Neem $d = 3$. De lijnen AB en CD snijden elkaar in punt S .
Bereken de coördinaten van punt S .
- b Voor welke waarde van d hebben de lijnen AB en CD geen snijpunt?
- c Voor welke waarde van d is $x = -1$ een formule van lijn CD ?
- U2** Drie echtparen reizen met een taxi van hetzelfde taxibedrijf naar Schiphol. Echtpaar Snel moet 36,32 euro betalen voor een rit van 15 kilometer. Echtpaar Hayward moet 64,32 euro betalen voor een rit van 40 kilometer. Echtpaar Weenink moet 125,92 euro betalen.
Bereken hoeveel kilometer de rit van echtpaar Weenink is.



2.2 Recht evenredig en omgekeerd evenredig

Je leert

- wat een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband is
- hoe je een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband herkent

Leerroutes

- ondersteunend: 11—012—13—14—015—15—16
- doorlopend: 11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 11—13—14—15—16—17—U3

In een boekje over hardlopen staan twee tabellen.
In tabel A kun je zien hoeveel kilometer je aflegt in een bepaalde tijd.
In tabel B kun je zien hoeveel minuten je nodig hebt om een kilometer af te leggen met een bepaalde snelheid.
In beide tabellen zit een verband.
• Beschrijf bij beide tabellen het verband.



A

<i>tijd</i> in minuten	2	5	8	20
<i>afstand</i> in km	0,4	1	1,6	4

B

<i>snelheid</i> in km/uur	8	10	12	15
<i>tijd</i> in minuten	7,5	6	5	4

11 Boaz loopt gedurende 3 uur met een constante snelheid van 5 km per uur.

- Hoeveel kilometer loopt hij in 2 uur? En hoeveel in een $\frac{1}{2}$ uur?
- Vul de tabel verder in.
- Vul in: als Boaz een drie keer zo grote afstand loopt, dan doet hij er ... keer zo lang over.
- Bereken in elke kolom de uitkomst van $\frac{\text{afstand}}{\text{tijd}}$.
- Ga na dat de tabel bij een lineair verband hoort.
- Waarom gaat de grafiek bij de tabel door de oorsprong?
- Stel een formule op bij de tabel.

<i>tijd</i> in uren	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	...
<i>afstand</i> in km	...	5	...	...	15

Theorie

Twee variabelen heten **recht evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot. Zijn de variabelen x en y , dan heet y recht evenredig, of kortweg **evenredig** met x . Een recht evenredig verband is een bijzonder lineair verband.

Er geldt $y = c \cdot x$ en dus ook $\frac{y}{x} = c$.

De constante c heet de **evenredigheidsconstante**.
Je herkent een evenredig verband in een tabel als van de twee getallen in elke kolom de verhouding hetzelfde is.
De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Voorbeeld

t	0,3	2,4	3,8	5,4
s	1,8	14,4	22,8	32,4

Laat zien dat bij de tabel een recht evenredig verband hoort.

Bereken de evenredigheidsconstante en stel een bijbehorende formule op.

Oplossing

$$\frac{s}{t} = \frac{1,8}{0,3} = \frac{14,4}{2,4} = \frac{22,8}{3,8} = \frac{32,4}{5,4} = 6$$

De evenredigheidsconstante is 6.

De formule is $s = 6 \cdot t$ en $\frac{s}{t} = 6$.

Ondersteunende route → maak opdracht 012

12 a Welke tabellen horen bij een recht evenredig verband?

H

A

x	4	5	6	7	8
y	28	35	42	49	...

B

p	6	8	10	12	50
q	27	36	45	54	...

C

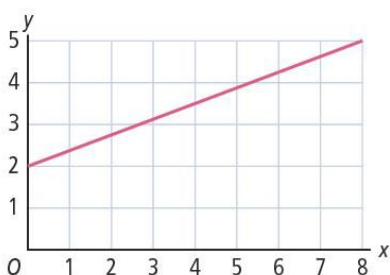
W	1	2	3	5	10
R	...	15	21	33	63

D

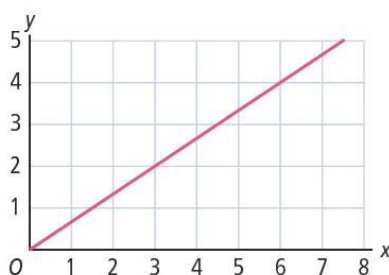
t	4	7	10	15	...
h	12	21	30	45	120

b Vul de open plaatsen in.

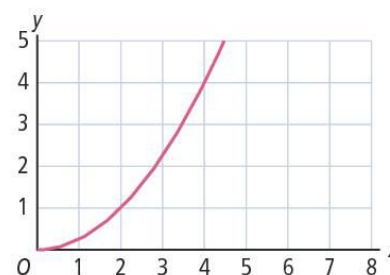
c Stel bij elke tabel een formule op.



A



B



C

13 Bij welke grafiek(en) is y evenredig met x ?
Geef in dat geval de evenredigheidsconstante en stel de formule op.

14 Thijs woont 10 kilometer van zijn school. Gemiddeld fietst hij 15 kilometer per uur.

- a** Ga na dat hij dan 40 minuten onderweg is.
b De volgende dag brengt zijn vader hem met de auto. Zijn vader rijdt gemiddeld vier keer zo snel als Thijs fietst. Hoelang doet zijn vader er over?
c Vul in: als de snelheid k keer zo groot wordt, dan wordt de tijd k keer zo ...
d Vul de tabel verder in.

<i>snelheid</i> in km per uur	15	30	60	75	100
<i>tijd</i> in minuten	40	...	...	...	...

- e** Bereken in elke kolom de uitkomst van $tijd \times snelheid$.
f Teken de grafiek bij de tabel.

2.2 Recht evenredig en omgekeerd evenredig

Theorie

Twee variabelen heten **omgekeerd evenredig** als geldt: als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein. Zijn de variabelen x en y , dan geldt $x \cdot y = c$. Je kunt ook schrijven $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$.

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is.

Voorbeeld

v	6	9	18
t	1,5	1	0,5

Laat zien dat bij de tabel een omgekeerd evenredig verband hoort en stel de bijbehorende formules op.

Oplossing

$$v \cdot t = 6 \times 1,5 = 9 \times 1 = 18 \times 0,5 = 9$$

De formules zijn:

$$v \cdot t = 9, \quad t = \frac{9}{v} \quad \text{of} \quad v = \frac{9}{t}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 015

15

H

a Welke tabellen horen bij een omgekeerd evenredig verband?

A

x	2	3	4	5	10
y	15	10	7,5	6	...

B

s	0,8	1,6	4,8	24	...
w	60	30	10	2	0,5

C

p	2	3	5	6	...
q	45	30	18	15	5

D

t	2	3	4	5	8
h	7	11	15	19	...

b Vul de tabellen verder in.

c Stel bij elke tabel een formule op.

16

Leg bij elke situatie uit of er sprake is van een recht evenredig, een omgekeerd evenredig verband of een ander verband. Kies vervolgens geschikte variabelen, maak een formule bij het gevonden verband en beantwoord de vraag.

- a Een centrifuge maakt in 45 seconden 2700 toeren.
Hoeveel toeren maakt de centrifuge in 2 minuten?
- b Een stuk land van 750 m bij 1600 m heeft dezelfde oppervlakte als een ander stuk land met een lengte van 1500 m.
Hoe breed is dit andere stuk land?
- c De waarde van een huis is in de jaren 2013 tot 2017 ieder jaar met hetzelfde bedrag gedaald van € 223.000,- tot € 205.000,-.
Hoeveel was de waarde van het huis in het jaar 2016?

17

Ga voor de vier formules op het blaadje na of de variabelen recht evenredig of omgekeerd evenredig zijn. Als dit het geval is, schrijf dan de formule op nog een andere manier.

Uitdagende route → maak opdracht U3

A $p \cdot q = 7$	C $l = \frac{200}{b}$
B $\frac{s}{t} = 50$	D $y = 5x$

Ondersteunende opdrachten

012

De variabelen in de tabel zijn recht evenredig.

- a** Ga na dat de volgende uitspraak bij de tabel klopt.
Als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele ook k keer zo groot.

x	1	2	3	7	9
y	6	12	18	42	...

- b** Ga na dat voor elke kolom geldt $\frac{y}{x} = 6$.

- c** Vul de tabel verder in.

- d** De formule $\frac{y}{x} = 6$ hoort bij de tabel.

Leg uit dat de formule $y = 6x$ ook bij de tabel hoort.

- e** Welke van de volgende tabellen horen bij een recht evenredig verband?

A

x	1	3	5	8	9
y	4	12	20	32	...

B

s	3	4	5	8	9
w	15	20	25	40	...

C

p	4	6	8	10	...
q	9	16	23	30	37

D

t	3	4	6	9	10
h	13	17	25	37	...

- f** Vul de tabellen verder in.

- g** Stel bij elke tabel een formule op.

015

Bij de tabel hoort een omgekeerd evenredig verband.

- a** Ga na dat de volgende uitspraak bij deze tabel klopt.
Als de ene variabele k keer zo groot wordt, dan wordt de andere variabele k keer zo klein.

x	1	2	3	4	7
y	42	21	14	10,5	6

- b** Welk getal is in elke kolom steeds de uitkomst van $x \times y$?

- c** De formule $x \cdot y = 42$ hoort bij de tabel.

Leg uit dat de formules $y = \frac{42}{x}$ en $x = \frac{42}{y}$ ook bij de tabel horen.

Uitdagende opdrachten

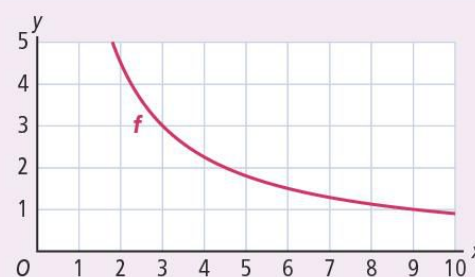
U3

Zoek bij elk van de volgende grafieken uit of deze bij een recht evenredig verband, een omgekeerd evenredig verband of een lineair verband hoort. Stel bij elke grafiek ook een formule op.

- a** Grafiek f hiernaast.

- b** Een lijn l door de punten (400, 180) en (500, 225).

- c** Een lijn m door de punten (250, 30) en (300, 38).



2.3 Grenswaarden

Je leert

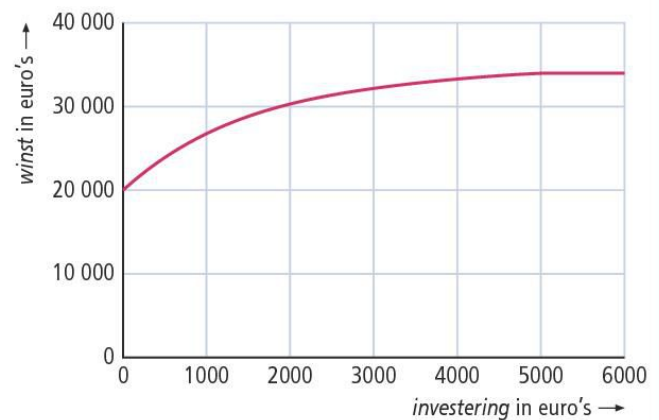
- hoe je de grenswaarde van een formule vindt

Leerroutes

- ondersteunend: 18—019—20—21—22—23
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23
- uitdagend: 18—19—22—23—U4—U5

Een bedrijf wil graag meer winst genereren en heeft een econoom laten uitzoeken wat het effect is van een reclamecampagne op de winst. In een onderzoeksrapport staat onder andere deze grafiek. Je leest daar bijvoorbeeld in af dat bij een maandelijkse investering van 2000 euro in de reclamecampagne de te verwachten winst gelijk zal zijn aan 30 000 euro die maand.

- Welk advies zou jij het bedrijf geven?



- 18** Een schoonmaakbedrijf berekent voor het reinigen van vloeren eerst de prijs per m². Deze prijs is lager naarmate er een grotere oppervlakte moet worden schoongemaakt.

Voor het berekenen van de prijs P gebruikt men de formule

$$P = 0,17 + \frac{150}{V}$$

Hierin is V de vloeroppervlakte in m² en P de prijs in euro's per m².

- Bereken voor een vloeroppervlak van 2000 m² de prijs per m² en vervolgens de totale kosten in euro's.
- Plot de grafiek van P . Wat gebeurt er met de waarden van P als V bijna gelijk aan 0 is?
- Waarom kun je P niet berekenen als $V = 0$?
- Wat gebeurt er met de grafiek van P als V steeds groter wordt?
- Maak met je rekenmachine een tabel zoals hiernaast en onderzoek tot welke waarde P nadert als V blijft toenemen.
- Leg uit wat de waarde van P van opdracht e in de praktijk betekent.

De formule voer je op je rekenmachine in als:
 $y = 0,17 + 150/x$

V	P
10	...
100	...
1000	...
10 000	...

Theorie

In formules zoals $y = \frac{a}{x} + d$ en $y = \frac{c}{x+b}$ komt de variabele x in de noemer voor. Je kunt niet altijd alle waarden voor x invullen, want je kunt niet delen door nul. Voor grote waarden van x kunnen de waarden van y steeds dichter naderen tot een **grenswaarde**. De grafieken van deze functies hebben dan een **horizontale asymptoot**.

Voorbeeld

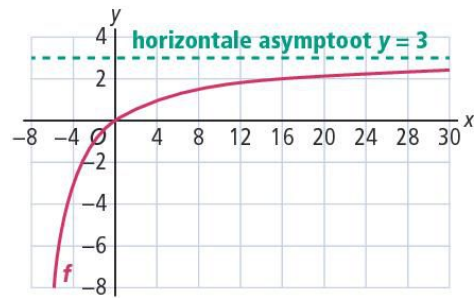
Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x}{x+8}$

Welke grenswaarde heeft functie f ?

Oplossing

x	10	100	1000	10 000
y	1,667	2,778	2,976	2,998

Functie f heeft 3 als grenswaarde.



Ondersteunende route → maak opdracht 019

- 19** Onderzoek of de functies een grenswaarde hebben. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.

H

a $f(x) = 12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3$ **c** $h(x) = 6 - \frac{300}{8 - 4x}$

b $g(x) = \frac{x+7}{4x-8}$ **d** $i(x) = \frac{2x^2}{x+8}$

- 20** Een pak melk wordt uit de koelkast gehaald. Daardoor stijgt de temperatuur van de melk. Met de formule $T = 20 - 16 \cdot 0,75^t$ kun je de temperatuur T in graden Celsius van de melk berekenen. Hierin is t de tijd in uren vanaf het moment dat de melk uit de koelkast is gehaald.

- a** Welke temperatuur heeft de melk op het moment dat zij uit de koelkast wordt gehaald?
b Naar welke waarde nadert de temperatuur van de melk op den duur?

- 21** Je kunt de temperatuur T in een oven in graden Celsius berekenen met de formule $T = \frac{200t}{t+1} + 20$.

Hierin is t de tijd in minuten na het aanzetten van de oven.

- a** Welke temperatuur heeft de oven bij het aanzetten?
b Na hoeveel minuten is de temperatuur in de oven 180°C ?
c Welke grenswaarde heeft de formule?
d Wat betekent deze grenswaarde in de praktijk?



2.3 Grenswaarden

- 22** Bij een telecombedrijf wordt de gemiddelde prijs per belminuut lager naarmate het aantal gebelde minuten groter is. Dit wordt beschreven door de formule $G = 0,015 + \frac{5}{a}$
- Hierin is G de gemiddelde prijs in euro's per belminuut en a het aantal belminuten per maand.
- Bereken de gemiddelde prijs per belminuut als er in een maand 3 uur en 20 minuten is gebeld.
 - Onderzoek welke grenswaarde de formule heeft.
 - Welke praktische betekenis heeft deze grenswaarde?
 - Leg uit hoe je deze grenswaarde uit de formule kunt afleiden.



- 23** Voor het aantal diersoorten dat voorkomt in een gebied geldt bij benadering de formule $N = 60 \cdot (1 - 0,64^a)$. Hierin is N het aantal diersoorten en a de grootte van het gebied in km^2 .
- Hoe groot is N voor $a = 0$? Wat is de betekenis daarvan?
 - Onderzoek welke grenswaarde de formule heeft.
 - Leg uit hoe je deze grenswaarde uit de formule kunt afleiden.
 - Wat betekent deze grenswaarde voor het aantal diersoorten in een gebied?

Uitdagende route → maak opdracht U4 en U5

2.4 Toppen en snijpunten

Je leert

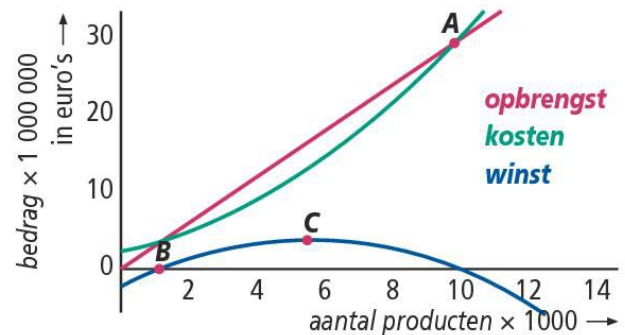
- hoe je toppen en snijpunten van een grafiek vindt
- hoe je een vergelijking met de rekenmachine oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 24—025—26—27—028—28—29
- doorlopend: 24—25—26—27—28—29—30
- uitdagend: 24—25—26—27—28—30—U6

Je ziet een grafiek die in een jaarverslag van een bedrijf staat. In de grafieken zijn de opbrengst, de kosten en de winst van het bedrijf uitgezet tegen de aantal geproduceerde producten. In de grafiek zijn enkele punten aangegeven.

- Welke betekenis hebben deze punten in de praktijk?

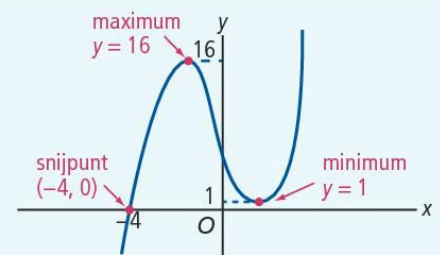


- 24**
- Plot de grafiek van $f(x) = x^3 - 8x$.
 - De vergelijking $x^3 - 8x = 0$ heeft drie oplossingen. Hoe zie je dat in de grafiek?
 - Bereken met je rekenmachine de oplossingen van de vergelijking $x^3 - 8x = 0$ in twee decimalen nauwkeurig.
 - Geef de coördinaten van de toppen. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Theorie

De grafiek hiernaast heeft een **snijpunt** met de horizontale as. De functiewaarde van de bijbehorende functie is daar nul. De x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de x -as wordt ook wel het **nulpunt** genoemd.

De grafiek heeft twee toppen. In een top heeft de bijbehorende functie een **maximum** of een **minimum**.



Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek bij de functie $f(x) = 4x - x^3$.

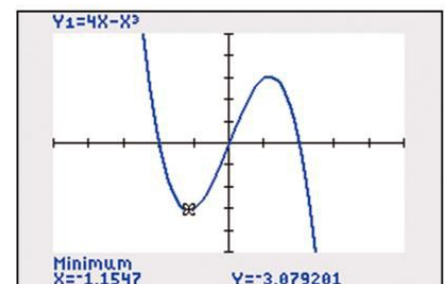
Oplossing

Invoer: $y = 4x - x^3$

Venster: $-5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$

Opties: minimum, maximum

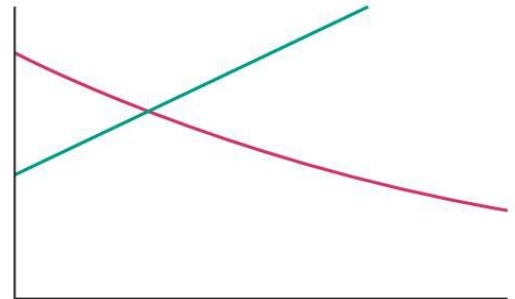
De coördinaten van de toppen van de grafiek zijn $(-1,15; 3,08)$ en $(1,15; 3,08)$.



Ondersteunende route → maak opdracht 025

- 25** Gegeven is de functie $K(q) = -\frac{1}{2}q^3 + 5q^2 - 8$.
- H**
- Plot de grafiek van K .
 - Bereken de nulpunten van K .
 - Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van K .
 - Wat is het minimum van K ? En wat is het maximum van K ?

- 26** Je ziet een schets van de grafieken bij de functies $f(x) = 80 \cdot 0,96^x$ en $g(x) = 40 + 3x$.
- Bereken met de rekenmachine de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
 - Leg uit dat je met het antwoord van opdracht a ook de oplossing van de vergelijking $80 \cdot 0,96^x = 40 + 3x$ hebt gevonden.
 - Geef de oplossing van de vergelijking $80 \cdot 0,96^x = 40 + 3x$.



- 27** De waarde van een aandeel kun je berekenen met de formule $W = 64 \cdot 1,03^t$. Hierin is W de waarde van het aandeel in euro's en t de tijd in jaren na 2017.
- Bereken de waarde van het aandeel in 2022.
 - Om te berekenen in welk jaar de waarde van het aandeel 100 euro is, moet je de vergelijking $64 \cdot 1,03^t = 100$ oplossen. Plot de grafiek van W en de lijn $W = 100$.
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
 - In welk jaar heeft het aandeel een waarde van 100 euro?

Theorie

Sommige vergelijkingen zijn lastig op te lossen. In dit geval kun je de oplossingen met de rekenmachine vinden. De oplossingen vind je met behulp van de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.

Voorbeeld

Los op $12x - x^2 = 2x + 6$.

Oplossing

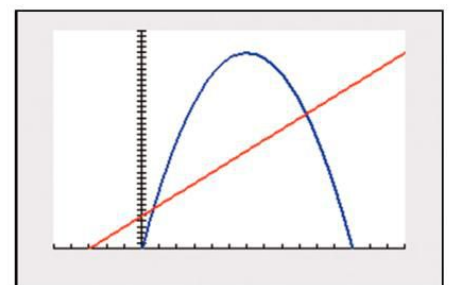
Invoer: $y_1 = 12x - x^2$ en $y_2 = 2x + 6$

Venster: $-5 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 40$

Opties: snijpunten

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken zijn $(0,64; 7,28)$ en $(9,36; 24,72)$.

De oplossingen van de vergelijking zijn $x \approx 0,64$ en $x \approx 9,36$.



2.4 Toppen en snijpunten

Ondersteunende route → maak opdracht 28

- 28** Los de vergelijkingen op. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

H

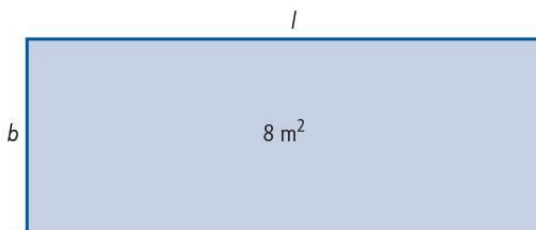
- a** $x^2 + 4x - 7 = 5$
b $a^4 + 4a - 5 = a - 6$
c $500q - 2^q = 3000 - 50q^2$

- 29** In een polder is in het verleden veel radioactief afval gestort dat slechts langzaam zijn straling kwijtraakt. Metingen met een Geigerteller gaven een beeld dat beschreven kan worden met de formule $P = 776 \cdot 0,946^t$. Hierin is P is het aantal pulsen per seconde en t het aantal jaren na 2000.

- a** Plot de grafiek van P .
b De polder kan weer veilig worden gebruikt als de straling is gezakt tot het achtste deel van het niveau van in 2000. Wanneer zal dat het geval zijn?



- 30** Tanja mag van haar ouders een rechthoekig stuk tuin van 8 m^2 gebruiken om haar konijn te huisvesten. Daar moet wel een hek van gaas omheen. Ze wil zo weinig mogelijk gaas gebruiken. Noem de lengte in meters van de rechthoek l en de breedte b .

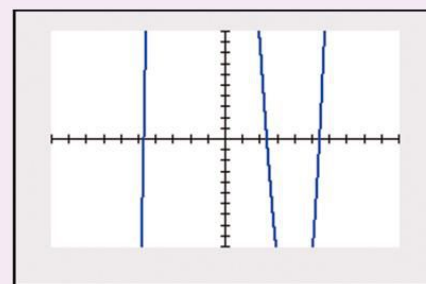


- a** Tanja neemt $l = 4$.
Hoe groot is dan b ? En hoe groot is dan de omtrek?
b Leg uit dat $b = \frac{8}{l}$
c Leg uit dat je de omtrek O van de rechthoek kunt berekenen met de formule $O = 2l + \frac{16}{l}$
d Onderzoek bij welke lengte en welke breedte de omtrek minimaal is.

Uitdagende route → maak opdracht U6

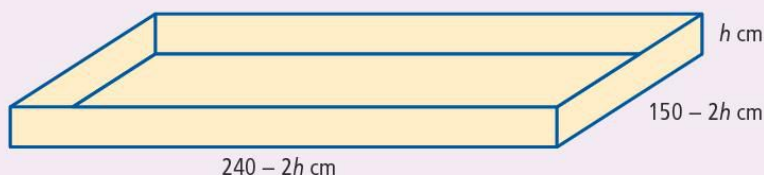
Ondersteunende opdrachten

- 024** Je ziet een plot van de grafiek bij de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 60$.
- Waarom is dit niet een goede plot van de grafiek van f ?
 - In welk punt snijdt de grafiek van f de y -as?
 - Plot de grafiek van f .
 - Bereken de coördinaten van het linker snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
 - Bereken de nulpunten van de grafiek van f .
 - Het punt $(-2, 88)$ is een top van de grafiek van f . Ga dit met de rekenmachine na.
 - Bereken de coördinaten van de andere top van de grafiek van f .
 - Wat is het minimum van f ? En wat is het maximum van f ?



- 028** Je gaat de vergelijking $-x^2 + 16x + 8 = 12$ oplossen.
- Plot de grafiek van $f(x) = -x^2 + 16x + 8$ en de horizontale lijn $y = 12$.
 - Bereken met de rekenmachine de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de horizontale lijn.
 - Uit het antwoord van opdracht b kun je de oplossingen van de vergelijking $-x^2 + 16x + 8 = 12$ opmaken. Geef de oplossingen van de vergelijking.

Uitdagende opdrachten



- U6** Van een MDF plaat wordt een bak zonder deksel gemaakt. In de figuur zie je hoe de bak eruit komt te zien. Noem de hoogte in centimeters van de bak h .
- Laat zien dat je met de inhoud I van de bak in cm^3 kunt berekenen met de formule $I = 4h^3 - 780h^2 + 36\,000h$.
 - Bereken de hoogte van de bak met een inhoud van 286 liter.
 - Bij welke afmetingen heeft de bak een maximale inhoud?

Je leert

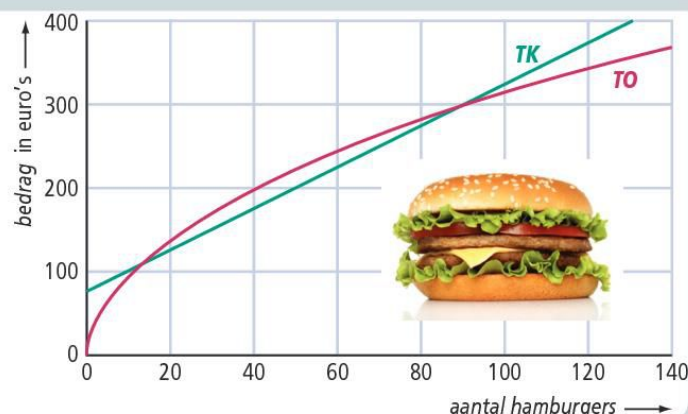
- hoe je een ongelijkheid oplost

Leerroutes

- ondersteunend: 31—32—33—034—34—36—37—38
- doorlopend: 31—32—33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 31—32—33—34—36—37—U7

Jim verkoopt hamburgers op de jaarmarkt. In de figuur zijn de totale opbrengsten en totale kosten uitgezet tegen het aantal verkochte hamburgers.

- Hoe kun je in de grafiek zien bij welke aantallen verkochte hamburgers Jim winst maakt?



- 31** Op een terras wordt een kop thee geserveerd met een temperatuur van 90°C . De buitentemperatuur is 25°C . De temperatuur van de thee kun je berekenen met de formule $T = 25 + 65 \cdot 0,8^t$. Hierin T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in minuten na het inschenken.
- Plot de grafiek van T en de lijn $y = 50$.
 - Hoe zie je in de grafiek dat de temperatuur van de kop thee steeds lager wordt?
 - Na hoeveel minuten is de temperatuur van de thee lager dan 50°C ?

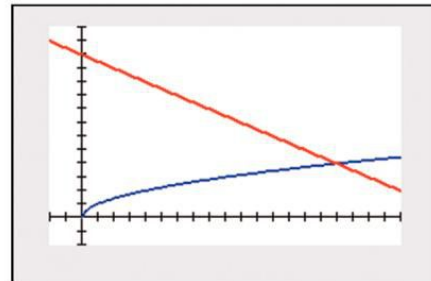
- 32** Gegeven is de ongelijkheid $x^2 - 2x - 12 < x + 6$.
- Plot de grafieken van $f(x) = x^2 - 2x - 12$ en $g(x) = x + 6$.
 - Bereken met de rekenmachine de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g .
 - Lees uit de plot af bij welke waarden van x geldt $x^2 - 2x - 12 < x + 6$. Schrijf de oplossing van de ongelijkheid in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.
 - Geef de oplossing van de ongelijkheid $x^2 - 2x - 12 \geq x + 6$ in zowel de ongelijkheidsnotatie als in de intervalnotatie.

Aanpak**Hoe los je een ongelijkheid $f(x) < g(x)$ op?**

- 1 Plot de grafieken van f en g .
- 2 Bereken de coördinaten van de snijpunten.
- 3 Ga met behulp van de grafieken na bij welke waarden van x de gevraagde ongelijkheid geldt.

VoorbeeldLos op $\sqrt{x} > 12 - \frac{1}{2}x$.**Oplossing**

- 1 Plot de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 12 - \frac{1}{2}x$.
- 2 Met de rekenmachine vind je het snijpunt (16, 4).
- 3 Rechts van $x = 16$ ligt de grafiek van f hoger dan die van g . De oplossing van de ongelijkheid is $\langle 16, \rightarrow \rangle$.



- 33** Alicia en Simon lossen de ongelijkheid $\sqrt{x} < 12 - \frac{1}{2}x$ op. Ze kijken naar de plot van het voorbeeld. Alicia zegt: 'De oplossing is $x < 16$.' Volgens Simon klopt dat niet.
- a Waarom kan $x = -1$ geen oplossing zijn van de ongelijkheid?
 - b Geef de juiste oplossing in de intervalnotatie.

Ondersteunende route → maak opdracht 034

- 34** Los de ongelijkheden op. Geef de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

H

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| a $x^2 - 3 \leq 3x + 1$ | c $54 \cdot 0,75^x \geq 128$ |
| b $\sqrt{x+3} > x-1$ | d $\frac{-5x-7}{x} > 1-x$ |

- 35** Bert wil een nieuwe printer kopen. Hij wil een keus maken tussen een inktjetprinter van 90 euro en een laserprinter van 280 euro. Bij de inktjetprinter zijn de printkosten voor een pagina 6 eurocent en bij de laserprinter 3 eurocent.
- a Laat zien dat $I = 90 + 0,06p$ een formule is voor de kosten van de inktjetprinter in euro's bij het printen van p pagina's.
 - b Stel een formule op voor de kosten L in euro's van de laserprinter bij het printen van p pagina's.
 - c Vanaf welke aantal geprinte pagina's is de laserprinter goedkoper?



2.5 Ongelijkheden

- 36** Een rockband laat dvd's maken. Voor de totale kosten TK in euro's voor het maken van q dvd's geldt de formule $TK = 8000 + 3\sqrt{q}$.
De dvd's worden verkocht voor € 9,95 per stuk.
- Stel een formule op voor de totale opbrengst TO in euro's.
 - Los op $TO > TK$.
 - Welke praktische betekenis heeft het antwoord van opdracht b?
- 37** Het aantal vliegjes N in een afgesloten ruimte na t dagen kun je berekenen met de formule $N = 1500 - 850 \cdot 0,89^t$.
- Hoeveel vliegjes zijn er op tijdstip $t = 0$?
 - Onderzoek na hoeveel dagen er meer dan 1000 vliegjes in de ruimte zijn.
 - In hoeveel dagen neemt het aantal vliegjes toe van 1300 tot 1400?
 - Hoeveel vliegjes zijn er op den duur?

- 38** Een fabrikant besluit schoenen te maken met zes paren gaatjes. De fabrikant wil daar zo kort mogelijke veters bij leveren. Hij rijgt daarom de veters op de Amerikaanse manier. Bij deze manier van rijgen hoort de volgende formule

$$l = 4 + 10\sqrt{d^2 + 16}.$$

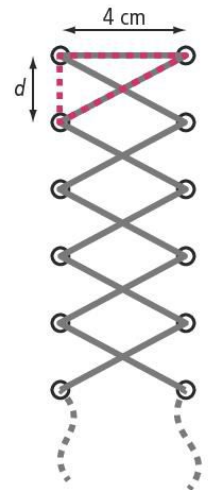
Hierin is l de benodigde veterlengte in cm en d is de gaatjesafstand in cm. Het deel van de veter waar de knoop in komt, is buiten beschouwing gelaten.

- Leg uit dat de formule juist is.
- Om de stevigheid rond de voet te garanderen, maakt de fabrikant de afstand tussen de vetergaatjes bij de verschillende schoenmaten als volgt.

schoenmaat	38	39	40	41	42	43	44	45
afstand d in cm	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2

Voor een fatsoenlijke knoop is bij dit soort schoenen minimaal 42 cm extra veter nodig.

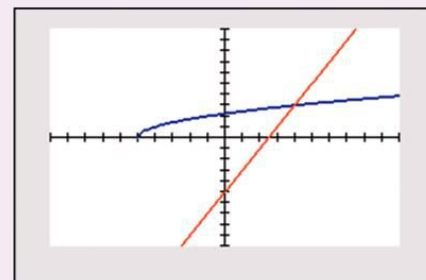
Onderzoek bij welke schoenmaten je een veter van 90 cm kunt gebruiken.



Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

- 034** Je gaat de ongelijkheid $\sqrt{x+5} > 2x-5$ oplossen. Je ziet een plot van de grafieken van $f(x) = \sqrt{x+5}$ en $g(x) = 2x-5$.
- Bereken met je rekenmachine de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g .
 - Bij welke waarden van x heeft $f(x)$ geen uitkomst?
 - Bij welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g ?
 - Geef de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.



Uitdagende opdrachten



- U7** Windstoten kunnen veel schade veroorzaken. Tijdens een zware storm kan de windsnelheid bij windstoten oplopen tot wel boven de 100 km per uur. Uit de schade kan worden afgeleid wat de grootste windsnelheid tijdens de storm geweest

is. Dit gebeurt met de formule $v = \frac{100 \cdot d \cdot \sqrt{3 + 3h}}{h}$

Hierin zijn h de hoogte en d de dikte in meters van een muur die nog net omvergeblazen wordt bij een windsnelheid van v m/s.

- Vanaf welke windsnelheid wordt volgens de formule een muurtje van 1,5 m hoog en 10 cm dik omvergeblazen?
- Tijdens een zeer zware storm was de grootste windsnelheid 120 km per uur. Tijdens die storm viel een muur van 1,90 m hoog net niet om. Hoe dik was volgens de formule die muur ten minste?

2.6 Gemengde opdrachten

- 39** Een bedrijf kauft een machine van € 6.000,- aan om een nieuw model pantoffels te maken. De variabele kosten zoals energie, grondstoffen en arbeid bedragen per paar pantoffels € 2,70. Met de formule $TK = 6000 + 2,7s$ kun je de totale kosten TK in euro's berekenen. Hierin is s het aantal geproduceerde paren pantoffels.
- De verkoopprijs is € 5,10 per paar.
Stel een formule op voor de totale opbrengst TO in euro's.
 - Is de formule van TK recht evenredig? En de formule van TO ?
 - Bij welk aantal paren pantoffels is de totale opbrengst groter dan de totale kosten?
 - Uit marktonderzoek blijkt dat het aantal verkochte paren pantoffels s afhangt van de prijs p in euro's van de pantoffels volgens de formule $s = 10400 - 1200p$.
Toon aan dat bij de totale opbrengst TO in euro's en de prijs p in euro's de formule $TO = 10400p - 1200p^2$ hoort.
 - Leg uit dat je de totale winst TW in euro's kunt berekenen met de formule $TW = -34080 + 13640p - 1200p^2$.
 - Bij welke prijs is de totale winst maximaal en hoe groot is deze maximale winst?



- 40** Gegeven zijn vier formules.
- Welke formule beschrijft een recht evenredig verband?
 - En welke formule beschrijft een omgekeerd evenredig verband?
 - Onderzoek of formule A een grenswaarde heeft. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.
 - Druk bij formule C y uit in x .
 - Los de ongelijkheid $\frac{12}{x} > 3x$ op. Geef de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

$$\text{A } y = \frac{6x}{x^2 - 2x} + 8$$

$$\text{B } y = 3x$$

$$\text{C } 4x - 6y = 8$$

$$\text{D } y = \frac{12}{x}$$

- 41** Door een fout loost een chemische fabriek een hoeveelheid van een giftige stof in een meer. Door natuurlijke afbraak neemt de concentratie van de giftige stof in het water op den duur af. De concentratie C van de giftige stof kan worden benaderd met de formule $C = \frac{75t}{t^2 + 82}$.
Hierin is C de concentratie in mg per liter en t de tijd in dagen na het begin van de lozing van de giftige stof.
- Hoe groot is de maximale concentratie? Rond af op 0,1 mg per liter.
 - Het gevaar voor de volksgezondheid is geweken zodra de concentratie minder dan 1 mg per liter water is.
Na hoeveel dagen is dat?

- 42** De flats A en B liggen aan dezelfde kant van een weg. De afstand van flat A tot de weg is 1 hm ofwel 100 meter. De afstand van flat B tot de weg is 2 hm. CD is 4 hm.

Een busmaatschappij wil een bushalte plaatsen in een nog te kiezen punt E aan de weg. Tussen de flats en de weg worden daarvoor twee rechte paden AE en BE aangelegd. In de tekening zie je een bovenaanzicht van een mogelijke situatie. Voor de lengten van de paden AE en BE gelden de formules

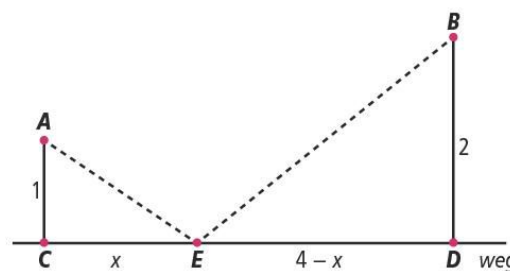
$$AE = \sqrt{x^2 + 1} \text{ en } BE = \sqrt{(4 - x)^2 + 4}.$$

Hierin is x de afstand CE in hm.

De wijkraad wil dat het punt E zó gekozen wordt, dat de paden AE en BE even lang zijn. Iemand beweert dat de totale lengte van de paden AE en BE dan ook minimaal is.

Onderzoek of hij gelijk heeft.

(Ontleend aan CE HAVO wiskunde B 2011, pilot 2e tijdvak)



- 43** Bij de gemeente komen elk weekend tientallen telefoontjes binnen van mensen die geluidsoverlast ervaren van bezoekers van een uitgaansgelegenheid. De gemeente start een project om door middel van een voorlichtingscampagne de bezoekers te bewegen buiten het gebouw minder lawaai te maken. Op grond van de resultaten van de eerste weken na de start van het project stelt een onderzoeker de formule

$$A = 5(2,2 + 5,8 \cdot 0,72^t) \text{ op.}$$

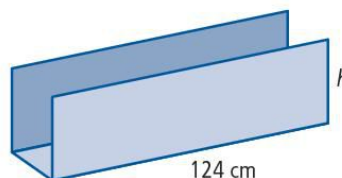
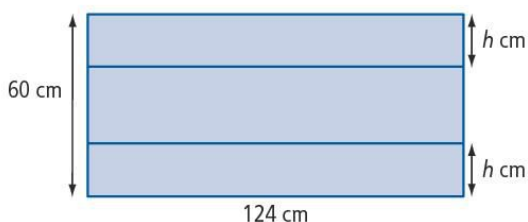
Hierin is A het aantal telefonische klachten in het weekend en t de tijd in weken na de start van het project.

Het doel van het project is dat er op den duur hoogstens tien telefonische klachten per weekend binnen komen.

Zoek uit of die doelstelling gehaald wordt.

- 44** Een bedrijf stuurt rechthoekige metalen platen van 124 cm bij 60 cm naar een ontwikkelingsland voor het aanleggen van irrigatiegoten. De platen worden in de lengterichting twee keer 90 graden gebogen zodat er een goot ontstaat waar het water door kan stromen.

Bij welke waarde van h kan de goot zoveel mogelijk water bevatten en hoeveel liter water gaat er maximaal in de goot?



Samenvatting

Theorie

Recht evenredig, evenredigheidsconstante en omgekeerd evenredig

De variabelen x en y zijn (recht) evenredig als geldt:
wordt x k keer zo groot, dan wordt y ook k keer zo groot.

Er geldt $\frac{y}{x} = c$ of $y = c \cdot x$; c heet de evenredigheidsconstante.

Twee variabelen x en y zijn omgekeerd evenredig als geldt:
wordt x k keer zo groot, dan wordt y k keer zo klein.

Er geldt $x \cdot y = c$ of $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$

- S1** Leg bij elke situatie uit of er sprake is van een recht evenredig verband of een omgekeerd evenredig verband.
- a** De prijs en het gewicht van een biefstuk.
 - b** De lengte en breedte van een weiland met een oppervlakte van één hectare.

Vaardigheid

Je kunt vergelijkingen herleiden.

Met behulp van de balansmethode kun je vergelijkingen herleiden.

Voorbeeld

Herleid de vergelijking $w - 2v = 8$ zodat v wordt uitgedrukt in w .

Oplossing

$$w - 2v = 8$$

$$-2v = 8 - w \quad \text{links en rechts } -w$$

$$v = -4 + \frac{1}{2}w \quad \text{links en rechts : } -2$$

- S2** Herleid de vergelijkingen zodat q uitgedrukt wordt in p .
- a** $3q - 9p = 6 - 12q$
 - b** $4p + 8 = -(2q - 6)$

Vaardigheid

Je kunt een formule opstellen bij een lijn door twee gegeven punten.

- 1 Bereken de richtingscoëfficiënt.

$$\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{\text{toename tweede coördinaat}}{\text{toename eerste coördinaat}}$$

- 2 Vul in de algemene formule de richtingscoëfficiënt in.
 3 Vul in die formule de coördinaten van één van de gegeven
 4 Schrijf de formule van de lijn op.

Voorbeeld

Stel een formule op voor de lijn door de punten $A(-1, 4)$ en $B(7, 8)$.

Oplossing

1 $\text{richtingscoëfficiënt} = \frac{8-4}{7-(-1)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2 $y = \frac{1}{2}x + b$

- 3 De coördinaten van punt B invullen.

$$8 = \frac{1}{2} \times 7 + b$$

$$8 = 3\frac{1}{2} + b$$

$$b = 4\frac{1}{2}$$

4 $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$

- S3 a Stel een formule op bij de lijn door de punten $(-2, 7)$ en $(5, 28)$.
 b Stel een formule op bij de lijn door de punten $(-3, 2)$ en $(5, -14)$.

Vaardigheid

Je kunt een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband herkennen.

Je herkent een recht evenredig verband in een tabel, als van de twee getallen in elke kolom de verhouding hetzelfde is. De grafiek bij een evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong.

Je herkent een omgekeerd evenredig verband in een tabel als het product van de variabelen in elke kolom steeds hetzelfde is.

Voorbeeld 1

p	3	6	8
q	4	2	1,5

Laat zien dat p en q in deze tabel omgekeerd evenredig zijn en stel de bijbehorende formules op.

Oplossing

$$p \cdot q = 3 \times 4 = 6 \times 2 = 8 \times 1,5 = 12$$

De formules zijn $p \cdot q = 12$, $p = \frac{12}{q}$ of $q = \frac{12}{p}$

Voorbeeld 2

p	2	3	4
q	16	24	32

Laat zien dat p en q in deze tabel recht evenredig zijn en stel de bijbehorende formules op.

Oplossing

$$\frac{q}{p} = \frac{16}{2} = \frac{24}{3} = \frac{32}{4} = 8$$

De formules zijn $\frac{q}{p} = 8$ of $q = 8p$.

Samenvatting

- S4**
- Welke van de tabellen hoort bij een recht evenredig verband en welke bij een omgekeerd evenredig verband?
 - Geef bij de tabel die bij een recht evenredig verband hoort de evenredigheidsconstante.
 - Vul de tabellen verder in.
 - Stel bij beide tabellen een formule op.

A					
x	2	3	4	5	6
y	7,5	5	3,75	3	...

B					
p	2	3	5	6	7
q	9	13,5	22,5	27	...

Vaardigheid

Je kunt een grenswaarde van een formule vinden.

Bij sommige formules kunnen voor grote waarden van x de waarden van y steeds dichterbij komen tot een grenswaarde. De grafieken van deze functies hebben dan een horizontale asymptoot.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x}{x-3} + 4$.

Welke grenswaarde heeft functie f ?

Oplossing

x	10	100	1000	10 000
y	6,857	6,062	6,006	6,001

Functie f heeft 6 als grenswaarde.

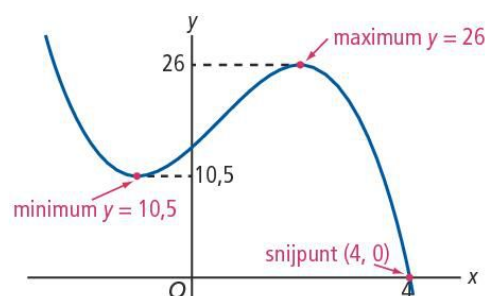
- S5** Gegeven is de functie $g(x) = \frac{5x+3}{x-2}$

Onderzoek of de functie een grenswaarde heeft. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.

Vaardigheid

Je kunt toppen en snijpunten van een grafiek vinden.

De grafiek heeft één snijpunt met de horizontale as. De functiewaarde van de bijbehorende functie is daar nul. Het nulpunt is de x -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x -as. De grafiek heeft twee toppen. In een top heeft de bijbehorende functie een maximum of een minimum. Als je de rekenmachine gebruikt om coördinaten van toppen of snijpunten te bepalen, moet je toelichten hoe je de rekenmachine gebruikt.



Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek bij de functie $f(x) = 2x^3 + 7x + 1$.

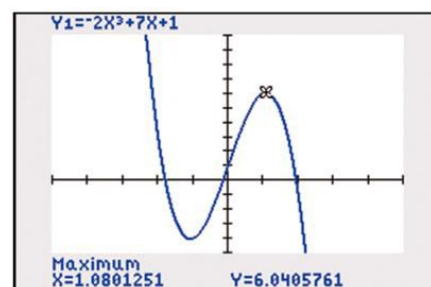
Oplossing

Invoer: $y = -2x^3 + 7x + 1$

Venster: $-5 \leq x \leq 5$ en $-5 \leq y \leq 10$

Opties: minimum, maximum

De coördinaten van de toppen van de grafiek zijn $(-1,08; -4,04)$ en $(1,08; 6,04)$.



S6 Gegeven is de functie $h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x - 8$.

- Bereken het nulpunt van de grafiek van h .
- Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van h .

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking met de rekenmachine oplossen.

Sommige vergelijkingen zijn lastig op te lossen. In dit geval kun je de oplossingen met de rekenmachine vinden.

De oplossingen vind je met behulp van de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.

Voorbeeld

Los op $-x^2 + 4x = -x + 2$.

Oplossing

Invoer: $y_1 = -x^2 + 4x$ en $y_2 = -x + 2$

Venster: $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

Opties: snijpunten

De oplossingen van de vergelijking zijn $x \approx 0,44$ en $x \approx 4,56$.

S7 Los de vergelijkingen op. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

- $2\sqrt{x+5} = x^2 - 390$
- $2400 \cdot 0,5^a = 3a^2$

Vaardigheid

Je kunt een ongelijkheid $f(x) < g(x)$ oplossen.

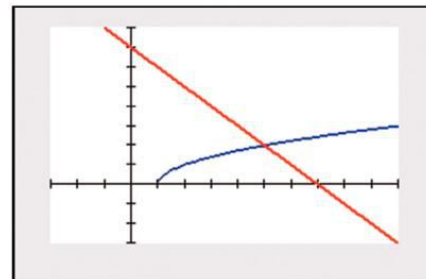
- Plot de grafieken van f en g .
- Bereken de coördinaten van de snijpunten.
- Ga met behulp van de grafieken na bij welke waarden van x de gevraagde ongelijkheid geldt.

Voorbeeld

Los op $\sqrt{x-1} \geq 7-x$.

Oplossing

- Plot de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $g(x) = 7-x$.
- Met de grafieken vind je het snijpunt $(5, 2)$.
- Bij $x > 5$ ligt de grafiek van f hoger dan die van g . De oplossing van de ongelijkheid is $[5, \rightarrow)$.



S8 Los de ongelijkheden op. Geef de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

- $x^2 + x - 3 \leq 4x + 7$
- $\sqrt{x-5} > 2x - 38$

T1 De ritprijs voor een taxi bestaat uit een vast starttarief en een kilometerprijs. Voor een rit over drie kilometer betaal je € 8,23 en voor een rit over 12 kilometer betaal je € 24,43.

- Stel een formule op voor de kosten k in euro's van een taxi voor een rit van a kilometer.
- Bereken hoeveel kilometer je hebt gereden als de meter aan het einde € 19,39 aangeeft.
- Druk a uit in k . Wat kun je met deze formule direct berekenen?



T2 Los de vergelijkingen op.

- $-\frac{1}{2}x + 7 = -x + 9$
- $-(x + 6) + 2x = -3 - 8x$
- $0,125 \cdot 4^w + 7 = 2w + 11$
- $\sqrt{p-4} = \frac{24}{p-5}$

T3 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 - 5x^2 - 26x + 10$ en $g(x) = 2x - 22$.

- Bereken de coördinaten van het linker snijpunt van de grafiek van f met de x -as.
- Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van f . Geef daarbij aan of de top bij een maximum of een minimum van de functie hoort.
- Los op.

A $f(x) = 100$

B $f(x) = g(x)$

T4 Gegeven is de tabel hiernaast.

- Bereken de waarde van b als de tabel bij een recht evenredig verband hoort.
- Vul de tabel verder in.
- Geef twee formules die dan bij de tabel passen.
- Maak de opdrachten a, b en c ook voor als de tabel bij een omgekeerd evenredig verband hoort.
- Stel een lineaire formule op die past bij de tabel als $b = 17$ en vul de tabel verder in.

p	3	18	20
q	12	b	...

- T5** Op 1 januari 2017 wordt in een vijver een aantal vissen uitgezet. Men verwacht dat de groei van het aantal vissen zal gaan volgens de formule $V = 385 - 281 \cdot 0,87^t$. Hierin is V het aantal vissen en t de tijd in jaren na 1 januari 2017.

- a Hoeveel vissen heeft men uitgezet?
- b Met hoeveel vissen neemt het aantal vissen in 2020 toe?
- c In welk jaar zijn er voor het eerst meer dan 300 vissen?
- d Hoeveel vissen zullen er op den duur zijn?



- T6** Los de ongelijkheden op. Geef de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

a $18 \cdot 1,5^x > 20 + 6x$

b $\frac{2x-4}{x} \leq -\frac{1}{2}x + 1$

- T7** Gegeven is de functie $f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 2}{\frac{1}{2}x^2 + 2}$

- a Bereken de nulpunten van de grafiek van f .
- b Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van f .
- c Onderzoek of functie f een grenswaarde heeft. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.

- T8** Een chemisch bedrijf produceert een bestrijdingsmiddel. De totale productiekosten TK worden gegeven door de formule $TK = 0,5q^3 - 3q^2 + 6q$. Hierin is q de geproduceerde hoeveelheid bestrijdingsmiddel in duizenden kilogrammen en TK de bijbehorende kosten in duizenden euro's. Het bedrijf verkoopt het bestrijdingsmiddel voor 6 euro per kilogram.

- a Geef een formule voor de totale opbrengst TO in duizenden euro's, uitgedrukt in q .
- b Laat zien dat voor de totale winst TW in duizenden euro's geldt: $TW = -0,5q^3 + 3q^2$.
- c Bereken bij welke hoeveelheden het bedrijf winst maakt.
- d Bereken bij welke hoeveelheid de winst maximaal is en bereken deze maximale winst.



Extra oefening

Je kunt vergelijkingen herleiden.

- E1** **a** Herleid de vergelijkingen zodat w uitgedrukt wordt in a .
- A $6w - 7a = 42$ C $\frac{1}{2}w - 2a = 5$
 B $6a = 3(w + 12)$ D $4a - w = 7(w + 4)$
- b** Herleid de vergelijkingen zodat a nu wordt uitgedrukt in w .

Je kunt een formules opstellen bij een lijn door twee gegeven punten.

- E2** **a** Stel een formule op van de lijn door de punten $A(-2, 7)$ en $B(1, -5)$.
b Stel een formule op van de lijn door de punten $C(-3, 5)$ en $D(4, -2)$.

Je kunt een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband herkennen.

- E3** **a** Welke van de tabellen hoort bij een recht evenredig verband en welke bij een omgekeerd evenredig verband?

A

a	20	24	30	36	40
w	6	7,2	9	10,8	...

B

t	4	5	8	12	...
h	1,5	1,2	0,75	0,5	0,12

- b** Vul de tabellen verder in.
c Geef bij de tabel die bij een recht evenredig verband hoort twee formules.
d Geef bij de tabel die bij een omgekeerd evenredig verband hoort drie formules.

Je kunt een grenswaarde van een formule vinden.

- E4** Onderzoek of de functies een grenswaarde hebben. Zo ja, schrijf deze grenswaarde op.

- a** $f(x) = 350 - 75 \cdot 0,97^x$ **c** $h(x) = \frac{500}{7 + 2x} + 6$
b $g(x) = \frac{6x^2 - 3}{4x + 9}$ **d** $i(x) = \frac{2x}{10x - 3}$

Je kunt toppen en snijpunten van een grafiek vinden.

- E5** Gegeven is de functie $W(q) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 5x^2 + 1$.
- a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van W met de horizontale as.
b Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van W . Geef daarbij aan of een top bij een maximum of een minimum van de functie hoort.

Je kunt een vergelijking met de rekenmachine oplossen.

E6 Los de vergelijkingen op. Schrijf op hoe je de rekenmachine gebruikt.

a $x^3 - x + 3 = x^2 - 7$

b $50 - x = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Je kunt een ongelijkheid $f(x) < g(x)$ oplossen.

E7 Los de ongelijkheden op. Geef de oplossing van de ongelijkheid in de intervalnotatie.

a $-x^2 + 8x - 2 \geq 6x - 5$

b $x^3 - 9x > 4x + 12$

c $\sqrt{8-x} \geq \frac{1}{2}x$

d $0,1 \cdot 2^x < 3x - 8$

E8 Een bedrijf produceert voetballen. Voor de gemiddelde totale

productiekosten GTK per voetbal geldt $GTK = 10 + \frac{600}{a}$

Hierin is a is het aantal geproduceerde voetballen per dag en is GTK in euro's.

- a** Bereken de kosten per voetbal als het bedrijf op een dag 1000 voetballen produceert. Bereken ook de totale kosten.
- b** Wat gebeurt er met de gemiddelde kosten per voetbal als a steeds groter wordt?
- c** Vanaf welk aantal voetballen zijn de gemiddelde totale productiekosten per voetbal minder dan € 10,50?

E9 Een cilindervormig reservoir wordt gevuld met water. Om 13.00 uur wordt gestart met het vullen en om 17.00 uur zit er 2400 liter water in het reservoir. In het reservoir kan maximaal 10 000 liter water.

- a** Het reservoir is leeg op het moment van starten met vullen.
Stel een formule op waarmee je de inhoud V in liters na t uur vullen kunt berekenen.
- b** Hoe laat zal het reservoir vol zijn?
- c** Het blijkt dat het reservoir om 13.00 uur niet leeg was maar dat er al 800 liter water in zat.
Hoe laat zal nu het reservoir vol zijn?



Wiskunde in de lage landen

In het Engels, in het Frans, in het Duits en in veel andere talen is het woord voor wiskunde afgeleid van het Griekse mathematikè. Het Nederlandse woord *wiskunde* danken we aan de Nederlandse wiskundige Simon Stevin (1548 - 1620). *Wis* heeft hier de betekenis van 'zeker', zoals in *vergewissen*. Afkomstig uit Vlaanderen, vertrok hij in 1581 naar de Universiteit van Leiden, die door Willem van Oranje in 1575 was gesticht. Prins Maurits, met wie een hechte vriendschap ontstond, vroeg Stevin een nieuw onderwijsprogramma te ontwikkelen dat snel ingenieurs kon opleiden. Aan deze opleiding in Leiden kregen leerlingen in het Nederlands lessen in rekenen, landmeetkunde en vestingbouw.

De 16de eeuw was een periode van nieuwe bloei voor de wiskunde. Naast de meetkunde en de astronomie die aan de universiteiten werd bestudeerd, ontstond er door de toenemende handel belangstelling voor een nieuw soort wiskunde: de toegepaste praktische wiskunde. Daarin ging het om bepaling van inhouden, wisselen van geld, positiebepaling op zee enzovoorts. In de tweede helft van de 16de eeuw schakelde men in de Nederlanden over van de onpraktische Romeinse cijfers naar de Arabische cijfers.

In 1585 publiceerde Stevin een klein boekje: *De Thiende*. Het bevatte een revolutionair idee, namelijk het gebruik van decimale breuken. Dit vereenvoudigde het rekenen met breuken sterk. Voorheen werd veel gebruik gemaakt van het zestigtallige stelsel, waarvan onze tijdsindeling een overblijfsel is. Wiskundigen zien door de systematische aanpak *De Thiende* als een mijlpaal in het werken met decimale breuken.

Stevin noteerde het getal 184,54290 als

184①5①4②2③9④0

In de cirkels staat het aantal keer dat door je 10 moet delen.

Opdracht

- Hoe zou Stevin 3,141 592 654 noteren?
- In de tekst van *De Thiende* staat een optelling van drie getallen. Waar een komma zou moeten staan tussen het gehele deel van het getal en het breukgedeelte, ontbreekt deze bij Stevin.

Zoek uit waar de komma moet staan.



THIENDE. ¹³
HET ANDER DEEL
DER THIENDE VANDE
WERCKINCHE.

I. VOORSTEL VANDE
VERGADERINGHE.

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

TGHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welker eerste 27 ① 8 ① 4 ③ 7 ③, de tweede, 37 ① 6 ① 7 ③ 5 ③, de derde, 87 ⑤ ⑦ ① 8 ② 2 ③, **T**HEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. **W**ERCKING.

	③ ① ② ③
Men tal de ghegeven ghetalen in oirden stellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van hcelegetalen aldus:	$\begin{array}{r} 27847 \\ 37675 \\ 875782 \\ \hline 941304 \end{array}$



In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je kennis gemaakt met het verwerken van gegevens, zoals het maken van staafdiagrammen en boxplots.

In dit hoofdstuk leer je dat er verschillende soorten gegevens zijn en hoe je ze op verschillende manieren kunt verwerken. Je leert hoe je met de computer in grote hoeveelheden gegevens op zoek kunt gaan naar overeenkomsten en verschillen tussen groepen en variabelen.

Het onderwerp Statistiek wordt in klas 5 en klas 6 uitgebreid en afgerond.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

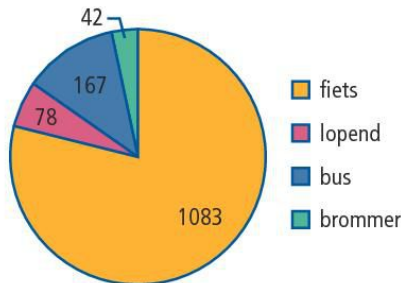
- | | |
|---------------------------------|-------------|
| • Ordenen en structureren | opdracht 11 |
| • Abstraheren | opdracht 22 |
| • Logisch redeneren en bewijzen | opdracht 42 |

Bij diverse opdrachten in dit hoofdstuk is gebruik gemaakt van data die door het Centraal Bureau voor de Statistiek beschikbaar zijn gesteld.

Theorie

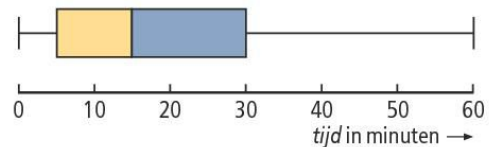
Gegevens kun je op verschillende manieren in beeld brengen. Je ziet vier manieren die je eerder bent tegengekomen, namelijk een **cirkeldiagram**, een **boxplot**, een **staafdiagram** en een **lijndiagram**.

Voorbeeld 1



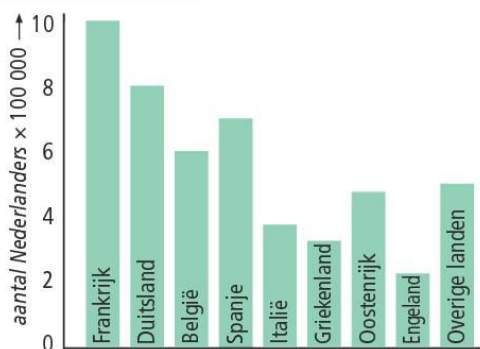
Op een school zitten 1370 leerlingen. In het cirkeldiagram is het aantal aangegeven dat naar school gaat met de fiets, de bus, de brommer of lopend. De delen van het cirkeldiagram worden sectoren genoemd. De grootte van de hoek van de sector 'fiets' is $1083 : 1370 \times 360^\circ = 285^\circ$. Van de leerlingen gaat $42 : 1370 \times 100\% = 3\%$ met de brommer.

Voorbeeld 2



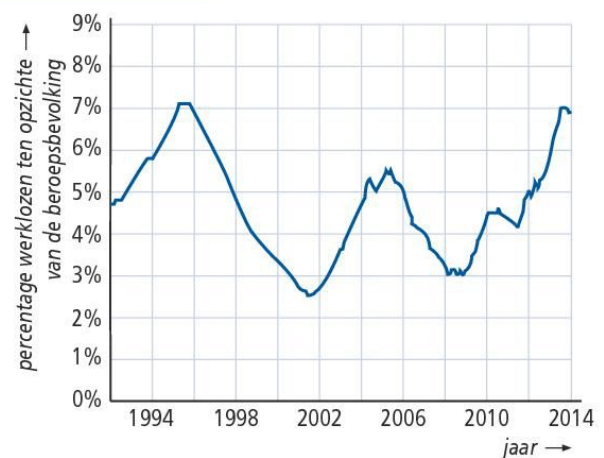
Een tandartspraktijk heeft bijgehouden hoeveel minuten na de afgesproken tijd een patiënt aan de beurt is. In de boxplot is te zien dat het eerste kwartiel 5 minuten is. Dat betekent dat 25% van de patiënten binnen 5 minuten na de afgesproken tijd wordt geholpen.

Voorbeeld 3



In een staafdiagram geeft de hoogte van de staaf het aantal keren dat een gegeven voorkomt aan. Zo kun je in het staafdiagram aflezen hoeveel Nederlanders er in de zomer op vakantie zijn geweest naar verschillende landen.

Voorbeeld 4



In het lijndiagram kun je aflezen dat op 1 januari 2000 ongeveer 3,3% van de beroepsbevolking werkloos was.

- V1**
- a** Bereken met het cirkeldiagram in voorbeeld 1 hoeveel procent van de leerlingen lopend naar school gaat.
 - b** Lees in de boxplot de waarde van het derde kwartiel af en leg uit wat dat betekent voor de wachttijd van de patiënten.
 - c** Waarom zijn de gegevens van het staafdiagram niet geschikt om een lijndiagram bij te maken?
 - d** In het lijndiagram zie je hoe in Nederland het aantal werklozen als percentage van de beroepsbevolking is veranderd. Op 1 januari 2012 was de totale beroepsbevolking 10,8 miljoen.
Hoeveel mensen waren er werkloos op 1 januari 2012?

- V2** De bevolking van Latijns-Amerika bestond rond 1880 uit ongeveer 7,6 miljoen indianen, 5,1 miljoen mestiezen, 0,8 miljoen zwarten en 3,4 miljoen blanken.
- a** Maak een staafdiagram van de samenstelling van de bevolking.
 - b** Hoeveel procent van de bevolking bestond in 1880 uit blanken?

- V3** In de tabel staan de eindcijfers voor het vak Engels.
- a** Bereken het gemiddelde van de eindcijfers.
 - b** Hoeveel procent van de leerlingen heeft een onvoldoende?

<i>cijfer</i>	4	5	6	7	8	9
<i>frequentie</i>	6	39	34	20	14	4

Theorie

Frequenties kun je **absoluut** of **relatief** weergeven. De absolute frequentie is het getelde aantal, de relatieve frequentie is bij voorbeeld een percentage. In een cirkeldiagram is de hoek van de cirkelsector ook een voorbeeld van een relatieve maat voor de frequentie.

De waarneming met de grootste frequentie noem je de **modus**. Van een rij waarnemingen die op volgorde staan van klein naar groot is de middelste waarneming de **mediaan**. Modus, mediaan en gemiddelde heten **centrummaten**.

Voorbeeld

In de tabel staan de leeftijden van 93 leerlingen.

<i>leeftijd</i>	15	16	17	18
<i>frequentie</i>	18	32	35	8

Het absolute aantal 18-jarigen is 8.

Het relatieve aantal 18-jarigen is $8 : 93 \times 100\% \approx 8,6\%$.

De gemiddelde leeftijd is

$(18 \times 15 + 32 \times 16 + 35 \times 17 + 8 \times 18) : 93 \approx 16,4$ jaar.

De modus is 17 jaar.

De mediaan is het 47e getal en dat is 16 jaar.

- V4** Bekijk de tabel met eindcijfers bij opdracht V3.
- a** Zijn de frequenties absoluut of relatief weergegeven?
 - b** Geef de modus van de eindcijfers.
 - c** Bereken de mediaan van de eindcijfers.

3.1 Wat is statistiek?

Je leert

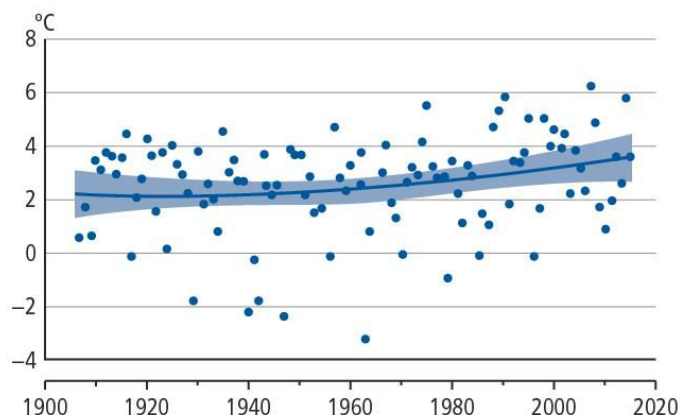
- wat statistiek is

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—03—4—5—6
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6
- uitdagend: 1—2—3—5—6—U1

In de figuur staat voor elk jaar vanaf 1906 de gemiddelde wintertemperatuur in Midden-Nederland.

- Wat heeft de maker van deze figuur duidelijk willen maken?
- Kun je nu ook iets zeggen over de gemiddelde wintertemperatuur in Midden-Nederland in 2030?



- 1 De tabel bevat gegevens over de inwoners van Nederland vanaf 1950 zoals die door Het Centraal Bureau voor de Statistiek is gepubliceerd.
 - a Maak een lijndiagram met horizontaal het jaartal en verticaal het totaal aantal inwoners.
 - b Schat op grond van het lijndiagram het aantal inwoners in 2025.
 - c In 1950 waren er meer vrouwen dan mannen in Nederland. Dat geldt ook voor het jaar 2010. Onderzoek met een geschikte grafiek of dit ook voor de andere jaren geldt.
 - d Het gemiddelde aantal inwoners per km^2 wordt bevolkingsdichtheid genoemd. De grafieken van de totale bevolking en de bevolkingsdichtheid vertonen een opvallend verschil. Geef aan wat dat verschil is en ga na hoe dit verschil is ontstaan.



- 2 In de tabel zijn de prestaties van leerlingen bij een sportdag opgenomen.
 - a Welke sporten hebben de leerlingen gedaan?
 - b Waren het leerlingen van een basisschool of van een middelbare school?
 - c Wat was de beste prestatie bij de sprint? Is deze prestatie geleverd door een jongen of door een meisje?

Theorie

Statistiek is de naam van het vakgebied dat zich bezighoudt met het verzamelen, ordenen, samenvatten en analyseren van gegevens. Deze gegevens worden **data** genoemd en de verzamelde data vormen een **dataset**. Een **statistisch onderzoek** begint met een aantal vragen en de vaststelling over welke doelgroep het onderzoek gaat. Die doelgroep heet de **populatie**. Je gaat na op welke **statistische variabelen** het onderzoek betrekking heeft en je verzamelt data bij die variabelen. Je ordent de dataset om meer overzicht te krijgen. Uitspraken gedaan naar aanleiding van een statistisch onderzoek worden **statistische uitspraken** genoemd.

Voorbeeld

Een aantal jaren geleden zijn er strengere exameneisen ingevoerd. Het ministerie wil weten of deze maatregel de examenresultaten heeft beïnvloed. De populatie bestaat uit alle leerlingen die examen hebben gedaan, enkele jaren voor de invoering tot enkele jaren erna. Statistische variabelen waarover data worden verzameld kunnen zijn: geslacht, leeftijd, profiel, aantal keren doubleren, eindcijfers, examenuitslag. Een statistische uitspraak zou kunnen zijn: het aantal onvoldoendes op de kernvakken is de eerste jaren na de invoering gedaald.

Ondersteunende route → maak opdracht 03

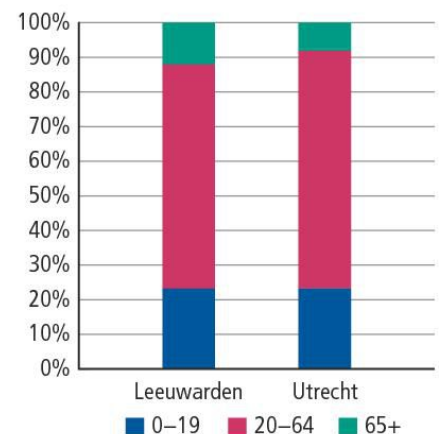
- 3** Voor het bouwen van nieuwe woningen overweegt het bestuur van een gemeente het terrein van de huidige sportvelden te gebruiken. Het kan ook op een andere plek, maar dan zijn de kosten veel hoger. Als er op de sportvelden wordt gebouwd, dan zal er op een andere plek een nieuwe sportaccommodatie moeten worden aangelegd. Daar zijn drie mogelijke terreinen voor aangewezen. Voordat de gemeenteraad een definitief besluit neemt, wil ze de mening van de bevolking weten. Een onderzoeksbureau wordt gevraagd een onderzoek uit te voeren.
- Wat is in dit onderzoek de populatie?
 - Formuleer een aantal vragen waarop de gemeenteraad antwoord wil hebben.
 - Noem een aantal statistische variabelen waarover het bureau data kan verzamelen om antwoord op deze vragen te kunnen geven.
 - Formuleer een mogelijke statistische uitspraak die op grond van de resultaten van het onderzoek kan worden gedaan.



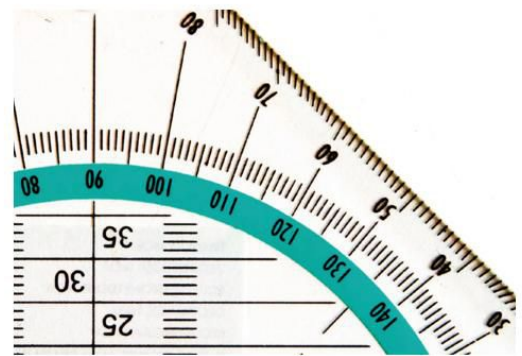
3.1 Wat is statistiek?

- 4 Deze opdracht gaat over dezelfde dataset als opdracht 1.
- Wat zijn de statistische variabelen in deze dataset?
 - Welke statistische uitspraak kun je doen over de variabele *GemGrootte*?
 - Geef bij de volgende statistische uitspraken aan of die op grond van de dataset kunnen worden gedaan.
 - Het aantal huishoudens is in verhouding sterker gestegen dan de omvang van de bevolking.
 - Het gemiddeld aantal personen per huishouden zal in 2030 zijn gedaald tot onder de 2,10.
 - Het aantal 70-plussers is sinds 1950 gestegen.

- 5 Onder demografische druk wordt verstaan het aantal 0-19 jarigen en 65 plussers per honderd 20-64 jarigen.
- In een stad met 150 000 inwoners wonen 104 200 inwoners van 20-64 jaar.
Laat dat met een berekening zien dat de demografische druk gelijk is aan 44.
 - In de tabel vind je de bevolking naar leeftijd van tien Nederlandse gemeenten.
Maak een nieuwe variabele *demografische druk* en teken een staafdiagram met voor elke gemeente de demografische druk.
 - Voor Leeuwarden en Utrecht is een gestapeld staafdiagram getekend met de verdeling naar leeftijd in percentages.
Hoe kun je zonder berekening in het diagram zien dat de demografische druk in Leeuwarden hoger is?
 - Maak net zo'n grafiek, maar nu voor alle tien genoemde Nederlandse gemeenten.



- 6 Welke van de volgende uitspraken zijn statistische uitspraken?
- '18-jarigen geven het leven een 8,4.'
(publicatie NRC 05-01-2018)
 - 'Vrouwen zijn iets vaker kostwinner.'
(Trouw, 09-03-2018)
 - 'Hema verkocht geodriehoeken met drukfouten.'
(NRC, 11-05-2018)
 - 'T-Mobile US biedt \$26 miljard voor telecombedrijf Sprint.'
(Financieel Dagblad, 30-04-2018)
 - 'Klagen over huur levert vaak goed geld op.'
(Telegraaf, 11-05-2018)



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten**03**

Het bestuur van een landelijke vereniging voor natuurbehoud met ruim 30 000 leden wil een aantal doelstellingen van de vereniging moderniseren. Ze heeft vijf speerpunten geformuleerd en wil nu weten hoe de leden over elk van deze plannen denken. Daarvoor wordt er een enquête gehouden onder 800 willekeurig gekozen leden.

- a Het liefst zou het bestuur elk van de leden vragen naar hun mening.
Wat is dus de populatie in het onderzoek?
- b Het bestuur wil weten of er een verschil is in waardering voor de plannen tussen mannen en vrouwen.
Welke statistische variabele wordt dus bij het onderzoek betrokken?
- c Het bestuur vraagt zich af of het voor de waardering van een plan uitmaakt in welk deel van het land iemand woont.
Formuleer een vraag in de enquête en geef aan welke statistische variabele daar bij hoort.
- d Het bestuur wil ook graag weten in hoeverre opleiding en leeftijd van invloed zijn op de plannen.
Over welke statistische variabelen moet data worden verzameld om deze vraag te kunnen beantwoorden?
- e Een mogelijke conclusie van het onderzoek zou kunnen zijn: zo'n 40% van de leden ziet speerpunt 2 niet zitten.
Formuleer een mogelijke statistische uitspraak die een verband legt tussen de mening over speerpunt 2 en de leeftijd van de ondervraagden.
- f Formuleer nog een mogelijke statistische uitspraak.

**Speerpunten**

- 1 Beschermde weidevogelgebied in Noord-Nederland uitbreiden.
- 2 Aantal nieuwe schaapskuddes in Oost-Nederland beginnen.
- 3 Invasieve exoten in de grachten van Utrecht bestrijden.
- 4 Drie ecoducten in de provincie Gelderland realiseren.
- 5 Een groot aantal insectenhôtels plaatsen in het Groene Hart.

Uitdagende opdrachten**U1**

Een student sociologie krijgt de opdracht om de bevolking in een oudere stadswijk in kaart te brengen. De Gemeentelijke Basisadministratie, die beschikt over veel data over de inwoners, wil niet aan dit onderzoek meewerken, zodat de student zelf zijn data moet verzamelen.

Een van de zaken die hij wil onderzoeken is het aantal kinderen per huishouden. Om hierover gegevens te krijgen, vraagt hij 50 kinderen die op straat spelen hoeveel kinderen er zijn in hun gezin. Noem een aantal redenen waarom de student op deze manier waarschijnlijk geen goede schatting kan maken van de grootte van de gezinnen in de wijk.



Je leert

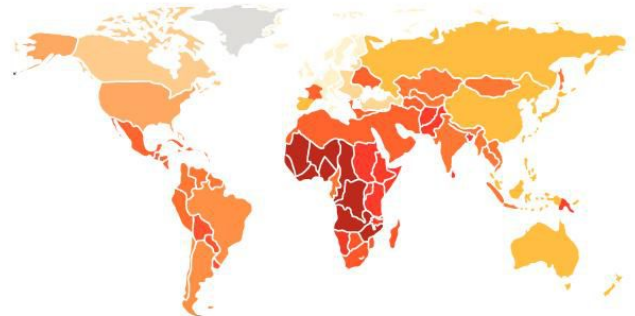
- hoe je data op verschillende manieren weergeeft

Leerroutes

- ondersteunend: 7—8—9—10—011—12
- doorlopend: 7—8—9—10—11—12
- uitdagend: 7—8—9—11—12—U2

In de figuur is per land aangegeven hoe groot het aandeel 0 – 14 jarigen is ten opzichte van de hele bevolking.

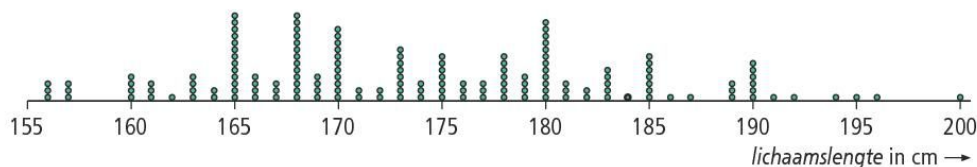
- In welk deel van de wereld lijkt de bevolkingsopbouw de komende jaren de meeste problemen op te leveren?

Percentage 0-14-jarigen**7**

De dataset bevat gegevens over een aantal havo leerlingen.



- Van welke variabelen is data opgenomen in de dataset?
- Hieronder zijn de waarden van de variabele *lengte* weergegeven in een dotplot.



Hoeveel leerlingen hebben een lengte van 170 cm?

- Maak een soortgelijke figuur bij de variabele *gewicht*.
- In de dataset komt één leerling voor met een gewicht van 71 kg.
Is dit een jongen of een meisje?
- In de figuur staan de gewichten van de jongens en de meisjes door elkaar.
Maak afzonderlijke figuren voor de gewichten van de jongens en de meisjes door de dataset te splitsen op de variabele *geslacht*.
- Geef voor zowel de jongens als de meisjes de waarde van de mediaan van de variabele *gewicht*.

8 Deze opdracht maakt gebruik van dezelfde dataset als opdracht 7.



Aan de leerlingen is gevraagd hoeveel plezier ze hebben in het gekozen wiskundevak.

- a** Maak bij de variabele *plezier* een dotplot, een staafdiagram en een cirkeldiagram.
- b** Welk van de drie figuren vind je het meest geschikt om de data weer te geven? Leg je antwoord uit.
- c** Geef de modus van de variabele *plezier*.
- d** Bij welk van de twee groepen wiskunde, wiskunde A of wiskunde B, is het percentage leerlingen dat aangeeft veel plezier in het vak te hebben het grootst?

9 Ook deze opdracht maakt gebruik van dezelfde dataset als opdracht 7.



- a** Maak een frequentietabel bij de variabele *profiel*.
- b** Welk profiel is het meest gekozen?
- c** Onderzoek of bij de jongens en de meisjes hetzelfde profiel het meest gekozen is.
- d** Hoeveel procent van de jongens koos voor het EM profiel?

10 In de dataset is voor de jaren tussen 1500 en 2000 de gemiddelde lengte van volwassen Nederlanders opgenomen.



- a** Bekijk de data en voorspel hoe een staafdiagram er uit komt te zien met de tijd op de horizontale as en de lengte op de verticale as.
- b** Waarom kun je beter een lijndiagram maken?
- c** In welke periode van 50 jaar nam de gemiddelde lengte het snelste toe?
- d** Maak een schatting van de gemiddelde lengte van volwassen Nederlanders in 1970.

Je kunt data weergeven met bijvoorbeeld een frequentietabel, een cirkeldiagram, een staafdiagram, een dotplot of een boxplot.

Welke keuze je maakt, hangt af van wat je wilt onderzoeken met de data. Je kunt daarbij ook de keuze maken tussen absolute of relatieve frequenties.

Met een lijndiagram geef je overzichtelijk het verloop in de tijd weer.

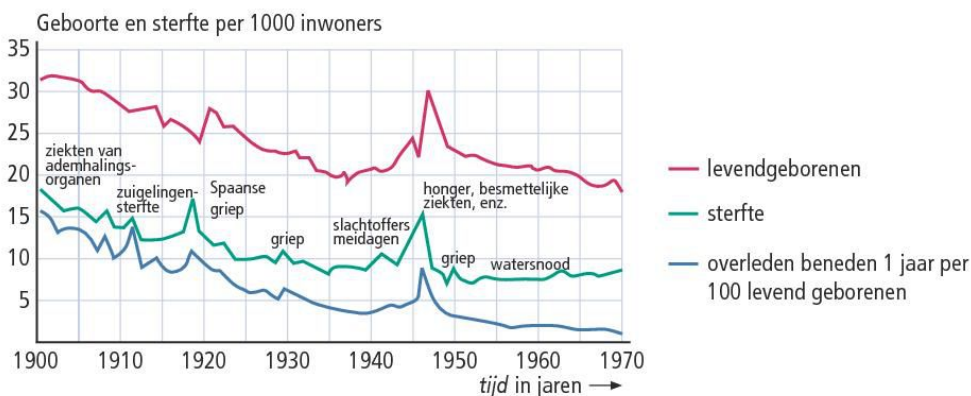
Als je deelgroepen afzonderlijk wilt bekijken, dan splits je de dataset op de bijbehorende variabele.

3.2 Data weergeven

Ondersteunende route → maak opdracht 011

- 11** Bij een landelijke voorlichtingsdag van een beroepsopleiding is aan het eind aan de deelnemers gevraagd een enquête in te vullen. De dataset bevat een deel van de ingevulde data. Kies bij de volgende opdrachten steeds een geschikte manier om de data in beeld te brengen
- Van welke statistische variabelen zijn data opgenomen in deze dataset?
 - Uit welke provincie komen de meeste deelnemers?
 - Hoeveel procent van de deelnemers komt uit de provincie Gelderland?
 - Geef de mediaan van de variabele *leeftijd*.
 - De deelnemers hebben hun waardering voor de dag uitgedrukt in een cijfer. Het meest voorkomende cijfer is 7. Ga na of dit voor elke provincie afzonderlijk ook geldt.

- 12** De grafieken gaan over geboorte- en sterftecijfers in Nederland. Bij een aantal pieken staat de oorzaak vermeld.



- Hoe zie je dat de gegevens in deze grafiek relatief zijn?
- In 1918 zijn er veel mensen slachtoffer geworden van de Spaanse griep. De totale bevolking bedroeg toen 6 625 300. Bereken het aantal mensen dat is overleden ten gevolge van de Spaanse griep.
- Bereken hoeveel baby's in 1918 niet de leeftijd van 1 jaar bereikten.

Uitdagende route → maak opdracht U2

Ondersteunende opdrachten

011



Bij een landelijke voorlichtingsdag over een beroepsopleiding is aan het eind aan de deelnemers gevraagd een enquête in te vullen. De dataset bevat een deel van de ingevulde data.

- a Van welke statistische variabelen zijn data opgenomen in deze dataset?
- b Maak een staafdiagram bij de variabele *provincie* en lees daaruit af uit welke provincie de meeste deelnemers komen.
- c Wissel in het staafdiagram tussen absolute en relatieve frequenties.
Hoeveel procent van de deelnemers komt uit de provincie Limburg?
- d Maak een staafdiagram bij de variabele *leeftijd*.
- e Bij welke manier van presenteren is de mediaan het makkelijkst te vinden, bij absolute of bij relatieve frequenties?
- f Bereken de mediaan van de leeftijden.
- g De deelnemers hebben hun waardering voor de dag uitgedrukt in een cijfer.
Maak een staafdiagram en lees daaruit af wat de modus van de waarderingen is.
- h Splits de data op de variabele *leeftijd* en ga na of in elke leeftijdsgroep de waarderingen dezelfde modus hebben als de modus van de hele groep.
- i Voor welke provincies geldt dat de modus van de waarderingen niet gelijk is aan de modus van alle waarderingen?



Uitdagende opdrachten

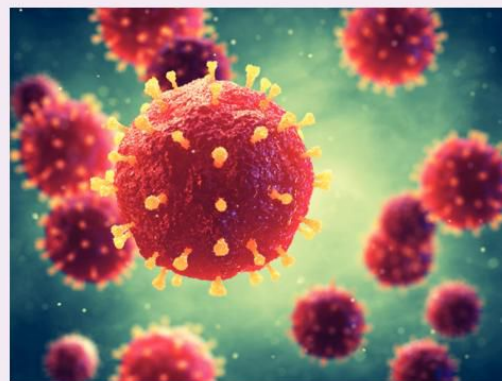
U2



In de dataset is over de periode 1975-2015 voor een aantal infectieziekten het aantal gemelde ziektegevallen weergegeven. Deze data komen uit een veel grotere dataset van het CBS.

Het verloop van het aantal gemelde gevallen verschilt nogal voor deze ziekten.

Beschrijf de karakteristieke verschillen in het verloop over de periode 1975-2015 tussen de ziekten.



Je leert

- hoe je met een klassenindeling werkt

Leerroutes

- ondersteunend: 13—14—15—016—17—18—19
- doorlopend: 13—14—15—16—17—18—19
- uitdagend: 13—14—15—16—17—18—U3

Op een punt waar de maximumsnelheid 30 km per uur is, wordt een snelheidsdisplay geplaatst. Dit display toont de automobilist zijn snelheid. De gemeten snelheden worden in een dataset opgenomen. In de tabel staan de eerste 40 meetwaarden.

- Wat lijkt je een geschikte manier om deze data in beeld te brengen?



32,1	35,1	29,3	34,2	42,8
36,3	42,8	31,3	36,5	30,1
30,5	28,7	33,7	33,3	36,4
38,2	40,7	44,2	39,1	33,9
34,1	31,7	35,5	30,4	42,8
27,9	34,4	40,7	38,4	36,7
33,4	37,3	28,1	34,6	40,7
31,8	32,3	32,2	35,4	38,3

- 13** Hiernaast zie je een frequentietabel bij de lengte van de jongens en van de meisjes waarbij de data in klassen zijn ingedeeld.

H

- Waarom komt een lengte van 179,8 cm in de klasse 180-184?
- En in welke klasse komt een lengte van 164,4 cm?
- Wat is de linker grens van de klasse 175-179? En wat is de rechter grens?
- Hoe breed is de klasse 155-159?
- Welk getal is het midden van de klasse 155-159?

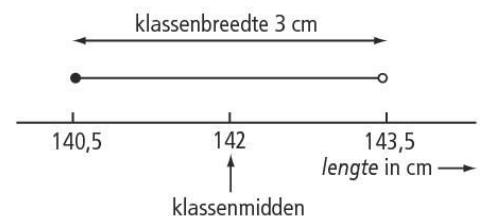
<i>geslacht</i>	m	v	
<i>lengte</i>	freq.	freq.	totaal
155-159	0	6	6
160-164	2	12	14
165-169	3	34	37
170-174	10	16	26
175-179	14	10	24
180-184	18	5	23
185-189	11	1	12
190-194	9	0	9
195-189	1	1	2
200-204	1	0	1
totaal	69	85	154

Theorie

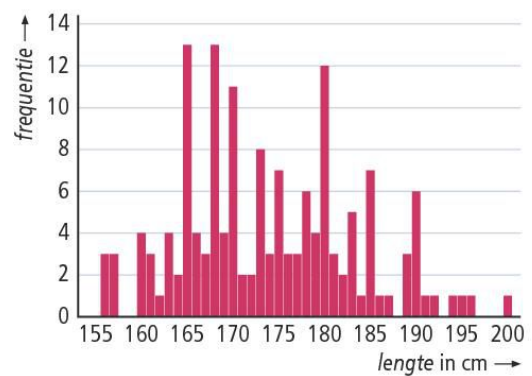
Als een variabele veel verschillende waarden heeft, dan worden ze vaak ingedeeld in klassen. De **klassenbreedte** is de afstand tussen de grenzen van een klasse. Het **klassenmidden** ligt precies halverwege de linker grens en de rechter grens. Klassen worden vaak genoteerd met de klassengrenzen. Dit heet **intervalnotatie**. Bij de klasse $[49,5; 59,5)$ geeft de rechte haak aan dat de linker grens nog in de klasse valt en de punthaak geeft aan dat de rechter grens er net niet meer in valt. De intervalnotatie is eenduidig; bij allerlei andere notaties moet je goed opletten. Zo bevat de leeftijdsklasse 50-59 de leeftijden vanaf 50 jaar tot aan 60 jaar.

Voorbeeld

De klasse 141-143 kun je in de intervalnotatie schrijven als $[140,5; 143,5)$. De klassenbreedte is 3 cm en het klassenmidden is 142 cm.



- 14** In de figuur is een staafdiagram getekend bij de variabele *lengte* met per meetwaarde een staaf.
- Maak een staafdiagram bij de variabele *lengte* met klassenbreedte 5.
 - Vergelijk het staafdiagram uit opdracht a met de figuur hiernaast.
Welk van de twee geeft het duidelijkst de verdeling van de lengtes weer?
 - Maak afzonderlijke staafdiagrammen van de lengtes van jongens en van meisjes.
 - Maak staafdiagrammen waarbij je steeds een andere klassenbreedte neemt.
 - Bij welke indeling krijg je een goed beeld van de verdeling van de lengtes van de jongens en van de meisjes?



- 15** In de volgende situaties betekent de klasse 70-76 steeds iets anders.
- De administratie van een theater telt van elke voorstelling het aantal verkochte kaartjes.
Welke aantallen zitten in de klasse 70-76?
 - Bij een onderzoek naar het gewicht van de leden van een atletiekvereniging wordt het gewicht afgerond op hele kg in klassen ingedeeld.
Geef de intervalnotatie bij de klasse 70-76.
 - Geef bij de situatie van opdracht b ook het klassenmidden en de klassenbreedte.
 - Leg uit dat bij leeftijden in jaren het klassenmidden van de klasse 70-76 gelijk is aan 73,5 jaar. Hoe groot is de klassenbreedte?



Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** In de dataset zijn per leerling de gemiddelde cijfers voor de kernvakken opgenomen.
- Maak een staafdiagram bij de variabele *Nederlands*, waarbij je de klassenindeling zo kiest dat je een overzicht krijgt van op gehelen afgeronde cijfers.
 - Hoeveel leerlingen staan afgerond een 7?
 - In welke klasse ligt de mediaan?
 - Wat is in deze dataset bij deze klassenindeling de modale klasse?

De modale klasse is de klasse met de meeste waarnemingen.

3.3 Klassenindeling

- 17** Een winkelier weegt de zakken aardappelen die hij in voorraad heeft. Je ziet een klassenindeling van de gewichten van de zakken Bintjes en Nicola met hun frequenties.



- Geef de klassenbreedte en de klassenmiddens.
- Waarom kun je de gewichten van de twee soorten niet goed vergelijken door absolute aantallen te gebruiken?
- Maak bij beide rassen een staafdiagram bij de relatieve frequenties.
- Welk kenmerkend verschil is er tussen de twee staafdiagrammen?

gewicht in kg	aantal zakken	
	Bintjes	Nicola
$[2,48; 2,50>$	18	0
$[2,50; 2,52>$	17	34
$[2,52; 2,54>$	21	62
$[2,54; 2,56>$	19	41
$[2,56; 2,58>$	15	13
totaal	90	150

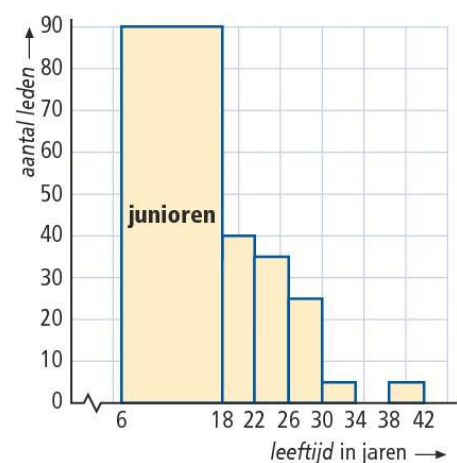
- 18** In de tabel staat de leeftijdsverdeling van de 200 leden van een zwemvereniging.

leeftijd in jaren	6-17	18-21	22-25	26-29	30-33	34-37	38-41
aantal leden	90	40	35	25	5	0	5

Leden van de vereniging die jonger zijn dan 18 jaar heten junioren. De secretaris van de vereniging heeft voor het clubblad een diagram bij de tabel gemaakt.

Dat diagram geeft een verkeerde indruk van de leeftijdsverdeling van de leden van deze vereniging.

- Onderzoek waar dat door komt.
- Als je een beter diagram zou moeten tekenen, hoe zou je dat dan doen?



- 19** In de tabel staat een klassenindeling van de gewichten van dertig zakken peren.

gewicht in kg	$[2,40; 2,45>$	$[2,45; 2,50>$	$[2,50; 2,55>$	$[2,55; 2,60>$	$[2,60; 2,65>$
aantal zakken	4	7	8	6	5

- Geef de klassenbreedte en de klassenmiddens.
- Gebruik de klassenmiddens om het gemiddelde gewicht van een zak peren te berekenen.
- Waar moet de verdeling binnen de klasse aan voldoen om het antwoord van opdracht b te kunnen gebruiken als een goede schatting?

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten



016



In de dataset zijn per leerling de gemiddelde cijfers voor de kernvakken opgenomen. De docente Engels wil een overzicht van de resultaten voor haar vak, afgerond op gehelen.

- a Geef in intervalnotatie de klasse van alle cijfers die afgerond een 7 opleveren.
- b Sorteert de dataset op de variabele *Engels* en lees af wat het laagste cijfer is.
- c Wat is de linker grens van de klasse waarin het laagste cijfer valt?
- d Maak een staafdiagram van de variabele *Engels*, waarbij je de klassenindeling zo kiest, dat je een overzicht krijgt van op gehelen afgeronde cijfers.
- e Hoeveel leerlingen staan afgerond een 7?
- f In welke klasse ligt de mediaan?
- g Geef de grenzen van de modale klasse.

De modale klasse is de klasse met de meeste waarnemingen.

Uitdagende opdrachten

U3

Ontwerp een dataset die voldoet aan de volgende eigenschappen:

- de waarnemingsgetallen zijn gehele getallen tussen 10 en 30;
- de modus is 19;
- bij een klassenindeling met klassenbreedte 3 is de rechter klassengrens van de modale klasse kleiner dan 19;
- bij een klassenindeling met klassenbreedte 4 is de linker klassengrens van de modale klasse groter dan 19.

3.4 Statistische verbanden

Je leert

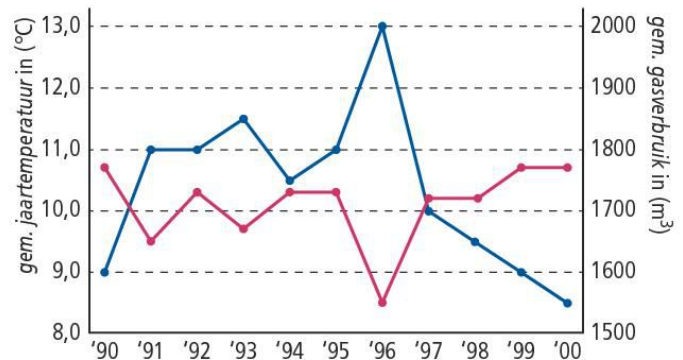
- wat kwantitatieve en kwalitatieve variabelen zijn
- hoe je onderzoekt of er een statistisch verband tussen variabelen bestaat

Leerroutes

- ondersteunend: 20—21—022—23—024—24
- doorlopend: 20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 20—21—22—23—25—U4

Het CBS houdt allerlei gegevens bij, ook over het weer in Nederland en over het energieverbruik. In de figuur zijn voor de jaren 1990 tot en met 2000 de gemiddelde jaartemperatuur en het gemiddelde gasverbruik per huishouden weergegeven.

- Welk verband zie je tussen de gemiddelde jaartemperatuur en het gemiddelde gasverbruik? Klopt dit met wat je zou verwachten?



20



- De variabele *geslacht* kan in deze dataset twee verschillende waarden aannemen. Welke zijn dat?
- Welke waarden kan de variabele *plezier* aannemen?
- Geef bij elke variabele in de dataset aan of het zinvol is om het gemiddelde uit te rekenen.

Theorie

Statistische variabelen kun je verdelen in **kwantitatieve variabelen** en **kwalitatieve variabelen**. De waarde van een kwantitatieve variabele is een getal; de 'waarde' van een kwalitatieve variabele geeft een kenmerk weer.

Voorbeeld

De prijs van een smartphone, het aantal schroeven in een verpakking en de temperatuur in een koelvak zijn voorbeelden van kwantitatieve variabelen. Voorbeelden van kwalitatieve variabelen zijn de kleur van een auto, het schooltype en wel of niet brildragend.

21



Je onderzoekt in deze opdracht of er in deze dataset verbanden zijn tussen verschillende variabelen.

- Welke variabelen zijn kwantitatief?
- Maak een puntenwolk met op de horizontale as de variabele *lengte* en op de verticale as de variabele *gewicht*.
- Welke leerling hoort het meest rechter punt in de grafiek?
- Hoe lang en hoe zwaar is deze leerling?
- Hoe zie je aan de punten in de grafiek dat de variabelen lengte en gewicht redelijk nauw samenhangen?
- Onderzoek of net zo'n nauwe samenhang bestaat tussen de hoeveelheid tijd die een leerling aan huiswerk besteedt en het gemiddelde behaalde resultaat.

Ondersteunende route → maak opdracht 022

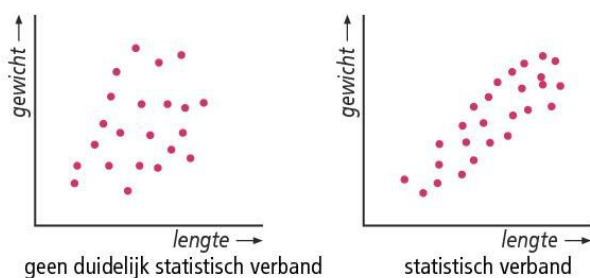
- 22** Jorien wil het onderzoeken of er een statistisch verband bestaat tussen het geslacht van leerlingen en het gekozen profiel in de bovenbouw.
- Zijn de statistische variabelen waar Jorien naar wil kijken kwalitatief of kwantitatief?
 - Beschrijf hoe een puntenwolk er uit ziet als zij een puntenwolk bij deze variabelen gaat maken.
 - Leg uit waarom het tekenen van een puntenwolk bij twee kwalitatieve variabelen niet zinvol is.

Theorie

Wanneer twee statistische variabelen kwantitatief zijn, kun je de samenhang of het **statistisch verband** onderzoeken met een **puntenwolk** of een **spreidingsdiagram**. Daarbij zet je de ene variabele op de horizontale as en de andere variabele op de verticale as. Het spreidingsdiagram bestaat uit een wolk van punten. Elk element uit de populatie wordt een punt in het spreidingsdiagram. Soms kunnen punten samenvallen. Bij kwalitatieve variabelen heeft het maken van een puntenwolk geen zin. De samenhang tussen kwalitatieve variabelen onderzoek je door de frequenties in een tabel te zetten. Zo'n tabel heet een **kruistabel**. Om variabelen goed te kunnen vergelijken, is het vaak nodig om de aantallen om te zetten naar relatieve frequenties.

Voorbeeld 1

In de linker puntenwolk is er geen duidelijk statistisch verband tussen de kwantitatieve variabelen *lengte* en *gewicht*. In de rechter puntenwolk zie je dat er een statistisch verband is tussen *lengte* en *gewicht*. Bij grotere waarden van de *lengte* is in het algemeen ook de waarde van het *gewicht* groter.



Voorbeeld 2

In de kruistabel zijn de waarden van de kwalitatieve variabelen *geslacht* en *profiel* verwerkt.

	<i>geslacht</i>		
<i>profiel</i>	m	v	totaal
CM	2	9	11
EM	15	27	42
NG	17	43	60
NT	35	6	41
totaal	69	85	154

De relatieve frequentie van de jongens in het profiel EM is $15 : 42 \times 100\% \approx 35,7\%$.

De relatieve frequentie van het profiel EM bij de jongens is $15 : 69 \times 100\% \approx 21,7\%$.

3.4 Statistische verbanden

23 Sander wil onderzoeken of er een statistisch verband is tussen het geslacht van een leerling en de keuze voor wiskunde A of wiskunde B.



- a Maak een kruistabel zoals hiernaast met de variabelen *geslacht* en *wisgroep*.
- b Hoeveel procent van de jongens koos voor wiskunde A?
- c Hoeveel procent van de meisjes koos voor wiskunde A?
- d Wie kozen er in verhouding vaker voor wiskunde A, jongens of meisjes?
- e Hoeveel procent van de leerlingen met wiskunde A is een jongen?

	<i>wisgroep</i>		
<i>geslacht</i>	A	B	totaal
m	...	...	...
v	...	...	...
totaal	...	...	...

Ondersteunende route → maak opdracht 024

24 a Geef van de variabelen *Profiel*, *Engels CE* en *Engels Eind* aan of ze kwalitatief of kwantitatief zijn.



- b Waarom heeft het geen zin een kruistabel te maken bij de variabelen *Profiel* en *Engels CE*?
- c Waarom is het wel zinvol een kruistabel te maken bij de variabelen *Profiel* en *Engels Eind*?
- d Hoeveel procent van de leerlingen met een onvoldoende voor Engels volgt het profiel NG?
- e Hoeveel procent van de leerlingen met profiel NG heeft een onvoldoende voor Engels?

25 Zolang de CITO-eindtoets bestaat, wordt er al over gediscussieerd. Annejet wil onderzoeken hoe sterk het statistisch verband is tussen de CITO-score van de basisschool en het gemiddelde van alle examenvakken.



- a Kun je dit verband beter onderzoeken met een puntenwolk of met een kruistabel?
- b Onderzoek de bewering: 'Een hogere citoscore gaat vaak samen met een hoger gemiddelde van alle examenvakken'. Ben je het eens met deze bewering?
- c De variabele *resultaat* geeft aan of iemand geslaagd is. Onderzoek of een hogere citoscore samenhangt met een hogere slagingskans.



Uitdagende route → maak opdracht U4

Ondersteunende opdrachten

022



In de dataset zijn gegevens van leerlingen opgenomen. Aan de leerlingen is ook gevraagd aan te geven hoeveel plezier ze hebben in wiskunde.

- Zijn de variabelen *geslacht* en *plezier* kwantitatief of kwalitatief?
- Stel je voor dat je een puntenwolk gaat maken met horizontaal het *geslacht* en verticaal het *plezier*. Welke waarden komen er dan op de horizontale as?
- Hoeveel waarden komen er op de verticale as?
- Hoeveel punten zullen er zichtbaar zijn in de puntenwolk?
- Maak bij de dataset een puntenwolk bij de variabelen *geslacht* en *plezier*. Komt dit overeen met je antwoord bij opdracht d?
- Leg uit waarom het tekenen van een puntenwolk bij twee kwalitatieve variabelen niet zinvol is.

plezier



geslacht

024

Een buurtvereniging organiseert voor leden een dag bij een outdoor centrum. Voor de eerste activiteit moet worden gekozen tussen schieten met een handboog en schieten met een kruisboog. In de tabel is een overzicht van de gemaakte keuzes weergegeven.

- Hoeveel procent van de jeugd en hoeveel procent van de volwassenen heeft gekozen voor kruisboogschieten?
- Is de populariteit van het kruisboogschieten groter bij de jeugdeden of bij de volwassen leden?
- Hoeveel procent van handboogschutters en hoeveel procent van de kruisboogschutters behoort bij de jeugd?
- Welke instructeur heeft in verhouding de meeste jeugd in zijn groep, die van het handboogschieten of die van het kruisboogschieten?

	hand-boog	kruis-boog	totaal
jeugd	3	5	8
volwassenen	11	15	26
totaal	14	20	34

Uitdagende opdrachten

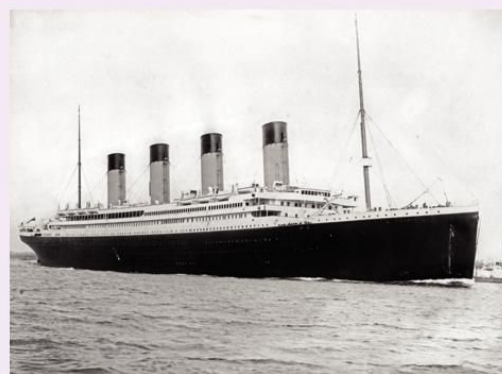
U4



De Titanic was een luxe passagiersboot die was bedoeld voor trans-Atlantisch transport. Maar al op de eerste tocht, in de nacht van 14 op 15 april 1912 kwam zij in de problemen. Waarschijnlijk is ze in aanvaring gekomen met een ijsberg en binnen drie uur is het schip gezonken. Met als triest resultaat dat 1522 van de opvarenden zijn verdronken.

In de dataset zijn van ruim 1300 passagiers gegevens opgenomen over de *klasse* van de hut (1ste, 2de of 3de), de *leeftijdscategorie* (volwassen of kind), het *geslacht* (man of vrouw) en of de ramp is overleefd.

Onderzoek welk van de variabelen het meest van invloed is geweest op de overlevingskans.



Je leert

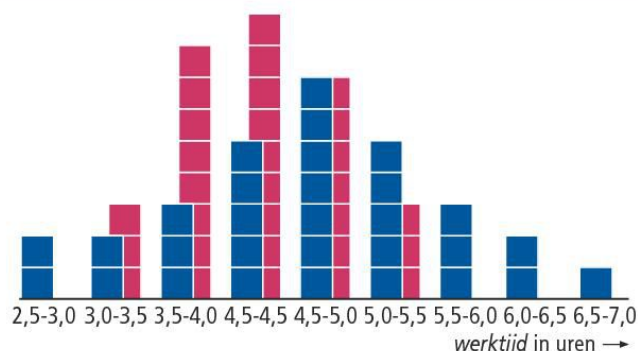
- hoe je de spreiding in een dataset in een getal uitdrukt

Leerroutes

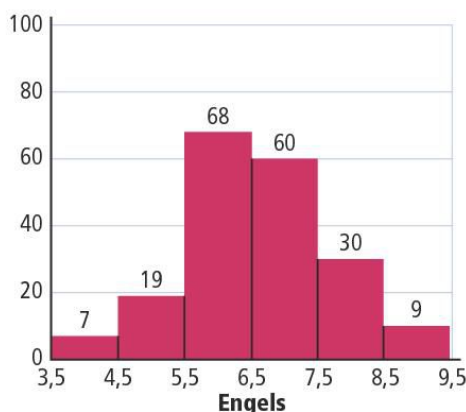
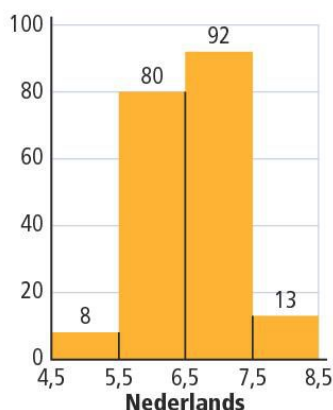
- ondersteunend: 26—27—028—29—30—31—32
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31—32
- uitdagend: 26—27—28—29—30—32—U5

Een consumentenorganisatie heeft van twee soorten laptopaccu's uit dezelfde prijsklasse onderzocht hoelang ze stroom leveren voordat ze weer opgeladen moeten worden.

- Welk type zou jij kopen?



- 26** In de staafdiagrammen zijn de eindcijfers voor Nederlands en Engels op het schoolexamen weergegeven van de leerlingen van het Agnes College.



In de tabel zie je de gegevens over de centrummaten mediaan en gemiddelde. De centrummaten zijn nagenoeg gelijk, toch is er wel een verschil tussen de resultaten van Nederlands en Engels. Beschrijf dit verschil.

	Nederlands	Engels
gemiddelde	6,53	6,54
mediaan	6,6	6,6

- 27** In de dataset zie je de resultaten van de leerlingen van het Agnes College.



- Bereken bij elk van de vakken Nederlands en Engels het verschil tussen het laagste en het hoogste SE cijfer.
- Geef het laagste cijfer van de 25% hoogste cijfers bij Nederlands.
- Geef het hoogste cijfer van de 25% laagste cijfers.
- Hoe groot is het verschil tussen de cijfers van opdracht b en c?
- Beantwoord de opdrachten b, c en d ook voor Engels.

Theorie

Met **spreadingsmaten** geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen. De eenvoudigste spreidingsmaat is de **spreadingsbreedte**, dat is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.

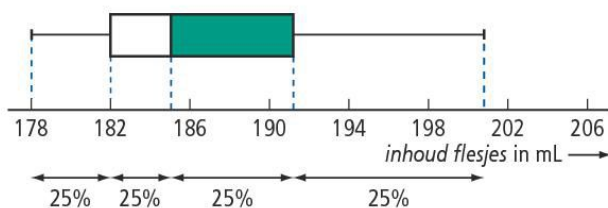
Een andere spreidingsmaat is het verschil tussen het derde kwartiel Q_3 en het eerste kwartiel Q_1 , de **kwartielafstand** of **interkwartielafstand**: $Q_3 - Q_1$.

Uit een boxplot kun je de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand gemakkelijk aflezen.

Centrumsmaten en spreidingsmaten worden **kentallen** van een verdeling genoemd.

Voorbeeld

In de boxplot is de verdeling van de inhoud van een aantal flesjes weergegeven.



De spreidingsbreedte is $201 - 178 = 23$ mL.

De interkwartielafstand is $191 - 182 = 9$ mL.

Ondersteunende route → maak opdracht 028

28



- Maak voor het vak geschiedenis in één figuur een boxplot bij de resultaten van het schoolexamen (SE) en een boxplot bij de resultaten van het centraal examen (CE).
- Vergelijk de twee boxplots. Welke overeenkomst zie je?
- Welke verschillen zie je tussen de twee boxplots?
- Bereken voor elk van de vier profielen de spreidingsbreedte en de kwartielafstand van het CE resultaat Geschiedenis.
- Waarom is bij het profiel NT de spreidingsbreedte en de kwartiel afstand 0?
- Bij welk van de profielen is de spreiding het grootst?

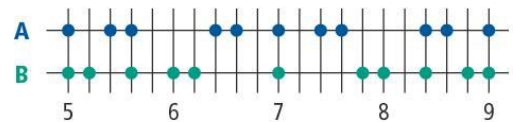
29



- Welk van de drie kernvakken heeft de grootste spreiding als je als spreidingsmaat de spreidingsbreedte neemt?
- En welk vak heeft dan de kleinste spreiding?
- Welk van de drie kernvakken heeft de grootste spreiding als je als spreidingsmaat de kwartielafstand neemt?
- En welk vak heeft dan de kleinste spreiding?

3.5 Spreidingsmaten

30 In de figuur staan door middel van stippen de resultaten weergegeven die twee leerlingen hebben gehaald op de proefwerken wiskunde in de derde klas.

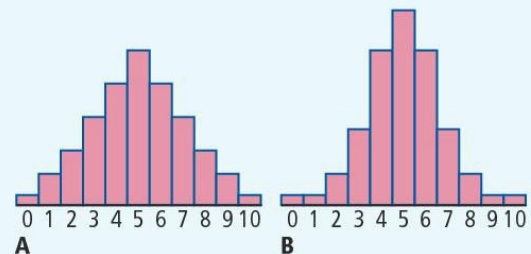


- Leg uit dat bij beide leerlingen het gemiddelde 7 is.
- Bij welke leerling vind je de spreiding het grootst?
- Bereken voor beide leerlingen de spreidingsbreedte.
- Bereken voor beide leerlingen de kwartielfstand.
- Een andere spreidingsmaat is gebaseerd op hoe ver de data van het gemiddelde liggen. Bij elk van de cijfers wordt eerst het verschil met het gemiddelde berekend, waarna dit getal wordt gekwadrateerd. In de tabel is dit voor leerling A uitgewerkt.
Bereken het gemiddelde van de getallen in de laatste kolom en bereken de wortel van dit getal.
- Waarom is het gevonden getal een maat voor de spreiding?
- Maak voor leerling B eenzelfde berekening.
- Bij welke leerling is volgens deze berekeningen de spreiding het grootst? Komt dit overeen met je antwoord op opdracht b?

cijfer x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
5,0	-2,0	4,00
5,4	-1,6	2,56
5,6	-1,4	1,96
6,4	-0,6	0,36
6,6	-0,4	0,16
7,0	0,0	0,00
7,4	0,4	0,16
7,6	0,6	0,36
8,4	1,4	1,96
8,6	1,6	2,56
9,0	2,0	4,00

Theorie

Het berekende getal bij opdracht 30e heet de **standaardafwijking** of **standaarddeviatie**. Dit is een veel gebruikte spreidingsmaat die iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde. De korte notatie is **SD** of σ . In figuur B liggen de waarnemingsgetallen gemiddeld dichter bij het gemiddelde dan in figuur A. In figuur B is de standaardafwijking dus kleiner dan in figuur A.



- 31**
- Welk van de drie kernvakken heeft de grootste spreiding als je als spreidingsmaat de standaardafwijking neemt?
 - En welk vak heeft de kleinste spreiding?
 - Vergelijk je antwoorden met je antwoorden bij opdracht 29. Welke spreidingsmaat geeft volgens jou het beste het verschil in spreiding bij de kernvakken weer?

- 32**
- Geef bij de vakken Nederlands en Engels de standaarddeviatie bij het SE en het CE. Zet de resultaten overzichtelijk in een tabel zoals hiernaast.
 - Geef een verklaring waarom bij beide vakken de standaarddeviatie bij het CE groter is dan bij het SE.
 - Controleer of dit ook het geval is bij het vak geschiedenis.

σ	SE	CE
Nederlands	...	...
Engels	...	...

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten



028



- a Teken voor het vak geschiedenis in één figuur een boxplot bij de resultaten van het SE en een boxplot bij de resultaten van het CE.
- b Welke overeenkomst tussen de cijfers van het SE en het CE bij het vak geschiedenis kun je uit de boxplots aflezen?
- c Waarin verschillen de twee boxplots?
- d Geef het laagste en het hoogste CE resultaat bij geschiedenis.
- e De spreidingsbreedte is het verschil tussen de hoogste en de laagste waarde van een variabele. Bereken de spreidingsbreedte van het CE resultaat bij geschiedenis.
- f Bereken het eerste en het derde kwartiel bij de CE resultaten bij geschiedenis.
- g De kwartielfstand is het verschil tussen het derde en het eerste kwartiel van een variabele. Bereken de kwartielfstand van het CE resultaat bij geschiedenis.
- h Splits de groep op de variabele *profiel* en bereken voor elk profiel de spreidingsbreedte en de kwartielfstand van het CE resultaat geschiedenis.
- i Waarom is bij het profiel NT de spreidingsbreedte en de kwartiel afstand 0?
- j Bij welk van de profielen is de spreiding het grootst?

Uitdagende opdrachten

U5



De dataset bevat gegevens van studenten die zijn afgestudeerd aan een hbo-instelling. De variabele *Studieduur* geeft in maanden nauwkeurig de tijd die de student nodig heeft gehad om zijn studie af te ronden. Onderzoek of er verschil in studieduur bestaat tussen verschillende groepen studenten.

3.6 Cumulatieve frequenties

Je leert

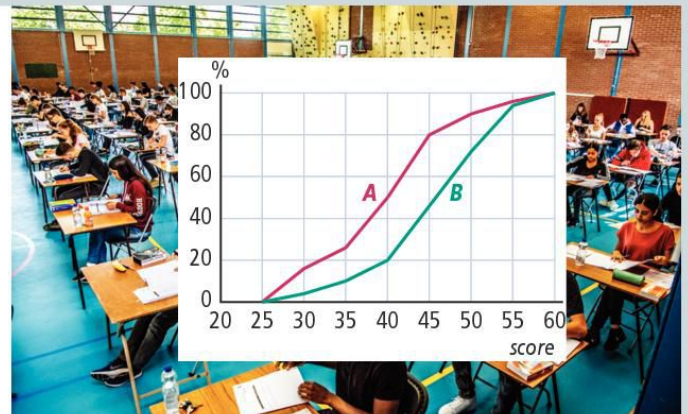
- hoe je frequentiepolygonen en cumulatieve frequentiepolygonen tekent en gebruikt

Leerroutes

- ondersteunend: 33—034—35—36—37—38
- doorlopend: 33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 33—34—35—36—38—U6

In een onderwijsexperiment hebben twee groepen studenten zich op twee verschillende manieren voorbereid op hetzelfde tentamen. In de figuur staat bij elke score s het percentage deelnemers dat hoogstens s punten heeft gescoord. Zo lees je bijvoorbeeld af dat 20% van groep B minder dan 40 punten heeft gescoord.

- Welke groep heeft het tentamen beter gemaakt?



33 In de tabel zie je van 85 meisjes de lengtes ingedeeld in klassen.

lengte	$[155, 160)$	$[160, 165)$	$[165, 170)$	$[170, 175)$	$[175, 180)$	$[180, 185)$	$[185, 190)$	$[190, 195)$	$[195, 200)$
frequentie	6	12	34	16	10	5	1	0	1

- Geef het klassenmidden van de klasse met de kleinste meisjes.
- Maak een lijndiagram bij deze klassenindeling. Zet de frequenties boven de klassenmiddens.
- Laat zien dat er 52 meisjes kleiner zijn dan 170 cm.
- Hoeveel meisjes zijn kleiner dan 175 cm?
- Wat betekent het getal 18 in de tabel hieronder?

lengte	< 160	< 165	< 170	< 175	< 180	< 185	< 190	< 195	< 200
frequentie	6	18	52	...	...	...	...	...	...

- Vul de tabel verder in.
- Maak een grafiek bij de tabel van opdracht f.

Theorie

In een **frequentiepolygoon** is langs de verticale as de frequentie, absoluut of relatief, uitgezet. Bij een indeling in klassen zet je de frequenties uit boven de klassenmiddens.

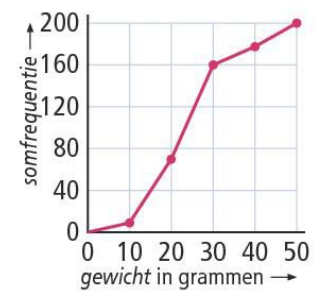
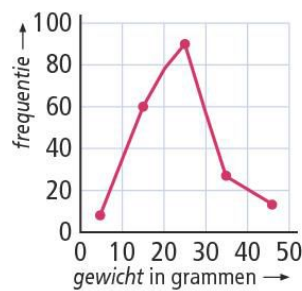
De **somfrequentie** of **cumulatieve frequentie** van een waarnemingsgetal is het totaal van alle frequenties vanaf het kleinste waarnemingsgetal.

De grafiek van de cumulatieve frequenties heet een **somfrequentiepolygoon** of **cumulatieve frequentiepolygoon**. Bij een indeling in klassen zet je de somfrequenties uit boven de rechter klassengrenzen.

Voorbeeld

Teken bij de tabel een frequentiepolygoon en een somfrequentiepolygoon.

gewicht in grammen	frequentie	somfrequentie
[0, 10>	10	10
[10, 20>	60	70
[20, 30>	90	160
[30, 40>	25	185
[40, 50>	15	200

Oplossing**Ondersteunende route → maak opdracht 034**

- 34** Waxinelichtjes zijn kleine kaarsjes, vroeger veel gebruikt in theelichtjes, tegenwoordig meer voor de gezelligheid. Maar niet alle waxinelichtjes zijn van dezelfde kwaliteit. In een onderzoek is onder andere gekeken naar de brandduur van de waxinelichtjes. In de tabel staan de gemeten waarden van twee van de onderzochte merken.

- Om de twee merken te vergelijken is het beter om te werken met relatieve frequenties. Leg dat uit.
- Waarom zet je bij een cumulatieve frequentiepolygoon de frequenties boven de rechter klassengrenzen?
- Teken in één figuur de relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.
- Omschrijf de verschillen in brandduur tussen de twee merken, waarbij je kijkt naar de mediaan en de spreiding.

brandduur in uren	merk A	merk B
[3.30; 3.45>	3	1
[3.45; 4.00>	7	2
[4.00; 4.15>	11	9
[4.15; 4.30>	9	19
[4.30; 4.45>	4	28
[4.45; 5.00>	3	8
[5.00; 5.15>	2	2
[5.15; 5.30>	1	1

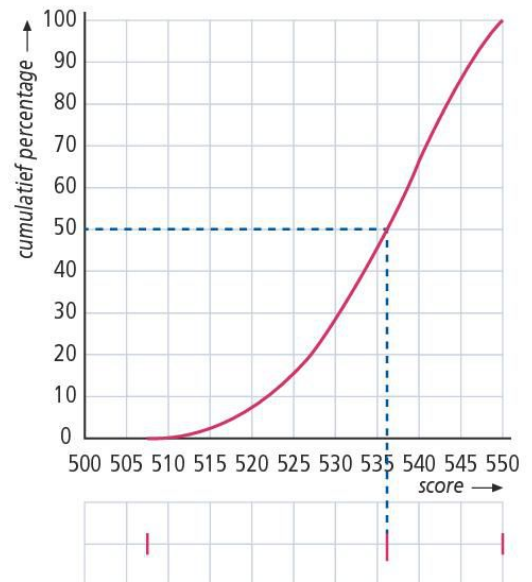
- 35** a Teken in één figuur twee relatieve somfrequentiepolygoon voor de jongens en voor de meisjes bij de variabele



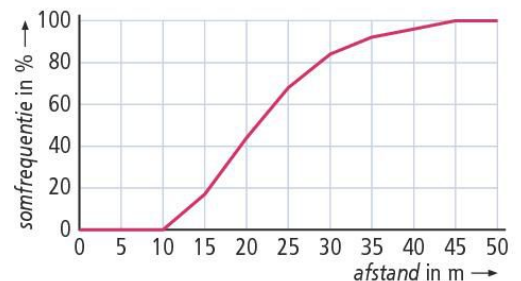
- Kies een geschikte klassenbreedte.
- Lees zo goed mogelijk uit de grafiek af hoe zwaar de 25% lichtste jongens en hoe zwaar de 25% lichtste meisjes maximaal zijn.
- Lees uit de grafieken ook de medianen en de derde kwartielen af.
- Maak boxplots en lees daaruit de medianen en de kwartielen af.
- Leg uit waarom de antwoorden bij opdracht d niet overeenkomen met de antwoorden bij de opdrachten b en c.

3.6 Cumulatieve frequenties

- 36**  Elk jaar maken op veel basisscholen de leerlingen van groep 8 de 'Cito-toets'. De scores van de toets zijn gehele getallen vanaf 500 tot 550. In de relatieve somfrequentiepolygoon zie je de resultaten van 2012. Er deden toen 147 099 leerlingen mee aan deze toets.
- Hoeveel procent van de leerlingen heeft een score van meer dan 545?
 - Hoeveel leerlingen hadden een score tussen 520 en 540?
 - Geef de mediaan van de behaalde scores.
 - Welke score hadden de 25% laagst scorende leerlingen maximaal?
 - En welke score hadden de 25% hoogst scorende leerlingen minimaal?
 - Hiernaast zie je hoe de minimale score, de maximale score en de mediaan worden weergegeven onder de relatieve somfrequentiepolygoon. Teken op dezelfde manier de scores van opdracht d en e onder de relatieve somfrequentiepolygoon en maak de boxplot af.



- 37** De grafiek is een relatieve somfrequentiepolygoon van de resultaten van het vergooien bij een sportdag van groep 8.
- Hoe kun je aan de grafiek zien dat de resultaten in klassen zijn ingedeeld?
 - Welke klasse is de modale klasse? Hoe zie je dat in de grafiek?
 - Teken een boxplot bij de grafiek.



- 38**  a Maak in één figuur de relatieve somfrequentiepolygoon voor de jongens en de meisjes bij de variabele *vergooien*. Kies een geschikte klassenbreedte.
- Hoe zie je aan de relatieve somfrequentiepolygoon dat de jongens doorgaans verder gooien dan de meisjes?
 - Schat hoeveel procent van de jongens verder gooide dan de beste worp bij de meisjes.
 - Maak in één figuur de relatieve somfrequentiepolygoon voor de jongens en de meisjes bij de variabele *sprint*.
 - Waarin verschilt deze figuur als je deze vergelijkt met de figuur bij opdracht a?

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten**034**

In een onderzoek naar de opbrengst van aardappelen is voor twee aardappellassen de oogst van enkele planten gewogen.

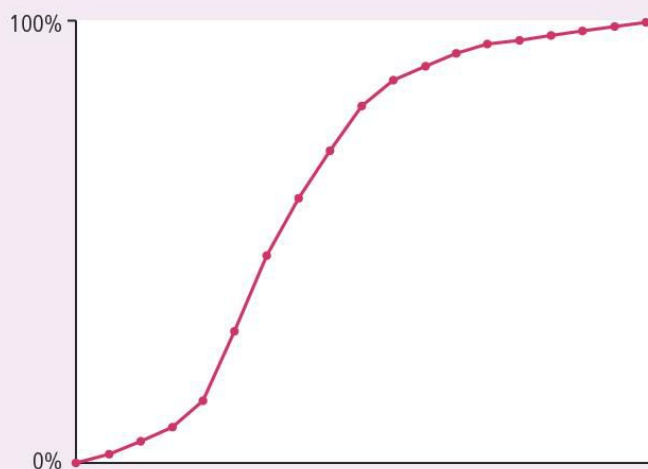
- Maak een tabel met voor elk ras de cumulatieve frequenties.
- Waarom kun je de twee rassen beter vergelijken met relatieve frequenties?
- Maak een tabel met voor elk ras de relatieve cumulatieve frequenties.
- Waarom zet je bij een cumulatieve frequentiepolygoon de frequenties bij de rechter klassengrens?
- Teken in één figuur de twee relatieve cumulatieve frequentiepolygoon.
- Neem aan dat de resultaten uit deze test gelden voor alle planten van deze rassen.
Lees uit de figuur af bij welk ras de mediaan van de opbrengst het grootst is.
- Lees uit de figuur af of de kwartielfstanden veel van elkaar verschillen.

<i>gewicht in grammen</i>	Doré	Gloria
[500, 550>	3	1
[550, 600>	6	5
[600, 650>	14	11
[650, 700>	22	23
[700, 750>	16	39
[750, 800>	5	10
[800, 850>	4	2
[850, 900>	3	1

Uitdagende opdrachten**U6**

In de figuur is een relatieve somfrequentiepolygoon getekend.

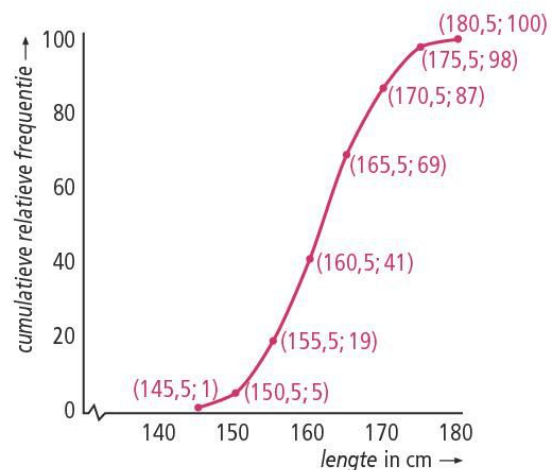
Onderzoek welke centrummaat groter is, de mediaan of het gemiddelde.



3.7 Gemengde opdrachten

- 39** Bij een onderzoek onder 13-jarigen werd van 400 meisjes de lengte gemeten. In de relatieve somfrequentiepolygoon staan de resultaten weergegeven.

- Bij een van de punten staat genoteerd $(165,5; 69)$. Welke betekenis hebben deze getallen?
- Welke klassenindeling is gebruikt?
- Bereken hoeveel meisjes een lengte hadden van minstens 150,5 cm en minder dan 155,5 cm.
- Hoeveel meisjes waren langer dan 170,5 cm?
- Geef de modale klasse.
- Teken een boxplot bij de grafiek.



- 40** Op de sportdag zijn de leerlingen verdeeld in drie groepen.

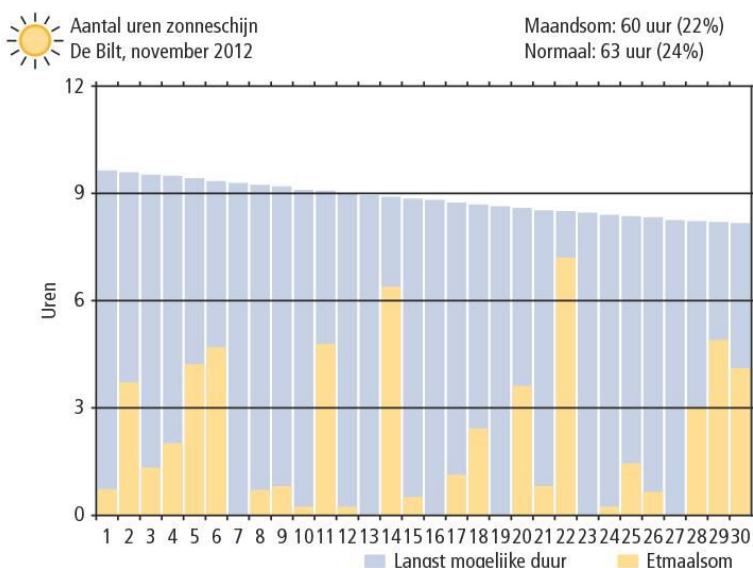
- Met welke centrummaten kun je laten zien dat groep 1 het slechtst presteerde bij hardlopen?
- Eén van de leerlingen in groep 1 liep aanzienlijk langzamer dan de anderen.
Presteerde groep 1 ook slechter dan de twee andere groepen als je deze leerling weglaat?
- Vergelijk de centrummaten van de drie groepen bij het onderdeel speerwerpen.
- Welke conclusie kun je trekken uit de centrummaten voor dit onderdeel?
- Met welke getallen kun je aangeven dat de prestaties van groep 2 en groep 3 wel verschilden op het onderdeel speerwerpen?
- Laat met behulp van grafieken zien hoe de prestaties van de drie groepen verschillen.

- 41** Twee merken koffie worden verkocht in pakken waarop staat: 'Inhoud 250 gram'.

Van elk merk wordt de inhoud van 80 pakken gewogen.

- Bereken voor elk van de merken de spreidingsbreedte en de standaarddeviatie van het gewicht.
- Maak in één figuur de boxplots bij de gewichten van merk A en bij merk B.
- De verdeling van de gewichten voor de twee merken verschillen van elkaar.
Welke van de spreidingsmaten geeft het verschil niet goed weer: de spreidingsbreedte, de interkwartielafstand of de standaarddeviatie?
- Maak in één figuur voor elk merk een somfrequentiepolygoon.
- Hoe kun je in de somfrequentiepolygoon zien dat de spreiding van de gewichten van merk B groter is dan die van merk A?





- 42** In het diagram staat voor elke dag in november 2012 het aantal uren zonneshijjn in De Bilt. Ook staat aangegeven hoeveel uur de zon had kunnen schijnen. Onderzoek of de rechtsboven vermelde aantal uren en percentages uit de figuur zijn af te leiden.

- 43** In een geheugenexperimentje kregen leerlingen aan het begin van de les elk één van de gekleurde kaartjes met de tekst naar beneden op tafel.



Het experiment ging als volgt. Na de uitleg mochten de kaartjes worden omgedraaid. Gedurende één minuut mochten de leerlingen, zonder bij de burens te kijken, de woorden bestuderen, waarna het kaartje weer op de kop op tafel moest worden gelegd. Daarna ging de les gewoon verder.

Na ongeveer een halfuur werd gevraagd op de achterkant alle onthouden woorden op te schrijven.

De onderzoeker veronderstelde:

hoe gestructureerde de woorden worden aangeboden, hoe beter ze worden onthouden en ook:

hoe bekender de woorden, hoe beter ze worden onthouden.

Onderzoek in hoeverre de veronderstellingen van de onderzoeker worden bevestigd door de verzamelde data.

conducteur, citroen
advocaat, crank, beer,
appel, alkoof, duif,
bakker, druif, banaan,
biest, cheeta, drukker,
aap, deuvel

aap, alkoof, advocaat,
appel, biest, bakker,
banaan, beer, cheeta,
citroen, conducteur,
crank, druif, drukker,
duif, deuvel

aap, appel, advocaat
beer, bakker, cheeta,
alkoof, banaan,
conductuer, biest
druif, crank, citroen,
deuvel, druif, drukker

advocaat	appel
bakker	banaan
conducteur	citroen
drukker	druif
aap	alkoof
beer	biest
cheeta	crank
duif	deuvel

Samenvatting

Theorie

Statistiek, data, dataset, statistisch onderzoek, populatie, statistische variabelen, statistische uitspraken

Statistiek is de naam van het vakgebied dat zich bezighoudt met het verzamelen, ordenen, samenvatten en analyseren van gegevens. Deze gegevens worden data genoemd en de verzamelde data vormen een dataset. De doelgroep van een statistisch onderzoek heet de populatie. Je gaat na op welke statistische variabelen het onderzoek betrekking heeft en je verzamelt data bij die variabelen. Uitspraken gedaan naar aanleiding van een statistisch onderzoek worden statistische uitspraken genoemd.

- S1** In een onderzoek naar de hoeveelheid beweging bij jongeren tussen 12 en 18 jaar zijn van 1387 respondenten data verzameld. In de tabel staat het begin van de dataset.

<i>naam</i>	<i>leeftijd</i>	<i>vervoermiddel</i>	<i>reisafstand</i>	<i>reistijd</i>	<i>sport</i>	<i>sporttijd</i>
Jasper	17	scooter	13,4	21	geen	0
Sofie	15	fiets	9,5	32	korfbal	210
Cor	16	bus	27	45	voetbal	300

- Wat is in dit onderzoek de populatie?
- Noteer de statistische variabelen bij dit onderzoek.
- Noem nog enkele statistische variabelen die zinvol in dit onderzoek meegenomen hadden kunnen worden.
- Formuleer een mogelijke statistische uitspraak naar aanleiding van dit onderzoek.

Theorie

Kwantitatieve en kwalitatieve variabelen

Statistische variabelen kun je verdelen in kwantitatieve en kwalitatieve variabelen. De waarde van een kwantitatieve variabele is een getal; de 'waarde' van een kwalitatieve variabele geeft een kenmerk weer.

Voorbeeld

De variabele *oppervlakte* die aangeeft hoeveel m² woonruimte een woning heeft, is kwantitatief.
De variabele *type* die aangeeft wat voor soort woning het betreft (vrijstaand, appartement, studio, ...), is kwalitatief.

- S2** Noteer bij elke statistische variabele uit het onderzoek bij opdracht S1 of deze kwantitatief of kwalitatief is.

Vaardigheid**Je kunt data op verschillende manieren weergeven.**

Je kunt data weergeven met bijvoorbeeld een frequentietabel, een staafdiagram, een frequentiepolygoon, een cirkeldiagram of een boxplot. Je kunt kiezen tussen absolute of relatieve frequenties.

Met een lijndiagram geef je het verloop in de tijd weer.

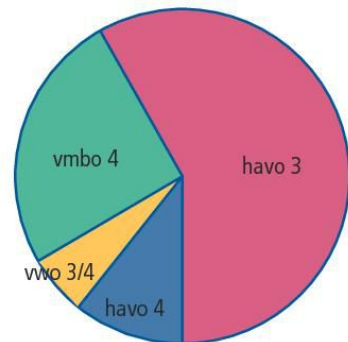
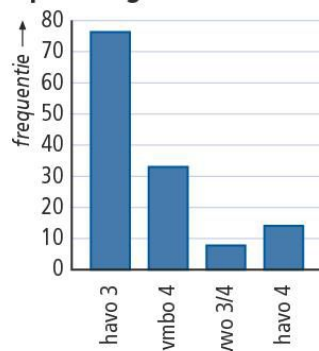
Als je deelgroepen afzonderlijk wilt bekijken, dan splits je de dataset op de bijbehorende variabele.

Voorbeeld

De frequentietabel geeft de verdeling van de leerlingen van havo 4.

<i>vorig jaar</i>	<i>aantal</i>
havo 3	76
vmbo 4	33
vwo 3/4	8
havo 4	14

Teken een staafdiagram en een cirkeldiagram bij deze frequentietabel.

Oplossing

S3 In de dataset staan gegevens van 195 leerlingen.



- Maak een staafdiagram bij de variabele *leeftijd*.
- Maak een cirkeldiagram bij de variabele *vervoermiddel*.
- Maak voor de jongens en de meisjes afzonderlijke boxplots bij de variabele *leeftijd*.

Vaardigheid**Je kunt werken met een klassenindeling.**

Als een variabele veel verschillende waarden kan hebben, dan worden de data vaak ingedeeld in klassen.

Met de intervalnotatie leg je de grenzen van een klasse vast.

De klassenbreedte is de afstand tussen de grenzen van de klassen. Het klassenmidden ligt precies halverwege de linker grens en de rechter grens.

Voorbeeld

<i>lengte in cm</i>	<i>aantal</i>
[20, 25)	56
[25, 30)	78
[30, 35)	63
[35, 40)	42

De klassenbreedte is 5 cm.

De eerste klasse bevat alle meetwaarden die minstens 20 cm zijn, maar kleiner dan 25 cm. Het klassenmidden van deze klasse is 22,5 cm.

- S4** In een zuivelfabriek staan twee vulmachines waarmee literpakken yoghurt worden gevuld. Uit de productie van elk van de twee machines worden willekeurig honderd gevulde pakken genomen. De gemeten volumes zijn in mL.
- Maak met een geschikte klassenbreedte een staafdiagram bij de variabele *inhoud*.
 - Geef het klassenmidden van de klasse met de kleinste inhouden bij deze verdeling.

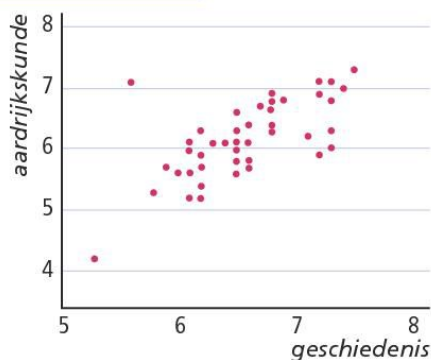
Vaardigheid

Je kunt onderzoeken of er een statistisch verband bestaat tussen variabelen.

Met een puntenwolk of een spreidingsdiagram onderzoek je of er een statistisch verband bestaat tussen twee kwantitatieve variabelen. Elk punt in een puntenwolk hoort bij een element uit de dataset.

De samenhang tussen twee kwalitatieve variabelen onderzoek je met een kruistabel. Daarbij is het vaak nodig om de aantallen om te rekenen naar relatieve frequenties.

Voorbeeld 1



In de puntenwolk zie je dat er een statistisch verband is tussen de cijfers van aardrijkskunde en geschiedenis.

Voorbeeld 2

profiel	vervoermiddel		
	fiets	scooter	bus
CM	9	3	4
EM	28	11	10
NG	37	13	11
NT	21	9	7

In de kruistabel zie je dat van de 95 leerlingen die met de fiets naar school komen er 28 een EM profiel volgen. Dat is $28 : 95 \times 100\% \approx 29,5\%$.

- S5** Bereken relatieve frequenties bij de tabel van voorbeeld 2, zodat je kunt zien in welk profiel naar verhouding de meeste leerlingen met de bus naar school komen.

- S6** Een socioloog veronderstelt dat de hoge plaats op de ranglijst komt door het hoge gemiddelde inkomen in Nederland. Onderzoek of er een verband is tussen de gemiddelde tevredenheid in een land en het gemiddelde maandinkomen.

Nederlanders geven het leven een 7,8 en staan daarmee op plaats 5 in Europa.

Bron CBS, 06-11-2015

Vaardigheid

Je kunt de spreiding in een dataset uitdrukken in een getal.

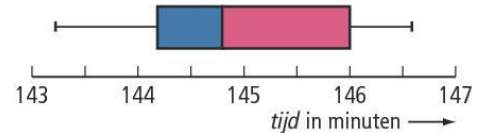
Met spreidingsmaten geef je aan hoe ver gegevens van elkaar af liggen.

De spreidingsbreedte is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.

De kwartielfafstand of interkwartielfafstand is het verschil tussen het eerste kwartiel en het derde kwartiel:

$$Q_3 - Q_1.$$

De standaardafwijking of standaarddeviatie is een spreidingsmaat die iets zegt over de spreiding rond het gemiddelde.

Voorbeeld

De spreidingsbreedte is
 $146,6 - 143,2 = 3,4$ minuten.

De interkwartielfafstand is
 $146,0 - 144,2 = 1,8$ minuten.

S7 De dataset bevat de meetgegevens van 200 pakken yoghurt die gevuld zijn door twee verschillende vulmachines.



- Bereken bij elke machine de spreidingsbreedte, de kwartielfafstand en de standaardafwijking van de variabele *inhoud*.
- Maak een boxplot bij de variabele *inhoud* en splits op machine.
- Beschrijf de verschillen tussen de producties van de twee machines.

Vaardigheid

Je kunt frequentiepolygonen en cumulatieve frequentiepolygonen tekenen en gebruiken.

In een frequentiepolygoon is langs de verticale as de frequentie, absoluut of relatief, uitgezet. Bij een indeling in klassen zet je de frequenties uit boven de klassenmiddens.

De somfrequentie of cumulatieve frequentie van een waarnemingsgetal is het totaal van alle frequenties vanaf het kleinste waarnemingsgetal.

De grafiek van de cumulatieve frequenties heet een somfrequentiepolygoon of cumulatieve frequentiepolygoon.

Bij een indeling in klassen zet je de somfrequenties uit boven de rechter klassengrenzen.

Voorbeeld

gewicht in grammen	frequentie in %	som freq. in %
[0, 10>	5	5
[10, 20>	30	35
[20, 30>	45	80
[30, 40>	12,5	92,5
[40, 50>	7,5	100

S8 Teken een relatieve somfrequentiepolygoon bij de tabel.

wachttijd in seconden	[0, 20>	[20, 40>	[40, 60>	[60, 80>	[80, 100>	[100, 120>
frequentie in procenten	29	48	8	5	2	8

T1

In een statistisch onderzoek naar huwelijken tussen mannen en vrouwen is onder andere onderzoek gedaan naar de leeftijd waarop mensen trouwen en het verschil in leeftijd tussen man en vrouw.

- Wat is de populatie in dit onderzoek?
- Van welke statistische variabelen zijn de waarden in de dataset opgenomen?
- Geef bij elke statistische variabele in deze dataset aan of hij kwantitatief of kwalitatief is.
- Welke waarden neemt de variabele *huwlf_t_mn* aan?
- Geef de grenzen van de modale klasse als de waarden van de variabele *huwlf_t_mn* worden ingedeeld in klassen met klassenbreedte 3 en beginwaarde 16.
- Bij hoeveel echtparen is de man jonger dan de vrouw?

T2

Deze opdracht gaat over dezelfde dataset als opdracht T1.

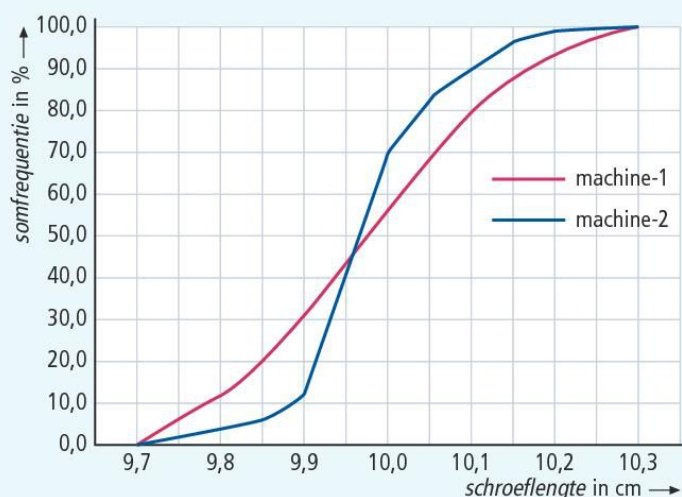
- Bewering: van de mannen in dit onderzoek is minstens 75% langer dan de 75% kleinste vrouwen.
Ga na of deze bewering klopt. Beschrijf duidelijk je werkwijze.
- De spreiding van de lengten van de mannen en van de vrouwen is niet gelijk.
Ga na of de drie spreidingsmaten, spreidingsbreedte, kwartielf afstand en standaarddeviatie, het zelfde geslacht aanwijzen als de groep met de grootste spreiding.
- Bereken de gemiddelden van de variabelen *lengte_mn*, *lengte_vr* en *Vershil_lengte_man_en_vrouw*.
- Verklaar waarom het verschil van de gemiddelden van de variabelen *lengte_mn*, en *lengte_vr* gelijk is aan het gemiddelde van de variabele *Vershil_lengte_man_en_vrouw*.
- Onderzoek welk verband sterker is, het verband tussen de lengtes of het verband tussen de leeftijden van de huwelijkspartners.

**T3**

In de dataset zijn gegevens opgenomen over de resultaten van een sportdag. Foppe wil onderzoeken of er verband bestaat tussen de leeftijd van een deelnemer en het resultaat bij het verspringen.

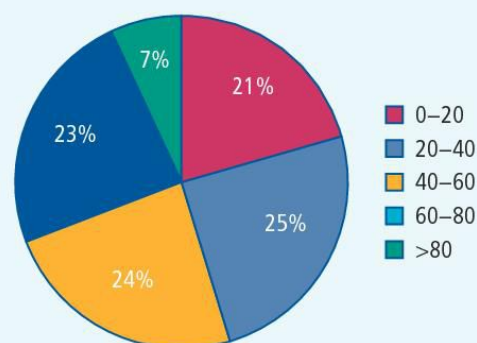
- De variabelen *Leeftijd* en *Verspringen* zijn beide kwantitatief.
Leg uit waarom het toch niet handig is het verband te onderzoeken met een puntenwolk.
- Bereken hoeveel procent van de 12-jarigen tussen de 300 cm en 350 cm sprong.
- Bereken hoeveel procent van de leerlingen die tussen de 300 cm en 350 cm sprong 12 jaar oud was.





- T4** In een fabriek worden schroeven gemaakt. De schroeven moeten een lengte krijgen van 10,0 cm. De schroeven worden door twee machines gemaakt, die niet even nauwkeurig zijn. In de relatieve somfrequentiepolygonen zie je gegevens over de lengte van de door beide machines geproduceerde schroeven.
- Teken bij beide machines een boxplot.
 - Beschrijf het verschil tussen de productie van de schroeven bij machine 1 en die bij machine 2.
 - Schroeven die korter zijn dan 9,9 cm of langer dan 10,1 cm worden afgekeurd.
Welke machine zal dus de voorkeur hebben?

- T5** In het cirkeldiagram zie je een prognose van de leeftijdsverdeling van de Nederlandse bevolking in 2030. Volgens deze prognose heeft Nederland dan in totaal 17,5 miljoen inwoners.
- Welke klasse is de modale klasse?
 - In welke klasse ligt de mediaan?
 - Teken een staafdiagram met de absolute aantallen inwoners per leeftijdsgroep.
 - Teken een relatieve somfrequentiepolygoon bij deze gegevens.



- E1**  **Je kunt data op verschillende manieren weergeven.**
 De dataset bevat gegevens over het weer in Nederland gedurende de periode 1980-2014. De variabele *jaargemiddelde* geeft de gemiddelde temperatuur over een heel kalenderjaar.
 a Maak een grafiek waarin je het verloop van de gemiddelde jaartemperatuur weergeeft.
 b Maak een boxplot bij de gemiddelde jaartemperaturen.

- E2**  **Je kunt werken met een klassenindeling.**
 a Maak een staafdiagram bij de variabele *jaargemiddelde*.
 b Bij welke klassenbreedte krijg je de verdeling van de gemiddelde jaartemperaturen goed in beeld?
 c Waarom is het niet noodzakelijk om de waarden van de variabele *tropischeDagen* in klassen in te delen als je een staafdiagram gaat maken?
 d Hoeveel jaren in de periode 1980-2014 hadden geen enkele tropische dag?

- E3**  **Je kunt onderzoeken of er een statistisch verband bestaat tussen variabelen.**
 In de dataset zijn voor een aantal jaren het aantal uren zon en het aantal dagen zonder zon opgenomen.
 a Welk statistisch verband verwacht je tussen deze variabelen? Licht je antwoord toe.
 b Maak een puntenwolk bij de variabelen *zonneUuren* en *zonlozeDagen*.
 c Ondersteunt de puntenwolk je verwachting bij opdracht a?

- E4** Ieder jaar doen naar schatting 1 miljoen Nederlanders een poging om te stoppen met roken. Maar niet iedereen houdt het ook vol. In een onderzoek is gekeken naar het effect van het gebruik van hulpmiddelen (o.a. nicotinepleisters) en van persoonlijke begeleiding (o.a. telefonische ondersteuning). De kruistabel laat zien hoeveel mensen 12 maanden na het begin van de stoppoging niet meer hebben gerookt. Ga na welke methode het meest positieve effect heeft op de kans van slagen.

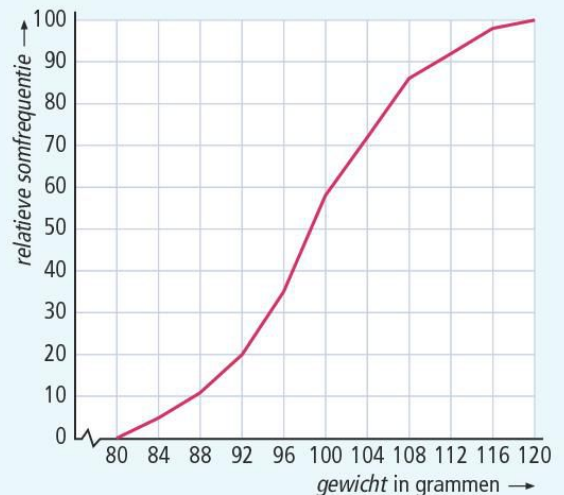
	na 12 maanden rookvrij	
	ja	nee
hulpmiddelen	27	357
begeleiding	12	129

- E5**  **Je kunt de spreiding in een dataset uitdrukken in een getal.**
 De gemiddelde jaartemperatuur vertoont behoorlijke schommelingen.
 Bereken de drie spreidingsmaten bij de variabele *jaargemiddelde*.

Je kunt frequentiepolygonen en cumulatieve frequentiepolygonen tekenen en gebruiken.

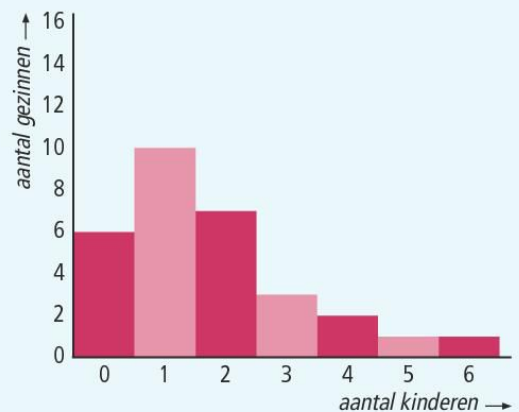
E6 Een boer heeft onderzoek gedaan naar het gewicht van de appels uit zijn boomgaard. Hij heeft daarbij 350 appels gewogen en de resultaten verwerkt in de grafiek.

- Hoe kun je zien dat het een relatieve somfrequentiepolygoon is?
- In welke klassen zijn de data verdeeld?
- Welke klasse is de modale klasse?
- Lees uit de grafiek de waarde van de mediaan af.
- Teken een boxplot bij de gewichten van de appels.
- Hoe groot is de spreidingsbreedte? En hoe groot is de interkwartielafstand?



E7 In een straat is van alle gezinnen het aantal kinderen geteld. De resultaten daarvan zie je in het staafdiagram. In het staafdiagram kun je bijvoorbeeld aflezen dat er tien gezinnen zijn met één kind.

- Hoeveel gezinnen wonen er in de straat?
- Bereken het gemiddelde aantal kinderen per gezin in twee decimalen nauwkeurig.
- Neem aan dat de gezinnen een goede afspiegeling zijn van het gehele dorp. In het dorp wonen 890 gezinnen. Hoeveel kinderen wonen er naar schatting in dat dorp?

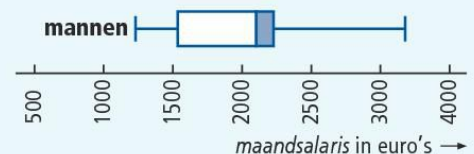


E8 Bij Negan, een kantoormeubelenbedrijf, werken buiten de directie nog 125 werknemers: 75 vrouwen en 50 mannen. In het financieel jaarverslag van 2012 is een overzicht van de betaalde salarissen opgenomen.

De verdeling van de salarissen staat in de tabel.

- Leg uit, zonder berekening, of het gemiddelde salaris bij de vrouwen hoger of lager is dan bij de mannen.
- Teken een relatieve somfrequentiepolygoon van de salarissen van de vrouwen.
- Onder de tabel is een boxplot getekend van de verdeling van de salarissen bij de mannen. Teken met behulp van de relatieve somfrequentiepolygoon van opdracht b een boxplot van de verdeling van de salarissen bij de vrouwen.
- Iemand beweert dat je uit de boxplots het volgende kunt concluderen: 'Ongeveer twee maal zoveel mannen als vrouwen verdienen meer dan € 2.100,- per maand.' Ben je het hiermee eens? Licht je antwoord toe.

salaris-groep	maandsalaris in euro's	aantal ♀	aantal ♂
1	[800, 1000)	2	0
2	[1000, 1200)	6	0
3	[1200, 1400)	10	1
4	[1400, 1600)	5	4
5	[1600, 1800)	13	9
6	[1800, 2000)	10	10
7	[2000, 2200)	12	9
8	[2200, 2400)	9	7
9	[2400, 2600)	5	5
10	[2600, 2800)	3	3
11	[2800, 3000)	0	1
12	[3000, 3200)	0	1



Machtsfuncties

4

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je geleerd te werken met machten waarvan de exponent een positief geheel getal is, zoals x^2 en x^3 . Ook heb je geleerd wat de wortel van een getal is en wat hogere machtswortels als $\sqrt[3]{8}$ en $\sqrt[4]{81}$ zijn.

In dit hoofdstuk leer je wat de betekenis is van een macht waarvan de exponent een negatief getal of een gebroken getal is, zoals x^{-1} , x^{-3} of $x^{\frac{1}{2}}$.

Bij het herleiden van formules met machten gebruik je de rekenregels voor machten.

Het werken met machten en het oplossen van vergelijkingen met machten is een regelmatig terugkerende vaardigheid in hoofdstukken waarin gewerkt wordt met functies.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 17
- *Formules manipuleren* opdracht 35
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 33



V1 a Er geldt dat $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ en $2^2 = 2 \cdot 2$.

Leg hiermee uit dat $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$.

b Leg uit dat $a^4 \cdot a^3 = a^7$.

c Vul in: $x^3 \cdot \dots = x^9$.

d Leg uit dat $(2^3)^4 = 2^{12}$.

e Vul in: $(x^2)^{\dots} = x^{10}$.

f Er geldt $(2x^3)^4 = 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3 \cdot 2x^3$.

Leg hiermee uit dat $(2x^3)^4 = 16x^{12}$.

g Vul in: $(3x^4)^2 = \dots x^{\dots}$.

Theorie

Bij het rekenen met machten gelden de volgende **rekenregels**.

- $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$
- $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$
- $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$
- $\left(\frac{p}{q}\right)^a = \frac{p^a}{q^a}$

Voorbeeld 1

Vereenvoudig

$$a^7 \cdot a^3$$

$$(p^3)^6 \cdot p^2$$

$$\frac{10x^8}{5x^4}$$

$$(3 \cdot b^4)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^3$$

Oplossing

$$a^7 \cdot a^3 = a^{7+3} = a^{10}$$

$$(p^3)^6 \cdot p^2 = p^{3 \cdot 6} \cdot p^2 =$$

$$p^{18} \cdot p^2 = p^{20}$$

$$\frac{10x^8}{5x^4} = 2x^{8-4} = 2x^4$$

$$(3 \cdot b^4)^2 = 3^2 \cdot (b^4)^2 = 9b^8$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{b^3}{2^3} = \frac{1 \cdot b^3}{8} = \frac{1}{8} b^3$$

V2 Schrijf de rechterkant van de formules als één macht.

a $K = 5^3 \cdot 5^4$

d $P = (q^2)^5 \cdot q^2$

b $b = (7^4)^2$

e $r = a \cdot (a^2)^4$

c $N = 3^4 \cdot 3^2 \cdot (3^3)^5$

f $h = q^3 \cdot q^2 \cdot q \cdot q^2$

V3 Schrijf de functievoorschriften zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = (3x^3)^4$

c $h(a) = (4a^4)^4 \cdot 2a^3$

b $m(u) = \left(\frac{6}{2u^2}\right)^3$

d $i(t) = \frac{9t^2 \cdot t^3}{(3t^2)^2 \cdot t}$

V4 Schrijf functievoorschriften zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

a $f(x) = x^2(x^5 - 2x^2)$

d $R(t) = t^3(t + t^2) + 3t^4$

b $g(p) = (p^2)^5 - 3 \cdot p^7 \cdot p^3$

e $P(n) = n(n^2 + 3n) - n^2(3n - 8)$

c $A(k) = k^2 \cdot k + 5k^3$

f $g(x) = 5x(x - 3) + (x - 5)^2$

- V5** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^4$.
- Schets de grafieken van f en g .
 - Leg uit dat de vergelijking $x^4 = 81$ twee oplossingen heeft.
 - Los de vergelijkingen $x^3 = 125$ en $x^4 = 81$ op.

Theorie

Een vergelijking als $2p^3 = 128$ of als $a^4 + 12 = 500$ waarbij het grondtal van een macht een variabele is, noem je **machtsvergelijking**.

- Bij een oneven exponent n is er altijd één oplossing.
- Bij een even exponent n is het mogelijk dat er geen, één of twee oplossingen zijn.

Voorbeeld 1

Los op $2p^3 = 128$.

Oplossing

$$p^3 = 64$$

De exponent 3 is oneven. Er is één oplossing.

$$p = \sqrt[3]{64} = 4$$

Voorbeeld 2

Los op $a^4 + 12 = 500$.

Oplossing

$$a^4 = 488$$

De exponent 4 is even, er zijn twee oplossingen.

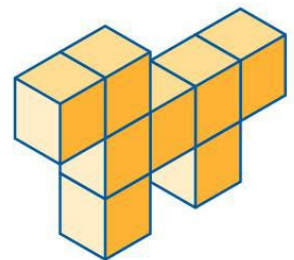
$$a = -\sqrt[4]{488} \approx -4,70 \text{ of } a = \sqrt[4]{488} \approx 4,70$$

- V6** Los de vergelijkingen op. Rond je antwoord zo nodig af op twee decimalen.

- $x^2 = 10$
- $x^3 = 64$
- $3t^4 = 48$
- $3q^6 + 1 = 1$
- $3d^5 = -15$
- $7 - \frac{1}{2}k^4 = 4$

- V7** De lengte van de ribben van de kubussen van de figuur is r , met r in cm.

- Bereken de inhoud van de figuur als $r = 5$.
- Welke van de volgende formules geldt voor de inhoud I van deze figuur: $I = 8r$, $I = 8r^2$ of $I = 8r^3$?
- Onderzoek bij welke waarde van r de inhoud van de figuur gelijk is aan $10\,000 \text{ cm}^3$. Geef je antwoord in twee decimalen.



- V8** Stef herleidt de vergelijking $12x + 4y = 3$ tot $y = -3x + \frac{3}{4}$. Welke bewerking heeft hij in stap 1 gedaan? En in stap 2?

- V9** Herleid de formules in de vorm $q = \dots p + \dots$.

- $p = 6q - 18$
- $2 + 12p = 2q$
- $-2p - 4q = 100$
- $21 - 3q + 2p = 0$

					Stef
●	$12x + 4y = 3$				
●	$4y = -12x + 3$	1			
●	$y = -3x + \frac{3}{4}$	2			

4.1 Negatieve exponenten

Je leert

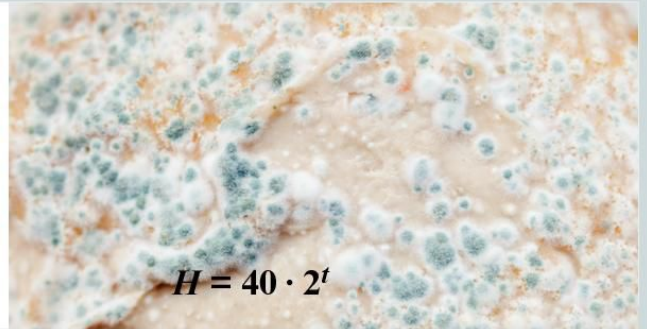
- wat de betekenis is van een macht met een negatieve exponent
- hoe je met machten met negatieve exponenten rekt

Leerroutes

- ondersteunend: 1—2—3—04—5—6—07—8—9
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8—9
- uitdagend: 1—3—4—6—7—8—9—U1—U2

Bij een proef met de schimmel *Cladosporium* verdubbelt de hoeveelheid elke dag. Op 4 juni is de hoeveelheid 40 gram.

- Bedenk twee manieren om de hoeveelheid op 1 juni te berekenen.



$$H = 40 \cdot 2^t$$

- Bereken met de rekenmachine $\frac{1}{7}$ en 7^{-1} .
 - Welk vermoeden heb je naar aanleiding van de antwoorden van opdracht a?
 - Bereken met de rekenmachine $\frac{1}{3^2}$ en 3^{-2} .
 - Welk vermoeden heb je op basis van de antwoorden van opdracht c?
- In de tabel staan machten van 7.

7^3	7^2	7^1	7^0	7^{-1}	$7^{\dots}$	$7^{\dots}$	$7^{\dots}$	$7^{\dots}$
343	49	7	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

- Beschrijf in elke rij van de tabel de regelmaat.
- Vul de tabel verder in zonder je rekenmachine te gebruiken. Geef de waarden in de onderste rij van de tabel als breuk.
- Ga na dat $7^{-2} = \frac{1}{7^2}$ en ga ook na dat $7^{-3} = \frac{1}{7^3}$
- Welke waarde heeft 7^0 volgens de tabel?

- Vul in:

$$\frac{1}{7^4} \cdot 7^{-2} = \frac{1}{7^4} \cdot \frac{1}{7^{\dots}} = \frac{1}{7^4 \cdot 7^{\dots}} = \frac{1}{7^{\dots}} = 7^{-\dots} \text{ en } \frac{1}{7^4} \cdot 7^{-2} = 7^{\dots} \cdot 7^{-2} = 7^{-\dots}$$

- Welke rekenregel heb je in opdracht a aangetoond?
- Vul in: $(7^3)^{-2} = \frac{1}{(7^3)^2} = \frac{1}{7^{\dots}} = 7^{-\dots}$
- Welke rekenregel heb je in opdracht c aangetoond?

Theorie

Voor het rekenen met **machten met negatieve exponenten** kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:

- $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$
- $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$
- $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$
- $g^0 = 1$
- $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

Voorbeeld 1

Schrijf $2p^{-3} \cdot 5p$ zonder negatieve exponenten en zo eenvoudig mogelijk.

Oplossing

$$2p^{-3} \cdot 5p = 10p^{-3+1} = 10p^{-2} = \frac{10}{p^2}$$

Voorbeeld 2

Schrijf $\frac{k^5}{k^4 \cdot k^3}$ in de vorm k^n .

Oplossing

$$\frac{k^5}{k^4 \cdot k^3} = \frac{k^5}{k^7} = k^{5-7} = k^{-2}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 Schrijf zonder negatieve exponent en zo eenvoudig mogelijk.

H

a t^{-3}

d $2k^{-8}$

b $a^2 \cdot a^{-6}$

e $7q^4 \cdot 3q^2 \cdot q^{-6}$

c $\frac{5p \cdot p^0}{(p^2)^3}$

f $\frac{8x^4}{2x \cdot x^3}$

5 Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleidingen van $\frac{5}{x^8}$ en $\frac{1}{4x^2}$ tot de vorm $c \cdot x^n$.

a Maak de herleidingen af.

b Herleid op dezelfde manier.

A $\frac{3}{p^3}$

C $\frac{x^3}{6x^4}$

B $\frac{2}{9a^8}$

D $\frac{3u}{2u^5}$

$$\frac{5}{x^8} = 5 \cdot \frac{1}{x^8} = 5 \cdot x^{-8} = 5x^{-8}$$

$$\frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot x^{-2} = \frac{1}{4}x^{-2}$$

Ondersteunende opdrachten

- 04 a** Geef van elke uitdrukking uit het linker rijtje aan welke uitdrukking uit het rechter rijtje erbij hoort. Geef ook aan welke rekenregel(s) je daarbij gebruikt.

A a^{-4}	1 a^2
B $a^3 \cdot a^4$	2 a^7
C $(a^2)^3$	3 1
D a^0	4 a^6
E $\frac{(a^4)^2}{a \cdot a^5}$	5 $\frac{1}{a^4}$

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$g^0 = 1$$

Schrijf zonder negatieve exponent en zo eenvoudig mogelijk.

b $t^{-3} \cdot t^{-5}$

c $5(a^{-8})^2$

- 07** Op het blaadje zie je hoe je de breuk $\frac{16x^2 \cdot x^3}{8 \cdot (x^4)^2 \cdot x^0}$ kunt herleiden tot de vorm $a \cdot x^b$.

- a** Welke rekenregels zijn bij stap 1 gebruikt?
b En welke rekenregel is bij stap 2 gebruikt?
c En welke bij stap 3?

Herleid tot de vorm $a \cdot x^b$. Gebruik de rekenregels.

d $\frac{24x \cdot x^2}{6x^9}$	g $\frac{32(x^4)^2}{8x^2 \cdot 2x^4}$
e $\frac{5x^6}{(x^3)^3}$	h $\frac{15x^5}{3x^2}$
f $\frac{x^3 \cdot x^0}{x^4}$	i $\frac{18(x^2)^3}{(3x)^2}$

$\frac{16x^2 \cdot x^3}{8 \cdot (x^4)^2 \cdot x^0} =$	
$\frac{16x^5}{8 \cdot (x^4)^2} =$	1
$\frac{2x^5}{x^8} =$	2
$2x^{-3}$	3

Uitdagende opdrachten

- U1** Gegeven is dat $x^a = p$ en $x^b = q$.
 Druk de volgende machten uit in p en/of q .

a x^{a+b}	d x^{a-b}
b x^{3b}	e x^{2a+b}
c $(x^5)^a$	f $(x^3)^{-2a+5b}$

- U2** Je kunt de uitdrukking $\frac{(x^q)^2 \cdot px^{15} \cdot x^{-2}}{4 \cdot (x^{-3})^q \cdot x \cdot 3x^2}$ herleiden tot de vorm $a \cdot x^b$.

Bereken de waarden van p en q in het geval de breuk na herleiding voor $x \neq 0$ gelijk is aan 1.

4.2 Gebroken exponenten

Je leert

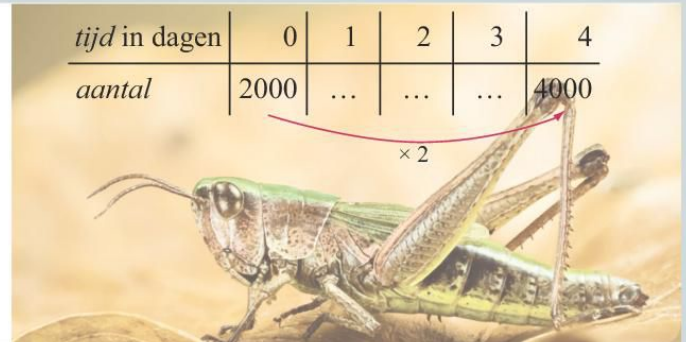
- wat de betekenis is van een macht met een gebroken exponent
- hoe je met machten met gebroken exponenten rekt

Leerroutes

- ondersteunend: 10—11—012—12—13—014—15—17
- doorlopend: 10—11—12—13—14—15—16—17
- uitdagend: 10—12—14—15—16—17—U3—U4

Het aantal sprinkhanen neemt exponentieel toe. Na vier dagen is het aantal verdubbeld.

- Hoe kun je het aantal sprinkhanen na één dag berekenen?



- 10**
- a** Bereken met de rekenmachine $\sqrt{3}$ en $3^{\frac{1}{2}}$.
- b** Bereken met de rekenmachine $\sqrt[3]{7}$ en $7^{\frac{1}{3}}$. Bereken ook $\sqrt[5]{14}$ en $14^{0,2}$.
- c** Je weet dat $(\sqrt{3})^2 = 3$ en dat $(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3$.
Waarom volgt hier uit dat $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$?
- d** Laat op de manier van opdracht c zien dat $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$ en dat $\sqrt[5]{14} = 14^{\frac{1}{5}}$.

Theorie

Voor een **macht met een gebroken exponent** geldt: $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$ met n een positief geheel getal en $g \geq 0$.

Met deze regel kun je uitdrukkingen als $5\sqrt{5}$ en $p^2 \cdot \sqrt[3]{p}$ herleiden tot één macht door eerst de wortel als een macht te schrijven en daarna de rekenregel voor het vermenigvuldigen van machten toe te passen. Omgekeerd kun je een uitdrukking als $x^{1\frac{1}{4}}$ schrijven als $x^1 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x \cdot \sqrt[4]{x}$.

Voorbeeld

$$11^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{11}$$

$$\sqrt[2]{p} = p^{\frac{1}{2}}$$

$$5\sqrt{5} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{1\frac{1}{2}}$$

$$p^2 \cdot \sqrt[3]{p} = p^2 \cdot p^{\frac{1}{3}} = p^{2\frac{1}{3}}$$

$$3^{1\frac{1}{2}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$$

$$x^{2\frac{1}{3}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$(7^4)^{\frac{1}{3}} = 7^{1\frac{1}{3}} = 7 \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7\sqrt[3]{7}$$

$$(x^{\frac{3}{4}})^3 = x^{\frac{9}{4}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$$

11 Schrijf als macht.

a $\sqrt[5]{6}$

d $\sqrt{k}$

b $\sqrt[10]{11}$

e $\sqrt[4]{12}$

c $\sqrt[7]{a}$

f $\sqrt[3]{25}$

Ondersteunende route → maak opdracht 012

12 Schrijf als één macht.

H **a** $5 \cdot \sqrt[4]{25}$

c $s^2 \cdot \sqrt[5]{s}$

b $\sqrt{k} \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{k}$

d $\sqrt[4]{p} \cdot \sqrt{p}$

13 Herleid tot een vorm zonder gebroken exponent.

H **a** $4^{\frac{1}{6}}$

d $(6^2)^{\frac{1}{8}}$

b $7^{1\frac{1}{5}}$

e $3^{\frac{1}{8}} \cdot 3$

c $a^{2\frac{1}{7}}$

f $5 \cdot (5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

Ondersteunende route → maak opdracht 014

14 Herleid tot een vorm zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

H **a** $k^2 \cdot k^{-\frac{1}{2}}$

d $(2a)^2 \cdot \sqrt{a^{-2}}$

b $(v^{\frac{1}{2}})^5$

e $q^{1\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{q^3}$

c $(p^{-3})^{\frac{1}{2}}$

f $x^{-1\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{x}$

De exponent in van een macht kan ook een decimaal getal zijn of een breuk van de vorm $\frac{n}{m}$ zijn.

Bij het rekenen met en het herschrijven van machten met negatieve of gebroken exponenten gebruik je de rekenregels voor machten.

Voorbeeld

Voor $x > 0$ geldt:

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$$

$$(x^{\frac{3}{4}})^{-6} = x^{\frac{3}{4} \cdot -6} = x^{-4\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x^{1,3} \cdot x^{1,2}}{x^{2,5}} = x^{1,3 + 1,2 - 2,5} = x^0 = 1$$

15 Herleid tot de vorm a^p .

a $a^2 \cdot a^{-3}$

d $(a^{\frac{3}{5}})^{\frac{1}{2}}$

b $\frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}}$

e $\frac{a^{0,3} \cdot a^{0,5}}{a^3}$

c $a^{0,4} \cdot a^{1,2}$

f $(a^{-3})^{\frac{1}{2}}$

4.2 Gebroken exponenten

- 16** De normale hartslag van een rustend zoogdier hangt af van het gewicht van het dier volgens de formule $H = \frac{241}{G^{0,25}}$. Hierin is G het gewicht in kg en H het aantal slagen per minuut.

- Hoeveel slagen per minuut maakt het hart van een rustende volwassen olifant van 4000 kg?
- Een volwassen haas weegt ongeveer 5 kg, een volwassen vos het dubbele.
Ga na dat de hartslag van de vos lager is, maar niet de helft van die van de haas.
- Bereken met de rekenmachine bij welk gewicht de hartslag 50 slagen per minuut is.

- 17** Bij de krachtsport powerliften wordt geprobeerd een zo groot mogelijk gewicht te tillen. Bij het onderdeel bankdrukken wordt een gewicht getild terwijl de sporter met zijn rug op een bank ligt. Om de prestaties van powerlifters met verschillend lichaamsgewicht met elkaar te kunnen vergelijken, wordt er gecorrigeerd voor het lichaamsgewicht.

Een theoretisch model hiervoor is $P_{\text{theoretisch}} = \frac{T}{12 \cdot \sqrt[3]{L^2}}$

Hierin is L het lichaamsgewicht in kg, is T het getilde gewicht in kg en is $P_{\text{theoretisch}}$ de score op basis van L en T .

Powerlifter Alex weegt 70 kg en tilt een gewicht van 150 kg.

- Bereken in twee decimalen de waarde van $P_{\text{theoretisch}}$ voor Alex.
- Bereken hoeveel kg een powerlifter van 100 kg moet tillen om volgens het theoretische model dezelfde prestatie als Alex te leveren.

- Herschrijf de formule $P_{\text{theoretisch}} = \frac{T}{12 \cdot \sqrt[3]{L^2}}$ in de vorm $P_{\text{theoretisch}} = c \cdot T \cdot L^d$.

- Powerlifter Tom is het afgelopen jaar maar liefst 10% zwaarder geworden. Gelukkig tilt hij dit jaar zelfs 20% meer dan vorig jaar.
Leg uit of zijn prestatie $P_{\text{theoretisch}}$ van dit jaar slechter of juist beter is dan vorig jaar.

- Anton weegt 50 kg en Bert weegt 150 kg.
Toon aan dat als Bert dezelfde prestatie wil leveren als Anton, Bert een ruim twee keer zo groot gewicht moet tillen.

(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2010 2e tijdvak.)



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

012 Je gaat in deze opdracht de vorm $x^2 \cdot \sqrt[4]{x}$ als één macht schrijven.

- a** Schrijf $\sqrt[4]{x}$ als $x^{\dots}$.
- b** Met de rekenregel $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ kun je x^2 en $x^{\dots}$ samen nemen tot één macht van x .
Vul in: $x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\dots} = x^{\dots}$.
- c** Vul in: $\sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{k} = k^{\dots} \cdot k^{\dots} = k^{\dots}$

014

- a** Vul in: $p^{\frac{3}{2}}$ is gelijk aan $(p^3)^{\frac{1}{2}}$ en dus gelijk aan $\sqrt{p^{\dots}}$.
- b** Vul in: $q^{\frac{1}{5}}$ is gelijk aan $q^{\dots} \cdot q^{\frac{1}{5}}$ en dus gelijk aan $\dots \sqrt[5]{q}$.
- c** Vul in: $a^{-\frac{1}{3}}$ is gelijk aan $\frac{1}{a^{\dots}}$ en dus gelijk aan $\frac{1}{\sqrt[3]{\dots}}$.

Herleid tot een vorm zonder negatieve of gebroken exponenten.

- | | | | |
|----------|-----------------------|----------|--|
| d | $d^{\frac{1}{7}}$ | g | $t^{-3} \cdot t^{\frac{1}{2}}$ |
| e | $p^{\frac{1}{4}}$ | h | $q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{1}{3}}$ |
| f | $(a^{\frac{1}{6}})^2$ | i | $k^{-3\frac{1}{5}}$ |

Uitdagende opdrachten

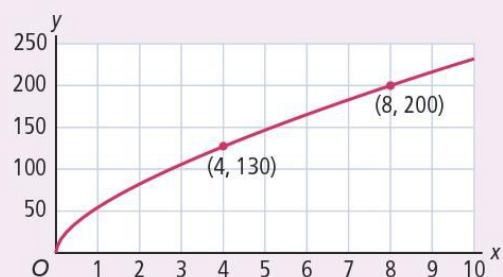
U3 Gegeven is dat $x^a = p$ en dat $x^b = q$.

Druk de volgende machten uit in p en/of q .

- a** $x^{\frac{1}{2}a}$ **c** $x^{\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b}$
b $\sqrt[3]{x^{2a}}$ **d** $(\sqrt[4]{x})^{a-2b}$

U4 Door de punten (4, 130) en (8, 200) is de grafiek getekend van de functie $f(x) = a \cdot x^g$.

- a** Leg uit dat moet gelden $a = \frac{130}{4^g}$
- b** Bereken in drie decimalen nauwkeurig de waarden van a en g .



Je leert

- wat een machtsfunctie is

Leerroutes

- ondersteunend: 18—19—20—21—022—22—23—25
- doorlopend: 18—19—20—21—22—23—24—25
- uitdagend: 18—19—20—21—22—24—25—U5

De remweg van een auto is de afstand die de auto aflegt tussen het moment van remmen en het tot stilstand komen. Je kunt deze remweg berekenen met de formule $s = c \cdot V^2$. Hierbij is s de remweg in meters en V de snelheid voor het remmen in km per uur. De waarde van c hangt af van de auto en de gladheid van de weg.

- Is c bij een natte weg groter of kleiner dan bij een droge weg?



- 18** Gegeven zijn de functies $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = x^4$,

$$h(x) = f(x) \cdot g(x), k(x) = f(x) + g(x) \text{ en } q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Schrijf functie h in de vorm $h(x) = x^a$.
- Kun je functie k in de vorm $k(x) = x^a$ schrijven?
- Ga na of je functie q in de vorm $q(x) = x^a$ kunt schrijven.

- 19** Gegeven is de functie $f(x) = x^{0,21}$.

- Onderzoek of de functie $g(x) = (f(x))^2$ weer te schrijven is als $g(x) = x^a$.
- Schrijf de functie $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ in de vorm $h(x) = x^a$.

Theorie

Functies van de vorm $f(x) = x^a$ heten **machtsfuncties**.
Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{-n}$ met $x \neq 0$ en $n > 0$ kun je schrijven als $f(x) = \frac{1}{x^n}$

Deze machtsfuncties zijn voorbeelden van **gebroken functies**.

Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ met $x \geq 0$ en n een positief geheel getal zijn te schrijven als $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en heten daarom ook wel **wortelfuncties**.

Voorbeeld

$f(x) = x^{-3}$ kun je schrijven als $f(x) = \frac{1}{x^3}$
 $g(x) = x^{-2,4}$ kun je schrijven als $g(x) = \frac{1}{x^{2,4}}$
 $h(x) = x^{\frac{1}{4}}$ kun je schrijven als $h(x) = \sqrt[4]{x}$
 $i(x) = x^{\frac{2}{3}}$ kun je schrijven als $i(x) = \sqrt[3]{x^2}$

20 Schrijf elk van de functies als een machtsfunctie.

- H**
- a** $f(x) = x^4 \cdot x \cdot x^3$ **d** $g(p) = (p^{2,1})^3 \cdot p^{0,7}$
- b** $H(t) = t^{3,5} \cdot t^{2,1} \cdot \frac{1}{t^{1,7}}$ **e** $A(t) = t^3 \cdot \sqrt{t} \cdot t$
- c** $W(q) = \frac{q^3 \cdot q^4}{q^2}$ **f** $N(a) = \frac{a^{-0,2} \cdot a^{4,5}}{(a^{-0,7})^2}$

- 21** Er bestaat een verband tussen de diameter van de stam van een boom en zijn hoogte. Bij benadering geldt: $h = c \cdot d^{0,65}$. Hierin zijn zowel de diameter d als de hoogte h in meters. De waarde van de constante c hangt af van de boomsoort.
- a** Waarom moet voor deze formule gelden: $d > 0$ en $h > 0$?
- b** Voor een grove den is $c = 44$.
Bereken de hoogte van de boom in meters als de diameter 36 cm is. Rond af op één decimaal.
- c** Bereken met je rekenmachine de diameter van een grove den die een hoogte heeft van 15 meter. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.
- d** Voor een boomsoort geldt dat bij een hoogte van 18 meter de diameter gelijk is aan 20 cm.
Bereken de waarde van c . Rond je antwoord af op een geheel getal.



De som en het verschil van twee machtsfuncties is in het algemeen geen machtsfunctie. Je kunt som- en verschilfuncties vaak wel vereenvoudigen.

Voorbeeld

$$\text{Vereenvoudig } f(x) = \frac{x^2 \cdot x^7}{x^4} + 2 \cdot x^5 - \frac{x^3}{x^5}$$

Oplossing

$$f(x) = x^5 + 2x^5 - x^{-2}$$

$$f(x) = 3x^5 - x^{-2}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 022

- 22**
- a** Laat zien dat $f(x) = x \cdot x^2 \cdot x^3 + (x^2)^3 - \frac{x^2 \cdot x^3}{x}$ te vereenvoudigen is tot $f(x) = 2 \cdot x^6 - x^4$.
- b** Vereenvoudig de functies $h(x) = x^2 \cdot x^3 + x^2 \cdot x^5 + x \cdot x^4$ en $W(p) = \frac{p^2 \cdot p^{0,5}}{p^3} - (p^{0,5})^2 \cdot p + p^{-2} \cdot p^{1,5}$.

4.3 Machtsfuncties

- 23** Op het blaadje zie je hoe je de functie $W(p) = \frac{4p^3 + 8p^{2,5} - 1}{p}$ kan schrijven als een som van termen van de vorm $c \cdot p^a$.

H

Herleid op soortgelijke wijze de volgende functies.

- a $W(p) = \frac{8p^4 + 5p^2 + p + 1}{p}$
- b $N(t) = \frac{-2t^{3,5} + 4t^{2,1} - 2t^{0,3} + 6}{2t}$
- c $P(q) = \frac{6q^5 + 10q^{3,8} - 2}{5q^2}$

•					
•					
•					
•					
•					
•					

$$W(p) = \frac{4p^3 + 8p^{2,5} - 1}{p}$$

$$W(p) = \frac{4p^3}{p} + \frac{8p^{2,5}}{p} - \frac{1}{p}$$

$$W(p) = 4p^2 + 8p^{1,5} - p^{-1}$$

- 24** Een fabrikant produceert toetsenborden. Voor de totale kosten TK in euro's van het produceren van q toetsenborden per dag geldt $TK = 520 + 15 \cdot q^{0,65}$.
- a Bereken TK voor een dag dat er 250 toetsenborden geproduceerd worden.
- b Bereken de gemiddelde productiekosten per toetsenbord bij $q = 100$.
- c Toon aan dat voor de gemiddelde kosten GK geldt $GK = 520 \cdot q^{-1} + q^{-0,35}$.

- 25** Biologen hebben gemeten hoeveel zuurstof een zoogdier nodig heeft om één kilometer af te leggen. Voor het verband tussen het lichaamsgewicht L in kilogrammen en het aantal liter zuurstof Z per kilogram lichaamsgewicht dat verbruikt wordt, vonden ze de formule $Z = 0,4 \cdot L^{-\frac{1}{3}}$.

- a Een neushoorn weegt 2400 kilogram.
Bereken Z en vervolgens de *totale* hoeveelheid zuurstof die de neushoorn verbruikt als hij de afstand van 5 kilometer aflegt.
- b Beantwoord dezelfde vragen voor een hond van 20 kilogram.
- c Bereken met de rekenmachine het gewicht van een zoogdier dat 0,08 liter zuurstof per kg lichaamsgewicht nodig heeft om één kilometer af te leggen.
- d Een geit is ongeveer acht keer zo zwaar als een haas. Beide dieren leggen één kilometer af.
Vergelijk het zuurstofverbruik van beide dieren.
- e TZ is de totale hoeveelheid zuurstof in liter die het een zoogdier kost om één kilometer af te leggen.
Geef een formule voor het verband tussen TZ en L .
- f Een hazelmuis van 32 gram legt 100 meter af.
Bereken de totale hoeveelheid zuurstof die de hazelmuis verbruikt.



Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

022 Op het blaadje is de formule $A(p) = \frac{p^4 \cdot p^{1,5}}{\sqrt{p}} + p^5 - p^{2,8}$ herleid.

- Welke rekenregel is in stap 1 gebruikt?
- En welke rekenregels zijn in stap 2 en in stap 3 gebruikt?
- Welke vereenvoudiging is er in stap 4 gedaan?
- Maak de volgende herleiding af

$$\begin{aligned} K(q) &= \frac{q^2 \cdot q^{0,5}}{q} - (q^{1,5})^2 \cdot q - q^{-2} \cdot q^{3,5} \\ &= \frac{q^{\dots}}{q^1} - q^{\dots} \cdot q^1 - q^{\dots} \\ &= \dots \end{aligned}$$

$A(p) = \frac{p^4 \cdot p^{1,5}}{\sqrt{p}} + p^5 - p^{2,8}$	
$A(p) = \frac{p^4 \cdot p^{1,5}}{p^{0,5}} + p^5 - p^{2,8}$	1
$A(p) = \frac{p^{5,5}}{p^{0,5}} + p^5 - p^{2,8}$	2
$A(p) = p^5 + p^5 - p^{2,8}$	3
$A(p) = 2p^5 - p^{2,8}$	4

Uitdagende opdrachten

U5 Bij zoogdieren geldt voor het verband tussen de oppervlakte van de huid en hun gewicht bij benadering de formule van Meeh: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. In deze formule is

H de huidoppervlakte in dm^2 , G het gewicht in kg en c een constante die afhangt van het soort dier. In de tabel zie je voor enkele zoogdieren de bijbehorende waarde van c .

zoogdier	egel	muis	mens	vleermuis
c	7,5	9,0	11,2	57,5

- Een volwassen egel is ongeveer drie keer zo zwaar als een egel van zes weken oud.
Hoeveel keer zo groot is de huidoppervlakte van een volwassen egel?
- De formule bij de mens is te herleiden tot de vorm $H = \sqrt[p]{a \cdot G^b}$.
Bereken de waarden van a , b en p . Rond de waarde van a af op een geheel getal.



4.4 Machtsformules herleiden

Je leert

- hoe je een machtsvergelijking oplost met de regel $(x^a)^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{1}{a}}$
- hoe je een machtsformule herleidt waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere

Leerroutes

- ondersteunend: 26—27—28—029—30—31—032—33
- doorlopend: 26—27—28—29—30—31—32—33
- uitdagend: 26—27—28—29—30—32—33—U6

De huidoppervlakte van een mens is onder andere afhankelijk van het gewicht en de lengte. Voor het verband tussen de huidoppervlakte H in m^2 en de lengte L in cm voor een man van 80 kg is een veel gebruikte formule $H = 0,0463 \cdot L^{0,725}$.

De formule wordt ook wel geschreven als $L = 69,3636 \cdot H^{1,379}$.

- Ga na of beide formules voor een man van 1,90 m dezelfde huidoppervlakte opleveren.



- 26**
- Waarom heeft vergelijking E geen oplossingen?
 - Geef van elk van de andere vergelijkingen aan hoeveel oplossingen ze hebben.
 - Geef de oplossingen van de vergelijkingen A tot en met D.

- | | |
|---|-----------------|
| A | $x^5 = 32$ |
| B | $q^4 + 17 = 18$ |
| C | $p^2 = 20$ |
| D | $y^3 = -12$ |
| E | $2a^6 = -9$ |

- 27**
- Gegeven is de vergelijking $x^{-5} = 2$. Door links en rechts tot de macht $-\frac{1}{5}$ te verheffen krijg je $(x^{-5})^{-\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}}$.
Waarom geeft dit als oplossing $x = 2^{-\frac{1}{5}}$?
 - Vul in: Uit $x^{\frac{2}{3}} = 7$ volgt $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 7^{\frac{3}{2}}$ dus is $x = 7^{\frac{3}{2}} \approx \dots$

- 28** Elske gaat de vergelijking $x^{1,7} = 10$ oplossen.

- Leg uit waarom ze links en rechts tot de macht $\frac{1}{1,7}$ doet.
- Los de vergelijking verder op en rond je antwoord af op twee decimalen.

					Elske
☐					
☐	$x^{1,7} = 10$				
☐	$(x^{1,7})^{\frac{1}{1,7}} = 10^{\frac{1}{1,7}}$				
☐	$\dots \approx \dots$				
☐					

Theorie

Om een **machtsvergelijking** op te lossen, kun je gebruik maken van de regel: $x^a = c$ geeft $(x^a)^{\frac{1}{a}} = c^{\frac{1}{a}}$ en hieruit volgt de oplossing $x = c^{\frac{1}{a}}$ met $c > 0$.

Voorbeeld 1

Los op $3k^{2,4} + 2 = 8$.

Oplossing

$$3k^{2,4} = 6$$

$$k^{2,4} = 2$$

Verhef links en rechts tot de macht $\frac{1}{2,4}$

$$k = 2^{\frac{1}{2,4}} \approx 1,33$$

Voorbeeld 2

Los op $x^{\frac{3}{5}} = 3$.

Oplossing

Omdat $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$, verhef je links en rechts

tot de macht $\frac{5}{3}$

$$x = 3^{\frac{5}{3}} \approx 6,24$$

Ondersteunende route → maak opdracht 029

- 29** Los op met behulp van de regel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$.

H

- a** $w^{0,42} = 6$ **d** $-3 \cdot t^{-0,13} = 2,15$
b $p^{-4,1} = 0,2$ **e** $7 \cdot q^{2,357} = 5$
c $x^{1,25} = 0,3$ **f** $2 + x^{4,1} = 7,3$

- 30** Gegeven is de formule $P = 2 \cdot a^{0,2}$.

- a** Bereken P als $a = 10$.
b Gegeven is dat $P = 18$. Dit geeft de vergelijking $18 = 2 \cdot a^{0,2}$.
 Los deze vergelijking op. Geef bij elke stap aan welke rekenregel je hebt gebruikt.
c Op het blaadje zie dat je de formule $P = 2 \cdot a^{0,2}$ kunt herleiden tot $a = \frac{1}{32} \cdot P^5$. Bij stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld.
 Leg uit wat er in stap 2 is gebeurd.
d In stap 3 is de regel toegepast: Uit $x^a = c$ volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$. Welke rekenregel is bij stap 4 toegepast?

☐	$P = 2 \cdot a^{0,2}$				
☐	$2 \cdot a^{0,2} = P$				1
☐	$a^{0,2} = \frac{1}{2} P$				2
☐	$a = \left(\frac{1}{2} P\right)^5$				3
☐	$a = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot P^5$				4
☐	$a = \frac{1}{32} \cdot P^5$				5

- 31** In de formule $p = 10 \cdot q^{1,25}$ is de variabele p uitgedrukt in de variabele q . Je gaat de formule herleiden tot een vorm waarin q is uitgedrukt in p .

- a** Leg uit wat er in stap 1 en stap 2 is gebeurd.
b Welke regel is toegepast in stap 3?
c Maak de herleiding af. Rond zo nodig af op twee decimalen.

☐	$p = 10 \cdot q^{1,25}$				
☐	$10 \cdot q^{1,25} = p$				1
☐	$q^{1,25} = \frac{1}{10} p$				2
☐	$q = \left(\frac{1}{10} p\right)^{\frac{1}{1,25}}$				3

4.4 Machtsformules herleiden

Theorie

In de formule $P = 8 \cdot Q^3$ is P uitgedrukt in Q .

Met behulp van de regel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ kunt je de formule **herleiden** naar een formule waarmee je Q kunt berekenen als je P weet.

In de formule $Q = \frac{1}{2} \cdot P^{\frac{1}{3}}$ ofwel $Q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{P}$ is Q uitgedrukt in P .

Voorbeeld 1

Herleid $P = 8 \cdot Q^3$, zodat Q uitgedrukt is in P .

Oplossing

$$P = 8 \cdot Q^3 \text{ geeft } Q^3 = \frac{1}{8} \cdot P$$

$$P = \left(\frac{1}{8} \cdot P\right)^{\frac{1}{3}} \text{ ofwel } Q = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot P^{\frac{1}{3}}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot P^{\frac{1}{3}} \text{ ofwel } Q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{P}$$

Voorbeeld 2

Herleid $P = 0,8 \cdot Q^{2,5}$ tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.

Oplossing

$$0,8 \cdot Q^{2,5} = P \text{ geeft } Q^{2,5} = \frac{1}{0,8} \cdot P$$

$$Q = \left(\frac{1}{0,8} \cdot P\right)^{\frac{1}{2,5}} \text{ ofwel } Q = \left(\frac{1}{0,8} \cdot P\right)^{0,4}$$

$$Q = \left(\frac{1}{0,8}\right)^{0,4} \cdot P^{0,4} \text{ en dus } Q \approx 1,09 \cdot P^{0,4}$$

Ondersteunende route → maak opdracht 032

32

Herleid de formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.

H

Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

a $P = Q^{\frac{1}{4}}$

d $P = 5 \cdot Q\sqrt[3]{Q}$

b $P = 25 \cdot Q^{3,5}$

e $P = 1,46 \cdot Q^{-0,8}$

c $P = \frac{12}{Q\sqrt{Q}}$

f $P = \frac{4}{Q\sqrt[5]{Q}}$

33

Bij zoogdieren blijkt een verband te bestaan tussen het gemiddelde lichaamsgewicht L van een zoogdiersoort en het gemiddelde hersengewicht H van die soort, beide in kg.

Dit verband kan bij benadering worden weergegeven met de formule $H = 0,012 \cdot L^{0,67}$.

- a** Giraffes hebben een gemiddeld hersengewicht van 750 gram. Bereken het gemiddelde lichaamsgewicht van een giraffe.
- b** Herleid de formule tot de vorm $L = p \cdot H^q$. Geef p en q in twee decimalen nauwkeurig
- c** Een ree is gemiddeld 10 kg zwaarder dan een vos, een bruine beer is gemiddeld 10 kg zwaarder dan een leeuw. Plot de grafiek van L en bereken voor welk tweetal het verschil in hersengewicht het grootst is.

Uitdagende route → maak opdracht U6

Ondersteunende opdrachten

- 029** Brenda gaat de vergelijking $3x^{1,2} + 10 = 22$ oplossen.
- Welke bewerking is er in stap 1 uitgevoerd?
 - En welke bewerking in stap 2?
 - Los de vergelijking verder op met de regel $x^a = c$ dus $x = c^{\frac{1}{a}}$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Los op met behulp van de regel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$.

- $k^{0,35} = 3$
- $-2 \cdot q^{-4,13} = 19$
- $p^{2,25} = 4,8$
- $7 + t^{3,9} = 18,7$

					Brenda

- 032** Op het blaadje is een begin gemaakt met de herleiding van de formule $P = 0,5 \cdot Q^{0,4}$ tot de vorm $Q = a \cdot P^b$.
- In stap 1 zijn de linkerkant en de rechterkant verwisseld.
Leg uit wat er in stap 2 gebeurd is.
 - Gebruik in stap 3 de regel: ' $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ ' om het juiste getal op de puntjes in te vullen.
 - In stap 4 wordt de rekenregel $(p \cdot q)^c = p^c \cdot q^c$ gebruikt. Maak de herleiding tot de vorm $Q = a \cdot P^b$ verder af. Geef a in twee decimalen en b in één decimaal.

Herleid de volgende formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$. Rond de waarden van a en b zo nodig af op twee decimalen.

- $P = Q^{\frac{1}{5}}$
- $P = 0,5 \cdot Q^{\frac{2}{3}}$
- $P = 20 \cdot Q^{2,5}$
- $P = 1,4 \cdot Q^{-0,6}$
- $P = \frac{2}{Q^{0,4}}$
- $P = \frac{100}{Q^{\sqrt[3]{Q}}}$

Uitdagende opdrachten

- U6** Voor de productie van een artikel is menselijke arbeid nodig en kapitaal voor machines. Een econoom maakt gebruik van de formule $Q = 30 \cdot K^{0,7} \cdot A^{0,5}$. In deze formule is Q de jaarproductie van een artikel, A het aantal werknemers en K het geïnvesteerde kapitaal in duizenden euro's.
- Met hoeveel procent neemt de jaarproductie toe als gevolg van een verdubbeling van het geïnvesteerde kapitaal?
 - Toon aan dat bij $Q = 30\,000$ de formule te herleiden is tot $A = \frac{10^6}{K^{1,4}}$
 - Als het geïnvesteerde kapitaal wordt vervijfvoudigd en de jaarproductie gelijk blijft, welk effect heeft dat dan op het benodigde aantal werknemers?

4.5 Gemengde opdrachten

- 34** Schrijf de functievoorschriften zonder negatieve exponenten en zo eenvoudig mogelijk.

$$\begin{array}{ll} \text{a} & A(t) = \frac{2t^3}{3t} + t^{-5} \cdot t^3 \\ \text{c} & P(a) = \sqrt[5]{a^2} \cdot a^3 \sqrt[3]{a^7} + a^3 + \frac{2a^5}{a^2} \\ \text{b} & Q(d) = 2d^{-3} \cdot 5d^4 \cdot (2d^{-2})^5 \\ \text{d} & K(p) = \frac{p^3 \cdot p\sqrt{p}}{p^2} + (3p^3)^2 \end{array}$$

- 35** Het draagvermogen van een vliegtuig is het maximale gewicht van het vliegtuig, inclusief personen en bagage, waarmee gevlogen mag worden. Dit draagvermogen hangt onder meer af van de oppervlakte van de vleugels.

Er geldt $Q = 0,1 \cdot G^{0,67}$, waarbij Q de oppervlakte van de vleugels in m^2 is en G het draagvermogen in kg.

- Bereken het vleugeloppervlak van een Boeing 747, waarvan het draagvermogen 360 000 kg bedraagt.
- De formule $Q = 0,1 \cdot G^{0,67}$ is ook te schrijven als $G = a \cdot Q^b$. Bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.
- Een vliegtuig weegt 150 000 kg en heeft een vleugeloppervlak van 350 m^2 . Bereken hoeveel kg vracht (personen en bagage) dit vliegtuig maximaal mag meenemen.

- 36** In de tabel staat voor een aantal planeten in ons zonnestelsel de gemiddelde afstand tot de zon in miljoenen kilometers en de omlooptijd in dagen. Het verband tussen de gemiddelde afstand tot de zon A en de omlooptijd T wordt gegeven door de formule $T = c \cdot A^{1,5}$. Hierin is A uitgedrukt in miljoenen km en T in dagen.

planeet	A	T
Jupiter	778	4329
Saturnus	1427	10 753
Uranus	2870	30 660
Neptunus	4497	60 150

- Laat met een berekening zien dat je met de gegevens voor Jupiter uit de tabel kunt afleiden dat $c \approx 0,2$.
- De omlooptijd van Mercurius is 88 dagen. Bereken de gemiddelde afstand van Mercurius tot de zon.
- Je weet dat de omlooptijd van de aarde ongeveer 365 dagen is. Bereken hiermee de afstand van de aarde tot de zon.
- Herleid de formule $T = 0,2 \cdot A^{1,5}$ tot de vorm $A = p \cdot T^q$. Geef de waarden van p en q in twee decimalen.

- 37** Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{5}}$ en $g(x) = -2 \cdot \sqrt[6]{x}$.

- Plot en schets de grafieken van f en g in één figuur.
- Hoeveel snijpunten heeft elk van de grafieken met de lijn $y = -50$?
- Herleid het functievoorschrift van $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ tot $p(x) = a \cdot x^b$.



- 38** In Noord-Amerika is een verband geconstateerd tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende vogelsoorten dat voorkomt.

De formule bij dit verband is $S = 40 \cdot A^{\frac{1}{6}}$. Hierin is S het aantal vogelsoorten en A de oppervlakte van het gebied in vierkante mijl. In een gebied komen 50 verschillende vogelsoorten voor. Onderzoek hoeveel keer groter het gebied moet worden zodat er 100 verschillende vogelsoorten voorkomen.

- 39** De hoeveelheid vloeistof die per seconde door een buis stroomt, hangt af van de straal van de buis. Maar ook het drukverschil en de vloeistofdikte hebben invloed. Bij een vast drukverschil geldt de formule $V = p \cdot R^4$.

In deze formule is V de hoeveelheid vloeistof in liters per seconde die door de buis stroomt en is R de straal van de buis in cm. In de formule is p een constante die afhangt van het drukverschil en de vloeistofdikte.

Onderzoek of de hoeveelheid vloeistof bij iedere waarde van p met hetzelfde percentage toeneemt als de straal van de buis 20% groter wordt genomen.

- 40** De loopsnelheid van allerlei dieren blijkt bij benadering te voldoen aan de formule $v = 0,78 \cdot s^{1,67} \cdot h^{-1,16}$.

In deze formule is s de stapgrootte in meters, is h de heuphoogte in meters en is v de snelheid in meter per seconde. Een vader wandelt op een zondagmiddag met zijn dochter. De heuphoogte van de vader is het dubbele van zijn dochter. De vader maakt passen van 85 cm.

Hoe groot moeten de passen van de dochter zijn om haar vader bij te kunnen houden?

(Ontleend aan het pilotexamen havo wiskunde A 2015 2e tijdvak)

Samenvatting

Theorie

Machten met een negatieve of gebroken exponent

Ook voor het rekenen met machten met negatieve of gebroken exponenten kun je de volgende rekenregels gebruiken:

$$g^a \cdot g^b = g^{a+b}$$

$$(g^a)^b = g^{a \cdot b}$$

$$\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$g^0 = 1 \quad g \neq 0$$

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g} \quad \text{met } n \text{ een positief geheel getal}$$

$$g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m} \quad \text{met } n \text{ en } m \text{ positieve gehele getallen}$$

Voorbeeld

$$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$2a^{-3} = \frac{2}{a^3}$$

$$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$9x^{2\frac{1}{2}} = 9 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 9x^2 \cdot \sqrt{x}$$

$$5^1 = 5$$

$$t^{-4} \cdot t^4 = t^0 = 1$$

S1 Schrijf zonder negatieve en gebroken exponent.

a a^{-4}

d $3x^{\frac{1}{2}}$

b $p^{-2} \cdot p^5 \cdot p^{-8}$

e $4x^{\frac{4}{5}}$

c $7x^{-3}$

f $4a^{-\frac{2}{3}}$

Theorie

Machtsfuncties, gebroken functies en wortelfuncties

Functies van de vorm $f(x) = x^a$ heten machtsfuncties.

Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{-n}$ met $x \neq 0$ en $n > 0$

kun je schrijven als $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Deze machtsfuncties zijn voorbeelden van gebroken functies.

Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ met $x \geq 0$ en n een positief geheel getal, zijn te schrijven als $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en heten daarom ook wel wortelfuncties.

Voorbeeld

$$f(x) = x^{-4} \text{ kun je schrijven als } f(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$g(x) = x^{-0,6} \text{ kun je schrijven als } g(x) = \frac{1}{x^{0,6}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{6}} \text{ met } x \geq 0 \text{ kun je schrijven als } f(x) = \sqrt[6]{x}$$

S2 Schrijf elk van de volgende functies als een machtsfunctie.

a $f(t) = t^4 \cdot t$

c $K(q) = (q^{2,1})^4 \cdot q^{1,7} \cdot (q^3)^{0,2}$

b $A(p) = p^{1,5} \cdot \frac{1}{p^{5,2}}$

d $W(a) = \frac{a^3 \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}$

Vaardigheid

Je kunt rekenen met machten met een negatieve exponent.

Bij het rekenen met negatieve machten kun je gebruik

maken van de regel $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$

Voorbeeld

Schrijf $12 \cdot x^{-6} \cdot x^{3\frac{1}{2}}$ zonder negatieve exponent.

Oplossing

$$12 \cdot x^{-6} \cdot x^{3\frac{1}{2}} = 12 \cdot x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{12}{x^{2\frac{1}{2}}} \quad \text{ofwel} \quad \frac{12}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

S3 Schrijf zonder negatieve exponent en zo eenvoudig mogelijk.

a $\frac{18x^3}{9x^5}$

c $\frac{24x^{4,3}}{9x \cdot 4x^{-7,6}}$

b $6 \cdot x^{-3} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

d $\frac{13}{x^{-9}}$

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt rekenen met machten met een gebroken exponent.

Bij het rekenen met machten met een gebroken exponent kun je gebruik maken van de regel $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$ met n een positief geheel getal.

Voorbeeld 1

Schrijf $2a^{\frac{1}{2}} \cdot 4a^{\frac{1}{4}}$ zonder gebroken exponent.

Oplossing

$$2a^{\frac{1}{2}} \cdot 4a^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot 4 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = 8a^{\frac{3}{4}} = 8 \cdot (a^3)^{\frac{1}{4}} = 8 \cdot \sqrt[4]{a^3}$$

Voorbeeld 2

Herleid $a^2 \cdot 4\sqrt[3]{a}$ tot de vorm $c \times a^b$.

Oplossing

$$a^2 \cdot 4\sqrt[3]{a} = 4 \cdot a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot a^{2\frac{1}{3}}$$

S4 Herleid tot een vorm zonder gebroken exponenten.

a $3^{\frac{4}{7}}$

c $5^{1\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

b $a^{\frac{3}{4}}$

d $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{2\frac{1}{6}}$

Vaardigheid

Je kunt een vergelijking met machten oplossen.

Bij het oplossen van een machtsvergelijking gebruik je de regel:

$x^a = c$ geeft $(x^a)^{\frac{1}{a}} = c^{\frac{1}{a}}$ en hieruit volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Voorbeeld 1

Los op $5x^{-3,4} = 30$.

Oplossing

$$\begin{aligned} x^{-3,4} &= 6 \\ x &= 6^{-\frac{1}{3,4}} \\ x &\approx 0,59 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Los op $x^{\frac{5}{7}} + 1 = 3$.

Oplossing

$$\begin{aligned} x^{\frac{5}{7}} &= 2 \\ x &= 2^{\frac{7}{5}} \\ x &\approx 2,64 \end{aligned}$$

S5 Los de vergelijkingen op. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $3x^4 + 1 = 19$

d $18 + 5x^{1,37} = 63$

b $2x^{-3} = \frac{1}{32}$

e $8x^3 - 1 = 0$

c $x^{\frac{2}{5}} = 3$

f $4x\sqrt{x} = 11$

Vaardigheid

Je kunt een machtsformule herleiden waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere.

Bij het herleiden gebruik je de regel:

$x^a = c$ hieruit volgt $x = c^{\frac{1}{a}}$.

Voorbeeld 1

Herleid $s = 1,25 \cdot r^{0,25}$ tot de vorm $r = a \cdot s^b$.

Oplossing

$$1,25 \cdot r^{0,25} = s \quad \text{geeft } r^{0,25} = \frac{1}{1,25} s$$

$$r = \left(\frac{1}{1,25} s \right)^{\frac{1}{0,25}} \quad \text{ofwel } r = \left(\frac{1}{1,25} s \right)^4$$

$$r = \left(\frac{1}{1,25} \right)^4 \cdot s^4 \quad \text{en dus } r \approx 0,41 \cdot s^4$$

S6 Herleid de formules tot de vorm $q = a \cdot P^b$. Rond a en b zo nodig af op twee decimalen.

a $P = 0,25 \cdot q^3$

c $P = 25 \cdot q^{-0,8}$

b $P = 0,02 \cdot q^{3,6}$

d $P = 7,8 \cdot q^{-0,35}$

T1 Schrijf de functievoorschriften zonder negatieve exponenten en zo eenvoudig mogelijk.

a $K(x) = \frac{x^5 \cdot x^2}{x^4}$

d $B(x) = \frac{5x^9}{x^7} + x^3 \cdot x^{-2}$

b $F(p) = \frac{4p^5}{2p^4 \cdot p}$

e $W(a) = \sqrt[3]{a^5} \cdot a^3 \cdot \sqrt{a} + \frac{a^5}{4\sqrt{a}}$

c $Q(t) = 3t^3 \cdot 2t^{-4} \cdot (5t^4)^2$

f $Z(t) = \frac{(2 \cdot t^2 \cdot \sqrt[5]{t})^3}{t^4} + 5(3t^2)^3$

T2 Schrijf de uitdrukkingen zo eenvoudig mogelijk zonder negatieve en gebroken exponenten.

a $2x^2 \cdot 7x^{-4}$

d $x^{-2\frac{1}{2}}$

b $x^{\frac{1}{5}}$

e $2x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-1}$

c $3x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

f $6x^3 \cdot x^{-1\frac{1}{2}}$

T3 Los de vergelijkingen op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $x^5 = 8$

d $3z^{\frac{2}{3}} = 12$

b $4 + y^{0,2} = 6$

e $5a^{2,67} = 17$

c $p^{\frac{1}{4}} = 10$

f $13 - 6 \cdot p^{1,25} = 1$

T4 Het energieverbruik E in joules van een vis die in stilstand water zwemt, hangt af van de snelheid van de vis en van de tijdsduur van het zwemmen.
De volgende formule geeft het verband weer: $E = 0,15 \cdot v^3 \cdot t$.
Hierin is v de zwemsnelheid in km per uur en t de duur van het zwemmen in uren.

a Bereken hoeveel joule een vis verbruikt die in stilstand water een afstand van 5 kilometer aflegt met een snelheid van 2 km per uur.

b Een vis zwemt 30 minuten en verbruikt daarbij 2 joule energie.
Bereken de snelheid van de vis.

c Als een vis gedurende 1 uur met een constante snelheid van v km per uur in stilstand water zwemt, dan geldt

$$v = 1,88 \cdot \sqrt[3]{E}.$$

Toon dit aan.

T5 Herleid de formules tot de vorm $B = p \cdot A^q$. Rond de waarden van p en q zo nodig af op twee decimalen.

- a** $A = B^6$ **c** $A = 5 \cdot B^{0,81}$
b $A = 4 \cdot B^{-\frac{3}{5}}$ **d** $A = 8\sqrt[3]{B^5}$

T6 Het personenvervoer, uitgedrukt in reizigerskilometers, neemt toe naarmate de bevolking en de welvaart groeien. In de tabel vind je gegevens uit de vorige eeuw over de Nederlandse bevolking B in miljoenen en het totale personenvervoer V in miljarden reizigerskilometers. Het betreft hier eigen vervoer en openbaar vervoer. Op grond van de gegevens uit de eerste 60 jaar van de vorige eeuw werd de volgende formule opgesteld: $V = 0,00154 \cdot B^{4,3}$

jaar	B	V
1900	5,1	1,70
1920	6,8	5,95
1940	8,8	17,98
1960	11,4	54,19
1980	14,1	133,93

- a** Controleer deze formule voor 1900, 1940 en 1980, en geef commentaar.
b Volgens het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) was het aantal inwoners in Nederland in het jaar 2000 ongeveer 15,6 miljoen. Hoeveel bedroeg volgens de formule het totale personenvervoer in 2000?
c Als de Nederlandse bevolking verdubbelt, hoeveel keer groter wordt het totale personenvervoer dan volgens deze formule?

T7 Een toonladder bestaat uit een serie van acht tonen. In de toonladder die begint met een c , zitten de volgende tonen: $c d e f g a b$ en dan weer een c . Het verschil tussen de eerste en de laatste toon noem je een octaaf. Daarnaast zijn er nog vijf tussenliggende tonen. Een octaaf wordt zo in twaalf precies even grote toonafstanden verdeeld. De hoogte van een toon wordt bepaald door de frequentie. Dat is het aantal trillingen per seconde. De frequentie neemt tussen twee tonen steeds met dezelfde factor toe. Bij een octaaf wordt de frequentie verdubbeld.



In de tabel staan de elkaar opvolgende tonen. Ook is van de a de frequentie gegeven.

toon	c	des	d	es	e	f	fis	g	as	a	bes	b	c
frequentie	...	...	...	...	...	...	...	...	...	440	...	...	...

- a** Waarom moet de verhouding tussen twee opeenvolgende halve tonen precies gelijk zijn aan $2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$?
b Bereken de overige frequenties voor de tonen uit deze tabel.

Je kunt rekenen met machten met een negatieve exponent.

E1 Vereenvoudig en schrijf het antwoord zonder negatieve exponent.

a $4 \cdot (2q)^{-3}$

e $(5a^{-3})^2$

b $p^7 \cdot (p^{-2})^5$

f $7x^3 \cdot 2x^{-8}$

c $\frac{k^2}{k^3 \cdot k^4}$

g $\frac{w^4 \cdot w^5}{(w^4)^5}$

d $\frac{15m^4 \cdot m}{(3m)^2}$

h $\frac{12b^3 \cdot b^5}{(2b^2)^3}$

Je kunt rekenen met machten met een gebroken exponent.

E2 Schrijf de uitdrukkingen zonder gebroken en negatieve exponenten.

a $x^{\frac{4}{11}}$

c $7x^{\frac{2}{5}}$

b $4x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

d $x^{-6\frac{1}{2}}$

Je kunt vergelijkingen met machten oplossen.

E3 Los de vergelijkingen op. Gebruik de regel $x^a = c$ geeft $x = c^{\frac{1}{a}}$ en rond zo nodig af op twee decimalen.

a $2p^3 = 11$

e $7q^{0,4} = 4$

b $3t^{-2} + 4 = 9$

f $x^{-0,2} = \frac{1}{5}$

c $25r^{0,2} = 50$

g $x^{1\frac{2}{3}} = -7$

d $x^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

h $3x^{\frac{2}{7}} = 4\frac{1}{2}$

Je kunt een machtsformule herleiden waarbij je de ene variabele uitdrukt in de andere.

E4 Herleid de formules tot de vorm $K = a \cdot N^b$. Rond indien nodig de waarden van a en b af op twee decimalen.

a $N = 0,25 \cdot K^5$

e $N = 1,2 \cdot K^{-0,3}$

b $N = \frac{1}{2} \cdot K^{\frac{1}{3}}$

f $N = 2,8 \cdot K^{1,67}$

c $N = 8 \cdot K^{2,5}$

g $N = 0,01 \cdot K^{-1\frac{1}{2}}$

d $N = 0,25 \cdot K^{\sqrt[5]{K}}$

h $N = 1,2 \cdot \sqrt{K^{0,35}}$

E5 Schrijf als som van termen van de vorm $c \cdot t^a$.

a $R(t) = \frac{3t^4 + 2t - 14}{2t^2}$

b $N(t) = \frac{t^{-3} + 3t^3 + t^{-4} \cdot t}{t^{-1}}$

E6 Schrijf de functies als machtsfunctie.

a $f(x) = \frac{x^8}{x^{-2}}$

c $h(x) = \frac{x^{-3} \cdot (x^5)^2}{\sqrt[4]{x^2}}$

b $g(x) = \frac{x\sqrt{x} \cdot x^{-2}}{x^4}$

d $j(x) = 4x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{3x^4}{\sqrt[3]{x}}$

E7 Een automobiellclub organiseert voor zijn leden een rally over 500 km. Van elke deelnemer wordt de tijd genoteerd die nodig was voor de tocht. Vervolgens wordt van elke deelnemer de gemiddelde snelheid in km per uur berekend.

- a** Een deelnemer doet 8 uur over de rally.
Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur.
- b** Leg uit dat voor het verband tussen de gemiddelde snelheid v in km per uur en de tijd t in uren de formule $v = 500 \cdot t^{-1}$ gebruikt kan worden.
- c** Plot de grafiek van de formule voor v en leg uit dat je aan de grafiek kunt zien dat deelnemers die als eerste binnenkomen een hoge gemiddelde snelheid hebben en de laatste een lage.
- d** Eén deelnemer had onderweg met erg veel pech te kampen. Hij kwam pas na enkele dagen binnen.
Wat kun je zeggen over zijn gemiddelde snelheid? Hoe zie je dat in de grafiek van v ?

E8 Conservenblikken hebben meestal de vorm van een cilinder. Voor de inhoud van een cilinder met straal r en hoogte h geldt $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. In deze formule zijn r en h in cm en V in cm^3 .

- a** Een blik met als inhoud 1 liter ($= 1000 \text{ cm}^3$) heeft een diameter van 9 cm.
Bereken de hoogte van het blik.
- b** Voor een 1-literblik geldt voor het verband tussen de straal r en de hoogte h de formule $h = 318,3 \cdot r^{-2}$.
Laat zien hoe je deze formule afleidt uit de formule voor V .



Big Mac-index

De Big Mac-index is bedacht door het Britse weekblad The Economist. Het is een informele berekeningswijze van de koopkracht in een land, gebaseerd op de prijs van een Big Mac. Bij deze index wordt de prijs van de Big Mac in de verschillende landen omgerekend naar de prijs in Amerikaanse dollars.

Een Big Mac is een verzameling van de producten als vlees, brood en sla. Maar ook arbeid en elektriciteit is nodig bij de productie. Het is dus een redelijke doorsnee van het prijsniveau in een economie.

Aangezien McDonald's bijna overal gevestigd is en overal lokaal inkoopt, is de vergelijking interessant.



30 Years Big Mac Index

Global prices for a Big Mac in selected countries in 2016



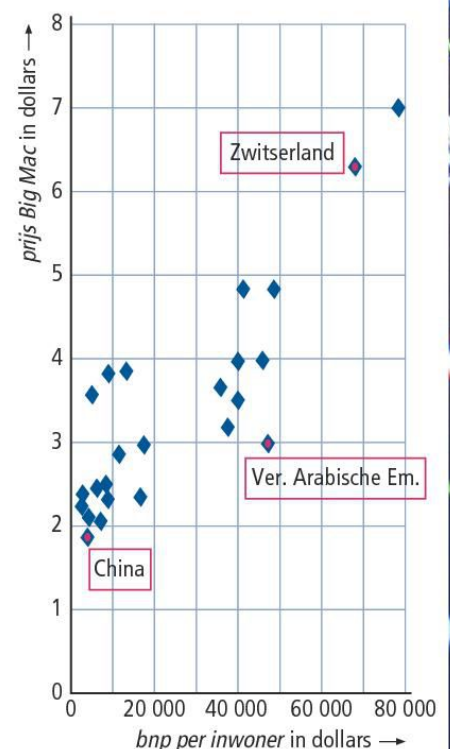
Om de welvaart van een land te meten, wordt het bnp (bruto nationaal product) gebruikt. Het bnp is de waarde van alle goederen en diensten die in een jaar door een bepaald land worden geproduceerd. Om een vergelijking te maken tussen landen wordt dit getal gedeeld door het aantal inwoners.

Je krijgt dan het bnp per inwoner.

Het bnp per inwoner zegt nog niet zoveel over de koopkracht in verschillende landen. Om de koopkracht te vergelijken kun je gebruik maken van de 'Big Mac-index'. In de grafiek is van een aantal landen het bnp per persoon en de prijs van de Big Mac in een puntenwolk weergegeven. Je ziet dat in Zwitserland de prijs van de Big Mac ruim 6 dollar is bij een bnp per persoon van 68 000 dollar.

Opdracht

- Bekijk de gegeven puntenwolk.
- In welk land is de Big Mac naar verhouding goedkoper, in China of in de Verenigde Arabische Emiraten? Verklaar je antwoord.
- Geef een schatting van de prijs van een Big Mac bij een bnp per inwoner van 60 000 dollar.
- In de dataset zie je gegevens over de minimumlonen en de prijzen van de Big Mac voor een aantal Europese landen. Onderzoek in welk land de Big Mac naar verhouding het goedkoopst en in welk land de Big Mac naar verhouding het duurst is.



Exponentiële functies

5

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In klas 2 en 3 heb je kennis gemaakt met exponentiële groei en de bijbehorende exponentiële functies. Je weet wat de invloed is van de groeifactor en de beginhoeveelheid op de grafieken.

In dit hoofdstuk ga je met exponentiële functies werken. De grafiek van een exponentiële functie kun je verschuiven in het assenstelsel. Je leert hoe het bijbehorende functievoorschrift daardoor verandert. Het functievoorschrift van een exponentiële functie kun je anders schrijven met behulp van de rekenregels die je geleerd hebt bij de machtsfuncties.

In klas 5 en 6 komen de exponentiële formules geregeld terug.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 20
- *Formules manipuleren* opdracht 35
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 29



Voorkennis

- V1** Vul in.
- 60% van € 80,- = $0,60 \times € 80,- = € \dots$
 - 51% van € 98,- = $\dots \times \dots = \dots$
 - 2,5% van € 950,- = $\dots$
- V2**
- Je krijgt 25% korting op een broek van € 89,-.
Met welk getal moet je de prijs vermenigvuldigen om de nieuwe prijs te vinden?
 - Bereken de nieuwe prijs van de broek.
 - Op een nota is de prijs exclusief btw € 39,87. De btw is 21%.
Bereken met een vermenigvuldiging de prijs inclusief btw.

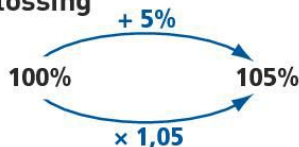
Theorie

Als een hoeveelheid met een bepaald percentage toeneemt of afneemt, kun je de nieuwe hoeveelheid berekenen met de **factor**. Dat is het getal waar je de hoeveelheid mee vermenigvuldigt.

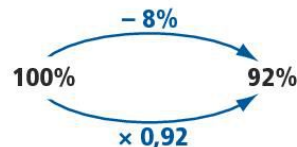
Voorbeeld

Bereken de factoren bij een toename van 5% en bij een afname van 8%.

Oplossing



Bij een toename van 5% hoort factor 1,05.



Bij een afname van 8% hoort factor 0,92.

- V3** Geef in de volgende gevallen de factor.
- De toename van een bacteriepopulatie is 3%.
 - Sara's salaris neemt toe met 0,7%.
 - De waarde van een munteenheid is met 30% gedaald.
 - Het aantal cellen neemt met 200% toe.
- V4** Paul wil een stofzuiger aanschaffen. In een winkel ziet hij een model met 25% korting en hij besluit deze te kopen. Het eindbedrag wordt berekend door eerst de korting eraf te trekken en daarna de btw (21%) erbij op te tellen. Paul vindt het niet eerlijk. 'Moet het niet andersom?'
Reken na wat voor Paul voordeliger is, de methode van de verkoper of die van hemzelf.
- V5** Bij het openen van een spaardeposito is een vast rentepercentage van 4,6% per jaar gedurende tien jaar afgesproken. Jaarlijks wordt op 1 januari de rente aan het saldo toegevoegd. Het saldo op 2 januari dit jaar was € 5.000,-.
- Bereken het saldo na twee jaar en na vijf jaar.
 - Leg uit waarom je het saldo na t jaar kunt berekenen met de formule $S(t) = 5000 \cdot 1,046^t$.

Theorie

Een groeiproces waarbij de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde positieve getal wordt vermenigvuldigd, heet een **exponentieel groeiproces**.

De hoeveelheid op tijdstip $t = 0$ heet de **beginhoeveelheid**.

Bij een exponentiële groei met **beginhoeveelheid** b en groeifactor g per tijdseenheid hoort de exponentiële functie $N(t) = b \cdot g^t$ ($g > 0$).

Voorbeeld

Het aantal bacteriën in een schaalte is op $t = 0$ gelijk aan 2000. Elk kwartier neemt dit aantal met 5% toe. Stel het functievoorschrift $N(t)$ op voor het aantal bacteriën op tijdstip t , met t in uren.

Oplossing

De beginhoeveelheid is 2000.

De groeifactor per kwartier is 1,05.

De groeifactor per uur is $1,05^4 \approx 1,22$.

De functie is $N(t) = 2000 \cdot 1,22^t$.

- V6** Bij een groeiproces is de groeifactor per uur gelijk aan 1,0078.
- Hoe groot is het groeipercentage per uur?
 - Hoe groot is de groeifactor en het groeipercentage per twee uur?
 - Hoe groot is de groeifactor en het groeipercentage per etmaal?
 - Hoe groot is de groeifactor en het groeipercentage per week?
- V7** Stel voor de volgende gevallen een formule op. Gebruik als tijdseenheid een jaar.
- De jaarlijkse toename van een insectenpopulatie is 13,2% en de beginhoeveelheid is 216 miljoen.
 - De visstand in een groot meer neemt elk jaar af met 14%. Het meer bevat nu nog 5000 ton vis.
 - De waarde van een buitenlandse munt daalt jaarlijks met 0,15% ten opzichte van de euro. Nu is die munt nog € 0,87 waard.

5.1 Verschillende soorten groei

Je leert • hoe je rekt met lineaire en exponentiële groei

Leerroutes • ondersteunend: 1—2—03—04—5—6
 • doorlopend: 1—2—3—4—5—6
 • uitdagend: 1—2—3—4—5—U1

Je krijgt van je ouders zakgeldverhoging waarbij je mag kiezen uit twee mogelijkheden.

- Het zakgeld wordt maandelijks verhoogd met 3%.
- Het zakgeld gaat elke maand met € 0,50,- omhoog.

Op dit moment krijg je € 15,- per maand.

- Welke optie kies je? Waarom?



- 1** Bij een regenmeter wordt de regen opgevangen in een cilinder. In de tabel staat de waterhoogte in millimeters die tijdens een regenbui werd gemeten. Vanaf 8.00 uur regende het steeds even hard.

<i>tijd in minuten</i>	8.10	8.30	9.00	9.20
<i>waterhoogte in mm</i>	11,5	20,5	34,0	43,0

- a** Waarom is er hier sprake van een lineair verband tussen de tijd en de waterhoogte?
- b** Laat zien dat de waterhoogte toeneemt met 0,45 mm per minuut.
- c** Hoe hoog stond het water in de regenmeter om 8.00 uur?
- d** Stel een formule op voor de waterhoogte h in mm met de tijd t in minuten na 8.00 uur.

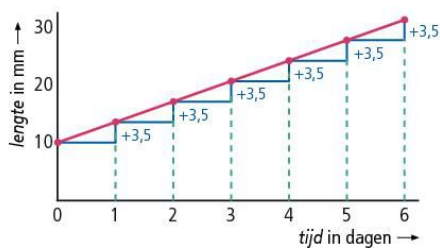
- 2** Bij de rampen met de kerncentrales in Tsjernobyl (1986) en Fukushima (2011) kwam de radioactieve stof Cesium-137 vrij. De stralingsintensiteit van deze stof halveert in 30,2 jaar.

- a** Geef de groeifactor per 30,2 jaar.
- b** Laat zien dat de groeifactor per jaar ongeveer 0,977 31 is.
- c** Bereken na hoeveel jaar 25% van de stralingsintensiteit is verdwenen.
- d** Na hoeveel jaar komt de stralingsintensiteit voor het eerst onder de 0,1% van de beginwaarde?

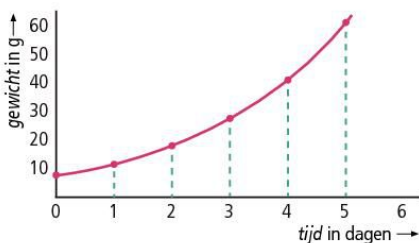
Theorie

Bij **lineaire groei** is de toename of afname per tijdseenheid constant. De toename is de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn. Bij een afname is de richtingscoëfficiënt negatief.

Bij **exponentiële groei** is de groeifactor per tijdseenheid constant. Bij een toename is de groeifactor groter dan 1. Bij een afname ligt de groeifactor tussen 0 en 1.

Voorbeeld

<i>tijd in dagen</i>	0	1	2	3	4
<i>lengte in mm</i>	10	13,5	17	20,5	24
		+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5



<i>tijd in dagen</i>	0	1	2	3	4
<i>gewicht in g</i>	8	12	18	27	40,5
		$\times 1,5$	$\times 1,5$	$\times 1,5$	$\times 1,5$

Ondersteunende route → maak opdracht 03

3 De tabellen horen bij lineaire of exponentiële groei.

H Stel bij iedere tabel een functievoorschrift op.

A	<i>x</i>	0	1	2	3
	<i>y</i>	7	9	11	13

C	<i>t</i>	4	6	10	20
	<i>R</i>	10	13	19	34

B	<i>w</i>	0	1	3	4
	<i>B</i>	5	4	2,56	2,048

D	<i>d</i>	2	3	4	5
	<i>A</i>	14,4	17,28	20,74	24,88

Ondersteunende route → maak opdracht 04

4 Mex en Britt hebben tuinkerszaadjes geplant. In de tabel zie je de gemiddelde hoogte van de plantjes.

- Mex denkt dat de groei exponentieel is.
Toon aan dat in dat geval de groeifactor 1,4 is.
- Bereken de beginhoeveelheid bij dit verband.
- Stel een functievoorschrift op voor de hoogte h van de tuinkersplantjes.
- Volgens Britt verloopt de groei lineair.
Stel het bijbehorende functievoorschrift op.
- Na acht dagen zijn de plantjes gemiddeld 7,4 cm hoog.
Welke formule blijkt het beste de groei te voorspellen?

<i>tijd t in dagen</i>	1	6
<i>hoogte h in cm</i>	0,7	3,8

5.1 Verschillende soorten groei

- 5** Een kop koffie heeft direct na het inschenken een temperatuur van $80\text{ }^{\circ}\text{C}$. Elke vijf minuten wordt de temperatuur gemeten. In de tabel staan de resultaten.

t in minuten	T in $^{\circ}\text{C}$	verschil met omgeving
0	80	60
5	52	32
10	37	...
15	29	...
20	25	...

De omringende lucht heeft een temperatuur van $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Volgens de afkoelingswet van Newton neemt het temperatuurverschil tussen een vloeistof en de omgeving exponentieel af.

- Vul de tabel verder in en laat zien dat bij benadering aan de afkoelingswet wordt voldaan.
 - De temperatuur T van de koffie na t minuten voldoet aan de formule $T = 20 + 60 \cdot 0,881^t$. Controleer dit voor $t = 5$, $t = 10$ en voor $t = 15$.
 - Plot de grafiek van T . Tot welke horizontale lijn nadert de grafiek van T ?
 - Welke grenswaarde heeft de formule en wat is de praktische betekenis van deze grenswaarde?
- 6** De inruilwaarde van een auto neemt elk jaar af. Voor een Citroën Cactus kun je deze berekenen met de formule $C = 500 + 22000 \cdot 0,8^t$. Hierin is C de inruilwaarde in euro's en t de tijd in jaren na aankoop. De inruilwaarde X van een Xantippe kun je berekenen met de formule $X = 24000 - 1650t$.
- Geef van beide auto's de nieuwwaarde.
 - Leg uit hoe je aan de formule van de Cactus kunt zien dat de inruilwaarde afneemt.
 - Hoe hoog is op den duur deze inruilwaarde?
 - Na hoeveel jaar is de inruilwaarde van de Xantippe gelijk aan die van de Cactus?



Uitdagende route → maak opdracht U1

Ondersteunende opdrachten

03 Je ziet twee tabellen die horen bij lineaire en exponentiële groei.

- Tabel A hoort bij een lineaire groei.
Waaraan kun je dat zien?
- Bereken de richtingscoëfficiënt en het startgetal bij tabel A.
- Stel een formule op bij tabel A.
- Tabel B hoort bij exponentiële groei.
Waaraan kun je dat zien?
- Bereken bij deze tabel de waarde van y als $x = 0$.
- Stel een formule bij tabel B op.
- De tabellen C en D horen bij lineaire of exponentiële groei.
Stel bij beide tabellen een formule op.

A	x	1	2	3	4
	y	10	8	6	4

B	x	1	2	3	4
	y	10	20	40	80

C	x	1	3	5	7
	y	20	26	32	38

D	x	2	3	4	58
	y	20,3	26,4	34,4	44,6

04 Hans en Jos hebben een paar bonen geplant. Nadat de plantjes beginnen te groeien, meten ze gedurende vijf dagen de hoogte van de plantjes. De gemiddelde hoogte van de plantjes verwerken ze in een tabel.

<i>tijd t in dagen</i>	0	1	2	3	4
<i>hoogte h in cm</i>	3,0	3,6	4,3	5,2	6,2

- Volgens Jos verloopt de groei lineair. Hij gaat uit van de gegevens van dag 1 en dag 5.
Bereken de bijbehorende richtingscoëfficiënt.
- Stel een lineaire formule op die hierbij past.
- Hans denkt dat de groei exponentieel verloopt.
Hoe volgt dit uit de tabel?
- Laat met een berekening zien dat de groeifactor ongeveer gelijk is aan 1,2.
- Leg uit dat de formule $h = 3,0 \cdot 1,2^t$ de groei beschrijft.
- Na 10 dagen zijn de plantjes gemiddeld 11,7 cm hoog.
Welke formule blijkt de groei het beste te voorspellen?

Uitdagende opdrachten

U1 In een stedelijk gebied liggen twee middelgrote steden.

- Na hoeveel jaar wonen in stad B meer mensen dan in stad A?
- Stad C is in 2018 net zo groot als stad B. Stad C kent een groeipercentage van 4%.
In welk jaar is het inwonertal van stad C groter dan van stad A?

Stad A:
In 2013 is het inwoneraantal 800 000.
De jaarlijkse groei is 3%.

Stad B:
In 2013 is het inwoneraantal 550 000.
De jaarlijkse groei is 3,7%.

5.2 Grafieken van exponentiële functies

Je leert

- wat de invloed is van de groeifactor op de grafiek van een exponentiële functie
- hoe je met gebroken exponenten in exponentiële functies rekt

Leerroutes

- ondersteunend: 7—08—9—010—10—11—12
- doorlopend: 7—8—9—10—11—12—13
- uitdagend: 7—8—9—10—12—13—U2

Bij de evenaar heeft de aarde een omtrek van ongeveer 40 000 km. Een A4tje is 29,7 cm lang en 21 cm breed. Je knipt het in de lengte door en legt de stroken achter elkaar. De rechthoek die dan ontstaat knip je opnieuw in de lengte door. Enzovoort.

- Hoe vaak moet je knippen zodat je in theorie met de stroken de aarde langs de evenaar zou kunnen omspannen?

De aarde

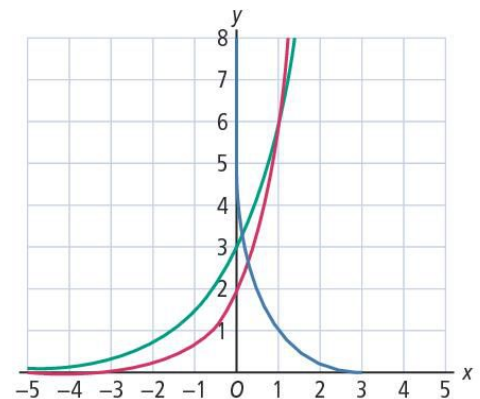
Gegevens

Straal
6380 km

Omtrek
40 000 km

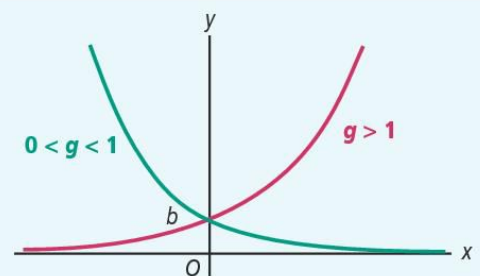


- 7 Van de functies $f(x) = 2 \cdot 3^x$, $g(x) = 3 \cdot 2^x$ en $h(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$ zijn de grafieken getekend.
- Bij welke functie is de grafiek dalend? Hoe zie je dat aan het functievoorschrift?
 - Hoe zie je aan de functievoorschriften dat de andere twee functies een stijgende grafiek hebben?
 - Bij welke functie gaat de grafiek door het punt $(0, 3)$?
 - Welke grafiek hoort bij welk functievoorschrift?
 - Welke lijn is de asymptoot van alle drie de grafieken?



Theorie

De grafiek van een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ ($b > 0$) is **stijgend** als $g > 1$ en **dalend** als $0 < g < 1$. Omdat $f(0) = b$, gaat de grafiek van f door $(0, b)$ op de verticale as. De grafiek van de functie f heeft de x -as als horizontale asymptoot.



Ondersteunde route → maak opdracht 08

- 8 Gegeven zijn de functies $f(x) = 20 \cdot 1,5^x$, $g(x) = 0,9^x$, $h(x) = 3 \cdot 0,7^x$ en $k(x) = 2 \cdot 1,01^x$.

- Welke van deze functies hebben een grafiek die stijgend is?
- Welke van deze grafieken gaat door het punt $(0, 1)$?
- Plot de grafiek van de functie k en geef een formule van de asymptoot van de grafiek van k .

- 9 Een jonge poes is vanaf de geboorte elke week gewogen. In de tabel staan de resultaten van de eerste vier weken.

- Onderzoek of het gewicht van de poes steeds met ongeveer dezelfde factor wordt vermenigvuldigd.
- Stel het functievoorschrift op voor het gewicht van de poes.
- Plot de grafiek van het groeiproces van de poes.
- Neem aan dat de groei nog even op deze manier doorgaat. Welk gewicht heeft de poes na zes weken?
- Welke waarde van t hoort er bij 10 dagen?
- Bereken met het functievoorschrift het gewicht van de poes na 10 dagen.

<i>tijd</i> in weken	<i>gewicht</i> in grammen
0	80
1	100
2	125
3	156
4	195

In exponentiële functievoorschriften en formules kun je ook breuken en negatieve getallen bij de variabele invullen. Bij een groeiproces krijg je bij een breuk de hoeveelheid op een tussenliggend tijdstip. Bij negatieve waarden vind je de hoeveelheid op een tijdstip dat ligt vóór $t = 0$.

Ondersteunde route → maak opdracht 010

- 10 Van de radioactieve stof Radium-228 is bekend dat er van een hoeveelheid na een jaar nog 88,6% over is. In een laboratorium ligt al enkele jaren een hoeveelheid van deze stof. Op 1 juli 2020 is er nog 12 gram van deze stof.
- Waarom is er sprake van exponentiele groei?
 - Stel een formule op voor de hoeveelheid Radium-228. Neem $t = 0$ op 1 juli 2020 met t de tijd in jaren.
 - Welke datum hoort bij $t = -1$? Leg je antwoord uit.
 - Welke waarde van t hoort er bij 1 juli 2018?
 - Bereken de hoeveelheid Radium-228 een jaar eerder, dus op 1 juli 2019.
 - Welke waarde van t hoort er bij 1 oktober 2020?
 - Bereken de hoeveelheid Radium-228 op 1 oktober 2019.
 - Bereken in welk jaar de hoeveelheid Radium-228 minder is dan 0,1 gram.

5.2 Grafieken van exponentiële functies

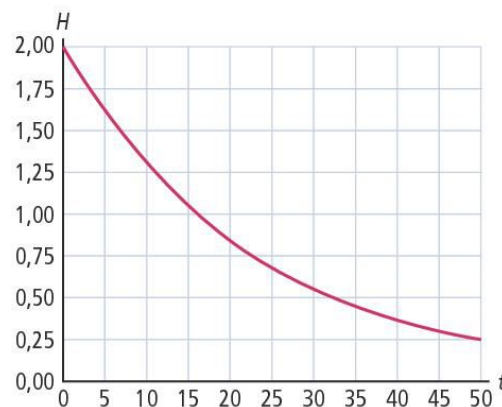
11 Van een boomblad wordt een aantal dagen de lengte gemeten.

- H**
- Laat met een berekening zien dat het groeiproces bij benadering exponentieel is. Hoe groot is de groeifactor per dag? Rond je antwoord af op één decimaal.
 - Stel een functievoorschrift bij dit groeiproces op. Neem de tijd t in dagen met $t = 0$ op 15 april.
 - Hoe lang is het blad op 20 april?
 - Op welke datum was het blad 0,4 cm?

<i>tijdstip</i>	<i>lengte in cm</i>
15 april	1,4
16 april	1,7
17 april	2,0
18 april	2,4
19 april	2,9

12 Een fietsband is een beetje poreus. In de figuur is de grafiek getekend waarin de hoeveelheid lucht H in grammen is uitgezet tegen de tijd t in dagen.

- Lees uit de grafiek af hoeveel lucht er in de band zit als deze net is opgepompt.
- Gebruik de grafiek om te berekenen hoeveel procent van de lucht per 10 dagen weg lekt.
- De hoeveelheid lucht in de band is t dagen na het oppompen ongeveer gelijk aan $H = 2 \cdot 0,958^t$, met H in grammen.
Hoeveel gram lucht bevat de band nog na 25 dagen? Bereken dit met behulp van het functievoorschrift en controleer je antwoord daarna met de grafiek.
- Hoe kun je aan de formule zien dat de band op den duur bijna helemaal leeg is?
- Na hoeveel dagen zit er minder dan 0,1 gram lucht in de band?



13 In een vijver in een stadspark is sprake van flinke algengroei. Op het moment dat de stadsopzichter begint met meten zit er 15 gram algen per liter water. Uit onderzoek blijkt dat de concentratie algen per week met 10% stijgt.

- Geef een formule waarmee je de concentratie algen kunt berekenen. Neem voor t de tijd in weken met $t = 0$ op het moment waarop de stadsopzichter begon met meten.
- Geef nogmaals een formule waarmee je de concentratie algen kunt berekenen. Neem nu voor t de tijd in dagen met $t = 0$ op het moment waarop de stadsopzichter begon met meten.
- Na hoeveel dagen is de hoeveelheid algen in de vijver verdubbeld? Bereken dit met behulp van beide formules.

Uitdagende route → maak opdracht U3

Ondersteunende opdrachten

- 08** Gegeven zijn de functies $f(x) = 7 \cdot 0,8^x$ en $g(x) = 1,4^x$
- Hiernaast is de grafiek van f getekend.
Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de grafiek van f dalend is?
 - Bereken $f(0)$. Hoe zie je dit terug in de grafiek?
 - De groeifactor van functie g is 1,4.
Is de grafiek van g stijgend of dalend?
 - Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek van g met de y -as.
 - Plot de grafiek van g . Welke lijn is de horizontale asymptoot van de grafiek van g ?
 - Verder zijn gegeven de functies $h(x) = 1 \cdot 0,98^x$, $k(x) = 200 \cdot 0,53^x$ en $l(x) = 2,8^x$.
Geef bij elke functie aan of de grafiek stijgend of dalend is en hoe je dit aan het functievoorschrift kunt zien.
 - Welke van deze grafieken gaat door het punt $(0, 1)$?

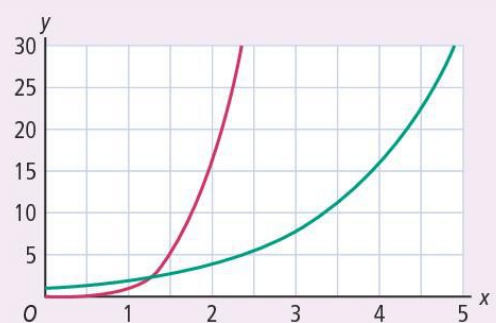


- 010** Van een courgette wordt een aantal weken het gewicht gemeten. De meetresultaten staan in de tabel.
- Bereken de groeifactor tussen 2 en 9 mei.
 - Bereken ook de groeifactoren tussen de andere data.
 - Waarom kun je nu spreken over een bij benadering exponentieel groeiproces?
 - Hoe groot is de groeifactor per week?
 - Stel een functievoorschrift op bij dit groeiproces. Neem de tijd t in weken met $t = 0$ op 2 mei.
 - Leg uit dat bij 20 mei de waarde $t = 2\frac{4}{7}$ hoort.
 - Bereken hoe zwaar de courgette volgens de formule is op 20 mei.
 - Welke waarde van t hoort bij 12 mei?
 - Bereken met het functievoorschrift het gewicht van de courgette op 12 mei.
 - Op welke datum was het gewicht 100 gram?

tijdstip	gewicht in grammen
2 mei	84
9 mei	111
16 mei	146
23 mei	193
30 mei	255

Uitdagende opdrachten

- U2** Je ziet de grafieken van $f(x) = x^4$ en $g(x) = 2^x$ op een klein interval. Jochem vindt bij de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ de oplossing $x > 1,24$. Ga na of dit klopt.



5.3 Andere tijdseenheden

Je leert

- hoe je de groeifactor aanpast aan een andere tijdseenheid
- hoe je het groeipcentage berekent bij een andere tijdseenheid

Leerroutes

- ondersteunend: 14—15—016—17—018—18—19—20
- doorlopend: 14—15—16—17—18—19—20—21
- uitdagend: 14—16—17—18—20—21—U3—U4

Radioactieve stoffen hebben de eigenschap om uiteen te vallen. Hierbij ontstaat straling die gevaarlijk kan zijn. De straling die vrijkomt, wordt in de loop van de tijd minder. Van een radioactief element is bekend dat de straling in 7,5 jaar halveert.

- Is het verval van de stof in tien jaar de helft van het verval in twintig jaar? Hoe zou je dit kunnen nagaan?



- 14** Het aantal bacteriën in een kweek wordt gegeven door de formule $N = 1500 \cdot 3^t$. Hierin is t de tijd in uren.

- Hoe groot is de groeifactor per uur?
- In de tabel is de stapgrootte 0,5 uur. Gebruik de formule om de waarden in de tabel in te vullen.
- Bereken met behulp van de waarden in je tabel de groeifactor per half uur.
- Leg uit hoe je uit de formule kunt aflezen dat de groeifactor per halfuur gelijk is aan $3^{\frac{1}{2}}$.
- Maak voor het eerste uur een tabel met stapgrootte 0,25 en bereken de aantallen bacteriën.
- Bereken zowel uit de tabel als met de formule de groeifactor per kwartier.

t	0	0,5	1	1,5
N	1500	...	4500	...

- 15** Bij een temperatuur net boven 0°C kun je de hoeveelheid algen in een sloot berekenen met de formule $A = 500 \cdot 2^t$. Hierin is A het aantal algen per cm^3 en is t de tijd in weken.

- Hoe groot is de groeifactor per week?
- Bereken de groeifactor per 3 weken.

dagen	0	1	2	3	4	5	6	7
t	0	$\frac{1}{7}$	...	...	...	...	...	1
N	500	...	...	...	...	...	...	...

- Leg uit dat de groeifactor per dag gelijk is aan $2^{\frac{1}{7}}$.
- Bereken in drie decimalen de groeifactor per dag.
- Bereken het aantal algen per cm^3 na 60 dagen.

Theorie

Als g de **groefactor per tijdseenheid** is, dan is de groefactor per n tijdseenheden g^n .

De groefactor voor een n -de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$ ofwel $\sqrt[n]{g}$.

Voorbeeld

Als de groefactor per jaar gelijk is aan 3, dan is:
 de groefactor per 4 jaar $3^4 = 81$,
 de groefactor per half jaar $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1,732$,
 de groefactor per kwartaal $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \approx 1,316$ en
 de groefactor per maand $3^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3} \approx 1,096$.

t in jaren	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
N	500	658	866	1140	1500

$\times 1,316 \times 1,316 \times 1,316 \times 1,316$
 $\times 3$

Ondersteunende route → maak opdracht 016

- 16** Bij een groeiproses is de groefactor per dag 1,5.
- H**
- Bereken in twee decimalen de groefactor per week.
 - Bereken in twee decimalen de groefactor per halve dag.
 - Wat is de groefactor per acht uur?
 - Geef in drie decimalen de groefactor per uur.
- 17** Een bacteriekolonie groeit met 15% per halve dag.
- Hoe groot is de groefactor per halve dag?
 - Bereken de groefactor per uur.
 - Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën per uur toe? Rond af op één decimaal.

Aanpak

Hoe bereken je bij een exponentieel groeiproses het groeipcentage voor een andere tijdseenheid?

- Bereken de groefactor per gegeven tijdseenheid.
- Bereken de groefactor voor de gevraagde tijdseenheid.
- Leid het gevraagde percentage af uit deze groefactor.

Voorbeeld

De groei is 20% per uur.
 Hoeveel procent is dat per 40 minuten?

Oplossing

- De groefactor is 1,2 per uur.
- Dat is $(1,2)^{\frac{1}{60}}$ per minuut, dus

$$\left(1,2^{\frac{1}{60}}\right)^{40} = 1,2^{\frac{40}{60}} \approx 1,129 \text{ per 40 minuten.}$$

- De groei is ongeveer 12,9% per 40 minuten.

5.3 Andere tijdseenheden

Ondersteunende route → maak opdracht 018

- 18** **H**
- Een populatie neemt exponentieel toe met 60% per etmaal. Bereken het groeipcentage per uur.
 - Een vissenpopulatie neemt exponentieel af met 4% per vijf jaar. Bereken de procentuele afname per 15 jaar.
 - Een bank berekent voor het rood staan een rente van 1,15% per maand. Hoeveel procent is dat per jaar?
 - Het aantal inwoners van een land groeit exponentieel met 70% per 20 jaar. Hoe groot is de jaarlijkse procentuele groei?



- 19**
- In een meer worden van een vissoort 1000 vissen uitgezet. Elk half jaar neemt het aantal vissen met 60% toe.
- Geef een functievoorschrift voor het aantal vissen N na t maanden.
 - Iemand gebruikt voor het aantal vissen de formule $N = 1000 \cdot 1,6^{\frac{1}{26}t}$. Welke tijdseenheid wordt hier gebruikt?
 - Na hoeveel maanden zijn er meer dan 10 000 vissen in dit meer?

- 20**
- De tabel hoort bij een exponentieel groeiproces.
- Stel een functievoorschrift van f op met t in jaren.
 - Stel een functievoorschrift op voor de functie g die hetzelfde groeiproces beschrijft maar nu met t in maanden.

t in jaren	2	6
$f(t)$	36	2916

- 21**
- Bij een groeiproces is de groeifactor 6 per dag. De groeifactor per halve dag is dan $6^{\frac{1}{2}}$.
- Rond de groeifactor per halve dag af op één decimaal en laat door terug te rekenen zien dat deze afronding erg onnauwkeurig is.
 - Laat door terug te rekenen zien dat de groeifactor 2,45 per halve dag een goede afronding is.
 - Onderzoek of het verantwoord is om 1,08 als groeifactor per uur te nemen.
 - Hoe groot is in procenten de afwijking van de groeifactor per dag als je uitgaat van 1,078 als groeifactor per uur?

Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

Ondersteunende opdrachten

- 016** Bij een groeiproces is de groeifactor 1,25 per dag.
Op een bepaalde dag is een hoeveelheid gelijk aan 50.
- Bereken de hoeveelheid één dag later.
 - Leg uit dat je de groeifactor per twee dagen kan vinden door $1,25^2$ uit te rekenen.
 - Laat zien dat de groeifactor per vier dagen gelijk is aan 2,44.
 - Bereken de hoeveelheid na een halve dag.
 - Leg uit dat de groeifactor per halve dag gelijk is aan $1,25^{\frac{1}{2}} \approx 1,12$
 - Zes uur is $\frac{1}{4}$ dag.
Vul in: de groeifactor per zes uur is gelijk aan $1,25^{\dots} \approx \dots$
 - Bereken de hoeveelheid na een zes uur.
 - Bereken de groeifactor per uur.

t	0	0,5	1	1,5	2
N	50	...	...	...	...

- 018** Bij een groeiproces is het groeipercentage 50% per dag.
- Welke groeifactor hoort bij dit groeipercentage?
 - Leg uit dat de groeifactor per halve dag gelijk is aan $1,5^{\frac{1}{2}} \approx 1,22$.
 - Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 1,22?
 - Bereken de groeifactor per uur.
 - Welk groeipercentage hoort hier bij?
 - Een ander groeiproces is het groeipercentage 5% per uur.
Bereken de groeifactor en het groeipercentage per vijf uur.
 - Bereken het groeipercentage per tien uur.
 - Bereken het groeipercentage per minuut.

Uitdagende opdrachten

<i>dag</i>	1 juni	18 juni	30 juni
<i>aantal muggen</i>	2360	7180	15 740

- U3** Een muggenpopulatie groeit. In de tabel zie je het aantal muggen op 1 juni, op 18 juni en op 30 juni.
Onderzoek of er sprake kan zijn van exponentiële groei.
- U4** Het aantal fruitvliegen groeit gedurende 20 weken met $a\%$ per week. Vervolgens neemt het aantal gedurende 10 weken met $a\%$ per week af. Het aantal fruitvliegen is dan gelijk aan het aantal voordat de groei van de populatie begon.
Bereken de waarde van a . Geef je antwoord in één decimaal.

Je leert

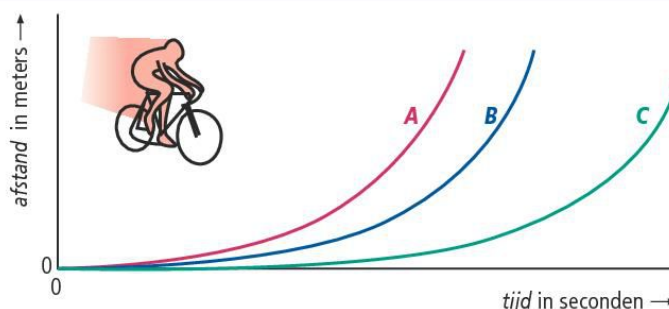
- hoe je na transformaties het functievoorschrift van de beeldgrafiek vindt

Leerroutes

- ondersteunend: 22—23—024—24—25—26—027—28
- doorlopend: 22—23—24—25—26—27—28—29
- uitdagend: 22—24—25—26—27—28—29—U5

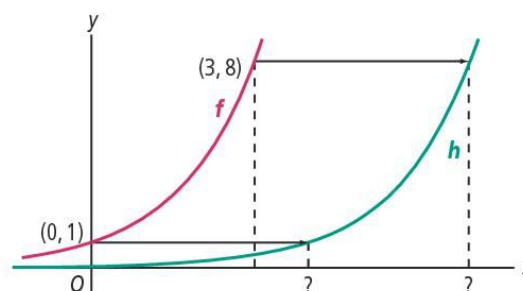
De wielrenners Robert, Bram en Steven rijden een tijdrit. De grafieken geven het verband tussen de tijd en de afgelegde afstand gedurende de eerste 20 seconden. Steven legt elke seconde twee keer zoveel meters af als Bram. Robert rijdt net zo snel als Bram, maar hij had bij de start enkele seconden vertraging.

- Welke grafiek hoort bij welke wielrenner?



- 22**
- Plot en schets in één figuur de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 2^x - 3$.
 - Geef vergelijkingen van de asymptoten van beide grafieken.
 - Omschrijf hoe je de grafiek van g uit de grafiek van f kunt laten ontstaan.

- 23**
- Je ziet de grafieken van $f(x) = 2^x$ en $h(x) = 2^{x-4}$.
- Voor welke waarde van x geldt $f(x) = 1$? En $f(x) = 8$?
 - Voor welke waarde van x geldt $h(x) = 1$? En $h(x) = 8$?
 - Vul in: De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f ... naar ... te schuiven.
 - Geef vergelijkingen van de asymptoten van beide grafieken.

**Theorie**

Een grafiek kun je verschuiven. De grafiek die hierdoor ontstaat heet de **beeldgrafiek**.

Als je de grafiek van een functie f met a eenheden omhoog schuift, krijg je de grafiek van een functie h . Er geldt dan dat $h(x) = f(x) + a$.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts schuift, krijg je het functievoorschrift van de beeldgrafiek door de variabele x te vervangen door $x - a$. Het functievoorschrift wordt dan $h(x) = f(x - a)$.

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ wordt 1 naar rechts en daarna 2 omhoog verschoven.

Geef het functievoorschrift en een vergelijking van de asymptoot van de beeldgrafiek.

Oplossing

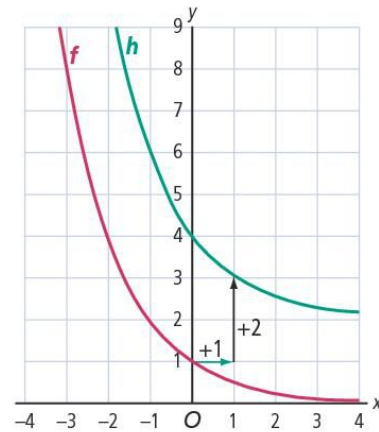
1 naar rechts verschuiven, dus moet je x vervangen door $x - 1$.

Je krijgt de grafiek van $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

De grafiek van g wordt vervolgens 2 omhoog geschoven, dit

geeft de grafiek van $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

De asymptoot $y = 0$ van de grafiek van f gaat door de verticale verschuiving over in de lijn $y = 2$.

**Ondersteunende route → maak opdracht 024****24**

Gegeven is de functie $f(x) = 1,5^x$.

H

Geef het functievoorschrift en een vergelijking van de asymptoot van de beeldgrafiek na:

- a de verschuiving 2 naar rechts
- b de verschuiving 1 naar links
- c de verschuiving 5 omlaag
- d de verschuivingen 4 omhoog en daarna 2 naar links
- e de verschuivingen 3 naar rechts en daarna 8 omlaag

25

Geef de verschuivingen waarmee je de grafiek van

H

$g(x) = 2^{x+4} - 3$ kunt laten ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 2^x$.

26

Suzy zet op 1 juli 2020 een bedrag van € 75,- op een spaarrekening tegen 3% rente per jaar.

Het saldo van haar spaarrekening wordt beschreven door $S = 75 \cdot 1,03^t$ met $t = 0$ op 1 juli 2020. Haar broer Harry zet precies twee jaar later € 100,- op eenzelfde soort spaarrekening.

- a Welk van de formules $H = 100 \cdot 1,03^{t-2}$ of $H = 100 \cdot 1,03^{t+2}$ beschrijft zijn saldo, met t het aantal jaren na 1 juli 2020?
- b Voor welke waarden van t heeft de formule betekenis?

5.4 Transformaties

Theorie

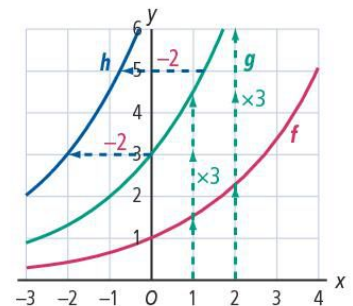
Als een functievoorschrift wordt vermenigvuldigd met een getal, wordt de bijbehorende grafiek **vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as**. Spiegelen in de x -as is hetzelfde als vermenigvuldigen met de factor -1 ten opzichte van de x -as. Spiegelingen, verschuivingen en vermenigvuldigingen van een grafiek zijn voorbeelden van **transformaties** van grafieken.

Voorbeeld

De grafiek van $f(x) = 1,5^x$ wordt vermenigvuldigd met factor 3 ten opzichte van de x -as en daarna 2 naar links geschoven. Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Oplossing

Eerst vermenigvuldigen met 3 geeft $g(x) = 3 \cdot 1,5^x$.
De verschuiving van 2 naar links geeft $h(x) = 3 \cdot 1,5^{x+2}$



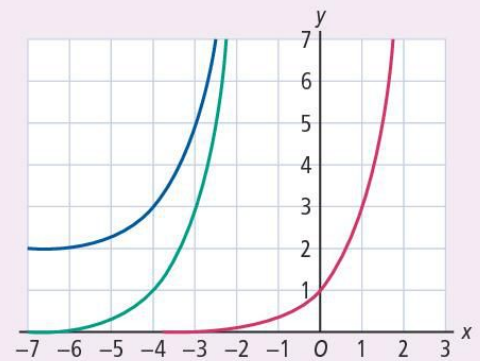
Ondersteunende route → maak opdracht 027

- 27** Gegeven is de functie $f(x) = 1,2^x$.
H Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek van f na:
- a** vermenigvuldiging met factor 5 ten opzichte van de x -as.
 - b** vermenigvuldiging met factor 2 ten opzichte van de x -as gevolgd door een verschuiving 3 naar rechts.
 - c** verschuiving 2 naar links gevolgd door spiegelen in de x -as.
- 28** Geef van de functies aan met welke transformaties de grafiek kan ontstaan uit de grafiek van $f(x) = 1,5^x$.
- a** $f(x) = 4 \cdot 1,5^x + 3$
 - b** $g(x) = 1,5^{x-3} + 2$
 - c** $h(x) = 3 \cdot 1,5^{x+1}$
 - d** $k(x) = -3 \cdot 1,5^x + 1$
- 29** De formule $H = 8 - 7 \cdot 0,8^t$ beschrijft de hoogte van een boom. Hierin is H de hoogte in meters en is t de tijd in jaren.
- a** Plot de grafiek van H .
 - b** Hoe hoog was de boom bij het planten?
 - c** Hoe hoog wordt de boom op den duur?
 - d** Geef de transformaties waarmee je de grafiek van H uit de grafiek van $y = 0,8^t$ kunt laten ontstaan.

Uitdagende route → maak opdracht U5

Ondersteunende opdrachten

- 024** Bij de rode grafiek hoort de functie $f(x) = 3^x$. De groene grafiek is ontstaan door de rode grafiek 4 eenheden naar links te schuiven. De blauwe grafiek is ontstaan door de groene grafiek twee omhoog te schuiven.
- Vul in: bij een verschuiving van 4 naar links moet je in het functievoorschrift x vervangen door ..., dus bij de groene grafiek hoort het functievoorschrift $g(x) = 3^{\dots}$
 - Vul in: bij een verschuiving van 2 omhoog tel je bij het functievoorschrift ... op, dus bij de blauwe grafiek hoort het functievoorschrift $h(x) = 3^{\dots} + \dots$



- 027** Gegeven is de functie $f(x) = 3^x$.
- De grafiek van f wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met factor 4. Bij de beeldgrafiek hoort de functie g .
Vul in: $g(x) = \dots \cdot 3^x$.
 - De grafiek van g wordt gespiegeld in de x -as. Bij de beeldgrafiek hoort de functie h .
Met welke factor moet je het functievoorschrift van $g(x)$ vermenigvuldigen?
 - Vul in: $h(x) = \dots \cdot g(x)$ dus $h(x) = \dots \cdot 3^x$
 - De grafiek van h wordt 2 naar links verschoven. Bij de beeldgrafiek hoort de functie k .
Vul in: Bij een verschuiving van 2 naar links vervang je x door ...
 - Geef het functievoorschrift van $k(x)$.
 - Gegeven is de functie $m(x) = 2 \cdot 3^x$.
Geef een functievoorschrift van de beeldgrafiek van m na: vermenigvuldiging met factor 3 ten opzichte van de x -as en een verschuiving van 2 naar rechts.

Uitdagende opdrachten

- U5** Gegeven is de functie $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. De grafiek van f wordt eerst a eenheden naar links geschoven en daarna vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as met factor 16. De grafiek die je dan krijgt, valt samen met de grafiek van f zelf.
Bereken de waarde van a .

5.5 Functievoorschriften herleiden

Je leert

- hoe je een exponentieel functievoorschrift herleidt

Leerroutes

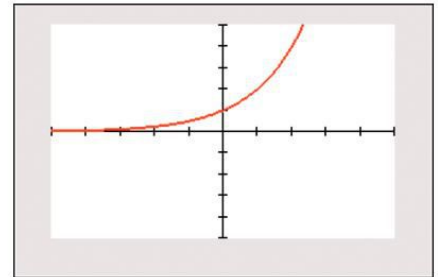
- ondersteunend: 30—31—32—33—034—35—036—36—37
- doorlopend: 30—31—32—33—34—35—36—37—38
- uitdagend: 30—31—33—35—36—37—38—U6—U7

Floris plot de grafieken van de functies

$$f(x) = 2^x \text{ en } g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x+2}.$$

Je ziet het scherm van zijn rekenmachine.

- Verklaar waarom Floris maar één grafiek te zien krijgt.



30 Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot 10^{-x+2}$.

- a** Albert zegt dat de beginhoeveelheid 5 en de groeifactor 10 is.
Leg uit dat de uitspraken van Albert niet juist zijn.
- b** Vul de tabel in.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	...	...	...	...	...

- c** Bereken met behulp van de waarden in de tabel de beginhoeveelheid en de groeifactor.
- d** Schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

31 Gegeven is de functie $f(x) = 2^{1-3x}$.

- a** Vul in: $2^{1-3x} = 2 \cdots \cdot 2 \cdots = \cdots \cdot (2 \cdots)^x$.
- b** Het functievoorschrift van f is te schrijven als $f(x) = b \cdot g^x$.
Welke waarden hebben b en g ?
- c** Leg uit of de grafiek van f stijgend of dalend is.
- d** Hoe kun je dit aan het functievoorschrift zien?

$$g^0 = 1$$

$$g^1 = g$$

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$$

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$$

$$g^p : g^q = g^{p-q}$$

$$(g^p)^q = g^{p \cdot q}$$

32 **a** Plot de grafieken van $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $g(x) = 2^{-x}$.

H

- b** Welke conclusie kun je trekken uit het resultaat van opdracht a? Geef hiervoor een verklaring.
- c** Schrijf de functies $h(x) = 3^{-x}$ en $f(x) = 3^{x+2}$ in de vorm $h(x) = b \cdot g^x$.

Theorie

Het is mogelijk een functievoorschrift van een exponentiële functie met behulp van rekenregels tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ te herleiden.

Daarmee kun je de beginhoeveelheid b en de groeifactor g aflezen. Ook kun je dan vaststellen of de grafiek van de functie stijgend of dalend is.

Voorbeeld 1

Herleid $f(x) = 9 \cdot 3^{x+1}$ tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Oplossing

$$f(x) = 9 \cdot 3^x \cdot 3^1$$

$$f(x) = 27 \cdot 3^x$$

De beginhoeveelheid b is 27.

De groeifactor g is 3.

De grafiek van f is stijgend.

Voorbeeld 2

Herleid $g(x) = 10 \cdot 4^{2-\frac{1}{2}x}$ tot de vorm $g(x) = b \cdot g^x$.

Oplossing

$$g(x) = 10 \cdot 4^2 \cdot 4^{-\frac{1}{2}x}$$

$$g(x) = 10 \cdot 16 \cdot \left(4^{-\frac{1}{2}}\right)^x$$

$$g(x) = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

De beginhoeveelheid b is 160.

De groeifactor g is $\frac{1}{2}$.

De grafiek van g is dalend.

- 33** Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{2+x}$ en $g(x) = 4 \cdot 2^x$.
- Plot de grafieken van f en g .
 - Herleid $f(x)$ tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
 - Laat zien dat $h(x) = 3^{3+2x}$ te herleiden is tot $h(x) = 27 \cdot 9^x$.
 - Schrijf $k(x) = 5^{3-2x}$ in de vorm $k(x) = b \cdot g^x$.
Bedenk hierbij dat $3 - 2x = 3 + (-2)x$.

Ondersteunende route → maak opdracht 034

- 34**
 - Plot de grafiek van de functie $f(t) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-t}$.
 - Laat zien dat de beginhoeveelheid niet 3 maar 0,75 is.
 - Schrijf het functievoorschrift in de vorm $f(t) = b \cdot g^t$ en verklaar hiermee dat de grafiek stijgend is.
- 35**
 - Gegeven is de functie $f(x) = 14 \cdot 3^{4x+2}$.
Schrijf f in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ en geef de beginhoeveelheid en de groeifactor.
 - Doe hetzelfde voor de functie $h(x) = 2,5 \cdot 3,6^{-2x+7}$.
 - Laat zien dat de functies $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ en $g(x) = 2^{2-2x}$ hetzelfde zijn.
 - Doe hetzelfde voor de functies $h(x) = 6 \cdot 2^{-x-3}$ en $k(x) = 0,75 \cdot 0,5^x$.

5.5 Functievoorschriften herleiden

Ondersteunende route → maak opdracht 036

36 Schrijf de functies in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

H

a $f(x) = 3^{4x} = (3^4)^x = \dots^x$

d $f(x) = (2^{2x})^3$

b $f(x) = 2^{-x}$

e $f(x) = 2^x \cdot (3^x)^{-3}$

c $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3x}$

f $f(x) = (4^6)^{-\frac{1}{3}x}$

$$p^a \cdot q^a = (p \cdot q)^a$$

37 Bij de reactie van tin met verdund zoutzuur komt waterstofgas vrij. De hoeveelheid waterstofgas H in cm^3 voldoet aan de formule $H = 150 - 149 \cdot 0,7^t$.

Hierin is H de hoeveelheid waterstofgas in cm^3 en is t de tijd in minuten, gerekend vanaf het begin van de reactie.

- a** Plot en schets de grafiek van H .
- b** Naar welke waarde nadert de hoeveelheid waterstofgas op den duur?
- c** Bij een hogere temperatuur verloopt de reactie sneller. In de formule moet dan het grondtal 0,7 gewijzigd worden. Moet het grondtal dan groter of juist kleiner worden?

38 Buiten de bebouwde kom geldt voor auto's een maximumsnelheid van 80 km per uur. Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen buiten de bebouwde kom geldt bij benadering de formule $B = 16,527 \cdot 1,092^s$.

Hierbij is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km per uur en is B het onafgeronde boetebedrag in euro's.

- a** Laat zien dat bij de snelheid $v = 90$ km per uur het afgeronde boetebedrag 40 euro is.
- b** Herschrijf de formule in de vorm $B = a \cdot 1,092^v$ waarbij v de gemeten snelheid in km per uur is.
(Ontleend aan CE vwo wiskunde A 2011 2e tijdvak)



Uitdagende route → maak opdracht U6 en U7

Ondersteunende opdrachten

034

Gegeven is de functie $f(x) = 2 \cdot 3^{2-x}$.

- a Bereken $f(0)$ en laat daarmee zien dat de beginhoeveelheid van f niet gelijk is aan 2.
- b De groeifactor van f is niet gelijk aan 3. Om de groeifactor van f te bepalen, herleid je het functievoorschrift tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. Op het blaadje is er een begin mee gemaakt.
Leg uit welke rekenregel bij stap 1 is gebruikt.
- c Maak de herleiding op het blaadje af en schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
- d Hoe zie je aan het functievoorschrift dat de grafiek van f dalend is?

☐	$2 \cdot 3^{2-x} =$			
☐	$2 \cdot 3^2 \cdot 3^{-x} =$			1
☐	$2 \cdot 3^2 \cdot (3 \cdots)^x =$			2
☐	$2 \cdot \dots \cdot (\dots)^x =$			3
☐	$\dots \cdot \dots \cdot (\dots)^x$			4

036

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$.In deze opdracht ga je met behulp van de rekenregels deze functie herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

- a Schrijf $\frac{1}{3}$ als macht van 3. Welke rekenregel gebruik je hierbij?
- b Vul in: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x} = (3 \cdots)^{-3x} = 3 \cdots = (3 \cdots)^x = \dots^x$.
- c Schrijf de functie $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
- d Je gaat de functie $g(x) = 4^x \cdot 8^{2x}$ herleiden tot de vorm $g(x) = b \cdot g^x$.
Welk getal neem je nu als waarde voor g ?
- e Vul in: $8^{2x} = (2^3)^{2x} = 2 \cdots$
- f Herleid het functievoorschrift tot $g(x) = b \cdot g^x$.

Uitdagende opdrachten

U6

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{1-x}$, $g(x) = 6 \cdot 2^{2x+1}$ en $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.Onderzoek of de functie h een exponentiële functie is.

U7

Gegeven is de functie $f(x) = 12 - 3^{\frac{1}{2}x+1}$.

- a Plot en teken de grafiek van f .
- b Los algebraïsch op: $f(x) = 9$ en $f(x) = 3$.
- c Geef de oplossing van $3 \leq f(x) \leq 9$.

5.6 Gemengde opdrachten

- 39** Hendrik en Sophie hebben beiden al een paar jaar een baan. Hendriks maandsalaris gaat elk jaar met 40 euro omhoog. Sophie krijgt jaarlijks een salarisverhoging van 4,5%. In 2020 verdienen Hendrik € 1.600,- en Sophie € 1.400,- per maand.

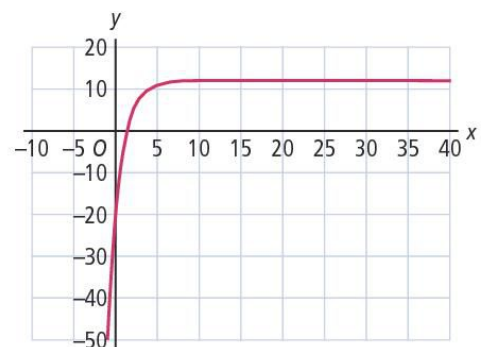
- Bij wie is er sprake van een lineair verband tussen het salaris en de tijd in jaren? En bij wie is er een exponentieel verband?
- Bereken in centen nauwkeurig de maandsalarissen van Hendrik en Sophie in 2019 en in 2021.
- Met welk percentage stijgt Sophies salaris per 5 jaar?
- In welk jaar wordt Sophies salaris hoger dan dat van Hendrik?
- In welk jaar verdient Sophie het dubbele van Hendrik?

- 40** Gegeven is de functie $f(x) = 0,5^x$.

- De grafiek van f wordt verticaal verschoven zodat de beeldgrafiek door het punt $(0, 8)$ gaat. Geef de verschuiving waarvoor dit geldt.
- Na welke horizontale verschuiving gaat de beeldgrafiek van f door $(6, 4)$?
- Met welke vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as gaat de beeldgrafiek van f door het punt $(-3, 12)$?

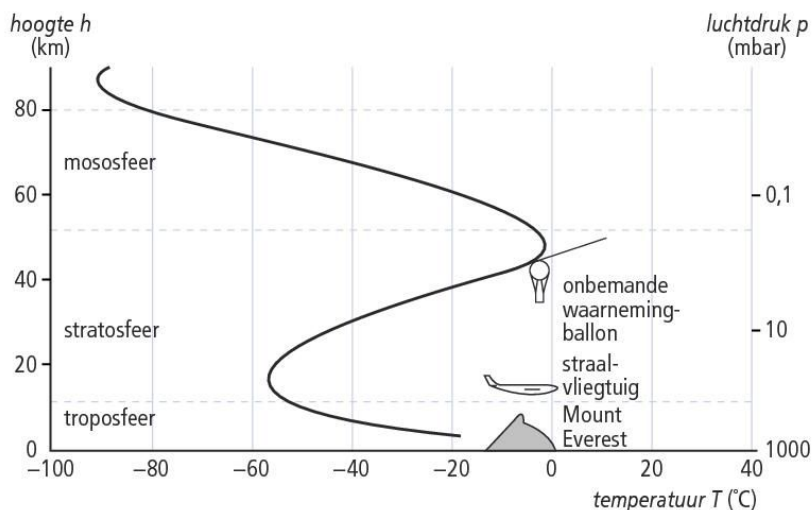
- 41** De grafiek hoort bij de functie $f(x) = 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$.

- Laat zien dat je het functievoorschrift van f kunt schrijven als $f(x) = 12 - 32 \cdot 2^{-x}$.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de x -as.



- 42** Elke ochtend om 8.00 uur krijgt een patiënt door middel van een injectie 2 mL van een geneesmiddel toegediend. Door afbraak in het lichaam neemt de hoeveelheid van het geneesmiddel per 24 uur met 60% af.

- Geef het functievoorschrift van de hoeveelheid geneesmiddel P voor de eerste 24 uur na de eerste injectie. Neem t in uren met $t = 0$ om 8.00 uur.
- Plot de grafiek van de hoeveelheid geneesmiddel in het lichaam tijdens de eerste 24 uur.
- Schets de grafiek van de hoeveelheid geneesmiddel in het lichaam tijdens de eerste 72 uur.
- Welk functievoorschrift beschrijft de hoeveelheid geneesmiddel vanaf de tweede tot de derde injectie? Neem weer t in uren met $t = 0$ op het moment van de eerste injectie.



43 De luchtdruk en de temperatuur in de atmosfeer hangen af van de hoogte.

In de grafiek zijn de hoogte h in kilometers en de luchtdruk p in millibar langs de verticale assen uitgezet.

Langs de horizontale as staat de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$.

Naarmate je hoger boven het aardoppervlak komt, wordt de luchtdruk lager. Tussen h en p geldt bij benadering de formule $p = 1000 \cdot 0,86^h$.

- Onderzoek hoe je dit verband kunt afleiden uit de twee verticale schaalverdelingen.
- Bergwandelaars gebruiken vaak een hoogtemeter. De werking van zo'n apparaat berust op het verband tussen hoogte en luchtdruk. Je kunt daarbij niet zonder meer bovenstaande formule gebruiken, want bij mooi weer is de luchtdruk overal enkele procenten hoger en bij slecht weer overal enkele procenten lager dan de formule aangeeft. Daarom wordt aan het begin van een bergtocht de hoogtemeter geijkt door op een punt waarvan de hoogte bekend is, de meter op deze hoogte in te stellen. Een bergwandelaar ikt zijn hoogtemeter op een punt op 2000 meter hoogte. Na een lange wandeling blijkt op de kaart dat hij op een hoger punt is geëindigd. Maar de wandelaar ziet tot zijn verbazing dat de hoogtemeter nog steeds dezelfde hoogte aanwijst.

Wijst dit op een verbetering van het weer? Licht je antwoord toe.

(Ontleend aan het examen vwo wiskunde A 1998 1e tijdvak)

- 44** De eerste Personal Computers kwamen begin tachtiger jaren van de twintigste eeuw op de markt. In 1985 waren de meeste van deze machines uitgerust met een harde schijf van 2 kB. In de decennia daarna is de gemiddelde grootte van harde schijfgeheugens elke twee jaar met een factor 10 toegenomen. Onderzoek of deze toename in hetzelfde tempo is doorgegaan tot het jaar waarin je deze opdracht maakt.

kilo	$1000 = 10^3$
mega	$1\,000\,000 = 10^6$
giga	$1\,000\,000\,000 = 10^9$
tera	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$

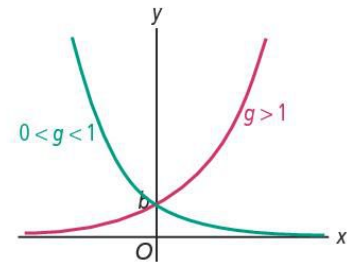
Samenvatting

Theorie

Grafiek van een exponentiële functie

De grafiek van een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ ($b > 0$) is stijgend als $g > 1$ en dalend als $0 < g < 1$.

Omdat $f(0) = b$, gaat de grafiek van f door $(0, b)$ op de verticale as. De grafiek van de functie f heeft de x -as als horizontale asymptoot.



- S1** Gegeven zijn de functies $f(x) = 5 \cdot 1,7^x$ en $g(x) = 0,3 \cdot 0,9^x$.
- Geef van elke functie de snijpunten met de verticale as.
 - Van welke functie stijgt de grafiek?

Vaardigheid

Je kunt rekenen met lineaire en exponentiële groei.

Bij lineaire groei is de toename of afname per tijdseenheid constant. De toename is de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn.

Bij exponentiële groei is de groeifactor per tijdseenheid constant. Bij een toename is de groeifactor groter dan 1. Bij een afname ligt de groeifactor tussen 0 en 1.

- S2** De tabellen horen bij lineaire of exponentiële groei. Stel bij iedere tabel een functievoorschrift op.

A

x	0	1	2	3
y	12	6	3	1,5

B

t	4	6	11	15
R	15	19	29	37

Vaardigheid

Je kunt met gebroken exponenten in exponentiële functies rekenen.

In functievoorschriften en formules kun je ook breuken en negatieve getallen voor de variabele in de exponent invullen. Bij een groeiproces krijg je bij een breuk de hoeveelheid op een tussenliggend tijdstip. Bij negatieve waarden vind je de hoeveelheid op een tijdstip dat ligt vóór $t = 0$.

- S3** Het inwoneraantal van een stad is laatste jaren exponentieel toegenomen. Men verwacht dat deze groei de komende jaren aanhoudt. Met de formule $A = 142\,000 \cdot 1,03^t$ kun je het aantal inwoners A uitrekenen na t jaar met $t = 0$ op 1 januari 2018.
- Bereken het aantal inwoners op 1 juli 2019.
 - Hoeveel inwoners heeft de stad op 1 september 2020?
 - Bereken ook hoeveel inwoners er waren op 1 april 2017.

Vaardigheid

Je kunt een groeifactor aanpassen aan een andere tijdseenheid.

Als g de groeifactor per tijdseenheid is, dan is de groeifactor per n tijdseenheden g^n .

De groeifactor voor een n -de deel van de tijdseenheid is $g^{\frac{1}{n}}$ ofwel $\sqrt[n]{g}$.

Voorbeeld

De groeifactor per week is 5.
Hoe groot is de groeifactor per dag en per uur?

Oplossing

In een week zitten 7 dagen.

De groeifactor per dag is $5^{\frac{1}{7}} \approx 1,258$.

In een week zitten 168 uren.

De groeifactor per uur is $5^{\frac{1}{168}} \approx 1,010$.

S4 Bij een groeiproces is 1,6 de groeifactor per uur.

- Hoe groot is de groeifactor per etmaal?
- Hoe groot is de groeifactor per halfuur.
- Geef de groeifactor per minuut.

Vaardigheid

Je kunt het groeipcentage bij een andere tijdseenheid berekenen.

- Bereken de groeifactor per gegeven tijdseenheid.
- Bereken de groeifactor voor de gevraagde tijdseenheid.
- Leid het gevraagde percentage af uit deze groeifactor.

Voorbeeld

Tijdens een epidemie neemt het aantal patiënten met 15% per week toe.

Met hoeveel procent neemt het aantal patiënten per drie dagen toe?

Oplossing

- De groeifactor per week is 1,15.
- De groeifactor per dag is $1,15^{\frac{1}{7}}$.
De groeifactor per drie dagen is $(1,15^{\frac{1}{7}})^3 = 1,15^{\frac{3}{7}} \approx 1,062$.
- Het aantal patiënten neemt per drie dagen met ongeveer 6,2% toe.

- S5**
- Een bacteriekolonie neemt elk uur met 12,5% toe.
Met hoeveel procent neemt het aantal bacteriën per twee uur toe?
 - Een andere bacteriekolonie neemt per uur met 3% af.
Bereken met hoeveel procent het per 20 minuten afneemt.

Samenvatting

Vaardigheid

Je kunt na transformaties het functievoorschrift van de beeldgrafiek vinden.

Als je de grafiek van een functie f met a eenheden omhoog schuift, dan is $h(x) = f(x) + a$ het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Als je de grafiek van f met a eenheden naar rechts schuift, krijg je het functievoorschrift van de beeldgrafiek door de variabele x te vervangen door $x - a$. Het functievoorschrift wordt dan $h(x) = f(x - a)$.

Als je een grafiek ten opzichte van de x -as vermenigvuldigt met een factor c , dan is $h(x) = c \cdot f(x)$ het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 4 \cdot 1,6^x$.

De grafiek van f wordt 2 naar rechts verschoven en met 3 vermenigvuldigd ten opzichte van de x -as.

Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

Oplossing

Vervang x door $x - 2$, dit geeft $g(x) = 4 \cdot 1,6^{x-2}$.

Vermenigvuldig het hele functievoorschrift vervolgens met 3.

Dit geeft $h(x) = 3 \cdot 4 \cdot 1,6^{x-2}$ ofwel $h(x) = 12 \cdot 1,6^{x-2}$.

S6 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$.

a De grafiek van f wordt 2 naar links en 3 omlaag geschoven.

Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek.

b Geef de transformaties waarmee je de grafiek

$f(x) = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$ van kunt laten ontstaan uit de grafiek van $g(x) = 5^x$.

Vaardigheid

Je kunt het functievoorschrift van een exponentiële functie herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$

Soms is het nodig om het functievoorschrift van een exponentiële functie te herschrijven zodat je de beginhoeveelheid en de groeifactor per tijdseenheid af kunt lezen. Hierbij kun je de rekenregels voor machten gebruiken.

$$g^0 = 1$$

$$g^1 = g$$

$$g^{-n} = \frac{1}{g^n}$$

$$g^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g}$$

$$g^p \cdot g^q = g^{p+q}$$

$$g^p : g^q = g^{p-q}$$

$$(g^p)^q = g^{p \cdot q}$$

Voorbeeld 1

Geef de groeifactor van $f(x) = 2 \cdot 3^{2x}$.

Oplossing

$$f(x) = 2 \cdot 3^{2x}$$

$$f(x) = 2 \cdot (3^2)^x$$

$$f(x) = 2 \cdot 9^x$$

De groeifactor is 9.

Voorbeeld 2

Schrijf $f(t) = 4 \cdot 3^{-2t+5}$ in de vorm $f(t) = b \cdot g^t$.

Oplossing

$$f(t) = 4 \cdot 3^{-2t+5}$$

$$f(t) = 4 \cdot 3^{-2t} \cdot 3^5$$

$$f(t) = 4 \cdot 3^5 \cdot (3^{-2})^t$$

$$f(t) = 972 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t$$

S7 Geef bij de functievoorschriften de groeifactor.

a $f(x) = 2 \cdot 3^{x+2}$

b $g(x) = -3 \cdot 0,9^{1-x}$

S8 Schrijf de functievoorschriften in de vorm $f(t) = b \cdot g^t$.

a $f(t) = 81 \cdot 3^{2t-3}$

c $f(t) = \frac{1}{9} \cdot 3^{4+2t}$

b $f(t) = 0,25^{t-3}$

d $f(t) = 2^t \cdot 3^{2t+1}$

- T1** In 2019 woonden in een bepaalde gemeente 73 000 mensen. Er waren op dat moment 25 000 woningen. Jaarlijks groeit de bevolking met 2% en er worden elk jaar 500 woningen gebouwd.
- Het gemeentebestuur wil voorkomen dat er te weinig woonruimte is. Dat is het geval als er gemiddeld meer dan drie mensen in een woning moeten wonen.
- Geef een formule die past bij de groei van de bevolking. Noem het aantal inwoners A en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 2019.
 - Met $M = 75\,000 + 1500t$ kun je het maximale aantal inwoners berekenen dat op tijdstip t in die stad kan wonen. Leg uit hoe je deze formule uit de bovenstaande gegevens kunt afleiden.
 - Onderzoek of er in het jaar 2019 te weinig woonruimte was.
 - Plot de grafieken van A en M en onderzoek na hoeveel jaar er te weinig woonruimte is.

- T2** In de tabel zie je voor een aantal tijdstippen de omvang van de wereldbevolking.

jaar	1950	1960	1970	1980	1990	2000
omvang in miljarden	2,52	3,02	3,70	4,45	5,30	6,12

- Onderzoek of er gedurende deze jaren sprake is van exponentiële groei.
 - Bereken voor elke 10 jaar met welke factor de omvang van de wereldbevolking is gegroeid.
 - Stel een formule op voor de omvang van de wereldbevolking. Neem W voor de omvang in miljarden en t de tijdstuur in jaren. Kies zelf welk jaar bij $t = 0$ hoort.
 - Plot en schets de grafiek van de omvang van de wereldbevolking.
 - Geef een schatting voor de omvang van de wereldbevolking voor de jaren 1945 en 1965.
- T3** In een laboratorium wordt de groei van een bacteriesoort bestudeerd. Het blijkt dat de hoeveelheid bacteriën (in milligrammen) elke 12 uur verdubbelt. Bij een eerste meting, om 9.30 uur 's morgens, werd 32 milligram bacteriën gevonden.
- Hoeveel milligram bacteriën was er om 10.30 uur?
 - Bereken de groeifactor van het aantal bacteriën per kwartier.
 - Geef een functievoorschrift van B in de vorm $B(t) = b \cdot g^t$. Hierbij is B de hoeveelheid bacteriën in milligram en t is de tijd in uren met $t = 0$ om 9.30 uur.
 - Hoeveel milligram bacteriën zal er om 10.00 uur geweest zijn? En om 8:00 uur?



- T4** Welke transformaties moet je toepassen op de grafiek van $f(x) = 1,3^x$ om de grafieken van de volgende functies te krijgen?
- a** $g(x) = 1,3^{x+1} + 2$ **c** $n(x) = 5 \cdot 1,3^{x+4}$
b $h(x) = 3 \cdot 1,3^{x-1}$ **d** $l(x) = -6 \cdot 1,3^{x+4} + 15$
- T5** **a** Herleid $f(x) = (2 \cdot 6^{1-x})^3$ tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.
b Doe hetzelfde voor $N(t) = 4,32 \cdot 1,44^{0,5t-1}$.
- T6** Geef van elk van de volgende functies de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de verticale as.
- a** $f(x) = 4 + 0,3^{1-2x}$
b $g(x) = 3(2 + 3^x)$
c $h(x) = (5 - 2^x)^2$
- T7** Autobanden van merk A verliezen per maand 3% van hun spanning. Deze banden zijn bij 2,2 bar volledig op spanning. Als de spanning minder is dan 1,8 bar, moet de band weer worden opgepompt.
- a** Stel een formule op voor de spanning S in bar, met de tijd t in maanden na het oppompen.
b Bereken met welke tussenpozen, gerekend in dagen, de band moet worden opgepompt. Neem voor een maand 30 dagen.



- T8** De bepaling van de ouderdom van allerlei opgegraven voorwerpen en beenderen is een belangrijk onderdeel van de archeologie. Een bekende methode daarvoor is de C_{14} -methode. Deze werkt als volgt. Ieder levend organisme bevat koolstof-14, en wel 0,000 001 mg C_{14} per kg organisch materiaal. De hoeveelheid C_{14} daalt na afsterving door radioactief verval. Na 5730 jaar is de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid over.
- a** Hoeveel C_{14} bevat een boom van 1000 kg, 5730 jaar nadat deze is doodgegaan? En na 11 460 jaar?
b Na hoeveel jaar is er nog $\frac{1}{8}$ deel van de C_{14} over?
c Na hoeveel jaar is $\frac{31}{32}$ deel van de C_{14} verdwenen?
d In een archeologische vondst blijkt nog 4% van de oorspronkelijke hoeveelheid C_{14} aanwezig te zijn. Hoe oud is die vondst ongeveer?
e Aegidius was een Romeinse generaal. Er is een oude lijkwade die, volgens de overlevering, van hem is geweest. In 1997 bleek het C_{14} gehalte van deze lijkwade 86,19% te zijn. Aegidius is in 464 overleden. Kan dit de lijkwade van Aegidius geweest zijn?

Je kunt rekenen met lineaire en exponentiële groei.

- E1** De tabellen horen bij lineaire of exponentiële groei.
Stel bij iedere tabel een bijpassend functievoorschrift op.

A

x	0	1	2	3
y	3	6	9	12

B

t	1	3	5	11
R	6	24	96	6144

Je kunt rekenen met gebroken exponenten in exponentiële functies.

- E2** Een batterij die niet in gebruik is, verliest toch lading. Deze afname is exponentieel.
Het opladen van een batterij wordt om 14.00 uur gestopt. Voor de spanning van de batterij geldt de formule $P = 14,8 \cdot 0,972^t$.
Hierin P de spanning in volt en t de tijd in uren met $t = 0$ om 14.00 uur.
- Bereken de spanning van de batterij om 17.30 uur.
 - Bereken de spanning van de batterij om 21.15 uur.
 - Bereken de spanning van de batterij om 20.05 uur.

Je kunt een groeifactor aanpassen aan een andere tijdseenheid.

- E3** Bij een groeiproces is 2,1 de groeifactor per uur.
- Hoe groot is de groeifactor per 6 uur?
 - Hoe groot is de groeifactor per dag?
 - Hoe groot is de groeifactor per halfuur?
 - Geef de groeifactor per minuut.
 - Geef de groeifactor per 2,5 minuut.

Je kunt het groeipercentage bij een andere tijdseenheid berekenen.

- E4** Bij een groeiproces is het groeipercentage 125% per dag.
- Hoe groot is het de groeifactor per dag? En per week?
 - Bereken het groeipercentage per halve dag.
 - Bereken de procentuele toename per uur. Rond af op hele procenten.
 - Van een groeiproces is de hoeveelheid in vier dagen gegroeid van 250 naar 1000.
Bereken de groeifactor per dag in drie decimalen nauwkeurig.

Je kunt na transformaties het functievoorschrift van de beeldgrafiek vinden.

- E5** Gegeven is de functie $f(x) = 1,5^x$.
Geef het functievoorschrift van de beeldgrafiek van f na:
- de verschuiving 3 naar links.
 - de verschuiving 2 omhoog.
 - een vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor 4.
 - een spiegeling in de x -as en daarna 3 omlaag.

Je kunt het functievoorschrift van een exponentiële functie herleiden tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

E6 Herleid tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

a $f(x) = 81 \cdot 3^{2x-3}$

d $f(x) = \frac{1}{9} \cdot 3^{4+2x}$

b $f(x) = 0,25^{x-3}$

e $f(x) = 2^x \cdot 3^{2x+1}$

c $f(x) = 8 \cdot 2^{-2-x}$

f $f(x) = (2 \cdot 3^x)^3$

E7 Een ingenieur doet metingen aan het schoon regenen van een asfaltweg. Hij vindt de functie $P(t) = 100(1 - 0,779^t)$. Hierbij is P het percentage van de weggespoelde hoeveelheid vuil na t uur regen.

a Plot en schets de grafiek van P .

b Hoelang duurt een regenbui waardoor 90% van het vuil wegspoelt?

E8 De grafiek van $f(x) = 2^{3+x} - 1$ kan door middel van een aantal transformaties ontstaan uit de grafiek van $g(x) = 2^x$. Geef deze transformaties.

E9 Bij onderzoek naar zonlicht is een soort straling gemeten die schadelijk is voor mensen. Bij een lage intensiteit wordt die straling opgevangen door de dampkring. Pas boven 300 Bq wordt de straling schadelijk.

De indruk bestaat dat de hoeveelheid straling toeneemt. In de tabel staan de gevonden waarden. Je onderzoekt of het gaat om een lineaire of om een exponentiële toename.

a Gebruik de eerste en de laatste meting om een lineaire formule te maken. Neem daarbij t in jaren met $t = 0$ in het jaar 2000.

b Na hoeveel jaar wordt de straling schadelijk volgens dit lineaire model?

c Maak ook een exponentiële formule waarbij je als groeifactor het gemiddelde neemt van de groeifactoren tussen de eerste en de tweede meting en tussen de tweede en de derde meting.

d Na hoeveel jaar wordt de straling schadelijk volgens dit exponentiële model?

<i>tijd</i> in jaren	2000	2001	2002
<i>straling S</i> in Bq	98,7	101,5	103,7

Veranderingen

6

SE

CE

K

In dit hoofdstuk

In de onderbouw heb je al kennis gemaakt met allerlei soorten grafieken.

In dit hoofdstuk leer je dat een grafiek op drie manieren kan stijgen en op drie manieren kan dalen. Een toenamediaagram is een manier om deze stijging of daling in beeld te brengen. Je leert hoe je bij zo'n stijging of daling de gemiddelde verandering over een interval kunt berekenen. Ook leer je hoe je grafisch de helling van de grafiek in een punt kunt benaderen.

In hoofdstuk 8A gebruik je deze kennis bij het berekenen van de helling van de grafiek in een punt.

Voorbeelden WDA in dit hoofdstuk

- *Probleem oplossen en analytisch denken* opdracht 31
- *Abstraheren* opdracht 21
- *Logisch redeneren en bewijzen* opdracht 13

- V1** Op de foto's zie je twee brandende kaarsen, een dunne en een dikke. De hoogte h in cm van de kaarsen wordt gegeven door de formules $h = 22 - 1,4t$ en $h = 15 - 0,3t$ waarbij t de tijd in uren is dat de kaars brandt.

- Welke formule hoort bij welke kaars?
- Met hoeveel cm per uur neemt de hoogte van de dunne kaars af?
- Bereken voor elke kaars hoelang hij kan branden.
- Teken de grafieken van de beide formules in één assenstelsel.



- V2** Een monteur van het installatiebedrijf Techno komt bij iemand een cv-ketel repareren. Bij Techno zijn de vaste kosten € 25,- en bedraagt het uurtarief € 45,-.
- Leg uit dat je met de formule $K = 25 + 45t$ de reparatiekosten K in euro's kunt berekenen waarbij t de tijd in uren is die de monteur voor de reparatie nodig heeft.
 - Een reparatie kost € 182,50.
Bereken hoelang de monteur bezig is geweest.
 - Bij Solution rekenen ze hetzelfde uurtarief maar daar zijn de vaste kosten € 30,-. John tekent voor beide bedrijven een grafiek in hetzelfde assenstelsel.
Wat kun je zeggen over hoe de grafieken ten opzichte van elkaar lopen?

- V3** De tabel hoort bij een lineair verband.

x	0	1	4	8	10
y	...	...	9	12	...

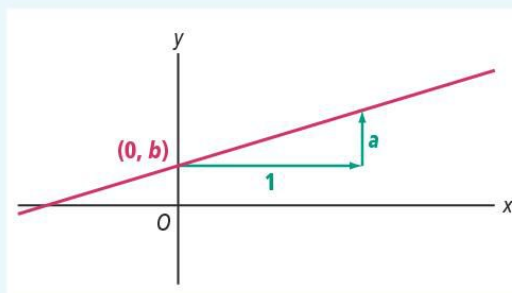
- Vul de tabel verder in.
- Stel bij de tabel een formule op.

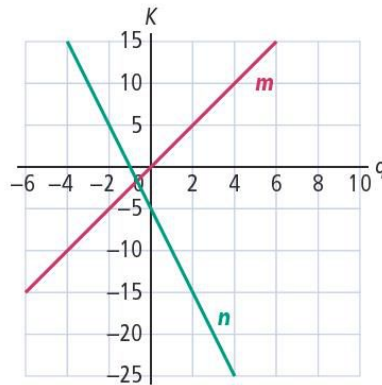
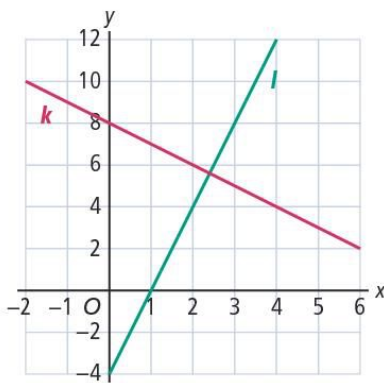
Theorie

Lineaire formules kun je schrijven in de vorm $y = a \cdot x + b$. Hierin is b het startgetal en a de richtingscoëfficiënt, ook wel het hellingsgetal genoemd.

De richtingscoëfficiënt a is de toename van de y -coördinaat als de toename van de x -coördinaat 1 is.

De grafiek van een lineaire formule is een rechte lijn. In de grafiek is b terug te vinden als het snijpunt $(0, b)$ met de y -as. Evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.



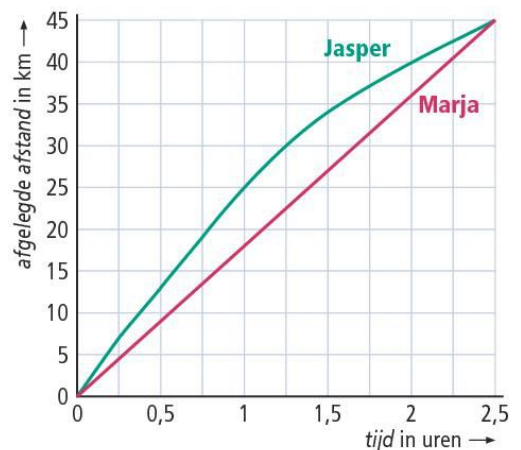


V4 Stel bij elke lijn een formule op.

- V5**
- a** Lijn l heeft richtingscoëfficiënt $-0,4$ en gaat door het punt $(22, 14)$.
Stel een formule op bij lijn l .
 - b** Stel een formule op bij lijn m door de punten $(2, 2)$ en $(6, -4)$.
 - c** Lijn n is evenwijdig aan de grafiek bij $y = 2(0,6x - 3)$ en gaat door het punt $(8, 11)$.
Stel een formule bij lijn n op.

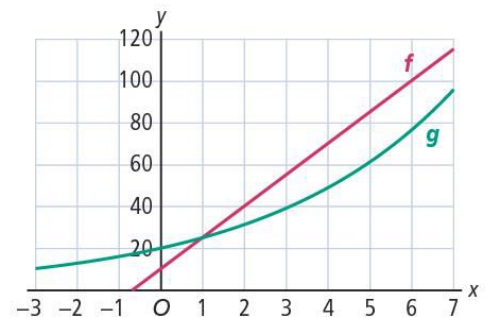
V6 Marja en Jasper hebben hetzelfde traject van 45 km gefietst. In de grafiek kun je zien dat ze dat niet op dezelfde manier gedaan hebben.

- a** Bereken voor beiden de gemiddelde snelheid over het gehele traject.
- b** Stel voor de grafiek van Marja een formule op.
- c** Wie fietste met een constante snelheid?
- d** Wie fietste 2 uur na het begin van de tocht sneller?
Hoe kun je dat aan de grafieken zien?
- e** Wanneer fietsten Marja en Jasper even snel?



V7 Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = 15x + 10$ en $g(x) = 20 \cdot 1,25^x$.

- a** Controleer met behulp van de functievoorschriften dat de grafieken elkaar snijden in het punt met de coördinaten $(1, 25)$.
- b** Welke grafiek stijgt links van het snijpunt sneller, de grafiek van f of de grafiek van g ?
- c** Hoe kun je aan het verloop van de grafieken zien dat je nog een tweede snijpunt kunt verwachten?



6.1 Stijgen en dalen

Je leert

- hoe je in een grafiek verschillende soorten toenames of afnamen herkent
- wat een maximum en wat een minimum is

Leerroutes

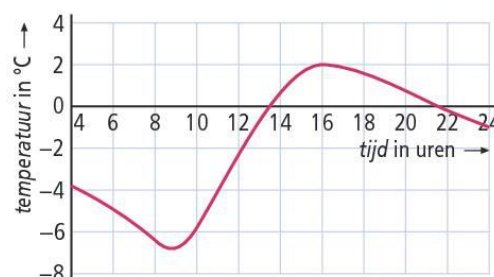
- ondersteunend: 1—2—3—4—05—6—07—8
- doorlopend: 1—2—3—4—5—6—7—8
- uitdagend: 1—3—4—5—7—8—U1—U2

In de laatste etappe van de Tour de France in 2017 won Dylan Groenewegen de sprint op de Champs Élysées. In de grafiek zie je zijn snelheid in de laatste kilometer voor de finish.

- Na hoeveel seconden versnelde Dylan het meest?



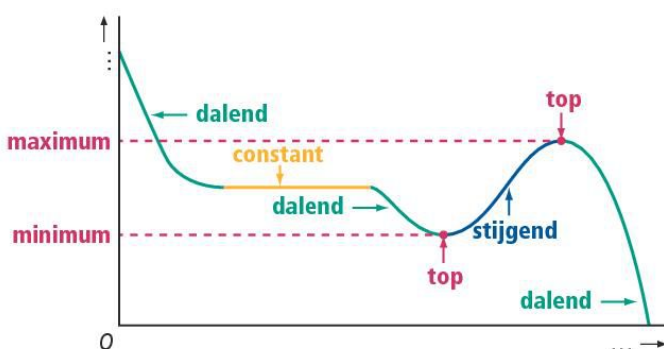
- 1 In de grafiek zie je de temperatuur in de loop van een winterdag in Giethoorn.
 - a Schrijf de minimum- en de maximumtemperatuur op.
 - b Hoeveel graden is het verschil tussen de minimum- en de maximumtemperatuur?
 - c Met hoeveel graden per uur steeg de temperatuur tussen 10.00 uur en 13.00 uur?
 - d In welke perioden daalde de temperatuur?



Theorie

Het verloop van een grafiek kan **stijgend**, **dalend** of **constant** zijn. Een **top** is een hoogste of laagste punt van de grafiek.

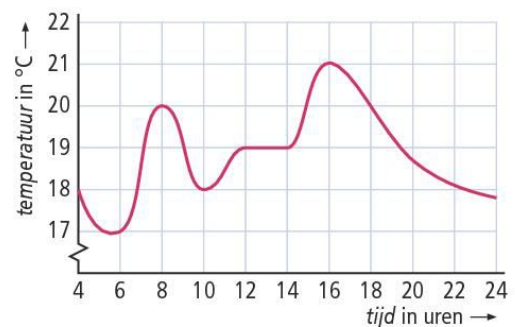
Een **maximum** is een hoogste waarde. De grafiek gaat dan over van stijgen in dalen. Een **minimum** is een laagste waarde. De grafiek gaat dan over van dalen in stijgen.



2 In de grafiek zie je hoe de temperatuur op een dag verloopt.

H

- Schrijf de perioden op waarin de grafiek stijgend is.
- Geef ook de perioden waarin de grafiek dalend is.
- Hoelang is de temperatuur constant?
- Er zijn twee momenten waarop de temperatuur een maximum heeft.
Geef de twee maximale waarden.
- Op welke tijdstippen heeft de temperatuur een minimum?



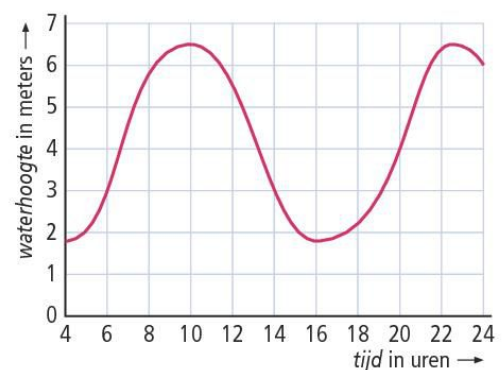
3 Gegeven is de formule $y = x^3 - 10x^2 + 15$.

- Plot en schets de grafiek.
- Bereken met je rekenmachine de coördinaten van de toppen van de grafiek.
- Bij welke top is er sprake van een minimum? En bij welke top is er sprake van een maximum?

4 Door eb en vloed verandert de hoogte van het water in een vaargeul die toegang geeft tot de haven van St. Valéry.

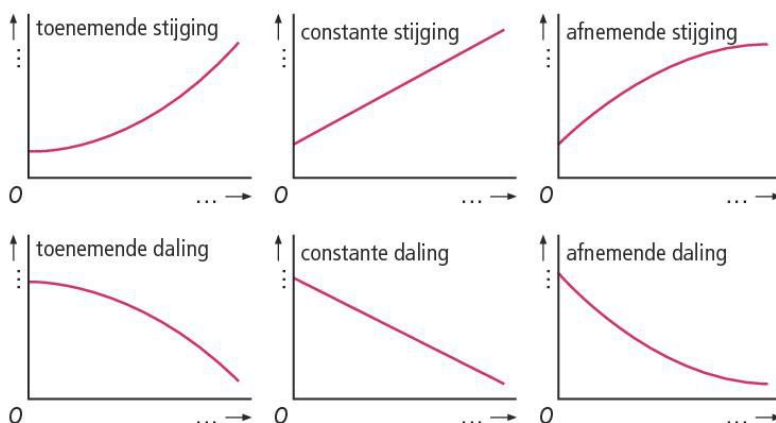
In de grafiek zie je de waterhoogten in de vaargeul.

- Schrijf de minimale en maximale waterhoogte op.
- In welke periode van een uur steeg het water het snelst?
- In de periode van 12.00 uur tot 15.00 uur daalde het water met een vrijwel constante snelheid.
Met hoeveel cm per uur daalde het water in die periode?
- Vanaf 16.00 uur neemt de waterhoogte steeds sneller toe.
Op welk tijdstip stopt deze steeds snellere stijging?



Theorie

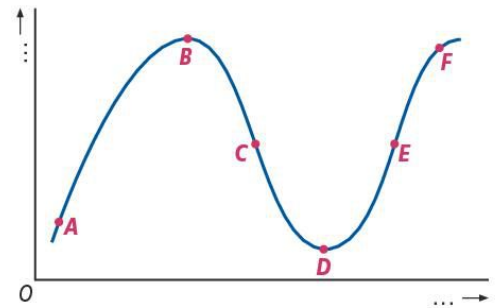
Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen:
toenemende stijging, constante stijging, afnemende stijging
toenemende daling, constante daling en afnemende daling.



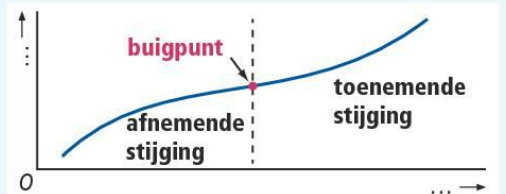
6.1 Stijgen en dalen

Ondersteunende route → maak opdracht 05

- 5 a Van welke soort stijging of daling is er sprake op het stuk van de grafiek dat tussen punt *A* en punt *B* ligt?
- b Van welke soort stijging of daling is er tussen de punten *B* en *C* sprake?
- c Van welke soort stijging of daling is er tussen de punten *C* en *D* sprake?
- d Vul telkens een soort stijging of daling in.
Bij punt *C* gaat de grafiek van ... over in ...
Bij punt *E* gaat de grafiek van ... over in ...



Het punt waarin een grafiek van toenemende daling overgaat in afnemende daling of andersom, heet een buigpunt.
Ook het punt waarin een grafiek overgaat van afnemende stijging naar toenemende stijging of andersom, heet een buigpunt.



- 6 Schets een grafiek die van afnemend dalend over gaat in toenemend dalend en geef daarin het buigpunt aan.

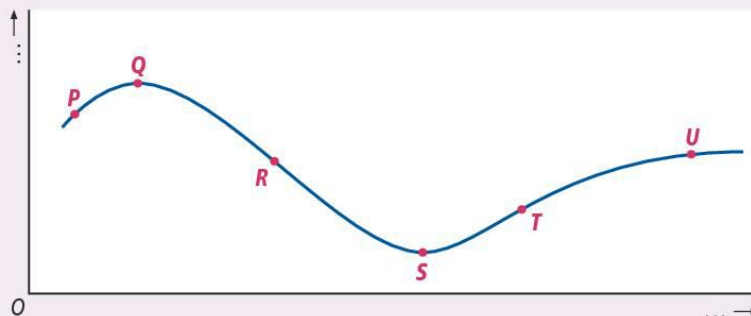
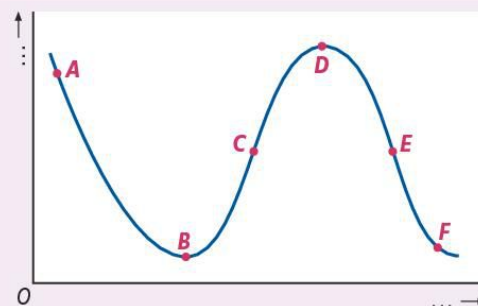
Ondersteunende route → maak opdracht 07

- 7 Kijk nog een keer naar de grafiek naast opdracht 5.
- H** a Welke punten zijn de toppen van de grafiek? Geef aan of hier sprake is van een minimum of een maximum.
- b Welke punten van de grafiek zijn buigpunten?
- 8 In het jaar 2012 groeide het aantal Facebookgebruikers met 45 procent.
- a Laat met een berekening zien, uitgaande van exponentiële groei, dat de groeifactor per maand ongeveer gelijk was aan 1,03.
- b Was er sprake van toenemende of afnemende stijging van het aantal gebruikers?
- c In het jaar 2013 steeg het aantal Facebookgebruikers lineair.
Was er in 2013 sprake van een toenemende stijging, een constante stijging of een afnemende stijging?

Uitdagende route → maak opdracht U1 en U2

Ondersteunende opdrachten

- 05**
- Tussen welke punten stijgt de grafiek? En tussen welke punten daalt de grafiek?
 - Bij een toenemende stijging gaat de grafiek steeds sneller stijgen.
Welk deel van de grafiek is toenemend stijgend?
 - Leg uit waarom de grafiek tussen punt *C* en punt *D* afnemend stijgend is.
 - Van welke soort daling is er tussen punt *D* en punt *E* sprake?
 - Vul telkens een soort stijging of daling in.
Bij punt *C* gaat de grafiek van ... over in ...
Bij punt *E* gaat de grafiek van ... over in ...



- 07**
- De grafiek heeft twee toppen en twee buigpunten.
Welke punten zijn de toppen van de grafiek? Geef aan of hier sprake is van een minimum of een maximum.
 - Voor welk punt geldt de volgende uitspraak?
‘Punt ... is een buigpunt, want de grafiek gaat daar over van toenemend stijgend in afnemend stijgend.’
 - Welk punt in de grafiek is nog meer een buigpunt?

Uitdagende opdrachten

- U1**
- Van een grafiek is het volgende gegeven.
Tussen punt *A* en punt *B* loopt de grafiek constant.
Tussen punt *B* en punt *C* is de grafiek toenemend dalend.
Tussen punt *C* en punt *D* is de grafiek afnemend dalend.
Tussen punt *D* en punt *E* is de grafiek toenemend stijgend.
Tussen punt *E* en punt *F* is de grafiek afnemend stijgend.
Tussen punt *F* en punt *G* is de grafiek toenemend dalend.
- Bij welke punten van deze grafiek is er sprake van een minimum en bij welke punten is er sprake van een maximum?
 - Welke punten van de grafiek zijn buigpunten?
- U2**
- Maak een schets van een grafiek met precies twee maxima, drie minima, vijf buigpunten en een constant deel.

Je leert

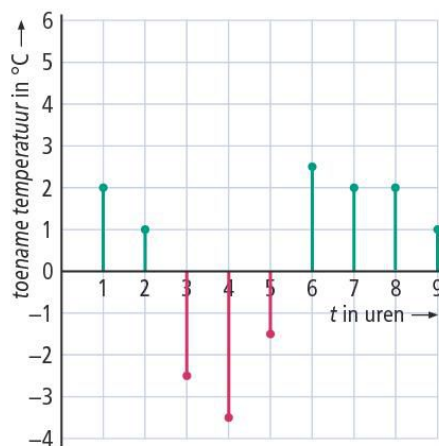
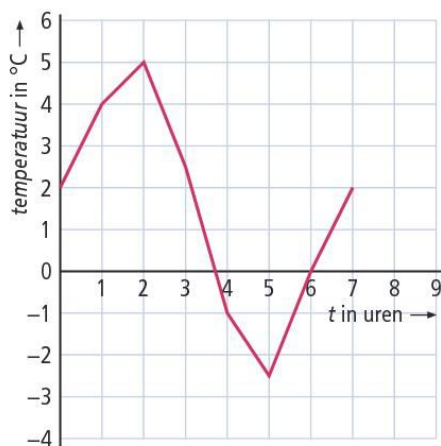
- hoe je een toenamediagram gebruikt en tekent

Leerroutes

- ondersteunend: 9—010—10—11—012—13
- doorlopend: 9—10—11—12—13—14
- uitdagend: 9—11—12—13—U3—U4

De AEX index (afgeleid van Amsterdam Exchange index) is de belangrijkste Nederlandse beursindex. Op 1 december sloot de AEX index op +1 af. Dat wil zeggen dat de AEX index op deze handelsdag 1 punt hoger eindigde dan de handelsdag ervoor.

- Op welke handelsdag werd in deze periode de hoogste AEX index bereikt?



9 In de linker grafiek zie je het verloop van de temperatuur.

In de rechter grafiek is met staafjes aangegeven hoeveel de temperatuur het voorgaande uur is veranderd. In de linker grafiek zie je dat tussen $t = 1$ en $t = 2$ de temperatuur met één graad is gestegen. In de rechter grafiek wordt deze verandering met een staafje met lengte 1 bij $t = 2$ aangegeven.

- Met hoeveel graden is de temperatuur toegenomen tussen $t = 6$ en $t = 7$? Hoe zie je dat terug in de rechter grafiek?
- Wat is de betekenis van het staafje met lengte 2,5 bij $t = 6$?
- Wat betekent het dat een staafje naar beneden getekend is?
- In de rechter grafiek is bij $t = 4$ het langste staafje naar beneden getekend.
Leg uit wat dit voor de temperatuur betekent.
- Gebruik beide grafieken om de temperatuur op de tijdstippen $t = 8$ en $t = 9$ te berekenen.

Theorie

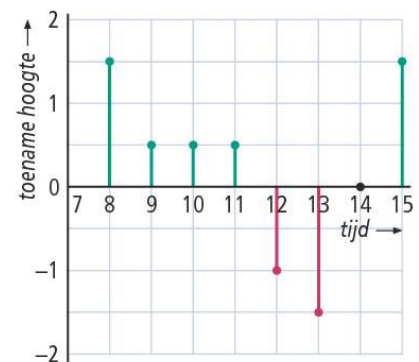
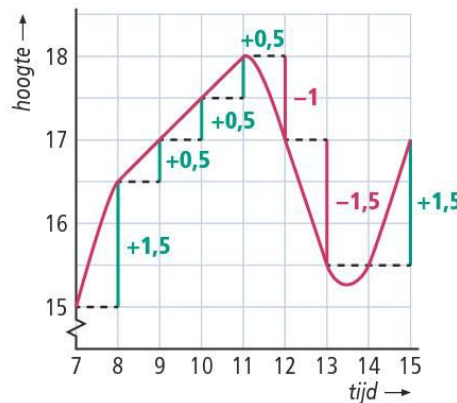
In een **toenamediagram** maak je toenames en afnamen zichtbaar. Bij toenames worden de staafjes omhoog getekend, bij afnamen omlaag. De rechter grafiek in het voorbeeld is een toenamediagram met **stapgrootte** 1 omdat de afstand tussen de staafjes steeds 1 tijdseenheid is.

Voorbeeld

Teken een toenamediagram bij de grafiek.

Oplossing

In de grafiek zijn de toenames met groen en de afnamen met rood aangegeven. De betekenis van het staafje bij $tijd = 9$ is dat de hoogte tussen $tijd = 8$ en $tijd = 9$ met 0,5 is toegenomen. De betekenis van het staafje bij $tijd = 13$ is dat de hoogte tussen $tijd = 12$ en $tijd = 13$ met 1,5 is afgenomen.

**Ondersteunende route → maak opdracht 010**

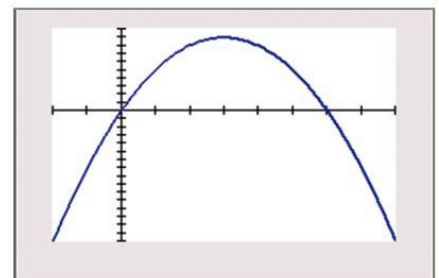
- 10** Op zijn verjaardag is van Phil de eerste zes jaar van zijn leven zijn lengte gemeten. In de tabel zie je het resultaat.

H

leeftijd in jaren	0	1	2	3	4	5	6
lengte in cm	57	78	94	102	111	119	126

- Teken het toenamediagram bij de tabel.
- Van zijn zesde tot zijn negende verjaardag groeide Phil steeds 6 cm per jaar.
Verwerk deze gegevens in je toenamediagram.
- Hoe lang was Phil op z'n negende verjaardag?

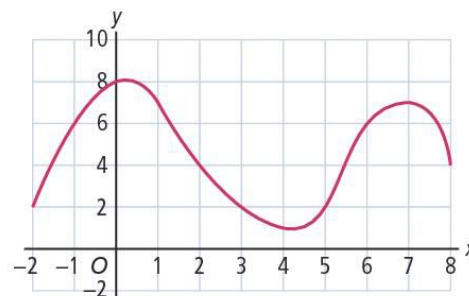
- 11** De grafiek bij de formule $K = 6t - t^2$ is geplot.
- Teken voor $-1 \leq t \leq 7$ het toenamediagram met stapgrootte 1 bij deze grafiek.
 - Teken voor $-2 \leq t \leq 8$ het toenamediagram met stapgrootte 2 bij deze grafiek.
 - Welke informatie ben je bij het toenamediagram van opdracht b kwijtgeraakt ten opzichte van het toenamediagram van opdracht a?



6.2 Toenamediagrammen

Ondersteunende route → maak opdracht 012

- 12** **H** a Teken bij de grafiek een toenamediagram met stapgrootte 1.
 b De grafiek heeft drie toppen.
 Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien?
 c De grafiek heeft twee buigpunten.
 Hoe kun je dat aan het toenamediagram zien?



- 13** De toenamediagrammen hieronder horen bij de formules

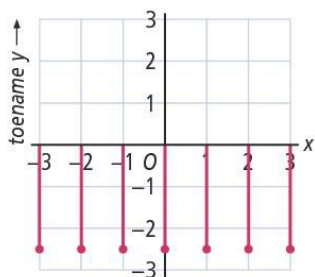
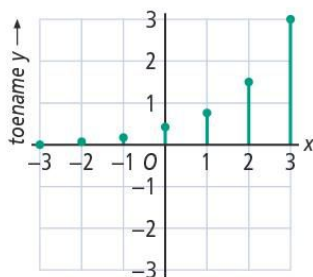
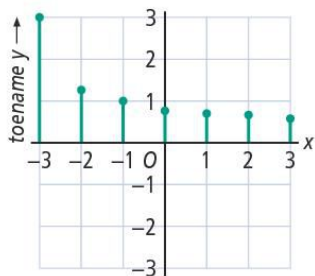
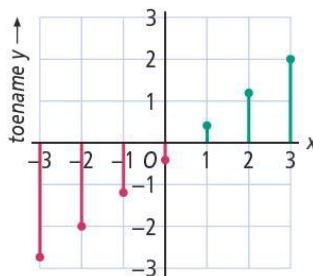
I $y = 0,75 \cdot 2^x$

III $y = 16 - 2,5x$

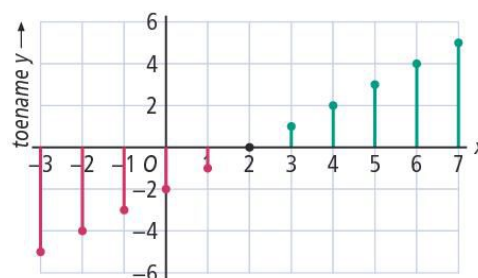
II $y = 3\sqrt{x+4}$

IV $y = 0,4x^2$

Beredeneer welk toenamediagram bij welke formule hoort.

**A****C****B****D**

- 14** Schets bij het toenamediagram een mogelijke grafiek.



Uitdagende route → maak opdracht U3 en U4

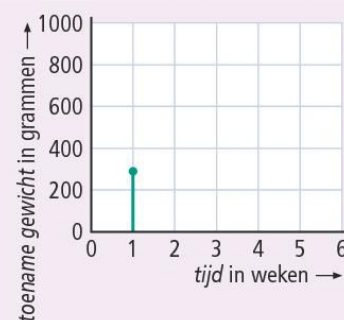
Ondersteunende opdrachten

- 010** In de tabel zie je het gewicht van een geitje na zijn geboorte.

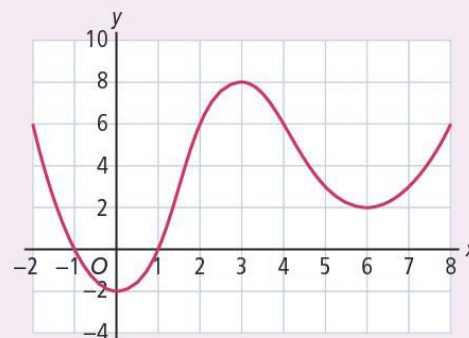
W

leeftijd in weken	0	1	2	3	4	5	6
gewicht in grammen	3290	3580	3890	4490	5290	6140	7090
toename gewicht	-	290	...	...	...	...	...

- In de tabel zie je dat de gewichtstoename in de eerste week 290 gram is. Ga dit met een berekening na.
- Vul de tabel verder in.
- Maak het toenamediagram bij de tabel verder af.



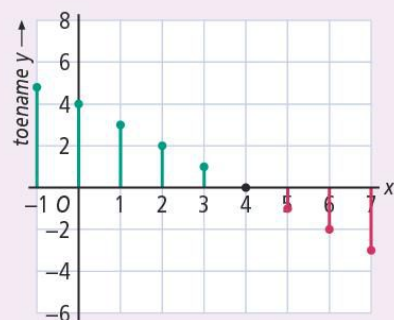
- 012**
- Teken bij de grafiek een toenamediagram met stapgrootte 1.
 - De grafiek heeft bij $x = 0$ een top, want de grafiek gaat daar van dalen over in stijgen. Hoe zie je deze verandering in het toenamediagram?
 - De grafiek heeft nog twee andere toppen. Leg uit hoe je dat in het toenamediagram kunt zien.
 - De grafiek heeft bij $x = 2$ een buigpunt, want daar gaat de grafiek over van een toenemende stijging in een afnemende stijging. Hoe zie je dat in het toenamediagram?
 - De grafiek heeft nog een buigpunt. Leg uit hoe dat in het toenamediagram kunt zien.



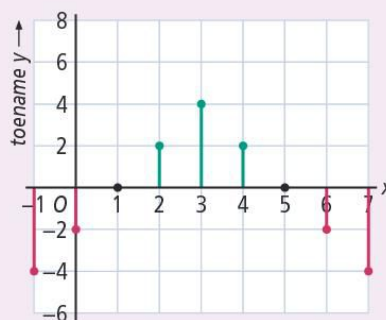
Uitdagende opdrachten

- U3**
- Schets een toenamediagram dat hoort bij een constante grafiek.
 - Een andere grafiek heeft drie toppen en twee buigpunten. Bij twee toppen gaat het om een maximum en bij één top gaat het om een minimum. Schets een toenamediagram dat hoort bij deze grafiek.

- U4** Schets bij de toenamediagrammen een mogelijke grafiek.



A



B

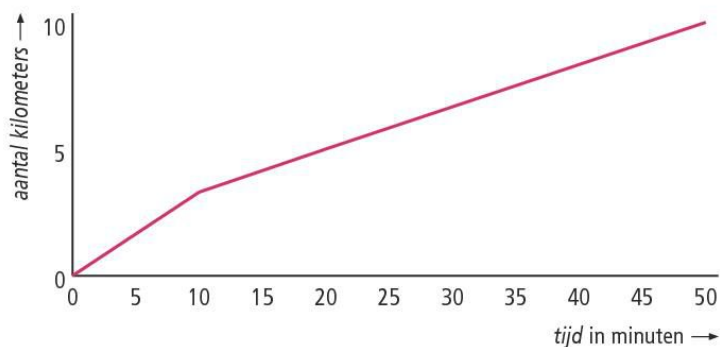
6.3 Gemiddelde verandering

Je leert

- hoe je een differentiequotiënt over een interval berekent

Leerroutes

- ondersteunend: 15—16—017—18—19—20
- doorlopend: 15—16—17—18—19—20
- uitdagend: 15—16—17—19—U5—U6

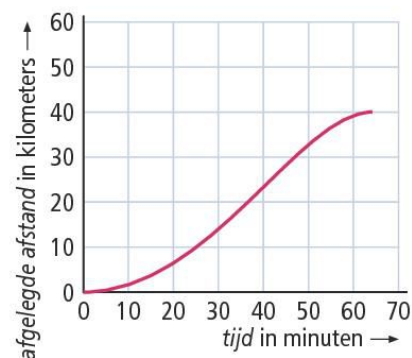


Roos heeft van een hardlooptraining over 10 kilometer gegevens verzameld. Deze heeft ze in een grafiek verwerkt.

- Hoe veranderde haar snelheid gedurende de training?

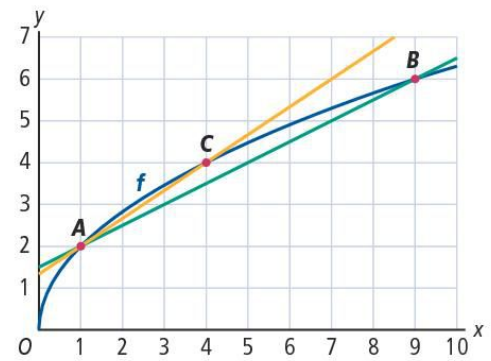
- 15** Een wielrenner heeft een training gedaan van 40 kilometer. De afgelegde afstand na t minuten blijkt beschreven te kunnen worden met de functie $s(t) = 0,018t^2 - 0,000002t^4$. Hierbij is $s(t)$ de afgelegde afstand in kilometers na t minuten.

- Bereken $s(15)$ en beschrijf de betekenis van deze uitkomst.
- Hoe had de grafiek eruit gezien als de wielrenner met een constante snelheid had gereden?
- Leg uit hoe je in de grafiek kunt zien dat de gemiddelde snelheid van de wielrenner tussen de 30e en de 40e minuut groter is dan die tussen de 10e en de 20e minuut.
- Leg uit wat de betekenis is van $s(30) - s(15)$.
- Laat met een berekening zien dat de gemiddelde snelheid van de wielrenner tussen $t = 15$ en $t = 30$ ongeveer 0,71 km per minuut was.
- Hoeveel km per uur is dat?
- Bereken de gemiddelde snelheid in km per uur tussen $t = 35$ en $t = 40$.



- 16** Op de grafiek van $f(x) = 2\sqrt{x}$ liggen de punten A , B en C .
- Bereken de toename van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$.
 - Leg uit dat de gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[1, 4]$ gelijk is aan $\frac{2}{3}$.
 - Vul in.
De gemiddelde toename van $f(x)$ over het interval $[1, 9]$ is

$$\frac{f(9) - f(1)}{9 - 1} = \frac{\dots - \dots}{9 - 1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$
 - Leg uit dat de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten A en B gelijk is aan het antwoord van opdracht c.



Theorie

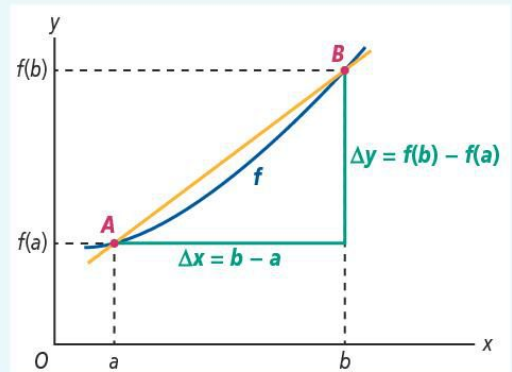
Veranderingen van x en y geef je aan met Δx en Δy . Het symbool Δ spreek je uit als delta.

De **gemiddelde verandering** van een functie f over het interval $[a, b]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Je noemt dit ook wel het **differentiequotiënt** van $f(x)$ over het interval $[a, b]$, omdat het een deling (quotiënt) van twee verschillen (differenties) is.

De gemiddelde verandering van $f(x)$ over het interval $[a, b]$ is ook de richtingscoëfficiënt, ofwel **helling**, van de lijn door het beginpunt en het eindpunt op dat interval.

In situaties met tijd en afstand is het differentiequotiënt gelijk aan de gemiddelde snelheid.



Voorbeeld 1

Bereken het differentiequotiënt van de functie $f(x) = x^2 + 3$ over het interval $[1, 4]$.

Oplossing

$$f(1) = 4$$

$$f(4) = 19$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{19 - 4}{4 - 1} = \frac{15}{3} = 5$$

Het differentiequotiënt is 5.

Voorbeeld 2

Rik schaatst 10 km. De afgelegde afstand A in km na t minuten kun je berekenen met de formule $A = 0,5t + 0,3\sqrt{t}$.

Bereken de gemiddelde snelheid van Rik tussen $t = 4$ en $t = 9$.

Oplossing

$$\text{Bij } t = 4 \text{ geldt } A = 0,5 \times 4 + 0,3 \times \sqrt{4} = 2,6.$$

$$\text{Bij } t = 9 \text{ geldt } A = 0,5 \times 9 + 0,3 \times \sqrt{9} = 5,4.$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{5,4 - 2,6}{9 - 4} = \frac{2,8}{5} = 0,56$$

De gemiddelde snelheid is 0,56 km per minuut.

6.3 Gemiddelde verandering

Ondersteunende route → maak opdracht 017

- 17** Gegeven zijn de functies $f(x) = -x^2 - 2x + 7$ en $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 6$.
- H**
- Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ en van $g(x)$ over het interval $[1, 5]$.
 - Doe hetzelfde over het interval $[-2, 3]$.
- 18**
- Bereken van de functie in opdracht 15 de gemiddelde verandering van $s(t)$ over het interval $[30, 45]$.
 - Leg uit waarom het antwoord van opdracht a gelijk is aan de gemiddelde snelheid in km per minuut van de wielrenner in het derde kwartier.



- 19** In de periode 1990–2009 nam het totaal aantal personenauto's in Nederland bij benadering toe volgens de formule $A = 5,12 \cdot 1,02^t$. In deze formule is A het aantal personenauto's in Nederland in miljoenen en is t het aantal jaren na 1990.
- H**
- Bereken met behulp van deze formule het aantal personenauto's in Nederland in 2009. Rond je antwoord af op duizendtallen.
 - Bereken de gemiddelde toename per jaar van het aantal personenauto's in Nederland in de periode 1990–2009.
- 20** Gegeven is de functie $f(x) = 0,5x^2 - x$.
- Ga na dat het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[0, 2]$ is gelijk aan 0.
 - Verklaar met een plot van de grafiek van f waarom het differentiequotiënt over het interval $[0, 2]$ gelijk is aan 0.
 - Geef nog twee intervallen waarop het differentiequotiënt van $f(x)$ gelijk is aan 0.

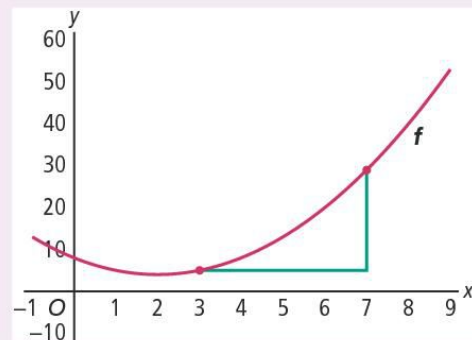
Uitdagende route → maak opdracht U5 en U6

Ondersteunende opdrachten**017** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x + 8$.**a** Bereken $f(3)$ en $f(7)$.**b** Vul in.Het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[3, 7]$ is

$$\frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{\dots - \dots}{7 - 3} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

c Vul in.Het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[-2, 4]$ is

$$\frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{\dots - \dots}{4 - (-2)} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

d Bereken het differentiequotiënt van de functie
 $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 3$ over het interval $[3, 7]$ en over het interval $[-2, 4]$.
**Uitdagende opdrachten****U5** Op de grafiek van $f(x) = -x^2 + 5x + 4$ ligt punt $A(-1, -2)$.**a** Plot de grafiek van f .**b** Voor het interval $[-1, b]$ geldt dat het differentiequotiënt van $f(x)$ gelijk aan 0 is. Bereken b .**c** Voor welke waarden van b is het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[-1, b]$ negatief?**d** Zoek uit voor welke waarde van b het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[-1, b]$ gelijk aan 2 is.**U6** Teken op het interval $[0, 10]$ een grafiek die voldoet aan:

- de grafiek gaat door het punt $(0, 8)$;
- de gemiddelde verandering op het interval $[0, 10]$ is 0,6;
- de gemiddelde verandering op het interval $[3, 8]$ is -1 ;
- de helling van de grafiek bij $x = 7$ is positief.

6.4 Hellingen benaderen

Je leert

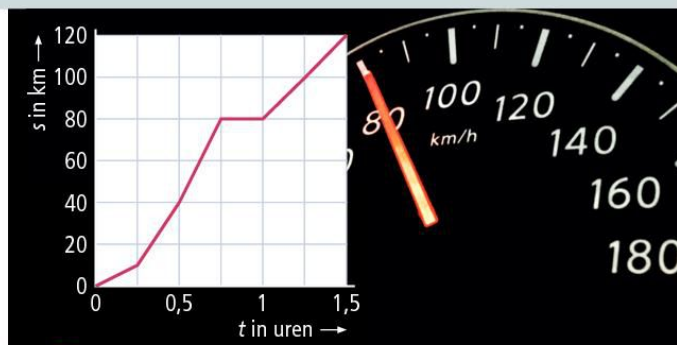
- wat een raaklijn is
- hoe je de helling in een punt van een grafiek grafisch benadert

Leerroutes

- ondersteunend: 21—22—23—024—24—025
- doorlopend: 21—22—23—24—25—26
- uitdagend: 22—23—24—25—26—U7

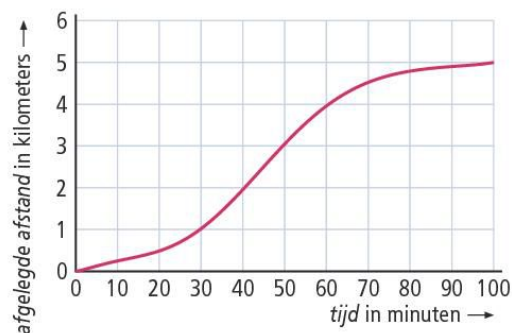
De familie Mulder maakt een rit in de auto. In de grafiek staat het verband tussen de afgelegde weg s in kilometers en de tijd t in uren. Op de foto zie je dat de snelheidsmeter van de auto een snelheid van 80 km per uur aanwijst.

- Tijdens welk deel van de rit kan de foto gemaakt zijn?



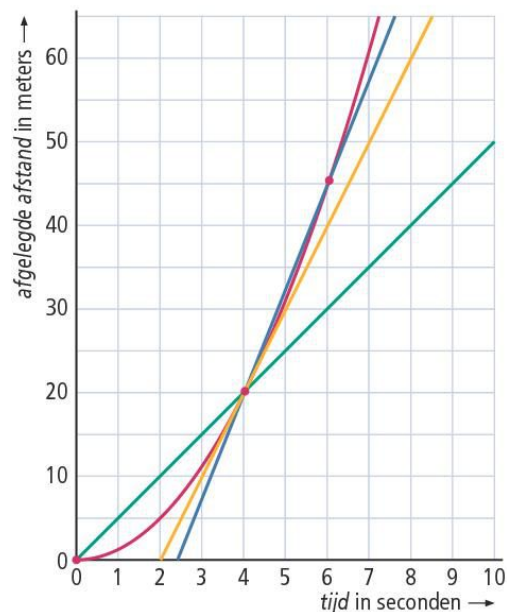
21 Frits maakt een wandeling van vijf kilometer.

- Hoe kun je aan de grafiek zien dat de snelheid na 50 minuten gelijk is aan de gemiddelde snelheid tussen 40 en 60 minuten?
- Bereken deze snelheid in km per uur.
- Veronderstel dat Frits na 50 minuten blijft doorwandelen met de snelheid die hij op dat moment heeft. Teken de grafiek die hierbij hoort en lees af hoeveel minuten hij dan over de wandeling doet.



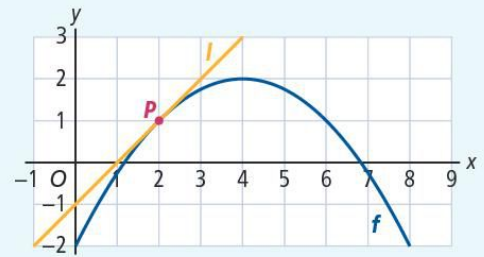
22 De rode grafiek hoort bij een optrekkende auto nadat deze heeft stilgestaan bij een verkeerslicht. Bij deze grafiek hoort de formule $a = 1,25t^2$.

- Bereken de gemiddelde snelheid van de auto tussen $t = 0$ en $t = 4$.
- Waarom is deze gemiddelde snelheid lager dan de snelheid van de auto op $t = 4$?
- Bereken de gemiddelde snelheid van de auto tussen $t = 4$ en $t = 6$.
- Is deze gemiddelde snelheid hoger of lager dan de snelheid van de auto op $t = 4$?
- In het punt $(4, 20)$ is een gele lijn getekend die de grafiek raakt. Bereken de richtingscoëfficiënt van deze lijn.
- Hoeveel meter per seconde is de snelheid van de auto op $t = 4$?

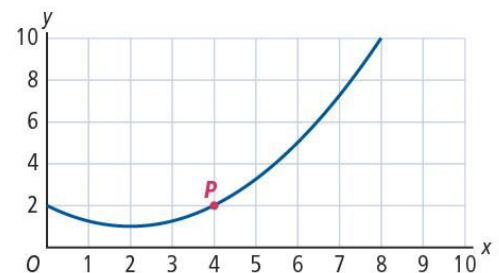


Theorie

In de figuur hiernaast is de richtingscoëfficiënt van lijn l gelijk aan de helling van de grafiek in punt P . De helling van de grafiek in punt P is gelijk aan 1. De lijn l heet de **raaklijn** in punt P aan de grafiek.

**23****W**

- Op de grafiek is punt P met $x = 4$ getekend.
- Teken zo nauwkeurig mogelijk in punt P een raaklijn.
 - Zoek op de raaklijn twee punten waarvan je de coördinaten goed kunt aflezen en bereken met deze coördinaten de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
 - Hoe groot is de helling van de grafiek in punt P ?

**Aanpak**

Hoe benader je grafisch de helling van de grafiek in een punt P ?

- Teken in punt P een raaklijn.
- Kies twee punten op de raaklijn waarvan je de coördinaten goed kunt aflezen.
- Bereken de helling van deze raaklijn met behulp van de coördinaten van deze twee punten. De helling van deze raaklijn is een benadering van de helling in punt P van de grafiek.

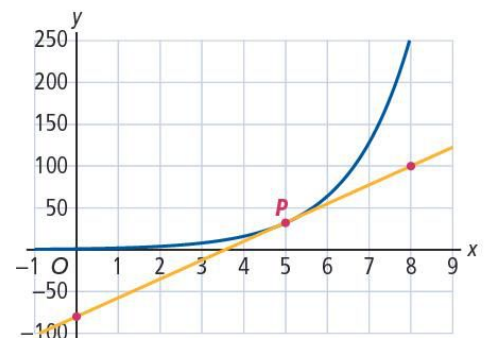
Voorbeeld

Benader grafisch de helling van de grafiek in punt P met $x = 5$.

Oplossing

- Teken in punt P een raaklijn.
- De raaklijn gaat ongeveer door de punten $(0, -80)$ en $(8, 100)$.
- De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{100 - (-80)}{8 - 0} = \frac{180}{8} = 22,5$.

De helling van de grafiek in het punt P met $x = 5$ is dus ongeveer 22,5.



6.4 Hellingen benaderen

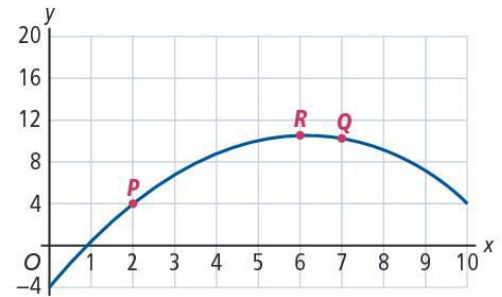
Ondersteunende route → maak opdracht 024

24

H

W

- a Benader grafisch de helling van de grafiek in punt P .
 b Benader ook grafisch de helling van de grafiek in punt Q en in punt R .



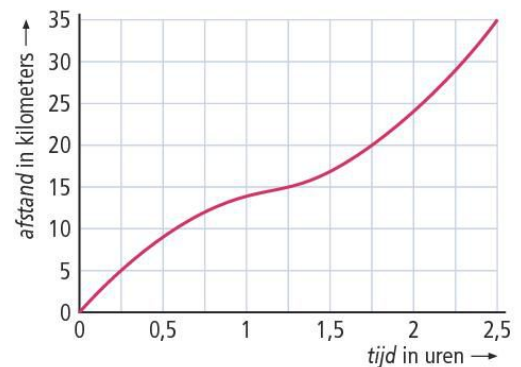
Ondersteunende route → maak opdracht 025

25

H

W

- Je ziet een tijd-afstand grafiek van een fietstocht van Floor.
 a Bereken de gemiddelde snelheid van haar fietstocht.
 b Benader grafisch de snelheid van Floor na een half uur.
 c Na ongeveer hoeveel uur fietste ze het langzaamst?
 d Benader grafisch deze snelheid.
 e Op welke momenten fietste Floor sneller dan het gemiddelde?

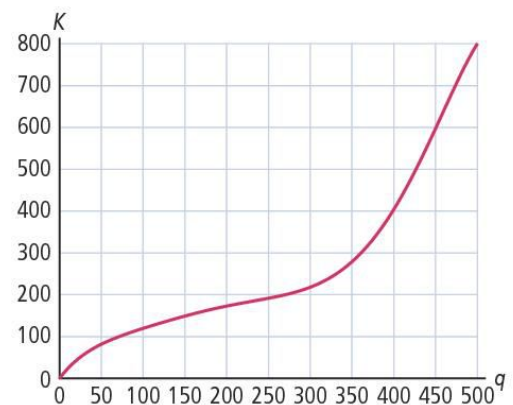


26

W

Bij een bedrijf worden verkwasten gemaakt. In de grafiek zie je dat K , de productiekosten in euro's afhangen van het aantal verkwasten q dat geproduceerd wordt. In de economie noem je de toename van de productiekosten als je één verkwast meer maakt, de marginale kosten. Deze marginale kosten mag je benaderen met behulp van de helling van de grafiek.

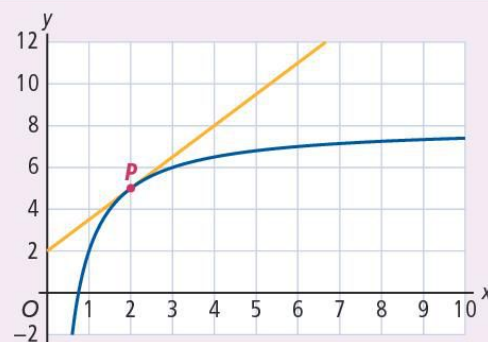
- a Hoe volgt uit de gegeven grafiek dat in deze situatie de marginale kosten positief zijn?
 b Geef een benadering van de marginale kosten bij $q = 100$.
 c Bij welk aantal geproduceerde verkwasten zijn de marginale kosten even groot als bij $q = 100$?
 d Bij welk aantal geproduceerde verkwasten zijn de marginale kosten op zijn kleinst? Licht je antwoord toe.



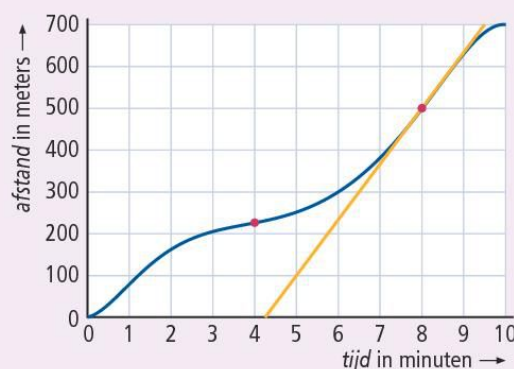
Uitdagende route → maak opdracht U7

Ondersteunende opdrachten

- 024** In de grafiek is de raaklijn in punt P getekend. Met deze raaklijn ga je de helling van de grafiek in punt P benaderen.
- Zoek twee punten op de raaklijn waarvan je de coördinaten goed kan aflezen.
 - Bereken met deze coördinaten de helling van de raaklijn.
 - Hoe groot is bij benadering de helling van de grafiek in punt P ?

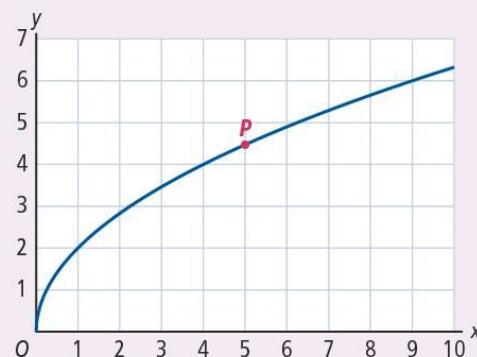


- 025** Je ziet een tijd-afstand grafiek van Martin die naar school liep.
- Bereken de gemiddelde snelheid van zijn tocht naar school.
 - In het punt $(8, 500)$ is een raaklijn getekend. Met deze raaklijn kun je de snelheid van Martin na 8 minuten grafisch bepalen. Zoek twee punten op de raaklijn waarvan je de coördinaten goed kan aflezen en bereken daarmee zijn snelheid op dat moment.
 - Na vier minuten liep hij het langzaamst. Benader grafisch deze snelheid.
 - Op welke momenten liep Martin sneller dan het gemiddelde?

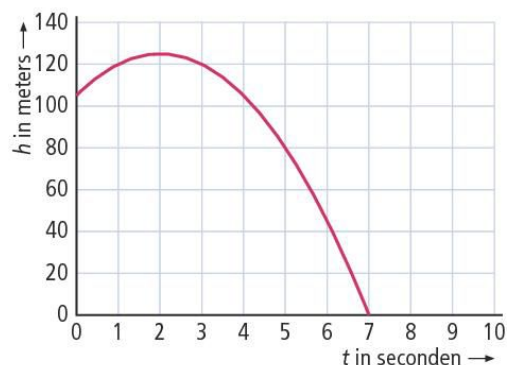


Uitdagende opdrachten

- U7** In plaats van een helling van een grafiek in een punt grafisch te benaderen, kun je dit ook met een berekening doen als de formule bij de grafiek gegeven is. De aanpak is in principe de zelfde als bij de grafische benadering.
- w**
- Benader grafisch de helling van de grafiek in punt P .
 - Bij de grafiek hoort de formule $y = 2\sqrt{x}$. Bereken de coördinaten van punt P en de coördinaten van een punt heel dicht bij punt P .
 - Je kunt een lijn tekenen door de bij opdracht b gekozen punten. Deze lijn is een goede benadering van de helling van de grafiek in punt P . Bereken de richtingscoëfficiënt van deze lijn.
 - Vergelijk de antwoorden van de opdrachten a en c. Komen ze redelijk overeen?
 - Welke methode geeft de grootste nauwkeurigheid en waarom?



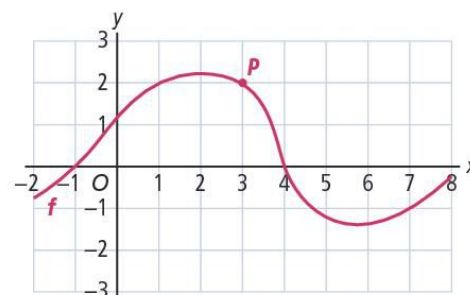
- 27** Een bal wordt van een toren omhoog gegooid en valt daarna naast de toren op de grond. Bij het verband tussen de hoogte h van de bal in meters en de tijd t in seconden hoort de formule $h = -5t^2 + 20t + 105$. In de grafiek kun je zien dat de grootste hoogte van de bal na twee seconden bereikt wordt.



- Op welke hoogte wordt de bal losgelaten?
- Bereken de gemiddelde snelheid van de bal tussen het moment dat hij zijn grootste hoogte bereikt en het moment dat hij op de grond valt.
- Hoe groot is de snelheid van de bal op $t = 2$ en hoe groot is dus de helling van de grafiek op $t = 2$?
- Benader grafisch de snelheid van de bal op tijdstip $t = 4$.
- Benader grafisch de snelheid waarmee de bal op de grond valt.

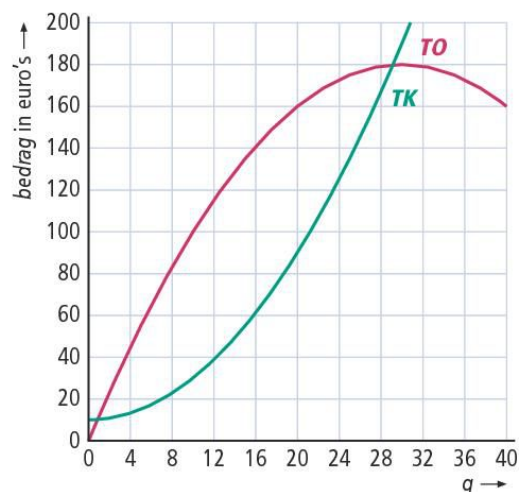
- 28** Van een functie is de gemiddelde toename over het interval $[0, 5]$ gelijk aan 2. Op het interval $[1, 2]$ is de afname gelijk aan 3 en op het interval $[3, 4]$ is de toename gelijk aan 1. Teken een toenamediagram met stapgrootte 1 dat bij deze gegevens past.

- 29**
- Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[0, 3]$.
 - Geef een interval waarop het differentiequotiënt van $f(x)$ gelijk is aan 0.
 - Benader grafisch de helling van de grafiek in punt P .
 - In welk punt van de grafiek is de helling even groot als de helling in het punt $(1, 2)$? Licht je antwoord toe.

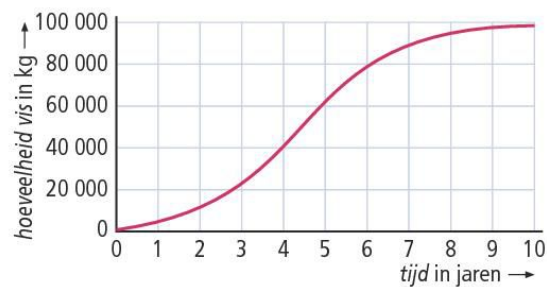


- 30** Een fabrikant produceert horloges. De grafieken van de totale opbrengst TO en de totale kosten TK in euro's bij een productie van q horloges zijn getekend.

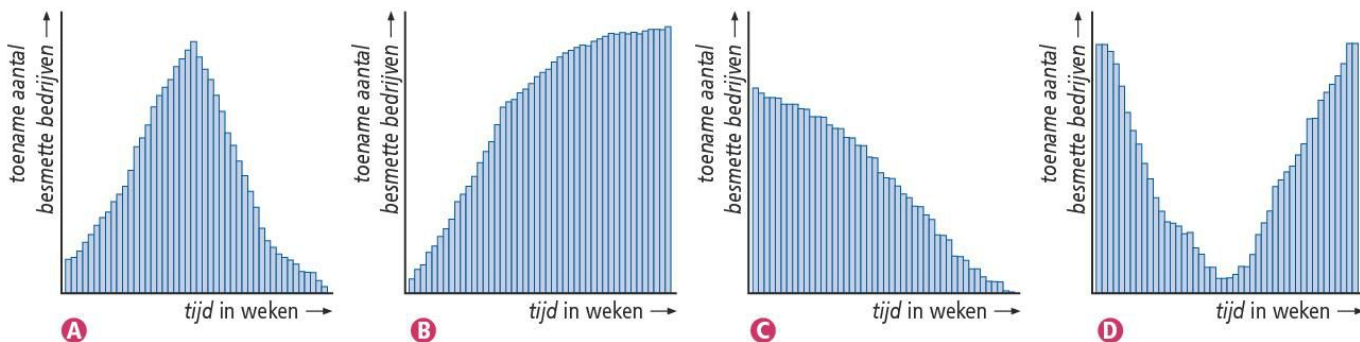
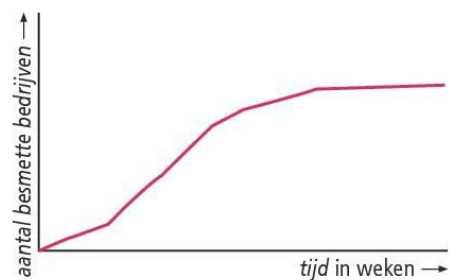
- Lees af hoeveel winst er gemaakt wordt bij een productie van 20 horloges.
- Beschrijf in woorden het verloop van de winst als q toeneemt van 0 tot 40. Gebruik de woorden toenemend/afnemend stijgend/dalend.
- Lees af voor welke waarde van q (ongeveer) de totale kosten en de totale opbrengst even snel stijgen.
- Leg uit dat bij dat aantal horloges de winst maximaal is.



- 31** In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen, zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. De grafiek geeft een model van de groei van de visstand. De viskweker zal een aantal jaren wachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens de grafiek. Welk advies zou je de viskweker geven over:
- A het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten;
 - B de grootte van de jaarlijkse vangst?
- Geef bij dit advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.
(Ontleend aan het examen havo wiskunde A 1996 2e tijdvak)



- 32** In januari 1997 brak in Nederland de varkenspest uit. Op grond van wekelijkse tellingen van het toenmalige ministerie van Landbouw, Natuurbeheer en Visserij is de grafiek gemaakt van het totaal aantal besmette bedrijven sinds het begin van de uitbraak. Het resultaat van de wekelijkse tellingen kun je ook weergegeven met een toenamediagram. In de vier toenamediagrammen zijn de toenamen met staafjes weergegeven. Welke van de vier toenamediagrammen past goed bij de grafiek? Licht je antwoord toe.



(Ontleend aan het examen vwo wiskunde A1 2006, 2e tijdvak)

Samenvatting

Theorie

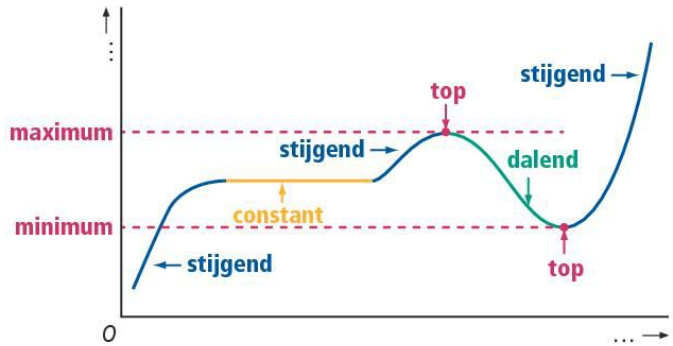
Stijgen, dalen, constant, top, maximum en minimum

Het verloop van een grafiek kan stijgend, dalend of constant zijn.

Een top is een hoogste of laagste punt van de grafiek. Een maximum is een hoogste waarde.

De grafiek gaat dan over van stijgen in dalen.

Een minimum is een laagste waarde. De grafiek gaat dan over van dalen naar stijgen.



S1 Gegeven is de formule $y = -x^3 + 12x - 12$.

- Plot en schets de grafiek.
- Bereken met je rekenmachine de coördinaten van de toppen van de grafiek.
- Bij welke top is er sprake van een minimum? En bij welke top is er sprake van een maximum?
- Tussen welke waarden van x stijgt de grafiek?

Theorie

Gemiddelde verandering, differentiequotiënt en helling

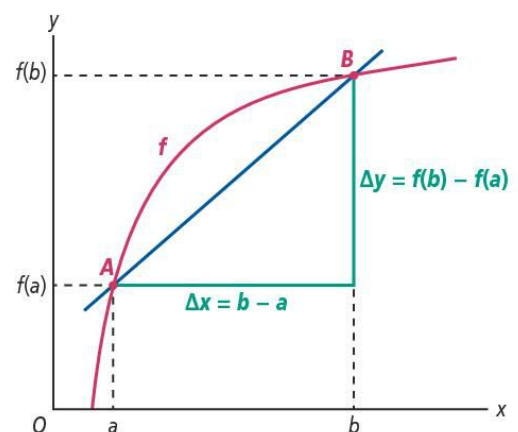
Veranderingen van x en y geef je aan met Δx en Δy .

Met het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ bereken je de

gemiddelde verandering van een functie f over het interval $[a, b]$.

De gemiddelde verandering van $f(x)$ over een interval is ook de richtingscoëfficiënt, ofwel helling, van de lijn door het beginpunt en het eindpunt op dat interval.

In situaties met tijd en afstand is het differentiequotiënt gelijk aan de gemiddelde snelheid.



Voorbeeld

Bereken het differentiequotiënt van de functie $f(x) = x^2 - 5$ over het interval $[-1, 3]$.

Oplossing

$$f(-1) = -4 \text{ en } f(3) = 4$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{4 - (-4)}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

Het differentiequotiënt is 2.

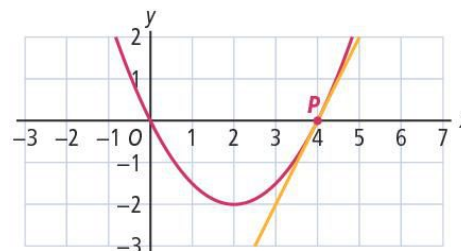
- S2** Bereken het differentiequotiënt van de functie $f(x) = x^2 - 3x - 1$ over het interval $[-1, 7]$.

Theorie

Raaklijn

In de figuur is de richtingscoëfficiënt van lijn l gelijk aan de helling van de grafiek in punt P .

De lijn l heet de raaklijn in punt P aan de grafiek.



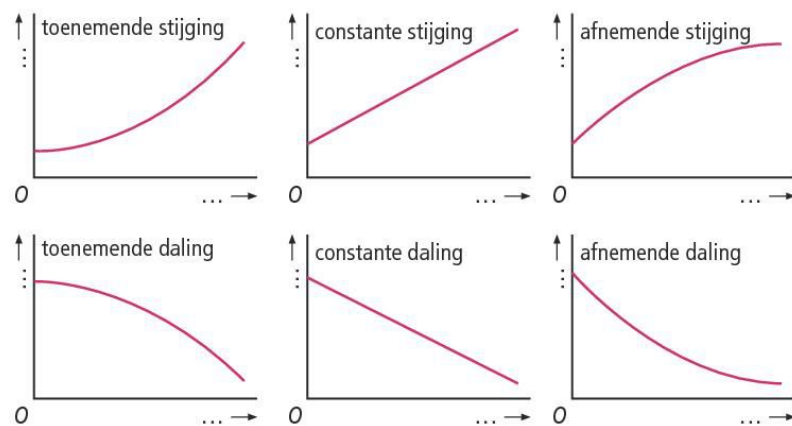
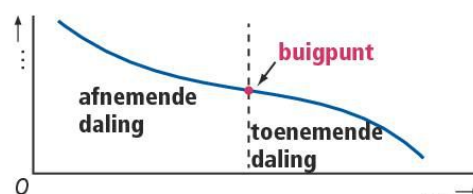
- S3**
- Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in punt P .
 - Hoe groot is de helling van de grafiek in het punt met $x = 4$?

Vaardigheid

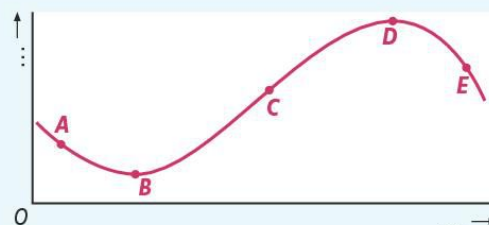
Je kunt in een grafiek verschillende soorten toenames of afnamen herkennen.

Een grafiek kan op verschillende manieren stijgen of dalen. Het punt waarin een grafiek van afnemende daling overgaat in toenemende daling of andersom, heet een buigpunt.

Ook het punt waarin een grafiek overgaat van toenemende stijging naar afnemende stijging of andersom, heet een buigpunt.



- S4**
- Van welke soort stijging of daling is er sprake op het stuk van de grafiek dat tussen punt A en punt B ligt?
 - Van welke soort stijging of daling is er tussen de punten B en C sprake?
 - Welk punt van de grafiek is een buigpunt?



Vaardigheid

Je kunt een toenamediagram gebruiken en tekenen.

In een toenamediagram worden toenames en afnamen zichtbaar gemaakt. Met een staafje geef je de toename of afname over de voorafgaande periode aan. Bij toenames worden de staafjes omhoog getekend, bij afnamen omlaag.

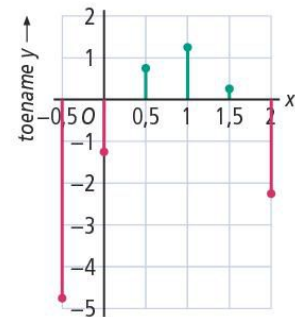
Voorbeeld

Teken het toenamediagram met stapgrootte 0,5 bij de formule $y = 4x^2 - 2x^3$ voor $-0,5 \leq x \leq 2$.

Oplossing

Maak op je rekenmachine een tabel bij deze x -waarden en lees de toenames en afnamen af.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	6	1,25	0	0,75	2	2,25	0
toename van y	-	-4,75	-1,25	0,75	1,25	0,25	-2,25



- S5** Teken het toenamediagram met stapgrootte 1 bij de formule $y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x - 4$ voor $-3 \leq x \leq 3$.

Vaardigheid

Je kunt een differentiequotient over een interval berekenen.

De gemiddelde verandering van een functie f over het

interval $[a, b]$ is gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Voorbeeld 1

Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$.

Bereken de gemiddelde verandering van de functie over het interval $[-1, 1]$.

Oplossing

$$f(-1) = 0,5 \text{ en } f(1) = 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 0,5}{1 - (-1)} = \frac{1,5}{2} = 0,75.$$

De gemiddelde verandering van de functie

$f(x) = 2^x$ over het interval $[-1, 1]$ is 0,75.

Dit is tevens de helling van de lijn door de punten $(-1; 0,5)$ en $(1, 2)$.

Voorbeeld 2

Rik rent 8 km. De afgelegde afstand A in km na t minuten kun je berekenen met de formule

$$A = 0,2t + 0,15\sqrt{t}.$$

Bereken de gemiddelde snelheid van Rik tussen $t = 1$ en $t = 4$.

Oplossing

Bij $t = 1$ geldt $A = 0,2 \times 1 + 0,15 \times \sqrt{1} = 0,35$.

Bij $t = 4$ geldt $A = 0,2 \times 4 + 0,15 \times \sqrt{4} = 1,1$.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1,1 - 0,35}{4 - 1} = \frac{0,75}{3} = 0,25$$

De gemiddelde snelheid is 0,25 km per minuut ofwel 15 km per uur.

- S6** Bo liep een traject van 3 kilometer. Met de functie $s(t) = -2t^2 + 180t$ kun je de afstand s in meters berekenen die zij na t minuten heeft afgelegd.
- Bereken de gemiddelde verandering van de functie over het interval $[15, 20]$.
 - Met hoeveel kilometer per uur heeft Bo gemiddeld gelopen tussen $t = 15$ en $t = 20$?

Vaardigheid

Je kunt grafisch de helling van de grafiek in een punt benaderen.

- Teken in punt P een raaklijn.
- Kies twee punten op de raaklijn waarvan je de coördinaten goed kunt aflezen.
- Bereken de helling van deze raaklijn met behulp van de coördinaten van deze twee punten. De helling van deze raaklijn is een benadering van de helling in punt P van de grafiek.

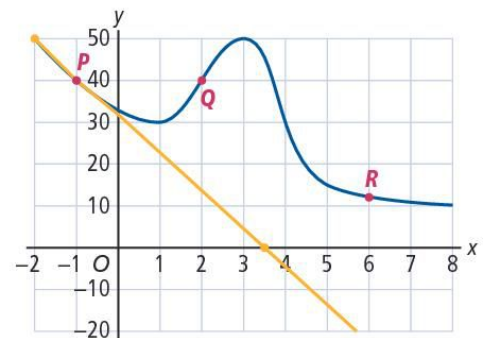
'grafisch' betekent 'met behulp van de grafiek'

Voorbeeld

Benader grafisch de helling van de grafiek in punt P met $x = -1$.

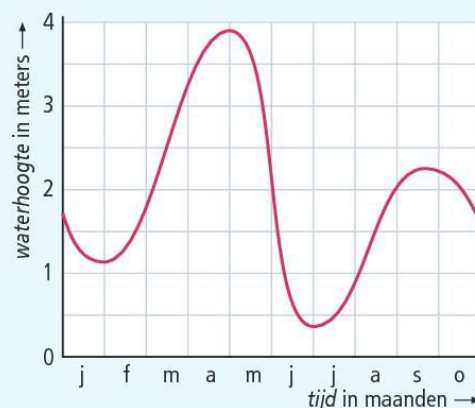
Oplossing

- Teken in punt P een raaklijn.
 - In de grafiek lees je af dat de raaklijn bij benadering door de punten $(-2, 50)$ en $(3,5; 0)$ gaat.
 - De helling van de raaklijn is ongeveer $\frac{0 - 50}{3,5 - -2} = \frac{-50}{5,5} \approx -9,1$.
- De helling van de grafiek in punt P met $x = -1$ is dus ongeveer $-9,1$.



- S7** Kijk nog eens naar de grafiek in het voorbeeld.
- Benader grafisch de helling van de grafiek in punt Q .
 - Benader ook grafisch de helling van de grafiek in punt R .
 - Hoe groot is de helling van de grafiek in het punt $(3, 50)$?

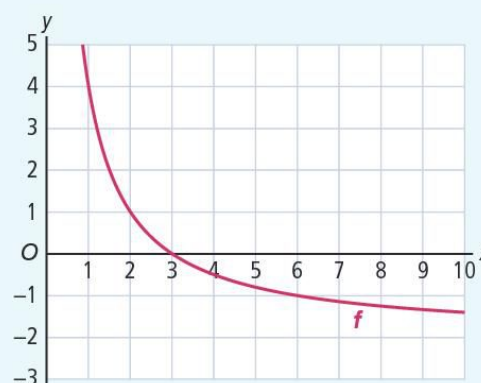
- T1** Gedurende tien maanden is de waterhoogte in een rivier bijgehouden. De resultaten zijn verwerkt in een grafiek.
- In welke perioden was er sprake van een toenemende stijging?
 - Er zijn twee momenten waarop de waterhoogte maximaal was.
Geef de maximale waterhoogten.
 - In welke maanden was er sprake van een afnemende daling?
 - In welke maand daalde de waterhoogte het snelst? Met hoeveel meter?
 - Hoeveel buigpunten heeft deze grafiek?



- T2** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x - 3$.
- Plot en schets de grafiek voor $-1 \leq x \leq 6$.
 - Bereken het differentiequotient van $f(x)$ over het interval $[-1, 2]$.
 - Leg uit waarom het differentiequotient van $f(x)$ over het interval $[0, 4]$ gelijk aan 0 is.
 - Geef de coördinaten van het punt waarin de helling van de grafiek gelijk aan 0 is.
 - De helling van de grafiek in het punt $(1, -6)$ is gelijk aan -2 .
Geef de coördinaten van het punt van de grafiek waar de helling van de grafiek gelijk aan 2 is.
 - Teken het toenamediaagram met stapgrootte 1 bij de functie voor $-1 \leq x \leq 6$.

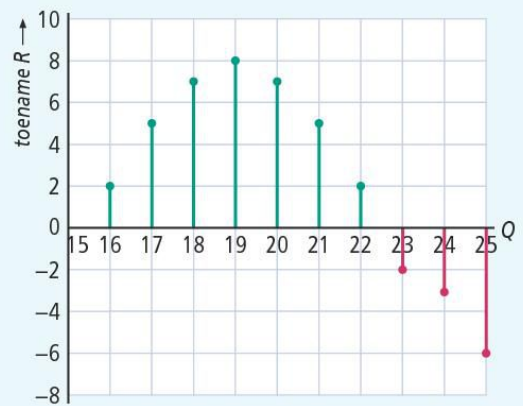
T3 De grafiek hoort bij de functie f .

- w**
- Wat voor een soort daling hoort bij deze grafiek?
 - Bereken het differentiequotient van $f(x)$ over het interval $[1, 6]$.
 - Benader grafisch de helling van de grafiek in het punt met $x = 1$.
 - Benader ook grafisch de helling van de grafiek in het punt $(6, -1)$.
 - Onderzoek grafisch in welk punt van de grafiek de helling gelijk is aan $-1\frac{1}{2}$.



T4 De winst R in duizenden euro's van een fabriek hangt af van het aantal ingezette machines Q . Er staan 15 machines in de fabriek. Alle 15 machines in de fabriek zijn in gebruik. De fabrikant overweegt nog meer machines aan te schaffen. Het toenamediaagram geeft informatie over de winst bij Q machines.

- Hoeveel machines adviseer jij de fabrikant om nog extra aan te schaffen? Licht je antwoord toe.
- De winst bij 15 machines is € 115.000,-. Bereken de maximale winst die de fabrikant kan maken na het aanschaffen van de extra machines van opdracht a.



T5 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{-36}{x-2} + 1$.

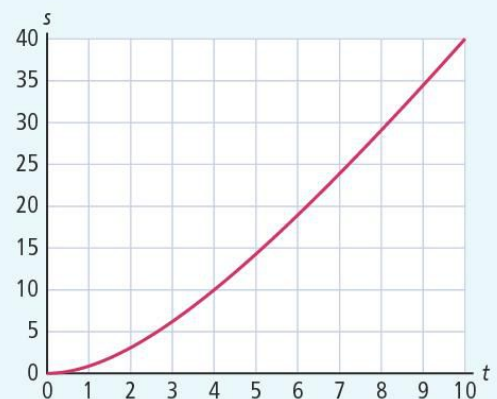
- Waarom zie je dat de grafiek van f geen buigpunten heeft?
- Bereken het differentiequotiënt over het interval $[-2, 0]$.
- Op de grafiek van f ligt het punt $P(3, -35)$. Het differentiequotiënt van $f(x)$ over het interval $[3, a]$ is gelijk aan 2. Bereken a .

T6 Jur rijdt weg op de fiets. De afgelegde afstand s in meters na

W t seconden wordt beschreven door de formule $s = \frac{20t^2}{3t + 20}$

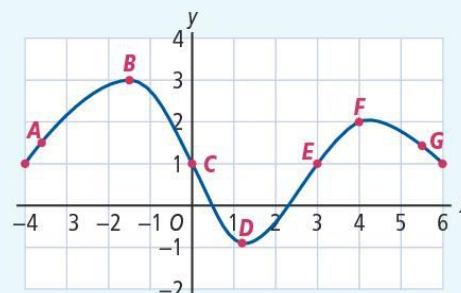
Je ziet de grafiek voor de eerste 10 seconden bij deze formule.

- Bereken de gemiddelde snelheid van Jur gedurende de eerste 4 seconden van zijn rit.
- Benader grafisch zijn snelheid na precies 4 seconden.
- Bereken met behulp van de formule hoeveel meter hij na 10 seconden heeft afgelegd.
- Na 10 seconden fietst hij door met de snelheid die hij op dat moment heeft. Bereken hoeveel meter hij na 60 seconden heeft afgelegd.
- Onderzoek of de snelheid van Jur na 8 seconden hoger of lager is dan de gemiddelde snelheid over het interval $[0, 10]$.



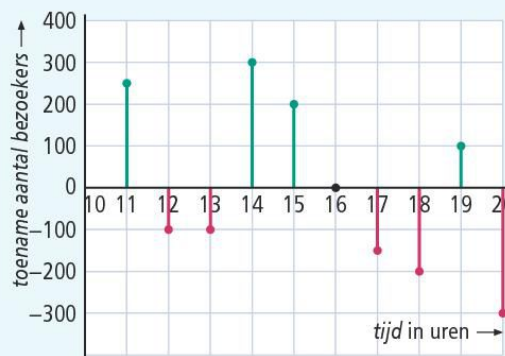
Je kunt in een grafiek verschillende soorten toenames of afnamen herkennen.

- E1**
- Geef bij elk van de delen van de grafiek aan van welke soort stijgen of dalen er sprake is.
 - In welke punten van de grafiek is er sprake van een maximum?
 - Welke punten zijn buigpunten van de grafiek?



Je kunt een toenamediagram gebruiken en tekenen.

- E2**
- Gegeven is het toenamediagram van het aantal bezoekers in een museum. Om 10.00 uur ging het museum open en om 20.00 uur ging het museum weer dicht. Op de horizontale as staat de tijd in uren.
- Met hoeveel nam het aantal bezoekers tussen 13.00 uur en 14.00 uur toe?
 - Hoe laat, ongeveer, was het aantal bezoekers in het museum maximaal?
 - Om 13.00 uur waren er 50 mensen in het museum. Teken de grafiek van het aantal mensen in het museum tussen 10.00 uur en 20.00 uur.

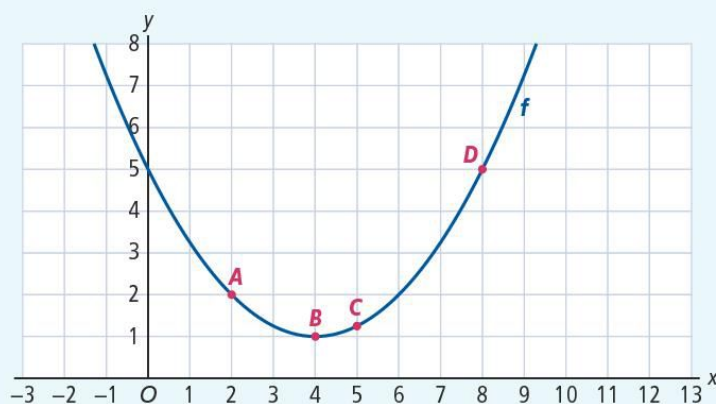


Je kunt een differentiequotiënt over een interval berekenen.

- E3**
- Een steen wordt met een katapult recht omhoog geschoten. De hoogte van de steen h in meters na t seconden kun je berekenen met de formule $h = 45t - 5t^2$. Bereken de gemiddelde snelheid van de steen over de intervallen $[0; 2]$, $[3; 4]$ en $[4; 5; 9]$.

Je kunt grafisch de helling van de grafiek in een punt benaderen.

- E4**
- Gegeven is de grafiek van een functie f .
- Benader grafisch de helling van de grafiek in punt A .
 - Benader grafisch de helling van de grafiek in de punten B , C en D .



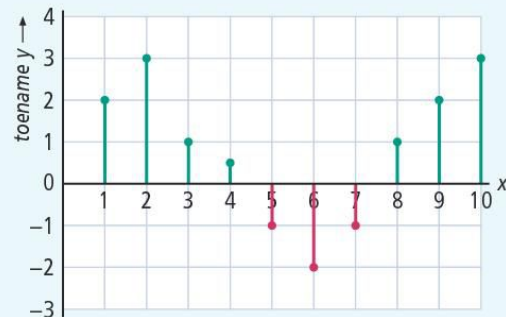
E5 Mevrouw Achterhuis heeft een rit gemaakt op de snelweg. Haar tijd-afstand grafiek wordt beschreven door de formule $s = -0,03t^3 + 0,45t^2$. Hierin is s de afstand in kilometers en t de tijd in minuten. De rit duurde 10 minuten.

W

- Bereken met behulp van de formule hoeveel kilometer mevrouw Achterberg na 10 minuten heeft afgelegd.
- Bereken haar gemiddelde snelheid in kilometer per uur tijdens de rit.
- Beschrijf het verloop van de snelheid gedurende de rit.
- Onderzoek op welk moment haar snelheid het grootst was en benader grafisch haar snelheid in kilometer per uur op dat moment.
- Bepaal met behulp van de grafiek op welke momenten ze met een snelheid reed die gelijk is aan de gemiddelde snelheid van de gehele rit. Licht je antwoord toe.
- Meneer Bouma reed hetzelfde traject in dezelfde tijd met een constante snelheid. Geef een formule voor de afstand s in kilometers die meneer Bouma heeft afgelegd, uitgedrukt in de tijd t in minuten.



- E6** Het toenamediagram hoort bij een functie f . Van deze functie f is gegeven dat $f(2) = 6$.
- Bereken $f(5)$ en $f(0)$. Licht je werkwijze toe.
 - In welke periode is er sprake van een afnemende daling?
 - De grafiek van f heeft twee toppen. Leg uit hoe je dit aan het toenamediagram kunt zien.
 - Leg uit hoe je aan het toenamediagram kunt zien dat de grafiek van f twee buigpunten heeft.
 - Schets een mogelijke grafiek van f .



- E7** De winst die een bedrijf per maand maakt, hangt onder andere af van het gehanteerde uurtarief. Voor het verband tussen de maandwinst W in euro's en het uurtarief u in euro's geldt de formule $W = -0,1u^3 + 7,5u^2$.
- Bereken de maandwinst bij een uurtarief van € 35,-.
 - Plot en schets de grafiek bij de formule op het interval $[0, 80]$.
 - Bij welke waarde van u is de winst maximaal?
 - Beschrijf het verloop van de grafiek. Gebruik de woorden toenemend/afnemend stijgend/dalend.
 - Hoe zie je aan de plot dat de grafiek een buigpunt heeft?
 - Het buigpunt ligt bij het uurtarief van € 25,-. Welke betekenis heeft dit buigpunt voor het bedrijf?

Malthus

Thomas Robert Malthus (1766-1834) was een Brits geestelijke die zich veel bezighield met economische vraagstukken. Hij is bekend geworden om zijn pessimistische maar zeer invloedrijke meningen. In 1798 publiceerde hij 'An Essay on the Principle of Population', waarin hij aannam dat de totale bevolking exponentieel groeit, terwijl de middelen van bestaan lineair toenemen. Daardoor zou er uiteindelijk steeds minder voedsel per persoon beschikbaar zijn.

Na 1750 was de bevolking in Engeland sterk gaan groeien doordat er als gevolg van verbeterde hygiëne minder epidemieën optraden. Malthus liet zien dat de bevolking sinds 1750 elke 25 jaar verdubbelde.

In 1800 waren er ongeveer 1 miljard mensen op aarde. Neem aan dat er toen voldoende voedsel was.

Dreigt er een hongersnood als de bevolking steeds verdubbelt en de hoeveelheid voedsel lineair groeit?

Getekend zijn de grafieken van $b(t) = 2^t$ en $v(t) = 1 + 1,5t$, waarbij b de omvang van de bevolking beschrijft, v het aantal mensen waarvoor het beschikbare voedsel toereikend is en t de tijd in perioden van 25 jaar.



Opdracht

Hoelang was er (ruim) voldoende voedsel?

- Onderzoek of elke functie $v(t) = 1 + at$ met $a > 1$ een beperkte tijd van voldoende voedsel geeft en daarna voedselschaarste.
- De wereldbevolking groeide in werkelijkheid volgens onderstaande gegevens.

jaartal	1750	1800	1850	1900	1950	2000
wereldbevolking	791	978	1262	1650	2521	6000

Onderzoek of de werkelijke groei nagenoeg volgens een exponentiële functie verloopt.

Zo ja, met welke groeifactor?

Zo nee, is er een periode waarin de groei wel ongeveer exponentieel is?

